

Zeitstetige Gleichgewichtsmodelle zum Insiderhandel

Masterarbeit

eingereicht bei

PD Dr. Volkert Paulsen

Institut für mathematische Statistik



von

Jan Voelzke

Matrikel-Nr. 349335

Münster, den 30. September 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der stochastischen dynamischen Optimierung	3
2.1 Grundlegendes der stochastischen Analysis	3
2.2 Brownsche Bewegung und partielle Differentialgleichungen	11
2.3 Erwartungsnutzentheorie	17
2.4 Portfolio-Optimierung	22
3 Das Modell im Gleichgewicht bei perfekter Insider-Information	28
3.1 Das Marktmodell im Gleichgewicht unter restriktiven Annahmen . . .	29
3.2 Erweiterung der möglichen Preisfunktionen	51
3.3 Berücksichtigung von Risikoaversion des Insiders	58
4 Imperfekte dynamische Informationen	65
4.1 Das Marktmodell im Gleichgewicht, mit risikoneutralem Insider, bei gedächtnisloser Preisfunktion	67
4.2 Erweiterung der möglichen Preisfunktionen	76
5 Fazit	83
A Beweis von Lemma 2.1.9	87
B Berechnung des Erwartungsnutzen in Beispiel 2.3.2	90
C Ableitungen von (3.48)	91
D Herleitung von $\lambda^*(1)$	93

E	R-Code zu Abbildung 2 und 3	94
F	Ehrenwörtliche Erklärung und Einverständniserklärung	96

Abbildungsverzeichnis

1	Exponentielle Nutzenfunktion mit $\gamma = 1$	17
2	Simulierte Trajektorien der Nachfrage	47
3	Simulierte Trajektorie der Preisfunktion	48

1 Einleitung

Insiderhandel ist nach dem deutschen Wertpapierhandelsgesetz verboten,¹ dennoch kommt es immer wieder zu Fällen in denen Insiderhandel aufgedeckt wird. Mitarbeiter oder unternehmensnahe Personen nutzen ihren Informationsvorsprung um damit Geld zu machen. Eine unlautere Bevorteilung ist anschaulich gegeben.

Die wissenschaftliche Erklärung des Insiderhandels kann aber nicht nur auf einen anschaulichen abstrakten Vorteil des Insiders durch seinen Informationsvorsprung verweisen, sondern sollte den Sachverhalt in einer theoretischen Untersuchung zu verstehen versuchen. Diesem Anspruch folgt die vorliegende Arbeit. Dabei wird zur Modellierung ein zeitstetiges Gleichgewichtsmodell genutzt. Zur Vereinfachung existieren in diesem Modell nur ein Insider mit Informationsvorsprung, ein Noisetrader, welcher die zufälligen Handelsbewegungen vieler Einzelinvestoren abbildet und ein Marketmaker, welcher die Preise festlegt und dafür sorgt, dass die Nachfrage bedient wird. Untersuchungsgegenstand ist nun die Gleichgewichtssituation, in der der Marketmaker einen rationalen Preis festlegt und der Insider im Sinne einer stochastisch dynamischen Optimierung optimal handelt.

Die Modellierung und theoretische Untersuchung von Insiderhandel hat eine lange Geschichte in den Wirtschaftswissenschaften. Hier sei z.B. auf [Man66] verwiesen, der vor knapp einem halben Jahrhundert die Mechanismen eines Marktes mit Insider durch eine mathematische Modellierung beschreibt oder [Gro76], welcher die Effekte von unterschiedlich informierten Händlern auf Aktienpreise modelliert.

Das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Marktmodell baut auf dem noch zeitdiskretem Modell von [Kyl85] auf, welches die Situation als dynamisch stochastisches Optimierungsproblem betrachtet und die drei Akteure ähnlich wie in der vorliegenden Arbeit modelliert. Eine zeitstetige Erweiterung von [Kyl85] bildet [Bac92] und ist Grundlage des Unterkapitels 3.1. Weiterentwicklungen dieser Idee bilden die Arbeiten von [Cho03] und [Dan10], die jeweils die Ergebnisse von [Bac92] abbilden können und diese um weitere Aspekte bereichern.

Ziel der Arbeit ist es die wesentlichen Ergebnisse der zeitstetigen Modellierung von Insiderhandel in Hinblick auf die drei genannten Arbeiten strukturiert und formal

¹Vgl. Abschnitt 3 des Wertpapierhandelsgesetzes in der Fassung der Bekanntmachung vom 9. September 1998 (BGBl. I S. 2708), das durch Artikel 1 des Gesetzes vom 15. Juli 2013 (BGBl. I S. 2390) geändert worden ist.

korrekt darzustellen. Hierzu soll zunächst in Kapitel zwei in die Grundlagen der stochastischen dynamischen Optimierung eingeführt werden und somit das Werkzeug für die folgenden Kapitel bereitgestellt werden. Anschließend werden in Kapitel drei für die Klasse der Modelle mit perfekter Information und in Kapitel vier für die Klasse mit imperfekter dynamischer Information des Insiders die Eigenschaften des Marktmodells im Gleichgewicht und Implikationen für den Preisprozess und die Handelsstrategie des Insiders untersucht. Abschließend wird in Kapitel sechs ein Fazit über die Ergebnisse gezogen.

2 Grundlagen der stochastischen dynamischen Optimierung

Im Folgenden sind wichtige Begriffe und Sätze der zeitstetigen Finanzmathematik für einen schnellen Zugriff zusammengefasst. Alle auftauchenden Zufallsvariablen seien dabei auf einem geeigneten filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{W} = (\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ mit $T > 0$ betrachtet.² Auf die Beweise der Sätze werden gegebenenfalls Literaturverweise angeführt oder sie werden auf den Anhang verschoben. In der gesamten Arbeit wird ein Wissensstand vorausgesetzt, der nach typischen Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie 1 und 2 sowie einer Finanzmathematikvorlesung zu zeitstetigen Modellen erreicht sein sollte. In den drei anschließenden Unterkapiteln werden die technischen Grundlagen für spätere Kapitel, in denen die eigentlichen Modelle vorgestellt werden, geschaffen, um die Kapitel zur Modellierung schlank zu halten. Die fundamentalen Wirkungszusammenhänge, die die Ergebnisse in den folgenden Kapiteln ermöglichen, sind dabei die von der Brownschen Bewegung erfüllte Wärmeleitungsgleichung mitsamt ihren Implikationen, sowie das von der Erwartungsnutzentheorie motivierte stochastisch dynamische Optimierungskalkül, welches mit Hilfe des Bellman-Prinzips unter gewissen Regularitätsbedingungen gelöst werden kann.

2.1 Grundlegendes der stochastischen Analysis

Die meisten in dieser Arbeit vorkommenden stochastischen Prozesse sind sogenannte *Semimartingale*. Dieser grundlegendste Begriff der Arbeit soll den Inhalt der ersten Definition darstellen.

²Dieser sei soweit benötigt der gesamten Arbeit zugrunde gelegt.

Definition 2.1.1. (*Semimartingale*):³

Ein *cadlag*⁴-Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ heißt SEMIMARTINGAL, wenn er sich wie folgt darstellen lässt

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

wobei X_0 eine $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsgröße, $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein lokales Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $M_0 = 0$ und $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ -adaptierter Prozess von beschränkter Variation ist.

Auf die Einführung des stochastischen Integralprozesses für Semimartingale wird hier verzichtet und im Zweifel auf [JYC09] Kapitel 9 bzw. S. 524 ff. verwiesen. Übernommen aus diesem, soll dennoch wegen seiner herausragenden Stellung der Satz von Itô angegeben werden:

Satz 2.1.2. (*Itô-Formel*):

Gegeben sei ein Semimartingal $(X_t)_{0 \leq t \leq T} = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})_{0 \leq t \leq T}$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Bezeichne $X^{(i),c}$ den stetigen Martingalanteil und $[X^{(i)}]_t = \langle X^{(i)} \rangle_t + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s^{(i)})$ die quadratische Variation von $(X^{(i)})_{0 \leq t \leq T}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(X_t) = & f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_{s-}) dX_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} f(X_{s-}) d\langle X^{(i),c}, X^{(j),c} \rangle_s \\ & + \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^d \partial_i f(X_{s-}) \Delta X_s^{(i)}] \end{aligned}$$

Bei Angabe einer stochastischen Differentialgleichung ist häufig nicht direkt zu erkennen, ob eine eindeutige Lösung existiert und wie diese aussieht. Für bestimmte stochastische Differentialgleichungen kann man allerdings die Lösung angeben. Im folgenden Satz sollen in der Klasse der *stochastischen Differentialgleichungen mit linearem Einfluss des Prozesses* einige solcher zusammengefasst und gelöst werden.⁵

Satz 2.1.3. (*Lösung stochastischer Differentialgleichungen bei denen der Prozess linear eingeht*):

³Vgl. [JYC09] S. 522.

⁴Ein Prozess heißt *cadlag*, wenn er rechtsstetig ist und einen linksseitigen Limes besitzt.

⁵Vgl. [KS87] S. 354.

Gegeben sei ein r -dimensionaler Wiener Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$, eine davon unabhängige $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsgröße ν , messbare, beschränkte Matrizen $A(t), a(t), \sigma(t)$ der Dimensionen $(d \times d), (d \times 1)$ bzw. $(d \times r)$ und $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein d -dimensionaler stochastischer Prozess, beschrieben durch die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sigma(t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

mit Anfangsbedingung

$$X_0 = \nu. \quad (2.2)$$

Dann ist die eindeutige Lösung gegeben durch:⁶

$$X_t = \Phi(t)\left(X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

dabei ist Φ durch folgende Differentialgleichung gegeben:⁷

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I_d$$

Die meisten in dieser Arbeit vorkommenden stochastischen Differentialgleichungen lassen sich auf diese Klasse zurückführen. In der Regel wird dabei $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ von der Dimension zwei sein. Eine in der Arbeit häufiger auftretende Frage ist, wie sich der Prozess für einen Beobachter verhält, der nur eingeschränkte Informationen hat. Übertragen auf einen zweidimensionalen stochastischen Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T} = \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix}_{0 \leq t \leq T}$ könnte man fragen, welches Bild sich im Sinne des bedingten Erwartungswertes von $X_t^{(2)}$ ergibt, wenn $\sigma((X_s^{(1)})_{0 \leq s \leq t})$ als Information zur Verfügung steht. Aufschluss darüber gibt folgendes Theorem aus dem Bereich der optimalen linearen Filter nach der Kalman-Bucy Methode.⁸

Theorem 2.1.4. :

Sei die Situation von Satz 2.1.3 mit $d=r=2$ gegeben. Seien $A(t), a(t)$ und $\sigma(t)$ qua-

⁶Die Lösung und Eindeutigkeit ist dabei in Form der starken Version zu verstehen. Vgl. hierzu [KS87] Kapitel 5.2.

⁷Dabei bezeichnet I_d die d -dimensionale Einheitsmatrix.

⁸Dies entspricht Theorem 10.3 aus [LŠ01].

dratisch integrierbar und es gelten $\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{12}^2(t) > 0$ für alle $0 \leq t \leq T$. Dann gilt für $P(t) := E[X_t^{(2)} | (X_s^{(1)})_{0 \leq s \leq t}]$:

$$\begin{aligned} dP(t) = & (a_2(t) + A_{22}(t)P_t + A_{21}X_t^{(1)})dt \\ & + \frac{\sigma_{21}(t)\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t)\sigma_{12}(t) + \gamma(t)A_{12}(t)}{\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{12}^2(t)} dX_t^{(1)} \\ & - \frac{\sigma_{21}(t)\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t)\sigma_{12}(t) + \gamma(t)A_{12}(t)}{\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{12}^2(t)} (a_1(t) + A_{12}(t)P_t + A_{11}(t)X_t^{(1)})dt, \end{aligned}$$

wobei $\gamma(t)$ Lösung von folgender Differentialgleichung ist:

$$\gamma'(t) = 2A_{22}(t)\gamma(t) + \sigma_{21}^2(t) + \sigma_{22}^2(t) - \frac{\sigma_{21}(t)\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t)\sigma_{12}(t) + \gamma(t)A_{12}(t)}{\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{12}^2(t)}$$

Nachdem die Lösungen nun bekannt sind, sollen im Folgenden einige Bausteine der vorkommenden stochastischen Prozesse genauer betrachtet werden und wichtige Eigenschaften im nächsten Unterkapitel aufgezeigt werden.

In der Literatur werden die Begriffe *Wiener Prozess* und *Brownsche Bewegung* häufig synonym verwendet. Um eine kompakte Sprache zu ermöglichen, werden in dieser Arbeit Brownsche Bewegungen als skalare Vielfache von Wiener Prozessen verstanden.

Definition 2.1.5. (*Brownsche Bewegung*):

Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ heißt BROWNSCHE BEWEGUNG, falls ein $\sigma \in \mathbb{R}$ und ein Wiener-Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ existiert, so dass $B_t = \sigma W_t$ für $0 \leq t \leq T$ gilt.

Ein mit der Brownschen Bewegung eng verwandter Prozess ist die *Brownsche Brücke*. Bei diesem Prozess ist der Endpunkt des Prozesses bereits bekannt und die Verteilungsfunktion entspricht der einer Brownschen Bewegung bedingt auf die Information, dass der Prozess an einem gegebenen Punkt endet. Die Brownsche Brücke ist ein Gauß-Prozess und kann als solcher über seine Erwartungswert- und Kovarianzfunktion charakterisiert werden.⁹

Definition 2.1.6. (*Brownsche Brücke*):

Gegeben seien zwei reelle Zahlen $b \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Dann heißt ein Gauß-Prozess $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$E(B_t) = \frac{bt}{T} \text{ und}$$

⁹Vgl. [JYC09] S. 15.

$$E(B_t B_s) - \frac{b^2 ts}{T^2} = \frac{s(T-t)\sigma^2}{T},$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$, BROWNSCHE BRÜCKE.

Brownsche Brücken lassen sich auch über ihre stochastische Differentialgleichung charakterisieren.

Lemma 2.1.7. :

Ein stochastischer Prozess $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist genau dann eine Brownsche Brücke, wenn er die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{T - t} dt + \sigma dW_t \text{ und } Y_0 = 0, \quad (2.3)$$

wobei b und σ geeignete Konstanten und $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Wiener Prozess sind.

Beweis:

Der Beweis hat folgende Struktur:¹⁰

Zunächst soll mit Satz 2.1.3 die Lösung von (2.3) in Integralform angegeben werden.

Aus dieser werden dann die Erwartungswert- und Kovarianzfunktion berechnet, welche den Prozess als Brownsche Brücke identifizieren.

Mit der Notation $A(t) := -\frac{1}{T-t}$, $a(t) = \frac{b}{T-t}$ und $\sigma(t) \equiv \sigma$ ergibt die Anwendung von Satz 2.1.3, dass $\Phi(t) = \frac{t-T}{T}$ ist¹¹ und damit ergibt sich als eindeutige Lösung von (2.3):

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{t-T}{T} \left(\int_0^t \frac{T}{s-T} \frac{b}{T-s} ds + \int_0^t \frac{T\sigma}{s-T} dW_s \right), \quad 0 \leq t \leq T \\ &= \frac{t-T}{T} \int_0^t \frac{-bT}{(T-s)^2} ds + (T-t) \int_0^t \frac{\sigma}{T-s} dW_s, \quad 0 \leq t \leq T \\ &= (t-T) \left(\frac{-b}{T-t} - \frac{-b}{T-0} \right) + (T-t) \int_0^t \frac{\sigma}{T-s} dW_s, \quad 0 \leq t \leq T \\ &= \frac{bt}{T} + \underbrace{\sigma(T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dW_s}_{:=M_t}, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹⁰Vgl. [KS87] S. 358 f..

¹¹Dann gilt $\Phi'(t) = \frac{1}{T} = -\frac{1}{T-t} \frac{t-T}{T} = -\frac{1}{T-t} \Phi(t)$ und $\Phi(0) = 1$.

Nach [KS87] Lemma 5.6.9 handelt es sich bei $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ um einen Gauß-Prozess mit dem Erwartungswert null und Kovarianzfunktion

$$E(M_t M_s) = \frac{s(T-t)}{T},$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$.

Für den Erwartungswert von Y_t ergibt sich damit

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \frac{bt}{T} + \sigma E(M_t) \\ &= \frac{bt}{T}, \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq T$ und für die Kovarianz

$$\begin{aligned} E(Y_t Y_s) &= E\left(\frac{b^2 ts}{T^2} + \frac{bt}{T^2}(T-s) \int_0^s \frac{\sigma}{T-u} dW_u + \frac{bs}{T^2}(T-t) \int_0^t \frac{\sigma}{T-u} dW_u \right. \\ &\quad \left. + (T-s)(T-t) \int_0^s \frac{\sigma}{T-u} dW_u \int_0^t \frac{\sigma}{T-u} dW_u\right) \\ &= \frac{b^2 ts}{T^2} + E(\sigma^2 M_t M_s) \\ &= \frac{b^2 ts}{T^2} + \frac{\sigma^2 s(T-t)}{T}, \end{aligned}$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$. □

Aus einer Brownschen Brücke lässt sich mit Hilfe einer normalverteilten Zufallsgröße ein Wiener-Prozess zurückgewinnen.

Korollar 2.1.8. :

Gegeben seien ein Wiener Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ und eine davon unabhängige standard-normalverteilte $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsgröße ν . Dann ist der durch

$$dY_t = \frac{\sigma(\sqrt{T})\nu - Y_t}{T-t} dt + \sigma dW_t \text{ und } Y_0 = 0 \quad (2.5)$$

definierte Prozess eine Brownsche Bewegung bezüglich der von $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ erzeugten σ -Algebra.

Beweis:

Für festes ν erhält man analog zum Beweis des letzten Lemmas

$$Y_t = \frac{\sigma\sqrt{T}\nu t}{T} + \underbrace{\sigma(T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dW_s}_{:=M_t}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.6)$$

als Lösung von (2.5). Somit erfüllt (2.6) auch (2.5) für $\mathcal{F}_0$ -messbares ν . Da ν normalverteilt ist, liegt wieder ein Gauß-Prozess vor. Ferner ist $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ weiterhin ein Gauß-Prozess mit dem Erwartungswert null und Kovarianzfunktion $E(M_t M_s) = \frac{s(T-t)}{T}$ für $0 \leq s \leq t \leq T$.

Der Erwartungswert von Y_t ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E\left(\frac{\sigma\sqrt{T}\nu t}{T}\right) \\ &= \frac{\sigma\sqrt{T}E(\nu)t}{T} = 0, \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq T$ und die Kovarianz zu

$$\begin{aligned} E(Y_t Y_s) &= E\left(\frac{(\sigma\sqrt{T}\nu)^2 ts}{T^2} + \overbrace{\frac{\sigma\sqrt{T}\nu t}{T^2}(T-s) \int_0^s \frac{\sigma}{T-u} dW_u + \frac{\sigma\sqrt{T}\nu s}{T^2}(T-t) \int_0^t \frac{\sigma}{T-u} dW_u}^{E(\cdot)=0}\right. \\ &\quad \left.+ (T-s)(T-t) \int_0^s \frac{\sigma}{T-u} dW_u \int_0^t \frac{\sigma}{T-u} dW_u\right) \\ &= \frac{(\sigma\sqrt{T})^2 \overbrace{E(\nu^2)}^{=1} st}{T^2} + E(\sigma^2 M_t M_s) \\ &= \frac{\sigma^2 st}{T} + \frac{\sigma^2 s(T-t)}{T} \\ &= \frac{\sigma^2 st + \sigma^2 sT - \sigma^2 st}{T} \\ &= \sigma^2 s, \end{aligned}$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$. Es handelt sich somit um eine Brownsche Bewegung. $\square$

Brownsche Bewegungen sind somit nicht immer auf den ersten Blick zu erkennen.

Folgendes Lemma verdeutlicht dies, indem es eine Brownsche Bewegung beschreibt, welche sich aus mehreren Prozessen zusammensetzt.¹²

Lemma 2.1.9. (*Zusammengesetzte Brownsche Bewegung*):

Gegeben seien zwei unabhängige Wiener-Prozesse $(W_t^{(1)})_{0 \leq t \leq 1}$, $(W_t^{(2)})_{0 \leq t \leq 1}$ und eine von diesen unabhängige $\mathcal{F}_0$ -messbare normalverteilte Zufallsgröße ν mit Erwartungswert null und Varianz σ^2 . Gelte für den Prozess $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ mit $Y_0 = 0$ folgende stochastische Differentialgleichung

$$dY_s = \frac{V_s - Y_s}{\int_0^s \sigma_V(u) du - s + \sigma^2} ds + dW_s^{(1)}$$

$$V_t := \nu + \int_0^t \sigma_V(s) dW_s^{(2)}$$

und für die Funktion σ_V gewisse Integrations- und Grenzbedingungen,¹³ dann ist $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Brownsche Bewegung und $Y_1 = V_1$.

Beweis:

Siehe Anhang A. □

¹²Vgl. [Dan10], S. 16 f..

¹³Vgl. Anhang A.

2.2 Brownsche Bewegung und partielle Differentialgleichungen

Es gibt eine Vielzahl an Verknüpfungen zwischen Ergebnissen der Analysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Besonders im Bereich der partiellen Differentialgleichungen lassen sich Ergebnisse aus analytischer wie auch aus stochastischer Sichtweise formulieren und interpretieren. Ein solcher Verknüpfungspunkt wird in der weiteren Arbeit genutzt. Im Folgenden wird die Verbindung zwischen der Brownschen Bewegung und der Wärmeleitungsgleichung hergeleitet und die für die weiteren Kapitel notwendigen Implikationen aufgezeigt. Die in diesem Unterkapitel dargestellten Ergebnisse stammen, falls nicht anders angegeben aus [KS87].

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine wichtige partielle Differentialgleichung, die durch die Beschreibung der Wärmeverteilung in einem langen dünnem Medium über die Zeit und Strecke motiviert ist. Sie ist folgendermaßen definiert.

Definition 2.2.1. (*Wärmeleitungsgleichung*):

Sei $G : C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Man sagt G erfüllt die WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG, wenn folgende partielle Differentialgleichung erfüllt ist:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

Für diese Arbeit ist sie besonders von Interesse, da sie eine enge Verbindung zum Wiener Prozess aufweist, welcher die Quelle des Zufalls in der späteren Modellierung bildet.

Satz 2.2.2. :

Gegeben seien ein Wiener Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ und eine Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $a > 0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} |f(y)| dy < \infty. \quad (2.8)$$

Dann erfüllt $G(t, x) := E(f(W_t + x))$ für $t < \frac{1}{2a}$ die Wärmeleitungsgleichung und ferner gilt für alle Stetigkeitsstellen $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{t \downarrow 0, y \rightarrow x} G(t, y). \quad (2.9)$$

Beweis:

(2.8) sorgt für Integrierbarkeit von $f(W_t + x)$ bezüglich P . Es gilt nun:

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y + x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung soll zunächst unter der Annahme, dass das Vertauschen von Ableitung und Integration erlaubt ist, nachgerechnet werden.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} &\stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}}{\partial t} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \frac{(x-y)^2}{2t^2} \right)}_{=: F(t, x, y)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - \frac{(y-x)}{t} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \right) dy \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial^2 x} \end{aligned}$$

Die Legitimation des Hinein- und Herausziehen der Ableitung an den mit $\star$ gekennzeichneten Stellen ist durch den Satz der majorisierten Konvergenz gegeben:

Seien $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ und $0 < t_0 < t_1 = \frac{1}{2(a+\epsilon)}$. Dann gilt für $(t, x) \in \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : t_0 < t < t_1, |x| < \beta\}$:

$$\begin{aligned} ay^2 - \frac{(x-y)^2}{2t} &\leq ay^2 - \frac{1}{2t_1} (|x| - |y|)^2 \\ &\leq ay^2 - \frac{1}{2t_1} y^2 + \frac{1}{t_1} |x||y| \\ &\leq -\epsilon y^2 + \frac{\beta}{t_1} |y| \\ &\leq -\frac{\epsilon}{2} y^2 + \frac{\beta^2}{2\epsilon t_1^2} \end{aligned}$$

Wobei die letzte Umformung mit der binomischen Formel begründet werden kann.¹⁴

Damit lässt sich $F(t, x, y)$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
 F(t, x, y) &= f(y) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \frac{(x-y)^2}{2t^2} \right) \\
 &\leq |f(y)| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{\frac{3}{2}}}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{(x-y)^2}{2t^2} \right) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \\
 &\leq |f(y)| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{\frac{3}{2}}}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{(x-y)^2}{2t^2} \right) e^{-(a+\epsilon)y^2 + \frac{\beta^2}{2\epsilon t_1^2}} \\
 &< c|f(y)|e^{-ay^2},
 \end{aligned}$$

mit geeigneter Konstante c . Der letzte Ausdruck ist per Voraussetzung integrierbar. Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ist somit auch eine Majorante für die nötigen Differenzenquotienten gefunden und (2.7) gezeigt.

Zum Beweis von (2.9) sei o.B.d.A $f(x) = 0$ für untersuchtes x . Für jedes $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Stetigkeit an der Stelle x ein $\delta > 0$ mit $|f(y)| \leq \epsilon$ für $|y - x| \leq \delta$. Für $\tilde{x} \in [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$ gilt:

$$\begin{aligned}
 |G(t, \tilde{x})| &\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{x-\delta} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-\tilde{x})^2}{2t}} dy}_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0}} + \underbrace{\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-\tilde{x})^2}{2t}} dy}_{\leq \epsilon} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{x+\delta}^{\infty} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-\tilde{x})^2}{2t}} dy}_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0}}
 \end{aligned}$$

Und somit folgt die Behauptung. $\square$

Neben der Wärmeleitungsgleichung ist auch die sogenannte *Rückwärtswärmeleitungsgleichung* von Bedeutung in dieser Arbeit.

Definition 2.2.3. (*Rückwärtswärmeleitungsgleichung*):

Eine Funktion $G(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ erfüllt die

¹⁴Es gilt: $(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}y - \frac{\beta}{\sqrt{2\epsilon t_1}})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2}y^2 - \frac{\beta}{t_1}y + \frac{\beta^2}{2\epsilon t_1^2} \geq 0$.

RÜCKWÄRTSWÄRMELEITUNGSGLEICHUNG, falls die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt ist:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

Satz 2.2.2 lässt sich analog übertragen.

Korollar 2.2.4. :

Gegeben einen Wahrscheinlichkeitsraum und einen zugehörigen Wiener Prozess, sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion und $a, T \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{2T} > a > 0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} |f(x)| dx < \infty. \quad (2.10)$$

Dann erfüllt $G(t, x) = Ef(W_{T-t} + x)$ die Rückwärtswärmeleitungsgleichung für $0 \leq t \leq T$ und ferner gilt für alle Stetigkeitsstellen $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{t \uparrow T, y \rightarrow x} G(t, y)$$

Beweis:

Der erste Teil ergibt sich direkt aus Satz 2.2.2, wenn man $t(s) := T - s$ setzt und die Kettenregel anwendet. Für den zweiten Teil ergibt sich analog:

Sei o.B.d.A. $f(x) = 0$ für untersuchtes x . Für jedes $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Stetigkeit an der Stelle x ein $\delta > 0$ mit $|f(y)| \leq \epsilon$ für $|y - x| \leq \delta$. Für $\tilde{x} \in [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(t, \tilde{x})| &\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{x-\delta} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(y-\tilde{x})^2}{2(T-t)}} dy}_{\substack{t \rightarrow T \\ \rightarrow 0}} + \underbrace{\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(y-\tilde{x})^2}{2(T-t)}} dy}_{\leq \epsilon} \\ &\quad + \underbrace{\int_{x+\delta}^{\infty} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(y-\tilde{x})^2}{2(T-t)}} dy}_{\substack{t \rightarrow T \\ \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

□

Auch für allgemeinere Gauß-Prozesse lässt sich eine partielle Differentialgleichung herleiten. Allgemein ergibt sich:

Satz 2.2.5. (Fokker-Planck Gleichung):

Gegeben sei ein d -dimensionaler Wiener Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ und ein stochastischer Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, der die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$$

, mit $a(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $b(t) : \mathbb{R} \rightarrow M(d \times d, \mathbb{R})$.

Sei ferner $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion, so dass ein $a > 0$ existiert mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|^2} |f(x)| dx_1 \cdot dx_d < \infty.$$

Dann gilt für $G(t, x) = E(f(X_t + x))$ und $t < \frac{1}{2a}$:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i G) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (b_{ij} G)$$

Beweis:

Die Fokker-Planck-Gleichung lässt sich analog zu Satz 2.2.2 beweisen, indem man die entsprechenden Ableitungen der Übergangsdichten bildet. Auf ein konkretes Nachrechnen wird deswegen hier verzichtet und für einen ausführlichen Beweis und Anwendungen der Gleichung in der Physik auf [Ris96] verwiesen. $\square$

Mit diesem Ergebnis lässt sich Korollar 2.2.4 verallgemeinern zu:

Korollar 2.2.6. :

Gegeben seien zwei unabhängige Wiener Prozesse $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ und eine beschränkte Funktion $\sigma(s)$. Sei ferner $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion und $a > 0$ mit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -e^{a(x^2+y^2)} |f(x, y)| dx < \infty \quad (2.11)$$

Dann erfüllt $G(v, t, x) := E(f(W_{T-t} + x, \int_t^T \sigma(s) dB_s + v))$ für $t < \frac{1}{2a}$ die folgende partielle Differentialgleichung:

$$G_t + \frac{1}{2} G_{xx} + \frac{\sigma^2(t)}{2} G_{vv} = 0$$

Beweis:

Direkte Folgerung aus der Fokker-Planck Gleichung. $\square$

Die Funktionen, welche die Rückwärtswärmeleitungsgleichung erfüllen, lassen sich wie folgt charakterisieren:

Satz 2.2.7. *Sei $G(t, x)$ eine nicht-negative Funktion auf $(0, T) \times \mathbb{R}$ mit $0 < T < \infty$. Dann sind äquivalent*

a) $G \in C^{1,2}$ auf $(0, T) \times \mathbb{R}$ und erfüllt

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (2.12)$$

auf $(0, T) \times \mathbb{R}$.

b) Für jede Brownsche Bewegung B_s und ein festes $0 < t < T, x \in \mathbb{R}$ ist der Prozess

$$(G(t + s, B_s))_{0 \leq s < T-t}$$

ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$.

c) Gegeben einer Brownschen Bewegung B_t gilt

$$G(t, x) = E(G(t + s, B_s + x)), \quad (2.13)$$

für $0 < t \leq t + s < T, x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Siehe [KS87] Theorem 4.3.6. $\square$

Bevor die Wärmeleitungsgleichung mit der optimalen Steuerung in Verbindung gebracht wird, soll im nächsten Unterkapitel zunächst das Verhalten des Insiders als Nutzenmaximierer motiviert werden.

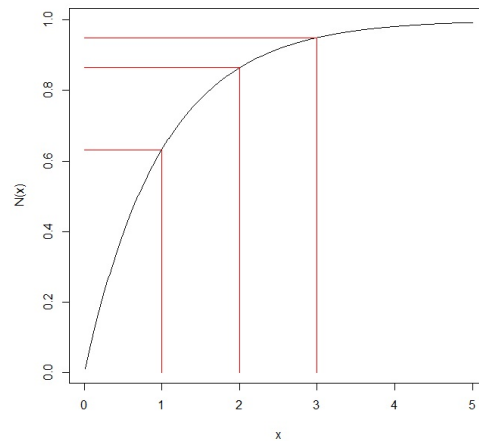


Abbildung 1: Exponentielle Nutzenfunktion mit $\gamma = 1$.

2.3 Erwartungsnutzentheorie

Die vorherigen Unterkapitel hatten das Ziel mathematische Grundlagen zu schaffen um im anschließenden Kapitel ein stochastisch dynamisches Optimierungsproblem zu lösen. In den späteren Modellen soll der Insider seinen sogenannten *Nutzen* maximieren. Bevor Konzepte zur stochastisch dynamischen Optimierung vorgestellt werden, soll in diesem Unterkapitel erklärt werden, was man unter Erwartungsnutzen versteht und warum er im Weiteren benutzt wird.

Aus der Zielsetzung der Erwartungsnutzenmaximierung das Verhalten von Marktteilnehmern abzuleiten, ist in den Wirtschaftswissenschaften seit Mitte des letzten Jahrhunderts sehr populär. Die Erwartungsnutzentheorie steht seit einem Artikel von [VNM44] auf einem axiomatischen Fundament. In ihrer Arbeit konnten [VNM61] zeigen, dass es zu jeder vollständigen und stetigen Präferenzordnung auf einer Menge von unabhängigen Dingen eine zugehörige numerische Nutzenfunktion gibt, mit der sich Entscheidungen an Hand des Erwartungsnutzen erklären lassen.

Ein Vorteil der Erwartungsnutzentheorie ergibt sich somit in dem Übergang von evtl. abstrakten Dingen zu einer numerischen Funktion. In den in dieser Arbeit diskutierten Modellen sind die Marktteilnehmer aber primär monetär getrieben. Somit stellt sich die Frage, warum eine reine Maximierung des Gewinns als Ziel der einzelnen Marktteilnehmer bzw. des Insiders nicht ausreicht. In Kapitel vier wird dieser Ansatz auch zunächst als Vereinfachung gewählt. Bei der Maximierung des

erwarteten Gewinns treten im Wesentlichen zwei Probleme auf. Das Erste lässt sich gut beim Auftreten von unendlichen Erwartungswerten erklären und ist auch unter dem St. Petersburg Paradox bekannt.¹⁵ Danach wäre ein Investor, der streng seinen erwarteten Gewinn maximiert, bereit, jede beliebige Summe für die Teilnahme an einer Lotterie mit unendlichem Erwartungswert zu zahlen. In der Regel wird dieses Verhalten jedoch als unrealistisch angenommen. Desweiteren geht man davon aus, dass die Wertschätzung eines Gewinns abhängig vom momentanen Wohlstand des Individuums ist. Salopp gesagt, die erste Million ist einem Individuum mehr Wert als die zweite und die fünfzig prozentige Chance auf zwei Million Euro weniger als eine sichere Million. Letzteres wird auch mit dem Begriff der *Risikoaversion* beschrieben. Das Konzept der Erwartungsnutzentheorie kann diese Phänomene abbilden.¹⁶ Die Nutzenfunktion ist dabei apriori nicht eingeschränkt, obwohl sich bestimmte Eigenschaften, wie Konvexität als sinnvoll erachten. Formal sei definiert:

Definition 2.3.1. (*Erwartungsnutzen*):

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{W} := (\Omega, \mathcal{A}, P)$, eine messbare Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ und eine messbare (NUTZEN-)Funktion $N : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$E(N(X)) = \int N(x) dP^X$$

ERWARTUNGSNUTZEN von X .

Die Erwartungsnutzentheorie sagt nun einfach, dass jedes Individuum, welches nach diesem Prinzip handelt, bei der Wahl zwischen verschiedenen Zufallsvariablen diejenige wählt, welche den größten Erwartungsnutzen besitzt. Abhängig von der konkreten Nutzenfunktion kann die Wahl einer Zufallsgröße, welche man sich zum Beispiel als Investitionsentscheidung oder Lotterie vorstellen kann, unterschiedlich ausfallen. Wählt man als Nutzenfunktion die Identität und als Zufallsgröße den Gewinn einer Investition entspricht die Erwartungsnutzentheorie dem Entscheidungskalkül des Maximierens des erwarteten Gewinns. Im Folgenden sollen Beispiele einiger gängiger Nutzenfunktionsklassen vorgestellt werden.

¹⁵Daniel Bernoulli diskutierte diese Problematik schon 1738, vgl. [Ber68].

¹⁶Vgl. hierzu Abbildung 1. Die Erhöhung von x von 1 auf 2 erhöht den Nutzen deutlich stärker als eine Erhöhung von 2 auf 3.

Beispiel 2.3.2. Gegeben seien folgende Nutzenfunktionen:

a) Exponentielle Nutzenfunktion:

$$N_1(x) := 1 - e^{-\gamma x},$$

mit $0 < \gamma$

b) Power utility:

$$N_2(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}-1}{1-\lambda} & , \text{ für } 1 \neq \lambda > 0 \\ \ln(\lambda) & , \text{ für } \lambda = 1 \end{cases}$$

c) Quadratische Nutzenfunktion:

$$N_3(x) := a(b+x)^2,$$

mit $a > 0$,

sowie ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{W} := (\Omega, \mathcal{A}, P)$ und darauf messbare Zufallsgrößen W_1, W_2, W_3 , mit

$$\begin{aligned} P(W_1 = 3) &= \frac{3}{5}, \quad P(W_1 = 4) = \frac{2}{5}, \\ P(W_2 = 2) &= \frac{1}{5}, \quad P(W_2 = 4) = \frac{4}{5} && \text{und} \\ P(W_3 = 2) &= \frac{1}{5}, \quad P(W_3 = 3) = \frac{2}{5}, && P(W_3 = 5) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ein Investor, der nur den erwarteten Gewinn maximieren möchte, wäre also indifferent zwischen diesen Zufallsgrößen, da sie alle den Erwartungswert 3.4 haben. Für die verschiedenen Nutzenfunktion ergeben sich aber jeweils unterschiedliche Präferenzen, so dass ein Investor mit Nutzenfunktion N_j die Zufallsgröße W_j wählen würde für $j = 1, 2, 3$ und $\gamma = \lambda = a = b = 1$.¹⁷

In Beispiel 2.3.2 würde sich der Investor mit exponentieller Nutzenfunktion also für die Investition W_1 entscheiden. Dabei erzielt er einen Nutzen von ≈ 0.9628 , welchen er auch bei einem sicherem Eintreten von ≈ 3.2914 erzielen könnte. Der Investor

¹⁷Die Berechnungen im Detail sind in Anhang B aufgeführt.

zieht also sichere 3.30 Euro der gegebenen Lotterie mit Erwartungswert 3.40 Euro vor. Er würde damit auf 10 Cent erwarteten Gewinn verzichten.¹⁸ Man bezeichnet den Investor als risikoavers. Mit Blick auf Abbildung 1 wird klar, dass die Stärke der Risikoaversion von der Krümmung der Nutzenfunktion abhängt. Nach Kenneth Arrow und John Pratt benannt sind folgende Kennzahlen zur Risikoaversion auch als Arrow-Pratt Maß bekannt:¹⁹

Definition 2.3.3. (*Absolute- und relative Risikoaversion*):

Gegeben sei eine Nutzenfunktion N . Dann sei definiert:

a) (absolute Risikoaversion):

$$ARA(N(x)) = -\frac{N''(x)}{N'(x)}$$

b) (relative Risikoaversion):

$$RRA(N(x)) = ARA(N(x)) \cdot x$$

Für eine exponentielle Nutzenfunktion ergibt sich z.B. eine absolute Risikoaversion von γ . Als Funktion lässt sich ARA interpretieren, indem man sich vorstellt, dass ein Investor in eine risikolose und eine risikobehaftete Anlage investieren kann. Seine Investitionsentscheidung hängt dabei nicht nur von der Verteilung der riskobehafteten Anlage sondern auch von seinem momentanen Besitz ab. Steigt das ARA mit x , so bedeutet dies, dass bei steigendem Wohlstand eine höhere Menge in die risikobehaftete Anlage investiert wird. Bei sinkendem ARA fällt vice versa die Menge die in die Risikoanlage gesteckt wird.

Im Fall der exponentiellen Nutzenfunktion bleibt der Betrag, der in die risikobehaftete Investition investiert wird, also gleich, egal wie viel der Investor besitzt. Eine Investition ist also für zwei Investoren mit gleicher ARA und exponentieller Nutzenfunktion gleich attraktiv unabhängig vom Kapital, welches sie zur Verfügung haben. Diese Eigenschaft begründet auch die Verwendung dieser Nutzenfunktion in Unterkapitel 3.3. Sie erlaubt die Inklusion der Risikoaversion von Investoren, ohne dabei den Wohlstand des Investors beachten zu müssen.

¹⁸Dieser Betrag wird auch als Risikoprämie bezeichnet.

¹⁹Eine Diskussion dieser findet sich z.B. in [Arr71].

Die Erwartungsnutzentheorie kann als realitätsnäher im Vergleich zur Maximierung des erwarteten Gewinns angesehen werden. Empirische und experimentelle Untersuchungen zum Verhalten von Investoren haben aber gezeigt, dass auch diese Beschreibung nur als Näherung dienen kann. Es gibt eine Vielzahl von beobachtbaren Phänomenen, die nicht mit der Erwartungsnutzentheorie erklärbar sind. Hierzu gehören die subjektive Einschätzung von Eintrittswahrscheinlichkeiten, das setzen von Referenzpunkten bei der Bewertung bzw. Einteilung von Gewinn oder Verlust und allgemeine Verlustaversion.²⁰ Theorien, die diese Effekte teilweise inkludieren sind die *Subjektive Erwartungsnutzentheorie*, *Prospect-Theorie* und *Cumulative Prospect-Theorie*.²¹ Eine Berücksichtigung dieser Phänomene bei der Untersuchung der in der Arbeit vorgestellten Modelle wäre denkbar, überschreitet den Rahmen dieser Arbeit aber bei weitem.²²

²⁰D.h., dass Verluste deutlich negativer bewertet werden als Gewinne in gleicher Höhe positiv angesehen werden. Zur Nicht-Abbildbarkeit dieser Eigenschaft durch Erwartungsnutzentheorie siehe [Rab00].

²¹Vgl. [TK92].

²²Eine einfache Anwendungen der Prospect-Theorie ist aufgrund der stetigen Modellierung hier z. B. nicht möglich, so dass erst entsprechende Ansätze, welche die genannten Phänomene abbilden können, entwickelt werden müssten.

2.4 Portfolio-Optimierung

Untersuchungszustand der in den folgenden Kapiteln erläuterten Modelle ist das Gleichgewicht.²³ Dabei wird u.a. davon ausgegangen, dass der Insider eine Handelsstrategie wählt, die seinen erwarteten Nutzen bzw. Gewinn maximiert. Mathematisch liegt hier ein stochastisches Steuerungsproblem vor. Dieses soll im Folgenden formal definiert und einige Ergebnisse zur Theorie der optimalen Steuerung hergeleitet werden.²⁴ Zusammen mit den Ergebnissen der vorherigen Unterkapitel bilden sie die Grundlage der in den anschließenden Kapiteln präsentierten Ergebnisse.

Als Erstes soll definiert werden, was unter einer *Steuerung* und einem *gesteuerten Prozess* überhaupt zu verstehen ist. Anschaulich kann man sich die Steuerung als eine Anleitung vorstellen, die genau festlegt, was bei Eintritt verschiedener zufälliger Ereignisse über die Zeit zu tun ist. Der gesteuerte Prozess reagiert entsprechend auf die Steuerung. Formal lässt sich dies folgendermaßen definieren.

Definition 2.4.1. (*gesteuerter Prozess*):

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, P)$, wobei $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ die usual conditions²⁵ erfüllt und ein zugehöriger Wiener-Prozess $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$. Ferner seien der progressiv messbare Prozess $(u_t)_{0 \leq t \leq 1}$ und zwei Funktionen $\mu : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann sei für festes t und x der GESTEUERTE PROZESS $X_t^{(t,x,u)}$ für $0 \leq t \leq s \leq 1$ definiert als:

$$dX_s^{(t,x,u)} = \mu(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)ds + \sigma(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)dW_s \text{ und } X_t^{(t,x,u)} = x \quad (2.14)$$

Des Weiteren ist die MENGE ALLER ZULÄSSIGEN STEUERUNGEN $\mathcal{A}(t, x)$ definiert als die Menge der progressiv messbaren Prozesse für die für (2.14) eine eindeutige Lösung existiert und

$$E\left(\int_t^1 |u_s|^k ds\right) < \infty \quad (2.15)$$

$$E\left(\sup_{s \in [t,1]} |X_s^{(t,x,u)}|^k\right) < \infty,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

²³Vgl. Definition 3.1.2.

²⁴Dabei sind die Ergebnisse, falls nicht anders angegeben aus [KK01] entnommen.

²⁵D.h. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ und $\mathcal{F}_0$ enthält alle P -Nullmengen aus $\mathcal{F}_\infty$.

Der Prozess X entwickelt sich abhängig von der Steuerung u . Ziel ist es nun durch geschickte Wahl der Steuerung X so zu manipulieren, dass eine gegebene Nutzenfunktion maximiert wird. Dieses Optimierungsproblem wird formal wie folgt definiert.

Definition 2.4.2. (Wertefunktion und optimale Steuerung):

Gegeben sei eine Erwartungsnutzenfunktion $J(t, x, u) = E(\int_t^1 N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds)$, mit LAUFENDEM NUTZEN N_1 . Dann heißt

$$V(t, x) := \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u)$$

WERTEFUNKTION und u^* OPTIMALE STEUERUNG BZGL. (J, X) falls

$$J(t, x, u^*) = V(t, x)$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ gilt.

Zur Lösung dieses Problems ist es unter gewissen Regularitätsbedingungen sinnvoll auf das Bellman-Prinzip zurückzugreifen. In [BK65] beschreibt Richard Bellman dieses Optimalitätsprinzip wie folgt:

An optimal policy has the property that whatever the initial state and the initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.

Angenommen man teilt das gesamte Zeitintervall an einen beliebigen Zeitpunkt τ in zwei Teile. Dann besagt das Bellman-Prinzip, dass die Wertefunktion dem Erwartungswert über den Nutzen des optimalen Verhaltens und der Wertefunktion mit Startzeitpunkt τ und Startpunkt X_τ entspricht. Um die Wertefunktion zu bestimmen, ist es also ausreichend, dies für ein beliebiges Restintervall zu tun und anzunehmen bis dahin optimal gehandelt zu haben. Bei gegebener Endbedingung kann man so über die hinreichenden Optimalitätskriterien in Form der entsprechenden Ableitungen eine Funktion G bestimmen, die eine obere Schranke für die Wertefunktion angibt. Existiert eine Steuerung mit entsprechender Erwartungsnutzenfunktion, so ist diese die Wertefunktion.

Angenommen die Wertefunktion ist hinreichend glatt, dann kann man die Itô Formel auf die aus dem Bellman-Prinzip entstandenen Zerlegungen für jeden Zeitpunkt anwenden und erhält die sogenannte *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (kurz: HJB-Gleichung), welche eine hinreichende Bedingung für die optimale Steuerung darstellt.

Definition 2.4.3. (*Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*):

Gegeben sei eine Erwartungsnutzenfunktion der Form

$$J(t, x, u) = E\left(\int_t^1 N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds\right), \quad \text{mit } u \in \mathcal{A}(t, x).$$

 Eine Funktion $G \in C^{1,2}([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times \mathbb{R})$ erfüllt die HAMILTON-JACOBI-BELLMAN-GLEICHUNG wenn

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} (G_t + \mu(t, x, u)G_x + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, u)G_{xx} + N_1(t, x, u)) = 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \quad (2.16)$$

$$G(1, x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$|G(t, x)| \leq K(1 + |x|^k) \quad (2.17)$$

für geeignete Konstanten $K > 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

Das folgende Theorem löst in gewissem Sinne das Steuerungsproblem.

Theorem 2.4.4. (*Verifikationssatz zur Lösung der HJB-Gleichung*):²⁶

Löst $G(t, x)$ obige HJB-Gleichung, dann gelten

(a) $G(t, x) \geq J(t, x, u)$ für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{A}(t, x)$

(b) Existiert für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ ein $u^* \in \mathcal{A}(t, x)$ mit

$$u^*(s) = \operatorname{argmax}_{u \in \mathcal{A}(t, x)} (G_s + \mu(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_x + \frac{1}{2}\sigma^2(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_{xx} + N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s))$$

für alle $s \in [t, 1]$, so gilt:

$$G(t, x) = V(t, x) = J(t, x, u^*)$$

²⁶Übernommen aus [KK01] S. 267 ff..

Beweis:

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen:

Zunächst wird die Integrierbarkeit durch eine entsprechende Stoppzeit gesichert um auf $G(\tau, X_\tau^{(t,x,u)})$ die Itô-Formel anzuwenden. Abschließend wird, unter Berücksichtigung der von der HJB-Gleichung implizierten Ungleichung, der Erwartungswert der sich ergebenden Ungleichung betrachtet.

Wegen (2.16) gilt zunächst für $u \in \mathcal{A}(t, x)$, $(t, x) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$ und $t \leq s \leq 1$:

$$G_t(t, X_s^{(t,x,u)}) + \mu(t, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_x(t, X_s^{(t,x,u)}) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_{xx} \leq -N_1(t, X_s^{(t,x,u)}, u_s) \quad (2.18)$$

Sei eine beliebige Stoppzeit τ mit $0 \leq t \leq \tau \leq 1$ gegeben. Dann sei die Stoppzeit τ_p definiert durch

$$\tau_p := \min(\tau, \inf\{s : t \leq s \leq 1; X_s > p\})$$

Anwendung des Satzes von Itô auf $G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)})$ ergibt:

$$\begin{aligned} & G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)}) - G(t, x) \\ &= \int_t^{\tau_p} G_s(s, X_s^{(t,x,u)})ds + \int_t^{\tau_p} G_x(s, X_s^{(t,x,u)})dX_s^{(t,x,u)} + \frac{1}{2} \int_t^{\tau_p} G_{xx}(s, X_s^{(t,x,u)})d\langle X^{(t,x,u)} \rangle_s \\ &= \int_t^{\tau_p} G_s(s, X_s^{(t,x,u)}) + \mu(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_x(s, X_s^{(t,x,u)}) + \frac{1}{2}\sigma^2(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_{xx}(s, X_s^{(t,x,u)})ds \\ &\quad + \int_t^{\tau_p} \sigma(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_x(s, X_s^{(t,x,u)})dW_s \end{aligned}$$

Man erhält für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)})) - G(t, x) &= E\left(\int_t^{\tau_p} G_s(s, X_s^{(t,x,u)}) + \mu(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_x(s, X_s^{(t,x,u)})ds\right) \\ &\quad + E\left(\frac{1}{2}\sigma^2(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_{xx}(s, X_s^{(t,x,u)})ds\right) \\ &\quad + \underbrace{E\left(\int_t^{\tau_p} \sigma(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s)G_x(s, X_s^{(t,x,u)})dW_s\right)}_{=0} \end{aligned}$$

Mit (2.18) ergibt sich

$$\begin{aligned} E(G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)})) - G(t, x) &\leq E\left(\int_t^{\tau_p} -N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds\right) \\ \Leftrightarrow G(t, x) &\geq E\left(\int_t^{\tau_p} N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds + G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)})\right) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (2.15) kann mit (2.17) die rechte Seite der folgenden Gleichung als endlich abgeschätzt werden. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert somit:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E\left(\int_t^{\tau_p} N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds\right) = E\left(\int_t^{\tau} N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds\right)$$

Ferner folgt aus der Stetigkeit von G :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)}) = G(\tau, X_{\tau}^{(t,x,u)}) \text{ P-f.s.}$$

Mit (2.17) folgt desweiteren die gleichgradige Integrierbarkeit von $(G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)}))_{t \leq p \leq 1}$. Damit ergibt sich:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E(G(\tau_p, X_{\tau_p}^{(t,x,u)})) = E(G(\tau, X_{\tau}^{(t,x,u)}))$$

Also gilt für beliebige Stoppzeiten τ mit $t \leq \tau \leq 1$

$$G(t, x) \geq E\left(\int_t^{\tau} N_1(s, X_s^{(t,x,u)}, u_s) ds + G(\tau, X_{\tau}^{(t,x,u)})\right)$$

Wegen $G(1, x) = 0$ ergibt sich a) mit $\tau = 1$, b) ergibt sich da in (2.18) Gleichheit genau für u^* erreicht wird. $\square$

Die Existenz einer Lösung der HJB-Gleichung ist in verschiedenen Situationen gewährleistet. Ein Existenzsatz mit sehr einschränkenden Bedingungen soll hier ohne Beweis angegeben werden.²⁷

Satz 2.4.5. *Gegeben sei die Situation von Definition 2.4.1. Seien dabei σ^2 , μ und N_1 beschränkte Funktionen die bezüglich t stetig differenzierbar und bezüglich x zweimal*

²⁷Vgl. [KK01] S. 271.

stetig differenzierbar sind. Ferner existiere ein $c > 0$, so dass $\sigma^2(t, x, u) > c$ ist. Dann existiert eine Lösung der HJB-Gleichung.

Ein Bezug zum zweiten Unterkapitel ergibt sich, wenn man in (2.16) σ^2 ignoriert. Erfüllt G die Rückwärtswärmeleitungsgleichung, fällt hier der erste und dritte Summand weg. Dieser Zusammenhang wird in den folgenden Kapiteln ausgenutzt. Eine Lösung würde sich somit ergeben wenn man ein G findet dessen Ableitung dem laufenden Nutzen entspricht und die Rückwärtswärmeleitungsgleichung erfüllt.

3 Das Modell im Gleichgewicht bei perfekter Insider-Information

In diesem Kapitel soll das Marktmodell im Gleichgewicht bei perfekter Information untersucht werden.

Ein Marktgleichgewicht liegt vor, wenn die Pläne der Anbieter mit den Plänen der Nachfrager konsistent sind,[...].²⁸

In dieser Arbeit wird von einem Asset ausgegangen, welches an einem Handelsplatz mit Marketmaker (im Deutschen auch Marktpfleger) geführt wird. Dieser Börsenmakler, der zumeist einem großen Finanzinstitut angehört, stellt Geld- und Briefkurse, sorgt somit für Liquidität und wirkt transienten Ungleichgewichten entgegen. In dieser Arbeit wird von Unterschieden zwischen Geld - und Briefkursen abstrahiert. Dem Marketmaker kommt somit nur die Funktion der Feststellung des Preises zu. Er soll dabei den Preis auf eine rationale Weise festlegen. Da der Marketmaker als Käufer und Verkäufer auftreten kann, sollte er den Preis weder zu hoch noch zu niedrig festlegen. Dies motiviert die Festlegung des rationalen Preises als denjenigen Schätzer für den Fundamentalwert, welcher, gegeben den Informationen des Marketmakers, den quadratischen Fehler der Bepreisung minimiert. Selbiger ist durch den bedingten Erwartungswert (3.3) gegeben.²⁹

In einem Markt mit externer Preissetzung stellt sich nach der Preissetzung eine Gleichgewichtsmenge ein. Diese hängt nun von Noisetrader und Insider ab. Während Erstere unabhängig vom Preis handeln, handelt Letzterer nach dem Prinzip der Erwartungsnutzenmaximierung. Hierdurch ergibt sich die Bedingung der Optimalität (3.2). Handeln die beiden Akteure Marketmaker und Insider nach den erläuterten Prinzipien, beeinflussen sich die beiden i. A. gegenseitig. Die Preisfunktion bestimmt die Nachfrage des Insiders und andersherum passt der Marketmaker diese in Abhängigkeit des Informationsflusses an. Ob der Markt ins Gleichgewicht kommt, ist a priori nicht klar. Gelangt der Markt allerdings ins Gleichgewicht, hat keiner der Akteure einen Anreiz seine Strategie zu ändern. Es sei nun davon ausgegangen, dass der Markt durch gegenseitiges Ausloten der

²⁸Vgl. [Pre11] S. 220.

²⁹Diese Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes ist z. B. in [Xio08] Lemma 5.1 festgehalten.

Akteure immer ins Gleichgewicht gerät. Von der Frage der Stabilität des Marktgleichgewichts wird in dieser Arbeit somit abstrahiert.³⁰

Weiter wird in diesem Kapitel angenommen, dass der Insider perfekte Information besitzt. Das heißt, dass der Insider von Anfang an den exakten Preis zum Zeitpunkt 1 kennt. Denkbar wäre zum Beispiel, dass der Insider von einem Übernahmeangebot weiß, welches zum Zeitpunkt 1 veröffentlicht wird. Der Preis des Assets wird dann zum Zeitpunkt 1 (mindestens) auf den Preis des Angebots steigen.³¹

Es werden vereinfachende Annahmen an die Preisfunktion und die Risikoeinstellung des Investors gemacht um zunächst ein grundlegendes Ergebnis zu erhalten. In den anschließenden Unterkapiteln werden die Annahmen dann jeweils einzeln gelockert um ihren Einfluss zu erläutern.

3.1 Das Marktmodell im Gleichgewicht unter restriktiven Annahmen

Das erste Setting soll die prinzipiellen Eigenschaften des Marktmodells im Gleichgewicht beschreiben. Um den Einfluss einzelner Faktoren auf das Ergebnis, wie die Risikoaversion oder die Abhängigkeitsbeziehung der Preisfunktion zunächst auszublenken werden mehrere vereinfachende Annahmen getroffen.

Für dieses Unterkapitel sei das Marktmodell wie folgt definiert:³²

Definition 3.1.1. (*Marktmodell Version 1*):

Gegeben sei

(a) *eine $\mathcal{F}_0$ -messbare quadratisch integrierbare stetige Zufallsgröße ν .*

Seien ferner folgende stochastische Prozesse gegeben:

(b) *Eine von ν stochastisch unabhängige Brownsche Bewegungen $(Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ mit quadratischer Variation $\sigma^2 t$,*

³⁰Zu Stabilität des Gleichgewichts siehe [Pre11] S. 221.

³¹In der gegebenen Modellierung wird der Preis des Assets auch ggf. auf diesen Preis sinken.

³²Es liegt weiterhin ein geeigneter filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{W} := (\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, P)$ zugrunde.

(c) ein Semimartingal $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$,

(d) $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1} := (X_t)_{0 \leq t \leq 1} + (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$,

(f) $P_t := \mathbf{1}_{[0,1)}(t) \cdot H(t, Y_t) + \mathbf{1}_{\{1\}}(t) \cdot \nu$,

$H : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $H \in C^{2,1}((0, 1) \times \mathbb{R}) \cap C^{1,1}([0, 1] \times \mathbb{R})$, $H(t, \cdot)$ streng monoton steigend für $0 \leq t \leq 1$.

Ferner sei gefordert:

(g)

$$E\left(\int_0^1 H(t, Y_t)^2 dt\right) < \infty. \quad (3.1)$$

Weiter sei

(h) $\mathcal{F}_t = \sigma(\nu, (Z_s)_{0 \leq s \leq t})$ für alle $0 \leq t \leq 1$.

Das Tupel $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$ nennt man ein MARKTMODELL.³³

Dabei lässt sich die Definition durch eine Interpretation der einzelnen Komponenten mit Sinn füllen. Der Informationsverlauf für den Handelszeitraum $[0, 1]$ wird durch die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ abgebildet. Der Insider welchem $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ zur Verfügung steht, kennt zum Zeitpunkt 0 bereits den realisierten Wert von ν , welcher den Fundamentalwert des gehandelten Assets zum Zeitpunkt t darstellt. Der Preis $(P_t)_{0 \leq t \leq 1}$ des Assets im Zeitpunkt eins entspricht dem des Fundamentalwertes. Somit hat der Insider einen Informationsvorsprung gegenüber den anderen Marktteilnehmern. Man spricht von perfekter Information, da ihm diese ungestört vorliegt. Von seiner Handelstrategie wird nur gefordert, dass sie ein Semimartingal darstellt, das heißt dass sie a priori auch Sprünge enthalten kann. Die Wahl des Semimartingals ist hierbei nicht willkürlich sondern eher technisch bedingt. Im Endeffekt soll ein stochastisches dynamisches Optimierungsproblem gelöst werden. Im letzten Kapitel wurde ein Weg gezeigt eine optimale Steuerung zu finden. Im Beweis des Verifikationssatzes wurde dazu die Itô-Formel als zentrales Argument benutzt. Auf Semimartingale

³³Bedingung (f) wird erst in Version 3 auftauchen.

lässt sich die Itô-Formel anwenden und somit eine optimale Steuerung mit Hilfe des Bellman-Prinzips finden, aber gleichzeitig umfassen Semimartingale nun viele bekannte stochastische Prozesse und lassen z. B. auch Sprünge zu.

Intuitiv sollte allerdings schon klar sein, dass eine Strategie mit Sprüngen nicht sinnvoll sein kann. Sprünge in der Nachfrage auf dem Intervall $[0,1)$ lassen sich vom Marketmaker als Order des Insiders identifizieren und mindern damit den Informationsvorsprung des Insiders, in der Praxis hätte eine Identifizierung des Insiders zusätzlich juristische Konsequenzen.

Darüber hinaus würde ein Sprung zum Zeitpunkt 1 bedeuten, dass der Insider nicht das gesamte Gewinnpotential ausgenutzt hat. Trotzdem sollen in dieser ersten Betrachtung Sprünge zugelassen werden, um formal zu zeigen, dass sie nicht sinnvoll sind. In den anschließenden Unterkapiteln wird diese prinzipielle Struktur dann per Annahme von vornherein vorgegeben.

Der Noisetrader, welchem die Information $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ nicht zugänglich ist, handelt das Asset unabhängig von ν . Seine Handelsstrategie $(Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ wird als Brownsche Bewegung modelliert.³⁴ Der dritte Akteur ist der Marketmaker. Für den Marketmaker stellt sich ν als Zufallsgröße dar, von der angenommen wird, dass sie stetig ist. Er darf seine Preisfunktion nur von der aktuellen Nachfrage abhängig machen. Im nächsten Unterkapitel ist auch eine Abhängigkeit von der vergangenen Nachfrage trajektorie zugelassen. An die Bepreisungsfunktion wird mit (3.1) eine Bedingung gestellt, die absichert, dass der Insider nicht so genannte Martingalwettstrategien ausnutzen kann, um beliebig hohe Gewinne zu erzielen.

Bisher wurden zwar alle zu untersuchende Komponenten des Modells definiert, aber das Verhalten des Insiders und des Marketmakers als rationale Akteure im Markt noch nicht abgebildet. Im Modell soll der Insider seinen Erwartungsnutzen maximieren und der Marketmaker in Abhängigkeit der von ihm beobachtbaren Information $\sigma((Y_s)_{0 \leq s \leq t})$ zum Zeitpunkt t einen rationalen Preis festlegen. Formal ergeben sich dadurch zwei Bedingungen für eine *Gleichgewichtssituation*, in der der Insider seinen Nutzen maximiert und der Marketmaker einen rationalen Preis festlegt.

³⁴Die Inklusion einer Brownschen Bewegung in diesem Zusammenhang auch als Rauschen oder Noise bezeichnet, welches sich interpretativ aus vielen kleinen unabhängigen nicht durchschaubaren Entscheidungen zusammensetzt, ist als Standard in den Wirtschaftswissenschaften anzusehen. Für eine Diskussion von *Noise* in Finanzmärkten siehe z. B. [Bla86].

Definition 3.1.2. (Gleichgewichtsbedingung Version 1):

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$. Sei χ die Menge aller Semimartingale $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ bzgl. $\mathcal{W}$, so dass (3.1) erfüllt ist. $\mathcal{M}$ erfüllt die GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(a) (Optimalität)

$$E(W_1(X)) = \sup_{X \in \chi} E(W_1(X)), \quad (3.2)$$

$$\text{wobei } W_1(X) = (\nu - P_{1-})X_1 + \int_{[0,1)} X_t dP_t.$$

(b) (Rationalität)

$$H(t, Y_t) = E[P_1 | \sigma((Y_s)_{s \leq t})] \quad (3.3)$$

W_1 lässt sich mit Blick auf die Produktregel darstellen als:³⁵

$$W_1 = \nu X_1 - \int_0^1 (P_{t-}) dX_t - [P, X]_1 \quad (3.4)$$

W_1 , also der Gewinn des Insiders, ergibt sich als Summe aus dem Gewinn, verursacht durch den Kurssprung in $t = 1$ und dem Gewinn seiner Handelsstrategie bis dahin.

Der Insider wird ferner als risikoneutral modelliert, d.h. er maximiert seinen erwarteten Gewinn. Für dieses Unterkapitel gilt deshalb für seine Nutzenfunktion $N(x) = x$. (3.2) entspricht also dem Insiderverhalten der Erwartungsnutzen- bzw. Gewinnmaximierung. (3.3) betrifft den Marketmaker, auch er handelt im zuvor erklärten Sinne rational.

Zentrale Aussage dieses Unterkapitels und Ergebnis der Arbeit von [Bac92] ist, dass sich beim Marktmodell im Gleichgewicht, in gegebener Situation, die Handelsstrategie des Insiders durch den Ausdruck (3.24) und der Preisprozess des Assets je nach Perspektive durch eine Brownsche Bewegung bzw. Brücke beschreiben lässt.³⁶ Um diese Ergebnisse, die formal in den Theoremen 3.1.9,

³⁵Aus dieser folgt nämlich: $P_{1-}X_1 = \underbrace{P_0X_0}_{=0} + \int_{[0,1)} P_t dX_t + \int_{[0,1)} X_t dP_t + [P, X]_1$.

³⁶Vgl. hierzu auch Abbildung 2 für den Nachfrageprozess und Abbildung 3 für den Preisprozess.

3.1.10 und 3.1.11 zum Ausdruck kommen beweisen zu können, werden [Bac92] folgend zunächst fünf Lemmata bewiesen.

Die Gleichgewichtsbedingung ist nur erfüllt, wenn das Optimierungsproblem (3.2) gelöst ist. Deswegen soll mit Hinblick auf das in Unterkapitel 2.4 vorgestellte Lösungskalkül eine an die hier gegebene Situation angepasste Bellman-Bedingung definiert werden. In der gegebenen Situation erweist sich Folgendes als zielführend:

Definition 3.1.3. (*Bellman-Bedingung*):

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$. Eine Funktion $G(v, t, x)$ mit $|G(v, t, x)| \leq K(1 + |x|^k + |v|^l)$ für geeignetes $K > 0$ und $k, l \in \mathbb{N}$ erfüllt die BELLMAN-BEDINGUNG falls Folgendes gilt:

(a) $G(v, t, x)$ erfüllt

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ G_t + G_x \theta + \frac{1}{2} \sigma^2 G_{xx} + (v - H(t, x)) \theta \right\} = 0$$

für alle $v \in \text{Bild}(\nu)$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \in (0, 1)$

(b) $G(v, 1, x) > G(v, 1, h(v)) = 0$ für alle $v \in \text{Bild}(\nu)$ und $x \neq h(v)$, mit $h(\cdot) := H^{-1}(1, \cdot)$

Das folgende Lemma gibt eine mögliche Bepreisungsfunktion H an, so dass ein zugehöriges Marktmodell die Bellman-Bedingung erfüllt.

Lemma 3.1.4. :

Seien $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$ ein Marktmodell und eine monoton wachsende Funktion $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$ gegeben, so dass $E|k(Z_1)| < \infty$. Sei ferner die Bepreisungsfunktion $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$H(t, x) := E(k(x + Z_1 - Z_t))$$

gegeben. Weiter sei eine Funktion $j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert:

$$j(v, x) := \int_x^{k^{-1}(v)} (v - k(y)) dy$$

Dann erfüllt $G(v, t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G(v, t, x) := E(j(v, x + Z_1 - Z_t))$$

die Bellman-Bedingung.

Beweis:

Es wird folgendermaßen vorgegangen:

Zunächst soll mit Hilfe von Korollar 2.2.4 gezeigt werden, dass G für festes v eine Transformation der Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Anschließend soll $G_x = H - v$ unter Ausnutzung des Majorantenkriteriums zur Berechnung der Ableitung nachgewiesen werden. Zusammen ergibt dies die Bellman-Bedingung ohne Randbedingung. Letztere ergibt sich auch aus Korollar 2.2.4.

Es soll zunächst die Bedingung (2.10) aus diesem Korollar nachgerechnet werden ($a = \frac{1}{2\sigma}$) :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \left| \int_x^{k^{-1}(v)} (v - k(y)) dy \right| dx \\
& \leq \int_{-\infty}^{k^{-1}(v)} e^{-\frac{1}{2\sigma}x^2} \left(\int_x^{k^{-1}(v)} |v| dy + \int_x^{k^{-1}(v)} |k(y)| dy \right) dx \\
& \quad + \int_{k^{-1}(v)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma}x^2} \left(\int_{k^{-1}(v)}^x |v| dy + \int_{k^{-1}(v)}^x |k(y)| dy \right) dx \\
& \stackrel{k \text{ monoton}}{\leq} \int_{-\infty}^{k^{-1}(v)} e^{-\frac{1}{2\sigma}x^2} ((k^{-1}(v) - x)|v| + |k(k^{-1}(v))(k^{-1}(v) - x)|) dx \\
& \quad + \int_{k^{-1}(v)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma}x^2} ((x - k^{-1}(v))|v| + |k(x)(k^{-1}(v))|) dx \\
& \leq E(|(c_1 - Z_1)c_2|) + E(|c_2(c_1 - Z_1)|) \\
& \quad + E(|(Z_1 - c_1)c_2|) + E(|k(Z_1)c_1|) \\
& \leq 3|c_2|E(|Z_1|) + |c_1|E(|k(Z_1)|) + |c| \\
& < \infty,
\end{aligned}$$

wobei $c_1 := k^{-1}(v)$, $c_2 := v$ und $c := 3|c_1c_2| < \infty$. Dementsprechend gilt für $\tilde{G}(v, x, t) := E(j(v, \sigma(W_{1-t} + x))) := G(v, t, \sigma x)$ mit $v \in \text{Bild}(\nu)$ und geeignetem Wiener-Prozess W_t auf $\mathcal{W}$:

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2} = 0$$

und aus der Kettenregel folgt:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

Somit ist der erste Schritt abgeschlossen. Es folgt die Berechnung von G_x .

Es gilt für jede Nullfolge a_n mit $a_n \neq 0$:

$$G_x(v, t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(j(v, x + a_n + Z_1 - Z_t)) - E(j(v, x + Z_1 - Z_t))}{a_n} \quad (3.6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\underbrace{\frac{j(v, x + a_n + Z_1 - Z_t) - j(v, x + Z_1 - Z_t)}{a_n}}_{=: K_n}\right)$$

$$\stackrel{*}{=} E\left(\underbrace{j_x(x + Z_1 - Z_t)}_K\right) \quad (3.7)$$

$$= E(k(x + Z_1 - Z_t) - v) \quad (3.8)$$

$$= H(t, x) - v$$

Wobei Umformung $\star$ gemacht werden kann da K_n gegen K konvergiert und gleichgradig integrierbar ist. Letzteres lässt sich durch das hinreichende Majorantenkriterium einsehen. Es gilt:

$$\begin{aligned} |K_n| &\stackrel{j \text{ monoton fallend in } x}{\leq} \max(|j_x(x + a_n + Z_1 - Z_t)|, |j_x(x + Z_1 - Z_t)|) \\ &= \underbrace{\max(|k(x + a_n + Z_1 - Z_t)|, |k(x + Z_1 - Z_t)|)}_{:=L} \end{aligned}$$

da $k(x)$ streng monoton und damit $|j_x| = |k - v|$ abschnittsweise monoton ist. L ist integrierbar, da nach Voraussetzung $E(|k(Z_1)|) < \infty$ und damit $E(|k(Z_1 - Z_t)|) < \infty$, für $0 \leq t \leq 1$. Aus der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt somit $E(K_n) \rightarrow E(K)$, was $\star$ rechtfertigt.

Aus (3.5) und (3.8) folgt, dass die Bellman-Bedingung unter Ausklammerung der Randbedingung b) erfüllt ist. Aus Korollar 2.2.4 folgt $H^{-1}(1, x) = k^{-1}(x)$ die Randbedingung und damit folgt die Behauptung aus $j(v, x) > 0$ für $x \neq k^{-1}(v)$ und $j(v, k^{-1}(v)) = 0$. $\square$

Da für X_t Sprungprozesse nicht ausgeschlossen sind, können in diesem Fall nicht direkt die Ergebnisse aus Kapitel 2.4 benutzt werden. Die Eigenschaft von G als obere Schranke des erwarteten Gewinnes muss also erneut nachvollzogen werden. Dies geschieht mit dem folgendem Lemma.

Lemma 3.1.5. :

Gegeben seien ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$, so dass ein G existiert, welches die Bellman-Bedingung erfüllt.

a) Dann gilt

$$E\left(\int_{[0,1]} (\nu - H(t, Z_t)) dX_t - [H(t, Z_t), x]_1\right) \leq E(G(\nu, 0, 0)) \quad (3.9)$$

b) Falls $X_t = X_0 + M_t + A_t$ P -f.s. stetige Pfade besitzt, für den Martingalanteil $M_t \equiv 0$ gilt und ferner $H(1, Y_1) = \nu$ f.s.. Dann gilt in (3.9) Gleichheit. Für alle anderen X_t gilt in (3.9) strikte Ungleichheit.

Beweis:

Der Beweis ist dieserart:

Mit Hilfe der Formel von Itô lässt sich die Dynamik von $G(\nu, t, Y_t)$ beschreiben. Einsetzen der durch die Bellman-Bedingung sichergestellten Eigenschaften (3.12) und (3.13) führt zu einer stochastischen Integralgleichung, die die Komponenten der Erwartungswerte der zu zeigenden Ungleichung beinhaltet. Eine Abschätzung der einzelnen Komponenten der Integralgleichung unter Berücksichtigung der in b) gemachten Unterscheidungen und Anwenden des Erwartungswertoperators liefert die Behauptungen.

Sei $v \in \text{Bild}(\nu)$. Nach dem Satz von Itô gilt:³⁷

$$\begin{aligned} G(v, 1, Y_1) &= G(v, 0, \underbrace{Y_{0-}}_{=0}) + \int_0^1 G_y(v, t, Y_{t-}) dY_t + \int_0^1 G_t(v, t, Y_{t-}) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[Y^c, Y^c]_t \\ &\quad + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(v, t, Y_t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} G_y(v, t, Y_{t-}) \Delta Y_t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ausnutzung der Zusammensetzung von Y

$$[Y^c, Y^c]_t = [X^c + Z^c, X^c + Z^c]_t$$

³⁷Vgl. Satz 2.1.2. Der Superindex c bezeichnet wie zuvor und im Folgenden den stetigen Anteil des entsprechenden Prozesses.

$$\begin{aligned}
&= [X^c, X^c]_t + 2[X^c, Z]_t + [Z, Z]_t \\
&= [X^c, X^c]_t + 2[X^c, Z]_t + \sigma^2 t
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
G(v, 1, Y_1) &= G(v, 0, 0) + \int_0^1 G_y(v, t, Y_{t-}) dY_t + \int_0^1 G_t(v, t, Y_{t-}) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t \\
&\quad + \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[X^c, Z]_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) dt \\
&\quad + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(v, t, Y_t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} G_y(v, t, Y_{t-}) \Delta X_t
\end{aligned}$$

Da G die Bellman-Bedingung erfüllt gilt:³⁸

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \tag{3.12}$$

$$G_x + \nu - H = 0 \tag{3.13}$$

Wegen (3.12) folgt:

$$\begin{aligned}
G(v, 1, Y_1) &= G(v, 0, 0) + \int_0^1 G_y(v, t, Y_{t-}) dY_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t \\
&\quad + \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[X^c, Z]_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) dt
\end{aligned}$$

³⁸Ansonsten könnte man den zu maximierenden Ausdruck $G_t + G_x \theta + \frac{1}{2} \sigma^2 G_{xx} + (v - H) \theta$ durch Variation von θ erhöhen, was fürs Supremum aber nicht möglich ist.

$$\begin{aligned}
& + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(v, t, Y_t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} G_y(v, t, Y_{t-}) \Delta X_t \\
& = G(v, 0, 0) + \int_0^1 G_y(v, t, Y_{t-}) dY_t \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t \\
& + \int_0^1 G_{yy}(v, t, Y_{t-}) d[X^c, Z]_t \\
& + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(v, t, Y_t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} G_y(v, t, Y_{t-}) \Delta X_t
\end{aligned}$$

(3.13) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
G(\nu, 1, Y_1) & = G(\nu, 0, 0) + \int_{[0,1]} (H(t, Y_t) - \nu) dY_t + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t \\
& + \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-}) d[X^c, Z]_t + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(\nu, t, Y_t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} \overbrace{(H(t, Y_{t-}) - \nu)}^{=G_y(\nu, t, Y_{t-})} \Delta X_t \\
& \stackrel{dY=dX+dZ}{\Leftrightarrow} \int_{[0,1]} (\nu - H(t, Y_{t-})) dX_t - [P, X]_1 - G(\nu, 0, 0) \tag{3.14} \\
& = -G(\nu, 1, Y_1) + \int_0^1 (H(t, Y_{t-}) - \nu) dZ_t \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t \\
& + \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-}) d[X^c, Z]_t + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(\nu, t, Y_t) \\
& - \sum_{0 \leq t \leq 1} (H(t, Y_{t-}) - \nu) \Delta X_t - [P, X]_1 \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Erwartungswert hiervon nicht-positiv und für $X^c \equiv 0$ und $\Delta X \equiv 0$ null ist. Ist $\Delta X \equiv 0$, so ist der Martingalanteil M stetig und somit

$$M \equiv X^c.$$

Da $dP_t^c = H_y(t, Y_{t-})dY_t^c$ gilt:

$$\begin{aligned} [P^c, X^c]_1 &= \int_0^1 H_y(t, Y_{t-})d[Y^c, X^c]_t \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-})d[X^c, X^c]_t + \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-})d[X^c, Z]_t \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ferner folgt mit (3.13):

$$(P_{t-} - \nu)\Delta X_t + \Delta P_t \Delta X_t = (P_t - \nu)\Delta X_t = G_y(\nu, t, Y_t)\Delta X_t \quad (3.17)$$

Durch Einsetzen von (3.16) und (3.17) in (3.15) ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]} (\nu - H(t, Y_{t-}))dX_t - [P, X]_1 - G(\nu, 0, 0) \\ &= -G(\nu, 1, Y_1) + \int_0^1 (P_{t-} - \nu)dZ_t + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-})d[X^c, X^c]_t \\ &\quad + [P^c, X^c] - \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-})d[X^c, X^c]_t \\ &\quad + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(\nu, Y_t, t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} (P_{t-} - \nu)\Delta X_t - [P, X]_1 \end{aligned}$$

Mit $[P, X]_1 = [P^c, X^c]_1 + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta P_t \Delta X_t$ folgt

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]} (\nu - H(t, Y_{t-}))dX_t - [P, X]_1 - G(\nu, 0, 0) \\ &= -G(\nu, 1, Y_1) + \int_0^1 (P_{t-} - \nu)dZ_t + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-})d[X^c, X^c]_t \\ &\quad + [P^c, X^c]_1 - \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-})d[X^c, X^c]_t \\ &\quad + \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(\nu, Y_t, t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} (P_{t-} - \nu)\Delta X_t - [P^c, X^c]_1 - \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta P_t \Delta X_t. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,1]} (\nu - H(t, Y_{t-})) dX_t - [P, X]_1 - G(\nu, 0, 0) \\
&= - \underbrace{G(\nu, 1, Y_1)}_{(3.18)} + \underbrace{\int_0^1 (P_{t-} - \nu) dZ_t}_{(3.19)} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t}_{(3.20)} \\
&+ \underbrace{\sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta G(\nu, Y_t, t) - \sum_{0 \leq t \leq 1} G_y(\nu, t, Y_t) \Delta X_t}_{(3.21)}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Terme lassen sich wie folgt abschätzen:

Aus der Randbedingung b) der Bellman-Bedingung ergibt sich:

$$-G(\nu, 1, Y_1) \leq 0 \text{ mit Gleichheit für } P_1 = \nu \quad (3.18)$$

Da gegen ein stetiges Martingal mit Startwert null integriert wird gilt:

$$E \int_0^1 (P_{t-} - \nu) dZ_t = 0 \quad (3.19)$$

$G_{yy} > 0$ ergibt sich aufgrund von (3.5) und der Monotonie von H . Ferner ist das Maß $d[X^c, X^c]$ nicht negativ und nur für $X^c \equiv 0$ konstant null und damit:

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(\nu, t, Y_{t-}) d[X^c, X^c]_t \leq 0 \text{ mit Gleichheit gdw. } X^c \equiv 0 \quad (3.20)$$

Schließlich gilt:

$$\sum_{0 \leq t \leq 1} [\Delta G(\nu, t, Y_t) - G_y(\nu, t, Y_t) \Delta X_t] \leq 0 \text{ mit Gleichheit für } \Delta X \equiv 0 \quad (3.21)$$

Dies ergibt sich aus der Konvexität von $G(\nu, t, y)$ bzgl. y :

Gegeben ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$G_{yy}(\nu, t, y) \geq 0 \text{ f.a. } y \in \mathbb{R} \Rightarrow G_y(\nu, t, b) \geq G_y(\nu, t, \xi) \text{ f.a. } \xi \in (a, b)$$

Nun existiert aber nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$G_y(v, t, \xi) = \frac{G(v, t, b) - G(v, t, a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow G_y(v, t, b) \geq G_y(v, t, \xi) = \frac{G(v, t, b) - G(v, t, a)}{b - a}.$$

Da $G(v, t, y)$ in t stetig ist ergibt sich

$$G_y(v, t, b) \geq \frac{G(v, t, b) - G(v, t, a)}{b - a}.$$

Setzt man nun $b = X_t$ und $a = X_{t-}$ ergibt sich somit (3.21). Das bedeutet Gleichheit in (3.9) stellt sich genau dann ein wenn $P_1 = \nu$, $X^c \equiv 0$ und $\Delta X \equiv 0$. $\square$

Nachdem mit den beiden vorhergehenden Lemmata Optimalitätskriterien entwickelt wurden soll nun eine potentiell optimale Handelsstrategie des Insiders eingeführt werden. Das folgende Lemma zeigt für diese zunächst die wichtige Eigenschaft der Unsichtbarkeit gegenüber dem Marketmaker auf.

Lemma 3.1.6. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$. Ferner besitze ν die Verteilungsfunktion F und X_t sei folgendermaßen definiert:

$$X_t = (1 - t) \int_0^t \frac{k^{-1}(\nu) - Z_s}{(1 - s)^2} ds,$$

wobei $k := F^{-1} \circ \mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 symbolisiert und F^{-1} die Pseudoinverse von F . Dann ist Y_t bezüglich der von ihr erzeugten Filtration $\sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})$ eine Brownsche Bewegung mit quadratischer Variation σt .

Beweis:

Nach Produktregel gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{dt} &= \frac{k^{-1}(\nu) - Z_t}{(1 - t)^2} (1 - t) + (-1) \underbrace{\int_0^t \frac{k^{-1}(\nu) - Z_s}{(1 - s)^2} ds}_{\frac{X_t}{(1-t)}} \\ &= \frac{k^{-1}(\nu) - Z_t}{(1 - t)} - \frac{X_t}{(1 - t)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k^{-1}(\nu) - Z_t - X_t}{(1-t)}$$

Folglich gilt

$$dX_t = \frac{k^{-1}(\nu) - Z_t - X_t}{(1-t)} dt$$

und somit:

$$dY_t = dX_t + dZ_t = \frac{k^{-1}(\nu) - \overbrace{Z_t - X_t}^{-Y_t}}{(1-t)} dt + dZ_t$$

und damit ergibt sich die Behauptung aus Lemma 2.1.8 unter der Beachtung dass $N^{-1} \circ F(\nu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. $\square$

Das folgende Lemma zeigt auf, dass aus der Existenz einer die Bellman-Bedingung erfüllenden Funktion G schon die Martingaleigenschaft der Preisfunktion folgt. Ferner kann bei optimaler Handelsstrategie des Insiders die stochastische Differentialgleichung von H angegeben werden.

Lemma 3.1.7. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$. Angenommen es existiert eine Funktion $G(v, t, y)$, die die zugehörige Bellman-Bedingung erfüllt.

Dann ist $H(t, Z_t)$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t$.

Gilt ferner dass X_t stetig ist und der Martingalanteil konstant null ist, dann ergibt sich

$$H(t, Y_t) = H(0, 0) + \int_0^t H_y(s, Y_s) dY_s$$

Beweis:

Nach Satz 2.2.7 gilt wegen (3.5) und da $(Z_{r+t} - Z_t)_{0 \leq r \leq 1-t}$ eine Brownsche Bewegung ist

$$G(v, t, y) = E(G(v, t+s, y + Z_{s+t} - Z_t)) \text{ f.a. } (v, y) \in \text{Bild}(\nu) \times \mathbb{R}, 0 < t \leq t+s \leq 1$$

$$\stackrel{r:=s+t}{=} E(G(v, r, y + Z_r - Z_t)) \text{ f.a. } (v, y) \in \text{Bild}(\nu) \times \mathbb{R}, 0 < t \leq r \leq 1$$

(3.22)

Folglich:

$$\begin{aligned}
 E[G(v, r, Z_r)|\mathcal{F}_t] &= E[G(v, r, Z_t + (Z_r - Z_t))|\mathcal{F}_t] \\
 &= E(G(v, r, Z_t + Z_r - Z_t)) \\
 &\stackrel{(3.22)}{=} G(v, t, Z_t)
 \end{aligned}$$

Die Martingaleigenschaft ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung nach y auf beiden Seiten. Es folgt analog zu (3.7):

$$\begin{aligned}
 E[G_y(v, r, Z_r)|\mathcal{F}_t] &= G_y(v, t, Z_t) \\
 \stackrel{(3.13)}{\Rightarrow} E[H(r, Z_r) - v|\mathcal{F}_t] &= H(t, Z_t) - v \\
 \Rightarrow E[H(r, Z_r)|\mathcal{F}_t] - v &= H(t, Z_t) - v \\
 \Rightarrow E[H(r, Z_r)|\mathcal{F}_t] &= H(t, Z_t)
 \end{aligned}$$

Mit Satz 2.2.7 erfüllt $H(t, Z_t)$ des Weiteren die Rückwärtswärmeleitungsgleichung. Es folgt mit der Formel von Itô unter der Berücksichtigung von $\langle X \rangle_t \equiv 0$ (nach Voraussetzung)

$$\begin{aligned}
 dH(t, Y_t) &= H_t dt + H_y dY_t + H_{yy} d\langle Y \rangle_t \\
 &= H_t dt + H_y dY_t + H_{yy} \underbrace{d\langle Z \rangle_t}_{\frac{1}{2}\sigma^2 dt} \\
 &= \underbrace{H_t dt + H_{yy} \frac{1}{2}\sigma^2 dt}_{=0} + H_y dY
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Unter gegebenen Bedingungen stellt sich der Gesamtnachfrageprozess Y_t aus Sicht des Marketmakers als Wiener-Prozess dar.

Lemma 3.1.8. :

Erfüllt ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$ die Gleichgewichtsbedingung und die Funktion $G(v, t, x)$ die zugehörige Bellman-Bedingung, dann ist $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $\sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})$.

Beweis:

Aus Lemma 3.1.7 folgt:³⁹

$$dH(t, Y_t) = H_y dY$$

Für Y lässt sich wegen $H_y > 0$ damit folgern:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{H_y}{H_y} dY_t \\ \stackrel{\text{Itô}}{\Leftrightarrow} dY_t &= \frac{1}{H_y} dH(t, Y_t) \\ \Leftrightarrow Y_t &= Y_0 + \int_0^t \frac{1}{H_y(s, Y_s)} dH(s, Y_s) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Y_t ist somit ein stetiges Martingal bzgl. $\sigma(Y_t)$ mit quadratischer Variation:

$$\langle Y \rangle_t = \langle Z \rangle_t = \sigma^2 t$$

Die Behauptung folgt mit dem Satz von Levy.⁴⁰

□

Mithilfe dieser Lemmata lassen sich nun zentrale Aussagen über das Marktgleichgewicht beweisen. Das erste Theorem beschreibt, wie eine optimale Handelstrategie des Insiders für eine konkrete Preisfunktion aussieht. Dabei und im Folgenden seien die Bezeichnungen $\mathcal{N}$ als die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit Erwartungswert null und Varianz σ^2 und $k := F^{-1} \circ \mathcal{N}$ eingeführt, wobei F^{-1} die Pseudoinverse der im jeweiligen Kontext gegebenen Verteilungsfunktion F sein soll.

Theorem 3.1.9. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$, wobei die Verteilungsfunktion von ν durch F gegeben ist. Die Preisfunktion des Marktmodells $\mathcal{M}$ sei gegeben durch

$$H(t, y) := E(k(y + Z_1 - Z_t))$$

³⁹Unter der Berücksichtigung, dass wegen Lemma 3.1.5 X_t stetig ist und der Martingalanteil konstant null ist.

⁴⁰Vgl. z. B. [JYC09] S. 31 f..

Dann erfüllt $\mathcal{M}$ die Gleichgewichtsbedingung, wenn

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{k^{-1}(\nu) - Z_s}{(1-s)^2} ds. \quad (3.24)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} H(t, y) &= E(k(y + \underbrace{Z_1 - Z_t}_{\text{unabh. von } Z_t})) \\ &= E(k(Z_t + \underbrace{Z_1 - Z_t}_{\text{unabh. von } Z_t}) | Z_t = y) \\ &= E(k(Z_1) | Z_t = y) \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.1.6}}{=} E(k(Y_1) | \sigma((Y_t)_{0 \leq t \leq 1}) \cap \{Y_t = y\}) \\ &= E(H(1, Y_1) | \sigma((Y_t)_{0 \leq t \leq 1}) \cap \{Y_t = y\}) \\ &\Leftrightarrow H(t, Y_t) = E(H(1, Y_1) | \sigma((Y_t)_{0 \leq t \leq 1}) \cap \{Y_t = Y_t\}) \\ &\Leftrightarrow H(t, Y_t) = E(H(1, Y_1) | \sigma((Y_s)_{0 \leq s \leq t})) \end{aligned}$$

Also gilt die Rationalität der Gleichgewichtsbedingung. Lemma 3.1.4 stellt sicher, dass eine Lösung der Bellman-Bedingung existiert. Aus Lemma 3.1.5 folgt, dass X_t optimal ist. Die Bedingungen der Lemmata sind dabei per Definition erfüllt:

- Lemma 3.1.4:
 $k \in C^1(\mathbb{R})$ ist streng monoton wachsend ✓
 und H hat die in Lemma 3.1.4 gegebene Form. ✓
- Lemma 3.1.5:
 X_t hat einen Martingalanteil von null ✓
 und X_t hat P-f.s. stetige Pfade ✓

□

Das folgende Theorem besagt, dass die obige Preisfunktion schon die einzige Preisfunktion ist, die zur Lösung über die Bellman-Bedingung genutzt werden kann.

Theorem 3.1.10. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$ im Gleichgewicht,

wobei die Verteilungsfunktion von ν durch F gegeben ist. Existiert eine Funktion $G(v, t, x)$, so dass die Bellman-Bedingung erfüllt ist dann existiert eine monoton steigende Funktion $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass:

$$H(t, y) = E(k(y + Z_1 + Z_t)) \quad (3.25)$$

Beweis:

In Lemma 3.1.7 wurde unter gegebenen Bedingungen die Martingaleigenschaft von $H(t, Z_t)$ nachgewiesen. Damit gilt $H(t, y) = E(H(1, y + Z_1 - Z_t))$.

Aus Lemma 3.1.5 folgt für das Gleichgewicht $H(1, Y_1) = \nu$ fast sicher und damit $Y_1 = H^{-1}(1, \nu)$ fast sicher. Nach Lemma 3.1.8 ist Y_1 normalverteilt und somit $H(1, \cdot) = F^{-1} \circ \mathcal{N}$. Mit $H(t, y) = E(H(1, y + Z_1 - Z_t))$ ergibt sich die Behauptung. $\square$

Zusammenfassend kann über das Marktmodell im Gleichgewicht gesagt werden:

Theorem 3.1.11. :

Ist für ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$ die Gleichgewichtsbedingung und für eine Funktion $G(v, t, y)$ die Bellman-Bedingung erfüllt, so gilt

$$dP_t = H_y(t, Y_t) dY_t \quad (3.26)$$

$$H_y(t, Y_t) \text{ ist Martingal bzgl. } \sigma((Y_s)_{0 \leq s \leq t}) \quad (3.27)$$

Beweis:

Aus Lemma 3.1.7 folgt (3.26). (3.27) ist hier äquivalent dazu dass $H_y(Z_t, t)$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}$ ist, da bezüglich der jeweiligen Filtrationen Verteilungsgleichheit vorherrscht. Aus Theorem 3.1.10 folgt, dass $H(t, y) = E(H(1, y + Z_1 + Z_t))$. Die Behauptung ergibt sich durch differenzieren auf beiden Seiten.⁴¹ $\square$

Insgesamt ergibt sich in diesem Setting für das Marktmodell im Gleichgewicht also eine eindeutige Preisfunktion die in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von ν analytisch angegeben werden kann. Die Handelsstrategie des Insiders ist im Optimum nicht eindeutig, der Handel kann zum Beispiel beliebig nah an $t=1$ verschoben werden. Durch Lemma 3.1.5 sind allerdings wichtige Eigenschaften schon festgelegt. Zum einen wird der Insider optimaler Weise keine diskreten Order abgeben zum anderen handelt er auch im stetigen Anteil so dass er für den Marketmaker unsichtbar

⁴¹Dass die Ableitung in den Erwartungswert gezogen werden darf, ergibt sich analog zu (3.6) ff..

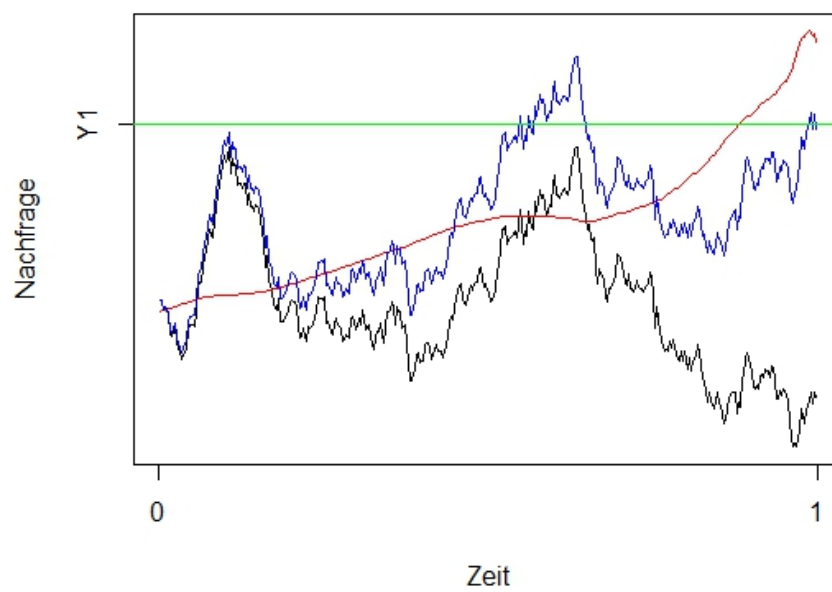


Abbildung 2: Simulierte Trajektorien der Nachfrage des Noisetraders (schwarz), des Insiders (rot) und gesamt (blau), sowie die Endnachfrage (grün) eines Marktmodells im Gleichgewicht. (Bezüglich der Erstellung dieser Grafik sei auf Anhang E verwiesen.)

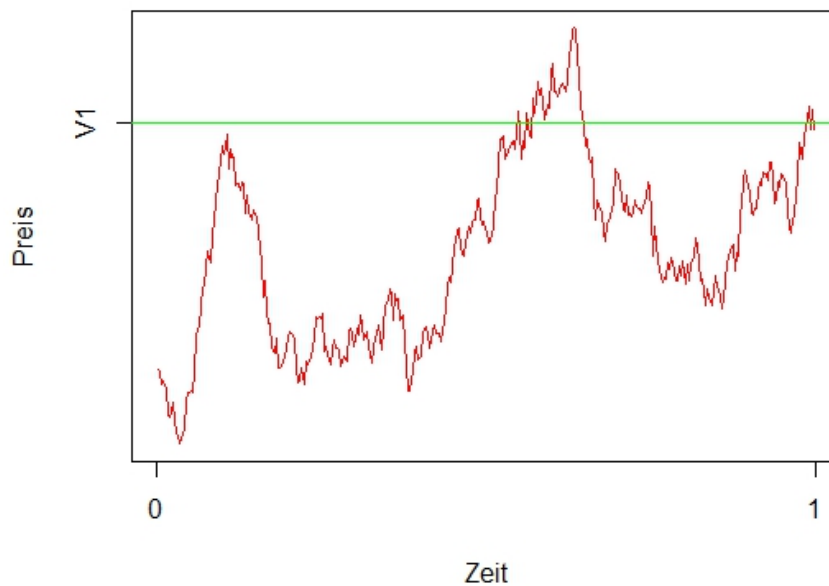


Abbildung 3: Simulierte Trajektorie des Preisprozesses (rot), sowie der Endpreis (grün) eines Marktmodells im Gleichgewicht. (Bezüglich der Erstellung dieser Grafik sei auf Anhang E verwiesen.)

bleibt. Dieses macht intuitiv Sinn, da der Insider seinen Gewinn ja gerade aus dem Informationsvorsprung erhält. In Abbildung 2, die eine beispielhafte Trajektorie der verschiedenen Nachfrageprozesse dargestellt, spiegelt sich diese Eigenschaft wider. In Abbildung 3, die die zugehörige Trajektorie des Preisprozesses abbildet, ist zu sehen, wie der Preis gegen V_1 konvergiert, und auch die Form einer Brownschen Bewegung scheint plausibel.

Da es keinen Hinweis gibt, dass sich die in diesem Zusammenhang als grundsätzlich suboptimal herausgestellten Handelsstrategien unter weniger restriktiven Annahmen optimal werden, soll auf sie für den Rest dieses Kapitels in der Ausgangsmenge der möglichen Handelsstrategien direkt verzichtet werden. Eine Begründung von der ökonomischen Seite kann über die damit verbundene Identifizierung und rechtliche Folgen für den Insider gegeben werden.

Für die gewonnenen Resultate wurden einige Annahmen getroffen, die im Folgenden einzeln gelockert werden sollen, um die Abhängigkeit der Ergebnisse von diesen

aufzuzeigen. Ein risikoneutraler Insider kann als sehr unrealistisch angesehen werden und intuitiv sollte klar sein, dass mit der Einführung von Risikoaversion eine Verschiebung des Handelns nach hinten nicht mehr optimal sein wird. Untersucht wird diese Situation in Unterkapitel 3.3. Ähnlich kritisch kann die Annahme von perfekter Information angesehen werden. Das Modell unter imperfekter Information für den Insider wird im nächsten Kapitel untersucht. Im anschließenden Unterkapitel soll allerdings zunächst gezeigt werden, dass eine Erweiterung der Menge möglicher Preisfunktionen auf solche, die von der gesamten vergangenen Nachfragetrajektorie abhängen, zu keinen wesentlichen Veränderungen im Gleichgewicht führen.

Dieses Unterkapitel schließt mit dem Spezialfall, dass ν log-normal verteilt ist. Wie das folgende Korollar zeigt, ergibt sich in dieser Situation der Preisprozess im Gleichgewicht zu einer geometrischen Brownschen Bewegung.

Korollar 3.1.12. :

Gegeben ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H)$ mit $\nu \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma_\nu^2)$ (log-normal verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ_ν^2), so dass ein G existiert welches die Bellman-Bedingung erfüllt. Dann ist der Preisprozess P_t bzgl. $\sigma(Y_t)$ eine geometrische Brownsche Bewegung.

Beweis:

Nach Theorem 3.1.10 gilt

$$H(t, y) = E(k(y + Z_1 + Z_t)),$$

wobei $k(y) = \mathcal{LN}^{-1} \circ \mathcal{N}(y) = e^{\mu + \lambda y}$ mit $\lambda := \frac{\sigma_\nu}{\sigma}$. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} H(t, y) &= E(e^{\mu + \lambda(y + Z_1 + Z_t)}) \\ &= e^{\mu + \lambda y + \sigma_\nu^2 \frac{1-t}{2}} \\ \Rightarrow H_y(t, y) &= \lambda e^{\mu + \lambda y + \sigma_\nu^2 \frac{1-t}{2}} \\ \Rightarrow H_y(t, Y_t) &= \lambda P_t \end{aligned}$$

Theorem 3.1.11 liefert dann:

$$dP_t = \lambda P_t dY_t$$

Mit Lemma 3.1.8 ergibt sich die Behauptung.

□

3.2 Erweiterung der möglichen Preisfunktionen

Im letzten Unterkapitel wurde aufgezeigt, welche Eigenschaften das Marktmodell im Gleichgewicht haben muss. Unter anderem wurde gezeigt, dass es für den Insider suboptimal ist Handelsstrategien umzusetzen, welche einen Martingalanteil besitzen, welcher ungleich null ist, oder diskrete Order abzugeben. Diese Form soll zur Vereinfachung der Beweise im Rest des Kapitels angenommen werden. Hierzu wird die Menge der zulässigen Semimartingale als Handelsstrategie für den Insider eingeschränkt.

Definition 3.2.1. *(Die Menge zulässiger Handelsstrategien des Insiders $\bar{\chi}$):*

Es bezeichne $\bar{\chi}$ die Menge aller Semimartingale, welche von der folgenden Form sind

$$dX_t = \alpha_t dt, \quad (3.28)$$

wobei α ein $\mathcal{F}$ -adaptierter Prozess ist, so dass $E(\int_0^1 |\alpha_t|^n dt) < \infty$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Ferner

bezeichne $\mathcal{A} := \{\alpha : (\int_0^t \alpha_s ds)_{0 \leq t \leq 1} \in \bar{\chi}\}$ DIE MENGE ALLER PROZESSE, DIE EINE ZULÄSSIGE HANDELSSTRATEGIE ERZEUGEN.

Bei gegebener Anfangsbedingung lässt sich X_t durch α_t identifizieren. Die Suche nach einem optimalen X_t lässt sich somit durch die Suche nach einem optimalen α_t ersetzen. Bisher wurde eine einfache gedächtnislose von der momentanen Nachfrage abhängige Preisfunktion vorausgesetzt. [Cho03] kann zeigen, dass sich das Ergebnis aus dem letzten Unterkapitel auch für eine erweiterte Klasse an Preisfunktionen, nämlich solchen, die vom ganzen Pfad abhängen, einstellt. Die Änderungen der Ausgangssituation werden in der folgenden Definition festgehalten:

Definition 3.2.2. *(Marktmodell Version 2):*

Gegeben sei

(a) eine $\mathcal{F}_0$ -messbare quadratisch integrierbare stetige Zufallsgröße ν .

Seien ferner folgende stochastische Prozesse gegeben:

- (b) Eine von ν stochastisch unabhängige Brownsche Bewegung $(Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ mit quadratischer Variation $\sigma^2 t$,
- (c) $(X_t)_{0 \leq t \leq 1} \in \bar{\mathcal{X}}$,
- (d) $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1} := (X_t)_{0 \leq t \leq 1} + (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$,
- (f) $P_t := \mathbb{1}_{[0,1)}(t) \cdot H(t, \xi_t) + \mathbb{1}_{\{1\}}(t) \cdot V_1$, wobei
 $\xi_t := \int_0^t \lambda(s) dY_s$,
 $H : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $H \in C^{2,1}((0, 1) \times \mathbb{R}) \cap C^{1,1}([0, 1] \times \mathbb{R})$, $H(t, \cdot)$ streng monoton steigend für $0 \leq t \leq 1$ und λ eine differenzierbare nach unten beschränkte Funktion der Zeit für $0 \leq t \leq 1$.⁴²

Ferner sei gefordert:

(g)

$$\begin{aligned}
 E(H(1, \int_0^1 \lambda(s) dZ_s)^2) &< \infty, \\
 E(\int_0^1 H(t, \int_0^t \lambda(s) dZ_s)^2 dt) &< \infty, \\
 E(\int_0^1 H(t, Y_t)^2 dt) &< \infty.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Weiter sei

(h) $\mathcal{F}_t = \sigma(\nu, (Z_s)_{0 \leq s \leq t})$ für alle $0 \leq t \leq 1$.

Das Tupel $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ nennt man ein MARKTMO-
DELL.

Ist im Folgenden von Marktmodell die Rede, so soll bis auf weiteres das in der Version 2 gemeint sein. Das folgende Theorem fasst die Ergebnisse dieses Unterkapitels zusammen.⁴³

⁴² λ wird ABHÄNGIGKEITSFUNKTION genannt.

⁴³Alle Ergebnisse dieses und des nächsten Unterkapitels stammen falls nicht anders angegeben von [Cho03].

Theorem 3.2.3. :

Gegeben sei eine Preisfunktion H und eine dazugehörige Abhängigkeitsfunktion $\lambda(t)$. Dann existiert ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ im Gleichgewicht genau dann, wenn

(a) $\lambda(t)$ konstant ist,

(b) $E(X_t | \sigma(Y_s)_{0 \leq s \leq t}) = 0$

(c) und X so gewählt ist, dass $H(1, \int_0^1 \lambda(s) dY_s) = \nu$.

Vor dem Beweis des Theorems sollen zunächst zentrale Erkenntnisse sukzessiv hergeleitet werden. Durch die Einschränkung auf die zulässigen Handelsstrategien liegt die Situation aus Kapitel 2.4 vor. Das folgende Lemma macht sich dies zu Nutze und hält zunächst fest, dass die Bellman-Bedingung in dieser Situation zu einer notwendigen Bedingung des Optimums beziehungsweise des Gleichgewichts wird.

Lemma 3.2.4. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ im Gleichgewicht. Dann existiert eine Funktion $G(v, t, x) \in C^{0,1,2}(\text{Bild}(\nu) \times [0, 1] \times \mathbb{R})$, so dass für $v \in \text{Bild}(\nu)$ die HJB-Gleichung erfüllt ist.

Beweis:

In der gegebenen Situation stellt sich das Optimierungsproblem der Gleichgewichtssituation wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \bar{\chi}} E(W_1) &= \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E(W_1) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E\left(\int_0^1 (\nu - P_t) dX_t\right) \\ &= \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E\left(\int_0^1 \underbrace{(\nu - H(t, \xi_t)) \alpha(t)}_{=: N_1(\xi_t, \alpha(t), t)} dt\right) \end{aligned}$$

Damit erfüllen N_1 , α und ξ_t die Bedingungen aus Unterkapitel 2.4. ξ_t entspricht hierbei X_t aus Unterkapitel 2.4 und hat mit

$$d\xi_t = \lambda(t) dY_t = \lambda(t) \alpha dt + \lambda(t) \sigma dW_t$$

die benötigte Form. Ferner ist $\lambda(t)\sigma > c \cdot \sigma > 0$, also mit der geforderten unteren Schranke versehen, und die Differenzierbarkeit von $\lambda(t)\alpha$ und $\lambda(t)\sigma$ ist nach Definition des Marktmodells gegeben. $\alpha(t)$ entspricht $u(t)$ in Unterkapitel 2.4 und die Behauptung folgt aus Satz 2.4.5. $\square$

Die Frage nach der optimalen Handelsstrategie läuft also wieder auf die Lösung der HJB-Gleichung hinaus. Das nächste Lemma gibt dabei Aufschluss über die Form möglicher optimaler Handelsstrategien.

Lemma 3.2.5. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ und eine Funktion $G \in C^{0,1,2}(\text{Bild}(\nu) \times [0, 1] \times \mathbb{R})$, so dass für $v \in \text{Bild}(\nu)$ $G(v, t, x)$ die HJB-Gleichung erfüllt. Dann gilt:

$$\lambda(t) \text{ ist konstant} \quad (3.30)$$

$$H(t, y) = E(H(1, y - \xi_1 - \xi_t)) \quad (3.31)$$

$$H_t + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2(t)H_{yy} = 0 \quad (3.32)$$

$$E[\alpha_t | \sigma((Y_s)_{0 \leq s \leq t})] = 0, \text{ für } 0 \leq t \leq 1 \quad (3.33)$$

$$Y \stackrel{\text{dist}}{=} Z \quad (3.34)$$

Sind umgekehrt (3.30) und (3.32) erfüllt, dann erfüllt G gegeben durch

$$\begin{aligned} G(v, t, y) &:= E(G(v, 1, y + \xi_1 - \xi_t)), \\ \text{mit } G(v, 1, y) &:= \int_y^{H^{-1}(1, v)} \frac{v - H(1, x)}{\lambda} dx \end{aligned} \quad (3.35)$$

für $v \in \text{Bild}(\nu)$ die HJB-Gleichung.

Beweis:

Der Aufbau des Beweises ist:

Die direkt aus der HJB-Gleichung folgenden Gleichungen (3.36) und (3.37) werden

geschickt abgeleitet und durch Umformungen und Einsetzungen eine Differentialgleichung für H gewonnen. Diese kann mit der Feynman-Kac-Formel gelöst werden. Diese Lösung impliziert, dass $\lambda(t)$ konstant sein muss und damit alle Aussagen des letzten Unterkapitels anwendbar sind.

Konkret ergibt sich (2.16) zu

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (G_t + \lambda \alpha G_\xi + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 G_{\xi\xi} + (v - H) \alpha) = 0.$$

Da der zu maximierende Ausdruck durch geeignete Wahl von $\alpha \in \mathbb{R}$ sonst beliebig groß wird, muss

$$\lambda G_\xi + (v - H) = 0 \tag{3.36}$$

gelten. Damit ergibt sich aus der restlichen Gleichung:

$$\lambda G_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 G_{\xi\xi} = 0 \tag{3.37}$$

Durch Ableiten von (3.36) nach t ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda_t G_\xi + \lambda G_{\xi t} - H_t &= 0 \\ \Leftrightarrow G_{\xi t} &= \frac{1}{\lambda} H_t - \frac{\lambda_t}{\lambda} \underbrace{G_\xi}_{(H-v)\frac{1}{\lambda}} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ableiten von (3.36) nach ξ ergibt:

$$\lambda G_{\xi\xi} = H_\xi$$

Eingesetzt in (3.37) ergibt sich:

$$G_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda H_\xi = 0 \tag{3.39}$$

Ableiten von (3.39) nach ξ ergibt:

$$G_{t\xi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda H_{\xi\xi} = 0 \tag{3.40}$$

(3.38) mit (3.40) und Multiplikation von λ ergeben dann:

$$H_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 H_{\xi\xi} + (v - H) \frac{\lambda_t}{\lambda} = 0 \tag{3.41}$$

Anwendung der Feynman-Kac-Formel liefert⁴⁴

$$H(t, \xi) = \frac{\lambda(t)}{\lambda(1)} \underbrace{EH(1, \xi + \xi_1 - \xi_t)}_{\star} + \underbrace{v(1 - \frac{\lambda(t)}{\lambda(1)})}_{\star\star}, \quad (3.42)$$

weswegen $\lambda(t)$ konstant sein muss.⁴⁵ Damit ergibt sich die Situation wie im letzten Unterkapitel, d.h. dass die Preisfunktion in t nur von Y_t und nicht von dem vergangenen Pfad abhängt. Für konstantes λ ergibt sich (3.42) zu:

$$H(t, \xi) = EH(1, \xi + \xi_1 - \xi_t)$$

und somit (3.31). Weiter folgt (3.32) aus (3.41) und (3.33) sowie (3.34) aus Lemma 3.1.8.

Umgekehrt ergibt sich aus (3.30) und (3.32) die Erfüllung der Bellman-Bedingung bzw. der HJB-Gleichung aus Lemma 3.1.4 mit $k(x) := v - \frac{v-H(1,x)}{\lambda}$. $\square$

Es lässt sich nun das anfangs gestellte Theorem beweisen.

Beweis:

(Zu Theorem 3.2.3):

Sei zunächst ein Gleichgewicht angenommen. Dann stellt Lemma 3.2.4 die Existenz einer die HJB-Gleichungen erfüllenden Funktion G sicher. a) und b) folgen dann aus Lemma 3.2.5 und aus Lemma 3.1.5 folgt c), da

$$\begin{aligned} H(1, \int_0^1 \lambda(s) dY_s) &\stackrel{\lambda \text{ konstant}}{=} H(1, \lambda Y_1) \\ &:= H^\lambda(t, Y_1) \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.1.5}}{=} \nu \end{aligned}$$

Für die Rückrichtung erhält man die Existenz einer die HJB-Gleichung erfüllenden Funktion G aus Lemma 3.2.5. Da a) gilt, sind die Bedingungen von Lemma 3.1.5 erfüllt und es ergibt sich die Optimalität unter c) und zusammen mit b) das Gleichgewicht. $\square$

In diesem Setting ändern sich die Eigenschaften des Marktmodells im Gleichgewicht

⁴⁴Vgl. [Ste10] Kapitel 15.

⁴⁵Per Annahme/Modellierung darf $H(t, \xi)$ und damit auch nicht $\star$ von v abhängen. Dementsprechend muss aber $\star\star$ null sein und damit $\frac{\lambda(t)}{\lambda(1)} = 1$.

also nicht. Im nächsten Unterkapitel wird der Einfluss der Risikoeinstellung des Insiders untersucht.

3.3 Berücksichtigung von Risikoaversion des Insiders

Bis jetzt wurde angenommen, dass der Insider bloß seinen erwarteten Gewinn maximieren möchte. Dies entspricht einem risikoneutralen Investor. Diese Annahme soll in diesem Unterkapitel gelockert werden. Es wird nun von einem Investor mit exponentieller Nutzenfunktion ($N(W) = \gamma e^{\gamma W}$ mit $\gamma < 0$) ausgegangen.⁴⁶ Das heißt im Gleichgewicht wählt der Insider eine Handelsstrategie, welchen den Nutzen anstatt des Gewinns maximiert. Somit muss die Gleichgewichtsbedingung leicht abgeändert werden zu:

Definition 3.3.1. (Gleichgewichtsbedingung Version 2):

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$. Sei χ die Menge aller Semimartingale $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ bzgl. $\mathcal{W}$ die (3.1) erfüllen. $\mathcal{M}$ erfüllt die GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(a) (Optimalität)

$$E(N(W_1(X))) = \sup_{X_t^* \in \chi} E(N(W_1(X^*))), \quad (3.43)$$

$$\text{wobei } W_1(X) = (\nu - P_{1-})X_1 + \int_{[0,1)} X_t dP_t.$$

(b) (Rationalität)

$$H(t, Y_t) = E[P_1 | \sigma((Y_s)_{s \leq t})] \quad (3.44)$$

Das Optimierungsproblem ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E\left(\gamma e^{\gamma \int_0^1 (v-H)\alpha(t) dt}\right) \\ &= \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E\left(\underbrace{\int_0^1 \gamma e^{\gamma \int_0^t (v-H)\alpha^*(s) ds} (\gamma(v-H)\alpha(t)) dt}_{\substack{=G \text{ im Supremum} \\ =: N_1}}\right) \end{aligned}$$

⁴⁶Diese Form entspricht nicht der klassischen, in Unterkapitel 2.3 angegebenen Form der exponentiellen Nutzenfunktion. Es bildet aber das gleiche Entscheidungsverhalten ab. Dass die Nutzenfunktion negative Werte annimmt, ist nicht von Bedeutung, da die Nutzenfunktion nur ordinalen Charakter hat.

und die HJB-Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (G_t + \lambda \alpha G_\xi + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 G_{\xi\xi} + G\gamma(v - H)\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha(\lambda G_\xi + G\gamma(v - H)) + G_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 G_{\xi\xi}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Die Ergebnisse aus Unterkapitel 2.4 sind anwendbar. Im Folgenden sei immer von der exponentiellen Nutzenfunktion und damit insbesondere von (3.45) ausgegangen, wenn von der Erfüllung der HJB-Gleichung die Rede ist.

Für dieses Setting lässt sich ein ähnliches Ergebnis wie zuvor herleiten.

Theorem 3.3.2. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ im Gleichgewicht und ein $G \in C^{0,1,2}(\text{Bild}(\nu) \times [0, 1] \times \mathbb{R})$, so dass für $v \in \text{Bild}(\nu)$ $G(v, t, x)$ die HJB-Gleichung erfüllt. Dann ist ν normalverteilt und H und λ eindeutig bestimmt durch

$$\begin{aligned} H(t, \xi) &= m + \xi \\ \lambda^*(t) &= \frac{\lambda^*(1)}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(1)(1-t) + 1}, \\ \text{mit } \lambda^*(1) &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma \Sigma}{2}\right)^2} + \frac{\gamma \Sigma}{2}, \end{aligned}$$

wobei m der Erwartungswert von ν und Σ die Varianz ist. Sind andersrum diese Bedingungen erfüllt, so ist X_t genau dann optimal, wenn

$$\begin{aligned} E(\alpha_t | \mathcal{F}_t^Y) &= 0 \\ H(1, \xi_1) &= \nu \end{aligned}$$

gilt.

Um dieses Ergebnis nachzuweisen, soll im folgenden Lemma zunächst die Auswirkung der Nutzenfunktion auf die Preisfunktion aufgezeigt werden. Diese Veränderung ist es, die letztendlich das folgende Ergebnis erzeugt:

Lemma 3.3.3. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$, so dass eine Funktion $G \in C^{0,1,2}(\text{Bild}(\nu) \times [0, 1] \times \mathbb{R})$ existiert, die für $v \in \text{Bild}(\nu)$ die HJB-Gleichung erfüllt. Dann gilt

a)

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)^{-1} = -\gamma\sigma^2\frac{\partial}{\partial\xi}H(t, \xi) \quad (3.46)$$

b)

$$H_t + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2(t)H_{yy} = 0 \quad (3.47)$$

c) Die Bepreisungsfunktion ist von der folgenden Form:

$$H(t, \xi) = H(0, 0) + q\xi$$

wobei $q = -\frac{1}{\gamma\sigma^2}\frac{d}{dt}\lambda(t)^{-1}$ und $\lambda(t) = \frac{\lambda(1)}{\gamma\sigma^2q\lambda(1)(1-t) + 1}$

Erfüllt umgekehrt die Preisfunktion H die Bedingungen a) und b), dann erfüllt die folgende Funktion G für $v \in \text{Bild}(\nu)$ die HJB-Gleichung:

$$G(v, t, \xi) = \gamma\sqrt{\lambda(1)\lambda(t)^{-1}} \exp\left(\gamma\frac{q}{2\lambda(t)}\left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q}\right)^2\right) \quad (3.48)$$

Beweis:

Folgende Beweisstruktur liegt vor:

Wie schon in Lemma 3.2.5 wird aus der HJB-Gleichung durch geschicktes Umformen und Ableiten eine partielle Differentialgleichung für H hergeleitet. Die eindeutige Lösung impliziert die Behauptungen. Für die Rückrichtung genügt es entsprechende Ableitungen von G nachzurechnen.

Ausgangspunkt ist (3.45)

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha(\lambda G_\xi + G\gamma(v - H)) + G_t + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 G_{\xi\xi}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda G_\xi + \gamma(v - H)G &= 0 \quad (3.49) \\ \text{und } G_t + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 G_{\xi\xi} &= 0 \quad (3.50) \end{aligned}$$

Ableiten von (3.49) nach ξ ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda G_{\xi\xi} + \gamma(v - H)G_\xi + \gamma(-H_\xi)G &= 0 \\ \stackrel{(3.49)}{\Rightarrow} \lambda G_{\xi\xi} + \gamma(v - H)\left(-\frac{\gamma(v - H)G}{\lambda}\right) - \gamma H_\xi G &= 0 \\ \Rightarrow G_{\xi\xi} - \frac{\gamma}{\lambda^2}G(\gamma(v - H)^2 + H_\xi\lambda) &= 0 \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.50)}{\Rightarrow} -\frac{2G_t}{\sigma^2\lambda^2} - \frac{\gamma}{\lambda^2}G(\gamma(v-H)^2 + H_\xi\lambda) = 0 \\
& \Rightarrow G_t + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma G(\gamma(v-H)^2 + H_\xi\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ableiten nach ξ ergibt:

$$\begin{aligned}
& G_{\xi t} + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(G_\xi(\gamma(v-H)^2 + H_\xi\lambda) + G(\gamma 2(v-H))(-H_\xi) + H_{\xi\xi}\lambda) = 0 \\
& \stackrel{(3.49)}{\Rightarrow} G_{\xi t} + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma\left(-\frac{\gamma G}{\lambda}(v-H)(\gamma(v-H)^2 + H_\xi\lambda) + G(2\gamma(v-H))(-H_\xi) + H_{\xi\xi}\lambda\right) = 0 \\
& \Rightarrow -\frac{1}{2}\sigma^2\gamma\left(-\frac{\gamma^2 G}{\lambda}(v-H)^3 + 3\gamma(v-H)H_\xi - H_{\xi\xi}\lambda\right) = G_{\xi t}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ableiten von (3.49) nach t ergibt:

$$\begin{aligned}
& \lambda_t G_\xi + \lambda G_{\xi t} + \gamma(v-H)G_t + \gamma(-H_t)G = 0 \\
& \stackrel{(3.50)}{\Rightarrow} \lambda_t G_\xi + \lambda G_{\xi t} - \gamma(v-H)\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 G_{\xi\xi} - \gamma(H_t)G = 0 \\
& \stackrel{(3.53)}{\Rightarrow} \lambda_t G_\xi + \lambda G_{\xi t} - \frac{\gamma^2(v-H)\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}{\lambda^2}G(\gamma(v-H)^2 + H_\xi\lambda) - \gamma(H_t)G = 0 \\
& \stackrel{(3.49)}{\Rightarrow} \lambda_t \frac{\gamma(v-H)G}{\lambda} + \lambda G_{\xi t} - G\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^3(v-H)^3 + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda(v-H)H_\xi - \gamma H_t\right) = 0 \\
& \Rightarrow G\left(\frac{\lambda_t}{\lambda^2}\gamma(v-H) - \frac{\sigma^2\gamma^3}{2\lambda}(v-H)^3 + \frac{1}{2}\sigma^2(v-H)H_\xi - \frac{\gamma}{\lambda}H_t\right) = G_{\xi t}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Gleichsetzen von (3.53) und (3.54) ergibt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sigma^2\gamma G\left(\frac{\gamma^2}{\lambda}(v-H)^3 + 3\gamma(v-H)H_\xi - H_{\xi\xi}\lambda\right) \\
& = G\left(\frac{\lambda_t}{\lambda^2}\gamma(v-H) - \frac{\sigma^2\gamma^3}{2\lambda}(v-H)^3 + \frac{1}{2}\sigma^2(v-H)H_\xi - \frac{\gamma}{\lambda}H_t\right) \\
& \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\sigma^2\gamma^2 H_\xi - \frac{\lambda_t}{\lambda^2}\gamma - \frac{\sigma^2\gamma^2}{2}H_\xi\right)(v-H) - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma H_{\xi\xi}\lambda + \frac{\gamma}{\lambda}H_t = 0
\end{aligned}$$

Umstellen und Multiplizieren mit $\frac{\lambda}{\gamma}$ ergibt:

$$H_t + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 H_{\xi\xi} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\gamma H_\xi - \underbrace{\frac{\lambda_t}{\lambda^2}}_{=\frac{\partial}{\partial t}(\lambda^{-1})}\right)\lambda(v-H) = 0 \tag{3.55}$$

Dies ist eine nichtlineare parabolische partielle Differentialgleichung welche eindeutig durch

$$\begin{aligned}
 H(t, \xi) &= H(0, 0) + q\xi, \\
 \text{mit } q &= -\frac{1}{\gamma\sigma^2} \frac{d}{dt} \lambda(t)^{-1} \\
 \text{und } \lambda(t) &= \frac{\lambda(1)}{\gamma\sigma^2 q \lambda(1)(1-t) + 1}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

gelöst wird.⁴⁷

Somit ist Teil c) gezeigt. Aus (3.56) folgt insbesondere:

$$H_\xi = q = -\frac{1}{\gamma\sigma^2} \frac{d}{dt} \lambda(t)^{-1} \tag{3.57}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \lambda(t)^{-1} = -\gamma\sigma^2 H_\xi \tag{3.58}$$

und somit a). Aus (3.57) folgt $H_{\xi\xi} = 0$. Unter Berücksichtigung von a) folgt aus (3.55), dass auch $H_t = 0$ gilt und somit b).

Dass (3.48) die HJB-Gleichung erfüllt, lässt sich direkt nachrechnen. Dies ist in Anhang C geschehen. $\square$

Ob zu einer Preisfunktion eine optimale Strategie existiert, besagt das folgende Lemma.

Lemma 3.3.4. :

Gegeben sei ein Marktmodell $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ und $G \in C^{0,1,2}(\text{Bild}(\nu) \times [0, 1] \times \mathbb{R})$, so dass für $v \in \text{Bild}(\nu)$ $G(v, t, x)$ die HJB-Gleichung erfüllt. Dann ist $X_t \in \bar{\chi}$ genau dann optimal, wenn H (3.46) und (3.47) erfüllt und α folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- $E[\alpha_t | \mathcal{F}_t^Y] = 0$
- $H(1, \xi_1) = \nu$

Beweis:

Da die Existenz einer Lösung der HJB-Gleichung gesichert ist, ist die Optimalität von X mit der Erfüllung der HJB-Gleichung äquivalent. (3.46) und (3.47) stellen

⁴⁷Vgl. z. B. [CIL92].

den ersten Teil der HJB-Gleichung sicher, $H(1, \xi_1) = \nu$ den zweiten und $E[\alpha_t | \mathcal{F}_t^Y] = 0$ die Rationalität des Preises. Aus diesen Bedingungen folgt also das Gleichgewicht. Liegt umgekehrt ein Gleichgewicht vor, gelten (3.46), (3.47) und $H(1, \xi_1) = \nu$ aufgrund der erfüllten HJB-Gleichung und wegen der Rationalität des Preises $E[\alpha_t | \mathcal{F}_t^Y] = 0$. $\square$

Das anfangs aufgestellte Theorem kann nun bewiesen werden.

Beweis:

(des Theorems):

Bei gegebenem Optimum folgt aus der HJB-Gleichung insbesondere:

$$H(1, \xi_1) = \nu$$

Nach Lemma 3.3.3 gilt weiter:

$$H(1, \xi_1) = H(0, 0) + q\xi_1 = \nu$$

Nun ist $\xi_1 = \int_0^1 \lambda(s)\alpha(s)ds + \int_0^1 \lambda(s)\sigma dW_s$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert null und Varianz $\sigma^2 \int_0^1 \lambda^2(s)ds$. Somit ist auch ν normalverteilt mit Erwartungswert $m := H(0, 0)$ und Varianz $\Sigma := q^2 \sigma^2 \int_0^1 \lambda^2(s)ds$. Lemma 3.3.3 folgend ergibt sich:

$$\lambda(t)q = \frac{\lambda(1)}{\gamma\sigma^2\lambda(1)(1-t) + 1}$$

Setzt man $\lambda^*(t) := \lambda(t)q$, so ist die eindeutige Lösung durch c) in Lemma 3.3.3 gegeben durch:

$$\begin{aligned} \lambda^*(t) &= \frac{\lambda^*(1)}{\gamma\sigma^2\lambda^*(1)(1-t) + 1} \\ \lambda^*(1) &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma\Sigma}{2}\right)^2} + \frac{\gamma\Sigma}{2} \end{aligned} \tag{3.59}$$

Für die Herleitung von (3.59) sei auf Anhang D verwiesen. Die Optimalität von X bei angegebenen Bedingungen folgt direkt aus Lemma 3.3.4 $\square$

Man kann $\lambda(t)$ als den Preisdruck zum Zeitpunkt t interpretieren. Im Gegensatz zum

Fall eines risikoneutralen Insiders ergibt sich in der Situation des risikoaversen Insiders kein konstanter Preisdruck sondern ein abnehmender. Dieses Verhalten hängt von der Intensität der Risikoaversion des Insiders ab. Im Grenzübergang ($\gamma \rightarrow 0$) wird die Preisdruckfunktion konstant, wie das folgende Korollar zeigt.

Korollar 3.3.5. :

Für $\lambda^*(t)$ in Theorem 3.3.2 gilt:

- $\lambda^*(\gamma, t)$ ist strikt monoton fallend in t und
- $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \lambda^*(\gamma, t) \equiv \text{konst.}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda^*(\gamma, t) &= \frac{\lambda^*(\gamma, 1)}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(\gamma, 1)(1-t) + 1} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \lambda^*(\gamma, t) &= \frac{(\lambda^*(\gamma, 1))^2 \gamma \sigma^2}{(\gamma \sigma^2 \lambda^*(\gamma, 1)(1-t) + 1)^2} \stackrel{\gamma < 0}{<} 0 \\ \text{und } \frac{\partial}{\partial t} \lambda^*(0, t) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^*(0, t) &\text{ ist konstant} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial t} \lambda^*(\gamma, t)$. □

Die Inklusion der Risikoaversion in das Modell führt somit zu einem geänderten Verhalten des Investors. Er versucht potentielle Gewinne schon früh zu erzielen und sorgt damit dafür, dass der Preis des Assets sich schon früh an den voraussichtlichen Preis im Zeitpunkt 1 annähert.

Im nächsten Kapitel wird untersucht wie sich das Marktmodell unter imperfekten dynamischen Informationen verhält.

4 Imperfekte dynamische Informationen

Die Annahme, dass der Insider zum Zeitpunkt 0 den exakten Preis des Assets im Zeitpunkt 1 kennt ist unrealistisch. In diesem Kapitel soll deswegen die Annahme der perfekten Information des Insiders aufgeweicht werden. Dabei nimmt man an, dass der Insider zwar den aktuellen, für die anderen Marktteilnehmer unbeobachtbaren Fundamentalwert des Assets kennt, dieser aber einem stochastischen Prozess folgt. Im Zeitpunkt 1 wird wie zuvor die Information allgemein bekannt und der Preis des Assets nimmt den des Fundamentalwertes an. Für den Fundamentalwert wird die folgende Dynamik angenommen:

$$V_t = \nu + \int_0^t \sigma_v(s) dB_s^1$$

Für $\sigma_v(s) \equiv 0$ erhält man also den Fall des letzten Kapitels.

Die Annahmen dieses Kapitels sind in der Version 3 des Marktmodells zusammengefasst.

Definition 4.0.6. (*Marktmodell Version 3*):

Gegeben sei

(a) *eine $\mathcal{F}_0$ -messbare quadratisch integrierbare stetige Zufallsgröße ν .*

Seien ferner folgende stochastische Prozesse gegeben:

(b) *Zwei unabhängige Brownsche Bewegungen $(Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ und $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ mit quadratischer Variation $\sigma^2 t$ bzw. t , die stochastisch unabhängig von ν sind,*

(c) *ein Semimartingal $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$,*

(d) $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1} := (X_t)_{0 \leq t \leq 1} + (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$,

(e) $(V_t)_{0 \leq t \leq 1} := \nu + \int_0^t \sigma_v^2(s) dB_s$, mit $\int_0^t \sigma_v^2(s) ds < \infty$, $\int_0^t \sigma_v(s) ds < \infty$ für $0 \leq t \leq 1$.

(f) $P_t := \mathbb{1}_{[0,1)}(t) \cdot H(t, \xi_t) + \mathbb{1}_{\{1\}}(t) \cdot V_1$, wobei

$$\xi_t := \int_0^t \lambda(s) dY_s,$$

$H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; $H \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, 1)) \cap C^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$, $H(t, \cdot)$ streng monoton steigend für $0 \leq t \leq 1$ und λ eine differenzierbare nach unten beschränkte Funktion der Zeit für $0 \leq t \leq 1$.⁴⁸

Ferner sei gefordert:

- (g) • $E(H(1, \int_0^1 \lambda(s) dZ_s)^2) < \infty$,
- $E(\int_0^1 H(t, \int_0^t \lambda(s) dZ_s)^2 dt) < \infty$,
- $E \int_0^1 H(t, \int_0^t \lambda(s) d(X_{t-} + Z_t))^2 dt < \infty$
- $E((h^{-1}(E(V_1|V_t)))^2) < \infty$ mit h^{-1} als die Inverse von $H(t, y)$.
- $\forall t \in [0, 1] : \int_0^t (\int_s^1 \sigma_v^2(r) dr + 1 - s)^{-2} ds < \infty$
- $\exists t^* \in [0, 1)$, so dass

$$1 - t > \int_t^1 \sigma_v^2(s) ds,$$

für alle $t \geq t^*$ und $\sigma_v(t)$ ist stetig auf $[t^*, 1]$.

- $\forall t \in [0, 1] : \int_t^1 \sigma_v^2(s) ds + 1 - t \leq 1$

Weiter sei

- (h) $\mathcal{F}_t = \sigma(\nu, (B_s)_{0 \leq s \leq t}, (Z_s)_{0 \leq s \leq t})$ für alle $0 \leq t \leq 1$.

Das Tupel $\mathcal{M} := (\mathcal{W}, \nu, (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}, (B_t)_{0 \leq t \leq 1}, \sigma_v(t), (X_t)_{0 \leq t \leq 1}, H, \lambda(t))$ nennt man ein MARKTMODELL.

In (g) sind einige Regularitätsbedingungen hinzugekommen. Sie stellen sicher, dass der Nachfrageprozess, gegeben der Filtration des Marketmakers endliche Variation hat, dass eine wohldefinierte Fragestellung existiert und dass die Information des Insiders mindestens so gut ist, wie die des Marketmakers bzw. ab einem Zeitpunkt t^* echt besser ist. Analog zu Kapitel 3 wird zunächst der Fall einer gedächtnislosen Preisfunktion betrachtet.

⁴⁸ λ wird ABHÄNGIGKEITSFUNKTION genannt.

4.1 Das Marktmodell im Gleichgewicht, mit risikoneutralem Insider, bei gedächtnisloser Preisfunktion

Ein Marktmodell für das $\lambda(t) \equiv 1$ gilt, heißt im Folgenden GEDÄCHTNISLOS. In diesem Setting kann man ein konkretes H und X angeben unter dem das Modell im Gleichgewicht ist und umgekehrt notwendige Bedingungen für selbiges finden. Die Hauptegebnisse lassen sich wie folgt in einem Theorem zusammenfassen:

Theorem 4.1.1. :

Gegeben ein gedächtnisloses Marktmodell $\mathcal{M}$ mit

$$H(t, y) = E(h(y + Z_1 - Z_t))$$

$$X_t = \int_0^t \frac{V_s - Y_s}{\Sigma_v^2(s) - s + \sigma^2} ds,$$

wobei $\Sigma_v(t) := \int_0^t \sigma_v^2(s) ds$.⁴⁹ Dann ist $\mathcal{M}$ im Gleichgewicht.

Ist umgekehrt ein gedächtnisloses Marktmodell im Gleichgewicht so gilt:

- X_t ist stetig und hat beschränkte Variation
- $Y_1 = V_1$

Das Theorem soll mit Hilfe der folgenden zwei Lemmata bewiesen werden.⁵⁰

Lemma 4.1.2. :

Gegeben sei ein gedächtnisloses Marktmodell $\mathcal{M}$ mit rationaler Preisfunktion H welche die Rückwärtswärmeleitungsgleichung erfüllt. Dann ist X_t genau dann optimal wenn

- a) der Prozess X_t stetig und von beschränkter Variation ist
- b) und $V_1 = H(1, Y_1)$.

Beweis:

Der Beweis hat folgendes Schema:

⁴⁹Diese Notation wird im Folgenden weiter benutzt ohne erneut definiert zu werden.

⁵⁰Alle Ergebnisse dieses Kapitels stammen, wenn nicht anders angegeben aus [Dan10].

Es soll zunächst nachgewiesen werden, dass es sich um eine hinreichende Bedingung handelt. Dazu wird mit Hilfe der Itô Formel und der Rückwärtswärmeleitungsgleichung eine stochastische Integralgleichung für den erwarteten Gewinn hergeleitet. Durch Angabe eines geeigneten G wird das Optimierungsproblem analog zum Beweis von Lemma 3.1.5 gelöst. Die Notwendigkeit wird anschließend durch den Nachweis der Suboptimalität anderer Handelsstrategien gezeigt.

Anwendung der Itô Formel auf $H(t, Y_t)$ ergibt:

$$\begin{aligned} H(t, Y_t) &= H(0, 0) + \int_0^t H_y(s, Y_{s-}) dY_s + \int_0^t H_t(s, Y_{s-}) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t H_{yy}(s, Y_{s-}) d[Y]_s + \sum_{s \leq t} (\Delta H(s, Y_s) - H_y(s, Y_{s-}) \Delta Y_s) \end{aligned}$$

Da $H(t, Y_t)$ die Rückwärtswärmeleitungsgleichung erfüllt gilt weiter:

$$\begin{aligned} H(t, Y_t) &= H(0, 0) + \int_0^t H_y(s, Y_{s-}) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_{yy}(s, Y_{s-}) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t H_{yy}(s, Y_{s-}) d[Y]_s + \sum_{s \leq t} (\Delta H(s, Y_s) - H_y(s, Y_{s-}) \Delta Y_s) \end{aligned}$$

Einsetzen von $[Y]_t = t + \langle X^c \rangle_t + 2\langle X^c, Z \rangle_t + \sum_{s \leq t} \underbrace{\Delta X_s}_{\Delta Y_s}$ ergibt:

$$\begin{aligned} H(t, Y_t) &= H(0, 0) + \int_0^t H_y(s, Y_{s-}) dY_s^c + \frac{1}{2} \int_0^t H_{yy}(s, Y_{s-}) d\langle X^c \rangle_s \\ &\quad + \int_0^t H_{yy}(s, Y_{s-}) d\langle X^c, Z \rangle_s + \sum_{s \leq t} \Delta H(s, Y_s) \end{aligned}$$

Es folgt:⁵¹

$$[X, H(\cdot, Y)]_1 = \int_0^1 H_y(Y_{s-}, s) d[X^c]_s + \int_0^1 H_y(Y_{s-}, s) d[X^c, Z]_s + \sum_{s \leq 1} \Delta H(s, Y_s) \Delta X_s$$

⁵¹Vgl. [Pro90] S.68.

Somit erhält man für den erwarteten Gewinn des Insiders:⁵²

$$E(W_1) = E(V_1 X_1 - \int_0^1 (H(s, Y_{s-})) dX_s + [X, V - H(\cdot, Y)]_1) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} &= E(V_1 X_1 - \int_0^1 (H(s, Y_{s-})) dX_s + [X, V]_1 - \int_0^1 H_y(Y_{s-}, s) d[X^c]_s \\ &\quad - \int_0^1 H_y(Y_{s-}, s) d[X^c, Z]_s - \sum_{s \leq 1} \Delta H(s, Y_s) \Delta X_s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sei jetzt eine Funktion $G(v, t, y)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} G(v, t, y) &:= E(j(v + \int_t^1 \sigma_v^2(s) dB_s, y + Z_1 - Z_t)), \\ \text{mit } j(v, y) &:= \int_y^{k(v)} (v - H(1, x)) dx, \end{aligned}$$

wobei $k(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend so definiert ist, dass $H(1, k(v)) = v$ erfüllt ist.

G erfüllt nach Lemma 2.2.6 die folgende partielle Differentialgleichung:

$$G_t + \frac{\sigma}{2} G_{yy} + \frac{\sigma_v^2(t)}{2} G_{vv} = 0 \quad (4.3)$$

und $G(v, 1, y) = j(v, y)$.

Damit gilt für festes v und beliebiges $y \neq k(v)$:

$$G(v, 1, y) = j(v, y) \geq 0 = V(v, 1, k(v))$$

Da $H(1, y)$ eine monoton wachsende Funktion ist gilt ferner aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{G(v, t, y + \epsilon) - G(v, t, y)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(\frac{E \int_{y+\epsilon+Z_1-Z_t}^{y+Z_1-Z_t} (v + \int_t^1 \sigma_v^2(s) dB_s - H(1, x)) dx}{\epsilon} \right) \\ &= -v - E \left(\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\int_{y+\epsilon+Z_1-Z_t}^{y+Z_1-Z_t} H(1, x) dx}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

⁵²Vgl. (3.4).

$$= E(H(1, y + Z_1 - Z_t)) - v$$

Aufgrund der Rationalität von $H(t, y)$ und analoger Argumentation für den linksseitigen Grenzwert erhält man:

$$G_y(v, t, y) + v - H(t, y) = 0 \quad (4.4)$$

Mit (4.2) erhält man somit:

$$E(W_1) = E(V_1 X_1 - \int_0^1 ((G_y(V_s, s, Y_{s-}) - V_s)) dX_s + [X, V]_1 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 (G_{yy}(V_s, s, Y_{s-})) d[X^c]_s \\ & - \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_{s-}) d[X^c, Z]_s - \sum_{s \leq 1} \Delta G_y(V_s, s, Y_{s-}) \Delta X_s \\ & = E(\underbrace{V_1 X_1 - V_1 X_1}_{=0} - \int_0^1 (G_y(V_s, s, Y_{s-})) dX_s + [X, V]_1 \\ & - \int_0^1 (G_{yy}(V_s, s, Y_{s-})) d[X^c]_s \\ & - \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_{s-}) d[X^c, Z]_s - \sum_{s \leq 1} \Delta G_y(V_s, s, Y_{s-}) \Delta X_s) \quad (4.6) \end{aligned}$$

Andersherum ergibt die Itô-Formel angewandt auf $G(V_s, s, Y_s)$:

$$\begin{aligned} E(G(V_1, 1, Y_1)) &= E(G(V_0, 0, 0) + \int_0^1 G_v(V_s, s, Y_s) dV_s + \int_0^1 G_y(V_s, s, Y_s) dY_s \\ &+ \int_0^1 G_t(V_s, s, Y_s) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{vv}(V_s, s, Y_s) d[V^c]_s + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) d[Y^c]_s \\ &+ \int_0^1 G_{vy}(V_s, s, Y_s) d[V, Y]_s + \sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s)) \\ &= E(G(V_0, 0, 0) + \underbrace{\int_0^1 G_v(V_s, s, Y_s) dV_s}_{E(\cdot)=0} + \int_0^1 G_y(V_s, s, Y_s) dY_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\frac{\sigma}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) dt - \frac{\sigma_v^2}{2} \int_0^1 G_{vv}(V_s, s, Y_s) dt}_{\Leftarrow (4.3)} \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{vv}(V_s, s, Y_s) d[V^c]_s + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) d[Y^c]_s \\
& + \underbrace{\int_0^1 G_{vy}(V_s, s, Y_s) d[V, Y]_s}_{=[V, Y]_1} + \sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s)) \\
& = E(G(V_0, 0, 0)) + \int_0^1 G_y(V_s, s, Y_{s-}) dX_s + \sum_{s \leq 1} \Delta G_y(V_s, s, Y_s) \Delta X_s \\
& \underbrace{-\frac{\sigma}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) d[Z^c]_s + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) d[X^c]_s}_{=0} \\
& + \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_s) d[X, Z]_s \\
& \underbrace{-\frac{\sigma_v^2}{2} \int_0^1 G_{vv}(V_s, s, Y_s) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 G_{vv}(V_s, s, Y_s) d[V]_s}_{=0} \\
& + \underbrace{\int_0^1 G_{yv}(V_s, s, Y_s) d[V, Y]_s}_{=\int_0^1 (-1) d[V, Y]_s} + \sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) \\
& - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s))
\end{aligned}$$

Zusammen mit der in (4.5) beginnenden Gleichung ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
E(G(V_1, 1, Y_1)) &= E(G(V_0, 0, 0)) + \int_0^1 G_y(V_s, s, Y_{s-}) dX_s + \sum_{s \leq 1} \Delta G_y(V_s, s, Y_s) \Delta X_s \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy} d[X^c]_s + G_{yy}(V_s, s, Y_{s-}) d[X, Z]_s \\
&- \underbrace{[V, Y]_1}_{=[V, X]_1} + \sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -W_1 - \int_0^1 (G_y(V_s, s, Y_{s-})) dX_s + [X, V]_1 \\
& - \int_0^1 (G_{yy}(V_s, s, Y_{s-})) d[X^c]_s \\
& - \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_{s-}) d[X^c, Z]_s - \sum_{s \leq 1} \Delta G_y(V_s, s, Y_{s-}) \Delta X_s \\
& = E(G(V_0, 0, 0) - W_1 - \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_{s-}) d[X^c]_t \\
& + \sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s)) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned}
E(W_1) &= E(G(V_0, 0, 0) - G(V_1, 1, Y_1) - \frac{1}{2} \int_0^1 G_{yy}(V_s, s, Y_{s-}) d[X^c]_t \\
& + \sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s))
\end{aligned}$$

Aus der Konvexität von G bezüglich y und der Randbedingung gilt analog zu (3.18)

- (3.20) und aus selbem Grund:

$$\begin{aligned}
\sum_{s \leq 1} (\Delta G(V_s, s, Y_s) - G_y(V_s, s, Y_s) \Delta Y_s) &\leq 0 \\
- \int_0^1 \frac{G_{yy}(V_s, s, Y_s)}{2} d[X^c]_s &\leq 0 \\
-G(V_1, 1, Y_1) &\leq -G(V_1, 1, V_1)
\end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann herrscht, wenn:

$$\begin{aligned}
[X]_t &\equiv 0 \\
H(1, Y_1) &= V_1
\end{aligned}$$

Für jede Funktion G , die (4.7) und (4.4) erfüllt und die Randbedingung

$$G(v, 1, a) \geq G(v, 1, k(v)) = 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R} \text{ und } y \neq k(v)$$

erfüllt, gilt:

$$E(W_1) \leq G(V_0, 0, 0) \quad (4.8)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Bedingungen a) und b) erfüllt sind. Somit ist X_t unter gegebenen hinreichenden Bedingungen optimal. Zusammen mit der Rationalität des Preisprozesses ergibt sich die Gleichgewichtssituation.

Es bleibt die Notwendigkeit dieser Bedingung für Optimalität zu zeigen.

Hierfür sei das folgende stetige Martingal definiert:

$$W_t = E(h^{-1}(V_1)|\mathcal{F}_t)$$

Unter der Annahme, dass $X_t = \int_0^t \frac{X_s - Y_s}{1-s} ds$, ergibt sich Y zu:

$$Y_t = X_t - (1-t)(\nu + \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s - \int_0^t \frac{1}{1-s} dZ_s),$$

hierbei ist Y_t stetig und X_t hat fast sicher eine beschränkte Variation. Ferner gilt

$$H(1, Y_1) = V_1 \text{ fast sicher,}$$

somit ergibt sich bei dieser Wahl der Handelsstrategie:

$$E(W_1) = G(V_0, 0, 0)$$

Andersrum gilt wegen (4.8), dass für den erwarteten Gewinn $E(\tilde{W}_1)$ zu einer Handelsstrategie $\tilde{X}$, welche entweder nicht stetig ist oder dafür sorgt dass Bedingung b) nicht erfüllt wird:

$$E(\tilde{W}_1) < G(V_0, 0, 0) = E(W_1)$$

Also ist $\tilde{X}$ nicht optimal. Somit sind die Bedingungen a) und b) auch notwendig für Optimalität. $\square$

Lemma 4.1.3. :

Gegeben sei ein gedächtnisloses Marktmodell $\mathcal{M}$ mit rationaler Preisfunktion, die die Rückwärtswärmeleitungsgleichung erfüllt und gilt ferner:

$$H(1, y) = y$$

$$X_t = \int_0^t \frac{V_s - Y_s}{\Sigma_v(s) - s + \sigma^2} ds \quad (4.9)$$

Dann ist $\mathcal{M}$ im Gleichgewicht.

Beweis:

Nach letztem Lemma ist X_t hier genau dann optimal, wenn

- a) X_t stetig und von beschränkter Variation ist und
- b) $V_1 = Y_1$

Aus (4.9) folgt

$$dY_t = dX_t + dZ_t = \frac{V_t - Y_t}{\Sigma_v(t) - t + \sigma^2} dt + dZ_t.$$

Nach Lemma 2.1.9 ist somit $Y_1 = V_1$ und ferner X_t von beschränkter Variation und stetig. $\square$

In Kombination ergibt sich obiges Theorem.

Als Abschluss des Unterkapitels soll noch nachgewiesen werden, dass H die einzige Preisfunktion ist, für welche eine Handelsstrategie des Insiders existiert, so dass Y_t bzgl. $\sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})$ eine Brownsche Bewegung ist.

Satz 4.1.4. Gegeben sei ein gedächtnisloses Marktmodell $\mathcal{M}$ im Gleichgewicht. Dann gilt:

$$E(Y_t | \sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})) \text{ ist Brownsche Bewegung} \Rightarrow \begin{aligned} &H_t(t, y) + \frac{1}{2} H_{yy}(t, y) = 0 \\ &\text{und } H(1, y) = y \text{ f.s.} \end{aligned}$$

Beweis:

Da $\mathcal{M}$ im Gleichgewicht ist, gilt

$$H(t, Y_t)_{0 \leq t \leq 1} = E[V_1 | \sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})]$$

und mit Lemma 4.1.2

$$H(t, Y_t)_{0 \leq t \leq 1} = E[H(1, Y_1) | \sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})].$$

Da Y_t eine Brownsche Bewegung bzgl. $\sigma((Y_{0 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1})$ ist, gilt nach Satz 2.2.7, dass $H(t, Y_t)$ die Rückwärtswärmeleitungsgleichung erfüllt. $H(1, Y_1) = V_1 = Y_1$ folgt aus Lemma 4.1.2. Da $Y_1 \sim N(0, 1)$ verteilt ist, also den Träger $\mathbb{R}$ hat, folgt dass $H(1, y) = y$ f.s. und damit die Behauptung. $\square$

4.2 Erweiterung der möglichen Preisfunktionen

Wie schon in Kapitel 3.2 im Fall von perfekter Information soll auch im Fall der imperfekten Informationen untersucht werden, inwiefern die Abhängigkeit des Preises von der gesamten Nachfragetrajektorie die Ergebnisse für das Gleichgewicht verändert. Hierzu soll $\lambda(t)$ in diesem Unterkapitel vereinfachend als Treppenfunktion betrachtet werden:

Definition 4.2.1. (pfadabhängig):

Eine Preisfunktion ξ_t heißt PFADABHÄNGIG, wenn für die zugehörige Gewichtungsfunktion $\lambda(t)$ gilt

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_y^i \mathbb{1}_{\{t \in (t_{i-1}, t_i]\}}(t) \quad (4.10)$$

mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $\sigma_y^i < \sigma_y^{i+1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $\sum_{i=1}^n (\sigma_y^i)^2 = 1$.

Ist die Preisfunktion eines Marktmodells pfadabhängig, so heißt es PFADABHÄNGIGES MARKTMODEL.

Dabei ist die Vorgabe der aufsteigenden σ_y^i , der Idee geschuldet, dass die Nachfrage früherer Zeiten weniger Einfluss auf den Preis hat als die neuere Intensität der Nachfrage.

In dieser Situation lässt sich nun Folgendes über die Optimalitätsbedingung an die Handelsstrategie des Insiders sagen:

Satz 4.2.2. Gegeben sei ein pfadabhängiges Marktmodell $\mathcal{M}$, so dass für die Preisfunktion

$$H_t(t, y) + \frac{\lambda^2(t)}{2} H_{yy}(t, y) = 0 \quad (4.11)$$

gilt. X_t ist genau dann optimal, wenn:

- a) X_t stetig und von beschränkter Variation ist und
- b) wenn eine Funktion k existiert, so dass für die gewichtete Gesamtnachfrage $N_t = \int_0^t \lambda(s) dX_{s-} + \int_0^t \lambda(s) dZ_s$ Folgendes gilt:

$$H(t_i, N_{t_i}) = k(t_i, V_{t_i}) \quad (4.12)$$

Beweis:

Abschnittsweise betrachtet liegt der Fall des letzten Unterkapitels vor. Der Beweis verläuft deswegen analog zum Beweis von Lemma 4.1.2. Zunächst soll gezeigt werden, dass die genannten Bedingungen die Optimalität von X_t sicherstellen.

Bei allen zulässigen Handelsstrategien des Insiders gilt für dessen erwarteten Gewinn unter Berücksichtigung von (4.12) analog zu (4.1):

$$\begin{aligned} E(W_1(X)) = & E\left(\int_0^1 (k(s, V_s) - H(s, \xi_{s-}))dX_s + \int_0^1 X_{s-}dk(s, V_s) + \int_0^1 k_v(s, V_s)d[X^c, V]_s \right. \\ & - \int_0^1 H_\xi(s, \xi_{s-})\lambda(s)d[X^c]_s - \int_0^1 H_\xi(s, \xi_{s-})d[X^c, Z]_s - \int_0^1 H_\xi(s, \xi_{s-})d[X^c, Z]_s \\ & \left. - \sum_{s \leq 1} \Delta H(s, \xi_s)\Delta X_s\right) \end{aligned}$$

Der Idee des Beweises von Lemma 4.1.2 weiter folgend, seien anschließende Funktionen definiert:

$$j^i(v, \xi) = \int_{\xi}^{\xi^*(v)} (k(t_i, v) - H(t_i, x))dx$$

wobei für $\xi^*(v)$ genau $H(t_i, \xi^*(v)) = k(t_i, v)$ gilt. Für $t \leq t_i$ sei ferner:

$$G^i(v, t, \xi) = E\left(j^i\left(\xi + \int_t^{t_i} \lambda(s)dZ_s, v + \int_t^{t_i} \sigma_v^{(s)}dB_s\right)\right)$$

Diese erfüllt nach Lemma 2.2.6 die folgende partielle Differentialgleichung:

$$G_t^i + \frac{\lambda^2(s)}{2}G_{\xi\xi}^i + \frac{\sigma_z^2(t)}{2}G_{vv}^i = 0$$

mit Randbedingung $G^i(v, t_i, \xi) = j^i(v, \xi)$.

Damit gilt aber $G^i(v, t_i, \xi) \geq G^i(v, t_i, \xi^*(v)) = 0$ für festes v und beliebiges $\xi \neq \xi^*(v)$.

Ferner gilt unter Beachtung, dass $H(t, \xi)$ eine wachsende stetige Funktion in ξ ist:

$$G^i(v, t, \xi) + k(t, v) - H(\xi, t) = 0$$

Durch Summieren der G^i soll G definiert werden:

$$G(v, t, \xi) = \sum_{i < n} \left(\frac{1}{\sigma_y^i} - \frac{1}{\sigma_y^{i+1}} \right) G^i(v, t, \xi) \mathbb{1}_{\{t \leq t_i\}}(t) + \frac{1}{\sigma_y^n} G^n(v, t, \xi)$$

Die für G^i festgehaltenen Eigenschaften übertragen sich auf G zu erstens:

$$G_t + \frac{\lambda^2(s)}{2} G_{\xi\xi} + \frac{\sigma_z^2(t)}{2} G_{vv} = 0,$$

mit $G(v, t_i, \xi) = \left(\frac{1}{\sigma_y^i} - \frac{1}{\sigma_y^{i+1}} \right) j^i(v, t, \xi) + G(v, t_i+, \xi)$ für $i < n$ und $G(v, t_n, \xi) = \frac{1}{\sigma_y^n} j^n(v, \xi)$ sonst, und zweitens:

$$G(v, t, \xi) + \frac{k(t, v) - H(\xi, t)}{\lambda(t)} = 0$$

Der erwartete Gewinn des Insiders ergibt sich analog zum Beweis von Lemma 4.1.2 zu:

$$\begin{aligned} E(W_1(X)) = & E \left[- \int_0^1 G_\xi(s, \xi_{s-}, V_s) \lambda(s) dX_s - \int_0^1 G_v(s, \xi_{s-}, V_s) dV_s \right. \\ & - \int_0^1 G_{vy}(s, \xi_{s-}, V_s) \lambda(s) d[X^c, V]_s + G_{\xi\xi}(s, \xi_{s-}, V_s) \lambda^2(s) d[X^c]_s \\ & \left. - \int_0^1 G_{\xi\xi}(s, \xi_{s-}, V_s) \lambda^2(s) d[X^c, Z]_s - \sum_{s \leq 1} \Delta(\lambda(s) G_\xi(s, \xi_s, V_s)) \Delta X_s \right] \end{aligned}$$

Anwendung von der Formel von Itô und entsprechende Umformungen analog zu denen im Beweis von Lemma 4.1.2 liefern:

$$\begin{aligned} E(W_1(X)) = & E \left(G(0, 0, V_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sigma_y^i} - \frac{1}{\sigma_y^{i+1}} \right) j^i(s, \xi_{t_i}, V_{t_i}) - \frac{1}{\sigma_y^n} j^n(s, \xi_{t_i}, V_{t_i}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 G_{\xi\xi}(s, \xi_{s-}, V_s) \lambda^2(s) d[X^c]_s + \sum_{s \leq 1} [\Delta G(s, \xi_s, V_s) - G_\xi(s, \xi_s, V_s) \Delta \xi_s] \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Weiterhin analog ergibt sich:

$$\sum_{s \leq 1} (\Delta G(s, \xi_s, V_s) - G_\xi(s, \xi_s, V_s) \Delta \xi_s) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \frac{G_{\xi\xi}(s, \xi_s, V_s) \lambda^2(s)}{2} d[X^c]_s \leq 0 \\
& -j^i(t_i, \xi_{t_i}, V_{t_i}) \leq 0
\end{aligned}$$

Wobei sich Gleichheit in allen drei Ungleichungen genau dann einstellt wenn

$$\begin{aligned}
\Delta X &= 0 \\
[X^c]_1 &= 0 \\
H(t_i, \xi_{t_i}^*) &= k(t_i, V_{t_i})
\end{aligned}$$

gilt.

Mit Blick auf (4.13) ergibt sich also

$$E(W_1(X)) \leq G(0, 0, V_0)$$

Wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn die Bedingungen a) und b) gelten.

Zum Nachweis der Notwendigkeit sei folgender Prozess betrachtet:

$$W_t = \sum_{i=1}^n E(h_i^{-1}(k(t_i, V_{t_i})) | \mathcal{F}_t) \mathbf{1}_{\{t \in (t_{i-1}, t_i]\}}$$

mit $W_0 = E(h^{-1}(k(t_1, V_{t_1})) | \mathcal{F})$, wobei h_i^{-1} die Inverse von $H(t_i, \cdot)$ ist.

Sei nun die Handelsstrategie durch folgende stochastische Differentialgleichung gegeben:

$$dX_t = \sum_{i=1}^n \frac{W_t - \xi_t}{\sigma_y^i(t_i - s)} \mathbf{1}_{\{t \in (t_{i-1}, t_i]\}}$$

und $X_0 = 0$.

Das Lösen dieser stochastischen Differentialgleichung für ξ_t auf jedem Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ ergibt:

$$\xi_t = W_t - (t_i - t) \left(\frac{W_{t_{i-1}} - \xi_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^t \frac{1}{t_i - s} dW_s - \int_{t_{i-1}}^t \frac{\sigma_y^i}{t_i - s} dX_s \right)$$

ξ_t ist also fast sicher endlich und X_t hat fast sicher beschränkte Variation. Ferner gilt $H(t_i, \xi_{t_i}) = k(t_i, V_{t_i})$ fast sicher und damit gilt für diese Wahl von X_t :

$$E(W_1(X)) = G(0, 0, V_0)$$

Wohingegen wegen des ersten Teils des Beweises für jedes $\tilde{X}$, welches entweder nicht stetig ist oder nicht (4.12) erfüllt,

$$E(W_1(\tilde{X})) < G(0, 0, V_0) = E(W_1(X))$$

gilt, also $\tilde{X}$ nicht optimal ist. □

Gelten gewisse Regularitätsbedingungen, lässt sich ein X_t konkret angeben, so dass das zugehörige pfadabhängige Marktmodell im Gleichgewicht ist. Dieses Existenztheorem soll das Kapitel abschließen:

Theorem 4.2.3. :

Gegeben sei ein $\sigma_v(t)$, so dass eine abschnittsweise konstante Funktion $g(t) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{\{t \in (t_{i-1}, t_i]\}}$ existiert mit $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$, $0 < \alpha_i < \alpha_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \Sigma_v(t) + 1 - \Sigma_v(1) - \int_0^t g^2(s) ds &> 0 \text{ für alle } t \in [0, 1] \setminus \{t_i\}_{i=0}^n \\ \Sigma_v(t_i) + 1 - \Sigma_v(1) - \int_0^{t_i} g^2(s) ds &= 0 \text{ für alle } t_i \\ \int_{t_{i-1}}^t \frac{1}{(\Sigma_v(s) + 1 - \Sigma_v(1) - \int_0^s g^2(u) du)^2} ds &< \infty \text{ für alle } t \in [t_{i-1}, t_i) \text{ und } i \leq n \\ \lim_{t \rightarrow t_i} \int_{t_{i-1}}^t \frac{1}{(\Sigma_v(s) + 1 - \Sigma_v(1) - \int_0^s g^2(u) du)^2} ds &= \infty, \end{aligned} \tag{4.14}$$

mit $\Sigma_v(t) := \int_0^t \sigma_v^2(s) ds$.

Dann existiert zu $\sigma_v(t)$ ein pfadabhängiges Marktmodell $\mathcal{M}$ im Gleichgewicht mit

Gewichtungsfunktion $\lambda^*(s) := g(s)$, Bepreisungsfunktion $H^*(t, y) = E(y + \int_t^1 g(s) dZ_s)$ und Handelsstrategie X_t^* , gegeben durch $X_0^* = 0$ und:

$$dX_t^* = \mathbb{1}_{\{t \in (0, t_1]\}}(t) \frac{(V_t - \alpha_1 Y_t^*) \alpha_1}{\Sigma_v(t) + 1 - \Sigma_v(1) - \int_0^t g^2(s) ds} dt \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{t \in (t_i, t_{i+1}]\}}(t) \frac{(V_t - V_{t_i} - \alpha_{i+1}(Y_t^* - Y_{t_i}^*)) \alpha_{i+1}}{\Sigma_v(t) + 1 - \Sigma_v(1) - \int_0^t g^2(s) ds} dt$$

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass $Y_t^* - Y_{t_i}^*$ eine Brownsche Bewegung auf $[t_i, t_{i+1}]$ bzgl. $\sigma((Y_s)_{t_i \leq s \leq t})_{t_i \leq t \leq t_{i+1}}$ ist und $\alpha_{i+1}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) = V_{t_{i+1}} - V_{t_i}$ gilt.

Ist dies der Fall, kann nämlich, da g abschnittsweise konstant ist, Korollar 2.2.4 angewendet werden und H erfüllt (4.11). Ferner gilt $H^*(\xi_{t_i}, t_i) = k(V_{t_i}, t_i)$ für eine geeignete Funktion k , X_t^* ist stetig und von beschränkter Variation und die Optimalität ergibt sich aus Satz 4.2.2.

Nachweisen lassen sich die gewünschten Eigenschaften per Induktion:

Sei zunächst nur das Intervall $[0, t_1]$ betrachtet. Für $t = 0$ gilt zunächst $Y_0 = 0$, $V_0 = \nu$ und Y_t erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \frac{(V_t - \alpha_1 Y_t) \alpha_1}{\Sigma_v(t) + 1 - \Sigma_v(1) - \alpha_1^2 t} dt + dZ_t$$

auf $[0, t_1]$.

Aus Lemma 2.1.9 folgt, dass Y_t eine Brownsche Bewegung ist und $\alpha_1 Y_{t_1} = V_1$.⁵³ Per Induktion lässt sich dieses auf $[0, 1]$ erweitern:

Angenommen $\alpha_j(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) = V_{t_j} - V_{t_{j-1}}$ für alle $j \leq i$. Für das Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ gilt dann $\xi_{t_i} = V_{t_i}$ und $\tilde{Y} := Y_t - Y_{t_i}$ erfüllt die folgende Differentialgleichung auf $[t_i, t_{i+1}]$:

$$d\tilde{Y}_t = \frac{(\tilde{V}_t - \alpha_1 \tilde{Y}_t) \alpha_1}{\tilde{\Sigma}_z(t) - \alpha_{i+1}^2(t - t_i)} dt + dZ_t$$

⁵³Die in Lemma 2.1.9 mit Y und V bezeichneten Prozesse seien dabei $\alpha_1^2 Y$ und $\alpha_1 V$ bzgl. den Bezeichnungen des Theorems. Wählt man für die Standardabweichung von ν , dass $\sigma = 1 - \Gamma_z(1)$ gilt, ergibt sich die passende stochastische Differentialgleichung für Y_t .

und wieder liefert Lemma 2.1.9 die Behauptung. Induktiv folgt somit, dass Y_t^* auf $[0, 1]$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $\sigma((Y_s)_{1 \leq s \leq t})_{0 \leq t \leq 1}$ ist, somit ist der Existenzsatz bewiesen. $\square$

Das heißt, im Fall von imperfekten Informationen und einer Treppenfunktion als Gewichtungsfunktion der pfadabhängigen Bepreisung, macht es für den Insider Sinn an den Sprungstellen der Gewichtungsfunktion seine Informationen preiszugeben.

5 Fazit

Über die verschiedenen Annahmearrangements hinweg kann das zu Grunde liegende Optimierungsproblem mit dem Bellman-Prinzip gelöst werden und es können charakterisierende Eigenschaften der Gleichgewichtssituation hergeleitet werden.

In der ersten Betrachtung,⁵⁴ in der zunächst Pfadabhängigkeit der Preisfunktion, Risikoaversion des Insiders und imperfekte Informationen ausgeschlossen sind, kann der im Gleichgewicht eindeutige Preisprozess unabhängig von einer Verteilungsannahme des Assetpreises geschlossen angegeben werden. Dieser konvergiert für $t = 1$ gegen den vom Insider bekannten Assetpreis in $t = 1$. Ferner handelt der Insider im Gleichgewicht weder diskret, noch lokal korreliert mit dem Noisetradern. Der Insider bleibt für den Marketmaker unsichtbar. Nimmt man eine Lognormalverteilung für den Preis des Assets im Zeitpunkt eins an, ergibt sich für den Preisprozess eine geometrische Brownsche Bewegung, welche häufig in einfacheren Modellen der Finanzmärkte genutzt wird.

Eine Lockerung der Annahmen in den anschließenden Unterkapiteln⁵⁵ ändert die wesentlichen Ergebnisse nicht. Bei einem risikoneutralen Insider ist der Preisdruck auch bei zugelassenen pfadabhängigen Preisfunktionen konstant über die Zeit. D.h. dem Insider ist es egal, wann er handelt, und alle Handelsstrategien können beliebig nah an den Zeitpunkt eins herangeschoben werden. Modelliert man den Insider hingegen risikoavers, ergibt sich ein abnehmender Preisdruck, d.h. ein risikoaverser Insider wird den Großteil seines Handelns zu Beginn des Intervalls durchführen, um dem Risiko einer nachteiligen Preisveränderung zu entgehen. Für abnehmende Risikoaversion konvergiert das Gleichgewicht gegen das des risikoneutralen Insiders.

Da die Kenntnis des exakten Zukunftspreises auch für den Insider als unrealistisch angesehen werden kann, wird in Kapitel fünf die Information des Insiders bzgl. des Fundamentalwertes des Assets um einen Störprozess ergänzt. Auch unter der Annahme einer dynamischen Information existiert eine eindeutige Bepreisungsfunktion und die wesentlichen Eigenschaften des Gleichgewichts bleiben unter der Berücksichtigung angepasster Annahmen der Ausgangssituation erhalten.⁵⁶

Im Fall einer Preisfunktion, die von der gesamten Nachfragetrajektorie abhängen

⁵⁴Vgl. 3.1.

⁵⁵Vgl. 3.2 und 3.3.

⁵⁶Vgl. 4.1.

darf, stellt es sich im Fall dynamischer Information im Gegensatz zu den vorherigen Betrachtungen als optimal für den Insider heraus, zwischenzeitlich seine Information preiszugeben. Auch in diesem nicht markovschen Fall wird die Existenz eines Gleichgewichts unter gegebenen Bedingungen nachgewiesen und die optimalen Handelsstrategien charakterisiert.

Es gibt eine Vielzahl von potentiellen Verallgemeinerungen der Fragestellungen, welche über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. Neben der Lockerung der allgemeinen Annahmen der Ausgangssituation ist die Untersuchung anderer verwandter Fragestellungen denkbar und aktuell. Als Beispiele seien die Inklusion von Ausfallrisiko, wie in [CÇ07], die Einführung mehrerer konkurrierender Insider, wie in [BCW00], die Untersuchung von Hedging-Fragen, wie in [BØ06] oder das Zulassen von Levy-Prozessen mit Sprüngen als Marktreiber, wie in [NMBØP06] und [Gro00] genannt.

Literaturverzeichnis

- [Arr71] K. J. Arrow, *Essays in the theory of risk-bearing*, Vol. 1, Markham Publishing Company, Chicago, 1971.
- [BØ06] F. Biagini and B. Øksendal, *Minimal variance hedging for insider trading*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **9** (2006), no. 08, 1351–1375.
- [Bac92] K. Back, *Insider trading in continuous time*, Review of financial Studies **5** (1992), no. 3, 387–409.
- [BCW00] K. Back, C. H. Cao, and G. A. Willard, *Imperfect competition among informed traders*, The Journal of Finance **55** (2000), no. 5, 2117–2155.
- [Ber68] D. Bernoulli, *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, Gregg, 1968.
- [BK65] Richard Bellman and Robert E. Kalaba, *Dynamic programming and modern control theory*, Academic Press New York, 1965.
- [Bla86] F. Black, *Noise*, The Journal of Finance **41** (1986), no. 3, 529–543.
- [CÇ07] L. Campi and U. Çetin, *Insider trading in an equilibrium model with default: a passage from reduced-form to structural modelling*, Finance and Stochastics **11** (2007), no. 4, 591–602.
- [Cho03] K. Cho, *Continuous auctions and insider trading: uniqueness and risk aversion*, Finance and Stochastics **7** (2003), no. 1, 47–71.
- [CIL92] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society **27** (1992), no. 1, 1–67.
- [Dan10] A. Danilova, *Stock market insider trading in continuous time with imperfect dynamic information*, Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes **82** (2010), no. 1, 111–131.
- [Gro00] A. Grorud, *Asymmetric information in a financial market with jumps*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **3** (2000), no. 04, 641–659.
- [Gro76] S. Grossman, *On the efficiency of competitive stock markets where trades have diverse information*, The Journal of Finance **31** (1976), no. 2, 573–585.
- [JYC09] M. Jeanblanc, M. Yor, and M. Chesney, *Mathematical methods for financial markets*, Springer-Verlag, New York et al., 2009.
- [KK01] R. Korn and E. Korn, *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2001.
- [KP92] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer-Verlag, New York et al., 1992.
- [KS87] I. Karatzas and S. E. Schreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York et al., 1987.
- [Kyl85] A. S. Kyle, *Continuous auctions and insider trading*, Econometrica: Journal of the Econometric Society (1985), 1315–1335.
- [LŠ01] R. S. Liptser and A. N. Širâev, *Statistics of random processes: I. general theory*, Vol. 2, Springer Verlag, New York et al., 2001.
- [Man66] H. G. Manne, *Insider trading and the stock market*, Free Press New York, 1966.
- [NMBØP06] G. Nunno, T. Meyer-Brandis, B. Øksendal, and F. Proske, *Optimal portfolio for an insider in a market driven by lévy processes*, Quantitative Finance **6** (2006), no. 1, 83–94.

- [Pre11] M. Premer, *Grundzüge der Volkswirtschaftslehre*, Oldenbourg Verlag, München, 2011.
- [Pro90] P. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, New York et al., 1990.
- [RDe12] R Development Core Team, *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012. ISBN 3-900051-07-0.
- [Rab00] M. Rabin, *Risk aversion and expected-utility theory: A calibration theorem*, *Econometrica* **68** (2000), no. 5, 1281–1292 (English).
- [Ris96] H. Risken, *Fokker-planck equation. methods of solutions and applications.*, Vol. 2, Springer-Verlag, New York et al., 1996.
- [Ste10] J. M. Steele, *Stochastic calculus and financial applications*, Vol. 45, Springer-Verlag, New York et al., 2010.
- [TK92] A. Tversky and D. Kahneman, *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, *Journal of Risk and Uncertainty* **5** (1992), no. 4, 297–323.
- [VNM44] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior (princeton up, princeton, nj)* (1944).
- [VNM61] ———, *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, Physuca-Verlag, Würzburg, 1961.
- [Xio08] J. Xiong, *An introduction to stochastic filtering theory*, Oxford University Press, New York, 2008.

A Beweis von Lemma 2.1.9

Der Beweis wird folgendermaßen geführt:

Es wird zunächst Theorem 2.1.4 angewendet und für die Dynamik von Y eine stochastische Differentialgleichung hergeleitet, die nur durch $Y_t \equiv W_t^Y$ gelöst wird. Hierbei ist W_t^Y genau ein Wiener Prozess bzgl. der von $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ erzeugten Filtration.

$Y_1 = V_1$ ergibt sich schließlich aus Satz 2.1.3 bei Berücksichtigung der gegebenen Bedingungen.

Es seien folgende Bedingungen erfüllt:⁵⁷

$$\begin{aligned} E[V_1^2] &< \infty \\ \int_0^t \sigma_V^2(s) ds &< \infty, \forall 0 \leq t \leq 1 \\ \int_0^t \left(\int_0^s \sigma_V^2(u) du + \sigma^2 - s \right)^{-2} ds &< \infty, \forall 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$e^{-\int_0^t \left(\int_0^s \sigma_V^2(u) du + \sigma^2 - s \right) ds} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^t \sigma_V^2(s) ds - t + \sigma^2 \geq 0, \forall 0 \leq t \leq 1$$

$$\exists t^* \in [0, 1) : 1 - t > \int_t^1 \sigma_V^2(s) ds, \forall t^* \leq t \leq 1$$

$$\text{und } \sigma_V^2(t) \text{ ist stetig } \forall t^* \leq t \leq 1$$

Der Übersichtlichkeit halber sei:

$$n(t) := \int_0^t \sigma_V^2(u) du - t + \sigma^2$$

Setzt man

$$X_t := \begin{pmatrix} Y_t \\ V_t \end{pmatrix}, a(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A(t) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{n(t)} & \frac{1}{n(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_V(t) \end{pmatrix},$$

⁵⁷Diese stellen zum einen die Anwendbarkeit des Theorems 2.1.4 sicher und zum anderen ermöglichen sie den Nachweis der Endbedingung.

so kann Theorem 2.1.4 angewandt werden. Für die Dynamik von $P_t := E[V_t | (Y_s)_{0 \leq s \leq t}]$ ergibt sich demnach:

$$dP_t = \frac{-\gamma(t) \frac{1}{n(t)}}{1} dY_t - \frac{-\gamma(t) \frac{1}{n(t)}}{1} \left(-\frac{1}{n(t)} P_t + \frac{1}{n(t)} Y_t \right) dt,$$

mit $\gamma'(t) = \sigma_V^2(t) - \left(\frac{\gamma(t)}{n(t)} \right)^2$

Mit Startwerten $P_0 = E[V_0 | Y_0] = \nu$ und $\gamma_0 = \sigma$ ergibt sich $\gamma(t)$ eindeutig zu:

$$\gamma(t) = n(t)$$

Folglich

$$dP_t = dY_t + \left(-\frac{1}{n(t)} P_t + \frac{1}{n(t)} Y_t \right) dt$$

Somit ergibt sich unter der Berücksichtigung, dass $W_t^Y := E[W_t^{(1)} | (Y_s)_{0 \leq s \leq t}]$ ein Wiener Prozess bzgl. der von $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ erzeugten Filtration ist

$$\begin{aligned} dP_t &= \frac{P_t - Y_t}{n(t)} dt + dW_t^Y + \left(-\frac{1}{n(t)} P_t + \frac{1}{n(t)} Y_t \right) dt \\ &= dW_t^Y \end{aligned}$$

und man erhält für die Dynamik von Y :

$$dY_t = \frac{W_t^Y - Y_t}{n(t)} dt + dW_t^Y$$

Offensichtlich wird diese SDGL durch $Y_t \equiv W_t^Y$ gelöst. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus Satz 2.1.3. Selbiger angewandt auf die ursprüngliche SDGL ergibt zunächst (dabei sei $M(t) := e^{-\int_0^t \frac{1}{n(s)} ds}$)

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I_d \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi'_{11}(t) & \Phi'_{12}(t) \\ \Phi'_{21}(t) & \Phi'_{22}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{n(t)} & \frac{1}{n(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M(t) & 1 - \frac{1}{M(t)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{M(t)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{M(t)} - 1 \\ 0 & M(t) \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\begin{aligned} X_t &= \begin{pmatrix} M(t) & 1 - \frac{1}{M(t)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{M(s)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{M(s)} - 1 \\ 0 & M(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_V(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_s^{(1)} \\ dW_s^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nu - \frac{\nu}{M(t)} \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M(t) & 1 - \frac{1}{M(t)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\int_0^t \frac{1}{M(s)} \begin{pmatrix} 1dW_s^{(1)} + \sigma_V(s)(\frac{1}{M(s)} - 1)dW_s^{(2)} \\ M(s)\sigma_V(s)dW_s^{(2)} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Also gilt für $Y_t \equiv X_t^{(1)}$:

$$\begin{aligned} Y_t &= \nu - \frac{\nu}{M(t)} + M(t) \left(\int_0^t \frac{1}{M(s)} dW_s^{(1)} + \int_0^1 \sigma_V^s \left(\frac{1}{M(s)} - 1 \right) dW_s^{(2)} + \left(1 - \frac{1}{M(s)} \right) \left(\int_0^1 \sigma_V(s) dW_s^{(2)} \right) \right) \\ &= \nu + \underbrace{\int_0^t \sigma_V(t) dW_t^{(2)}}_{=V_t} + M_t \underbrace{\left(-\frac{1}{M_t^2} V_t + \int_0^t \frac{\sigma_V}{M_s} dW_s^{(2)} - W_t^{(2)} \right)}_{\star} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 1} V_1 f.s. \end{aligned}$$

Wobei im letzten Schritt berücksichtigt wurde, dass $\star$ einen Erwartungswert von null und aufgrund von (A.1) eine endliche Varianz besitzt, ferner konvergiert M_t wegen (A.2) gegen null.⁵⁸ $\square$

⁵⁸Diese Bedingungen können mit Hilfe des Satzes vom iterierten Logarithmus abgeschwächt werden.

B Berechnung des Erwartungsnutzen in Beispiel 2.3.2

Unter gegebener Notation ergibt sich für den Investor mit exponentieller Nutzenfunktion

$$E[N_1(W_1)] = 0.6 \cdot (1 - e^{-3}) + 0.4 \cdot (1 - e^{-4}) \approx 0.9628$$

$$E[N_1(W_2)] = 0.2 \cdot (1 - e^{-2}) + 0.8 \cdot (1 - e^{-4}) \approx 0.9583$$

$$E[N_1(W_3)] = 0.2 \cdot (1 - e^{-2}) + 0.4 \cdot (1 - e^{-3}) + 0.4 \cdot (1 - e^{-5}) \approx 0.9503,$$

also W_1 als beste Zufallsgröße. Für den Investor mit Power-Utility-Funktion ergibt sich:

$$E[N_2(W_1)] = 0.6 \cdot \ln(3) + 0.4 \cdot \ln(4) \approx 0.5271$$

$$E[N_2(W_2)] = 0.2 \cdot \ln(2) + 0.8 \cdot \ln(4) \approx 0.5419$$

$$E[N_2(W_3)] = 0.2 \cdot \ln(2) + 0.4 \cdot \ln(3) + 0.4 \cdot \ln(5) \approx 0.5306,$$

also W_2 als beste Zufallsgröße. Und schließlich für den Investor mit quadratischer Nutzenfunktion:

$$E[N_3(W_1)] = 0.6 \cdot 3^2 + 0.4 \cdot 4^2 \approx 11.8$$

$$E[N_3(W_2)] = 0.2 \cdot 2^2 + 0.8 \cdot 4^2 \approx 13.6$$

$$E[N_3(W_3)] = 0.2 \cdot 2^2 + 0.4 \cdot 3^2 + 0.4 \cdot 5^2 \approx 14.4,$$

also W_3 als beste Zufallsgröße. Dabei ist zu beachten, dass dem numerischen Wert der Nutzenfunktion nur ein ordinaler Charakter zuzuschreiben ist.

C Ableitungen von (3.48)

$$G(v, t, \xi) = \gamma \sqrt{\lambda(1)\lambda(t)^{-1}} \exp\left(\gamma \frac{q}{2\lambda(t)} \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q}\right)^2\right) \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} G(v, t, \xi) &= G(v, t, \xi) \left(\gamma \frac{q}{2\lambda(t)} 2 \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} G(v, t, \xi) &= G(v, t, \xi) \left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right) \right)^2 + G(v, t, \xi) \left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$= G(v, t, \xi) \left(\left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right) \right)^2 + \left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \right) \right) \quad (C.3)$$

$$\stackrel{(C.1)}{\Rightarrow} G(v, t, \xi) = \exp\left(\log(\gamma \sqrt{\lambda(1)\lambda(t)^{-1}}) \left(\gamma \frac{q}{2\lambda(t)} \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right)^2 \right)\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(v, t, \xi) &= G(v, t, \xi) \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \log(\lambda(1)\lambda(t)^{-1}) + \frac{\partial}{\partial t} \gamma \frac{q}{2} \lambda^{-1}(t) \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right)^2 \right) \\ &= G(v, t, \xi) \left(\frac{\lambda(1)q}{2\lambda(1)\lambda(t)^{-1}} - \frac{\gamma^2 \sigma^2}{2} q^2 \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right)^2 \right) \\ &= G(v, t, \xi) \left(\frac{\lambda(1)q}{2\lambda(1)\lambda(t)^{-1}} - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma^2 (\xi - v + H(0, 0))^2 \right) \end{aligned}$$

Die Erfüllung der HJB-Gleichung lässt sich durch die Erfüllungen von (3.49) und (3.50) einsehen:

$$\begin{aligned} &\lambda(t) \frac{\partial}{\partial \xi} G(v, t, \xi) + \gamma(v - H(\xi, t)) G(v, t, \xi) \\ &= \lambda(t) G(v, t, \xi) \left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right) \right) \\ &\quad + \gamma(v - H(\xi, t)) G(v, t, \xi) \\ &= G(v, t, \xi) \gamma q x - G(v, t, \xi) \gamma(v - H(0, 0)) \\ &\quad + \gamma(v - H(\xi, t)) G(v, t, \xi) \\ &= G(v, t, \xi) \gamma \left(\underbrace{H(0, 0) + qx}_{=H(0,0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\lambda^{-1}(t)}{-\gamma \sigma^2} dy = H(t, \xi)} - v + v - H(t, \xi) \right) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow (3.49) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(v, t, \xi) + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2(t) \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} G(v, t, \xi)$$

$$\begin{aligned}
&= G(v, t, \xi) \left(\overbrace{\frac{\lambda(1)}{2\lambda(1)\lambda(t)^{-1}} \frac{\partial}{\partial t} \lambda^{-1}(t)}^{-q\gamma\sigma^2} - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2(\xi - v + H(0, 0))^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2(t)G(v, t, \xi) \left(\left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right) \right)^2 + \left(\gamma \frac{q}{\lambda(t)} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 G(v, t, \xi) \left(-q\lambda(t)\gamma - \gamma^2(\xi - v + H(0, 0))^2 \right. \\
&\quad \left. + \lambda(t) \left(\left(\gamma q \left(\xi - \frac{v - H(0, 0)}{q} \right) \right)^2 + (\gamma q) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 G(v, t, \xi) \left(-q\lambda(t)\gamma - \gamma^2(\xi - v + H(0, 0))^2 \right. \\
&\quad \left. + \lambda(t)\gamma^2(\xi - v - H(0, 0))^2 + \lambda(t)\gamma q \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Und somit erfüllt $G(v, t, \xi)$, wie in (3.48) definiert, die HJB-Gleichung.

□

D Herleitung von $\lambda^*(1)$

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sigma^2 \int_0^1 \left(\frac{\lambda^*(1)}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(1)(1-s) + 1} \right)^2 ds \\
\Rightarrow \Sigma &= \sigma^2 \int_0^1 \lambda^*(1)^2 \frac{1}{(\gamma \sigma^2 \lambda^*(1)(1-s) + 1)^2} ds \\
\Rightarrow \Sigma &= \left[\lambda^*(1)^2 \frac{-1}{(\gamma \sigma^2 \lambda^*(1)(1-s) + 1)} \cdot \frac{-1}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(1)} \right]_0^1 \\
\Rightarrow \Sigma &= \sigma^2 \frac{(\lambda^*(1))^2}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(1)} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(1) + 1} \right) \\
\Rightarrow \Sigma &= \frac{\lambda^*(1)}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma \sigma^2 \lambda^*(1) + 1} \right) \\
\Rightarrow \Sigma &= \frac{\lambda^*(1)}{\gamma} - \frac{\lambda^*(1)}{\gamma^2 \sigma^2 \lambda^*(1) + \gamma} \\
\Rightarrow \gamma^2 \sigma^2 \lambda^*(1) \Sigma + \gamma \Sigma &= \lambda^*(1)(\gamma \sigma^2 \lambda^*(1) + 1) - \lambda^*(1) \\
\Rightarrow (\lambda^*(1))^2 \gamma \sigma^2 + \lambda^*(1)(-\Sigma \gamma^2 \sigma^2) - \Sigma \gamma &= 0 \\
\Rightarrow (\lambda^*(1))^2 - \Sigma \gamma \lambda^*(1) - \frac{\Sigma}{\sigma^2} &= 0 \\
\lambda^*(1) \stackrel{>0}{\Rightarrow} \lambda^*(1) &= \frac{\Sigma \gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Sigma \gamma}{2} \right)^2 + \frac{\Sigma}{\sigma^2}}
\end{aligned}$$

E R-Code zu Abbildung 2 und 3

Zur Simulation wird die *Euler-Maruyama-Methode* benutzt.⁵⁹ ν wird als normalverteilt angenommen. Dadurch ergibt sich für die Handelsstrategie des Insiders:⁶⁰

$$dX_t = \frac{h^{-1}(\nu) - Y_t}{1 - t} dt$$

Anwenden der Euler-Maruyama-Methode, ergibt für eine Diskretisierung t_i , $i = 1, 2, \dots, n$

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \frac{h^{-1}(\nu) - Y_{t_{i-1}}}{1 - t_{i-1}} \Delta_{t_{i-1}}$$

und der zur Erstellung der Grafik gehörende R-Code⁶¹ zu:

```
#####Simulation des Modells von Back 92
# nu N(a,b)
# h(y)= F^-1(N(y))

a <- 5
b <-1
nu <- rnorm(mean=a,sd=b,n=1)
h <- function(y){
  return((y-a)/b)
}

#Erstellen der Trajektorien
Z <- cumsum(rnorm(364, sd=sqrt(1/365)))
X <- rep(0,364)
Y <- rep(Z[1],364)
for (i in 2:364) {
  X[i] <- X[i-1]+(h(nu)-Y[i-1])/(1-(i*(1/365)))*1/365
  Y[i] <- X[i]+Z[i]
}
```

⁵⁹Vgl. z.B. [KP92] Kapitel 9.

⁶⁰Für eine Herleitung siehe [Bac92] Example 1.

⁶¹Vgl. [RDe12].

#Erstellen der Abbildung 2:

```
plot(Z, type="l",ylim=c(min(c(min(X),min(Y),min(Z))),
                        max(c(max(X),max(Y),max(Z))))),
     xaxt="n", yaxt="n", xlab="Zeit",ylab="Nachfrage")
axis(1,at=c(0,365),labels=c("0","1"))
axis(2,at=c(h(nu)),labels=c("Y1"))
points(X, type="l", col="red")
points(Y, type="l", col="blue")
abline(a=h(nu),b=0, col="green")
```

#Erstellen der Abbildung 3:

```
P <- a+b*Y
plot(P, type="l", col="red", xaxt="n", yaxt="n", xlab="Zeit",ylab="Preis")
axis(1,at=c(0,365),labels=c("0","1"))
axis(2,at=c(nu),labels=c("V1"))
abline(a=nu,b=0, col="green")
```

F Ehrenwörtliche Erklärung und Einverständniserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und unter Benutzung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich übernommene Sätze oder Satzteile sind als Zitat belegt und andere Anlehnungen unter Quellenangabe kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht.

Ferner erkläre ich mich einverstanden mit einer zum Zweck der Plagiatskontrolle vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank sowie ihrem Abgleich mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen.

.....

(Datum)

.....

(Unterschrift)