Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Die Put-Call Symmetrie und deren Anwendung bei der Bewertung von Barriereoptionen

Masterarbeit

von
Stefanie Tiemann

06. 08. 2013

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Institut für mathematische Statistik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Barriereoptionen sind beliebte Finanzinstrumente. Sie sind für Investoren interessant, die an eine begrenzte Veränderung der Kurse glauben. Zum Beispiel zieht ein Investor, der an einen beschränkten Anstieg der Kurse glaubt, einen Up-and-out Call einem Plain Vanilla Call vor, da ersterer günstiger ist.
Da Barriereoptionen zu den exotischen Optionen gehören, werden sie außerbörslich gehandelt. Für Finanzinstitute, die Barriereoptionen verkaufen, stellt sich daher die Frage, wie Barriereoptionen bewertet werden können. Die Schwierigkeit hierbei ist, dass die unsichere zukünftige Auszahlung einer Barriereoption nicht nur vom Kurs des Underlyings zur Fälligkeit der Option abhängt, sondern auch davon, ob der Underlyingkurs vor der Fälligkeit eine Schranke der Option erreicht.
In der vorliegenden Masterarbeit wird die Put-Call Symmetrie vorgestellt, mit der man Barriereoptionen ohne spezifische Modellannahmen bewerten kann. Die klassische Put-Call Symmetrie ist eine Gleichung mit skalierten Preisen von Call- und Putoptionen mit unterschiedlichen Strikes, wobei das geometrische Mittel der Strikes dem Forwardpreis des Underlyings entspricht. Durch eine Verallgemeinerung hiervon wird die geometrische Put-Call Symmetrie definiert, mit der man Barriereoptionen semistatisch hedgen kann.

Die Gliederung sieht wie folgt aus. Im ersten Kapitel wird gezeigt, dass die klassische Put-Call Symmetrie in einem arbitragefreien Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten gilt. Dabei wird eine Bedingung $(a)_0$ für den Forwardpreisprozess der Aktie verwendet, die im zweiten Kapitel zur Definition der geometrischen Put-Call Symmetrie verallgemeinert wird.
Im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels wird der Aufbau des Finanzmarktmodells dargestellt, das der restlichen Arbeit zugrundeliegt. Im zweiten Abschnitt wird die geometrische Put-Call Symmetrie durch eine verallgemeinerte Form von $(a)_0$ für eine beliebige Stopzeit $0 \leq \tau \leq T$ definiert. Außerdem werden drei zu $(a)_\tau$ äquivalente Bedingungen angegeben. Im dritten Abschnitt werden Beispiele für Modelle angegeben, in denen die geometrische Put-Call Symmetrie gilt. Es wird ein Volatilitätsmodell mit stochas-

tischer und lokaler Volatilität betrachtet und es wird die Frage beantwortet, wann die geometrische Put-Call Symmetrie in diesem Modell gilt. Insbesondere wird in einem Spezialfall gezeigt, dass die geometrische Put-Call Symmetrie im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen, deterministischen Koeffizienten gilt. Im vierten Abschnitt wird mit der arithmetischen Put-Call Symmetrie eine weitere Symmetrie im Finanzmarkt definiert und ein Zusammenhang zur geometrischen Put-Call Symmetrie gezeigt.
Das dritte Kapitel befasst sich mit der Bewertung von Barriereoptionen mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie. Dazu wird zunächst beispielhaft gezeigt, wie man einen Down-and-In Call im Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten mithilfe der klassischen Put-Call Symmetrie semistatisch hedgen kann. Im ersten Abschnitt wird dies für einseitige Barriereoptionen im unter 2.1 beschriebenen Finanzmarkt verallgemeinert. Außerdem wird gezeigt, dass mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie die Wahrscheinlichkeit, dass die Schranke einer einseitigen Barriereoption vor deren Fälligkeit erreicht wird, mit dem Anfangspreis des T-Bonds und den Anfangspreisen von Plain Vanilla Optionen bestimmt werden kann. Im dritten Abschnitt wird dargestellt, wie man mithilfe eines Hilfsprozesses Barriereoptionen semistatisch hedgen kann, wenn die geometrische Put-Call Symmetrie nicht für den Underlyingkursprozess gilt.
Das vierte Kapitel fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst habe und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, sind unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht worden.

Münster, den 05.08.2013

1 Die klassische Put-Call Symmetrie im Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten

Die klassische Put-Call Symmetrie ist eine Gleichung mit skalierten Preisen von Call- und Putoptionen mit unterschiedlichen Strikes, wobei das geometrische Mittel der Strikes dem Forwardpreis des Underlyings entspricht.
Genauer:

$$\frac{C(0,K,T)}{\sqrt{K}} = \frac{P(0,\frac{M_0^2}{K},T)}{\sqrt{\frac{M_0^2}{K}}} \tag{1.1}$$

wobei M_0 den Forwardpreis des Underlyings zum Termin T in 0 bezeichnet, $C(0,K,T)$ den Anfangspreis eines Calls mit Strike K und Fälligkeit T und $P(0,\frac{M_0^2}{K},T)$ den Anfangspreis eines Puts mit Strike $\frac{M_0^2}{K}$ und Fälligkeit T.
Zum Beispiel bedeutet dies, falls der Forwardpreis des Underlyings zum Termin T in 0 100 Euro beträgt, dass ein Call mit Strike 200 Euro denselben Anfangspreis hat wie zwei Puts mit Strike 50 Euro.
Es stellt sich nun die Frage, welche Bedingungen die Entwicklung des Underlyings erfüllen muss, damit dieser nicht offensichtliche Zusammenhang zwischen Call- und Putpreisen gilt.
Im Folgenden wird zunächst gezeigt, dass die klassische Put-Call Symmetrie in einem arbitragefreien Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten gilt. Die Darstellung des Modellaufbaus basiert auf § 6 in [5] und (1.1) in [4].
Das Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten ist ein zeitstetiges Finanzmarktmodell mit endlichem Handelszeitraum [0, T] und zwei Finanzgütern. Da angenommen wird, dass das Modell arbitragefrei ist, existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}$.
Das erste Finanzgut (Geldmarktkonto) ist eine festverzinsliche Anlage mit stetiger Verzinsung mit der konstanten Zinsrate $r > 0$.
Bzgl. $\mathbb{P}$ erfüllt der Preisprozess des Geldmarktkontos $(\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ die folgende stochastische

Differentialgleichung:

$$d\beta_t = \beta_t r dt \quad \text{mit Anfangswert } \beta_0 = 1$$

Diese wird gelöst durch:

$$\beta_t = e^{rt} \quad \text{für alle } 0 \le t \le T$$

Das zweite Finanzgut (Aktie) ist risikobehaftet. Die Quelle des Zufalls erhält man durch einen eindimensionalen Wiener-Prozess $(W_t)_{0 \le t \le T}$. Die Volatilität wird mit $\sigma > 0$ bezeichnet.
Bzgl. $\mathbb{P}$ erfüllt der Preisprozess der Aktie $(S_t)_{0 \le t \le T}$ die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW_t \quad \text{mit Anfangswert } S_0 = s_0 > 0$$

Diese wird gelöst durch:

$$S_t = s_0 e^{rt + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \quad \text{für alle } 0 \le t \le T \tag{1.2}$$

Der Informationsverlauf ist gegeben durch die Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ des Wiener-Prozesses $(W_t)_{0 \le t \le T}$.

Es wird angenommen, dass die Aktie das Underlying der betrachteten Optionen ist.
Der Forwardpreisprozess der Aktie zum Termin T wird mit $(M_t)_{0 \le t \le T}$ bezeichnet.
Es gilt:

$$M_t = S_t e^{r(T-t)} \quad \text{für alle } 0 \le t \le T \tag{1.3}$$

Sei $\mathbb{M}$ das Maß definiert durch

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} := \frac{M_T}{M_0}.$$

Mit $E^{\mathbb{P}}$ bzw. $E^{\mathbb{M}}$ wird der Erwartungswert unter $\mathbb{P}$ bzw. unter $\mathbb{M}$ bezeichnet.

Eine Möglichkeit zu zeigen, dass die klassische Put-Call Symmetrie in einem arbitragefreien Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten gilt, besteht darin, die Gleichheit (1.1) mithilfe der Black-Scholes Formel (vgl. (6.7) in [5]) und der Put-Call Parität (vgl. (1.9) in [5]) nachzurechnen.
Im Folgenden wird allerdings eine andere Möglichkeit gewählt, die sich auf allgemeinere Finanzmarktmodelle übertragen lässt.

Dazu wird die folgende Behauptung verwendet:

Behauptung: $(a)_0$ Die Verteilung von $\frac{M_T}{M_0}$ unter $\mathbb{P}$ ist gleich der Verteilung von $\frac{M_0}{M_T}$ unter $\mathbb{M}$.

Beweis: Da M_0 eine Konstante ist, ist $(a)_0$ äquivalent zu:
$(a')_0$ Die Verteilung von M_T unter $\mathbb{P}$ ist gleich der Verteilung von $\frac{M_0^2}{M_T}$ unter $\mathbb{M}$.
Um $(a')_0$ zu beweisen, wird gezeigt, dass $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ bzgl. $\mathbb{P}$ die gleiche stochastische Differentialgleichung erfüllt wie $(\frac{M_0^2}{M_t})_{0\leq t\leq T}$ bzgl. $\mathbb{M}$.
Mit (1.2) folgt aus (1.3)

$$\begin{aligned} M_t &= s_0 e^{rt+\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{r(T-t)} \\ &= s_0 e^{rT} e^{\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= M_0 e^{\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{1.4}$$

Bzgl. $\mathbb{P}$ erfüllt $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ somit die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dM_t = M_t \sigma dW_t \quad \text{mit Anfangswert } M_0 = s_0 e^{rT} \tag{1.5}$$

Da $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} &= E^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_0}|\mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{M_0} E^{\mathbb{P}}[M_T|\mathcal{F}_t] \\ &= \frac{M_t}{M_0} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Mit (1.4) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{M_0 e^{\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t}}{M_0} \\ &= e^{\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Cameron, Martin, Girsanov ist $(\overline{W}_t)_{0\leq t\leq T}$, definiert durch

$$\overline{W}_t := W_t - \sigma t \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T,$$

ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{M}$.

Bzgl. $\mathbb{M}$ erfüllt $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ somit die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dM_t = M_t\sigma d\overline{W}_t + M_t\sigma^2 dt \quad \text{mit Anfangswert } M_0 = s_0 e^{rT}$$

Anwenden der Itô-Formel liefert:

$$\begin{aligned}
d\frac{M_0^2}{M_t} &= -\frac{M_0^2}{M_t^2}dM_t + \frac{1}{2}\cdot 2\frac{M_0^2}{M_t^3}d\langle M\rangle_t \\
&= -\frac{M_0^2}{M_t^2}M_t\sigma d\overline{W}_t - \frac{M_0^2}{M_t^2}M_t\sigma^2 dt + \frac{M_0^2}{M_t^3}M_t^2\sigma^2 dt \\
&= -\frac{M_0^2}{M_t}\sigma d\overline{W}_t
\end{aligned}$$

Definiere

$$\overline{\overline{W}}_t := -\overline{W}_t \quad \text{für alle } 0\leq t\leq T$$

Dann ist $(\overline{\overline{W}}_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{M}$ und $(\frac{M_0^2}{M_t})_{0\leq t\leq T}$ erfüllt die folgende stochastische Differentialgleichung bzgl. $\mathbb{M}$:

$$d\frac{M_0^2}{M_t} = \frac{M_0^2}{M_t}\sigma d\overline{\overline{W}}_t \quad \text{mit Anfangswert } M_0 = s_0 e^{rT} \tag{1.6}$$

Somit erfüllt $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ bzgl. $\mathbb{P}$ die gleiche stochastische Differentialgleichung wie $(\frac{M_0^2}{M_t})_{0\leq t\leq T}$ bzgl. $\mathbb{M}$ (vgl. (1.5) und (1.6)).

$\square$

Da die Zinsrate r deterministisch ist, ist das Forwardmartingalmaß zum Termin T $\mathbb{P}_T$ gleich dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}$. Somit gilt:

$$C(0,K,T) = e^{-rT}E^{\mathbb{P}_T}(S_T-K)^+ = e^{-rT}E^{\mathbb{P}}(S_T-K)^+$$

und

$$P(0,\frac{M_0^2}{K},T) = e^{-rT}E^{\mathbb{P}_T}(\frac{M_0^2}{K}-S_T)^+ = e^{-rT}E^{\mathbb{P}}(\frac{M_0^2}{K}-S_T)^+$$

Wegen (1.3) gilt:

$$M_T = S_T$$

Um zu beweisen, dass (1.1) gilt, bleibt folglich zu zeigen:

$$E^{\mathbb{P}}(M_T-K)^+ = \frac{K}{M_0}E^{\mathbb{P}}(\frac{M_0^2}{K}-M_T)^+$$

Anwenden von $(a)_0$ liefert:

$$\begin{aligned}E^{\mathbb{P}}(M_T-K)^+ &= E^{\mathbb{M}}(\frac{M_0^2}{M_T}-K)^+\\ &= E^{\mathbb{P}}[(\frac{M_0^2}{M_T}-K)^+\frac{M_T}{M_0}]\\ &= \frac{K}{M_0}E^{\mathbb{P}}(\frac{M_0^2}{K}-M_T)^+\end{aligned}$$

Somit gilt die klassische Put-Call Symmetrie in einem arbitragefreien Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten.

Der Beweis zeigt, dass die Gültigkeit von Behauptung $(a)_0$ entscheidend dafür ist, dass die klassische Put-Call Symmetrie gilt.
Im nächsten Kapitel wird diese Beobachtung verallgemeinert. Zum einen wird ein allgemeineres Finanzmarktmodell betrachtet. Zum anderen wird in Behauptung $(a)_0$ der Zeitpunkt 0 durch eine beliebige Stopzeit $0 \leq \tau \leq T$ ersetzt.

2 Put-Call Symmetrie

Die Ausführungen in diesem Kapitel basieren auf [1] und [3].

2.1 Finanzmarktmodell

In diesem Abschnitt wird der Aufbau des Finanzmarktmodells dargestellt, das der restlichen Masterarbeit zugrundeliegt. Es wird ein zeitstetiges Modell mit zwei Finanzgütern betrachtet.
Dem Modell liegt ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zugrunde.
Der Handelszeitraum wird als endlich vorausgesetzt, d.h. es existiert ein $0 < T < \infty$, so dass das Intervall [0, T] den Handelszeitraum definiert.
Das erste Finanzgut ist ein T-Bond mit Preisprozess $(B(t,T))_{0 \le t \le T}$. Dieser Preisprozess dient als Numéraire.
Der Preisprozess des zweiten Finanzguts wird mit $(S_t)_{0 \le t \le T}$ bezeichnet und als positiv vorausgesetzt.
Der Informationsverlauf ist gegeben durch eine rechtsseitig stetige Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$, wobei $\mathcal{F}_0$ alle $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält.

Der Forwardpreisprozess des zweiten Finanzguts zum Termin T wird mit $(M_t)_{0 \le t \le T}$ bezeichnet. Es gilt:

$$M_t = \frac{S_t}{B(t,T)} \quad \text{für alle } 0 \le t \le T$$

Es wird angenommen, dass $\mathbb{P}$ das Forwardmartingalmaß zum Termin T ist.
Dann ist $(M_t)_{0 \le t \le T}$ bzgl. $\mathbb{P}$ ein positives Martingal.

Mit $(M_t)_{0 \le t \le T}$ werden zwei weitere Maße definiert.
Sei $\mathbb{M}$ das Maß definiert durch

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} := \frac{M_T}{M_0}$$

und sei $\mathbb{H}$ das Maß definiert durch

$$\frac{d\mathbb{H}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} := \frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}.$$

Mit $E_t^{\mathbb{P}}$ bzw. $E_t^{\mathbb{M}}$ bzw. $E_t^{\mathbb{H}}$ wird der bedingte Erwartungswert gegeben $\mathcal{F}_t$ unter dem Maß $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{H}$ bezeichnet.
Die regulär bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben $\mathcal{F}_t$ unter dem Maß $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{H}$ wird mit $\mathbb{P}_t$ bzw. $\mathbb{M}_t$ bzw. $\mathbb{H}_t$ bezeichnet.

2.2 Geometrische Put-Call Symmetrie

In diesem Abschnitt wird mit der verallgemeinerten Bedingung $(a)_\tau$ die geometrische Put-Call Symmetrie im oben beschriebenen Finanzmarkt definiert. Außerdem werden drei zu $(a)_\tau$ äquivalente Bedingungen angegeben.

Definition 2.1 (geometrische Put-Call Symmetrie)**:** Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit.
Dann gilt die geometrische Put-Call Symmetrie ($gPCS_\tau$) für $((M_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P})$, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:
$(a)_\tau$ Die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_T}{M_\tau}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_\tau}{M_T}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{M}$.

Die zu $(a)_\tau$ äquivalente Bedingung $(b)_\tau$ besagt, dass die implizite Volatilität von M_T bzgl. $\mathbb{P}$ im Zeitpunkt τ symmetrisch in $x := \log(\frac{K}{M_\tau})$ ist. Dazu muss zunächst geklärt werden, was der Begriff implizite Volatilität bedeutet.
Allgemein versteht man unter der impliziten Volatilität diejenige Volatilität σ, so dass der Marktpreis eines Calls dem im Black-Scholes Modell mit dieser Volatilität berechneten Preis des Calls entspricht.
Dies wird nun auf die vorliegende Situation übertragen.

Betrachtet wird ein Call mit Strike K und Fälligkeit T.
Der Marktpreis des Calls in $0 \leq \tau < T$ soll in diesem Fall der Modellpreis im unter 2.1 beschriebenen Finanzmarkt sein, d.h.

$$C^M(\tau, K, T) = B(\tau, T)E_\tau^{\mathbb{P}}(M_T - K)^+$$

Durch Einsetzen von $x := \log(\frac{K}{M_\tau})$ und da $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ ist, erhält man:

$$C^M(\tau,K,T) = B(\tau,T)E_\tau^{\mathbb{P}}(M_T - e^x E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)^+$$

Nun wird das im ersten Kapitel beschriebene Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Da $M_T = S_T$ gilt, ist der Preis eines Calls mit Strike K und Fälligkeit T in τ gegeben durch (vgl. [5], (6.7) Black-Scholes-Formel):

$$C^{BS}(\tau,K,T) = S_\tau \Phi(\frac{\log(\frac{S_\tau}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{S_\tau}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}})$$

Einsetzen des Forwardpreises der Aktie zum Termin T in τ (vgl. (1.3)) liefert:

$$\begin{aligned}
C^{BS}(\tau,K,T) &= M_\tau e^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau e^{-r(T-\tau)}}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) \\
&\quad - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau e^{-r(T-\tau)}}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) \\
&= M_\tau e^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau}{K}) - r(T-\tau) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) \\
&\quad - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau}{K}) - r(T-\tau) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) \\
&= M_\tau e^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) \\
&\quad - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau}{K}) - \frac{\sigma^2}{2}(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}) \\
&= M_\tau e^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau}{K})}{\sigma\sqrt{T-\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(\frac{\log(\frac{M_\tau}{K})}{\sigma\sqrt{T-\tau}} - \frac{\sigma\sqrt{T-\tau}}{2})
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x := \log(\frac{K}{M_\tau})$ und da $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$ ist, erhält man:

$$\begin{aligned}
C^{BS}(\tau,K,T) &= e^{-r(T-\tau)}((E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)\Phi(\frac{-x}{\sigma\sqrt{T-\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad - e^x(E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)\Phi(\frac{-x}{\sigma\sqrt{T-\tau}} - \frac{\sigma\sqrt{T-\tau}}{2}))
\end{aligned}$$

Um eine Unabhängigkeit von der Verzinsung zu erreichen, wird statt der Gleichheit der Kassapreise eine Gleichheit der Forwardpreise gefordert. Somit ist die implizite Volatilität von M_T bzgl. $\mathbb{P}$ für $0 \leq \tau < T$ und $x \in \mathbb{R}$ diejenige Volatilität $I_\tau^{\mathbb{P},M_T}(x)$, so dass die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} E_\tau^{\mathbb{P}}(M_T - e^x E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)^+ = (E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)\Phi(&\frac{-x}{I_\tau^{\mathbb{P},M_T}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P},M_T}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\ - e^x(E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)\Phi(&\frac{-x}{I_\tau^{\mathbb{P},M_T}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P},M_T}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \end{aligned}$$

Diese Überlegungen führen zur folgenden allgemeinen Definition der impliziten Volatilität.

Definition 2.2 (implizite Volatilität)**:** Für $0 \leq t < T$ ist die implizite Volatilität einer integrierbaren positiven Zufallsvariablen U bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert als das eindeutig bestimmte $I_t^{\mathbb{Q},U}(x)$, so dass

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{Q}}(U - \kappa(x))^+ = (E_t^{\mathbb{Q}} U)\Phi(&\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}) \\ - \kappa(x)\Phi(&\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\kappa(x) := e^x E_t^{\mathbb{Q}} U$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ wird $I_T^{\mathbb{Q},U}(x) := 0$ gesetzt.

Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von $I_t^{\mathbb{Q},U}(x)$:
Dieser Beweis basiert auf [6] (vgl. S. 141).
Bezeichne die linke Seite von Gleichung (2.1) mit $\mathrm{l}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))$ und die rechte Seite von Gleichung (2.1) mit $\mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))$,
d.h.

$$\mathrm{l}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) := E_t^{\mathbb{Q}}(U - \kappa(x))^+$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) := (E_t^{\mathbb{Q}} U)\Phi(&\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}) \\ - \kappa(x)\Phi(&\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}) \end{aligned}$$

Für $\mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))$ gilt:
1. $\mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))$ ist streng monoton wachsend in $I_t^{\mathbb{Q},U}(x)$, denn:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial I_t^{\mathbb{Q},U}(x)}\mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))\\
&= \frac{\partial}{\partial I_t^{\mathbb{Q},U}(x)}[(E_t^{\mathbb{Q}}U)\Phi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})\\
&\quad - \kappa(x)\Phi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})]\\
&= (E_t^{\mathbb{Q}}U)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})(\frac{x}{\sqrt{T-t}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))^2} + \frac{\sqrt{T-t}}{2})\\
&\quad - \kappa(x)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})(\frac{x}{\sqrt{T-t}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))^2} - \frac{\sqrt{T-t}}{2})\\
&\overset{(*)}{=} (E_t^{\mathbb{Q}}U)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})(\frac{x}{\sqrt{T-t}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))^2} + \frac{\sqrt{T-t}}{2}\\
&\quad - \frac{x}{\sqrt{T-t}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))^2} + \frac{\sqrt{T-t}}{2})\\
&= (E_t^{\mathbb{Q}}U)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})\sqrt{T-t}\\
&> 0 \quad \text{, da U positive Zufallsvariable, } \varphi > 0 \text{ und } T > t
\end{aligned}
$$

$$
(*)\ \kappa(x)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}) = (E_t^{\mathbb{Q}}U)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} + \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})
$$

Diese Gleichung basiert auf [6] (vgl. S. 130).
Sie gilt, da:

$$
\begin{aligned}
& \kappa(x)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})\\
\overset{\kappa(x)\ =\ e^x E_t^{\mathbb{Q}}U}{=}\ & e^x(E_t^{\mathbb{Q}}U)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})\\
=\ & e^x(E_t^{\mathbb{Q}}U)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}} - \frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})^2}{2})
\end{aligned}
$$

$$= \quad e^x(E_t^{\mathbb{Q}}U)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}})^2+2\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}+(\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})^2}{2})$$

$$\exp(-\frac{-4\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}}{2})$$

$$= \quad e^x(E_t^{\mathbb{Q}}U)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}+\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})^2}{2})e^{-x}$$

$$= \quad (E_t^{\mathbb{Q}}U)\varphi(\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}+\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2})$$

2. $\lim_{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\to 0} \mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) = (E_t^{\mathbb{Q}}U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)^+$, denn:

$$\begin{aligned}
&\lim_{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\to 0} \mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))\\
&= \lim_{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\to 0}(E_t^{\mathbb{Q}}U)\Phi(\underbrace{\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}}_{\substack{\to +\infty,\text{ falls x} < 0\\ \to \quad 0,\text{ falls x} = 0\\ \to -\infty,\text{ falls x} > 0}} + \underbrace{\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}}_{\to 0})\\
&\quad - \kappa(x)\Phi(\underbrace{\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}}_{\substack{\to +\infty,\text{ falls x} < 0\\ \to \quad 0,\text{ falls x} = 0\\ \to -\infty,\text{ falls x} > 0}} - \underbrace{\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}}_{\to 0})\\
&= (E_t^{\mathbb{Q}}U)\begin{cases}1 & \text{, falls } x<0\\ \frac{1}{2} & \text{, falls x} = 0\\ 0 & \text{, falls } x>0\end{cases} - \kappa(x)\begin{cases}1 & \text{, falls } x<0\\ \frac{1}{2} & \text{, falls x} = 0\\ 0 & \text{, falls } x>0\end{cases}\\
&= \begin{cases}E_t^{\mathbb{Q}}U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U & \text{, falls } x<0\\ \frac{1}{2}(E_t^{\mathbb{Q}}U - e^0 E_t^{\mathbb{Q}}U) & \text{, falls x} = 0\\ 0 & \text{, falls } x>0\end{cases}\\
&= (E_t^{\mathbb{Q}}U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)^+
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\to\infty} \mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) = E_t^{\mathbb{Q}}U$, denn:

$$\begin{aligned}
&\lim_{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\to\infty} \mathrm{r}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) \\
&= \lim_{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\to\infty} (E_t^{\mathbb{Q}}U)\Phi(\underbrace{\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}}_{\to\ 0} + \underbrace{\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}}_{\to +\infty}) \\
&\quad - \kappa(x)\Phi(\underbrace{\frac{-x}{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}}_{\to\ 0} - \underbrace{\frac{I_t^{\mathbb{Q},U}(x)\sqrt{T-t}}{2}}_{\to +\infty}) \\
&= (E_t^{\mathbb{Q}}U)\cdot 1 - \kappa(x)\cdot 0 \\
&= E_t^{\mathbb{Q}}U
\end{aligned}$$

Für $\mathrm{l}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))$ gilt:

4. $(E_t^{\mathbb{Q}}U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)^+ \leq \mathrm{l}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) \leq E_t^{\mathbb{Q}}U$, denn:

$$\begin{aligned}
(E_t^{\mathbb{Q}}U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)^+ &= (E_t^{\mathbb{Q}}U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}E_t^{\mathbb{Q}}U)^+ \\
&= (E_t^{\mathbb{Q}}(U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U))^+ \\
&\overset{\text{Jensensche Ungleichung}}{\leq} E_t^{\mathbb{Q}}(U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)^+ \\
&= E_t^{\mathbb{Q}}(U - \kappa(x))^+ \\
&= \mathrm{l}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(I_t^{\mathbb{Q},U}(x)) &= E_t^{\mathbb{Q}}(U - \kappa(x))^+ \\
&= E_t^{\mathbb{Q}}(U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)^+ \\
&= E_t^{\mathbb{Q}}(U - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U)\mathbb{1}_{\{U > e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\}} \\
&= E_t^{\mathbb{Q}}U\mathbb{1}_{\{U > e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\}} - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\mathbb{1}_{\{U > e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\}} \\
&= E_t^{\mathbb{Q}}U - E_t^{\mathbb{Q}}U\mathbb{1}_{\{U \leq e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\}} - e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\mathbb{1}_{\{U > e^x E_t^{\mathbb{Q}}U\}} \\
&\leq E_t^{\mathbb{Q}}U
\end{aligned}$$

Da der Wert der linken Seite von Gleichung (2.1) innerhalb der Grenzwerte der rechten

Seite der Gleichung liegt (s. 2., 3. und 4.) und der Wert der rechten Seite der Gleichung streng monoton wachsend in $I_t^{\mathbb{Q},U}(x)$ ist (s. 1.), existiert ein eindeutig bestimmtes $I_t^{\mathbb{Q},U}(x)$. $\square$

Bemerkung 2.3: Es werden die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwendet:

$$I_t^{\mathbb{P}} := I_t^{\mathbb{P},M_T} \quad \text{und} \quad I_t^{\mathbb{M}} := I_t^{\mathbb{M},\frac{1}{M_T}}$$

Bemerkung 2.4: Die implizite Volatilität $I_\tau^{\mathbb{P}}(x)$ kann auch über Putpreise bestimmt werden. Sie ist diejenige Volatilität $I_\tau^{\mathbb{P}}(x)$, so dass der Forwardpreis eines Puts im betrachteten Finanzmarktmodell dem Forwardpreis eines Puts im Black-Scholes Modell mit Volatilität $I_\tau^{\mathbb{P}}(x)$ entspricht.

Für den Beweis von Lemma 2.8, das im Beweis der Äquivalenz von $(a)_\tau$ und $(b)_\tau$ verwendet wird, wird die folgende Aussage basierend auf (3.3) in [3] genutzt:

Für alle $0 \leq \tau < T$ gilt:

$$\begin{aligned} E_\tau^{\mathbb{P}}(\kappa(x) - M_T)^+ = \kappa(x)\Phi(&\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\ &- (E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} E_\tau^{\mathbb{P}}(\kappa(x) - M_T)^+ &= E_\tau^{\mathbb{P}}(\kappa(x) - M_T + (M_T - \kappa(x))^+) \\ &= \kappa(x) - E_\tau^{\mathbb{P}} M_T + E_\tau^{\mathbb{P}}(M_T - \kappa(x))^+ \\ &\overset{\text{Def. } I_\tau^{\mathbb{P}}(x)}{=} \kappa(x)(1 - \Phi(\frac{-x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2})) \\ &\quad - (E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)(1 - \Phi(\frac{-x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2})) \\ &\overset{1-\Phi(z) = \Phi(-z)}{=} \kappa(x)\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\ &\quad - (E_\tau^{\mathbb{P}} M_T)\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \end{aligned}$$

$\square$

Für die zu $(a)_\tau$ äquivalente Bedingung $(c)_\tau$ wird der Begriff Auszahlungsfunktion benötigt.

Definition 2.5 (Auszahlungsfunktion)**:** Eine Auszahlungsfunktion ist eine nicht-negative Borelfunktion auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 2.6: Call:
Ein Call mit Strike K, Fälligkeit T und Underlyingkurs $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ liefert eine Auszahlung in Höhe von $(M_T - K)^+$. Dies entspricht der Auszahlungsfunktion

$$G(m) = (m - K)^+ \quad \text{für alle m} \in \mathbb{R}$$

Put:
Ein Put mit Strike K, Fälligkeit T und Underlyingkurs $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ liefert eine Auszahlung in Höhe von $(K - M_T)^+$. Dies entspricht der Auszahlungsfunktion

$$G(m) = (K - m)^+ \quad \text{für alle m} \in \mathbb{R}$$

Nun können die drei zu $(a)_\tau$ äquivalenten Bedingungen angegeben werden.

Satz 2.7: Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
$(a)_\tau$ Die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_T}{M_\tau}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_\tau}{M_T}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{M}$.
$(b)_\tau$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$I_\tau^{\mathbb{P}}(x) = I_\tau^{\mathbb{P}}(-x)$$

$(c)_\tau$ Für jede Auszahlungsfunktion G gilt:

$$E_\tau^{\mathbb{P}} G(M_T) = E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau} G(\frac{M_\tau^2}{M_T})]$$

$(d)_\tau$ Die regulär bedingte Verteilung von $X_T := \log(\frac{M_T}{M_\tau})$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{H}$ ist symmetrisch.

Im Beweis der Äquivalenz von $(a)_\tau$ und $(b)_\tau$ wird das folgende Lemma basierend auf Theorem 4.1 in [3] verwendet:

Lemma 2.8: Sei $0 \leq \tau < T$ eine Stopzeit. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$E_\tau^{\mathbb{M}}(\frac{1}{M_T}-\frac{1}{K})^+ = E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}+\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2})$$
$$-\frac{1}{K}\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}-\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2})$$

wobei $K := \kappa(x) = e^x E_\tau^{\mathbb{P}} M_T$.

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
E_\tau^{\mathbb{M}}(\frac{1}{M_T}-\frac{1}{K})^+ &= E_\tau^{\mathbb{P}}[(\frac{1}{M_T}-\frac{1}{K})^+\frac{M_T}{M_0}]\frac{M_0}{M_\tau} \\
&\overset{M_0\ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} E_\tau^{\mathbb{P}}[(\frac{1}{M_T}-\frac{1}{K})^+ M_T]\frac{1}{M_\tau}\frac{M_0}{M_0} \\
&= \frac{1}{KM_\tau}E_\tau^{\mathbb{P}}(K-M_T)^+ \\
&\overset{(2.2)}{=} \frac{1}{KM_\tau}K\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}+\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad -\frac{1}{KM_\tau}(E_\tau^{\mathbb{P}}M_T)\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}-\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\overset{x\ =\ \log(\frac{K}{E_\tau^{\mathbb{P}}M_T})}{=} \frac{1}{M_\tau}\Phi(\frac{\log(\frac{K}{E_\tau^{\mathbb{P}}M_T})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}+\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad -\frac{1}{K}\frac{1}{M_\tau}(E_\tau^{\mathbb{P}}M_T)\Phi(\frac{\log(\frac{K}{E_\tau^{\mathbb{P}}M_T})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}-\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\overset{(M_t)_{0\le t\le T}\ \mathbb{P}-\text{Martingal}}{=} \frac{1}{M_\tau}\Phi(\frac{\log(\frac{\frac{1}{M_\tau}}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}+\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad -\frac{1}{K}\frac{1}{M_\tau}M_\tau\Phi(\frac{\log(\frac{\frac{1}{M_\tau}}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}-\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\overset{(*_1)}{=} E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}+\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad -\frac{1}{K}\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}-\frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2})
\end{aligned}$$

$$(*_1)\ \frac{1}{M_\tau} \overset{M_\tau\ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{1}{M_\tau}] = E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_\tau}\frac{M_0}{M_T}]\frac{M_\tau}{M_0} \overset{M_0, M_\tau\ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]$$

$\square$

Beweis von Satz 2.7:

1. Fall: $\tau < T$

zu $(a)_\tau \Leftrightarrow (b)_\tau$:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $I_\tau^{\mathbb{P}}(x) = I_\tau^{\mathbb{M}}(-x)$, denn:

$$\begin{aligned}
E_\tau^{\mathbb{M}}(\frac{1}{M_T} - e^{-x}E_\tau^{\mathbb{M}}\frac{1}{M_T})^+ &\overset{(*_2)}{=} E_\tau^{\mathbb{M}}(\frac{1}{M_T} - \frac{1}{K})^+ \\
&\overset{\text{Lemma 2.8}}{=} E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad - \frac{1}{K}\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{\frac{1}{K}})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\overset{(*_2)}{=} E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{e^{-x}E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad - e^{-x}E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{\log(\frac{E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]}{e^{-x}E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]})}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&= E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} + \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2}) \\
&\quad - e^{-x}E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}]\Phi(\frac{x}{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}} - \frac{I_\tau^{\mathbb{P}}(x)\sqrt{T-\tau}}{2})
\end{aligned}$$

$$(*_2)\ e^{-x}E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{1}{M_T}] \overset{(*_1)}{=} \frac{1}{e^x M_\tau} \overset{(M_t)_{0\le t\le T}\ \mathbb{P}-\text{Martingal}}{=} \frac{1}{e^x E_\tau^{\mathbb{P}} M_T} = \frac{1}{K}$$

Somit gilt:

$$(b)_\tau \Leftrightarrow I_\tau^{\mathbb{P}}(x) = I_\tau^{\mathbb{M}}(x) \text{ für alle x} \in \mathbb{R}$$

Da $I_\tau^{\mathbb{P}}$ die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_T}{M_\tau}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ und $I_\tau^{\mathbb{M}}$ die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_\tau}{M_T}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{M}$ bestimmt, folgt:

$$I_\tau^{\mathbb{P}}(x) = I_\tau^{\mathbb{M}}(x) \text{ für alle x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a)_\tau$$

zu $(a)_\tau \Leftrightarrow (c)_\tau$:
Da M_τ $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist, ist $(a)_\tau$ äquivalent zu:
$(a')_\tau$ Die regulär bedingte Verteilung von M_T gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_\tau^2}{M_T}$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{M}$.

Es gilt:

$$E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}G(\frac{M_\tau^2}{M_T})] = E_\tau^{\mathbb{M}}[\frac{M_T}{M_\tau}G(\frac{M_\tau^2}{M_T})\frac{M_0}{M_T}]\frac{M_\tau}{M_0} \overset{M_0, M_\tau \ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} E_\tau^{\mathbb{M}}[G(\frac{M_\tau^2}{M_T})]$$

Daraus folgt:

$$(c)_\tau \iff \text{Für jede Auszahlungsfunktion G gilt: } E_\tau^{\mathbb{P}}G(M_T) = E_\tau^{\mathbb{M}}[G(\frac{M_\tau^2}{M_T})]$$

Somit gilt:

$$(c)_\tau \iff (a')_\tau$$

zu $(c)_\tau \Leftrightarrow (d)_\tau$:
Es gilt:

$$\begin{aligned} E_\tau^{\mathbb{P}}G(M_T) &= E_\tau^{\mathbb{H}}[G(M_T)\frac{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_T}}]E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}] \\ &\overset{M_\tau \ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} \frac{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_\tau}}E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]E_\tau^{\mathbb{H}}[G(M_T)\sqrt{\frac{M_\tau}{M_T}}] \\ &\overset{X_T \ = \ \log(\frac{M_T}{M_\tau})}{=} \frac{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_\tau}}E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]E_\tau^{\mathbb{H}}[G(e^{X_T}M_\tau)\sqrt{e^{-X_T}}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

und

$$\begin{aligned} E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}G(\frac{M_\tau^2}{M_T})] &= E_\tau^{\mathbb{H}}[\frac{M_T}{M_\tau}G(\frac{M_\tau^2}{M_T})\frac{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_T}}]E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}] \\ &\overset{M_\tau \ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} \frac{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_\tau}}E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]E_\tau^{\mathbb{H}}[G(\frac{M_\tau^2}{M_T})\sqrt{\frac{M_T}{M_\tau}}] \end{aligned}$$

$$X_T \overset{X_T = \log(\frac{M_T}{M_\tau})}{=} \frac{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_\tau}} E^{\mathbb{P}}_\tau[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}] E^{\mathbb{H}}_\tau[G(e^{-X_T}M_\tau)\sqrt{e^{X_T}}] \tag{2.4}$$

zu $(d)_\tau \Rightarrow (c)_\tau$:

$(d)_\tau \Rightarrow$ Die regulär bedingte Verteilung von X_T gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{H}$
ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $-X_T$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{H}$.
$\overset{(2.3),\ (2.4)}{\Rightarrow} (c)_\tau$

zu $(c)_\tau \Rightarrow (d)_\tau$:
Da eine regulär bedingte Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ durch ihre Fouriertransformierte eindeutig bestimmt ist, ist zu zeigen:

$$E^{\mathbb{H}}_\tau e^{ipX_T} = E^{\mathbb{H}}_\tau e^{-ipX_T} \text{ für alle p} \in \mathbb{R}$$

Für jedes $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{H}}_\tau e^{ipX_T} &\overset{X_T=\log(\frac{M_T}{M_\tau})}{=} E^{\mathbb{H}}_\tau(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip} \\
&= E^{\mathbb{P}}_\tau[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip}\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]\frac{1}{E^{\mathbb{P}}_\tau[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]} \\
&\overset{M_\tau\ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} E^{\mathbb{P}}_\tau[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}]\frac{\sqrt{M_\tau}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}\frac{1}{E^{\mathbb{P}}_\tau[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{H}}_\tau e^{-ipX_T} &\overset{X_T=\log(\frac{M_T}{M_\tau})}{=} E^{\mathbb{H}}_\tau(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip} \\
&= E^{\mathbb{P}}_\tau[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip}\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]\frac{1}{E^{\mathbb{P}}_\tau[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]} \\
&\overset{M_\tau\ \mathcal{F}_\tau-\text{messbar}}{=} E^{\mathbb{P}}_\tau[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}]\frac{\sqrt{M_\tau}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}\frac{1}{E^{\mathbb{P}}_\tau[\frac{\sqrt{M_T}}{E^{\mathbb{P}}\sqrt{M_T}}]}
\end{aligned}$$

Somit bleibt zu zeigen:

$$E_\tau^{\mathbb{P}}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}] = E_\tau^{\mathbb{P}}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}]$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
E_\tau^{\mathbb{P}}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}] \quad &= \quad E_\tau^{\mathbb{P}}[\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}] + i\,\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}]] \\
&= \quad E_\tau^{\mathbb{P}}[(\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] - E_\tau^{\mathbb{P}}[(-\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] \\
&\quad + iE_\tau^{\mathbb{P}}[(\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] - iE_\tau^{\mathbb{P}}[(-\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] \\
&\overset{(c)_\tau \text{ da } (*_3)}{=} E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(\mathrm{Re}[(\frac{{M_\tau}^2}{M_T M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] - E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(-\mathrm{Re}[(\frac{{M_\tau}^2}{M_T M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] \\
&\quad + iE_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(\mathrm{Im}[(\frac{{M_\tau}^2}{M_T M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] - iE_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(-\mathrm{Im}[(\frac{{M_\tau}^2}{M_T M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+] \\
&\overset{(*_4)}{=} \quad E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}\frac{M_\tau}{M_T}])^+] - E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(-\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}\frac{M_\tau}{M_T}])^+] \\
&\quad + iE_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}\frac{M_\tau}{M_T}])^+] - iE_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_\tau}(-\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}\frac{M_\tau}{M_T}])^+] \\
&\overset{M_\tau,\ M_T\ >\ 0}{=} E_\tau^{\mathbb{P}}[(\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}])^+] - E_\tau^{\mathbb{P}}[(-\mathrm{Re}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}])^+] \\
&\quad + iE_\tau^{\mathbb{P}}[(\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}])^+] - iE_\tau^{\mathbb{P}}[(-\mathrm{Im}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}])^+] \\
&= \quad E_\tau^{\mathbb{P}}[(\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}]
\end{aligned}$$

$(*_3)$ $G_1(m) = (\mathrm{Re}[(\frac{m}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+,\ G_2(m) = (-\mathrm{Re}[(\frac{m}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+,\ G_3(m) = (\mathrm{Im}[(\frac{m}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+$ und $G_4(m) = (-\mathrm{Im}[(\frac{m}{M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}}])^+$ sind Auszahlungsfunktionen.

$(*_4)$ $(\frac{{M_\tau}^2}{M_T M_\tau})^{ip+\frac{1}{2}} = (\frac{M_\tau}{M_T})^{ip+\frac{1}{2}} = (\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip-\frac{1}{2}} = (\frac{M_T}{M_\tau})^{-ip+\frac{1}{2}}\frac{M_\tau}{M_T}$

2. Fall: $\tau = T$

$(a)_T$ Die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_T}{M_T} = 1$ gegeben $\mathcal{F}_T$ unter $\mathbb{P}$ ist gleich der

regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_T}{M_T} = 1$ gegeben $\mathcal{F}_T$ unter $\mathbb{M}$.
$(b)_T$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$I_T^{\mathbb{P}}(x) = 0 = I_T^{\mathbb{P}}(-x)$$

$(c)_T$ Für jede Auszahlungsfunktion G gilt:

$$E_T^{\mathbb{P}} G(M_T) = E_T^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_T} G(\frac{{M_T}^2}{M_T})]$$

$(d)_T$ Die regulär bedingte Verteilung von $X_T := \log(\frac{M_T}{M_T}) = 0$ gegeben $\mathcal{F}_T$ unter $\mathbb{H}$ ist symmetrisch.
Da $(a)_T - (d)_T$ allgemeingültige Aussagen sind, sind sie äquivalent. □

Bemerkung 2.9: Aus $(c)_0$ kann man die klassische Put-Call Symmetrie mit der Auszahlungsfunktion $G(y) = (y - K)^+$ herleiten.
Analog kann man auch für jede andere Auszahlungsfunktion G eine Gleichung mit den Anfangspreisen europäischer Claims herleiten. Als Beispiel wird die Auszahlungsfunktion $G(m) = m^p$ betrachtet.
Es wird angenommen, dass $gPCS_0$ für $((M_t)_{0 \le t \le T}, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbb{P})$ gilt.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} E_0^{\mathbb{P}} M_T^p &\overset{(c)_0}{=} E_0^{\mathbb{P}}[\frac{M_T}{M_0}(\frac{M_0^2}{M_T})^p] \\ &= E_0^{\mathbb{P}}[\frac{M_T^{1-p}}{M_0^{1-2p}}] \end{aligned}$$

Da M_0 $\mathcal{F}_0$-messbar ist, folgt:

$$B(0,T) E_0^{\mathbb{P}}(\frac{M_T}{M_0})^p = B(0,T) E_0^{\mathbb{P}}(\frac{M_T}{M_0})^{1-p}$$

Somit hat ein europäischer Claim mit der Auszahlung $(\frac{M_T}{M_0})^p$ den gleichen Anfangspreis wie ein europäischer Claim mit der Auszahlung $(\frac{M_T}{M_0})^{1-p}$.

2.3 Beispiele für Modelle, in denen die geometrische Put-Call Symmetrie gilt

In diesem Abschnitt wird ein Volatilitätsmodell mit stochastischer und lokaler Volatilität betrachtet.

Für das erste Finanzgut, den T-Bond, wird eine stetige Verzinsung mit der zeitabhängigen, deterministischen Zinsrate $r : [0, T] \to [0, \infty)$ angenommen, d.h.

$$B(t, T) = \exp(-\int_t^T r_s \, ds) \text{ für alle } 0 \leq t \leq T$$

Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit.

Der Preisprozess des zweiten Finanzguts erfülle für $\tau \leq t \leq T$ die folgende stochastische Differentialgleichung bzgl. $\mathbb{P}_\tau$

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r_t dt + \overline{f}(S_t, V_t, t) dW_{1,t}) \\ dV_t &= \overline{\alpha}(S_t, V_t, t) dt + \overline{\beta}(S_t, V_t, t) dW_{2,t} \end{aligned}$$

wobei $(W_{1,t}, W_{2,t})_{\tau \leq t \leq T}$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\tau$ ist.

Für den Forwardpreis des zweiten Finanzguts zum Termin T gilt:

$$M_t = S_t \exp(\int_t^T r_s \, ds) \text{ für alle } \tau \leq t \leq T$$

Da die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(r_t dt + \overline{f}(S_t, V_t, t) dW_{1,t})$$

durch

$$S_t = S_\tau \exp(\int_\tau^t r_s \, ds + \int_\tau^t \overline{f}(S_t, V_t, t) \, dW_{1,t} - \frac{1}{2} \int_\tau^t \overline{f}^2(S_t, V_t, t) \, dt)$$

gelöst wird, gilt:

$$\begin{aligned} M_t &= S_\tau \exp(\int_\tau^t r_s \, ds + \int_\tau^t \overline{f}(S_t, V_t, t) \, dW_{1,t} - \frac{1}{2} \int_\tau^t \overline{f}^2(S_t, V_t, t) \, dt) \exp(\int_t^T r_s \, ds) \\ &= S_\tau \exp(\int_\tau^T r_s \, ds) \exp(\int_\tau^t \overline{f}(S_t, V_t, t) \, dW_{1,t} - \frac{1}{2} \int_\tau^t \overline{f}^2(S_t, V_t, t) \, dt) \end{aligned}$$

$$= M_\tau \exp(\int_\tau^t \overline{f}(S_t, V_t, t)\, dW_{1,t} - \frac{1}{2}\int_\tau^t \overline{f}^2(S_t, V_t, t)\, dt) \quad \text{für alle } \tau \leq t \leq T$$

Bzgl. $\mathbb{P}_\tau$ hat $(M_t)_{\tau\leq t\leq T}$ somit die folgende Dynamik:

$$dM_t = M_t\overline{f}(S_t, V_t, t)dW_{1,t}$$

Für alle $\tau \leq t \leq T$ definiere

$$\overline{\overline{f}}(M_t, V_t, t) := \overline{f}(S_t, V_t, t)$$

Dann gilt:

$$dM_t = M_t\overline{\overline{f}}(M_t, V_t, t)dW_{1,t}$$

Für alle $\tau \leq t \leq T$ definiere

$$X_t := \log(\frac{M_t}{M_\tau})$$

Anwenden der Itô-Formel liefert:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{M_t}dM_t - \frac{1}{2}\frac{1}{M_t^2}d\langle M\rangle_t \\ &= \frac{1}{M_t}M_t\overline{\overline{f}}(M_t, V_t, t)dW_{1,t} - \frac{1}{2}\frac{1}{M_t^2}M_t^2\overline{\overline{f}}^2(M_t, V_t, t)dt \\ &= -\frac{1}{2}\overline{\overline{f}}^2(M_t, V_t, t)dt + \overline{\overline{f}}(M_t, V_t, t)dW_{1,t} \end{aligned}$$

Für alle $\tau \leq t \leq T$ definiere

$$\begin{aligned} f(X_t, V_t, t) &:= \overline{\overline{f}}(M_t, V_t, t) \\ \alpha(X_t, V_t, t) &:= \overline{\alpha}(S_t, V_t, t) \\ \beta(X_t, V_t, t) &:= \overline{\beta}(S_t, V_t, t) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{2}f^2(X_t, V_t, t)dt + f(X_t, V_t, t)dW_{1,t} \\ dV_t &= \alpha(X_t, V_t, t)dt + \beta(X_t, V_t, t)dW_{2,t} \end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, welche Bedingungen die Funktionen f, α und β erfüllen müssen, damit die geometrische Put-Call Symmetrie für $((M_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ gilt.

Satz 2.10: Gegeben sei das oben beschriebene Volatilitätsmodell. Die Funktionen $f(x, v, t)$, $\alpha(x, v, t)$ und $\beta(x, v, t)$ seien gerade in x. Die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX_t = & -\frac{1}{2} f^2(X_t, V_t, t)dt + f(X_t, V_t, t)dW_{1,t} \\ dV_t = & \alpha(X_t, V_t, t)dt + \beta(X_t, V_t, t)dW_{2,t} \end{aligned} \tag{2.5}$$

sei schwach eindeutig.
Dann gilt $gPCS_\tau$ für $((M_t)_{\tau \le t \le T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau \le t \le T}, \mathbb{P})$.

Beweis: Es wird gezeigt, dass $(a)_\tau$ erfüllt ist.
Da $X_T = \log(\frac{M_T}{M_\tau})$ und $-X_T = \log(\frac{M_\tau}{M_T})$ ist, ist zu zeigen:
Die regulär bedingte Verteilung von X_T gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $-X_T$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{M}$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{M}_\tau}{d\mathbb{P}_\tau} |_{\mathcal{F}_t} = & \frac{M_t}{M_\tau} \\ = & \exp(\log(\frac{M_t}{M_\tau})) \\ = & \exp(X_t) \\ = & \exp(\int_\tau^t f(X_s, V_s, s)\, dW_{1,s} - \frac{1}{2} \int_\tau^t f^2(X_s, V_s, s)\, ds) \\ = & \exp(\int_\tau^t f(X_s, V_s, s)\, dW_{1,s} + \int_\tau^t 0\, dW_{2,s} \\ & - \frac{1}{2} \int_\tau^t f^2(X_s, V_s, s) + 0^2\, ds) \end{aligned}$$

Für alle $\tau \le t \le T$ definiere

$$W_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau} := W_{1,t} - \int_\tau^t f(X_s, V_s, s)\, ds$$

Nach dem Satz von Cameron, Martin, Girsanov ist $(W_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau}, W_{2,t})_{\tau \le t \le T}$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{M}_\tau$.
Somit gilt bzgl. $\mathbb{M}_\tau$:

$$d(-X_t) \quad = \quad \frac{1}{2} f^2(X_t, V_t, t)dt - f(X_t, V_t, t)dW_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau} - f^2(X_t, V_t, t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}f^2(X_t,V_t,t)dt - f(X_t,V_t,t)dW_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau} \\
&\overset{\text{f gerade in x}}{=} -\frac{1}{2}f^2(-X_t,V_t,t)dt - f(-X_t,V_t,t)dW_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \alpha(X_t,V_t,t)dt + \beta(X_t,V_t,t)dW_{2,t} \\
&\overset{\alpha \text{ und } \beta \text{ gerade in x}}{=} \alpha(-X_t,V_t,t)dt + \beta(-X_t,V_t,t)dW_{2,t}
\end{aligned}
$$

Für alle $\tau \leq t \leq T$ definiere

$$\overline{W}_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau} := W_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau}$$

Dann erfüllt $(-X_t,V_t)_{\tau\leq t\leq T}$ bzgl. $\mathbb{M}_\tau$ die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
d(-X_t) &= -\frac{1}{2}f^2(-X_t,V_t,t)dt + f(-X_t,V_t,t)d\overline{W}_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau} \\
dV_t &= \alpha(-X_t,V_t,t)dt + \beta(-X_t,V_t,t)dW_{2,t}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass sowohl $((X_t,V_t)_{\tau\leq t\leq T},(W_{1,t},W_{2,t})_{\tau\leq t\leq T},\mathbb{P}_\tau)$ als auch $((-X_t,V_t)_{\tau\leq t\leq T},(\overline{W}_{1,t}^{\mathbb{M}_\tau},W_{2,t})_{\tau\leq t\leq T},\mathbb{M}_\tau)$ die stochastische Differentialgleichung (2.5) erfüllt. Wegen der schwachen Eindeutigkeit von (2.5) folgt, dass die regulär bedingte Verteilung von X_T gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ gleich der regulär bedingten Verteilung von $-X_T$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{M}$ ist, was zu zeigen war. □

Als Spezialfall wird nun ein Volatilitätsmodell mit lokaler Volatilität, aber ohne stochastische Volatilität betrachtet. Der Unterschied zum oben beschriebenen Volatilitätsmodell ist, dass die Volatilität $\overline{f}(S_t,V_t,t)$ nur noch vom aktuellen Kurs S_t und der Zeit t abhängt, d.h.

$$\overline{f}(S_t,V_t,t) = \overline{\sigma}(S_t,t).$$

Bzgl. $\mathbb{P}_\tau$ erfüllt $(S_t)_{\tau\leq t\leq T}$ dann die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = S_t(r_t dt + \overline{\sigma}(S_t,t)dW_t)$$

wobei $(W_t)_{\tau\leq t\leq T}$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\tau$ ist.
Für alle $\tau \leq t \leq T$ definiere

$$\sigma(X_t,t) := \overline{\sigma}(S_t,t)$$

Analog zum obigen Volatilitätsmodell hat $(X_t)_{\tau \le t \le T}$, wobei $X_t := \log(\frac{M_t}{M_\tau})$, dann die folgende Dynamik bzgl. $\mathbb{P}_\tau$:

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}W_t$$

Das folgende Korollar beantwortet die Frage, wann die geometrische Put-Call Symmetrie im Volatilitätsmodell mit lokaler Volatilität gilt.

Korollar 2.11: Gegeben sei das oben beschriebene Volatilitätsmodell mit lokaler Volatilität. Die Funktion $\sigma(x, t)$ sei gerade in x. Die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}W_t$$

sei schwach eindeutig.
Dann gilt $gPCS_\tau$ für $((M_t)_{\tau \le t \le T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau \le t \le T}, \mathbb{P})$.

Beweis: Dies ist ein Spezialfall von Satz 2.10 mit $f(X_t, V_t, t) = \sigma(X_t, t)$ und $\alpha(X_t, V_t, t) = \beta(X_t, V_t, t) = 0$. $\square$

Beispiel 2.12 (Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen, deterministischen Koeffizienten)**:** Sei $0 \le \tau \le T$ eine Stopzeit.
Der Preisprozess des Geldmarktkontos $(\beta_t)_{\tau \le t \le T}$ und der Aktienpreisprozess $(S_t)_{\tau \le t \le T}$ erfüllen folgende Differentialgleichungen bzgl. $\mathbb{P}_\tau$:

$$\begin{aligned} d\beta_t &= \beta_t r_t \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}S_t &= S_t(r_t \mathrm{d}t + \sigma_t dW_t) \end{aligned}$$

wobei $r : [\tau, T] \to [0, \infty)$ die Entwicklung der Zinsrate ist, $\sigma : [\tau, T] \to (0, \infty)$ die Entwicklung der Volatilität und $(W_t)_{\tau \le t \le T}$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\tau$.
Für alle $\tau \le t \le T$ definiere

$$X_t := \log(\frac{M_t}{M_\tau})$$

Analog zum obigen Volatilitätsmodell hat $(X_t)_{\tau \le t \le T}$ dann die folgende Dynamik bzgl. $\mathbb{P}_\tau$:

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t \tag{2.6}$$

Da die Funktion $\sigma(x,t) = \sigma(t)$ gerade in x ist und die Differentialgleichung (2.6) schwach eindeutig ist, folgt aus Korollar 2.11, dass im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen, deterministischen Koeffizienten $gPCS_\tau$ für $((M_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ gilt.

2.4 Arithmetische Put-Call Symmetrie

Man kann im Finanzmarkt, der in Abschnitt 2.1 beschrieben wurde, neben der geometrischen Put-Call Symmetrie eine weitere Symmetrie definieren, die arithmetische Put-Call Symmetrie.

Definition 2.13 (arithmetische Put-Call Symmetrie)**:** Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit.
Dann gilt die arithmetische Put-Call Symmetrie ($aPCS_\tau$) für $((X_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P})$, falls $(X_t)_{\tau\leq t\leq T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}$-adaptierter stochastischer Prozess ist und die folgende Bedingung erfüllt ist:
$(i)_\tau$ Die regulär bedingte Verteilung von $X_T - X_\tau$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ ist symmetrisch.

Zu Bedingung $(i)_\tau$ kann eine äquivalente Bedingung angegeben werden.

Satz 2.14: Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit und sei $(X_t)_{\tau\leq t\leq T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}$-adaptierter stochastischer Prozess.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
$(i)_\tau$ Die regulär bedingte Verteilung von $X_T - X_\tau$ gegeben $\mathcal{F}_\tau$ unter $\mathbb{P}$ ist symmetrisch.
$(ii)_\tau$ Für jede Auszahlungsfunktion G gilt:

$$E_\tau^{\mathbb{P}} G(X_T - X_\tau) = E_\tau^{\mathbb{P}} G(X_\tau - X_T)$$

Beweis der Äquivalenz: klar $\square$

Zwischen der arithmetischen und der geometrischen Put-Call Symmetrie besteht der folgende Zusammenhang.

Bemerkung 2.15: Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit. Dann gilt:

$$gPCS_\tau \text{ gilt für } ((M_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P})$$

$\Leftrightarrow aPCS_\tau$ gilt für $((X_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{H})$ wobei $X_t := \log(\frac{M_t}{M_\tau})$ für alle $\tau \leq t \leq T$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& gPCS_\tau \text{ gilt für } ((M_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P}) \\
\Leftrightarrow\quad & (d)_\tau \text{ gilt für } ((M_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{P}) \\
\overset{X_\tau=\log(\frac{M_\tau}{M_\tau})=\log(1)=0}{\Leftrightarrow}\quad & (i)_\tau \text{ gilt für } ((X_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{H}) \\
\Leftrightarrow\quad & aPCS_\tau \text{ gilt für } ((X_t)_{\tau\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau\leq t\leq T}, \mathbb{H})
\end{aligned}$$

$\square$

3 Bewertung von Barriereoptionen

Dieses Kapitel befasst sich mit der Anwendung der Put-Call Symmetrie bei der Bewertung von Barriereoptionen.
Dazu wird zunächst erläutert, was man unter einer Barriereoption versteht. Barriereoptionen sind pfadabhängige Optionen, d.h. die Auszahlung einer Barriereoption hängt nicht nur vom Kurs des Underlyings zur Fälligkeit der Option ab, sondern auch vom Kursverlauf des Underlyings während der Laufzeit der Option. Als Underlyingkursprozess der in diesem Kapitel betrachteten Barriereoptionen dient der Forwardpreisprozess $(M_t)_{0\leq t\leq T}$.
Für den Wert einer Barriereoption ist es entscheidend, ob der Underlyingkurs eine Schranke der Option erreicht. Man unterscheidet zwischen Knock-in und Knock-out Barriereoptionen, wobei eine Knock-in Barriereoption wertlos ist, solange der Underlyingkurs keine Schranke der Option erreicht und eine Knock-out Barriereoption wertlos wird, falls der Underlyingkurs eine Schranke der Option während deren Laufzeit erreicht. Somit wird die Auszahlung einer Barriereoption durch eine Auszahlungsfunktion und ein Schrankenereignis bestimmt, d.h. sie hat die Form $\mathbb{1}_A G(M_T)$, wobei A ein Schrankenereignis bezeichnet und G eine beliebige Auszahlungsfunktion.

Die Frage ist nun, wie man die Put-Call Symmetrie nutzen kann, um Barriereoptionen zu bewerten.
Dazu wird als Beispiel ein Down-and-In Call im Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Im ersten Kapitel wurde gezeigt, dass die klassische Put-Call Symmetrie (vgl. (1.1)) in diesem Modell gilt.
Der Down-and-In Call habe den Strike K, die Schranke $H < K, M_0$ und die Fälligkeit T.
Sei τ_H die Ersterreichenszeit der Schranke H, d.h.

$$\tau_H := \inf\{0 \leq t \leq T : M_t \leq H\}$$

wobei hier und im Folgenden $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt werde.

Dann ist die Auszahlung des Down-and-In Calls gegeben durch

$$\mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}(M_T - K)^+$$

Für den Hedge wird also ein Claim gesucht, der in τ_H denselben Preis hat wie ein Call mit Strike K und Fälligkeit T, falls $\tau_H \leq T$ ist, und der zur Fälligkeit wertlos ist, falls $\tau_H > T$ ist.

1. Fall: $\tau_H \leq T$
Anwenden der klassischen Put-Call Symmetrie mit Anfangszeit τ_H liefert:

$$C(\tau_H, K, T) = \frac{K}{M_{\tau_H}} P(\tau_H, \frac{M_{\tau_H}^2}{K}, T)$$

Da $M_{\tau_H} = H$ ist, folgt

$$C(\tau_H, K, T) = \frac{K}{H} P(\tau_H, \frac{H^2}{K}, T)$$

Das bedeutet, dass $\frac{K}{H}$ Puts mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T in τ_H denselben Preis haben wie ein Call mit Strike K und Fälligkeit T, falls $\tau_H \leq T$ ist.

2. Fall: $\tau_H > T$
Da $H < K$ ist und $H < M_T$ liefern $\frac{K}{H}$ Puts mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T die Auszahlung

$$\begin{aligned} \frac{K}{H}(\frac{H^2}{K} - M_T)^+ &\leq \frac{K}{H}(H - M_T)^+ \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\frac{K}{H}$ Puts mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T zur Fälligkeit wertlos sind, falls $\tau_H > T$ ist.

Somit kann ein Down-and-in Call mit Strike K, Schranke $H < K, M_0$ und Fälligkeit T durch folgende Strategie repliziert werden:
In 0: Halte $\frac{K}{H}$ Puts mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T.
In τ_H (falls $\tau_H \leq T$): Verkaufe die $\frac{K}{H}$ Puts mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T und kaufe einen Call mit Strike K und Fälligkeit T. Dies ist kostenfrei möglich.

Mithilfe der Put-Call Symmetrie ist es also möglich einen Down-and-In Call im Black-

Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten semistatisch zu hedgen. Semistatisch bedeutet hierbei, dass das Hedgeportfolio bis zur Fälligkeit der Option oder bis der Underlyingkurs eine Schranke der Option erreicht unverändert gehalten wird. Dadurch entfallen Kosten für regelmäßiges Handeln, die beim dynamischen Hedgen entstehen.
Das Beispiel zeigt, dass man im Zeitpunkt τ_H die Puts gegen den Call kostenfrei tauschen kann, weil die Put-Call Symmetrie in τ_H gilt, falls $\tau_H \leq T$ ist. Es ist also für das Hedgen entscheidend, dass die Put-Call Symmetrie für eine bestimmte Stopzeit gilt und nicht, dass spezifische Modellannahmen gelten. Außerdem ist es für den Aufbau des Hedgeportfolios in 0 wichtig, dass $M_{\tau_H} = H$ gilt.
Im Folgenden werden diese Beobachtungen verallgemeinert. Es werden einseitige und zweiseitige Barriereoptionen betrachtet, d.h. Barriereoptionen mit einer bzw. mit zwei Schranken. Das Ziel ist es nun, diese Barriereoptionen im Finanzmarktmodell, das in Abschnitt 2.1 beschrieben wurde, semistatisch zu hedgen. Die gesuchten Hedges sollen europäische Claims mit der Auszahlung $\Gamma(M_T)$ sein, wobei Γ explizit in Abhängigkeit von G ausgedrückt wird. Es wird angenommen, dass solche Claims verfügbar sind.
Für jede Hedgeanwendung wird angenommen, dass die geometrische Put-Call Symmetrie für eine bestimmte Stopzeit τ gilt. Da die Stopzeit τ zwischen 0 und T liegen muss (vgl. Definition 2.1), ist τ das Minimum von dem Zeitpunkt, an dem der Underlyingkurs zum ersten Mal eine Schranke der Option erreicht, und der Fälligkeit der Option.
Die folgenden Ausführungen basieren auf [1].

3.1 Einseitige Barriereoptionen

In diesem Abschnitt werden einseitige Barriereoptionen betrachtet. Es wird gezeigt, wie man Knock-in und Knock-out Claims mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie semistatisch hedgen kann. Außerdem wird erläutert, wie man mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie die Wahrscheinlichkeit bestimmen kann, dass die Schranke einer einseitigen Barriereoption vor deren Fälligkeit erreicht wird.

Satz 3.1 (semistatisches Hedgen von Knock-in Claims)**:** Sei $M := (M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein positives Martingal bzgl. $\mathbb{P}$. Sei $T > 0$ die Fälligkeit des Claims.
Sei H eine Schranke mit $0 < H \neq M_0$. Sei τ_H die Ersterrreichenszeit der Schranke H, d.h. $\tau_H := \inf\{0 \leq t \leq T : \eta M_t \geq \eta H\}$, wobei $\eta := \operatorname{sgn}(H - M_0)$ und $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt werde.
Es wird angenommen, dass $M_{\tau_H} = H$ gilt, falls $\tau_H \leq T$ ist. Eine hinreichende Bedingung

hierfür ist, dass M stetige Pfade hat.
Sei G eine beliebige Auszahlungsfunktion mit $E^{\mathbb{P}}G(M_T) < \infty$.
Falls $gPCS_{\tau_H \wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_H \wedge T \le t \le T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H \wedge T \le t \le T}, \mathbb{P})$ gilt, kann ein Knock-in Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_H \le T\}} G(M_T)$ durch folgende semistatische Strategie repliziert werden:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\Gamma_{\text{ki}}(M_T) := G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}} + \frac{M_T}{H} G(\frac{H^2}{M_T})\mathbb{1}_{\{\eta M_T > \eta H\}}$$

In τ_H (falls $\tau_H \le T$): Verkaufe den Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{ki}}(M_T)$ und kaufe einen Claim mit der Auszahlung $G(M_T)$. Dies ist kostenfrei möglich.

Beweis: 1. Fall: $\tau_H \le T$
Da $\tau_H \le T$ ist, liefert der Knock-in Claim die Auszahlung $G(M_T)$.
Der Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{ki}}(M_T)$ und der Claim mit der Auszahlung $G(M_T)$ können in τ_H kostenfrei getauscht werden, falls sie den gleichen Preis haben.
Es ist somit zu zeigen:

$$\begin{aligned} B(\tau_H, T)E^{\mathbb{P}}_{\tau_H} G(M_T) &= B(\tau_H, T)E^{\mathbb{P}}_{\tau_H} \Gamma_{\text{ki}}(M_T) \\ \Leftrightarrow \quad E^{\mathbb{P}}_{\tau_H} G(M_T) &= E^{\mathbb{P}}_{\tau_H} \Gamma_{\text{ki}}(M_T) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{P}}_{\tau_H} G(M_T) &= E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}}] + E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T < \eta H\}}] \\
&\overset{\tau_H \le T}{=} E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}}] + E^{\mathbb{P}}_{\tau_H \wedge T}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T < \eta H\}}] \\
&\overset{(c)_{\tau_H \wedge T}}{=} E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}}] + E^{\mathbb{P}}_{\tau_H \wedge T}[\frac{M_T}{M_{\tau_H \wedge T}} G(\frac{M^2_{\tau_H \wedge T}}{M_T})\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M^2_{\tau_H \wedge T}}{M_T} < \eta H\}}] \\
&\overset{\tau_H \le T}{=} E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}}] + E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[\frac{M_T}{M_{\tau_H}} G(\frac{M^2_{\tau_H}}{M_T})\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M^2_{\tau_H}}{M_T} < \eta H\}}] \\
&\overset{M_{\tau_H} = H}{=} E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}}] + E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[\frac{M_T}{H} G(\frac{H^2}{M_T})\mathbb{1}_{\{\eta \frac{H^2}{M_T} < \eta H\}}] \\
&\overset{H,\ M_T > 0}{=} E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[G(M_T)\mathbb{1}_{\{\eta M_T \ge \eta H\}}] + E^{\mathbb{P}}_{\tau_H}[\frac{M_T}{H} G(\frac{H^2}{M_T})\mathbb{1}_{\{\eta M_T > \eta H\}}] \\
&= E^{\mathbb{P}}_{\tau_H} \Gamma_{\text{ki}}(M_T)
\end{aligned}$$

2. Fall: $\tau_H > T$
Da $\tau_H > T$ ist, liefert der Knock-in Claim die Auszahlung 0.

Ein Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{ki}}(M_T)$ hat in T die Auszahlung 0, da

$$\begin{aligned}
&\tau_H > T \\
\Rightarrow &\inf\{0 \leq t \leq T : \eta M_t \geq \eta H\} > T \\
\Rightarrow &\mathbb{1}_{\{\eta M_T \geq \eta H\}} = 0 \ \wedge \ \mathbb{1}_{\{\eta M_T > \eta H\}} = 0
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2 (semistatisches Hedgen von Knock-out Claims)**:** Für einen Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_H > T\}} G(M_T)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{\tau_H > T\}} G(M_T) &= (1 - \mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}) G(M_T) \\
&= G(M_T) - \mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}} G(M_T)
\end{aligned}$$

d.h. ein Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_H > T\}} G(M_T)$ entspricht der Differenz aus einem europäischen Claim mit der Auszahlung $G(M_T)$ und einem Knock-in Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}} G(M_T)$.
Somit kann man mithilfe von Satz 3.1 auch Knock-out Claims semistatisch hedgen.
Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1 gilt:
Falls $gPCS_{\tau_H \wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ gilt, kann ein Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_H > T\}} G(M_T)$ durch folgende semistatische Strategie repliziert werden:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\Gamma_{\text{ko}}(M_T) := G(M_T) \mathbb{1}_{\{\eta M_T < \eta H\}} - \frac{M_T}{H} G(\frac{H^2}{M_T}) \mathbb{1}_{\{\eta M_T > \eta H\}}$$

In τ_H (falls $\tau_H \leq T$): Verkaufe den Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{ko}}(M_T)$. Dies ist kostenfrei möglich.

Beispiel 3.3 (Anwendung von Bemerkung 3.2)**:** Betrachte einen Up-and-Out Put mit Strike K, Schranke $H > K, M_0$ und Fälligkeit $T > 0$.
Dann ist $\tau_H = \inf\{0 \leq t \leq T : M_t \geq H\}$. Es wird angenommen, dass $M_{\tau_H} = H$ gilt, falls $\tau_H \leq T$ ist, und dass $gPCS_{\tau_H \wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ gilt.

Definiere $G(x) := (K - x)^+$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

G ist eine Auszahlungsfunktion und es gilt $E^{\mathbb{P}}G(M_T) < \infty$, denn:

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}G(M_T) &= E^{\mathbb{P}}(K - M_T)^+ \\ &\leq E^{\mathbb{P}}|K - M_T| \\ &\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} E^{\mathbb{P}}|K| + E^{\mathbb{P}}|M_T| \\ &\overset{(M_t)_{0\leq t\leq T}\ \mathbb{P}-\text{Martingal}}{<} \infty \end{aligned}$$

Somit liefert Bemerkung 3.2 den folgenden Hedge für einen Up-and-Out Put mit Strike K, Schranke $H > K, M_0$ und Fälligkeit T:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ko}}(M_T) &= (K - M_T)^+ \mathbb{1}_{\{M_T<H\}} - \frac{M_T}{H}(K - \frac{H^2}{M_T})^+ \mathbb{1}_{\{M_T>H\}} \\ &\overset{H\geq K}{=} (K - M_T)^+ - \frac{K}{H}(M_T - \frac{H^2}{K})^+ \mathbb{1}_{\{M_T>H\}} \\ &\overset{M_T\leq H \overset{H\geq K}{\Rightarrow} M_T \leq \frac{H^2}{K}}{=} (K - M_T)^+ - \frac{K}{H}(M_T - \frac{H^2}{K})^+ \end{aligned}$$

d.h. kaufe einen Put mit Strike K und Fälligkeit T und verkaufe $\frac{K}{H}$ Calls mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T.
In τ_H (falls $\tau_H \leq T$): Verkaufe den Put mit Strike K und Fälligkeit T und kaufe die $\frac{K}{H}$ Calls mit Strike $\frac{H^2}{K}$ und Fälligkeit T.

Bemerkung 3.4: Falls $gPCS_{\tau_H\wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_H\wedge T\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H\wedge T\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ gilt, kann die Wahrscheinlichkeit, dass die Schranke H einer einseitigen Barriereoption vor deren Fälligkeit T erreicht wird, d.h.

$$\mathbb{P}(\tau_H \leq T),$$

mithilfe des Anfangspreises des T-Bonds und der Anfangspreise von Plain Vanilla Optionen bestimmt werden.
Somit kann die Wahrscheinlichkeit für ein pfadabhängiges Ereignis mit Anfangspreisen berechnet werden, die durch Randverteilungen bestimmt sind.

In der Berechnung kommen symmetrische Binary Calls und symmetrische Binary Puts vor, die zunächst definiert werden.
Ein symmetrischer Binary Call mit Strike H und Fälligkeit T liefert zur Fälligkeit eine

Auszahlung in Höhe von $\frac{1}{2}$, falls der Underlyingkurs gleich dem Strike H ist, und eine Auszahlung in Höhe von 1, falls der Underlyingkurs über dem Strike H liegt. D.h. der symmetrische Binary Call liefert in T die Auszahlung $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T=H\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T>H\}}$. Der Anfangspreis wird mit $BC^s(0, H, T)$ bezeichnet.
Ein symmetrischer Binary Put mit Strike H und Fälligkeit T liefert zur Fälligkeit eine Auszahlung in Höhe von $\frac{1}{2}$, falls der Underlyingkurs gleich dem Strike H ist, und eine Auszahlung in Höhe von 1, falls der Underlyingkurs unter dem Strike H liegt. D.h. der symmetrische Binary Put liefert in T die Auszahlung $\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T=H\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T<H\}}$. Der Anfangspreis wird mit $BP^s(0, H, T)$ bezeichnet.

Bei der Berechnung von $\mathbb{P}(\tau_H \leq T)$ wird eine Fallunterscheidung gemacht, ob der Anfangskurs des Underlyings M_0 unterhalb oder oberhalb der Schranke H liegt. D.h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird für Up Barriereoptionen und Down Barriereoptionen getrennt bestimmt.

1. Fall: H $> M_0$
Dann ist $\tau_H = \inf\{0 \leq t \leq T : M_t \geq H\}$.
Es wird angenommen, dass $M_{\tau_H} =$ H gilt, falls $\tau_H \leq$ T ist, und dass $gPCS_{\tau_H \wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ gilt.

Zunächst wird ein Hedge für einen One-touch with Up-Barrier Claim mit Schranke H und Fälligkeit T bestimmt. Dieser Claim liefert zur Fälligkeit T eine Auszahlung in Höhe von 1, falls der Underlyingkurs die Schranke H bis zur Fälligkeit erreicht hat. D.h. der Claim liefert in T die Auszahlung $1 \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}$.
Definiere $G(x) := 1$ für alle x $\in \mathbb{R}$. G ist eine Auszahlungsfunktion und es gilt

$$E^{\mathbb{P}} G(M_T) = E^{\mathbb{P}} 1 = 1 < \infty.$$

Somit liefert Satz 3.1 den folgenden Hedge für einen One-touch with Up-Barrier Claim mit Schranke H und Fälligkeit T:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{ki}}(M_T) &= 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T \geq H\}} + \frac{M_T}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T > H\}} \\
&= 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} + 2 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T > H\}} + (\frac{M_T}{H} - 1) \cdot \mathbb{1}_{\{M_T > H\}}
\end{aligned}$$

$$= 2(\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T > H\}}) + \frac{1}{H}(M_T - H)^+$$

d.h. halte zwei symmetrische Binary Calls mit Strike H und Fälligkeit T und $\frac{1}{H}$ Calls mit Strike H und Fälligkeit T.
In τ_H (falls $\tau_H \leq T$): Verkaufe die zwei symmetrischen Binary Calls mit Strike H und Fälligkeit T und die $\frac{1}{H}$ Calls mit Strike H und Fälligkeit T und kaufe einen T-Bond.

Daraus folgt, dass der Anfangspreis eines One-touch with Up-Barrier Claims mit Schranke H und Fälligkeit T dem Anfangspreis des replizierenden Portfolios aus zwei symmetrischen Binary Calls mit Strike H und Fälligkeit T und $\frac{1}{H}$ Calls mit Strike H und Fälligkeit T entspricht. D.h.

$$\begin{aligned} B(0,T)E^{\mathbb{P}}[1 \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}] &= 2BC^s(0,H,T) + \frac{1}{H}C(0,H,T) \\ \Rightarrow \ \mathbb{P}(\tau_H \leq T) &= \frac{2BC^s(0,H,T)}{B(0,T)} + \frac{C(0,H,T)}{HB(0,T)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Als nächstes wird für die symmetrischen Binary Calls ein Hedge mit Plain Vanilla Calls angegeben.

Behauptung: Für den Anfangspreis eines symmetrischen Binary Calls gilt:

$$BC^s(0,H,T) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{C(0,H-\epsilon,T) - C(0,H+\epsilon,T)}{2\epsilon} \tag{3.2}$$

Beweis: Mit $C(H-\epsilon,T)$ bzw. $C(H+\epsilon,T)$ wird ein Call mit Strike $H-\epsilon$ bzw. $H+\epsilon$ und Fälligkeit T bezeichnet.
Auszahlung eines symmetrischen Binary Calls mit Strike H zur Fälligkeit T:

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T > H\}}$$

Auszahlung von $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{C(H-\epsilon,T) - C(H+\epsilon,T)}{2\epsilon}$ zur Fälligkeit T:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0} \frac{(M_T - H + \epsilon)\mathbb{1}_{\{M_T > H-\epsilon\}} - (M_T - H - \epsilon)\mathbb{1}_{\{M_T > H+\epsilon\}}}{2\epsilon} \\ = &\lim_{\epsilon \to 0}[\frac{(M_T - H + \epsilon - M_T + H + \epsilon)\mathbb{1}_{\{M_T > H+\epsilon\}}}{2\epsilon} + \frac{(M_T - H + \epsilon)\mathbb{1}_{\{H-\epsilon < M_T \leq H+\epsilon\}}}{2\epsilon}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{1}_{\{M_T > H+\epsilon\}} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{M_T - H + \epsilon}{2\epsilon} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{1}_{\{H-\epsilon < M_T \leq H+\epsilon\}} \\
&= \mathbb{1}_{\{M_T > H\}} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{M_T - H + \epsilon}{2\epsilon} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} \\
&= \mathbb{1}_{\{M_T > H\}} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{2\epsilon} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} \\
&= 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T > H\}} + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}}
\end{aligned}
$$

Da die einzelnen Grenzwerte existieren, durften die Regeln für Summen und Produkte von Grenzwerten angewendet werden.

Die Behauptung folgt mit dem Replikationsprinzip, da die Auszahlung von einem symmetrischen Binary Call mit Strike H zur Fälligkeit T gleich der Auszahlung von $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{C(H-\epsilon,T)-C(H+\epsilon,T)}{2\epsilon}$ zur Fälligkeit T ist. □

Mit (3.2) folgt aus (3.1):

$$
\mathbb{P}(\tau_H \leq T) = \frac{2}{B(0,T)} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \frac{C(0, H-\epsilon, T) - C(0, H+\epsilon, T)}{2\epsilon} + \frac{C(0,H,T)}{HB(0,T)}
$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Schranke $H > M_0$ einer einseitigen Barriereoption vor deren Fälligkeit T erreicht wird, kann somit prinzipiell aus dem Anfangspreis des T-Bonds und den Anfangspreisen von Plain Vanilla Calls bestimmt werden.

2. Fall: H $< M_0$

Dann ist $\tau_H = \inf\{0 \leq t \leq T : M_t \leq H\}$.

Es wird angenommen, dass $M_{\tau_H} =$ H gilt, falls $\tau_H \leq$ T ist, und dass $gPCS_{\tau_H \wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H \wedge T \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ gilt.

Zunächst wird ein Hedge für einen One-touch with Down-Barrier Claim mit Schranke H und Fälligkeit T bestimmt. Dieser Claim liefert zur Fälligkeit T eine Auszahlung in Höhe von 1, falls der Underlyingkurs die Schranke H bis zur Fälligkeit erreicht hat. D.h. der Claim liefert in T die Auszahlung $1 \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}$.

Definiere $G(x) := 1$ für alle x $\in \mathbb{R}$. G ist eine Auszahlungsfunktion und es gilt

$$
E^{\mathbb{P}} G(M_T) = E^{\mathbb{P}} 1 = 1 < \infty.
$$

Somit liefert Satz 3.1 den folgenden Hedge für einen One-touch with Down-Barrier Claim mit Schranke H und Fälligkeit T:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{ki}}(M_T) &= 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T \leq H\}} + \frac{M_T}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T < H\}} \\
&= 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} + 2 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T < H\}} - (1 - \frac{M_T}{H}) \cdot \mathbb{1}_{\{M_T < H\}} \\
&= 2(\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T < H\}}) - \frac{1}{H}(H - M_T)^+
\end{aligned}$$

d.h. halte zwei symmetrische Binary Puts mit Strike H und Fälligkeit T und verkaufe $\frac{1}{H}$ Puts mit Strike H und Fälligkeit T.
In τ_H (falls $\tau_H \leq T$): Verkaufe die zwei symmetrischen Binary Puts mit Strike H und Fälligkeit T und kaufe die $\frac{1}{H}$ Puts mit Strike H und Fälligkeit T und einen T-Bond.

Daraus folgt, dass der Anfangspreis eines One-touch with Down-Barrier Claims mit Schranke H und Fälligkeit T dem Anfangspreis des replizierenden Portfolios aus zwei symmetrischen Binary Puts mit Strike H und Fälligkeit T und $\frac{1}{H}$ verkauften Puts mit Strike H und Fälligkeit T entspricht. D.h.

$$\begin{aligned}
B(0,T)E^{\mathbb{P}}[1 \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}] &= 2BP^s(0,H,T) - \frac{1}{H}P(0,H,T) \\
\Rightarrow \ \mathbb{P}(\tau_H \leq T) &= \frac{2BP^s(0,H,T)}{B(0,T)} - \frac{P(0,H,T)}{HB(0,T)} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Als nächstes wird für die symmetrischen Binary Puts ein Hedge mit Plain Vanilla Puts angegeben.

Behauptung: Für den Anfangspreis eines symmetrischen Binary Puts gilt:

$$BP^s(0,H,T) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(0,H+\epsilon,T) - P(0,H-\epsilon,T)}{2\epsilon} \qquad (3.4)$$

Beweis: Mit $P(H-\epsilon,T)$ bzw. $P(H+\epsilon,T)$ wird ein Put mit Strike $H-\epsilon$ bzw. $H+\epsilon$ und Fälligkeit T bezeichnet.
Auszahlung eines symmetrischen Binary Puts mit Strike H zur Fälligkeit T:

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{M_T = H\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{M_T < H\}}$$

Auszahlung von $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{P(H+\epsilon,T)-P(H-\epsilon,T)}{2\epsilon}$ zur Fälligkeit T:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(H+\epsilon-M_T)\mathbb{1}_{\{M_T<H+\epsilon\}}-(H-\epsilon-M_T)\mathbb{1}_{\{M_T<H-\epsilon\}}}{2\epsilon}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}[\frac{(H+\epsilon-M_T-H+\epsilon+M_T)\mathbb{1}_{\{M_T<H-\epsilon\}}}{2\epsilon}+\frac{(H+\epsilon-M_T)\mathbb{1}_{\{H-\epsilon\le M_T<H+\epsilon\}}}{2\epsilon}]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{1}_{\{M_T<H-\epsilon\}}+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{H+\epsilon-M_T}{2\epsilon}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{1}_{\{H-\epsilon\le M_T<H+\epsilon\}}\\
&=\mathbb{1}_{\{M_T<H\}}+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{H+\epsilon-M_T}{2\epsilon}\cdot\mathbb{1}_{\{M_T=H\}}\\
&=\mathbb{1}_{\{M_T<H\}}+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{2\epsilon}\cdot\mathbb{1}_{\{M_T=H\}}\\
&=1\cdot\mathbb{1}_{\{M_T<H\}}+\frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}_{\{M_T=H\}}
\end{aligned}$$

Da die einzelnen Grenzwerte existieren, durften die Regeln für Summen und Produkte von Grenzwerten angewendet werden.

Die Behauptung folgt mit dem Replikationsprinzip, da die Auszahlung von einem symmetrischen Binary Put mit Strike H zur Fälligkeit T gleich der Auszahlung von $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{P(H+\epsilon,T)-P(H-\epsilon,T)}{2\epsilon}$ zur Fälligkeit T ist. □

Mit (3.4) folgt aus (3.3):

$$\mathbb{P}(\tau_H\le T)=\frac{2}{B(0,T)}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\frac{P(0,H+\epsilon,T)-P(0,H-\epsilon,T)}{2\epsilon}-\frac{P(0,H,T)}{HB(0,T)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Schranke $H<M_0$ einer einseitigen Barriereoption vor deren Fälligkeit T erreicht wird, kann somit prinzipiell aus dem Anfangspreis des T-Bonds und den Anfangspreisen von Plain Vanilla Puts bestimmt werden.

3.2 Zweiseitige Barriereoptionen

In diesem Abschnitt werden zweiseitige Barriereoptionen betrachtet. Es wird gezeigt, wie man Double Knock-out und Double Knock-in Claims mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie semistatisch hedgen kann.

Satz 3.5 (semistatisches Hedgen von Double Knock-out Claims)**:** Sei $M := (M_t)_{0\leq t\leq T}$ ein positives Martingal bzgl. $\mathbb{P}$. Sei $T > 0$ die Fälligkeit des Claims.
Seien L und U zwei Schranken mit $0 < L < M_0 < U$.
Sei τ_L die Ersterreichenszeit der unteren Schranke L, d.h. $\tau_L := \inf\{0 \leq t \leq T : M_t \leq L\}$, und sei τ_U die Ersterreichenszeit der oberen Schranke U, d.h. $\tau_U := \inf\{0 \leq t \leq T : M_t \geq U\}$. Dabei werde $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt.
Es wird angenommen, dass $M_{\tau_L} = L$ gilt, falls $\tau_L \leq T$ ist, und dass $M_{\tau_U} = U$ gilt, falls $\tau_U \leq T$ ist. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist, dass M stetige Pfade hat.
Sei G eine beliebige auf (L, U) beschränkte Auszahlungsfunktion.
Falls $gPCS_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ gilt, kann ein Double Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L\wedge\tau_U>T\}}G(M_T)$ durch folgende semistatische Strategie repliziert werden:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\Gamma_{\text{dko}}(M_T) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]$$

wobei $G^*(m) := G(m)\mathbb{1}_{\{L<m<U\}}$.
In τ_L bzw. τ_U (falls $\tau_L \leq T$ bzw. $\tau_U \leq T$): Verkaufe den Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$. Dies ist kostenfrei möglich.

Beweis: Es werden zunächst zwei Aussagen über $\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$ bewiesen.

Behauptung 1: Für jedes M_T ist höchstens ein Term der unendlichen Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]$$

ungleich Null.

Beweis von Behauptung 1: Da $L,\ U,\ M_T > 0$ gilt, bleiben Relationen bei Multiplikation mit und Division durch L, U und M_T erhalten.

1. Fall: $\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}}) > 0$ für ein n $\in \mathbb{Z}$

$$\overset{G^* \text{ verschwindet außerhalb von } (L,U)}{\Rightarrow} L < \frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}} < U$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{L^{2n+1}}{U^{2n}} < M_T < \frac{L^{2n}}{U^{2n-1}} \tag{3.5}$$

Annahme 1.1: $\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T}) > 0$

$$\stackrel{G^* \text{ verschwindet außerhalb von } (L,U)}{\Rightarrow} L < \frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T} < U \tag{3.6}$$

Fall 1.1.a: n ≤ 0

$$\stackrel{L \leq U}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{4n} \leq 1 \tag{3.7}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T} \stackrel{(3.5)}{<} \frac{U^{2n}}{L^{2n-2}} \cdot \frac{U^{2n}}{L^{2n+1}} = (\frac{U}{L})^{4n} \cdot L \stackrel{(3.7)}{\leq} L \quad \lightning \text{ zu } (3.6)$$

Fall 1.1.b: n ≥ 1

$$\stackrel{U \geq L}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{4n-2} \geq 1 \tag{3.8}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T} \stackrel{(3.5)}{>} \frac{U^{2n}}{L^{2n-2}} \cdot \frac{U^{2n-1}}{L^{2n}} = (\frac{U}{L})^{4n-2} \cdot U \stackrel{(3.8)}{\geq} U \quad \lightning \text{ zu } (3.6)$$

Annahme 1.2: Es existiert ein m $\in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ mit $\frac{L^m}{U^m}G^*(\frac{U^{2m}M_T}{L^{2m}}) > 0$

$$\stackrel{G^* \text{ verschwindet außerhalb von } (L,U)}{\Rightarrow} L < \frac{U^{2m}M_T}{L^{2m}} < U$$

$$\Rightarrow \qquad M_T < \frac{L^{2m}}{U^{2m-1}} \tag{3.9}$$

Sei o.B.d.A m > n.

$$\stackrel{n,\ m \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} 2(m-n) - 1 > 0$$

$$\stackrel{L \leq U}{\Rightarrow} (\frac{L}{U})^{2(m-n)-1} < 1 \tag{3.10}$$

Es gilt:

$$\frac{L^{2m}}{U^{2m-1}} = \frac{L^{2n}}{U^{2n-1}} \cdot \frac{L^{2(m-n)}}{U^{2(m-n)}} = \frac{L^{2n+1}}{U^{2n}} \cdot (\frac{L}{U})^{2(m-n)-1} \overset{(3.10)}{<} \frac{L^{2n+1}}{U^{2n}} \overset{(3.5)}{<} M_T \quad \lightning \text{ zu (3.9)}$$

Annahme 1.3: Es existiert ein m $\in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ mit $\frac{L^{m-1}M_T}{U^m} G^*(\frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T}) > 0$

$$\overset{G^* \text{ verschwindet außerhalb von } (L,U)}{\Rightarrow} \quad L < \frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T} < U \tag{3.11}$$

Fall 1.3.a: m > n und m + n ≤ 0

$\Rightarrow 2m + 2n \leq 0$

$$\overset{L \leq U}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{2m+2n} \leq 1 \tag{3.12}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T} \overset{(3.5)}{<} \frac{U^{2m}}{L^{2m-2}} \cdot \frac{U^{2n}}{L^{2n+1}} = (\frac{U}{L})^{2m+2n} \cdot L \overset{(3.12)}{\leq} L \quad \lightning \text{ zu (3.11)}$$

Fall 1.3.b: m > n und m + n ≥ 1

$\Rightarrow 2m + 2n - 2 = 2(m + n - 1) \geq 0$

$$\overset{U \geq L}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{2m+2n-2} \geq 1 \tag{3.13}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T} \overset{(3.5)}{>} \frac{U^{2m}}{L^{2m-2}} \cdot \frac{U^{2n-1}}{L^{2n}} = (\frac{U}{L})^{2m+2n-2} \cdot U \overset{(3.13)}{\geq} U \quad \lightning \text{ zu (3.11)}$$

Fall 1.3.c: m < n und m + n ≤ 0

$\Rightarrow 2m + 2n \leq 0$

$$\overset{L \leq U}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{2m+2n} \leq 1 \tag{3.14}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T} \overset{(3.5)}{<} \frac{U^{2m}}{L^{2m-2}} \cdot \frac{U^{2n}}{L^{2n+1}} = (\frac{U}{L})^{2m+2n} \cdot L \overset{(3.14)}{\leq} L \quad \lightning \text{ zu (3.11)}$$

Fall 1.3.d: m < n und m + n $\geq$ 1

$$\Rightarrow 2m + 2n - 2 = 2(m + n - 1) \geq 0$$

$$\overset{U \geq L}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{2m+2n-2} \geq 1 \tag{3.15}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T} \overset{(3.5)}{>} \frac{U^{2m}}{L^{2m-2}} \cdot \frac{U^{2n-1}}{L^{2n}} = (\frac{U}{L})^{2m+2n-2} \cdot U \overset{(3.15)}{\geq} U \quad \text{↯ zu (3.11)}$$

2. Fall: $\frac{L^{n-1}M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T}) > 0$ für ein n $\in \mathbb{Z}$

$$\overset{G^* \text{ verschwindet außerhalb von } (L,U)}{\Rightarrow} L < \frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T} < U$$

$$\Rightarrow \frac{U^{2n-1}}{L^{2n-2}} < M_T < \frac{U^{2n}}{L^{2n-1}} \tag{3.16}$$

Annahme 2.1: $\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}}) > 0$

(vergleiche 1. Fall Annahme 1.1)

Annahme 2.2: Es existiert ein m $\in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ mit $\frac{L^{m-1}M_T}{U^m} G^*(\frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T}) > 0$

$$\overset{G^* \text{ verschwindet außerhalb von } (L,U)}{\Rightarrow} L < \frac{U^{2m}}{L^{2m-2}M_T} < U$$

$$\Rightarrow \frac{U^{2m-1}}{L^{2m-2}} < M_T \tag{3.17}$$

Sei o.B.d.A m > n.

$$\overset{m,\, n \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} 2(m - n) - 1 > 0$$

$$\overset{U \geq L}{\Rightarrow} (\frac{U}{L})^{2(m-n)-1} > 1 \tag{3.18}$$

Es gilt:

$$\frac{U^{2m-1}}{L^{2m-2}} = \frac{U^{2n-1}}{L^{2n-2}} \cdot \frac{U^{2(m-n)}}{L^{2(m-n)}} = \frac{U^{2n}}{L^{2n-1}} \cdot (\frac{U}{L})^{2(m-n)-1} \overset{(3.18)}{>} \frac{U^{2n}}{L^{2n-1}} \overset{(3.16)}{>} M_T \quad \text{↯ zu (3.17)}$$

Annahme 2.3: Es existiert ein m $\in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ mit $\frac{L^m}{U^m} G^*(\frac{U^{2m} M_T}{L^{2m}}) > 0$

(vergleiche 1. Fall Annahme 1.3)

$\square$

Behauptung 2: Der Betrag jedes Terms in der unendlichen Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})]$$

ist durch

$$\frac{C\sqrt{U}}{L} \sqrt{M_T}$$

beschränkt, wobei $C > 0$ eine Konstante ist.

Beweis von Behauptung 2: Da $L,\ U,\ M_T > 0$ gilt, bleiben Relationen bei Multiplikation mit und Division durch L, U und M_T erhalten.
Es gilt:

$$\begin{aligned} L < \frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}} < U \Rightarrow & \frac{L^{2n}}{U^{2n}} < \frac{M_T}{L} \\ \Rightarrow & \frac{L^n}{U^n} < \frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{L}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

und

$$\begin{aligned} L < \frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T} < U \Rightarrow & \frac{U^{2n-1}}{L^{2n-2}} < M_T \\ & \wedge\ M_T < \frac{U^{2n}}{L^{2n-1}} \qquad (3.20) \\ \Rightarrow & \frac{U^{2n}}{L^{2n}} < \frac{U M_T}{L^2} \\ \Rightarrow & \frac{U^n}{L^n} < \frac{\sqrt{U}\sqrt{M_T}}{L} \qquad (3.21) \end{aligned}$$

Ferner gilt:

G ist auf (L, U) beschränkt

$\Rightarrow |G(m)| \leq$ C für alle m $\in$ (L, U), wobei C > 0 eine Konstante ist

$$\Rightarrow |G^*(m)| = |G(m)\mathbb{1}_{\{L<m<U\}}| = |G(m)|\mathbb{1}_{\{L<m<U\}} \leq \text{C für alle m} \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
|\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})| &\overset{L,\ U\ >\ 0}{=} \frac{L^n}{U^n}|G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})| \\
&\overset{(3.19)}{\leq} \frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{L}}|G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})| \\
&\overset{(3.22)}{\leq} \frac{C}{\sqrt{L}}\sqrt{M_T} \\
&\overset{U\ >\ L\ >\ 0}{\leq} \frac{C\sqrt{U}}{L}\sqrt{M_T}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})| &\overset{L,\ U,\ M_T\ >\ 0}{=} \frac{L^{n-1}M_T}{U^n}|G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})| \\
&\overset{(3.20)}{\leq} \frac{L^{n-1}}{U^n}\cdot\frac{U^{2n}}{L^{2n-1}}|G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})| \\
&= \frac{U^n}{L^n}|G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})| \\
&\overset{(3.21)}{\leq} \frac{\sqrt{U}\sqrt{M_T}}{L}|G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})| \\
&\overset{(3.22)}{\leq} \frac{C\sqrt{U}}{L}\sqrt{M_T}
\end{aligned}$$

$\square$

Mithilfe von diesen beiden Aussagen wird nun Folgendes bewiesen:

Behauptung 3: Für eine beliebige Stopzeit $0 \leq \tau \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned}
E_\tau^{\mathbb{P}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})] \\
- E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]]
\end{aligned}$$

Beweis von Behauptung 3: Es gilt:

$$\text{M positives } \mathbb{P}-\text{Martingal} \Rightarrow E_\tau^{\mathbb{P}} M_T < \infty \Rightarrow E_\tau^{\mathbb{P}} \sqrt{M_T} < \infty \tag{3.23}$$

Sei $0 \leq \tau \leq T$ eine beliebige Stopzeit.
Dann gilt:

$$E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})| \overset{\text{Beh. 2}}{\leq} E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{C\sqrt{U}}{L}\sqrt{M_T}] = \frac{C\sqrt{U}}{L} E_\tau^{\mathbb{P}} \sqrt{M_T} \overset{(3.23)}{<} \infty$$

und

$$E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})| \overset{\text{Beh. 2}}{\leq} E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{C\sqrt{U}}{L}\sqrt{M_T}] = \frac{C\sqrt{U}}{L} E_\tau^{\mathbb{P}} \sqrt{M_T} \overset{(3.23)}{<} \infty$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &E_\tau^{\mathbb{P}}[| \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})|+| \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})|] \\ &\qquad = E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})| + E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})| \end{aligned} \tag{3.24}$$

und

$$\begin{aligned} &E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})] \\ &\qquad = E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})] - E_\tau^{\mathbb{P}}[\frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} & E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})| \\ \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \; & E_\tau^{\mathbb{P}}[| \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})| + | \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})|] \\ \overset{(3.24)}{=} \; & E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})| + E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})| \\ \overset{\text{Beh. 1}}{\leq} \; & \max\{E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})|, E_\tau^{\mathbb{P}} | \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})|\} \\ \overset{\text{Beh. 2}}{\leq} \; & E_\tau^{\mathbb{P}} \frac{C\sqrt{U}}{L}\sqrt{M_T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C\sqrt{U}}{L} E^{\mathbb{P}}_{\tau} \sqrt{M_T} \\ &\overset{(3.23)}{<} \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{P}}_{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})] \\ = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^{\mathbb{P}}_{\tau} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})] \\ \overset{(3.25)}{=} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E^{\mathbb{P}}_{\tau} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})] - E^{\mathbb{P}}_{\tau} [\frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})]] \end{aligned}$$

$\square$

Es wird nun gezeigt, dass der Double Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U > T\}} G(M_T)$ durch die oben beschriebene Strategie repliziert werden kann.
1. Fall: $\tau_L \wedge \tau_U \wedge T = \tau_L$
Der Preis des Claims mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$ ist in τ_L gegeben durch:

$$B(\tau_L, T) E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} \Gamma_{\text{dko}}(M_T)$$

Um zu beweisen, dass der Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$ in τ_L kostenfrei verkauft werden kann, ist somit zu zeigen:

$$E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} \Gamma_{\text{dko}}(M_T) = 0$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} \Gamma_{\text{dko}}(M_T) &= E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})] \\ &\overset{\text{Beh. 3}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})] - E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} [\frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})]] \\ &\overset{\tau_L \wedge \tau_U \wedge T = \tau_L}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E^{\mathbb{P}}_{\tau_L \wedge \tau_U \wedge T} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}})] - E^{\mathbb{P}}_{\tau_L} [\frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})]] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(c)\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}[\frac{L^n}{U^n}\cdot\frac{M_T}{M_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}}G^*(\frac{U^{2n}M^2_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}}{L^{2n}M_T})] \\
& && -E^{\mathbb{P}}_{\tau_L}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&\overset{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T=\tau_L}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_L}[\frac{L^n}{U^n}\cdot\frac{M_T}{M_{\tau_L}}G^*(\frac{U^{2n}M^2_{\tau_L}}{L^{2n}M_T})] \\
& && -E^{\mathbb{P}}_{\tau_L}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&\overset{M_{\tau_L}=L}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_L}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})] \\
& && -E^{\mathbb{P}}_{\tau_L}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&= && 0
\end{aligned}
$$

2.Fall: $\tau_L \wedge \tau_U \wedge T = \tau_U$

Der Preis des Claims mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$ ist in τ_U gegeben durch:

$$B(\tau_U, T)E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$$

Um zu beweisen, dass der Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dko}}(M_T)$ in τ_U kostenfrei verkauft werden kann, ist somit zu zeigen:

$$E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}\Gamma_{\text{dko}}(M_T) = 0$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}\Gamma_{\text{dko}}(M_T) &= && E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})] \\
&\overset{\text{Beh. 3}}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})] - E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&\overset{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T=\tau_U}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})] - E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&\overset{(c)\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}[\frac{L^n}{U^n}\cdot\frac{M_T}{M_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}}G^*(\frac{U^{2n}M^2_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}}{L^{2n}M_T})] \\
& && -E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T=\tau_U}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^n}{U^n}\cdot\frac{M_T}{M_{\tau_U}}G^*(\frac{U^{2n}M^2_{\tau_U}}{L^{2n}M_T})] \\
& && -E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&\overset{M_{\tau_U}=U}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^nM_T}{U^{n+1}}G^*(\frac{U^{2n+2}}{L^{2n}M_T})]-E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&= && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^nM_T}{U^{n+1}}G^*(\frac{U^{2(n+1)}}{L^{2(n+1)-2}M_T})]] \\
& && -\sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&\overset{\text{Indexverschiebung}}{=} && \sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
& && -\sum_{n=-\infty}^{\infty}[E^{\mathbb{P}}_{\tau_U}[\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]] \\
&= && 0
\end{aligned}
$$

3. Fall: $\tau_L\wedge\tau_U>T$

Es ist zu zeigen, dass das replizierende Portfolio zur Fälligkeit die gleiche Auszahlung liefert wie der Double Knock-out Claim.

Da $\tau_L\wedge\tau_U>T$ gilt, liefert der Double Knock-out Claim die Auszahlung $G(M_T)$ und es gilt:

$$L<M_T<U \tag{3.26}$$

Es ist somit zu zeigen:

$$\Gamma_{\text{dko}}(M_T)=G(M_T)$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{dko}}(M_T) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})-\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})-\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})]+G^*(M_T) \\
&\quad -\frac{M_T}{L}G^*(\frac{L^2}{M_T})+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{L^n}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}M_T}{L^{2n}})-\frac{L^{n-1}M_T}{U^n}G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2}M_T})] \\
&\overset{(3.26),\ \text{Beh.1}}{=} G^*(M_T)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= G(M_T)\mathbb{1}_{\{L<M_T<U\}} \\
&\overset{(3.26)}{=} G(M_T)
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.6 (semistatisches Hedgen von Double Knock-in Claims)**:** Für einen Double Knock-in Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U \leq T\}} G(M_T)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U \leq T\}} G(M_T) &= (1 - \mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U > T\}}) G(M_T) \\
&= G(M_T) - \mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U > T\}} G(M_T)
\end{aligned}
$$

d.h. ein Double Knock-in Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U \leq T\}} G(M_T)$ entspricht der Differenz aus einem europäischen Claim mit der Auszahlung $G(M_T)$ und einem Double Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U > T\}} G(M_T)$.
Somit kann man mithilfe von Satz 3.5 auch Double Knock-in Claims semistatisch hedgen.
Unter den Voraussetzungen von Satz 3.5 gilt:
Falls $gPCS_{\tau_L \wedge \tau_U \wedge T}$ für $((M_t)_{\tau_L \wedge \tau_U \wedge T \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_L \wedge \tau_U \wedge T \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ gilt, kann ein Double Knock-in Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L \wedge \tau_U \leq T\}} G(M_T)$ durch folgende semistatische Strategie repliziert werden:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$
\Gamma_{\text{dki}}(M_T) := G(M_T) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{L^n}{U^n} G^*(\frac{U^{2n} M_T}{L^{2n}}) - \frac{L^{n-1} M_T}{U^n} G^*(\frac{U^{2n}}{L^{2n-2} M_T})]
$$

wobei $G^*(m) := G(m)\mathbb{1}_{\{L<m<U\}}$.
In τ_L bzw. τ_U (falls $\tau_L \leq T$ bzw. $\tau_U \leq T$): Verkaufe den Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dki}}(M_T)$ und kaufe einen Claim mit der Auszahlung $G(M_T)$. Dies ist kostenfrei möglich.

3.3 Bewertung bei asymmetrischer impliziter Volatilitätsfunktion

Die geometrische Put-Call Symmetrie fordert eine Symmetrie der impliziten Volatilität:

$$(b)_\tau \ I_\tau^{\mathbb{P}}(x) = I_\tau^{\mathbb{P}}(-x) \quad \text{für alle x } \in \mathbb{R}$$

Empirisch zeigt sich jedoch, dass die implizite Volatilitätsfunktion in realen Märkten häufig nicht symmetrisch ist (vgl. [2], S. 7), zum Beispiel in Aktienmärkten (vgl. [1], S. 546).
Im Folgenden wird basierend auf [1] dargestellt, wie man mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie Barriereoptionen semistatisch hedgen kann, wenn der Underlyingkursprozess die Symmetriebedingung $(a)_\tau$ nicht erfüllt. Als Underlyingkursprozess dient im Folgenden $(S_t)_{0\leq t\leq T}$. Die Idee ist, einen Hilfsprozess $(N_t)_{0\leq t\leq T}$ zu finden, für den $gPCS_\tau$ gilt. Anschließend formt man die für den Hilfsprozess geltenden Aussagen so um, dass semistatische Hedges für Barriereoptionen mit Underlyingkursprozess $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ gewonnen werden.

Zunächst muss geklärt werden, was der Begriff Hilfsprozess in diesem Zusammenhang bedeuten soll.

Definition 3.7 (Hilfsprozess)**:** Sei $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige und strikt monotone Funktion. Dann existiert eine zu h inverse Funktion $h^{-1} : I \to (0,\infty)$, wobei $I := (h(0), h(\infty))$, falls h streng monoton wachsend ist, und $I := (h(\infty), h(0))$, falls h streng monoton fallend ist.
Das positive $\mathbb{P}$-Martingal $(N_t)_{0\leq t\leq T}$ heißt Hilfsprozess zu $(S_t)_{0\leq t\leq T}$, falls $N_t = h^{-1}(S_t)$ für alle $0 \leq t \leq T$.

Beispiel 3.8 (Beispiele für h)**:** Verschiebung:
Sei $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(n) = n + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
h ist stetig und streng monoton wachsend.
$h^{-1} : (c,\infty) \to (0,\infty)$, $h^{-1}(s) = s - c$

Powertransformation:
Sei $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(n) = n^p$, wobei $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Konstante ist.
h ist stetig, für $p > 0$ streng monoton wachsend und für $p < 0$ streng monoton fallend.
$h^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $h^{-1}(s) = s^{\frac{1}{p}}$

3.3.1 Einseitige Barriereoptionen

In diesem Unterabschnitt werden einseitige Barriereoptionen betrachtet. Es wird gezeigt, wie man Knock-in Claims mithilfe eines Hilfsprozesses und der geometrischen Put-Call Symmetrie semistatisch hedgen kann.

Satz 3.9 (semistatisches Hedgen von Knock-in Claims)**:** Sei $S := (S_t)_{0\leq t\leq T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-adaptierter Prozess. Sei $T > 0$ die Fälligkeit des Claims.
Sei H eine Schranke mit $0 < H \neq S_0$. Sei τ_H die Ersterrreichenszeit der Schranke H, d.h. $\tau_H := \inf\{0 \leq t \leq T : \eta S_t \geq \eta H\}$, wobei $\eta := \operatorname{sgn}(H - S_0)$ und $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt werde.
Es wird angenommen, dass $S_{\tau_H} = H$ gilt, falls $\tau_H \leq T$ ist. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist, dass S stetige Pfade hat.
Sei $N := (N_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Hilfsprozess zu $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ mit $N_t = h^{-1}(S_t)$ für alle $0 \leq t \leq T$.
Sei G eine beliebige Auszahlungsfunktion mit $E^{\mathbb{P}}G(S_T) < \infty$.
Falls $gPCS_{\tau_H\wedge T}$ für $((N_t)_{\tau_H\wedge T\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_H\wedge T\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ gilt, kann ein Knock-in Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_H\leq T\}}G(S_T)$ durch folgende semistatische Strategie repliziert werden:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\Gamma_{\text{ki}}(S_T) := G(S_T)\mathbb{1}_{\{\eta S_T\geq\eta H\}} + \frac{h^{-1}(S_T)}{h^{-1}(H)}G(h(\frac{(h^{-1}(H))^2}{h^{-1}(S_T)}))\mathbb{1}_{\{\eta S_T>\eta H\}}$$

In τ_H (falls $\tau_H \leq T$): Verkaufe den Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{ki}}(S_T)$ und kaufe einen Claim mit der Auszahlung $G(S_T)$. Dies ist kostenfrei möglich.

Beweis: Definiere

$$\hat{\eta} := \operatorname{sgn}(h^{-1}(H) - h^{-1}(S_0)) = \operatorname{sgn}(h^{-1}(H) - N_0).$$

Da h strikt monoton ist, gilt:

$$\eta S_t \ \geq \eta H \Leftrightarrow \ \hat{\eta} N_t \geq \hat{\eta} h^{-1}(H)$$

Daraus folgt:

$$\tau_H \ = \inf\{0 \leq t \leq T : \hat{\eta} N_t \geq \hat{\eta} h^{-1}(H)\} =: \tau_{h^{-1}(H)}$$

D.h. τ_H ist sowohl die Ersterreichenszeit der Schranke H von S als auch die Ersterreichenszeit der Schranke $h^{-1}(H)$ von N.

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
S_{\tau_H} &= H, \qquad\quad \text{falls } \tau_H \leq T \\
\Rightarrow\ N_{\tau_{h^{-1}(H)}} &= h^{-1}(H),\ \text{falls } \tau_{h^{-1}(H)} \leq T
\end{aligned}
$$

Definiere die Auszahlungsfunktion $\hat{G} := G \circ h$.
Dann gilt:

$$E^{\mathbb{P}}\hat{G}(N_T) = E^{\mathbb{P}}G(h(N_T)) = E^{\mathbb{P}}G(S_T) < \infty$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.1 mit $h^{-1}(H)$ als Schranke und $\hat{G}$ als Auszahlungsfunktion. □

3.3.2 Zweiseitige Barriereoptionen

In diesem Unterabschnitt werden zweiseitige Barriereoptionen betrachtet. Es wird gezeigt, wie man Double Knock-out Claims mithilfe eines Hilfsprozesses und der geometrischen Put-Call Symmetrie semistatisch hedgen kann.

Satz 3.10 (Semistatisches Hedgen von Double Knock-out Claims)**:** Sei $S := (S_t)_{0\leq t\leq T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-adaptierter Prozess. Sei $T > 0$ die Fälligkeit des Claims.
Seien L und U zwei Schranken mit $0 < L < S_0 < U$.
Sei τ_L die Ersterreichenszeit der unteren Schranke L, d.h. $\tau_L := \inf\{0 \leq t \leq T : S_t \leq L\}$, und sei τ_U die Ersterreichenszeit der oberen Schranke U, d.h. $\tau_U := \inf\{0 \leq t \leq T : S_t \geq U\}$. Dabei werde $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt.
Es wird angenommen, dass $S_{\tau_L} = L$ gilt, falls $\tau_L \leq T$ ist, und dass $S_{\tau_U} = U$ gilt, falls $\tau_U \leq T$ ist. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist, dass S stetige Pfade hat.
Sei $N := (N_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Hilfsprozess zu $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ mit $N_t = h^{-1}(S_t)$ für alle $0 \leq t \leq T$.
Sei G eine beliebige auf (L, U) beschränkte Auszahlungsfunktion.
Falls $gPCS_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T}$ für $((N_t)_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{\tau_L\wedge\tau_U\wedge T\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ gilt, kann ein Double Knock-out Claim mit der Auszahlung $\mathbb{1}_{\{\tau_L\wedge\tau_U>T\}}G(S_T)$ durch folgende semistatische Strategie repliziert werden:
In 0: Halte einen europäischen Claim mit der Auszahlung

$$\Gamma_{\text{dko}}(S_T) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{(h^{-1}(L))^n}{(h^{-1}(U))^n}G^*(h(\frac{(h^{-1}(U))^{2n}h^{-1}(S_T)}{(h^{-1}(L))^{2n}}))$$

$$- \frac{(h^{-1}(L))^{n-1}h^{-1}(S_T)}{(h^{-1}(U))^n} G^*(h(\frac{(h^{-1}(U))^{2n}}{(h^{-1}(L))^{2n-2}h^{-1}(S_T)}))]$$

wobei $G^*(s) := G(s)\mathbb{1}_{\{L<s<U\}}$.
In τ_L bzw. τ_U (falls $\tau_L \leq T$ bzw. $\tau_U \leq T$): Verkaufe den Claim mit der Auszahlung $\Gamma_{\text{dko}}(S_T)$. Dies ist kostenfrei möglich.

Beweis: 1. Fall: h streng monoton wachsend
Da h streng monoton wachsend ist und $h^{-1}(s) > 0$, gilt:

$$\begin{aligned} & 0 < L < S_0 < U \\ \Rightarrow\ & 0 < h^{-1}(L) < h^{-1}(S_0) < h^{-1}(U) \\ \Rightarrow\ & 0 < h^{-1}(L) < N_0 < h^{-1}(U) \end{aligned}$$

Da h streng monoton wachsend ist, gilt:

$$S_t \leq L \Leftrightarrow N_t \leq h^{-1}(L)$$

und

$$S_t \geq U \Leftrightarrow N_t \geq h^{-1}(U)$$

Daraus folgt:

$$\tau_L = \inf\{0 \leq t \leq T : N_t \leq h^{-1}(L)\} =: \tau_{h^{-1}(L)}$$

und

$$\tau_U = \inf\{0 \leq t \leq T : N_t \geq h^{-1}(U)\} =: \tau_{h^{-1}(U)}$$

D.h. τ_L ist sowohl die Ersterreichenszeit der Schranke L von S als auch die Ersterreichenszeit der Schranke $h^{-1}(L)$ von N und τ_U ist sowohl die Ersterreichenszeit der Schranke U von S als auch die Ersterreichenszeit der Schranke $h^{-1}(U)$ von N.
Ferner gilt:

$$\begin{aligned} & S_{\tau_L} = L, && \text{falls } \tau_L \leq T \\ \Rightarrow\ & N_{\tau_{h^{-1}(L)}} = h^{-1}(L), && \text{falls } \tau_{h^{-1}(L)} \leq T \end{aligned}$$

und

$$S_{\tau_U} = U, \qquad \text{falls } \tau_U \leq T$$

$$\Rightarrow \; N_{\tau_{h^{-1}(U)}} = h^{-1}(U), \; \text{falls } \tau_{h^{-1}(U)} \leq T$$

Definiere die Auszahlungsfunktion $\hat{G} := G \circ h$.
Da h^{-1} streng monoton wachsend und stetig ist, ist $\hat{G}$ beschränkt auf $(h^{-1}(L), h^{-1}(U))$.
Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.5 mit unterer Schranke $h^{-1}(L)$, oberer Schranke $h^{-1}(U)$ und $\hat{G}$ als Auszahlungsfunktion.

2. Fall: h streng monoton fallend
Da h streng monoton fallend ist und $h^{-1}(s) > 0$, gilt:

$$\begin{aligned} & 0 < L < S_0 < U \\ \Rightarrow \; & 0 < h^{-1}(U) < h^{-1}(S_0) < h^{-1}(L) \\ \Rightarrow \; & 0 < h^{-1}(U) < N_0 < h^{-1}(L) \end{aligned}$$

Da h streng monoton fallend ist, gilt:

$$S_t \leq L \Leftrightarrow N_t \geq h^{-1}(L)$$

und

$$S_t \geq U \Leftrightarrow N_t \leq h^{-1}(U)$$

Daraus folgt:

$$\tau_L = \inf\{0 \leq t \leq T : N_t \geq h^{-1}(L)\} =: \tau_{h^{-1}(L)}$$

und

$$\tau_U = \inf\{0 \leq t \leq T : N_t \leq h^{-1}(U)\} =: \tau_{h^{-1}(U)}$$

D.h. τ_L ist sowohl die Ersterreichenszeit der Schranke L von S als auch die Ersterreichenszeit der Schranke $h^{-1}(L)$ von N und τ_U ist sowohl die Ersterreichenszeit der Schranke U von S als auch die Ersterreichenszeit der Schranke $h^{-1}(U)$ von N.
Ferner gilt:

$$\begin{aligned} & S_{\tau_L} = L, && \text{falls } \tau_L \leq T \\ \Rightarrow \; & N_{\tau_{h^{-1}(L)}} = h^{-1}(L), && \text{falls } \tau_{h^{-1}(L)} \leq T \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_{\tau_U} &= U, \qquad\quad \text{falls } \tau_U \leq T \\ \Rightarrow\ N_{\tau_{h^{-1}(U)}} &= h^{-1}(U),\ \text{falls } \tau_{h^{-1}(U)} \leq T \end{aligned}$$

Definiere die Auszahlungsfunktion $\hat{G} := G \circ h$.
Da h^{-1} streng monoton fallend und stetig ist, ist $\hat{G}$ beschränkt auf $(h^{-1}(U), h^{-1}(L))$.
Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.5 mit unterer Schranke $h^{-1}(U)$, oberer Schranke $h^{-1}(L)$ und $\hat{G}$ als Auszahlungsfunktion. $\square$

4 Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war es, zu zeigen, wie man Barriereoptionen ohne spezifische Modellannahmen bewerten kann. Zu diesem Zweck wurde die geometrische Put-Call Symmetrie vorgestellt.
Die geometrische Put-Call Symmetrie wurde als Verallgemeinerung der klassischen Put-Call Symmetrie definiert und es wurden äquivalente Bedingungen angegeben. Beispielhaft wurden Bedingungen für Volatilitätsmodelle mit stochastischer und lokaler Volatilität angegeben, die hinreichend für die Gültigkeit der geometrischen Put-Call Symmetrie in diesen Modellen sind. Außerdem wurde eine weitere Symmetrie definiert, die arithmetische Put-Call Symmetrie, und ein Zusammenhang zur geometrischen Put-Call Symmetrie nachgewiesen.
Der Vorteil der Bewertung von Barriereoptionen mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie ist, dass kein konkretes Finanzmarktmodell benötigt wird. Es ist entscheidend, dass die geometrische Put-Call Symmetrie für jeweils eine bestimmte Stopzeit τ gilt.
Es wurde gezeigt, wie man ein- und zweiseitige Barriereoptionen mit europäischen Claims semistatisch hedgen kann. Dabei ist der Wert des replizierenden Portfolios gleich dem Wert der Barriereoption, falls eine Schranke der Barriereoption vor der Fälligkeit erreicht wird, und zur Fälligkeit, falls keine Schranke der Barriereoption erreicht wurde. Für einseitige Barriereoptionen wurde mithilfe der geometrischen Put-Call Symmetrie die Wahrscheinlichkeit, dass die Schranke vor der Fälligkeit erreicht wird, mit dem Anfangspreis des T-Bonds und den Anfangspreisen von Plain Vanilla Optionen bestimmt. Dabei ist beachtenswert, dass die Anfangspreise der europäischen Claims in den replizierenden Portfolios, der Anfangspreis des T-Bonds und die Anfangspreise der Plain Vanilla Optionen durch Randverteilungen bestimmt sind.
Bei der Anwendbarkeit der Hedgeergebnisse gibt es einige Einschränkungen. Zum einen ist die Annahme, dass europäische Claims mit beliebiger Auszahlungsfunktion in beliebigen Mengen verfügbar sind, problematisch. Zum anderen ist die von der geometrischen Put-Call Symmetrie geforderte Symmetrie der impliziten Volatilität in realen Märkten

häufig nicht gegeben, z.B. in Aktienmärkten.
Am Ende der Arbeit wurde dargestellt, wie man mithilfe eines Hilfsprozesses die geometrische Put-Call Symmetrie nutzen kann, wenn der Underlyingkursprozess die Symmetriebedingung nicht erfüllt. Auch hier wurden semistatische Hedges mit europäischen Claims für ein- und zweiseitige Barriereoptionen angegeben.

Literaturverzeichnis

[1] Carr, Peter ; Lee, Roger: PUT-CALL SYMMETRY: EXTENSIONS AND APPLICATIONS. In: *Mathematical Finance* 19 (2009), Nr. 4, S. 523 – 560

[2] Dupont, Dominique Y.: Hedging Barrier Options: Current Methods and Alternatives / Institute for Advanced Studies. 2001 (103). – Economics Series

[3] Lee, Roger: The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes. In: *Mathematical Finance* 14 (2004), Nr. 3, S. 469 – 480

[4] Paulsen, Volkert: *Handschriftliches Skript zur Vorlesung Mathematische Modelle.* Universität Münster, SS 2011

[5] Paulsen, Volkert: *Handschriftliches Skript zur Vorlesung Finanzmathematik.* Universität Münster, WS 2009/ 2010

[6] Tankov, Peter ; Touzi, Nizar: *Skript Stochastic Calculus in Finance.* Ecole Polytechnique Paris, 2010