Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Portfoliooptimierung in Short-Rate-Modellen

Masterarbeit

vorgelegt von

Nadja Sprenger

Matrikelnummer: 347567

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Mathematisches Institut für Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Motivation

Die Portfoliooptimierung gehört zu einer der zentralen Aufgaben der modernen Finanzmathematik und hat die Bestimmung der optimalen Investmentstrategie eines Investors zum Ziel. Aufgrund des zunehmenden Interesses der Bevölkerung an Investment in den Finanzmarkt, beschäftigen sich immer mehr Menschen in der aktuellen Welt mit dem Thema „Geldanlage". Da die Investmentmöglichkeiten breit gefächert sind, stellt sich die Frage, wie ein größtmöglicher Nutzen für den Anleger durch die Konsum- und Investitionsentscheidungen erreicht werden kann.

Bei der Portfoliooptimierung geht es dementsprechend um die optimale Aufteilung des zur Verfügung stehenden Vermögens über den gesamten Zeitabschnitt auf die vorliegenden Finanzgüter. Dabei werden zwei Arten von Investoren unterschieden. Der eine konsumiert gleichmäßig über die Handelsperiode, der andere nur am Ende, zum Fälligkeitszeitpunkt. Das Ziel der Berechnung ist es zu bestimmen, welche Anteile von welchem Wertpapier zu welchem Zeitpunkt erworben und wie lange diese gehalten werden sollen, um den optimalen Wert zu erreichen. Das heißt, zu jedem Zeitpunkt des Handels können sich die Portfolioentscheidungen ändern. Aus diesem Grund wird dieses Portfolioproblem **dynamisches Optimierungsproblem** genannt.

Die Frage, ob die optimale Investmentstrategie für alle Investoren immer gleich ist, kann mit Sicherheit mit „Nein" beantwortet werden. Jeder Investor besitzt eigene Präferenzen, was die Risikoeinstellung betrifft. Jeder Anleger versucht ein möglichst gutes Verhältnis zwischen dem Risiko und der Rendite herzustellen. Ein risikoaverser Investor akzeptiert einen geringeren Umsatz für ein kleineres Risiko, ein risikoaffiner Investor hingegen erklärt sich bereit, ein höheres Risiko einzugehen, wodurch seine Rendite auch höher wird. Aus diesem Grund gibt es kein allgemeines optimales Portfolio, sondern für jeden Investor ein individuelles. Mathematisch werden die Präferenzen der Anleger mit Hilfe der Nutzenfunktionen dargestellt. Diese bilden einen wichtigen Punkt in der Theorie der Portfoliooptimierung.

Das tiefergehende Verständnis dieser Zusammenhänge ermöglicht es den Anlegern ihre Portfolios optimal zu strukturieren und somit die unangenehmen finanziellen Überraschungen zu vermeiden. Aktuell wird in der Wirtschaft überwiegend mit der Portfoliooptimierung in diskreten Finanzmarktmodellen gearbeitet, vgl. [Mar52], was der Praxis nur wenig entspricht. Die mathematische Analyse der zeitstetigen Portfoliooptimierung in Short-Rate-Modellen soll z. B. auf Banken oder Kapitalanlageinstitutionen motivierend wirken, die nachfolgend hergeleitete Lösungsstrategie in der Realität zu replizieren. Dies würde aufgrund der besseren Übereinstimmung des mathematischen Modells mit der Wirklichkeit zur exakteren und vielversprechenden Resultaten der Portfoliooptimierung führen.

1.2. Überblick

Zuerst hat sich Anfang der 50er Jahre H. Markowitz mit der modernen Portfoliotheorie auseinandergesetzt. Eine Arbeit, für die er im Jahr 1990 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften nominiert wurde und die bis heute ihre Wichtigkeit nicht verloren hat. Für den interessierten Leser wird auf [Mar52] verwiesen. In diesem Aufsatz legt Markowitz die Grundlagen der klassischen Portfoliotheorie fest und formuliert das Zusammenspiel mehrerer Finanzgüter in einem Portfolio als stochastisches Problem, was eine wissenschaftliche Analyse ermöglicht, vgl. [Mar08, S. viii]. Das von ihm in [Mar59] betrachtete diskrete Finanzmarktmodell wurde von anderen Autoren erweitert und die Voraussetzungen an den Finanzmarkt besser an die Realität angepasst, vgl. [CH89], [Pli86] und andere. Es entstanden die Ansätze zur Portfoliooptimierung in einem zeitstetigen Finanzmarktmodell.

Das erste zeitstetige Portfolioproblem wurde von Merton H. Miller in [Mer69] behandelt, wofür er zusammen mit Markowitz im Jahr 1990 den Nobelpreis erhielt. In seinem Modell kann ein Investor sein Vermögen in ein risikofreies Geldmarktkonto und in $n \in \mathbb{N}$ verschiedene risikobehaftete Finanzgüter anlegen. Das Vorgehen des Investors wird anhand eines Portfolioprozesses beschrieben, der den in ein Wertpapier oder in ein Geldmarktkonto investierten Anteil vom Gesamtvermögen widerspiegelt. Merton erfasst das Portfolioproblem als ein stochastisches Kontrollproblem, das er mit Hilfe der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung löst.

Während Merton in seiner Arbeit [Mer69] die konstanten Investmentmöglichkeiten betrachtet, versuchen andere Autoren die Annahmen weiter auszuweiten. Es wird entweder die stochastische Zinsratenentwicklung oder die stochastische Volatilität vorausgesetzt. Für den Fall mit der stochastischen Zinsrate wird der Leser auf [KK01] verwiesen.

Andere Autoren , wie z. B. Pliska in [Pli86], Karatzas, Lehoczky und Shreve in [KLS87], Cox und Huang in [CH89] haben sich mit einem anderen Ansatz zur Lösung des zeitstetigen Portfolioproblems auseinandergesetzt, der unter dem Namen Martingalmethode bekannt ist. Zu seinen Grundtechniken gehören der Martingaldartellungssatz und Verfahren der stochastischen Analysis. Die Idee der Martingalmethode ist die Verwendung der Vollständigkeit des Finanzmarktes, die besagt, dass jede Auszahlung, die gewissen Integritätsbedingungen genügt, durch eine zulässige Strategie erzielt werden kann. Dies ermöglicht die Aufteilung des dynamischen Optimierungsproblems in zwei Schritte. Als Erstes wird eine optimale Auszahlung bestimmt, die den größten erwarteten Nutzen liefert. Die Berechnung erfolgt unter Beachtung der Nebenbedingung, dass die unter dem risikofreien, äquivalenten Martingalmaß erwartete abdiskontierte Auszahlung nicht das Startkapital übersteigt. Als Zweites wird eine optimale Portfoliostrategie berechnet, die die Lösung aus dem ersten Schritt repliziert. Die Martingalmethode liefert Lösungen für recht allgemeine Finanzmarktmodelle mit stochastischen, nicht unbedingt markovschen[1] Marktkoeffizienten.

[1] Die Definition sowie weitere wichtige Zusammenhänge der Markov-Eigenschaft können in [Ost10, Definition 2.19, S. 35 ff.] nachgeschlagen werden.

1.3. Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Masterarbeit befasst sich mit der Portfoliooptimierung in zeitstetigen, arbitragefreien und vollständigen Finanzmarktmodellen, die eine stochastische Zinsratenentwicklung annehmen. Den Schwerpunkt der Arbeit bildet der Martingalansatz. Im **Kapitel 2** werden die dem Modell zugrundeliegende Konzepte erläutert, sowie weitere hierfür relevante mathematische Definitionen eingeführt. Ein Abschnitt zu dem Thema der Nutzenfunktion wird das Kapitel abschließen.

Das **Kapitel 3** behandelt das Lösen des zeitstetigen Portfolioproblems und teilt sich in zwei Unterabschnitte auf. In Kapitel 3.1 wird das Portfolioproblem formuliert und im Kapitel 3.2 wird das Prinzip der Martingalmethode beschrieben, analysiert und im Anschluss daran auf den Fall der logarithmischen Nutzenfunktion und der Potenz-Nutzenfunktion als Präferenzfunktionen des Anlegers angewandt.

Das Kapitel 4 und 5 behandeln zwei Spezialfälle bezüglich der vorliegenden Finanzgüter. Im **Kapitel 4** wird von einer Situation mit zwei Finanzgütern, einem Geldmarktkonto und einem Bond, ausgegangen. Die Lösung wird im Hinblick auf die stochastische Zinsrate und auf zwei verschiedene Nutzenfunktionen hergeleitet und anschließend auf das Vasicek- und das Ho-Lee-Modell angewandt. Um dem Leser einen Einblick in die Theorie der Short-Rate-Modelle zu gewähren, wird es vor der Anwendung der Lösung auf die oben genannten Modelle eine kurze Einführung geben. Im **Kapitel 5** wird der gemischte Fall beschrieben, in dem von einem Geldmarktkonto, einer Aktie und einem Bond als Finanzgüter ausgegangen wird. Die Bestimmung des optimalen Portfolios für diese Situation im Hinblick auf die stochastische Zinsrate wird mit Hilfe des Konzepts des Forwardmartingalmaßes durchgeführt.

Das Fazit in **Kapitel 6** fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen und diskutiert offene Fragestellungen und mögliche Erweiterungen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Dr. Volkert Paulsen für die Vergabe dieses interessanten Themas, für die gute Betreuung bei der Erstellung dieser Masterarbeit und auch der Unterstützung während meines Studiums in Münster herzlich danken. Ein weiterer Dank gilt meiner Familie, für ihre Geduld, moralischen Rückhalt, ihren Glauben an mich und Hilfestellung bei der Betreuung meines Kindes. Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Mann und meinem Sohn, die mich mit viel Liebe und Verständnis durch mein Studium begleitet haben. Nicht zuletzt geht ein sehr großer Dank an meine Freunde, die mich moralisch und fachlich unterstützt, motiviert und gestärkt haben.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Ort, Datum | Unterschrift

2. Grundlagen

2.1. Das Finanzmarktmodell

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Instrumente, die als Basis für die vorliegende Arbeit dienen, vorgestellt. Die nachfolgende Zusammenstellung reicht allerdings nicht aus, um als Einführung in die mathematischen Grundlagen der Finanzmathematik angesehen zu werden. Die vollständigen Ausführungen der benötigten mathematischen Zusammenhänge können in [Pau11], [Kar97], [KS98], [Bjö04] und in [Dec06] recherchiert werden. Nach der Einführung des zugrunde liegenden Finanzmarktmodells werden in diesem Kapitel zwei wichtige Sätze formuliert und bewiesen, die für das weitere Vorgehen von grundlegender Bedeutung sind.

Für die gesamte Arbeit werden die drei folgenden Annahmen vorausgesetzt. Zum einen wird die Arbitragemöglichkeit ausgeschlossen. Das heißt, dass das risikolose Profit beim Handel mit Finanzgütern innerhalb des Modells in keiner Weise erreicht werden kann, vgl. [Pau10]. Zum anderen wird ein vollständiges Finanzmarktmodell angenommen. Das bedeutet, dass jeder beschränkter Claim[1] hedgebar ist, vgl. [Pau10]. In der dritten Annahme wird ein endlicher Handelszeitraum [0,T] mit $0 \leq T < \infty$ definiert. T beschreibt den Fälligkeitszeitpunkt, der in der Literatur auch als Planungshorizont oder als „Maturity“, vgl. [Pau10, 1.10 Forward], bezeichnet wird.

Im Folgenden wird das grundlegende Finanzmarktmodell vorgestellt. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, der mit der Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ versehen

[1] „Ein Claim ist ein Kontrakt, der seinem Inhaber am Ende der Periode eine zufällige Auszahlung C zusichert.“ Siehe: [Pau10, 2.8]

wird, das heißt, die Quelle des Zufalls wird durch einen m-dimensionalen Wiener Prozess $\{W(t), \mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, mit $W(t) = (W_1(t), ..., W_m(t))^\top$,[2] $0 \leq t \leq T,\ m \in \mathbb{N}$ und $W(0) = 0$ beschrieben. Die Wiener-Filtration wird folgendermaßen definiert:

Definition 2.1 (**Wiener-Filtration**)
Sei $W = (W_1, ..., W_m)^\top$ ein m-dimensionaler Wiener Prozess. Wird

$$\mathcal{G}^0(t) := \sigma\left(W(s) : 0 \leq s \leq t\right),\ \textit{für alle}\ 0 \leq t \leq T$$

gesetzt, so bildet

$$\mathcal{G}^0(t+) := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{G}^0(t+\epsilon)$$

eine rechtsseitig stetige Filtration.
Definiere mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{P}$-Nullmengen, d. h.

$$\mathcal{N} = \Big\{A \subset \Omega :\ \textit{es existiert ein}\ B \in \mathcal{G}^0(T)\ \textit{mit}\ \mathbb{P}(B) = 0\ \textit{und}\ A \subset B\Big\}.$$

Dann erfüllt

$$\mathcal{F}(t) := \sigma\left[\mathcal{G}^0(t+) \cup \mathcal{N}\right]$$

die **usual conditions**[3] und W ist ein Wiener Prozess bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\in[0,T]}$. Dies ist die kleinste Filtration, bezüglich der W ein Wiener Prozess ist und die zusätzlich die usual conditions erfüllt. Die Wiener-Filtration wird auch die von W erzeugte vollständige Filtration genannt. Das heißt, durch die Wiener-Filtration $\mathcal{F}$ wird ausschließlich die Information des Verlaufs des Wiener Prozesses beobachtet.

Das nächste wichtige Attribut für die mathematische Formulierung des Finanzmarktmodells sind die zum Handel zur Verfügung stehenden Finanzgüter. Es wird hier von

[2] Als "$(W_1(\cdot), ..., W_m(\cdot))^\top$" wird der transponierte Vektor von $(W_1(\cdot), ..., W_m(\cdot))$ bezeichnet.
[3] Eine Filtration $(\mathcal{F}(t))_{0\leq t\leq T}$ erfüllt die usual conditions, wenn sie rechtsseitig stetig ist und $(\mathcal{F}(0))_{0\leq t\leq T}$ alle Teilmengen von $\mathbb{P}$-Nullmengen enthällt, vgl. [Pau11].

einem Finanzmarkt ausgegangen, der aus $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, Finanzgütern besteht, die stetig über die Zeit gehandelt werden. Eines dieser Finanzgüter ist ein **Geldmarktkonto**, dessen Preisprozess $(\beta(t))_{0\leq t\leq T}$, mit $\beta(0) = 1$, absolut stetige Pfade hat, strikt positiv und $\mathcal{F}(t)$-messbar mit endlicher Variation auf $[0, T]$ ist. Dieser ist durch:

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right),\ 0 \leq t \leq T.$$

gegeben, wobei der Prozess $r(\cdot)$ die Entwicklung der zufälligen Spotzinsrate bezeichnet, progressiv-messbar ist und die nachfolgende Integrierbarkeitsbedingung für alle $t \in [0, T]$ erfüllt:

$$\int_0^t |r(s)|ds < \infty, \quad f.\,s. \tag{2.1}$$

Der Preisprozess $\beta(\cdot)$ ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung:

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt,\ 0 \leq t \leq T, \tag{2.2}$$

die die Entwicklung der Preise des Geldmarktkontos wiedergibt.

Die restlichen n Finanzgüter, wie zum Beispiel **Aktien und/oder Bonds**, sind risikobehaftet. Die Preise dieser Finanzgüter zum Zeitpunkt t werden durch $P_1(t), ..., P_n(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$ beschrieben. Die Anfangspreise $P_1(0), ..., P_n(0)$ sind strikt positive Konstanten. Die Preisprozesse $P_1(\cdot), ..., P_n(\cdot)$ bilden positive Semimartingale [Pau11, 4.1 Semimartingal] bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}(t))_{0\leq t\leq T}$ sind. Diese sind stetig, strikt positiv und $\mathcal{F}(t)$-messbar. Somit erfüllen die Preisprozesse der risikobehafteten Wertpapiere folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dP_i(t) = P_i(t)\ [\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)], \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.3}$$

mit $P_i(0) =: p_i \in (0, \infty)$, für $i = 1, ..., n$.

Der Driftvektor $\mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_n(t))^\top$ und der Prozess $\sigma_{ij}(t)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$, $0 \leq t \leq T$, der den j-ten Eintrag in der i-ten Reihe der $(n \times m)$-Volatilitätsmatrix festlegt, sind bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ progressiv-messbar und erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$\int_0^T \|\mu(t)\| dt < \infty, \ f.s.$$
$$\int_0^T \|\sigma(t)\|^2 \ dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^T \sigma_{ij}^2(t) dt < \infty, \ f.s.$$

wobei mit $\|x\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

2.2. Die Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Modells

Wie bereits erwähnt, wird in der vorliegenden Arbeit von einem vollständigen, arbitragefreien Finanzmarktmodell ausgegangen. Die Arbitragefreiheit ist äquivalent zu der Existenz eines previsiblen Prozesses

$$(\vartheta(t))_{0\leq t\leq T} = \Big((\vartheta_1(t), ..., \vartheta_m(t))^\top\Big)_{0\leq t\leq T}$$

mit

$$\vartheta(t) = \sigma(t)^{-1}(r(t)\mathbb{1}_m - \mu(t)), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.4}$$

und

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \vartheta(t)^\top dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\vartheta(t)\|^2 dt\right)\right] = 1. \tag{2.5}$$

Dabei beschreibt $\mathbb{1}_m$ den m-dimensionalen Einheitsvektor $\mathbb{1}_m = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$. Der Prozess $(\vartheta(t))_{0\leq t\leq T}$ wird auch der **Marktpreis des Risikos** genannt und er erfüllt

$$\int_0^T \|\vartheta(t)\|^2 dt < \infty \ f.s. \tag{2.6}$$

Das risikofreie, äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$, dessen Existenz die Arbitragefreiheit impliziert, ist durch

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T} = \exp\left(\int_0^T \vartheta(t)^\top dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\vartheta(t)\|^2 dt\right) =: L_T$$

definiert. Der Satz von Cameron, Martin, Girsanov, vgl. [Bjö04, Theorem 11.3], folgert einen m-dimensionalen Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$:

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds,\ 0 \le t \le T.$$

Über diesen können die Preisprozesse der n risikobehafteten Finanzgüter bezüglich $\mathbb{P}^*$ durch die Dynamik

$$dP_i(t) = P_i(t)\left[r(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)d\overline{W}_j(t)\right],\ i = 1, ..., n$$

beschrieben werden.

Die Vollständigkeit des Marktes bedeutet, dass die Dimension des Wiener Prozesses mit der Anzahl der vorliegenden Finanzgüter übereinstimmt, das heißt $m = n \in \mathbb{N}$, und dass die Volatilitätsmatrix σ zu jedem Zeitpunkt invertierbar ist. Dies impliziert gleichzeitig die Eindeutigkeit des previsiblen Prozesses ϑ und somit auch von $\mathbb{P}^*$, vgl. [Pau11, Teil 2, Satz 2.3].

Ein in diesem Zusammenhang wichtiger Prozess ist der abdiskontierte Dichtequotientenprozess $H(\cdot)$, der durch

$$\begin{aligned} H(t) &:= L(t)\beta^{-1}(t) \\ &:= \exp\left[-\int_0^t r(s)ds + \int_0^t \vartheta(s)^\top dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds\right],\ 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{2.7}$$

definiert ist. Dieser ist strikt positiv, stetig und progressiv-messbar bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$.

Des weiteren ist $H(\cdot)$ für alle $t \in [0,T]$ die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dH(t) = -H(t)\left[r(t)dt - \vartheta^{\top}(t)dW(t)\right] \tag{2.8}$$

mit $H(0) = 1$.[4]

Das Benutzen des Prozesses $H(\cdot)$ ermöglicht das Umschreiben der Bedingungen bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ in Termen unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$. Die folgenden Annahmen sind für das weitere Vorgehen wichtig:

$$\mathbb{E}\left[H(T)\right] < \infty \tag{2.9}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H(t)dt\right] < \infty \tag{2.10}$$

$$\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right] < \infty. \tag{2.11}$$

Wie im Beweis des Satzes 3.8 aus dem nächsten Kapitel ersichtlich wird, sind diese Bedingungen für die Durchführung der Martingalmethode von markanter Bedeutung. Die Bedingung (2.9) bringt die Endlichkeit des Anfangspreises eines T-Bonds[5] $B(0,T)$ zum Ausdruck:

$$\mathbb{E}\left[H(T)\right] = \mathbb{E}\left[L(T)\beta^{-1}(T)\right] = \mathbb{E}^*\left[\beta^{-1}(T)\right] = B(0,T) \overset{(2.9)}{<} \infty.$$

Durch das Ausschreiben von $\mathbb{E}^*\left[\beta^{-1}(T)\right]$ wird die Abhängigkeit von der Short Rate bemerkbar:

$$\mathbb{E}^*\left[\beta^{-1}(T)\right] = \mathbb{E}^*\left[\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right] \tag{2.12}$$

Theoretisch kann der Fall der stark negativen Werte für die Short Rate auftreten. Dies

[4]Siehe Anhang A1.
[5]Die genaue Definition eines T-Bonds wird im Kapitel 4.1 gegeben.

würde zu dem positiven Ausdruck in der Exponentialfunktion von (2.12) und folglich zu dem positiven Erwartungswert insgesamt führen. Das macht in der Realität keinen Sinn. Also ist die Voraussetzung der Endlichkeit der Bedingung (2.9) von Bedeutung. Diese ist in Finanzmarktmodellen erfüllt, in denen T-Bonds sinnvoll bewertet werden können. Daher ist die Voraussetzung (2.9) nicht besonders einschränkend. Analog können die Bedingungen (2.10) und (2.11) interpretiert werden.

Der nächste Schritt auf dem Weg zur Portfoliooptimierung ist eine explizite Modellierung der Portfolioentscheidungen eines Investors. Dafür wird nachfolgend die mathematische Formulierung des Portfolio- und Konsumprozesses eingeführt.

2.3. Der Vermögens-, Portfolio- und Konsumprozess

Es wird ein Investor mit einem Anfangskapital $x > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet. Das Kapital wird zu Beginn in verschiedene Finanzgüter investiert, wobei der Investor stetig in der Zeit bis zu einem fixen Planungshorizont T handelt. Sein Investitionsverhalten wird mittels des Portfolioprozesses

$$\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)^\top$$

modelliert, der erstmal nur allgemein angegeben wird und weiter unten durch eine genaue mathematische Formulierung konkretisiert. Mit $\pi_i(t),\ i = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}$ wird der Teil des Gesamtvermögens bezeichnet, der zum Zeitpunkt t in das i-te risikobehaftete Finanzgut investiert wird. Da die Investitionsentscheidungen unabhängig von den zukünftigen Ereignissen getroffen werden, ist die Zufallsvariable $\pi_i(t)$, für $i = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t \leq T$, $\mathcal{F}(t)$-messbar. Mit $\pi_0(t)$ wird der zum Zeitpunkt t in das Geldmarktkonto investierte Teil des Gesamtvermögens beschrieben. Der dazugehörige **Vermögensprozess** zum Zeitpunkt t lässt sich durch

$$V(t) = \pi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) = \pi_0(t) + \pi^\top(t) \cdot \mathbb{1}_n, \tag{2.13}$$

mit $\mathbb{1}_n := (1, ..., 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ darstellen.[6]

Für die Modellierung des Konsumverhaltens eines Investors wird die nachfolgende Definition gegeben.

Definition 2.2 (**Konsumprozess**)
Ein nicht-negativer, bezüglich $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ progressiv-messbarer Prozess c, der die Bedingung

$$\int_0^T c(t)dt < \infty \quad f.s. \tag{2.14}$$

erfüllt, wird **Konsumprozess** genannt[7].

Alternativ zu der Gleichung (2.13) lässt sich das zu dem Portfolioprozess π und dem Konsumprozess c gehörige Vermögen *nach der Umschichtung* darstellen. Dieses setzt sich somit zum Zeitpunkt t aus dem Startvermögen, dem Gewinn/Verlust, der durch die Investition in die Finanzgüter zum Zeitpunkt t entsteht und aus dem Konsum, der die Verkleinerung des Vermögens verursacht, zusammen:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \pi_0(s)\beta^{-1}(s)d\beta(s) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \pi_i(s)P_i^{-1}(s)dP_i(s) - \int_0^t c(s)ds \tag{2.15}$$

für alle $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$ und mit $V(0) = x$. Dabei steht $\pi(\cdot)$ für den bereits erwähnten Portfolioprozess, dessen explizite Definition in der Definition 2.3 gegeben wird. In differentieller Notation lässt sich die Darstellung (2.15) für alle $t \in [0, T]$ folgendermaßen

[6] Es ist anzumerken, dass $\pi_i(\cdot)$, mit $i = 0, ..., n$ und $n \in \mathbb{N}$, in diesem Fall auch negative Werte annehmen kann. Damit ist ein Leerverkauf der Wertpapiere und das Ausleihen zu der Zinsrate $r(\cdot)$ zugelassen. Deswegen ist eine Bedingung zu dem in der jeweiligen Handelsperiode erzielten Gewinn notwendig. Dieser soll von unten durch eine Konstante beschränkt sein, vgl. [Kar97, Definition 0.2.2., S. 3]. Aus diesem Grund ist es wichtig, die zulässigen Portfoliostrategien zu betrachten, deren Definition weiter unten angegeben wird.

[7] Im Folgenden wird angenommen, dass die Höhe des Konsums nur durch den Investor selbst bestimmt wird.

schreiben:

$$dV(t) = \pi_0(t)\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\frac{dP_i(t)}{P_i(t)} - c(t)dt \tag{2.16}$$

Dieser Vermögenswert zum Zeitpunkt t, für alle $t \in [0, T]$, ist nach Gleichung (2.13) auf die vorliegenden Finanzgüter zu verteilen. Das heißt, dass der Portfolioprozess π so zu wählen ist, dass der Wertprozess der Gestalt (2.15) der Darstellung (2.13) genügt und somit den Konsum finanziert. Aus diesem Grund handelt es sich hier um Selbstfinanzierung[8]. Die Anwendung der Gleichung (2.13) auf die Darstellung (2.16) führt zu:

$$\begin{aligned}
dV(t) &= \pi_0(t)\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\frac{dP_i(t)}{P_i(t)} - c(t)dt \\
&= \left(V(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\right)\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\frac{dP_i(t)}{P_i(t)} - c(t)dt \\
&\overset{(2.3),(2.2)}{=} \left(V(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\right) r(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right) - c(t)dt \\
&= V(t)r(t)dt + \pi(t)^\top \left[(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)dt + \sigma(t)dW(t)\right] - c(t)dt,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Diese stochastische Differentialgleichung kann mit Hilfe der Variation der Konstanten eindeutig gelöst werden[9]:

$$V(t) = \beta(t)\left(x - \int_0^t \beta(s)^{-1}c(s)ds + \int_0^t \beta(s)^{-1}\pi^\top(s)[\sigma(s)dW(s) + (\mu(s) - r(s)\mathbb{1}_n)ds]\right) \tag{2.18}$$

für alle $0 \leq t \leq T$, vgl. Anhang A2. Dabei ist

$$\beta(t)^{-1} = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right), \quad 0 \leq t \leq T$$

der Diskontierungsfaktor. Um die Existenz des Integrals auf der rechten Seite der Glei-

[8]Diese Ausführungen basieren auf [Dec06, Kapitel 11.1 ff.].

[9]Für die Eindeutigkeit der Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung müssen an den Portfolioprozess π geeignete Integrierbarkeitsbedingungen gestellt werden. Dies erfolgt in der Definition 2.3.

chung (2.18) zu gewährleisten, müssen bestimmte Annahmen an den Portfolioprozess $\pi(\cdot)$ getroffen werden. Diese werden in der nachfolgenden Definition formuliert.

Definition 2.3 (**Portfolioprozess**)

a) Es wird ein wie in Kapitel 2.1 definiertes, Finanzmarktmodell betrachtet. Ein bezüglich $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ progressiv-messbarer, $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess

$$\{\pi(t)\}_{0\leq t\leq T} = \left\{(\pi_1(t), ..., \pi_n(t))^\top\right\}_{0\leq t\leq T}$$

mit

$$\int_0^T \|\pi^\top(t)\sigma(t)\|^2 dt + \int_0^T \left|\pi^\top(t)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)\right| dt < \infty \quad f.s.$$

wird **Portfolioprozess** genannt. Für den zu dem Paar (π, c) gehörigen Vermögensprozess $V^{x,\pi,c}(\cdot)$, mit $x > 0$ und c wie in Definition 2.2, gilt:

$$V^{x,\pi,c}(t) = \pi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t), \tag{2.19}$$

für alle $0 \leq t \leq T$, wobei mit $\pi_0(\cdot)$ das in das Geldmarktkonto investierte Vermögen bezeichnet wird.

b) Das Paar (π, c), bestehend aus einem Portfolioprozess und einem Konsumprozess, heißt **selbstfinanzierend**, wenn der zugehörige Vermögensprozess die Gleichung (2.18) fast sicher erfüllt. Somit heißt ein Portfolioprozess selbstfinanzierend zum Konsumprozess $c(\cdot)$, wenn (π, c) ein selbstfinanzierendes Paar ist.

c) Ein selbstfinanzierendes Paar (π, c) aus einem Konsum- und Portfolioprozess heißt **zulässig** für ein Anfangskapital $x > 0$, wenn für den entsprechenden Vermögensprozess die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$V^{x,\pi,c}(t) \geq 0, \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \quad f.s.$$

Die Menge aller zulässigen sebstfinanzierenden Paare (π, c) ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) := \{(\pi, c) : c \; wie \; in \; Definition \; 2.2, \; \pi \; selbstfinanzierend \; zu \; c, \\ V^{x,\pi,c}(t) \geq 0, \; 0 \leq t \leq T \; f.s.\}\end{aligned} \tag{2.20}$$

gegeben.

Die Zulässigkeit sagt damit aus, dass die Umschichtung und der Konsum des Vermögens eines Investors solange stattfinden sollte, bis dies nicht zu seinem Ruin führt, was $V^{x,\pi,c}(t) < 0, \; 0 \leq t \leq T$ bedeutet hätte. Ist das Startkapital $x < 0$, was auf einen bestehenden Kredit hinweist, so ist die Menge $\mathcal{A}(x)$ leer.

Abschließend werden die in den obigen Unterkapiteln vorgestellten Konzepte und Definitionen zusammengefügt, um die folgenden wichtigen Sätze 2.4 und 2.5 zu formulieren, vgl. [KS98, S. 92 ff.].

Satz 2.4

Sei $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ mit Startkapital $x>0$. Dann gilt für den dazugehörigen Vermögensprozess $V^{x,\pi,c}(t)$:

$$\mathbb{E}\left[H(t)V^{x,\pi,c}(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right] \leq x, \quad für \; alle \; t \in [0, T]. \tag{2.21}$$

Beweis:

Sei $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ und $V^{x,\pi,c}(t)$ der dazugehörige Vermögensprozess. $H(\cdot)$ und $V^{x,\pi,c}(\cdot)$ sind durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} dH(t) &= -H(t)\left[r(t)\; dt - \vartheta(t)^\top dW(t)\right], \\ dV^{x,\pi,c}(t) &= V^{x,\pi,c}(t)r(t)\; dt + \pi(t)^\top \left[(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)\; dt + \sigma(t)dW(t)\right] - c(t)dt \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ mit $H(0) = 1$ und $V(0) = x$. Mittels der partiellen Integrationsformel, vgl. [Pau11, 4.4] ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&dH(t)V^{x,\pi,c}(t) + H(t)c(t)dt \\
&\quad = H(t)dV^{x,\pi,c}(t) + V^{x,\pi,c}(t)dH(t) + d\langle H, V^{x,\pi,c}\rangle_t + H(t)c(t)dt \\
&\quad = H(t)V^{x,\pi,c}(t)r(t)dt + H(t)\pi(t)^\top \left[(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)dt + \sigma(t)dW(t)\right] - H(t)c(t)dt \\
&\quad - V^{x,\pi,c}(t)H(t)(r(t)dt - \vartheta(t)^\top dW(t)) + H(t)\pi(t)^\top \sigma(t)\vartheta(t)dt + H(t)c(t)dt \\
&\quad = H(t)[\pi(t)^\top (\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n + \sigma(t)\vartheta(t))]dt \\
&\quad + H(t)[\pi(t)^\top \sigma(t) + V^{x,\pi,c}(t)\vartheta(t)^\top]dW(t) \\
&\quad = H(t)\left[\pi(t)^\top \left(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n + \sigma(t)\sigma(t)^{-1}\left(r(t)\mathbb{1}_n - \mu(t)\right)\right)\right] dt \\
&\quad + H(t)[\pi(t)^\top \sigma(t) + V^{x,\pi,c}(t)\vartheta(t)^\top]dW(t) \\
&\quad = H(t)\left[\pi(t)^\top \sigma(t) + V^{x,\pi,c}(t)\vartheta(t)^\top\right] dW(t),\ 0 \le t \le T.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

In der Integralschreibweise lässt sich obiger Zusammenhang folgendermaßen darstellen:

$$
\begin{aligned}
&H(t)V^{x,\pi,c}(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds \\
&\quad = H(0)V^{x,\pi,c}(0) + \int_0^t H(s)\left[\pi(s)^\top \sigma(s) + V^{x,\pi,c}(s)\vartheta(s)^\top\right] dW(s) \\
&\quad = x + \int_0^t H(s)\left[\pi(s)^\top \sigma(s) + V^{x,\pi,c}(s)\vartheta(s)^\top\right] dW(s),\ 0 \le t \le T.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Es ist zu beachten, dass die linke Seite der Gleichung (2.23) aufgrund von $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ nicht-negativ ist, was die Supermartingaleigenschaft[10] des lokalen Martingals bezüglich $\mathbb{P}$ auf der rechten Seite der Gleichung impliziert.

[10] Ein adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $(X(t)_{t\in[0,T]})$ heißt **Supermartingal**, falls für alle $t \in [0, T]$ die Bedingungen $\mathbb{E}[X(t)] < \infty$ und $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}(s)] \le X(s)$ erfüllt sind. Das heißt insbesondere für $s = 0$: $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}(0)] = \mathbb{E}[X(t)] \le X(0)$, wobei $\mathcal{F}(t)$ nach Voraussetzung die Wiener Fltration ist.

Damit ergibt sich die sogenannte **Budgetbedingung** für $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[H(t)V^{x,\pi,c}(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[x + \int_0^t H(s)\left[\pi(s)^\top \sigma(s) + V^{x,\pi,c}(s)\vartheta(s)^\top\right] dW(s)\right] \\
&= \mathbb{E}\ x + \mathbb{E}\int_0^t H(s)\left[\pi(s)^\top \sigma(s) + V^{x,\pi,c}(s)\vartheta(s)^\top\right] dW(s) \\
&\leq x
\end{aligned} \tag{2.24}$$

□

Mit dem Beweis zeigt sich, dass der Prozess $H(\cdot)$ die Rolle des Diskontierungsprozesses unter dem Ausgangsmaß $\mathbb{P}$ übernimmt. Dieser ermöglicht die Berechnung eines zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ zu investierenden Mindestvermögens, um ein bestimmtes Kapital zu einem festgelegten Zeitpunkt der Handelsperiode zu erreichen. Setzt sich ein Investor zum Beispiel das Ziel, zum Zeitpunkt $t = T$ ein Vermögen in Höhe von ξ zur Verfügung zu haben, so muss er dafür zum Zeitpunkt $t = 0$ mindestens den Wert

$$x \geq \mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(t)c(t)dt\right]$$

einsetzen[11].

Die Vollständigkeit des Finanzmarktmodells bedeutet, dass es zu jedem beschränkten Claim ξ eine Handelsstrategie bzw. Portfoliostrategie gibt, deren Wertprozess diese Auszahlung ξ am Ende der Handelsperiode repliziert. Auf diese Weise können sich die Marktteilnehmer gegen gewisse Risiken im Finanzmarktmodell absichern. Die Intention des folgenden Satzes ist zu zeigen, dass ein bestimmtes Zielvermögen ξ durch das Handeln gemäß einer selbst-finanzierenden, zulässigen Portfoliostrategie $\pi(\cdot)$ bei einem fest vorgegebenen Anfangskapital $x > 0$ tatsächlich erzielt werden kann.

[11] Ebenfalls ist hier die Bankrottbedingung zu beachten. Ein Bankrott ist ein absorbierender Zustand für $V^{(x,\pi,c)(\cdot)}$. Das heißt, falls das Vermögen bis zum Eintreten des Zeitpunkts T ausgeschöpft wird, so wird es dabei bleiben. Es werden keine weiteren Investitionen und kein Konsum mehr stattfinden. Dazu detaillierter in [KS98, Remark 3.4, S. 92] und [Bal01, Beispiel (2.4.6), S. 19].

Satz 2.5

Es sei ein Anfangskapital $x > 0$, ein Konsumprozess $c(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$ und ein zufälliger Claim ξ mit $\xi \geq 0$ und $\mathcal{F}_T$-messbar gegeben, für welche die Bedingung

$$\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(t)c(t)dt\right] = x < \infty \tag{2.25}$$

erfüllt ist. Dann existiert ein Portfolioprozess $\pi(\cdot)$ mit

$$(\pi, c) \in \mathcal{A}(x), \tag{2.26}$$

$$V^{x,\pi,c}(T) = \xi \quad f.\,s. \tag{2.27}$$

Weiter kann π so gewählt werden, dass der Prozess

$$(M(t))_{0 \leq t \leq T} := \left(H(t)V^{x,\pi,c}(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right)_{0 \leq t \leq T} \tag{2.28}$$

ein $\mathcal{F}(t)$-Martingal ist. Insbesondere gilt für den zu (π, c) gehörenden Vermögensprozess:

$$V^{x,\pi,c}(t) = \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_t^T H(s)c(s)ds|\mathcal{F}(t)\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.29}$$

Beweis:

In dem ersten Schritt wird die Existenz eines martingalerzeugenden Portfolioprozesses π unter den gegebenen Voraussetzungen gezeigt, so dass die Bedingung (2.27) erfüllt ist. Dazu sei ξ ein zufälliger, nicht-negativer $\mathcal{F}_T$-messbarer Claim mit

$$\mathbb{E}[H(T)\xi + \int_0^T H(t)c(t)dt] = x, \tag{2.30}$$

wobei $x \in (0, \infty)$ das Startkapital ist und $c(\cdot)$ ein Konsumratenprozess entsprechend der Definition 2.2. Das Finanzmarktmodell ist genau dann vollständig, wenn jeder beschränkte Claim hedgebar ist. Diese Tatsachen und das Gelten der Bedingung (2.30) implizieren die Existenz einer selbst-finanzierenden von x finanzierten Portfoliostrategie

π zum Konsumprozess c, für deren Vermögensprozess $(V^{x,\pi,c}(t))_{0\leq t\leq T}$ gilt:

$$V^{x,\pi,c}(T) = \xi \quad f.\,s. \tag{2.31}$$

Da eine selbst-finanzierende Portfoliostrategie martingalerzeugend[12] ist, kann π so gewählt werden, dass der Prozess $(M(t))_{0\leq t\leq T}$, definiert wie in der Gleichung (2.28), ein $\mathcal{F}(t)$-Martingal ist, vgl. [Dec06, S. 216][13]. Dies erweist sich für die Herleitung der Gestalt des dazugehörigen Vermögensprozesses in (2.29), in dem nächsten Schritt des Beweises, als sehr nützlich. Die soeben hergeleitete Martingaleigenschaft von M liefert die folgende Bedingung:

$$\underbrace{H(t)V^{x,\pi,c}(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds}_{=M(t)} = \mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(s)c(s)ds \middle| \mathcal{F}(t)\right]. \tag{2.32}$$

Aus der Gestalt des Prozesses $(H(t))_{0\leq t\leq T}$ in (2.7) geht hervor, dass dieser zu allen Zeitpunkten der Handelsperiode strikt positiv ist. Durch das Umstellen der obigen Gleichung nach $V^{x,\pi,c}$ wird der Vermögensprozess für alle $0 \leq t \leq T$ eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned}
V^{x,\pi,c}(t) &= \frac{1}{H(t)}\left(\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(s)c(s)ds \middle| \mathcal{F}(t)\right] - \underbrace{\int_0^t H(s)c(s)ds}_{\mathcal{F}(t)-messbar}\right)\\
&= \frac{1}{H(t)}\left(\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(s)c(s)ds - \int_0^t H(s)c(s)ds \middle| \mathcal{F}(t)\right]\right)\\
&= \frac{1}{H(t)}\left(\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_t^T H(s)c(s)ds \middle| \mathcal{F}(t)\right]\right).
\end{aligned}$$

In dem nächsten Schritt wird die explizite Gestalt von π hergeleitet, die dazu dient, dass der Prozess (2.28) ein Martingal ist. Dies geschieht mit Hilfe des Martingaldarstellungssatzes, vgl. [KS91, S. 182]. Da der Prozess in (2.32) ein Martingal bezüglich der von

[12] Die Bestimmung der expliziten Gestalt eines solches Portfolioprozesses, der diese Eigenschaft erfüllt, wird weiter unten durchgeführt.

[13] Im [Dec06, Satz 11.5, S. 216] soll beachtet werden, dass der Satz für eine Handelsstrategie φ formuliert ist. Da ein Portfolioprozess π sich durch eine solche Handelsstrategie durch $\pi(\cdot) = \varphi(\cdot)P(\cdot)$ darstellen lässt, kann der Satz an dieser Stelle verwendet werden.

einem Wiener Prozess erzeugten Filtration $(\mathcal{F}(t))_{0\leq t\leq T}$ ist, existiert nach dem Martingaldartellungssatz ein $\mathbb{R}^n$-wertiger previsibler Prozess
$(\psi(t))_{0\leq t\leq T} = \left((\psi_1(t), ..., \psi_n(t))^\top\right)_{0\leq t\leq T}$ mit

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\psi(t)\|^2 dt < \infty\right) = 1 \tag{2.33}$$

und

$$M(t) = x + \int_0^t \psi(s)^\top dW(s) \quad f.\,s. \tag{2.34}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Insbesondere besitzt der Prozess $(M(t))_{0\leq t\leq T}$ stetige Pfade und damit auch der Vermögensprozess $V^{x,\pi,c}$.

Um die explizite Gestalt des Prozesses $(\psi(t))_{0\leq t\leq T}$ zu bestimmen, was anschließend die Darstellung von π liefert, werden die Gleichungen (2.23) und (2.34) gleichgesetzt. Es ergibt sich:

$$x + \int_0^t H(s)\left[\pi^\top(s)\sigma(s) + V(t)\vartheta^\top(s)\right] dW(s) = x + \int_0^t \psi^\top(s) dW(s)$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Dann muss ψ so gewählt werden, dass

$$\psi^\top(t) = H(t)\left[\pi(t)^\top\sigma(t) + V(t)\vartheta(t)^\top\right] \tag{2.35}$$

fast überall gilt. Da $H(t)\sigma(t) > 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ ist, ist dies nur im Fall von

$$\pi(t) = \left(\sigma(t)^{-1}\right)^\top \left(\frac{\psi(t)}{H(t)} - V(t)\vartheta(t)\right). \tag{2.36}$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gegeben. Für diese Portfoliostrategie erfüllt der Vermögensprozess $V^{x,\pi,c}$ die Gleichung (2.23) und somit auch die Vermögensgleichung (2.17), was gleichzeitig die Selbstfinanzierung von π zum Konsumprozess c impliziert. Das und die Tatsache, dass $V^{x,\pi,c}(t) \geq 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ in (2.29), führen zu $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$.

Es bleibt zu zeigen, dass (π, c) von der Form (2.36) ein Portfolioprozess im Sinne von der Definition 2.3 ist. Die progressive Messbarkeit von π folgt aus der progressiven Messbarkeit der einzelnen Komponenten der Formel (2.36). Mit entsprechender Begründung folgt ebenfalls, dass $\pi \in \mathbb{R}^n$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} &i) \int_0^T |\pi^\top(t)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)|dt < \infty \\ &ii) \int_0^T \|\sigma^\top(t)\pi(t)\|^2 dt < \infty \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dies wird durch die Anwendung der Minkowski- und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, vgl. [Als07, S. 45], gezeigt:

$$\begin{aligned} i) \int_0^T |\pi^\top(t)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)|dt &= \int_0^T \left|\sigma(t)^{-1}\left(\frac{\psi^\top(t)}{H(t)} - V^{x,\pi,c}(t)\vartheta^\top(t)\right)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)\right|dt \\ &\overset{(2.4)}{=} \int_0^T \left| -\frac{\psi^\top(t)\vartheta(t)}{H(t)} + V^{x,\pi,c}(t)\|\vartheta(t)\|^2\right|dt \\ &\overset{M.U.}{\leq} \int_0^T \left|\frac{-\psi^\top(t)\vartheta(t)}{\underbrace{H(t)}_{>0}}\right| + |\underbrace{V^{x,\pi,c}(t)}_{>0}\|\vartheta(t)\|^2|dt \\ &\overset{C.S.U.}{\leq} \left\|\frac{\beta(t)}{L(t)}\right\|_\infty \|\psi^\top(t)\|_2\|\vartheta(t)\|_2 + \|V^{x,\pi,c}(t)\|_\infty\|\vartheta(t)\|_2^2 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Aus de vorhergehenden Abschnitten sind folgende Bedingungen gegeben:

- $\int_0^T \beta(t)dt < \infty$ f. s. nach (2.1),
- $\int_0^T \|\psi(t)\|^2 dt < \infty$ f. s. nach (2.33),
- $\int_0^T V^{x,\pi,c}(t)dt \leq \max_{0\leq t\leq T} V^{x,\pi,c}(t) < \infty$ f. s. wegen der Stetigkeit von $V^{x,\pi,c}(\cdot)$ auf $[0, T]$,
- $\int_0^T \|\vartheta(t)\|^2 dt < \infty$ f. s nach (2.6).

$L(t)$ ist stetig und positiv auf $[0,T]$, also gilt für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$:

$$|L(t)| \geq \min_{0 \leq t \leq T} L(s) > 0 \tag{2.38}$$

und somit

$$\int_0^T \frac{1}{|L(t)|} dt \leq \int_0^T \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} L(t)} dt \overset{(2.38)}{<} \infty$$

Durch das Zusammen dieser Eigenschaften führt es zu der Endlichkeit von der Darstellung in (2.37:

$$\int_0^T |\pi^\top(t)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)|dt < \infty \quad f.s.$$

Entsprechend wird für ii) vorgegangen:

$$\begin{aligned} ii) \int_0^T \|\sigma^\top(t)\pi(t)\|^2 dt &= \int_0^T \|\sigma^\top(t)(\sigma(t)^\top)^{-1} \left(\frac{\psi(t)}{H(t)} - V(t)\vartheta(t)\right) \|^2 dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{H(t)^2} \|\psi(t) - H(t)V(t)\vartheta(t)\|^2 dt \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{H(t)^2} \left[\|\psi(t)\|_2^2 + \|\psi(t)\|_2 \|\vartheta\|_2 \|H \cdot V^{x,\pi,c}\|_\infty + \|\vartheta\|_2^2\right] \|H \cdot V^{x,\pi,c}\|_\infty \\ &< \infty \end{aligned}$$

Somit wurde die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Es sei angemerkt, dass das Vermögen und der Konsum in Geldbeträgen gemessen werden, die objektiv für alle gleich sind, aber von dem Wert abweichen können, den ein Investor diesen Beträgen subjektiv zuordnet. Im Fall von mehreren Investoren kann es vorkommen, dass derselbe Geldbetrag je nach Investor unterschiedlich bewertet oder geschätzt wird. Um mit solchen Werten arbeiten zu können, bedarf es der Formulierung des Konzepts der Nutzenfunktion. Diese beschreibt den Grad der Wertschätzung oder, anders ausgedrückt, den subjektiven Wert eines bestimmten Geldbetrags. Anschließend soll die dual konjugierte Funktion eingeführt werden, die ebenfalls für die Anwendung der Methoden zur Lösung des optimalen Portfolios von Bedeutung ist.

2.4. Die Nutzenfunktion

Definition 2.6 (**Nutzenfunktion**)
Eine stetige Funktion $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die streng monoton wachsend, strikt konkav und stetig differenzierbar ist, heißt **Nutzenfunktion**, wenn sie die Bedingungen:

$$U'(0+) := \lim_{x \searrow 0} U'(x) = +\infty, \tag{2.39}$$

$$U'(\infty) := \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0 \tag{2.40}$$

erfüllt.

Die Monotonie der Nutzenfunktion findet in der Realität eine sinnvolle Erklärung. Für einen Investor, dessen Präferenzen sich durch solche Nutzenfunktion repräsentieren lassen, ist ein höheres x immer zu bevorzugen, da einem höheren Einsatz an Geld mehr Nutzen beigemessen wird.

Die strikte Konkavität und die Bedingungen (2.39) und (2.40) implizieren das strikte Fallen der Ableitung U'. Dies entspricht einem abnehmenden Grenznutzen, was bedeutet, dass der Zuwachs an Nutzen aus dem Konsum einer zusätzlichen Geldeinheit mit steigendem x abnimmt. Beim Einbringen von einer infinitesimal kleinen Summe Anfangskapital ist ihr Nutzen unendlich groß, er nimmt aber mit dem steigenden Kapital ab und verschwindet ganz beim Einsatz einer unendlich großen Summe Geld. Ein weiterer Zufluss von Vermögen wird daher keinen zusätzlichen Nutzen bringen. Dieses Phänomen wird als Sättigungseffekt bezeichnet.

In Beispiel 2.1 sind einige Funktionen aufgeführt, die aufgrund ihrer Eigenschaften klassischerweise als Nutzenfunktionen verwendet werden.

Beispiel 2.7

- Logarithmische Nutzenfunktion:

$$U(x) = log(x), \quad x \in (0, \infty)$$

- Potenz-Nutzenfunktion:

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad f\ddot{u}r\ p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\},\ x \in (0, \infty).$$

- Exponentielle Nutzenfunktion:

$$U(x) = -\frac{1}{p}\exp(-px), \quad x \in (0, \infty),\ p \in (0, \infty).$$

Die **Inverse der Ableitung der Nutzenfunktion** wird mit $I(\cdot)$ bezeichnet und hat die Form:

$$I(\cdot) := (U')^{-1}(\cdot).$$

Da U nach Definition stetig differenzierbar und strikt konkav ist, ist deren Ableitung U' stetig und streng monoton fallend. Ferner ist das Bild der Funktion U' das Intervall $(0, \infty)$. Diese Eigenschaften implizieren die Bijektivität von U' und somit auch die Existenz einer Umkehrfunktion $(U')^{-1} = I$. Offensichtlich ist $I : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine streng monoton fallende, stetige, positive Funktion mit:

$$I(0+) = (U')^{-1}(0+) \overset{(2.39)}{=} \infty, \tag{2.41}$$

$$I(\infty) = (U')^{-1}(\infty) \overset{(2.40)}{=} 0. \tag{2.42}$$

Wie bereits erwähnt, wird für die Herleitung des optimalen Portfolios das Konzept der dual konjugierten Funktion benötigt. Diese wird im Folgenden definiert.

Definition 2.8 (**Die dual konjugierte Funktion**)

Sei $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion wie in der Definition 2.6. Dann ist die **dual konjugierte Funktion** von U definiert durch:

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x \in (0,\infty)} [U(x) - xy], \quad y \in (0, \infty) \tag{2.43}$$

Die Eigenschaften einer dual konjugierten Funktion $\tilde{U}$ werden im folgenden Satz beschrieben.

Satz 2.9

Sei U eine Nutzenfunktion im Sinne der Definition 2.6. Dann gilt für ihre dual konjugierte: $\tilde{U}$ ist eine konvexe und stetig differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$\tilde{U}(0+) = \lim_{y \searrow 0} \tilde{U}(y) = U(\infty) = \lim_{x \to \infty} U(x) \tag{2.44}$$

$$\tilde{U}(\infty) = \lim_{y \to \infty} \tilde{U}(y) = U(0+) = \lim_{x \searrow 0} U(x) \tag{2.45}$$

$$\tilde{U}'(y) = -I(y), \; y \in (0, \infty) \tag{2.46}$$

$$U(x) = \inf_{y \in (0,\infty)} [\tilde{U}(y) + xy] = \tilde{U}(U'(x)) + xU'(x), \; x \in (0, \infty) \tag{2.47}$$

Insbesondere wird das Supremum in (2.43) durch die Inverse Funktion von U' erreicht, das heißt

$$\tilde{U}(y) = U(I(y)) - yI(y), \; y \in (0, \infty). \tag{2.48}$$

Der Beweis dieses Satzes und die Berechnung der dual konjugierten Funktion für die im Beispiel 2.7 formulierten Nutzenfunktionen kann in [Has10, S. 6 ff.] nachgeschlagen werden.

Für den Nutzen eines Anlegers ist nicht nur die Konsummenge von Bedeutung, sondern auch der Zeitpunkt des Konsums, beispielsweise wenn die Verzinsung des Vermögens zeitlichen Schwankungen unterliegt. In so einem Fall kann die Nutzenfunktion um eine zeitliche Variable ergänzt werden.

Definition 2.10 (**Zeitabhängige Nutzenfunktion**)
Eine Funktion $U: [0,T] \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wird **zeitabhängige Nutzenfunktion** genannt, wenn sie stetig in der ersten Variablen, einmal stetig differenzierbar in der zweiten Variablen, sowie für alle $t \in [0,T]$ eine Nutzenfunktion im Sinne der Definition 2.6 ist.

Ein Beispiel für eine solche zeitabhängige Nutzenfunktion ist:

$$U(t,x) = \exp(-pt)U(x)$$

für alle $t \in [0,T]$, ein fixes $x \in (0,\infty)$ und $p \in (-\infty,\infty)$.

Die Inverse von $U'(t,\cdot,)\ 0 \leq t \leq T$ wird als $I(t,\cdot)$ bzw. die dual konjugierte der zeitabhängigen Nutzenfunktion $U(t,\cdot),\ 0 \leq t \leq T$ als $\tilde{U}(t,\cdot)$ bezeichnet.

3. Das zeitstetige Portfolioproblem

3.1. Formulierung des Portfolioproblems

Kapitel 3 hat zum Ziel, das Portfolioproblem für ein vorgegebenes Finanzmarktmodell mathematisch zu formulieren und gleichzeitig das zentrale Instrument zur Lösung des Optimierungsproblems vorzustellen. Hierfür dienen [KS98] und [Kar97] als Literaturquellen.

Im Folgenden wird ein Investor betrachtet, der ein fest vorgegebenes Anfangskapital $x > 0$ besitzt und der seine Investment- und Konsumentscheidungen stetig in der Zeit trifft. Dieser handelt als Preisnehmer[1] auf dem Markt. Das Ziel des Investors ist es, einen möglichst vorteilhaften Zahlungsstrom zu erhalten. Es gilt herauszufinden, welche Anzahl an Anteilen von einem bestimmten Finanzgut zu jedem Zeitpunkt der Handelsperiode optimal ist und wie das Vermögen in dem Handelszeitraum konsumiert werden soll, damit das vorgegebene Ziel erreicht wird. Mit anderen Worten: der Investor sucht zu einem festen Anfangskapital $x > 0$ ein zulässiges, selbst-finanzierendes Paar aus Portfolio- und Konsumprozess, das den erwarteten Nutzen aus Endvermögen, oder den erwarteten Nutzen aus dem Konsum über die ganze Periode des Handelns, oder die Kombination dieser beiden Größen maximiert. Es handelt sich demzufolge um ein **dynamisches Optimierungsproblem**, wobei das Wort „dynamisch" die Rolle des Zeitfaktors unterstreicht. Abgesehen von der Vollständigkeit des Finanzmarktmodells, ist das Marktmodell relativ allgemein und die Betrachtung stochastischer, nicht unbedingt markovschen Marktkoeffizienten, ist zugelassen. Im Folgenden werden die mathematischen Formulierungen des

[1] Das heißt, der Investor kann die Preise auf dem Markt nicht beeinflussen, sondern akzeptiert sie lediglich.

beschriebenen Problems vorgestellt, vgl. [Kar97, Probleme 2.1.4.- 2.1.6., S. 35].

Problem 3.1 (**Nutzen aus dem Endwert**)

Es sei $U_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, definiert wie in Definition 2.6 und $x > 0$ das Startkapital. Gesucht ist ein optimales Paar $(\pi_1^{opt}, c_1^{opt}) \in \mathcal{A}_1(x)$, das den erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen zum Zeitpunkt T maximiert, d. h. die zu maximierende Größe ist durch:

$$J_1(x) := \sup_{(\pi,c) \in \mathcal{A}_1(x)} \mathbb{E}\left[U_1(V^{x,\pi,c}(T))\right] \tag{3.1}$$

über der Menge

$$\mathcal{A}_1(x) := \left\{(\pi, c) \in \mathcal{A}(x) | \ \mathbb{E}\left[U_1^-(V^{x,\pi,c}(T))\right] < \infty\right\}. \tag{3.2}$$

gegeben.

Problem 3.2 (**Nutzen aus dem Gesamtkonsum**)

Es sei $x > 0$ das Startkapital und $U_2 : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine zeitabhängige Nutzenfunktion, wie in Definition 2.10. Gesucht ist ein optimales Paar $(\pi_2^{opt}, c_2^{opt}) \in \mathcal{A}_2(x)$, das den erwarteten Nutzen aus dem Gesamtkonsum, der sich aus den Entnahmen während der ganzen Handelsperiode entsteht, maximiert, d. h. die zu maximierende Größe ist durch:

$$J_2(x) := \sup_{(\pi,c) \in \mathcal{A}_2(x)} \mathbb{E}\left[\int_0^T U_2(t, c(t))dt\right] \tag{3.3}$$

über der Menge

$$\mathcal{A}_2(x) := \left\{(\pi, c) \in \mathcal{A}(x) | \ \mathbb{E}\left[\int_0^T U_2^-(t, c(t))dt\right] < \infty\right\}. \tag{3.4}$$

gegeben.

Bemerkung 3.3 Die sich aus den Darstellungen von $\mathcal{A}_1(x)$ und $\mathcal{A}_2(x)$ ergebenden Bedingungen

$$\mathbb{E}\left[U_1^-(V^{x,\pi,C}(T))\right] < \infty, \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T U_2^-(t, c(t))dt\right] < \infty$$

schließen einen unendlichen erwarteten Wert zu Lasten des Investors aus. Das heißt der Investor wird aufgrund seiner risikoaversen Einstellung nur solche Portfolio- und Konsumstrategien verfolgen, die seinen erwarteten Verlust beschränken.

Problem 3.4 (**Nutzen aus dem Endwert und dem Gesamtkonsum**)
Seien $x > 0$ das Startkapital, $U_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, wie in Definition 2.6 und $U_2 : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine zeitabhängige Nutzenfunktion, wie in Definition 2.10. Gesucht ist ein optimales Paar $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}_3(x)$, das den erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen zum Zeitpunkt T und dem erwarteten Nutzen aus dem Gesamtkonsum, der sich aus den Entnahmen während der ganzen Handelsperiode ergibt, maximiert, d. h. die zu maximierende Größe ist durch:

$$J_3(x) := \sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}_3(x)} \mathbb{E}\left[U_1(V^{x,\pi,c}(T)) + \int_0^T U_2(t, c(t))dt\right] \tag{3.5}$$

über der Menge

$$\mathcal{A}_3(x) := \mathcal{A}_1(x) \cap \mathcal{A}_2(x). \tag{3.6}$$

gegeben.

Die Aufgabe ist es somit, ein optimales Paar $\left(\pi_i^{opt}, c_i^{opt}\right) \in \mathcal{A}_i(x),\ i = 0, 1, 2$ aus einem Portfolio- und einem Konsumprozess für jedes der oben genannten Probleme jeweils zu finden, das das jeweilige Supremum erreicht. Die Lösung für das Problem 3.4 wird im nächsten Abschnitt hergeleitet, während die Probleme 3.1 und 3.2 separat im letzten Abschnitt behandelt werden.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, gibt es unterschiedliche bekannte Ansätze zur Lösung des Problems 3.4. Der von Merton vorgeschlagene Ansatz [Mer69] basiert auf der stochastischen Kontrolltheorie. Er löst das zeitstetige Portfolioproblem mit endlichem und unendlichem Zeithorizont in einem Finanzmarktmodell mit $n + 1$ Investmentmöglichkeiten: einem risikofreien Geldmarktkonto und n risikobehafteten Wertpapieren. Die Preise der Wertpapiere werden von einem n-dimensionalem Wiener Prozess getrieben. Die Marktkoeffizienten sind als konstant vorausgesetzt. Die optimale Lösung wird mithilfe der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung [Fli09, S. 251] berechnet. Es werden weiterhin zusätzliche Einflüsse auf die Portfoliooptimierung, motiviert durch die Betrachtungen aus der Realität, untersucht. Zu diesen gehören die Transaktionskosten [DN90], der Bankrott [Set97], die stochastische Zinsratenentwicklung [KK01], die stochastische Volatilität [FHH03] und weitere diverse Markteinflüsse. Auf weitere Ausführungen zu der Thematik des Optimierungsproblems mit Hilfe der stochastischen Steuerung wird an dieser Stelle verzichtet und auf das Buch von Kraft [Kra04] verwiesen.

Der zweite bekannte Ansatz zur Lösung des Portfolioproblems ist der in [Pli86], [KLS87], [CH89] und anderen Arbeiten präsentierte Martingalansatz, der die Aufspaltung des Problems in zwei Unterprobleme vorschlägt. Die optimale Lösung des Portfolioproblems basiert auf der Martingaltheorie und der Theorie der stochastischen Analysis. Das Konzept und die etablierte Handhabung dieser Methode soll den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit darstellen.

3.2. Die Martingalmethode

Ziel dieses Abschnitts ist die Einführung der Martingalmethode, deren Anwendung sowie schrittweise Erarbeitung der Lösung des optimalen Portfolioproblems. Der Satz 3.8 und Korollar 3.9 fassen die wichtigen Ergebnisse dieses Kapitels zusammen und werden anschließend auf die logarithmische Nutzenfunktion und auf die Potenz-Nutzenfunktion mit deterministischen Marktkoeffizienten angewandt, was zu der expliziten Darstellung des optimalen Portfolios führt.

Die Grundidee der Martingalmethode ist die Aufspaltung des zeitlich dynamischen

Portfolioproblems 3.4 in ein statisches Optimierungsproblem und ein Darstellungsproblem. Im ersten Schritt wird ein Paar bestimmt, das aus der optimalen Endauszahlung und dem optimalen Konsumprozess besteht, die den erwarteten Nutzen maximieren. Im zweiten Schritt wird ein Hedge für diese Auszahlung konstruiert, der aufgrund der vorausgesetzten Vollständigkeit des Models existiert.

Zunächst wird die mathematische Formulierung der oben erwähnten Aufspaltung eingeführt und im Anschluss daran die Idee dieser diskutiert.

Problem 3.5 (**Das statische Optimierungsproblem**)
Zu bestimmen ist der Wert

$$\sup_{(\xi,c)\in\mathcal{B}(x)} \mathbb{E}[U_1(\xi) + \int_0^T U_2(t, c(t))dt].$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{B}(x)$ die Menge aller Paare (ξ, c) mit:

- der Konsumprozess c ist definiert wie in der Definition 2.2,
- ξ ist ein nicht-negativer, $\mathcal{F}_T$- messbarer Claim,
- der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis des Claims ξ zum Konsumprozess c, der mit $p_0(\xi, c)$ bezeichnet wird, darf das Startkapital x nicht überschreiten, das heißt $p_0(\xi, c) \leq x$,
- das Paar (ξ, c) erfüllt die Bedingung $\mathbb{E}\left[U_1^-(\xi) + \int_0^T U_2^-(t, c(t))dt\right] < \infty$.

Problem 3.6 (**Das Darstellungsproblem**)
Gesucht ist eine Portfoliostrategie π^{opt} mit:

- $\pi^{opt} \in \mathcal{A}_1(x)$,
- $V^{x,\pi^{opt},c^{opt}}(T) = \xi^{opt}$ f. s.,
- ξ^{opt} löst das statische Optimierungsproblem 3.5.

Bemerkung 3.7

Der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis eines Claims ξ unter Einbeziehung des Konsumprozesses c ist im vorgegebenen vollständigen Finanzmarktmodell mit der erwarteten abdiskontierten Endauszahlung bezüglich $\mathbb{P}^*$ gleichzusetzen, vgl. [Dec06, S. 233]:

$$\begin{aligned} p_0(\xi, c) &= \mathbb{E}^* \left[\beta(T)^{-1}\xi + \int_0^T \beta^{-1}(s)c(s)ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[L(T) \left(\beta(T)^{-1}\xi + \int_0^T \beta^{-1}(s)c(s)ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\beta(T)^{-1}L(T)\xi + \int_0^T \beta^{-1}(s)L(s)c(s)ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[H(T)\xi + \int_0^T H(s)c(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Somit kann die Menge $\mathcal{B}(x)$ folgendermaßen umschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x) = \Bigg\{ (\xi, c) | \; c \; wie \; in \; 2.2, \; \xi \geq 0, \; \mathcal{F}_T - messbar, \mathbb{E} \left[H(T)\xi + \int_0^T H(t)c(t)dt \right] \leq x, \\ \mathbb{E} \left[U_1^-(\xi) + \int_0^T U_2^-(t, c(t))t \right] < \infty \Bigg\} \end{aligned}$$

Satz 2.5 liefert die Äquivalenz des Problems 3.4 mit der Maximierung des Wertes $\mathbb{E}\left[U_1(\xi) + \int\limits_0^T U_2(t, c(t))dt\right]$ über alle Paare $(\xi, c) \in$, definiert wie oben, falls die Bedingung

$$\mathbb{E} \left[H(T)\xi + \int\limits_0^T H(t)c(t)dt \right] = x \tag{3.7}$$

für $x \in (0, \infty)$ erfüllt ist. Somit kann das dynamische Optimierungsproblem durch ein statisches, mit der oben genannten Nebenbedingung (3.7), substituiert werden. Das heißt statt der Maximierung über alle selbst-finanzierenden zulässigen Paare (π, c) in (3.5), deren Zusammensetzung zu jedem Zeitpunkt der Handelsperiode bestimmt werden muss, wird über alle Endauszahlungen ξ zum Konsumprozess c zum Zeitpunkt T maximiert, welche die Bedingung (3.7) erfüllen.

Durch das Lösen des Darstellungsproblems 3.6 wird der Prozess der Optimierung vervollständigt. Dieser Schritt beschäftigt sich mit der Suche nach einem Portfolioprozess, der die Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.5 repliziert.

Beide vorgestellten Probleme können mit Hilfe der konvexen Analysis und der Finanzmathematik gelöst werden. Eine geeignete Herangehensweise für die Lösung des statischen Optimierungsproblems liefert die Imitation des Lagrangeansatzes, dessen Prinzip im Folgenden näher erläutert wird.

Für eine allgemeine Beschreibung der Lagrange-Methode werden zunächst die zu untersuchenden Funktionen eingeführt. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine strikt konkave, einmal stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine konvexe und ebenfalls einmal stetig differenzierbare Funktion. x^{opt} löst genau dann das Optimierungsproblem

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} h(x)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

wenn ein **Lagrange-Multiplikator** $\lambda^{opt} \in \mathbb{R}^m$ existiert, so dass $(x^{opt}, \lambda^{opt}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ die Nullstelle der Ableitung der **Lagrange-Funktion**

$$L(x, \lambda) = h(x) - \lambda' g(x) \tag{3.8}$$

ist. Auf diese Weise führt das Gleichsetzen der partiellen Ableitungen mit Null zur optimalen Lösung. So ist x^{opt} der eindeutige Maximierer des Optimierungsproblems.

Im Fall, dass der Vektor des Lagrange-Multiplikators $\lambda^{opt} \in \mathbb{R}^m$ nur aus nicht-negativen Einträgen besteht, löst x^{opt} sogar das Problem

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} h(x)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x) \leq 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Auf eine ähnliche Art und Weise wird nun das gestellte statische Optimierungsproblem 3.5 gelöst. Dafür gilt der oben vorgestellte Lagrange-Ansatz als Motivation zu dem Vorgehen für die Suche der Lösung.

3.2.1. Maximierung des erwarteten Nutzens aus dem Endwert und Konsum

Speziell auf das bereits formulierte statische Optimierungsproblem 3.5 angewendet, wird für ein fest vorgegebenes Anfangskapital x die Maximierung des erwarteten Nutzens

$$\mathbb{E}\left[U_1(\xi) + \int_0^T U_2(t, c(t))dt\right]$$

über das Paar (ξ, c), bestehend aus einem Konsumprozess $c(\cdot)$ und einer nicht-negativen, $\mathcal{F}(T)$-messbaren Zufallsvariable ξ, unter der **Budgetrestriktion** als Nebenbedingung

$$\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(t)c(t)dt\right] \leq x \tag{3.9}$$

als Ziel gesetzt.

Sei nun $\lambda > 0$ ein Lagrange-Multiplikator, so kann das oben genannte Optimierungsproblem mit Nebenbedingung auf die Maximierung des Ausdrucks ohne Nebenbedingung reduziert werden[2]:

$$\mathbb{E}\left[U_1(\xi) + \int_0^T U_2(t, c(t))dt\right] - \lambda\left(\mathbb{E}\left[H(T)\xi + \int_0^T H(t)c(t)dt\right] - x\right).$$

Durch eine Umstellung dieses Ausdrucks unter Verwendung der Linearität des Erwartungswertes kann die Struktur der dual konjugierten Funktionen von U_1 und U_2 mittels

[2] Der unten vorgestellte Ausdruck entspricht der rechten Seite der Lagrange-Funktion (3.8).

Definition (2.43) hergeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[U_1(\xi)+\int_0^T U_2(t,c(t))dt\right]-\lambda\left(\mathbb{E}\left[H(T)\xi+\int_0^T H(t)c(t)dt\right]-x\right)\\
&=\mathbb{E}\left[U_1(\xi)-\lambda H(T)\xi\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(U_2(t,c(t))-\lambda H(t)c(t)\right)dt\right]+x\lambda\\
&\leq \mathbb{E}\left[\tilde{U}_1(\lambda H(T))+\int_0^T \tilde{U}_2(t,\lambda H(t))dt\right]+x\lambda.
\end{aligned}
$$

Aus der Definition der dual konjugierten Funktionen $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$ und dem Satz 2.9 kann gefolgert werden, dass die letzte Ungleichung nur dann durch eine Gleichheit ersetzt werden kann, wenn

$$\xi = I_1(\lambda H(T)) \quad und \quad c(t) = I_2(t,\lambda H(t)),\ 0\leq t\leq T \tag{3.10}$$

erfüllt ist. Die Substituierung dieser Werte in die Budgetbedingung mit dem Gleichheitszeichen (3.7):

$$\mathcal{X}_3(\lambda) := \mathbb{E}\left[H(T)I_1(\lambda H(T))+\int_0^T H(t)I_2\left(t,\lambda H(t)\right)dt\right]=x \tag{3.11}$$

ermöglicht die Charakterisierung des Lagrange-Multiplikators. Es sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{X}_3(\cdot)$ reellwertig und $\mathcal{X}_3(\lambda)<\infty$, für alle $\lambda\in(0,\infty)$, ist. Ferner ist diese Funktion stetig, streng monoton fallend und bildet das Interval $(0,\infty)$ auf sich selbst ab [KS98, S. 101], mit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_3(0+) &:= \lim_{\lambda\searrow 0}\mathcal{X}_3(y)=\infty,\\
\mathcal{X}_3(\infty) &:= \lim_{\lambda\to\infty}\mathcal{X}_3(y)=0.
\end{aligned}
$$

Es sei $\mathcal{Y}$ die inverse Funktion von $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}(\cdot):=\mathcal{X}^{-1}(\cdot)$. Da diese existiert und streng monoton fallend auf $(0,\infty)$ ist, vgl. [KS98, S. 101], kann der eindeutige Lagrange-Multiplikator wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \mathcal{X}^{-1}(x) = \mathcal{Y}(x).$$

Somit ist $\lambda = \mathcal{Y}(x)$ der einzige Wert von $\lambda > 0$ für das Paar in (3.10), so dass die Budgetbedingung mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist. Das Eingesetzen von $\lambda = \mathcal{Y}(x)$ in die Darstellungen von (3.10) liefert die optimalen Werte für das Endvermögen und den Konsumprozess:

$$\xi_3^{opt} = I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)), \tag{3.12}$$

$$c_3^{opt}(t) = I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)),\ 0 \le t \le T. \tag{3.13}$$

Aus der Gleichung (3.11) und $\mathcal{X}_3(\mathcal{Y}(x)) = x$ ergibt sich die Gleichheitsanforderung:

$$\mathbb{E}\left[H(T)\xi_3^{opt} + \int_0^T H(t)c_3^{opt}(t)dt\right] = \mathcal{X}_3(\mathcal{Y}(x)) = x. \tag{3.14}$$

Für die Vervollständigung des Lösens des statischen Optimierungsproblems muss zum Schluss überprüft werden, ob $(\xi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{B}(x)$ ist. Durch die Stetigkeit der Inversen $I_1(t)$ bzw. $I_2(t, \cdot)$, für alle $t \in [0, T]$, ist die $\mathcal{F}(T)$-Messbarkeit von ξ_3^{opt} und $\mathcal{F}(t)$-Messbarkeit von $c^{opt}(t)$, für alle $t \in [0, T]$, gegeben. Außerdem ist die Inverse I_2 endlich, was die Gültigkeit der Integrierbarkeitsbedingung für den Konsumprozess (2.14) impliziert. Ferner sind ξ_3^{opt} und $c_3^{opt}(\cdot)$ nicht-negativ, da die Funktionen I_1 und I_2 positiv sind.

Die letzte Bedingung

$$\mathbb{E}\left[U_1^-(\xi^{opt}) + \int_0^T U_2^-(t, c^{opt}(t))dt\right] < \infty, \tag{3.15}$$

die von den Elementen der Menge $\mathcal{B}(x)$ zu erfüllen ist, wird im Beweis von Satz 3.8 gezeigt.

Auf diese Weise wurde ein optimales Paar $(\xi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{B}(x)$ gefunden, dass das statische Optimierungsproblem 3.5 löst. Das nächste Ziel ist das Darstellungsproblem 3.6, dessen Lösung aus dem Satz 3.8 und dem Korollar 3.9 hervorgeht. An dieser Stelle ist anzumerken, dass aufgrund der Gültigkeit der Bedingung (3.14) der Satz 2.5 die Existenz eines selbst-finanzierenden optimalen Portfolioprozesses π_3^{opt} mit $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}(x)$ und $V^{x,\pi_3^{opt},c_3^{opt}}(T) = \xi_3^{opt}$ fast sicher impliziert.

Satz 3.8

Für ein fest vorgegebenes Startkapital $x \in (0, \infty)$ und die Gültigkeit der Bedingungen

$$\mathcal{X}_3(\lambda) < \infty, \quad \lambda \in (0, \infty), \tag{3.16}$$

$$\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right] < \infty. \tag{3.17}$$

sei die optimale Endauszahlung ξ_3^{opt} bzw. der optimale Konsumprozess $c_3^{opt}(\cdot)$ gegeben durch[3]:

$$\xi_3^{opt} = I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)), \tag{3.18}$$

$$c_3^{opt}(t) = I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)), \; 0 \le t \le T. \tag{3.19}$$

Sei $\pi_3^{opt}(\cdot)$ ein Portfolioprozess, so dass $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}(x)$[4] und $V^{x,\pi_3^{opt},c_3^{opt}}(T) = \xi_3^{opt}$ fast sicher erfüllt sind[5]. Dann ist

$$(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}_3(x)$$

und (π_3^{opt}, c_3^{opt}) ist optimal für das gestellte Problem 3.4. Das heißt, es gilt:

$$J_3(x) = \mathbb{E}\left[U_1(V^{opt}(T)) + \int_0^T U_2(t, c_3^{opt}(t))dt\right].$$

[3]Unter der Annahme der Gültigkeit der Bedingung (3.16) stellen die Formulierungen (3.18) und (3.19) die Lösung des statischen Problems 3.5 dar. Die Begründung dazu erfolgt vor dem Satz 3.8.
[4]Die Existenz eines solchen Portfolioprozess folgt aus dem Satz 2.5 und der Bedingung (3.14).
[5]Setze im Folgenden: $V^{opt}(\cdot) := V^{x,\pi_3^{opt},c_3^{opt}}(\cdot)$.

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, dass $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}_3(x)$ ist. Das heißt die folgenden Eigenschaften müssen gelten:

a) $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}(x)$,

b) $\mathbb{E}\left[U_1^-(V^{opt}(T)) + \int_0^T U_2^-(t, c_3^{opt}(t))dt\right] < \infty$.

Da $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}(x)$ als Voraussetzung für den Satz gegeben ist, muss die Eigenschaft a) nicht gezeigt werden. Für den Beweis von b) ist die Voraussetzung $V^{opt}(T) = \xi_3^{opt}$ fast sicher und die Definition von der dual konjugierten Funktionen 2.43 von Nutzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
U_1(\xi_3^{opt}) &= U_1(I_1(\mathcal{Y}(x)H(T))) \\
&= \tilde{U}_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) + \mathcal{Y}(x)H(T)I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) \\
&\geq U_1(1) - \mathcal{Y}(x)H(T) + \mathcal{Y}(x)H(T)I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) \\
&= U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)\left(I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) - 1\right) \\
&= U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)\left(\xi_3^{opt} - 1\right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
U_2(t, c_3^{opt}(t)) &= U_2(t, I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t))) \\
&= \tilde{U}_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) + \mathcal{Y}(x)H(t)I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) \\
&\geq U_2(t, 1) - \mathcal{Y}(x)H(t) + \mathcal{Y}(x)H(t)I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) \\
&= U_2(t, 1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) - 1) \\
&= U_2(t, 1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - 1)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Die erste Umformung der jeweiligen Gleichung entsteht durch das Anwenden der Bedingung (2.33), die zweite durch Verwenden der Eigenschaft (2.48) und die dritte Ungleichung geht aus dem Benutzen der Definition 2.43 hervor. Um nun die

Bedingung b) zu zeigen, muss das Folgende beachtet werden: für $a \le b$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ gilt

$$b^- \le a^- \le |a|. \tag{3.22}$$

Angewandt auf die Gleichungen (3.20) und (3.21) ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_1^-(\xi_3^{opt}) &\le \left(U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)\left(\xi_3^{opt} - 1\right)\right)^- \\ &\le |U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)(\xi_3^{opt} - 1)| \end{aligned} \tag{3.23}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} U_2^-(t, c_3^{opt}(t)) &\le \left(U_2(t,1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - 1)\right)^- \\ &\le |U_2(t,1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - 1)| \end{aligned} \tag{3.24}$$

für alle $0 \le t \le T$. Dies liefert für den Erwartungswert der Summe dieser beiden Eigenschaften Folgendes:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[U_1^-(\xi_3^{opt}) + \int_0^T U_2^-(t, c_3^{opt}(t))dt\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[\left|U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)(\xi_3^{opt} - 1)\right| + \int_0^T \left|U_2(t,1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - 1)\right| dt\right]. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Dreiecksungleichung führt zu:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left|U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)(\xi_3^{opt} - 1)\right| + \int_0^T \left|U_2(t,1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - 1)\right| dt\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[|U_1(1)| + |\mathcal{Y}(x)H(T)\xi_3^{opt}| + |\mathcal{Y}(x)H(T)|\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^T |U_2(t,1)| + |\mathcal{Y}(x)H(t)c_3^{opt}(t)| + |\mathcal{Y}(x)H(t)|dt\right] \end{aligned}$$

Die Linearität des Erwartungswertes und die anschließende Umstellung der obigen Ungleichung liefert:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|U_1(1) + \mathcal{Y}(x)H(T)(\xi_3^{opt} - 1)\right| + \int_0^T \left|U_2(t,1) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - 1)\right| dt\right] \\
&= |U_1(1)| + \int_0^T |U_2(t,1)|dt + \mathcal{Y}(x)\underbrace{\mathbb{E}\left[H(T)\xi_3^{opt} + \int_0^T H(t)c_3^{opt}(t)dt\right]}_{=x \text{ nach } (3.14)} \\
&+ \mathcal{Y}(x)\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right] \\
&= |U_1(1)| + \int_0^T |U_2(t,1)|dt + \mathcal{Y}(x)x + \mathcal{Y}(x)\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right] \\
&\le \underbrace{|U_1(1)|}_{<\infty} + \underbrace{\int_0^T |U_2(t,1)|\, dt}_{<\infty} + \underbrace{\mathcal{Y}(x)}_{<\infty}\underbrace{\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right]}_{<\infty \text{ nach } (3.17)} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Somit wurde die Eigenschaft b) gezeigt, und infolgedessen $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}_3(x)$.

Um nachzuweisen, dass dieses Paar tatsächlich (π^{opt}, c^{opt}) optimal ist, wird zunächst ein beliebiges Paar $(\pi, c) \in \mathcal{A}_1(x)$ gegeben. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
U_1(\xi_3^{opt}) &= U_1(I_1(\mathcal{Y}(x)H(T))) \\
&= \tilde{U}_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) + \mathcal{Y}(x)H(T)I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) \\
&\ge U_1(V^{x,\pi,c}(T)) - \mathcal{Y}(x)H(T)V^{x,\pi,c}(T) + \mathcal{Y}(x)H(T)I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) \\
&= U_1(V^{x,\pi,c}(T)) + \mathcal{Y}(x)H(T)\left(I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) - V^{x,\pi,c}(T)\right) \\
&= U_1(V^{x,\pi,c}(T)) + \mathcal{Y}(x)H(T)\left(\xi_3^{opt} - V^{x,\pi,c}(T)\right) \quad f.s. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
U_2(t, c_3^{opt}(t)) &= U_2(t, I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t))) \\
&= \tilde{U}_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) + \mathcal{Y}(x)H(t)I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) \\
&\geq U_2(t, c(t)) - \mathcal{Y}(x)H(t)c(t) + \mathcal{Y}(x)H(t)I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) \\
&= U_2(t, c(t)) + \mathcal{Y}(x)H(t)(I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) - c(t)) \\
&= U_2(t, c(t)) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - c(t)), \quad f.s. \;\; 0 \leq t \leq T. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Genauso wie oben, entsteht die erste Umformung der jeweiligen Gleichung durch das Anwenden der Bedingung (2.33), die zweite durch Verwenden der Eigenschaft (2.48) und die dritte Ungleichung geht aus dem Benutzen der Definition 2.43 hervor. Die Linearität des Erwartungswertes liefert das Folgende:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[U_1(\xi_3^{opt}) + \int_0^T U_2(t, c_3^{opt}(t))dt\right] \geq \mathbb{E}\Big[U_1(V^{x,\pi,c}(T)) + \mathcal{Y}(x)H(T)\left(\xi_3^{opt} - V^{x,\pi,c}(T)\right) \\
&+ \int_0^T \left(U_2(t, c(t)) + \mathcal{Y}(x)H(t)(c_3^{opt}(t) - c(t))\right) dt\Big] \\
&= \mathbb{E}\left[U_1(V^{x,\pi,c}(T)) + \int_0^T U_2(t, c(t))dt\right] \\
&+ \mathcal{Y}(x)\underbrace{\mathbb{E}\left[H(T)\xi_3^{opt} + \int_0^T H(t)c_3^{opt}(t)dt\right]}_{=x} - \mathcal{Y}(x)\underbrace{\mathbb{E}\left[H(T)V^{x,\pi,c}(T) + \int_0^T H(t)c(t)dt\right]}_{\leq x} \\
&\geq \mathbb{E}\left[U_1(V^{x,\pi,c}(T)) + \int_0^T U_2(t, c(t))dt\right].
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung resultiert aus der Darstellung (3.14) und der Budgetrestriktion (3.9) für ein beliebiges Paar $(\pi, c) \in \mathcal{A}_3(x)$. Somit ist die Optimalität des Paares $(\pi_3^{opt}, c_3^{opt}) \in \mathcal{A}_3(x)$ bewiesen. □

Zu beachten ist, dass die Bedingung $J_3(x) < \infty$ die Eindeutigkeit der Optimierer folgert, vgl. [KS98, S. 104].

Das nachfolgende Korollar gibt die Gestalt der optimalen Portfoliostrategie und des dazugehörigen Vermögensprozesses an.

Korollar 3.9

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.8 ist der optimale Wertprozess $V^{opt}(t) := V^{x,\pi_3^{opt},c_3^{opt}}(t)$, für alle $t \in [0,T]$, von der Gestalt

$$V^{opt}(t) = \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) + \int_t^T H(s)I_2(s,\mathcal{Y}(x)H(s))ds|\mathcal{F}(t)\right]. \tag{3.27}$$

Ferner ist die optimale Portfoliostrategie π_3^{opt} gegeben durch:

$$\pi_3^{opt}(t) = (\sigma^\top)^{-1}(t)\left(\frac{\psi_3(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta(t)\right),\ 0 \le t \le T, \tag{3.28}$$

wobei σ die $n \times n$-Volatilitätsmatrix und ϑ den Marktpreis des Risikos beschreiben. Der Prozess $\psi_3(\cdot)$ ist der Integrand der stochastischen Integraldarstellung[6] $M_3(t) = x + \int_0^t \psi_3^\top(s)dW(s)$ des Martingals

$$M_3(t) = H(t)V^{opt}(t) + \int_0^t H(s)c_3^{opt}(s)ds \tag{3.29}$$

Beweis:

Die entsprechende Formel für den Vermögensprozess zum Zeitpunkt t, mit $0 \le t \le T$, entsteht durch das Einsetzen der Ausdrücke aus Gleichung (3.12) bzw (3.13) für ξ_3^{opt} bzw. c_3^{opt} in die Darstellung des zugehörigen Wertprozesses $V^{x,\pi,c}$ aus der Darstellung (2.29). Der restliche Teil des Beweises entspricht dem Beweis von Satz 2.5 und kann somit übernommen werden. $\square$

Auf diese Art wurde das Optimierungsproblem 3.4 mit Hilfe der Martingalmethode gelöst. Durch die Berechnung der Werte für π_3^{opt} bzw. c_3^{opt} lassen sich Zahlen ermitteln, die den Anleger Auskunft darüber geben, wie er sein Vermögen optimal aufteilt bzw. konsumiert. Da π_3^{opt} ein n-dimensionaler Vektor ist, vgl. Definition 2.3, werden dem Anleger mit

[6] Diese Darstellung ergibt sich aus dem Martingaldarstellungssatz. Siehe dazu den Beweis zum Satz 2.5.

den Vektorkomponenten n einzelne optimale Investitionen in die entsprechenden Finanzgüter gegeben. Der optimale Teil des Vermögens, der in das Geldmarktkonto investiert werden soll, kann durch die Formel (2.13) bestimmt werden. Der Investor ist nun in der Lage die optimale Portfolio- und Konsumstrategie im vorausgesetzten Finanzmarktmodell zu wählen, um zu einem für ihn optimalen Wert am Ende der Handelsperiode zu gelangen.

3.2.2. Anwendung auf die logarithmische Nutzenfunktion

Die Anwendung der durch die Martingalmethode gewonnenen Resultate wird in den nachfolgenden Unterabschnitten an zwei Beispielen verdeutlicht. Es werden konkret die logarithmische und die Potenz-Nutzenfunktion betrachtet.

Es seien

$$U_1(x) = U_2(t,x) = \log x, \; \textit{für alle } (t,x) \in [0,T] \times (0,\infty)$$

Nutzenfunktionen im Sinne von Definitionen 2.6 und 2.10. Ferner sei die Bedingung

$$\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right] < \infty$$

gegeben. Dann gilt für die Inversen der Ableitungen dieser Funktionen:

$$I_1(\lambda) = I_2(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \; \lambda \in (0,\infty). \tag{3.30}$$

Diese sind streng monoton fallend, positiv und stetig in $\lambda \in (0, \infty)$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
I_1(0+) &= \lim_{\lambda \searrow 0} I_1(\lambda) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{1}{\lambda} = +\infty \\
I_1(\infty) &= \lim_{\lambda \nearrow \infty} I_1(\lambda) = \lim_{\lambda \nearrow \infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \\
I_2(t, 0+) &= \lim_{\lambda \searrow 0} I_2(t, \lambda) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{1}{\lambda} = +\infty \\
I_2(t, \infty) &= \lim_{\lambda \nearrow \infty} I_2(t, \lambda) = \lim_{\lambda \nearrow \infty} \frac{1}{\lambda} = 0.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von $\mathcal{X}$ werden die Resultate für I_1 und I_2 in die Formel (3.11) eingesetzt, was zu der folgenden Gestalt von $\mathcal{X}$ führt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_3(\lambda) &= \mathbb{E}\left[H(T) I_1(\lambda H(T)) + \int_0^T H(t) I_2(t, \lambda H(t)) dt\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[H(T) \underbrace{\frac{1}{\lambda H(T)}}_{>0} + \int_0^T H(t) \underbrace{\frac{1}{\lambda H(t)}}_{>0} dt\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} T\right] = \frac{1}{\lambda}(T+1), \ \ \lambda \in (0, \infty).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Eine wichtige Voraussetzung für die weitere Anwendung der Martingalmethode ist die Bedingung $\mathcal{X}_3 < \infty$. Diese ist aufgrund der Gestalt (3.31) für $\lambda \in (0, \infty)$ und $T < \infty$ erfüllt. Für die Inverse von $\mathcal{X}_3$ folgt:

$$\mathcal{Y}(x) = \mathcal{X}_3^{-1}(x) = \frac{T+1}{x}, \quad x \in (0, \infty). \tag{3.32}$$

Diese ist ebenfalls streng monoton fallend in $x \in (0, \infty)$. Mit Darstellungen (3.30) und (3.32) lassen sich der optimale Endwert zum Zeitpunkt T

$$\xi_3^{opt} = I_1(\mathcal{Y}(x) H(T)) \ = I_1\left(\frac{T+1}{x} H(T)\right) \ = \frac{x}{(T+1) H(T)}, \tag{3.33}$$

und der optimale Konsumprozess

$$c_3^{opt}(t) = I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) = I_2\left(t, \frac{T+1}{x}H(t)\right) = \frac{x}{(T+1)H(t)} \tag{3.34}$$

für alle $0 \leq t \leq T$ berechnen. Dabei ist anzumerken, dass die Nenner der beiden Gleichungen nie Null werden können, da der Prozess H zu jedem Zeitpunkt der Handelsperiode und der Multiplikator $(T+1)$ strikt positiv sind. Auf diese Weise wurde die optimale Endauszahlung und der optimale Konsumprozess im Fall der logarithmischen Nutzenfunktion hergeleitet.

Die obigen Berechnungen in (3.33) und (3.34) ermöglichen über die Formel (3.27) die Bestimmung des zugehörigen Vermögensprozesses zum Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned}
V^{opt}(t) &= \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[\left(H(T)\xi_3^{opt} + \int_t^T H(s)c_3^{opt}(s)ds\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[\left(H(T)\underbrace{\frac{x}{(T+1)H(T)}}_{>0} + \int_t^T H(s)\underbrace{\frac{x}{(T+1)H(s)}}_{>0}ds\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[\left(\underbrace{\frac{x}{(T+1)}}_{>0} + \underbrace{\frac{x}{(T+1)(T-t)}}_{>0 \text{ für } t\neq T}\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \frac{x}{H(t)(T+1)}(T-t+1)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

für alle $t \in [0, T)$ und $V^{opt}(T) = \xi_3^{opt}$ für $t = T$. Auf diese Weise kann der optimale Vermögenswert zu jedem Zeitpunkt der Handelsperiode berechnet werden. Dieser Wert wird ebenfalls, wie im Korollar 3.9 beschrieben, bei der Berechnung des optimalen Portfolios benötigt.

Durch das Einsetzen der in (3.35) und (3.34) ermittelten Werte in das Martingal $M(\cdot)$ aus (3.29) kann schließlich der spezifizierte Ausdruck für den optimalen Portfolioprozess gewonnen werden. Das Martingal $M(\cdot)$ ergibt sich für alle $0 \leq t \leq T$ und $x \in (0, \infty)$ als:

$$\begin{aligned}
M(t) &= H(t)V^{opt}(t) + \int_0^t H(s)c_3^{opt}(s)ds \\
&= H(t)\frac{x\ (T-t+1)}{H(t)\ (T+1)} + \int_0^t H(s)\frac{x}{T+1}H(s)ds \\
&= \frac{x\ (T-t+1)}{T+1} + \frac{x\ t}{T+1} \\
&= x. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Auch hier ist anzumerken, dass die Nenner strikt positiv sind. Das Gleichsetzten des Resultats (3.36) aus der vorhergehenden Berechnung von M mit seiner stochastischen Integraldarstellung[7]:

$$M(t) = x + \int_0^t \psi(s)^\top dW(s)$$

liefert $\psi(\cdot) \equiv 0$. Durch das Einsetzen von $\psi(\cdot) \equiv 0$ in die Gleichung von π_3^{opt} in (3.28) lässt sich die Formel für den optimalen Portfolioprozess bestimmen:

$$\begin{aligned}
\pi_3^{opt}(t) &= (\sigma^\top(t))^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta(t)\right) \\
&= -(\sigma^\top(t))^{-1}V^{opt}(t)\vartheta(t) \\
&\overset{(2.4)}{=} (\sigma(t)\sigma^\top(t))^{-1}(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)V^{opt}(t),\ 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel wurden die optimale Portfolio- und Konsumstrategie bestimmt, die für einen Fall gelten, in dem die Präferenzen des Anlegers bezüglich der Anlage, der Konsummenge, sowie des Konsumzeitpunktes durch eine einfache logarithmische Funktion modelliert sind. Diese geben dem Investor die optimale Aufteilung seines Vermögens in die jeweiligen Finanzgüter, sowie die bestmögliche Konsumgröße zu jedem Zeitpunkt der Handelsperiode an.

[7] Diese Darstellung ergibt sich aus dem Martingaldarstellungssatz. Siehe dazu den Beweis zum Satz 2.5.

Bemerkung 3.10

Falls für die optimale Portfoliostrategie $({\pi_3}^{opt})_5(t)$ der Wert a Geldeinheiten resultiert, so sollte für das bestmögliche Ergebnis a Geldeinheiten des Gesamtvermögens zum Zeitpunkt t, für alle $t \in [0, T]$, in das Finanzgut Nr. 5 investiert werden. Der Wert, der sich für die optimale Konsumstrategie ergibt, wie z. B. $c_3^{opt}(t) = b$, weist auf den optimalen Konsum hin, b Geldeinheiten, der zum Zeitpunkt t getätigt werden sollte, damit in Kombination mit der erhaltenen Portfoliostrategie der maximale Nutzen erzielt wird.

3.2.3. Anwendung auf die Potenz-Nutzenfunktion

Ziel dieses Unterabschnitts ist wie oben die Anwendung der Martingalmethode. Hierbei steht die Bestimmung der allgemeinen Formeln für das optimale Paar (π_3^{opt}, c_3^{opt}) unter der Voraussetzung einer Potenz-Nutzenfunktion im Vordergrund. Dabei wird die Betrachtung in diesem Unterabschnitt auf den Fall der deterministischen Marktkoeffizienten $r(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ beschränkt.

Es seien für alle $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)$ und $p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$

$$U_1(x) = U_2(t, x) = \frac{1}{p} x^p$$

Nutzenfunktionen im Sinne von Definition 2.6 und 2.10. Ferner sei die Bedingung

$$\mathbb{E}\left[H(T) + \int_0^T H(t)dt\right] < \infty$$

gegeben. Dann gilt für die Inversen der Ableitungen dieser Funktionen, die für die Berechnung des optimalen Portfolios erforderlich sind:

$$I_1(\lambda) = I_2(t, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.37}$$

für alle $\lambda \in (0, \infty)$, $p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$ und $t \in [0, T]$ Diese sind streng monoton fallend, positiv und stetig in $\lambda \in (0, \infty)$ mit

$$I_1(0+) = \lim_{\lambda \searrow 0} I_1(\lambda) = \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{1}{p-1}} = +\infty \tag{3.38}$$

$$I_1(\infty) = \lim_{\lambda \nearrow \infty} I_1(\lambda) = \lim_{\lambda \nearrow \infty} \lambda^{\frac{1}{p-1}} = 0 \tag{3.39}$$

$$I_2(t, 0+) = \lim_{\lambda \searrow 0} I_2(t, \lambda) = \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{1}{p-1}} = +\infty \tag{3.40}$$

$$I_2(t, \infty) = \lim_{\lambda \nearrow \infty} I_2(t, \lambda) = \lim_{\lambda \nearrow \infty} \lambda^{\frac{1}{p-1}} = 0. \tag{3.41}$$

Für die Berechnung von $\mathcal{X}_3$ werden die Ergebnisse für I_1 und I_2 in die Formel (3.11) eingesetzt, was zur folgenden Form führt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_3(\lambda) &= \mathbb{E}\left[H(T)I_1(\lambda H(T)) + \int_0^T H(t)I_2(t, \lambda H(t))dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H(T)(\lambda H(T))^{\frac{1}{p-1}} + \int_0^T H(t)(\lambda H(t))^{\frac{1}{p-1}}dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\lambda^{\frac{1}{p-1}} + \int_0^T H(t)^{\frac{p}{p-1}}\lambda^{\frac{1}{p-1}}dt\right] \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}} + \int_0^T H(t)^{\frac{p}{p-1}}dt\right] \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\mathcal{X}_3(1), \quad \lambda \in (0, \infty).
\end{aligned}$$

Angenommen, die Bedingung $\mathcal{X}_3 < \infty$ ist erfüllt[8]. Für die Inverse von $\mathcal{X}_3$ gilt für alle $x \in (0, \infty)$:

$$\mathcal{Y}(x) := \mathcal{X}_3^{-1}(x) = \left(\frac{x}{\mathcal{X}_3(1)}\right)^{p-1}. \tag{3.42}$$

Diese ist streng monoton fallend in x. Mit der Inversen $\mathcal{Y}$ und der Darstellung (3.37) lassen sich der optimale Endwert zum Zeitpunkt T

$$\xi_3^{opt} = I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) \;= \frac{x}{\mathcal{X}_3(1)}H(T)^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.43}$$

[8] Dies wird weiter unten geprüft.

und der optimale Konsumprozess

$$c_3^{opt}(t) = I_2(t, \mathcal{Y}(x)H(t)) = \frac{x}{\mathcal{X}_0(1)} H(t)^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.44}$$

für alle $0 \leq t \leq T$ berechnen. Dabei ist anzumerken, dass die Nenner der Gleichungen (3.42) - (3.44) nie Null werden können, da der Prozess H zu jedem Zeitpunkt der Handelsperiode und der zweite Faktor $(T+1)$ strikt positiv sind. Auf diese Weise wurde die optimale Endauszahlung und der optimale Konsumprozess im Fall der Potenz-Nutzenfunktion hergeleitet.

Für den dazugehörigen Vermögensprozess zum Zeitpunkt $t,\ 0 \leq t < T$, der sich durch das Einsetzen von (3.43) und (3.44) in die Formel (3.27) ergibt, gilt:

$$\begin{aligned}
V^{opt}(t) &= \frac{1}{H(t)} \mathbb{E}\left[\left(H(T)\xi_3^{opt} + \int_t^T H(s) c_3^{opt}(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= \frac{1}{H(t)} \mathbb{E}\left[\left(H(T) \frac{x}{\mathcal{X}_3(1)} H(T)^{\frac{1}{p-1}} + \int_t^T H(s) \frac{x}{\mathcal{X}_3(1)} H(s)^{\frac{1}{p-1}} ds \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= \underbrace{\frac{x}{\mathcal{X}_3(1) H(t)}}_{\neq 0,\ da\ H > 0} \mathbb{E}\left[\left(H(T)^{\frac{p}{p-1}} + \int_t^T H(s)^{\frac{p}{p-1}} ds \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Für die weitere Bestimmung des Vermögensprozesses V^{opt} ist die Berechnung von $H(t)^{\frac{p}{p-1}}$ erforderlich. Durch eine Ergänzung der Gleichung um Null lässt sich $H(t)^{\frac{p}{p-1}}$, für alle $0 \leq t \leq T$, durch einen Produkt aus einem Martingal und einem deterministischen Teil darstellen:

$$\begin{aligned}
H(t)^{\frac{p}{p-1}} &= \exp\left[\frac{p}{p-1}\left(\int_0^t \vartheta^\top(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds - \int_0^t r(s)ds\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{p}{p-1}\int_0^t \vartheta^\top(s)dW(s) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{(p-1)^2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\frac{p^2}{(p-1)^2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds - \frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds - \int_0^t r(s)ds\right)\right] \\
&= \underbrace{\exp\left[\frac{p}{p-1}\int_0^t \vartheta^\top(s)dW(s) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{(p-1)^2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds\right]}_{:=\Lambda(t)} \\
&\quad \cdot \underbrace{\exp\left[\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds - \frac{p}{p-1}\int_0^t r(s)ds\right]}_{:=m(t)} \\
&= \Lambda(t)m(t). \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Da $r(\cdot)$ und $\vartheta(\cdot)$ deterministisch sind, ist $m(\cdot)$ ebenfalls deterministisch und $\Lambda(\cdot)$ ist ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$[9]. Diese Tatsache, die Linearität des bedingten Erwartungswertes und der Satz von Fubini [Als07, S. 306] ermöglichen die Berechnung des bedingten Erwartungswertes in (3.45) für alle $t \in [0, T]$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(H(T)^{\frac{p}{p-1}} + \int_t^T H(s)^{\frac{p}{p-1}} ds\right)\middle|\mathcal{F}(t)\right] &= \mathbb{E}\left[m(T)\Lambda(T) + \int_t^T m(s)\Lambda(s)ds\middle|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= m(T)\underbrace{\mathbb{E}\left[\Lambda(T)|\mathcal{F}(t)\right]}_{=\Lambda(t),\ daMart.} + \int_t^T m(s)\mathbb{E}\left[\Lambda(s)|\mathcal{F}(t)\right] ds \\
&= \Lambda(t)\left[m(T) + \int_t^T m(s)ds\right]. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Für die weitere Bestimmung der spezifischen Gestalt des Vermögensprozesses V^{opt} in (3.45), wird die Berechnung von $\mathcal{X}_3(1)$ benötigt. Dies erfolgt entsprechend dem Vorgehen

[9] Gilt aufgrund der Bedingung (2.5).

für den bedingten Erwartungswert. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_3(1) &= \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}} + \int_0^T H(t)^{\frac{p}{p-1}} dt\right] = \mathbb{E}\left[\Lambda(T)m(T) + \int_0^T \Lambda(t)m(t)dt\right] \\
&= m(T) \underbrace{\mathbb{E}\left[\Lambda(T)\right]}_{=\mathbb{E}[\Lambda(0)]=1} + \int_0^T \underbrace{\mathbb{E}\left[\Lambda(t)\right]}_{=\mathbb{E}[\Lambda(0)]=1} m(t)dt \\
&= m(T) + \int_0^T m(t)dt =: N(T).
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Die benötigten Größen zur Bestimmung des Vermögensprozesses zum Zeitpunkt t, mit $0 \leq t \leq T$, in (3.45) sind ermittelt. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse (3.47) und (3.48) liefert:

$$
V^{opt}(t) = \frac{x\Lambda(t)}{N(T)H(t)} \left[m(T) + \int_t^T m(s)ds\right]
\tag{3.49}
$$

für alle $t \in [0, T)$ und $V^{opt}(T) = \xi_3^{opt}$. Durch das Einsetzen der Darstellungen (3.49) und (3.44) in das Martingal M von (2.28) kann schließlich der spezifizierte Ausdruck für den optimalen Portfolioprozess gewonnen werden. Für das Martingal M gilt:

$$
\begin{aligned}
M(t) &= H(t)V^{opt}(t) + \int_0^t H(s)c_3^{opt}(s)ds \\
&= H(t)\frac{x\Lambda(t)}{N(T)H(t)} \left[m(T) + \int_t^T m(s)ds\right] + \int_0^t H(s)\frac{x}{\underbrace{\mathcal{X}_3(1)}_{=N(T)}} H(s)^{\frac{1}{p-1}}(s)ds \\
&= \frac{x}{N(T)} \left(\Lambda(t)\left[m(T) + \int_t^T m(s)ds\right] + \int_0^t H(s)^{\frac{p}{p-1}}(s)ds\right) \\
&= \frac{x}{N(T)} \left[\Lambda(t)\left(m(T) + \int_t^T m(s)ds\right) + \int_0^t m(s)\Lambda(s)ds\right],
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

für alle $0 \leq t \leq T$ und $x \in (0, \infty)$. Der nächste Schritt zur Bestimmung des optimalen

Portfolioprozesses ist die Aufstellung der stochastischen Differentialgleichung von $M(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
dM(t) &= \frac{x}{N(T)}\left(m(T)+\int_t^T m(s)ds\right)d\Lambda(t)\\
&= \frac{x}{N(T)}\left(m(T)+\int_t^T m(s)ds\right)\Lambda(t)\frac{p}{p-1}\vartheta^\top(t)\ dW(t)\\
&= \frac{x\Lambda(t)H(t)}{N(T)H(t)}\left(m(T)+\int_t^T m(s)ds\right)\frac{p}{p-1}\vartheta^\top(t)\ dW(t)\\
&= H(t)V^{opt}(t)\frac{p}{p-1}\vartheta^\top(t)\ dW(t), \quad 0\le t\le T. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Das Gleichsetzten der Gleichung (3.51) mit der stochastischen Differentialgleichung der Integraldarstellung von $M(\cdot)$[10]:

$$M(t) = x + \int_0^t \psi(s)^\top dW(s),$$

und zwar $dM(t) = \psi^\top(t)\ dW(t)$, führt zu

$$\psi(t) = H(t)V^{opt}\frac{p}{p-1}\vartheta(t), \qquad (3.52)$$

für alle $t\in[0,T]$ Durch das Einsetzen der Gestalt (3.52) für ψ in die Formel (3.28) für π_3^{opt} lässt sich die Formel für den optimalen Portfolioprozess für den Fall deterministischer $r(\cdot)$ und $\vartheta(\cdot)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\pi_3^{opt}(t) &= (\sigma^\top(t))^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta(t)\right)\\
&= (\sigma^\top(t))^{-1}\left(V^{opt}(t)\frac{p}{p-1}\vartheta(t) - V^{opt}(t)\vartheta(t)\right)\\
&= \frac{1}{p-1}\left(\sigma(t)\sigma^\top(t)\right)^{-1}(\mu(t)-r(t)\mathbb{1}_n)\,V^{opt}(t),\ 0\le t\le T.
\end{aligned}$$

Es wurde das optimale Paar (π_3^{opt}, c_3^{opt}) unter Berücksichtigung der Potenz-Nutzenfunktion in einem vollständigen Finanzmarkt mit deterministischer Zinsrate und dem deterministischen Marktrisiko berechnet. Die Interpretation der Ergebnisse ist im Bei-

[10]Diese Darstellung ergibt sich aus dem Martingaldarstellungssatz. Siehe dazu den Beweis zu dem Satz 2.5.

spiel der logarithmischen Nutzenfunktion erklärt worden, siehe Bemerkung 3.10.

Es bleibt die Bedingung $\mathcal{X}_3(\cdot) < \infty$ zu überprüfen. Hierfür wird die Berechnung in (3.46) nützlich sein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_3(\lambda) &= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\ \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}} + \int_0^T H(t)^{\frac{p}{p-1}} dt\right] \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\ \mathbb{E}\left[\Lambda(T)m(T) + \int_0^T \Lambda(t)m(t)dt\right] \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}}\ m(T)\ \underbrace{\mathbb{E}[\Lambda(T)]}_{=1,\ da\ Mart.} + \int_0^T m(t)\ \underbrace{\mathbb{E}[\Lambda(t)]}_{=1,\ da\ Mart.}\ dt && (3.53) \\
&< \infty, \quad \lambda \in (0,\infty). && (3.54)
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt aufgrund der Deterministik von m. Dabei sind $m(\cdot)$ und $\Lambda(\cdot)$ definiert wie in der Darstellung (3.46).

Als Nächstes werden im kommenden Abschnitt zwei wichtige Sätze zur Lösung der Probleme 3.1 und 3.2 angegeben. Die Bestimmung des optimalen Portfolios für diese Probleme entspricht der Herleitung für das Problem 3.4 im Abschnitt 3.2.1.

3.2.4. Separate Betrachtung des optimalen Nutzens aus dem Endwert und dem Konsum

In diesem Abschnitt werden die Probleme 3.1 und 3.2 unabhängig voneinander behandelt, in Anlehnung an die Arbeit von [KS98, S. 111 ff.]. Dabei wird unter den Voraussetzungen (2.9), (2.10) und $\mathcal{X}_3(\cdot) < \infty$ entsprechend dem obigen Verfahren der Maximierung des erwarteten Nutzens aus dem Endwert und dem Gesamtkonsum vorgegangen. Definiere

$$\mathcal{X}_1(\lambda) := \mathbb{E}\left[H(T)I_1(\lambda H(T))\right] \tag{3.55}$$

$$\mathcal{X}_2(\lambda) := \mathbb{E}\left[\int_0^T H(t)I_2(t,\lambda H(t))dt\right] \tag{3.56}$$

für $\lambda \in (0, \infty)$ und $0 \leq t \leq T$. Dann ist $\mathcal{X}_3(\cdot) = \mathcal{X}_1(\cdot) + \mathcal{X}_2(\cdot)$, vgl. Gleichung (3.11). Ferner wird mit $\mathcal{Y}_i(\cdot)$ die Inverse der stetigen, strikt monoton fallenden Funktion $\mathcal{X}_i(\cdot),\ i = 1, 2$ bezeichnet. Analog zum Satz 3.8 resultieren folgende Ergebnisse:

Satz 3.11 (**Maximierung des erwarteten Nutzens aus dem Endwert**)
Für ein fest vorgegebenes Startkapital $x > 0$ und die Gültigkeit der Bedingungen

$$\mathcal{X}_1(\lambda) < \infty \tag{3.57}$$

$$\mathbb{E}[H(T)] < \infty \tag{3.58}$$

wird das Problem 3.1 und die optimale Endauszahlung

$$\xi_1^{opt} := I_1(\mathcal{Y}_1(x)H(T)) \tag{3.59}$$

betrachtet. Dann existiert ein Portfolioprozess $\pi_1^{opt}(\cdot)$ mit $(\pi_1^{opt}, 0) \in \mathcal{A}_1(x)$, welches optimal für das Problem 3.1 ist. Der dazugehörige Vermögensprozess $V_1^{opt}(\cdot) := V^{x,\pi_1^{opt},0}(\cdot)$ ist durch

$$V_1^{opt}(t) = \frac{1}{H(t)} \mathbb{E}\left[H(T)\xi_1 | \mathcal{F}(t)\right], \tag{3.60}$$

für alle $t \in [0, T)$ und $V_1^{opt}(T) = \xi_1$ gegeben. Die optimale Portfoliostrategie $\pi_1^{opt}(\cdot)$ ist von der Gestalt:

$$\pi_1^{opt}(t) = \left(\sigma^\top(t)\right)^{-1} \left(\frac{\psi_1(t)}{H(t)} V_1^{opt}(t) \vartheta(t)\right), \tag{3.61}$$

für alle $t \in [0, T]$, wobei $\psi_1(\cdot)$ der Integrand der stochastischen Integraldarstellung[11]
$M_1(t) = x + \int_0^t \psi_1^\top(s)\, dW(s)$ des Martingals

$$M_1(t) = \mathbb{E}\left[H(T)\xi_1^{opt} | \mathcal{F}(t)\right],\ 0 \leq t \leq T \tag{3.62}$$

ist.

[11] Diese Darstellung ergibt sich aus dem Martingaldarstellungssatz. Siehe dazu den Beweis zum Satz 2.5.

Satz 3.12 (**Maximierung des erwarteten Nutzens aus dem Gesamtkonsum**)
Für ein fest vorgegebenes Startkapital $x > 0$ und die Gültigkeit der Bedingungen

$$\mathcal{X}_2(\lambda) < \infty,$$
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H(t)dt\right] < \infty$$

wird das Problem 3.2 und der optimale Konsumprozess

$$c_2^{opt} := I_2(t, \mathcal{Y}_2(x)H(T)),\ 0 \leq t \leq T \tag{3.63}$$

betrachtet. Dann existiert ein Portfolioprozess $\pi_2^{opt}(\cdot)$ mit $(\pi_2^{opt}, c_2^{opt}) \in \mathcal{A}_2(x)$, welches optimal für das Problem 3.2 ist. Der dazugehörige Vermögensprozess $V_2^{opt}(\cdot)$ ist durch

$$V_2(t) = \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[\int_t^T H(s)c_2^{opt}(s)ds \middle| \mathcal{F}(t)\right],$$

für alle $t \in [0, T]$ gegeben. Die optimale Portfoliostrategie $\pi_2^{opt}(\cdot)$ ist von der Gestalt:

$$\pi_2^{opt}(t) = \left(\sigma^\top(t)\right)^{-1}\left(\frac{\psi_2(t)}{H(t)}V_2^{opt}(t)\vartheta(t)\right),$$

für alle $t \in [0, T]$, wobei $\psi_2(\cdot)$ der Integrand der stochastischen Integraldarstellung[12] $M_2(t) = x + \int_0^t \psi_2^\top(s)\ dW(s)$ des Martingals

$$M_2(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^T H(t)c_2^{opt}(t)dt \middle| \mathcal{F}(t)\right],\ 0 \leq t \leq T$$

ist.

Die Beweise der beiden obigen Sätze entsprechen dem Beweis vom Satz 3.8 und werden aus diesem Grund hier nicht vorgeführt.

[12] Diese Darstellung ergibt sich ebenfalls aus dem Martingaldarstellungssatz. Siehe dazu den Beweis zum Satz 2.5.

Die nächste Frage, die sich hier stellt, ist die Bestimmung des optimalen Portfolios unter Betrachtung von stochastischen Marktkoeffizienten. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die stochastische Zinsentwicklung vorausgesetzt, was die Berechnung des optimalen Portfolios etwas komplizierter und gleichzeitig interessanter macht.

In den Kapiteln 4 und 5, wird ein Investor betrachtet, dessen Ziel die Maximierung des erwarteten Endwerts ist, vgl. Problem 3.1. Daher stehen ab jetzt nur die Resultate des Satzes 3.11 im Fokus. Die in den nächsten Kapiteln entwickelte Methode lässt sich aber auch auf ein Modell mit Entnahmen, also auf Problem 3.4 bzw. 3.2, erweitern.

In den folgenden beiden Kapiteln werden die speziellen Fälle der zugrunde liegenden Finanzgütern betrachtet. Erst wird angenommen, dass die zur Verfügung stehenden Finanzgüter im Finanzmarktmodell ein Bond und ein Geldmarktkonto sind. Die Beschränkung auf den eindimensionalen Fall macht die Berechnung überschaubarer und kann einwandfrei auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden. Weiter wird auch der gemischte Fall betrachtet, in dem mit einem Geldmarktkonto, einer Aktie und einem Bond gehandelt wird. Die Anwendung auf den mehrdimensionalen Fall ist ebenfalls unproblematisch.

Eine geschickte Durchführung der Martingalmethode in diesen beiden Kapiteln ermöglicht das Konzept des Forwardmartingalmaßes. Auf diese Art kann das optimale Portfolio für die ausgewählten Short-Rate-Modelle bestimmt werden.

4. Das Bond-Portfolioproblem in Short-Rate-Modellen

4.1. Grundlegende Annahmen des Modells

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einem speziellen Problem, dem sogenannten Bond-Portfolioproblem, in dem ein Investor die Möglichkeit besitzt, sein Vermögen in ein Geldmarktkonto und in eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in $T^* > T$, $T^* < \infty$ zu investieren. Sein Ziel ist die optimale Aufteilung des bestehenden Kapitals während der Handelsperiode $[0, T]$ auf diese Finanzgüter, so dass der maximal nützliche Endbetrag am Ende der Periode erreicht wird. In den folgenden Kapiteln geht es um die Lösung des Optimierungsproblems 3.1, das heißt, es wird ein Investor betrachtet, der keinen Konsum seines vorhandenen Vermögens während der Handelsperiode tätigen möchte. Mit anderen Worten wird der Konsumprozess bei mathematischen Formulierungen gleich Null gesetzt, $c \equiv 0$. Die im Folgenden hergeleitete Methode lässt sich auch auf die Modelle mit Entnahmen erweitern. Für die nächsten zwei Kapitel 4 und 5 wird zusätzlich vorausgesetzt, dass die Präferenzen des Investors sich durch eine Potenz-Nutzenfunktion darstellen lassen. Für den Einblick in die Anwendung der logarithmischen Nutzenfunktion auf das Bond-Portfolioproblem wird eine Bemerkung dazu das Kapitel abschließen.

Kraft und Korn [KK01] befassen sich ebenfalls mit der Optimierung des Bond-Portfolios, lösen es jedoch mit Hilfe der stochastischen Kontrolltheorie. Die Hamilton-Jakobi-Gleichung stellt dabei ein wesentliches Instrument seiner Arbeit dar. Hier dagegen wird die Lösung des Bond-Portfolioproblems mit der Martingalmethode hergeleitet. Die Ergebnisse des vorherigen Kapitels werden im Folgenden zur Anwendung kommen, ergänzt durch das sogenannte Forwardmartingalmaß, das ein hilfreiches Werkzeug für die Herleitung des Darstellungsproblems bildet.

Es werden für dieses Kapitel folgende Annahmen getroffen. Es wird ein arbitragefreies und vollständiges Finanzmarktmodell wie in Kapitel 2.1 mit einem Handelszeitraum $[0, T],\ T < \infty$, angenommen. Dem Anleger stehen, wie oben schon erwähnt, ein Geldmarktkonto und ein Bond mit Fälligkeit in $T^* > T$ zur Verfügung. Es wird die Lösung für den eindimensionalen Fall hergeleitet, die sich auf ein komplexeres Modell unter der Berücksichtigung von n T^*-Bonds, $n \in \mathbb{N}$, erweitern lässt. Im Folgenden wird $n = d = 1$ gesetzt. Der Informationsverlauf $(\mathcal{F}(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ ist die Wiener-Filtration eines eindimensionalen Wiener Prozesses $(W(t))_{0 \leq t \leq T^*}$.

Da das risikobehaftete Finanzgut in Form eines Bonds im Rentenmarkt ein wichtiges Finanzinstrument ist, wird im Folgenden der sogenannte Zero-Coupon-Bond definiert.

Definition 4.1 (**Zero Coupon Bond**)
Sei $\tilde{T} \in [0, T]$. Ein **Zero Coupon Bond bzw. Nullkuponanleihe** ist ein festverzinsliches Wertpapier mit fest vereinbarten Laufzeit $\tilde{T}$, das seinem Inhaber ohne laufende Kuponzahlungen eine Zahlung in Höhe von einer Geldeinheit zu dem Fälligkeitszeitpunkt sichert. Der Preis eines solchen Zero-Coupon-Bonds zum Zeitlunkt $t \leq \tilde{T} \leq T$ wird mit $B(t, \tilde{T})$ bezeichnet.

Das heißt, die Nullkuponanleihe wird von einem Teilnehmer im Finanzmarkt mit der Vereinbarung keine Kuponzahlungen bis zum Fälligkeitszeitpunkt zu bekommen gekauft. Solche Zero Coupon Bonds mit Laufzeit $\tilde{T}$ werden abkürzend auch als **$\tilde{T}$-Bonds** bezeichnet. Mit dem Prozess $(B(t, \tilde{T}))_{0 \leq t \leq \tilde{T} \leq T}$ wird die Wertentwicklung des $\tilde{T}$-Bonds beschrieben.

In einem Bondmarktmodell sind $\tilde{T}$-Bonds für alle $\tilde{T} \leq T$ die Basisfinanzgüter, bezüglich derer weitere Annahmen getroffen werden müssen. Es wird angenommen, dass

$$B(\tilde{T}, \tilde{T}) = 1 \tag{4.1}$$

ist. Das bedeutet, dass das Ausfallrisiko eines solchen Bonds gleich Null ist und sein Inhaber zum Zeitpunkt $\tilde{T}$ seine Geldeinheit garantiert bekommt.

Des weiteren wird angenommen, dass der Prozess $(B(t,\tilde{T}))_{0\leq t\leq\tilde{T}\leq T}$ ein positives Semimartingal mit stetigen Pfaden ist. Aus dieser Annahme folgt, dass eine sichere Auszahlung zum Zeitpunkt $\tilde{T}$ ohne Einsatz von Kapital unmöglich ist.

Ein Bondmarktmodell wird ausgehend von der Short Rate entwickelt. Für die Existenz dieser ist ferner anzunehmen, dass bei festem t der Bondpreis als Funktion der Fälligkeit $\tilde{T}$ differenzierbar in $\tilde{T}$ ist. Dann ist die Existenz der Short Rate gegeben und kann über die Preisentwicklung des Zero Coupon Bonds definiert werden:

$$r(t) = -\frac{\partial}{\partial\tilde{T}} \ln B(t,\tilde{T})_{|\tilde{T}=t},$$

für alle $t \in [0,\tilde{T}]$, mit $\tilde{T} \leq T$. Da die Herleitung dieser Gleichung für die betrachtete Fragestellung irrelevant ist, wird auf [Pau11, Teil III, Kapitel 1] verwiesen.

Die nächste Annahme zu dem Finanzmarktmodell betrifft den Zinssatz, der als stochastisch vorausgesetzt wird und dessen Modellierung hier mit Hilfe eines Short-Rate-Modells erfolgt. Die Entwicklung der Zinsstrukturmodelle wird hauptsächlich zur Berechnung der zukünftigen, zum aktuellen Zeitpunkt noch unsicheren Preise der Nullkuponanleihen durchgeführt. Das **Short-Rate-Modell** ist eine Art des Zinsstrukturmodells mit der Short Rate als aufklärende Variable. Sie ist der augenblickliche Zinssatz für ein infinitesimal kurzes Zeitinterval $[t, t+\Delta t]$, $0 \leq t \leq T$ und wird mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung modelliert[1]. Diese lässt sich durch einen Itô-Prozess [Dec06, S. 88] angeben[2]:

$$dr(t) = m(t, r(t))dt + \delta(t, r(t))W(t), \tag{4.2}$$

[1]Zu bemerken ist, dass die Short Rate kein am Markt beobachtbarer Zinssatz ist, was oft der Grund für die Betrachtung anderer Modelle mit der Verwendung der beobachtbaren Zinssätze ist (z. B. Libormarkt-Modelle).

[2]Zu detaillierten Ausführungen zu diesem Thema und zur Existenz der Lösung der in (4.2) angegebenen stochastischen Differentialgleichung wird hier auf Theorem 2.9., Seite 289, sowie Präposition 2.13, Seite 291 in [KS00] verwiesen.

für $t \in [0, T]$ mit $r(0) = r_0 > 0$, wobei

$$m : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t, r(t)) \mapsto m(t, r(t)), \tag{4.3}$$

$$\delta : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t, r(t)) \mapsto \delta(t, r(t)) \tag{4.4}$$

bezüglich beider Variablen messbare Funktionen sind.

Insbesondere gelten die Bedingungen:

$$\int_0^T |m(s, r(s))| ds < \infty, \tag{4.5}$$

$$\int_0^T \delta^2(s, r(s)) ds < \infty. \tag{4.6}$$

Um einen Einblick in die Short-Rate-Modelle zu geben, werden im Folgenden drei Beispiele für solche Zinsstrukturmodelle vorgestellt.

Beispiel 4.2 (**Die Short-Rate-Modelle**)

- **Das Vasicek-Modell** ist der Pionier der Short-Rate-Modelle, das von Oldrich Vasicek im Jahr 1977 zum ersten Mal publiziert wurde, vgl. [Vas77]. Ein praktischer Vorteil dieses Modells liegt in der expliziten Lösbarkeit der Short Rate r, was die Bestimmung der Preise der Zero Coupon Bonds ermöglicht. Die Short Rate selbst zeichnet sich im Modell durch die Mean-Reversion Eigenschaft aus, vgl. [BS04].

  Der Short-Rate-Prozess im Vasicek-Modell ist die Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung:

  $$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta d\overline{W}(t), \; 0 \leq t \leq T^*,$$

  mit $r(0) = r_0 > 0$, wobei b, a, δ strikt positive Konstanten sind und $\overline{W}(t)$ ein Wiener Prozess bzgl. des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}^*$ darstellt. Dabei steht b für die mean reversion rate, a für das mean reversion level und δ für die Diffusion.

  Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung für $r(\cdot)$ nimmt für alle $t \in [0, T]$

folgende Gestalt an:

$$r(t) = r_0 e^{-bt} + (1 - e^{-bt})a + \delta \int_0^t e^{-b(t-s)} d\overline{W}(s). \tag{4.7}$$

Für die Dynamik des T^*-Bonds zum Zeitpunkt t bzgl. $\mathbb{P}^*$ gilt:

$$dB(t, T^*) = B(t, T^*)(r(t)dt + \sigma(t, T^*)d\overline{W}(t)),\ 0 \leq s \leq T^*, \tag{4.8}$$

mit $B(0, T^*) = z > 0$ und der Volatilität

$$\sigma(t, T^*) = \frac{\delta}{b}(e^{-b(T^*-t)} - 1), \quad 0 \leq t \leq T^*. \tag{4.9}$$

Ein wesentlicher Nachteil des Vasicek-Modells liegt an den durch die Normalverteilung der Short Rate mit positiver Wahrscheinlichkeit auftretenden negativen Werten für $r(\cdot)$, was der Realität nicht entsprechen kann.

- **Das Ho-Lee-Modell** ist das erste arbitragefreie Zinsstrukturmodell, das im Jahre 1986 von T. Ho und S. B. Lee publiziert wurde, vgl. [HL86]. Der Short Rate Prozess im Ho-Lee-Modell wird als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dr(t) = b(t)dt + \delta d\overline{W}(t),\ 0 \leq t \leq T^*,$$

mit $r(0) = r_0 > 0$ modelliert. Dabei stellt δ eine strikt positive Konstante, $b(\cdot) > 0$ eine deterministische Funktion und $\overline{W}(t)$ einen Wiener Prozess bzgl. des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}^*$ dar.

Im Ho-Lee-Modell ist der Driftterm b nur eine Funktion in t, während dieser im Vasicek-Modell eine Funktion in t und der Short Rate r ist. Für die Dynamik des T^*-Bonds zum Zeitpunkt t bzgl. $\mathbb{P}^*$ gilt:

$$dB(t, T^*) = B(t, T^*)(r(t)\ dt + \sigma(t, T^*)\ d\overline{W}(t)),\ 0 \leq t \leq T^*,$$

mit $B(0,T^*) = z > 0$ und der Volatilität

$$\sigma(t,T^*) = -\delta \cdot (T^* - t), \quad 0 \leq t \leq T^*. \tag{4.10}$$

Wie bereits erwähnt, kann der Investor sein Vermögen in zwei Finanzgüter, in das Geldmarktkonto und den T^*-Bond, investieren. Die Entwicklung der Preisprozesse der beiden Finanzgüter ist durch die nachstehenden Itô-Prozesse [Dec06, S. 88] gegeben:

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t)r(t)dt, \quad \beta(0) = 1, \\ dB(t,T^*) &= B(t,T^*)[(\mu(t,T^*)dt + \sigma(t,T^*)dW(t))], \quad B(0,T^*) = 1, \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq T^*$, für die Short Rate $r(\cdot)$ sowie für die progressiv-messbaren Prozesse $(\mu(t,T^*))_{0\leq t\leq T^*}$ und $(\sigma(t,T^*))_{0\leq t\leq T^*}$ mit

$$\int_0^{T^*} |r(t)| + |\mu(t,T^*)| + \sigma^2(t,T^*) < \infty \quad f.\,s.$$

Es wird zusätzlich angenommen, dass ein Markt für die Nullkuponanleihen mit beliebiger Laufzeit $\tilde{T} \in (0,T]$ existiert. Die Preisprozesse solcher $\tilde{T}$-Bonds erfüllen die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dB(t,\tilde{T}) = B(t,\tilde{T})\ [\mu(t,\tilde{T})dt + \sigma(t,\tilde{T})dW(t)] \tag{4.11}$$

für $0 \leq t \leq \tilde{T} \leq T$ mit $B(0,\tilde{T}) = z_0 \in (0,\infty)$. Die Prozesse $\mu(t,\tilde{T})$ und $\sigma(t,\tilde{T})$ sind bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ progressiv-messbar und erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$\int_0^{\tilde{T}} |\mu(t,\tilde{T})|\ dt < \infty \quad f.\,s. \tag{4.12}$$

$$\int_0^{\tilde{T}} \sigma(t,\tilde{T})^2\ dt < \infty \quad f.\,s. \tag{4.13}$$

Es werden also zwei Arten von Bonds betrachtet. Der erste hat die Laufzeit T^*, mit

$T^* > T$, vgl. die Dynamik (4.8) und der zweite $\tilde{T} = T$, vgl. die Dynamik (4.11). Die Betrachtung eines T-Bonds wird für den Übergang zu dem Forwardmartingalmaß in der Definition 4.5 benötigt.

Bemerkung 4.3
Es wird vorausgesetzt, das der Volatilitätsprozess $(\sigma(t, T^*))_{0 \leq t \leq T^*}$ bzw. $(\sigma(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ für $T < T^*$ deterministisch ist.

Die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells ist äquivalent zur Existenz eines previsiblen Prozesses $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T^*}$, vgl. [Pau11], mit

$$\vartheta(t) = \frac{r(t) - \mu(t, T^*)}{\sigma(t, T^*)} = \frac{r(t) - \mu(t, T)}{\sigma(t, T)}$$

für alle $0 \leq t \leq T^*$ und

$$\mathbb{E} \ \exp\left(\int_0^{T^*} \vartheta(s) \ dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^{T^*} \vartheta(s)^2 \ ds \right) = 1. \tag{4.14}$$

Wie im ersten Kapitel bereits erwähnt, wird der Prozess $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ auch der **Marktpreis des Risikos** genannt und erfüllt

$$\int_0^{T^*} \vartheta(t)^2 dt < \infty \ f.s. \tag{4.15}$$

Bemerkung 4.4
Es wird angenommen, dass der Marktpreis des Risikos deterministisch ist. Zusammen mit der vorausgesetzten deterministischen Volatilität stellt dies beim Lösen des Darstellungsproblems im nächsten Abschnitt ein wichtiges Kriterium dar.

Das risikofreie äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$, dessen Existenz die Arbitragefreiheit impliziert, wird durch

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T^*}} = \exp\left(\int_0^{T^*} \vartheta(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T^*} |\vartheta(t)|^2 dt \right) =: L_{T^*}$$

definiert. Der Satz von Cameron, Martin, Girsanov, vgl. [Bjö04, Theorem 11.3], impliziert, dass

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds, \ 0 \leq t \leq T^* \tag{4.16}$$

ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$ ist. Damit können die Preisprozesse des T^*-Bonds und des T-Bonds bezüglich $\mathbb{P}^*$ durch die Dynamiken

$$dB(t,T^*) = B(t,T^*)\left[r(t)\ dt + \sigma(t,T^*)\ d\overline{W}(t)\right],$$
$$dB(t,T) = B(t,T)\left[r(t)\ dt + \sigma(t,T)\ d\overline{W}(t)\right]$$

beschrieben werden.

Die Vollständigkeit des Finanzmarktmodells impliziert die Invertierbarkeit des Volatilitätsprozesses σ und gleichzeitig die Eindeutigkeit des previsiblen Prozesses $(\vartheta(t))_{0\leq t\leq T^*}$ sowie die von $\mathbb{P}^*$. Um das gegebene Portfolioproblem 3.1 lösen zu können, wird das nachfolgende Forwardmartingalmaß benötigt.

Definition 4.5 (**Forwardmartingalmaß**)
Es sei $T < \infty$ fix. Da $\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\frac{1}{B(0,T)}\right)_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}^*$ ist, kann ein Maß $\mathbb{P}_T$ auf $\mathcal{F}(t)$ mit dem Dichtequotientenprozess

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^*}_{|\mathcal{F}(t)} = \frac{B(t,T)}{\beta(t)}\frac{1}{B(0,T)}, \ 0 \leq t \leq T$$

definiert werden. Dieses Maß heißt **Forwardmartingalmaß** zum Termin T, bei dem die Forwardpreise zum Zeitpunkt T Martingale unter $\mathbb{P}_T$ bilden.

Für einen abdiskontierten Dichtequotientenprozess $H(\cdot)$, einen Portfolioprozess $\pi(\cdot)$ und einen Vermögensprozess $V(\cdot)$ gelten die in den Kapiteln 2.2 und 2.3 erwähnten Formulierungen, angewandt auf den eindimensionalen Fall, das heißt für $n = 1$. Es sei weiterhin die Integritätsbedingung für den Dichtequotientenprozess

$$\mathbb{E}[H(T)] < \infty \tag{4.17}$$

erfüllt[3].

4.2. Optimierung des Bondportfolios

In diesem Abschnitt wird das Problem 3.1 für das oben definierte Finanzmarktmodell mit Hilfe der Martingalmethode gelöst. Die Nutzenfunktion, die in diesem Fall die Präferenzen des Investors repräsentiert, sei eine Potenz-Nutzenfunktion der Gestalt:

$$U(x) = \frac{x^p}{p}$$

für alle $x \in (0, \infty)$ und $p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$. Die Inverse der Ableitung U', die für die Herleitung der Lösung des statischen Optimierungsproblems benötigt wird, ist für alle $\lambda \in (0, \infty)$ gegeben durch:

$$I(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}.$$

Die Gültigkeit der Bedingungen (2.41) und (2.42) wurden in Gleichungen (3.38) - (3.41) überprüft. Als Nächstes muss untersucht werden, ob die für die Anwendung des Satzes 3.11 benötigte Bedingung $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$ mit $\mathcal{X}_1$ wie in (3.55) erfüllt ist. Dafür wird die Funktion $\mathcal{X}_1$ berechnet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1(\lambda) &= \mathbb{E}\left[H(T) I(\lambda H(T))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H(T) \left(\lambda H(T)\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}} \ \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\right] \\
&= \lambda^{\frac{1}{p-1}} \mathcal{X}_1(1), \quad 0 < \lambda < \infty.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

[3]Die ausführliche Interpretation dieser Bedingung findet im Abschnitt 2.2 statt.

Das Erfüllen der Bedingung $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$ wird hier zunächst angenommen. Der Beweis dieser findet in der Gleichung (4.31) statt.

Es lässt sich aus der Berechnung in (4.18) und der Tatsache, dass die Inverse von $\mathcal{X}_1$ existiert, der Lagrange-Multiplikator für $x \in (0, \infty)$

$$\mathcal{Y}(x) = \mathcal{X}_3^{-1}(x) = \left(\frac{x}{\mathcal{X}_1(1)}\right)^{p-1} \tag{4.19}$$

herleiten. Es ist zu beachten, dass $\mathcal{X}_1(1)$ aufgrund der strikten Positivität von $H(\cdot)$ selbst strikt positiv ist und somit die Wohldefiniertheit von $\mathcal{Y}$ folgert. Nun kann der optimale Endwert, der von dem Startkapital $x \in (0, \infty)$ finanziert wird, durch Einsetzen der Darstellung (4.19) in die Gleichung (3.12) berechnet werden:

$$\xi_1^{opt} = I_1(\mathcal{Y}(x)H(T)) = \left(\left(\frac{x}{\mathcal{X}_1(1)}\right)^{p-1} H(T)\right)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{x}{\mathcal{X}_1(1)} H(T)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.20}$$

Im nächsten Schritt ist das Darstellungsproblem 3.6 zu lösen. Daher wird es nach der spezifischen Gestalt des optimalen Portfolioprozesses π^{opt} gesucht, die die Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.5 repliziert. Die Existenz einer solchen Portfoliostrategie ist durch den Satz 2.5 gegeben. Für die Bestimmung der Gestalt des Portfolioprozesses ist, wie es in dem Beweis von Satz 2.5 gezeigt wurde, die Herleitung der Form des dazugehörigen Vermögensprozesses notwendig. Gemäß dem Satz 3.11 ist der zum optimalen Portfolioprozess $\pi^{opt} \in \mathcal{A}_1(x)$ gehörende Vermögensprozess von der Gestalt

$$V^{opt}(t) \equiv V^{x,\pi^{opt},0}(t) = \frac{1}{H(t)} \mathbb{E}\left[H(T)\xi_1^{opt} | \mathcal{F}(t)\right], \ 0 \leq t \leq T.$$

Das Einsetzen von ξ_1^{opt} aus (4.20) liefert

$$\begin{aligned} V^{opt}(t) &= \underbrace{\frac{1}{H(t)}}_{\neq 0} \mathbb{E}[H(T)\frac{x}{\mathcal{X}_1(1)} H(T)^{\frac{1}{p-1}} | \mathcal{F}(t)] \\ &= \underbrace{\frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)}}_{\neq 0} \mathbb{E}[H(T)^{\frac{p}{p-1}} | \mathcal{F}(t)], \ 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Um den bedingten Erwartungswert auf der rechten Seite der Gleichung berechnen zu können, wird das Forwardmartingalmaß verwendet. Dieses wird gemäß der Definition 4.5 durch

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^*}_{|\mathcal{F}(t)} = \frac{B(t,T)}{\beta(t)} \frac{1}{B(0,T)} := \overline{L}(t),$$

für $0 \leq t \leq T$, definiert. Die bereits bekannte Gestalt des Dichtequotientenprozesses

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}(t)} = L(t),\ 0 \leq t \leq T$$

liefert durch eine einfache Umformung

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}(t)} = \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^*}_{|\mathcal{F}(t)} \cdot \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}(t)} = \overline{L}(t)L(t) =: R(T). \tag{4.22}$$

Die Bestimmung der expliziten Gestalt des Prozesses $R(\cdot)$, der anschließend entscheidend für die Berechnung des Vermögensprozesses $V^{opt}(\cdot)$ in (4.21) sein wird, erfolgt zunächst mit der Herleitung der spezifischen Form des Dichtequotientenprozesses $\overline{L}(\cdot)$. Um dies zu erreichen, wird die stochastische Differentialgleichung von $\overline{L}(\cdot)$ bezüglich des $\mathbb{P}^*$-Wiener Prozesses $\overline{W}$ durch Anwendung der partiellen Integrationsformel, vgl. [Pau11, 4.4], für alle $0 \leq t \leq T$ wie folgt aufgestellt:

$$\begin{aligned}
d\overline{L}(t) &= d\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\frac{1}{B(0,T)}\right) = \frac{1}{B(0,T)} dB(t,T)\beta(t)^{-1} \\
&= \frac{1}{B(0,T)}\left(B(t,T)d\beta(t)^{-1} + \beta(t)^{-1}dB(t,T) + \underbrace{d\langle B(\cdot,T), \beta^{-1}(\cdot)\rangle_t}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{B(0,T)}\left(-B(t,T)r(t)\beta(t)^{-1}dt + \beta(t)^{-1}B(t,T)(r(t)dt + \sigma(t,T)d\overline{W}(t))\right) \\
&= \frac{1}{B(0,T)}\beta(t)^{-1}B(t,T)\sigma(t,T)d\overline{W}(t) \\
&= \overline{L}(t)\sigma(t,T)d\overline{W}(t).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Damit nimmt die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung für alle $0 \leq t \leq T$

die folgende Gestalt an, vgl. [Pau11, 4.8]:

$$\overline{L}(t) = \exp\left(\int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,T)^2 ds\right). \tag{4.24}$$

Die Form von $\overline{L}(\cdot)$ erweist sich für die Bestimmung von $R(\cdot)$ in (4.22) als nützlich, denn sie führt für alle $t \in [0,T]$ zu der Umformung:

$$\begin{aligned}
R(t) &= \overline{L}(t) \cdot L(t) \\
&= \exp\left(\int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,T)^2 ds\right)\exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta(s)^2 ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^t \sigma(s,T)(dW(s) - \vartheta(s)ds) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,T)^2 ds\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta(s)^2 ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^t (\sigma(s,T) + \vartheta(s))dW(s) - \int_0^t \left(\vartheta(s)\sigma(s,T) + \frac{1}{2}\left(\sigma(s,T)^2 + \vartheta^2(s)\right)\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^t (\sigma(s,T) + \vartheta(s))dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sigma(s,T) + \vartheta(s)\right)^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei der dritten Umformung die Formel (4.16) für den Wiener Prozess $\overline{W}$ eingesetzt, was nachfolgend zu einer Gleichung, bestehend aus einem $\mathbb{P}$-Martingal führt[4].

An dieser Stelle kann die Berechnung des optimalen Vermögensprozesses in (4.21) fortgesetzt werden. Durch eine Ergänzung der Gleichung um Null und eine anschließende Umformung lässt sich der Erwartungswert auf der rechten Seite der Gleichung (4.21) als

[4] Die Martingaleigenschaft folgt aus der Novikov-Bedingung [Pau11, 4.9], die aufgrund von der Bedingung (4.13) für den Volatilitätsprozess und der Bedingung (4.15) für den Marktpreis des Risikos erfüllt ist.

ein Ausdruck in Abhängigkeit von dem Dichtequotientenprozess $R(\cdot)$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} V^{opt}(t) &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \underbrace{\frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)}}_{\neq 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{B(0,T)}{B(T,T)} \frac{B(T,T)}{B(0,T)} \underbrace{H(T)}_{=\beta^{-1}(t)L(t)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} \mathbb{E}\left[\Big(B(0,T)R(T) \Big)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} z_0^{\frac{p}{p-1}} \mathbb{E}\left[R(T)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t) \right], \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Es ist anzumerken, dass die Nenner aufgrund von $B(T,T) = 1$, $B(0,T) = z_0 \in (0,\infty)$ und $H(\cdot), \mathcal{X}_1(1) > 0$ strikt positiv sind.

Nun gilt es, den bedingten Erwartungswert auf der rechten Seite der Gleichung (4.25) zu bestimmen. Die nachfolgende Erweiterung des Terms $R(T)^{\frac{p}{p-1}}$ liefert wegen der Annahme, dass das Marktrisiko und die Volatilität deterministisch sind[5], ein Produkt aus einem deterministischen Teil und einem stetigen lokalen Martingal, das die Berechnung des bedingten Erwartungswertes für alle $t \in [0,T]$ signifikant erleichtert:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[R(T)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{p}{p-1} \left(\int_0^T (\sigma(s,T) + \vartheta(s)) \ dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma(s,T) + \vartheta(s))^2 \ ds \right) \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{p}{p-1} \int_0^T (\sigma(s,T) + \vartheta(s)) \ dW(s) - \frac{1}{2} \frac{p^2}{(p-1)^2} \int_0^T (\sigma(s,T) + \vartheta(s))^2 \ ds \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{(p-1)^2} - \frac{p}{p-1} \right) \int_0^T (\sigma(s,T) + \vartheta(s))^2 \ ds \right) \middle| F(t) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Lambda(T) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{p}{(p-1)^2} \int_0^T (\sigma(s,T) + \vartheta(s))^2 \ ds \right) \middle| F(t) \right] \\ &= \mathbb{E}[\Lambda(T) m(T) | \mathcal{F}(t)] \end{aligned} \tag{4.26}$$

[5] Siehe dazu die Bemerkungen 4.3 und 4.4.

Dabei sind für alle $t \in [0,T]$

$$\Lambda(t) = \exp\left(\frac{p}{p-1}\int_0^t (\sigma(s,T)+\vartheta(s))\;dW(s) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{(p-1)^2}\int_0^t (\sigma(s,T)+\vartheta(s))^2\;ds\right) \tag{4.27}$$

$$m(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}\int_0^t (\sigma(s,T)+\vartheta(s))^2\;ds\right). \tag{4.28}$$

$\Lambda(\cdot)$ ist ein stetiges, lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}$ und wegen der Novikov-Bedingung ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}$. Da die Volatilität σ und der Marktpreis des Risikos ϑ in den Bemerkungen 4.3 und 4.4, als deterministisch vorausgesetzt wurden, impliziert dies die Deterministik von $m(\cdot)$. Daher kann $m(T)$ aus dem bedingten Erwartungswert herausgezogen werden. Für alle $t \in [0,T]$ ergibt sich:

$$\mathbb{E}[R(T)^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{F}(t)] = m(T)\mathbb{E}[\Lambda(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \le t \le T.$$

Die Martingaleigenschaft von Λ liefert für alle $t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}[R(T)^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{F}(t)] = m(T)\Lambda(t).$$

Eingesetzt in den in Gleichung (4.25) hergeleiteten Ausdruck für $V^{opt}(t)$, bietet sich als Lösung für den optimalen Vermögensprozess zum Zeitpunkt t, mit $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} V^{opt}(t) &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} z_0^{\frac{p}{p-1}} \mathbb{E}\left[R(T)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t)\right] \\ &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} z_0^{\frac{p}{p-1}} m(T)\Lambda(t) \end{aligned} \tag{4.29}$$

an. Dabei ist zu beachten, dass die Martingaleingenschaft von Λ die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1(1) &= \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\right] = \mathbb{E}\left[m(T)\Lambda(T)\right] \\ &= m(T)\ \underbrace{\mathbb{E}\left[\Lambda(T)\right]}_{=\mathbb{E}[\Lambda(0)]=1} \\ &= m(T) \end{aligned} \tag{4.30}$$

liefert.

Aus der Berechnung in (4.30) und der Deterministik von $m(\cdot)$ folgt die Bedingung $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1(\lambda) &\overset{(4.18)}{=} \lambda^{\frac{1}{p-1}}\mathcal{X}_1(1), \\ &= \lambda^{\frac{1}{p-1}} m(T) < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Der optimale Vermögensprozess lässt sich für alle $t \in [0, T]$ wie folgt darstellen:

$$V^{opt}(t) = \frac{x}{H(t)} z_0^{\frac{p}{p-1}} \Lambda(t). \tag{4.32}$$

Um zur finalen Lösung des gestellten Bondportfolioproblems im Fall der Potenz-Nutzenfunktion zu gelangen, bleibt herauszufinden, wie sich die optimale Portfoliostrategie für das Bondportfolio gestaltet. Das zentrale Instrument für die Bestimmung des optimalen Portfolioprozesses für das gegebene Problem stellt der Martingaldarstellungssatz dar. Definiere hierfür $M(\cdot) := H(\cdot)V^{opt}(\cdot)$. Dann gilt für die stochastische Differenzialgleichung:

$$dM(t) = dH(t)V^{opt}(t) \overset{(4.32)}{=} x \cdot z_0^{\frac{p}{p-1}}\ d\Lambda(t),\ 0 \le t \le T.$$

Für die Lösung der stochastischen Differentialgleichung für $\Lambda(\cdot)$ gilt gemäß [Pau11, 4.8]

$$d\Lambda(t) = \Lambda(t)\left((\sigma(t,T) + \vartheta(t))dW(t)\right),\ 0 \le t \le T.$$

Die Berechnung von $dM(\cdot)$ kann für alle $t \in [0,T]$ wie folgt fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned} dM(t) &= x \cdot z_0^{\frac{p}{p-1}} \Lambda(t) \frac{p}{p-1} (\sigma(t,T) + \vartheta(t))\ dW(t) \\ &= H(t) V^{opt}(t) \frac{p}{p-1} (\sigma(t,T) + \vartheta(t))\ dW(t) \\ &= M(t) \frac{p}{p-1} (\sigma(t,T) + \vartheta(t))\ dW(t). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Da $M(\cdot)$ ein Martingal ist und $\mathcal{F}$ die Wiener-Filtration, hat M nach dem Martingaldarstellungssatz stetige Pfade und es existiert ein previsibler Prozess $(\psi(t))_{0\leq t\leq T}$ mit

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \psi(s)^2\ ds < \infty\ für\ alle\ 0 \leq t \leq T \right) = 1$$

und

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \psi(s)\ dW(s),\ 0 \leq t \leq T$$

oder in differentieller Notation

$$dM(t) = \psi(t) dW(t),\ 0 \leq t \leq T. \tag{4.34}$$

Das Gleichsetzen der stochastischen Differenzialgleichungen (4.33) und (4.34) liefert für alle $t \in [0,T]$:

$$\psi(t) = H(t) V^{opt}(t) \frac{p}{p-1} (\sigma(t,T) + \vartheta(t)), \tag{4.35}$$

Damit ist die Gestalt des Prozesses $\psi(\cdot)$ bekannt. Das Einsetzen von (4.35) in die im Korollar 3.9 angegebene Form des optimalen Portfolioprozesses

$$\pi^{opt}(t) = (\sigma(t,T^*)^{-1}) \left(\frac{\psi(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta(t) \right),\ 0 \leq t \leq T < T^*,$$

liefert

$$\begin{aligned}
\pi^{opt}(t) &= \Big(\sigma(t,T^*)^{-1}\Big)\left(\frac{H(t)V^{opt}(t)\frac{p}{p-1}(\sigma(t,T)+\vartheta(t))}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta(t)\right)\\
&= \Big(\sigma(t,T^*)^{-1}\Big)\left(\frac{p}{p-1}\sigma(t,T)+\frac{1}{p-1}\vartheta(t)\right)V^{opt}(t)\\
&= \left(\frac{1}{p-1}\,\frac{\vartheta(t)}{\sigma(t,T^*)}+\frac{p}{p-1}\,\underbrace{\frac{\sigma(t,T)}{\sigma(t,T^*)}}_{:=k(t)}\right)V^{opt}(t), \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

für alle $0 \le t \le T < T^*$.

Für den Investor, der durch das Ausüben der optimalen Handelsstrategie den maximal nützlichen Wert am Ende der Handelsperiode erreichen möchte, sieht die optimale Aufteilung des vorhandenen Vermögens demnach folgendermaßen aus:

$$\pi^{opt}(t) = \left(\underbrace{\frac{1}{p-1}\,\frac{\vartheta(t)}{\sigma(t,T^*)}}_{Resultat\ von\ Merton} + \underbrace{\frac{p}{p-1}\,k(t)}_{Korrekturterm}\right)V^{opt}(t). \qquad (4.37)$$

Dieses Ergebnis enthält das Resultat von Merton [Mer69], [Mer73], das aufgrund von stochastischer Zinsentwicklung durch den Korrekturterm modifiziert wird.

Der Prozess $\pi_1^{opt}(t)$ gibt den Teil des Vermögens an, der zum Zeitpunkt t, mit $t \in [0,T]$ in den T^*-Bond investiert wird und

$$V^{opt}(t) - \pi^{opt}(t)$$

ist der restliche Teil, der zu demselben Zeitpunkt auf das Geldmarktkonto eingezahlt wird. Ein Vergleich mit Kraft/Korn [KK01] zeigt, dass sie bei der Lösung desselben Problems mittels der stochastischen Steuerung zum gleichen Ergebnis kommen. Damit weisen beide Methoden trotz der unterschiedlichen Vorgehensweisen keine Diskrepanzen im Ergebnis auf. Bei der Nebeneinaderstellung der Ergebnisse ist zu beachten, dass die Autoren den Marktpreis des Risikos ϑ_{KK} anders definieren, und zwar $\vartheta_{Hier} := -\vartheta_{KK}$, was zu Verwirrungen bei dem Vergleich der Lösungen führen kann. Um dies zu vermeiden wird im Anhang A.3 die Gleichung für das optimale Portfolio zu der Form von Kraft/Korn umgeformt.

4.3. Anwendung auf das Vasicek und das Ho-Lee-Modell

Da es ebenfalls von Interesse sein könnte, wie das optimale Portfolio im Hinblick auf die Anwendung auf konkrete Short-Rate-Modelle variiert, wird die Spezialisierung in diese Richtung vorangetrieben. Zu diesem Zweck werden, unter sonst unveränderten Annahmen dieses Kapitels, zwei im Beispiel 4.2 beschriebenen Modelle verwendet: das Vasicek und das Ho-Lee-Modell.

Für die Durchführung der Martingalmethode sind die Bedingungen $\mathcal{X}_1(\lambda) < \infty$ und $\mathbb{E}[H(T)] < \infty$ für alle $\lambda \in (0, \infty)$ und $x \in [0, \infty]$ zu zeigen, vgl. die Voraussetzungen zum Satz 3.11. Der Nachweis der Bedingung $\mathcal{X}_1(\lambda) < \infty$ ist in der Darstellung (4.31) bereits stattgefunden. Die Gültigkeit der Bedingung $\mathbb{E}[H(T)] < \infty$ für das Vasicek- und das Ho-Lee-Modell wird in [KK01, S. 1256-S. 1258] gezeigt. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Martingalmethode zur Optimierung des Bond-Portfolioproblems für die Potenz-Nutzenfunktion gegeben. Durch das Einsetzen der Darstellung (4.9) bzw. (4.10) für das jeweilige Modell in den Korrekturterm der hergeleiteten Formel für π^{opt} in (4.37) lassen sich die folgenden Ergebnisse festhalten[6]:

- Im Fall, dass die Short Rate sich durch das **Vasicek-Modell** beschreiben lässt, nimmt der optimale Portfolioprozess für alle $t \in [0, T],\ T < T^*$ die folgende Gestalt an:

$$\pi^{opt}(t) = \left(\frac{1}{p-1} \, \frac{\vartheta(t)}{\sigma(t, T^*)} + \frac{p}{p-1} \, \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{e^{-b(T^*-t)} - 1} \right) V^{opt}(t). \tag{4.38}$$

[6] Das Einsetzen von (4.9) bzw. (4.10) in den ersten Teil der Formel für π^{opt} wird hier für den besseren Vergleich mit der Lösung von [KK01, S. 1260] nicht durchgeführt.

- Im Fall, dass die Short Rate sich durch das **Ho-Lee-Modell** beschreiben lässt, nimmt der optimale Portfolioprozess für alle $t \in [0, T],\ T < T^*$ die folgende Gestalt an:

$$\pi^{opt}(t) = \left(\frac{1}{p-1} \frac{\vartheta(t)}{\sigma(t, T^*)} + \frac{p}{p-1} \frac{T-t}{T^*-t} \right) V^{opt}(t). \tag{4.39}$$

Diese Ergebnisse lassen sich aufgrund ihrer strukturierten Gestalt gut interpretieren, vgl. [KK01, S. 1255]. Der erste Teil der Gleichung (4.38) bzw. (4.39) stimmt mit der klassischen Lösung von Merton [Mer69] und [Mer73] unter Berücksichtigung deterministischer Koeffizienten überein. Der zweite Teil derselben Gleichung kann als ein Korrekturterm interpretiert werden. Dieser ist positiv und fällt ab dem Zeitpunkt T monoton gegen Null. Das bedeutet, dass zu Beginn der Handelsperiode eine große und negative Abweichung von der klassischen Lösung besteht, die zum Planungshorizont T verschwindet. Insbesondere steigt der Korrekturterm mit der Risikoaversion des Investors, da die weniger riskanten Finanzgüter bei steigender Risikoaversion des Investors noch attraktiver werden. Auf diese Weise versucht der Investor sein Portfolio gegen zusätzliche Zinsrisiken abzusichern.

Bemerkung 4.6 (**Anwendung auf die logarithmische Nutzenfunktion**)
Im Fall, dass die Präferenzen des Investors durch die logarithmische Nutzenfunktion beschrieben werden, kann das Bond-Portfolioproblem allgemeiner gelöst werden. Dafür kann die Herleitung der Lösung aus dem Abschnitt (3.2.2) vollständig übernommen werden. Da die Bedingung $\mathbb{E}[H(T)] < \infty$ im Vasicek- und im Ho-Lee-Modell erfüllt ist und $\mathcal{X}_1(\lambda) < \infty$ für alle $\lambda \in (0, \infty)$ gilt, vgl. den Abschnitt 3.2.2, ist die Anwendung des Satzes 3.11 zugelassen. Das optimale Portfolio im vorliegenden Fall ist von der Gestalt:

$$\pi^{opt}(t) = \frac{\mu(t, T) - r(t)}{\sigma(t, T^*)} V^{opt}(t) \tag{4.40}$$

für alle $t \in [0, T]$ mit $V^{opt}(t) = \frac{x}{H(t)(T+1)}(T - t + 1)$. Durch das Einsetzen der Gleichungen (4.9) bzw. (4.10) in die Formel von π^{opt} in (4.40) ist diese von der Form:

- im **Vasicek- Modell**

$$\pi^{opt}(t) = \frac{b(\mu(t,T) - r(t))}{\delta(e^{-b(T^*-t)} - 1)} V^{opt}(t),$$

  für alle $t \in [0, T]$ mit $b, \delta > 0$, bzw.

- im **Ho-Lee-Modell**

$$\pi^{opt}(t) = \frac{r(t) - \mu(t)}{\delta \cdot (T^* - t)} V^{opt}(t),$$

  für alle $t \in [0, T]$, mit $\delta > 0$ und $b(\cdot) > 0$ eine deterministische Funktion.

Die Betrachtung weiterer Short-Rate-Modelle findet in dieser Arbeit nicht statt. Es könnte vermutet werden, dass die Martingalmethode in einem Modell wie z. B. Cox-Ingersoll-Ross Modell [CIJR85] nicht funktioniert. Der Grund dafür ist die nicht erfüllte Bedingung $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$. Für ein genaueres Verständnis dieses Problems wird hier auf [Kra04, S. 44 ff.] verwiesen. Für die Anwendung der Martingalmethode sind die Voraussetzungen $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$ und $\mathbb{E}[H(T)] < \infty$ von großer Bedeutung. Diese implizieren die Existenz der Lösung des statischen Problems und können eventuell bei einigen Short-Rate-Modellen, abhängig von der vorausgesetzten Nutzenfunktion, Schwierigkeiten bereiten. Dies wäre ein interessanter Punkt für weitere Forschungen auf diesem Gebiet.

5. Das gemischte Aktien- und Bondproblem in Short-Rate-Modellen

5.1. Grundlegende Annahmen des Modells

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem zweiten speziellen Problem, dem gemischten Fall, in dem ein Geldmarktkonto, ein T^*- Bond mit $T^* > T$ und eine Aktie, die zur Verfügung stehende Finanzgüter darstellen. Der Investor besitzt demnach die Möglichkeit, sein bestehendes Kapital auf drei Finanzgüter aufzuteilen, um so zu einem für ihn optimalen Wert zu gelangen. Wie im Kapitel davor, wird auch hier davon ausgegangen, dass der Investor nur Investitionsentscheidungen trifft, ohne das bestehende Vermögen zu konsumieren. Das Ergebnis lässt sich auf ein Modell mit Entnahmen erweitern. Das Vorgehen bleibt weitestgehend gleich: Zur Lösung des Problems wird auf die Martingalmethode unter Anwendung der Ergebnisse des zweiten Kapitels zurückgegriffen. Anschließend wird die gefundene Lösung mit dem Resultat von Kraft/Korn [KK01] verglichen.

Das Finanzmarktmodell sei wie im Kapitel 2.1 beschrieben. In diesem Fall wird angenommen, dass drei Finanzgüter zur Verfügung stehen. Damit das Modell vollständig bleibt, muss die Anzahl der risikobehafteten Finanzgüter mit der Dimension des vorliegenden Wiener Prozesses übereinstimmen. Das bedeutet, dass die Preisprozesse diesmal von einem zwei-dimensionalen Wiener Prozess $W = (W_B, W_S)^\top$ getrieben werden, was zur Veränderung der Dynamiken aus Kapitel 2.1 führt.

Die Dynamik des Geldmarkkontos wird von dem Wiener Prozess W_B beeinflusst und nimmt für $t \in [0, T]$ die folgende Gestalt an:

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt, \ \beta(0) = 1.$$

Dabei bezeichnet r die Short Rate, deren Entwicklung durch die folgende stochastische Differentialgleichung für $t \in [0, T]$ mit $r(0) = r_0 > 0$ modelliert ist:

$$dr(t) = m(t, r(t))dt + \delta(t, r(t) \ dW_B(t), \tag{5.1}$$

wobei

$$m : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (t, r(t)) \mapsto m(t, r(t)),$$
$$\delta : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (t, r(t))\delta(t, r(t))$$

bezüglich beider Variablen messbare Funktionen sind. Insbesondere gelten die Bedingungen:

$$\int_0^T |m(t, r(t))| \ dt < \infty, \tag{5.2}$$
$$\int_0^T \delta^2(t, r(t)) \ dt < \infty. \tag{5.3}$$

Das zweite Finanzgut ist der T^*-Bond mit der Preisentwicklung:

$$dB(t, T^*) = B(t, T^*)(\mu_B(t, T^*) \ dt + \sigma_B(t, T^*) \ dW_B(t))$$

für alle $0 \leq t \leq T^*$, wobei μ_B progressiv-messbar, σ_B deterministisch und ebenfalls progressiv-messbar ist.

Die Dynamik des dritten Finanzgutes, der Aktie, wird von W_B und W_S getrieben, was die Korrelation zwischen der Aktie und dem T^*-Bond zulässt. Diese ist gegeben durch

$$dS(t) = S(t) \left(\mu_S(t, T^*) \ dt + \sigma_S(t, T^*) \ dW_S(t) + \sigma_{SB}(t, T^*) \ dW_B(t) \right),$$

wobei μ_S bezüglich der Wiener-Filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ progressiv-messbar ist und σ_S sowie σ_{SB} deterministisch und ebenfalls progressiv-messbar sind, so dass die folgenden Bedingungen gelten:

$$\int_0^T |\mu_S(t,T^*)| + |\mu_B(t,T^*)| dt < \infty, \ f.s.,$$
$$\int_0^T |\sigma_S(t,T^*)|^2 + |\sigma_{SB}(t,T^*)|^2 + |\sigma_B(t,T^*)|^2 \ dt < \infty, \ f.s.$$

Der Finanzmarkt ist arbitragefrei, was äquivalent zur Existenz eines zwei-dimensionalen previsiblen Prozesseses $(\vartheta(t))_{0\leq t\leq T^*} = ((\vartheta_B(t), \vartheta_S(t))^\top)_{0\leq t\leq T^*}$ ist, mit

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}(t)} = \exp\left(\int_0^t \vartheta_B(s)dW_B(s) + \int_0^t \vartheta_S(s)dW_S(s) - \frac{1}{2}\int_0^t (\vartheta_B(s)^2 + \vartheta_S(s)^2)ds\right)$$
$$=: L(t),$$

für alle $0 \leq t \leq T^*$ und einem bezüglich $\mathbb{P}^*$ zwei-dimensionalen Wiener Prozess[1]

$$\overline{W}_B(t) = W_B(t) - \int_0^t \vartheta_B(s)ds, \tag{5.4}$$
$$\overline{W}_S(t) = W_S(t) - \int_0^t \vartheta_S(s)ds, \tag{5.5}$$

für alle $0 \leq t \leq T^*$. Die Preisprozesse des T^*-Bonds und der Aktie bezüglich $\mathbb{P}^*$ können durch die Dynamiken

$$dB(t,T^*) = B(t,T^*)\left[r(t)dt + \sigma_B(t,T^*)d\overline{W_B}(t)\right],$$
$$dS(t) = S(t)\left(r(t)dt + \sigma_S(t,T^*)d\overline{W}_S(t) + \sigma_{SB}(t,T^*)d\overline{W}_B(t)\right)$$

beschrieben werden.

Bemerkung 5.1

- Es wird vorausgesetzt, das der Volatilitätsprozess $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_B & 0 \\ \sigma_{SB} & \sigma_S \end{pmatrix}$ deterministisch ist.

[1] Folgerung aus dem Satz von Martin, Cameron, Girsanov.

- Es wird angenommen, dass der Marktpreis des Risikos $(\vartheta_B, \vartheta_S)^\top$ deterministisch ist.

Aufgrund der Arbitragefreiheit gilt für die einzelnen Vektorkomponenten des Marktpreis des Risikos:

$$\vartheta_B(t) = \sigma_B(t, T^*)^{-1}(r(t) - \mu_B(t, T^*)), \tag{5.6}$$

beziehungsweise

$$\vartheta_S(t) = \sigma_S(t, T^*)^{-1} \left(r(t) - \mu_S(t) - \sigma_{SB}(t, T^*)\vartheta_B(t)\right), \tag{5.7}$$

mit

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\int_0^{T^*} \vartheta_B(t)\ dW_B(t) + \int_0^{T^*} \vartheta_S(t)\ dW_S(t) - \frac{1}{2}\int_0^{T^*} (\vartheta_B(t)^2 + \vartheta_S(t)^2)\ dt\right)\right) = 1. \tag{5.8}$$

für alle $t \in [0, T^*]$. Es gilt ferner die folgende Integrierbarkeitsbedingung:

$$\int_0^{T^*} \vartheta_B(t)^2 + \vartheta_S(t)^2\ dt < \infty\ f.s. \tag{5.9}$$

Weiter wird vorausgesetzt, dass ein Markt für die Nullkuponanleihen mit beliebiger Laufzeit $\tilde{T} \in (0, T]$ existiert. Die Preisprozesse solcher $\tilde{T}$-Bonds erfüllen die stochastische Differentialgleichung:

$$dB(t, \tilde{T}) = B(t, \tilde{T})\ [\mu_B(t, \tilde{T})dt + \sigma_B(t, \tilde{T})dW_B(t)] \tag{5.10}$$

für $0 < t \leq \tilde{T} \leq$ mit $B(0, \tilde{T}) = z_0 \in (0, \infty)$. Dabei sind die Prozesse $\mu_B(t, \tilde{T})$ und $\sigma_B(t, \tilde{T})$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ progressiv-messbar und erfüllen die Bedingungen:

$$\int_0^{T} |\mu_B(t, \tilde{T})|\ dt < \infty,\ f.s. \tag{5.11}$$

$$\int_0^{T} \sigma_B(t, \tilde{T})^2\ dt < \infty,\ f.s. \tag{5.12}$$

Es werden also zwei Arten von Bonds betrachtet. Der erste hat die Laufzeit T^*, mit $T^* > T$, vgl. die Dynamik (4.8) und der zweite $\tilde{T} = T$, vgl. die Dynamik (4.11). Die Betrachtung eines T-Bonds wird für den Übergang zu dem Forwardmartingalmaß in der Definition 4.5 benötigt.

Die Vollständigkeit des Finanzmarktmodells impliziert die Invertierbarkeit der Volatilitätsmatrix σ und gleichzeitig die Eindeutigkeit des previsiblen Prozesses $(\vartheta_B, \vartheta_S)^\top$ sowie die von $\mathbb{P}^*$.

Für einen abdiskontierten Dichtequotientenprozess $H(\cdot)$, einen Portfolioprozess $\pi(\cdot)$ und einen Vermögensprozess $V(\cdot)$ gelten die in den Kapiteln 2.2 und 2.3 erwähnten Formulierungen, angewandt auf den zwei-dimensionalen Fall mit einem Driftvektor $(\mu_B, \mu_s)^\top$, der 2×2-Matrix $\sigma = (\sigma_B,\ 0;\ \sigma_{SB},\ \sigma_S)^\top$, dem Vektor für den Marktpreis des Risikos $(\vartheta_B, \vartheta_S)^\top$, dem Wiener Prozess $(W_B, W_S)^\top$ und dem zweidimensionalen Vektor für die Portfoliostrategie $(\pi_B, \pi_S)^\top$. Es sei weiterhin die Integritätsbedingung für den Dichtequotientenprozess

$$\mathbb{E}[H(T)] < \infty \tag{5.13}$$

erfüllt. Das Ausschreiben der Gleichungen (2.17) und (2.8) aus Kapitel 2.3 für den zweidimensionalen Fall, liefert für alle $t \in [0, T^*]$ und $(\lambda_B, \lambda_S)^\top := (r - \mu_B, r - \mu_S)^\top$ die stochastischen Differentialgleichungen:

$$dH(t) = H(t)\left(-r(t)dt + \vartheta_B(t)dW_B(t) + \vartheta_S(t)dW_S(t)\right) \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} dV(t) = V(t)r(t)dt &+ \left(\pi_B(t)\lambda_B(t) + \pi_S(t)\lambda_S(t)\right)dt \\ &+ (\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*) + \pi_B(t)\sigma_B(t,T^*))dW_B(t) \\ &+ \pi_S(t)\sigma_S(t,T^*)dW_S(t). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die Dynamik des Prozesses $H(\cdot)V(\cdot)$ kann mit Hilfe der partiellen Integrationsformel wie folgt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
dH(t)V(t) &= H(t)dV(t) + V(t)dH(t) + d\langle H(\cdot), V(\cdot)\rangle_t \\
&= H(t)V(t)r(t)dt + H(t)\left[(\pi_B(t)\lambda_B(t) + \pi_S(t)\lambda_S(t))\,dt\right] \\
&+ H(t)\left[(\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*) + \pi_B(t)\sigma_B(t,T^*))dW_B(t) + \pi_S(t)\sigma_S(t,T^*)dW_S(t)\right] \\
&+ H(t)V(t)\ \left[-r(t)dt + \vartheta_B(t)dW_B(t) + \vartheta_S(t)dW_S(t)\right] \\
&+ H(t)\ \left[(\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*) + \pi_B(t)\sigma_B(t,T^*))\,\vartheta_B(t) + \pi_S(t)\sigma_S(t,T^*)\vartheta_S(t)\right] dt \\
&= H(t)\ \left[(\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*) + \pi_B(t)\sigma_B(t,T^*) + V(t)\vartheta_B(t))dW_B(t)\right] \\
&+ H(t)\left[(\pi_S(t)\sigma_S(t,T^*) + V(t)\vartheta_S(t))dW_S(t)\right],\ 0 \le t \le T^*.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Bei der zweiten Umformung wurden die Gleichungen (5.14) und (5.15) eingesetzt. Die letzte Gleichheit gilt, da der Driftterm aus der vorherigen Umformung durch Anwendung der Darstellung (5.6) bzw. (5.7) verschwindet, wie aus der nachfolgenden Rechnung ersichtlich wird:

$$\begin{aligned}
&\pi_B(t)\lambda_B(t) + \pi_S(t)\lambda_S(t) + (\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*) + \pi_B(t)\sigma_B(t,T^*))\vartheta_B(t) + \pi_S(t)\sigma_S(t,T^*)\vartheta_S(t) \\
&= \pi_B(t)\lambda_B(t) + \pi_S(t)\lambda_S(t) - \pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)\sigma_B(t)^{-1}\lambda_B(t) \\
&- \pi_B(t)\underbrace{\sigma_B(t,T^*)\sigma_B(t,T^*)^{-1}}_{=1}\lambda_B(t) - \pi_S(t)\underbrace{\sigma_S(t,T^*)\sigma_S(t,T^*)^{-1}}_{=1}(\lambda_S(t) + \sigma_{SB}(t,T^*)\vartheta_B(t)) \\
&= -\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)\sigma_B(t,T^*)^{-1}\lambda_B(t) + \pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)\sigma_B^{-1}(t,T^*)\lambda_B(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck für die stochastische Differentialgleichung von $H(t)V^{opt}(t)$ aus (5.16) besitzt somit für alle $t \in [0,T^*]$ folgende Integralschreibweise:

$$\begin{aligned}
H(t)V^{opt}(t) = x &+ \int_0^t H(s)(\pi_S(s)\sigma_{SB}(s,T^*) + \pi_B(s)\sigma_B(s,T^*) + V^{opt}(s)\vartheta_B(s))dW_B(t) \\
&+ \int_0^t H(s)\ (\pi_S(s)\sigma_S(s,T^*) + V^{opt}(s)\vartheta_S(s))dW_S(s).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Diese Darstellung von $M(\cdot) := H(\cdot)V^{opt}(\cdot)$ wird bei der Herleitung des optimalen Portfolios im nächsten Unterabschnitt zum Einsatz kommen.

5.2. Optimierung des Aktien-Bond-Portfolios

In diesem Abschnitt wird das Problem 3.1 für das oben definierte Finanzmarktmodell mit Hilfe der Martingalmethode gelöst. Hier wird die Potenz-Nutzenfunktion als Präferenzfunktion vorausgesetzt. Die Berechnung der Lösung des statischen Problems aus dem Kapitel 4.2 kann übernommen werden. Diese hat die Gestalt:

$$\xi_1^{opt} = \frac{x}{\mathcal{X}_1(1)} H(T)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{5.18}$$

mit $x \in (0, \infty)$, $p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1(1) &:= \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\right] \neq 0, \\ H(T) &= \exp\left[-\int_0^T r(t)dt + \int_0^T \vartheta_B(t)dW_B(t) + \int_0^T \vartheta_S(t)dW_S(t)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_0^T \left(\vartheta_B(t)^2 + \vartheta_S(t)^2\right) dt\right]. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Die entscheidende Bedingung $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$ für die Existenz der Lösung des statischen Problems 3.5 wird weiter unten in Gleichung (5.30) gezeigt.

Nun ist das Darstellungsproblem zu lösen, das die Suche nach einem optimalen Portfolioprozess π^{opt} zum Ziel hat, dessen Existenz schon aus dem Satz 2.5 folgt. Für die Bestimmung der Gestalt des Portfolioprozesses π^{opt} ist die Herleitung der Form des dazugehörigen Vermögensprozesses notwendig. Mit Satz 3.11 ist der zum optimalen Portfolioprozess $\pi^{opt} \in \mathcal{A}_1(x)$ gehörende Vermögensprozess von der Gestalt

$$V^{opt}(t) \equiv V^{x,\pi^{opt},0}(t) = \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)\xi_1^{opt}|\mathcal{F}(t)\right],\ 0 \leq t \leq T.$$

Das Einsetzen von ξ_1^{opt} aus (5.18) liefert

$$V^{opt}(t) = \underbrace{\frac{1}{H(t)}}_{\neq 0} \mathbb{E}\left[H(T)\ \frac{x}{\mathcal{X}_1(1)} H(T)^{\frac{1}{p-1}} \middle|\ \mathcal{F}(t)\right] \tag{5.20}$$

$$= \underbrace{\frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)}}_{\neq 0} \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}} \middle|\ \mathcal{F}(t)\right],\ 0 \leq t \leq T. \tag{5.21}$$

Entsprechend Kapitel 4.2 wird bei der Berechnung des bedingten Erwartungswertes das Forwardmartingalmaß $\mathbb{P}_T$ verwendet, das durch den Dichtequotientenprozess

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^*}_{|\mathcal{F}(t)} = \frac{B(t,T)}{\beta(t)} \frac{1}{B(0,T)} =: \overline{L}(t)$$

definiert ist. Dabei kann die genaue Gestalt von $\overline{L}$ mit Hilfe der partiellen Integrationsformel für $t \in [0,T]$ wie folgt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
d\overline{L}(t) &= d\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)} \frac{1}{B(0,T)}\right) = \frac{1}{B(0,T)} dB(t,T)\beta(t)^{-1} \\
&= \frac{1}{B(0,T)} \left(B(t,T)d\beta(t)^{-1} + \beta(t)^{-1}dB(t,T) + \underbrace{d\langle B(\cdot,T), \beta(\cdot)\rangle_t}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{B(0,T)} \left(-B(t,T)r(t)\beta(t)^{-1}dt + \beta(t)^{-1}B(t,T)(r(t)dt + \sigma_B(t,T)d\overline{W}_B(t))\right) \\
&= \frac{1}{B(0,T)} \beta(t)^{-1}B(t,T)\sigma_B(t,T)d\overline{W}_B(t) \\
&= \overline{L}(t)\sigma_B(t,T)d\overline{W}_B(t).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung besitzt für alle $t \in [0,T]$ die Gestalt, vgl. [Pau11, 4.8]:

$$\overline{L}(t) = \exp\left(\int_0^t \sigma_B(s,T)d\overline{W}_B(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_B(s,T)^2 ds\right). \tag{5.23}$$

Dies ermöglicht die Berechnung des Prozesses $R(\cdot)$, definiert wie in (4.22), mit dessen

Hilfe der Vermögensprozess bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned}
R(t) &= \overline{L}(t)L(t)\\
&= \exp\left(\int_0^t \sigma_B(s,T)d\overline{W}_B(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_B^2(s,T)ds\right)\\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \vartheta_B(s)dW_B(s) + \int_0^t \vartheta_S(s)dW_S(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\vartheta_B^2(s) + \vartheta_S^2(s)\right) ds\right)\\
&= \exp\left(\int_0^t \sigma_B(s,T)(dW_B(s) - \vartheta_B(s)ds) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_B^2(s,T)ds\right)\\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \vartheta_B(s)dW_B(s) + \int_0^t \vartheta_S(s)dW_S(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\vartheta_B^2(s) + \vartheta_S^2(s)\right) ds\right)\\
&= \exp\left(\int_0^t \left(\sigma_B(s,T) + \vartheta_B(s)\right) dW_B(s) + \int_0^t \vartheta_S(s)dW_S(s)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left(\sigma_B(s,T) + \vartheta_B(s)\right)^2 + \vartheta_S^2(s)\right) ds\right),\ 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

In der dritten Umformung wird die Formel (5.4) für den Wiener Prozess $\overline{W}_B$ eingesetzt.

Die bisherigen Überlegungen ermöglichen die Fortsetzung der Berechnung des Vermögensprozesses in (5.20). Die Erweiterung des Faktors im bedingten Erwartungswert um Eins führt zu der folgenden Umformung der Gleichung (5.20), in der der Prozess $R(\cdot)$ im bedingten Erwartungswert steht[2]:

$$\begin{aligned}
V^{x,\pi^{opt}}(t) &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)}\,\mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right]\\
&= \frac{xB(0,T)^{\frac{p}{p-1}}}{H(t)\mathcal{X}_1(1)}\,\mathbb{E}\left[R(T)^{\frac{p}{p-1}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right],\ 0 \le t \le T. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Entsprechend dem vorherigen Kapitel wird zunächst der bedingte Erwartungswert aus der Gleichung (5.24) bestimmt. Die folgende Erweiterung des Terms $R(T)^{\frac{p}{p-1}}$ liefert ein Produkt aus einem deterministischen Teil und einem stetigen lokalen Martingal. Dies

[2]Für die detaillierte Umformung siehe die Gleichung (4.25) im Kapitel 4.2.

erleichtert die Berechnung des bedingten Erwartungswertes signifikant:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[R(T)^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{p}{p-1}\left(\int_0^T (\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))\,dW_B(s) + \int_0^T \vartheta_S(s)dW_S(s)\right.\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.\left. -\frac{1}{2}\int_0^T \left((\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))^2+\vartheta_S^2(s)\right)ds\right)\right)\middle|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{p}{p-1}\left(\int_0^T (\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))\,dW_B(s) + \int_0^T \vartheta_S(s)dW_S(s)\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2\int_0^T \left((\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))^2+\vartheta_S^2(s)\right)ds \\
&\qquad\qquad \left.\left.\exp\left(\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}\int_0^T \left((\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))^2+\vartheta_S(s)^2\right)ds\right)\right|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Lambda(T)\exp\left(\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}\int_0^T \left((\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))^2+\vartheta_S^2(s)\right)ds\right)\middle|\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}[\Lambda(T)m(T)|\mathcal{F}(t)] = m(T)\Lambda(t),
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

für alle $t \in [0,T]$ mit

$$
m(T) := \exp\left(\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}\int_0^T \left((\sigma_B(s,T)+\vartheta_B^2(s))+\vartheta_S^2(s)\right)ds\right) \tag{5.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t) := \exp&\left(\frac{p}{p-1}\left(\int_0^T (\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))\,dW_B(s) + \int_0^t \vartheta_S(s)dW_S(s)\right)\right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2\int_0^T \left((\sigma_B(s,T)+\vartheta_B(s))^2+\vartheta_S^2(s)\right)ds\right),
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

wobei $\Lambda(\cdot)$ ein stetiges lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}$ und wegen der Novikov-Bedingung ein Martingal ist. Da die Volatilität σ und der Marktpreis des Risikos ϑ als deterministisch vorausgesetzt wurden, vgl. Bemerkung 5.1, ist $m(\cdot)$ deterministisch und kann daher aus dem bedingten Erwartungswert herausgezogen werden. Es ergibt sich insgesamt für den Vermögensprozess aus (5.24) die Darstellung:

$$\begin{aligned} V^{opt}(t) &= \frac{xB(0,T)^{\frac{p}{p-1}}}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} \mathbb{E}\left[R(T)^{\frac{p}{p-1}} \middle| \mathcal{F}(t)\right] \\ &= \frac{x}{H(t)\mathcal{X}_1(1)} z_0^{\frac{p}{p-1}} m(T)\Lambda(t), \end{aligned} \tag{5.28}$$

für alle $t \in [0,T]$. Dabei lässt sich $\mathcal{X}_1(1)$ mittels desselben Vorgehens, wie in (5.25) und der Martingaleigenschaft von Λ folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1(1) &= \mathbb{E}\left[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\right] = \mathbb{E}\left[m(T)\Lambda(T)\right] \\ &= m(T) \underbrace{\mathbb{E}\left[\Lambda(T)\right]}_{=\mathbb{E}[\Lambda(0)]=1} \\ &= m(T). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Aus der Berechnung in (5.29) und der Deterministik von $m(\cdot)$ folgt die Bedingung $\mathcal{X}_1(\cdot) < \infty$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1(\lambda) &\overset{(5.19)}{=} \lambda^{\frac{1}{p-1}} \mathcal{X}_1(1), \\ &= \lambda^{\frac{1}{p-1}} m(T) < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Folglich lässt sich der optimale Vermögensprozess in (5.28) für alle $t \in [0,T]$ schreiben als:

$$V^{opt}(t) = \frac{x}{H(t)} z_0^{\frac{p}{p-1}} \Lambda(t). \tag{5.31}$$

Das nächste Ziel ist die Herleitung der Gestalt des optimalen Portfolioprozesses für das gemischte Aktien-Bond-Portfolioproblem. Dafür wird $M(t) := H(t)V^{opt}(t)$ für alle $t \in [0,T]$ definiert. Dann gilt für die stochastische Differentialgleichung von M unter

Betrachtung von Darstellungen (5.31) und (5.27):

$$\begin{aligned} dM(t) &= x \cdot z_0^{\frac{p}{p-1}} d\Lambda(t) \\ &= x \cdot z_0^{\frac{p}{p-1}} \Lambda(t) \left(\frac{p}{p-1} \left((\sigma_B(s,T) + \vartheta_B(s))\, dW_B(s) + \vartheta_S(s) dW_S(s) \right) \right) \\ &= H(t) V^{opt}(t) \left(\frac{p}{p-1} \left((\sigma_B(s,T) + \vartheta_B(s)) dW_B(s) + \vartheta_S(s) dW_S(s) \right) \right) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. In der Integraldarstellung kann dies wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} M(t) = M(0) &+ \int_0^t H(s) V^{opt}(s) \frac{p}{p-1} (\sigma_B(s,T) + \vartheta_B(s)) dW_B(s) \\ &+ \int_0^t H(s) V^{opt}(s) \frac{p}{p-1} \vartheta_S(s) dW_S(s) \end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Martingaleigenschaft von M bezüglich $\mathbb{P}$ und das Vorliegen der Wiener-Filtration ermöglichen die Verwendung des Martingaldarstellungssatzes. Das heißt es existiert ein previsibler Prozess $\psi(t) = (\psi_B(t), \psi_S(t))^\top$ mit

$$M(t) = x + \int_0^t \psi_B(s) dW_B(s) + \int_0^t \psi_S(s) dW_S(s). \tag{5.33}$$

Das Gleichsetzen der Gleichungen (5.32) und (5.33) und Verwenden von Darstellung (5.17) liefert:

$$\begin{aligned} \psi_S(t) &= H(t) V^{opt}(t) \frac{p}{p-1} \vartheta_S(t) \\ &= H(t)\ (\pi_S(t) \sigma_S(t,T^*) + V^{opt}(t) \vartheta_S(t)) \end{aligned} \tag{5.34}$$

und

$$\begin{aligned} \psi_B(t) &= H(t) V^{opt}(t) \frac{p}{p-1} (\sigma_B(s,T) + \vartheta_B(s)) \\ &= H(t)(\pi_S(t) \sigma_{SB}(t,T^*) + \pi_B(t) \sigma_B(t,T) + V^{opt}(t) \vartheta_B(t)) \end{aligned} \tag{5.35}$$

für alle $t \in [0,T]$. Die Umstellung der obigen Gleichungen nach π führt für alle $t \in [0,T]$

zu den Formeln für die optimalen Portfolioprozesse $\pi_B^{opt}(\cdot)$ und $\pi_S^{opt}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\pi_S^{opt}(t) &= \sigma_S(t,T^*)^{-1}\left(\frac{\psi_S(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta_S(t)\right)\\ &= \sigma_S(t,T^*)^{-1}\left(\frac{\frac{p}{p-1}\vartheta_S(t)H(t)V^{opt}(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta_S(t)\right)\\ &= \frac{1}{p-1}\frac{\vartheta_S(t)}{\sigma_S(t,T^*)}V^{opt}(t) \end{aligned} \tag{5.36}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}\pi_B^{opt}(t) &= \sigma_B(t,T^*)^{-1}\left(\frac{\psi_B(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta_B(t) - \pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)\right)\\ &= \sigma_B(t,T^*)^{-1}\Bigg(\frac{\frac{p}{p-1}(\sigma_B(t,T)+\vartheta_B(t))H(t)V^{opt}(t)(t)}{H(t)} - V^{opt}(t)\vartheta_B(t)\\ &\qquad - \pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)\Bigg)\\ &= \left(\frac{p}{p-1}\frac{\sigma_B(t,T)}{\sigma_B(t,T^*)} + \frac{1}{p-1}\frac{\vartheta_B(t)}{\sigma_B(t,T^*)}\right)V^{opt}(t) - \frac{\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Um die Übereinstimmung mit der Lösung von Kraft/Korn [KK01], die sich aus dem Verwenden der stochastischen Kontrolltheorie ergeben hat, zu zeigen, werden die Darstellungen für π_B und π_S soweit umgeformt, bis die Analogie erkennbar wird[3]. Definiere dafür:

$$\begin{aligned}\eta_B(t) &:= \frac{\lambda_B(t)}{\sigma_B^2(t,T^*)}\\ \eta_S(t) &:= \frac{\lambda_S(t)}{\sigma_S^2(t,T^*)}\\ \eta_{BS}(t) &:= \frac{\lambda_B(t)}{\sigma_S^2(t,T^*)}, \quad 0 \le t \le T.\end{aligned}$$

[3] Für den genauen Vergleich siehe Anhang A3.

Dann gilt für das optimale Portfolio für alle $t \in [0,T]$:

$$
\begin{aligned}
\pi_S(t) &= \frac{1}{p-1}\frac{\vartheta_S(t)}{\sigma_S(t,T^*)}V^{opt}(t) \\
&\overset{(5.7)}{=} \frac{1}{p-1}\frac{1}{\sigma_S(t,T^*)}\left(\frac{\lambda_S(t)}{\sigma_S(t,T^*)} - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)\lambda_B(t)}{\sigma_S(t,T^*)\sigma_B(t,T^*)}\right)V^{opt}(t) \\
&= \left(\frac{1}{p-1}\frac{\lambda_S(t)}{\sigma_S^2(t,T^*)} - \frac{1}{p-1}\frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\frac{\lambda_B(t)}{\sigma_S^2(t,T^*)}\right)V^{opt}(t) \\
&= \left(\frac{1}{p-1}\left(\eta_S(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_{BS}(t)\right)\right)V^{opt}(t) && (5.38) \\
&= \frac{1}{p-1}\tilde{\eta}_S(t)V^{opt}(t) && (5.39)
\end{aligned}
$$

beziehungsweise

$$
\begin{aligned}
\pi_B(t) &= \left(\frac{p}{p-1}\frac{\sigma_B(t,T)}{\sigma_B(t,T^*)} + \frac{1}{p-1}\frac{\vartheta_B(t)}{\sigma_B(t,T^*)}\right)V^{opt}(t) - \frac{\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)} \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\frac{\sigma_B(t,T)}{\sigma_B(t,T^*)} + \frac{1}{p-1}\frac{\lambda_B(t)}{\sigma_B^2(t,T^*)}\right)V^{opt}(t) - \frac{\pi_S(t)\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)} \\
&\overset{(5.38)}{=} \left(\frac{p}{p-1}\frac{\sigma_B(s,T)}{\sigma_B(t,T^*)} + \frac{1}{p-1}\eta_B(t)\right)V^{opt}(t) \\
&\quad - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\left(\frac{1}{p-1}\left(\eta_S(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_{BS}(t)\right)\right)V^{opt}(t) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\eta_B(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_S(t) + \frac{\sigma_{SB}^2(t,T^*)}{\sigma_B^2(t,T^*)}\frac{\lambda_B(t)}{\sigma_S^2(t,T^*)} + p\underbrace{\frac{\sigma_B(t,T)}{\sigma_B(t,T^*)}}_{:=k(t)}\right)V^{opt}(t) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\left(1 + \frac{\sigma_{SB}^2(t,T^*)}{\sigma_S^2(t,T^*)}\right)\eta_B(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_S(t) + pk(t)\right)V^{opt}(t) && (5.40) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\tilde{\eta}_B(t) + p\cdot k(t)\right)V^{opt}(t). && (5.41)
\end{aligned}
$$

Es wurde die optimale Portfoliostrategie (5.39) und (5.41) für den gemischten Fall, in dem ein Geldmarktkonto, ein Bond und eine Aktie für den Handel zur Verfügung stehen, unter Betrachtung der Potenz-Nutzenfunktion berechnet. Ein Investor mit einem

Anfangskapital $x > 0$ sollte wie folgt vorgehen: Für das Erreichen des maximal nützlichen Zahlungsstroms am Ende der Handelsperiode sollten

$$\pi_B(t) = \frac{1}{p-1}\left(\tilde{\eta}_B(t) + p \cdot k(t)\right) V^{opt}(t)$$

Geldeinheiten in den oben beschriebenen T^*-Bond,

$$\pi_S(t) = \frac{1}{p-1}\tilde{\eta}_S(t) V^{opt}(t)$$

Geldeinheiten in die oben erwähnte Aktie und

$$V^{opt}(t) - \pi_B(t) - \pi_S(t)$$

Geldeinheiten in das Geldmarktkonto zum Zeitpunkt t, mit $t \in [0, T]$, investiert werden.

Es ist von Interesse zu betrachten, wie das optimale Portfolio für das gemischte Aktien-Bond-Portfolio im Hinblick auf Anwendung auf konkrete Short-Rate-Modelle variiert. Zu diesem Zweck werden die obigen Resultate auf das **Vasicek** und das **Ho-Lee-Modell** angewandt. Wie bereits im Abschnitt 4.3 erwähnt, ist die Bedingung $\mathbb{E}[H(T)] < \infty$ für die oben erwähnten Modelle erfüllt. Die Gültigkeit der zweiten entscheidenden Bedingung für die Anwendung der Martingalmethode $\mathcal{X}_1(\lambda) < \infty,\ \lambda \in (0, \infty)$ wurde in der Gleichung (5.30) gezeigt. Eine Anwendung des Satzes 3.11 auf die in 4.1 beschriebene Short-Rate-Modelle liefert das Folgende:

- Im Fall, dass die Short Rate sich durch das **Vasicek-Modell** beschreiben lässt, nimmt der Korrekturterm für alle $t \in [0, T]$ die Gestalt

  $$k(t) = \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{e^{-b(T^*-t)} - 1}$$

  an.

- Im Fall, dass die Short Rate sich durch das **Ho-Lee-Modell** beschreiben lässt, nimmt der Korrekturterm für alle $t \in [0, T]$ die Gestalt

$$k(t) = \frac{T - t}{T^* - t}$$

an.

Durch Betrachtung der optimalen Aufteilung des Vermögens in dem vorliegenden Finanzmarkt ist die Analogie zu dem Bond-Portfolioproblem aus Kapitel 4 zu erkennen[4]: Die Variablen $\tilde{\eta}_B$ und $\tilde{\eta}_S$ können als modifizierte Marktpreise des Risikos interpretiert werden, wobei beide die gewichteten Differenzen zwischen η_S und η_{BS} bzw. η_B und η_S darstellen. Bei dem optimalen Portfolioprozess für die Aktie ist der Marktpreis des Risikos der Aktie korrigiert durch η_{BS}, was für den Marktpreis des Risikos des T^*-Bonds in Bezug auf die Aktie steht. Auf die gleiche Weise enthält der Marktpreis des Risikos des T^*-Bonds eine Korrektur der optimalen Bondposition durch den Marktpreis des Risikos der Aktie. Beide diese Korrekturen sind sinvoll, da die Steigerung des Marktrisikos des T^*-Bonds das Aktieninvestment weniger attraktiv macht und umgekehrt. Zusätzlich können die obigen Werte für den optimalen Portfolioprozess genauso interpretiert werden, wie bei der Optimierung des Bond-Portfolios im Kapitel 4.2.

[4] Diese Interpretation basiert auf [KK01, S. 1263].

6. Fazit

Das Ziel der vorliegenden Masterarbeit bestand darin, das klassische Portfolioproblem , bekannt als Problem von Merton, in einem vollständigen Finanzmarktmodell mit stochastischer Zinsentwicklung zu lösen. Zu diesem Zweck wurde die Martingalmethode vorgestellt, deren Grundidee in der Aufspaltung des dynamischen Portfolioproblems in ein statisches und ein Darstellungsproblem besteht. Im ersten Schritt wurde die optimale Endauszahlung (und optimaler Konsumprozess) bestimmt und in zweitem Schritt das optimale Portfolio, das die statische Lösung repliziert. Es wurde festgestellt, dass zur Existenz der Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.5 die Voraussetzung $\mathcal{X} < \infty$ erfüllt werden muss. Der Schwierigkeitsgrad der Überprüfung dieser Bedingung ist von der gewählten Nutzenfunktion und dem zu betrachteten Modell abhängig. Dies wurde an zwei Beispielen, der logarithmischen und der Potenz-Nutzenfunktion, erläutert. Die Existenz eines Portfolioprozesses zur Lösung des Darstellungsproblems 3.6 konnte zudem mit Vollständigkeit des Finanzmarktmodells begründet werden. Es wurde gezeigt, dass der Martingaldarstellungssatz ein Hauptinstrument zur Berechnung des optimalen Portfolios darstellt. Es ist anzumerken, dass es von einem Finanzmarktmodell mit endlichen Anfangspreisen der Nullkuponanleihen ausgegangen wird, weil es sonst in der Realität wenig Sinn ergibt. Mathematisch ist das mit der Voraussetzung $\mathbb{E}[H(T)] < \infty$ formuliert.

Im Laufe der Arbeit wurde festgestellt, dass die Martingalmethode unter der Annahme der logarithmischen Nutzenfunktion relativ unproblematisch funktioniert. Bei der Potenz-Nutzenfunktion hingegen ist es komplizierter, da die Berechnung des bedingten Erwartungswertes bei der Bestimmung des Vermögensprozesses sowie die Überprüfung der Integritätsbedingung $\mathcal{X} < \infty$ das Kriterium des stochastischen Zinssatzes insgesamt mühseliger macht.

Durch die Berechnung des optimalen Portfolios für das Bond-Portfolio- und das gemischte Aktien- und Bondproblem in short rate Modellen wie Vasicek- und Ho-Lee-Modell mit Hilfe der Martingalmethode wurde die Analogie der mittels der stochastischen Steuerung hergeleiteten Ergebnisse von Kraft/Korn [KK01] gezeigt. Damit weisen beide Methoden trotz der unterschiedlichen Vorgehensweisen keine Diskrepanzen im Ergebnis auf.

Die numerische Implementierung der Ergebnisse für die ausgewählten Short-Rate-Modelle wäre eine mögliche Erweiterung dieser Arbeit. In weiteren Untersuchungen, die über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausgehen würden, könnte die Funktionalität der Martingalmethode in weiteren Short-Rate-Modellen, wie z. B. dem Hull White Modell [HW90] oder dem Cox Ignersoll Ross Modell [CIJR85], untersucht werden. Dabei sollte insbesondere auf die Gültigkeit der Integritätsbedingung $\mathcal{X}(\cdot) < \infty$ geachtet werden. Diese implizieren die Existenz der Lösung des statischen Problems 3.5 und können eventuell bei einigen Short-Rate-Modellen, abhängig von der vorausgesetzten Nutzenfunktion, Schwierigkeiten bereiten. Es könnte vermutet werden, dass die Martingalmethode in Cox-Ingersoll-Ross-Modell [CIJR85] aufgrund der nichterfüllten Voraussetzungen zum Satz 3.8 nicht funktioniert. Für ein genaueres Verständnis dieses Problems wird hier auf [Kra04, S. 44 ff.] verwiesen.

Die Betrachtung allgemeinerer Finanzmarktmodelle mit stochastischen Marktkoeffizienten, wie z. B. HJM Modell [RT06] oder ein Modell, das durch das CIR Model und das stochastische Volatilitätsmodell von Heston [Liu07] in einem gegeben ist, wäre ebenfalls ein weiteres interessantes Analysegebiet.

A. Anhang

A.1. Lösung der SDGL für den abdiskontierten Dichtequotientenprozess

Zu lösen ist:

$$dY(t) = -Y(t)\left[r(t)dt - \vartheta^\top(t)dW(t)\right],\ 0 \le t \le T. \tag{A.1}$$

Betrachte zunächst die homogene Differentialgleichung:

$$dX(t) = -X(t)r(t)dt$$

für alle $t \in [0, T]$ mit $X(0) = 1$, welche durch

$$X(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)\ ds\right)$$

gelöst wird.

Die Lösung der inhomogenen Gleichung wird durch eine Variation der Konstanten bestimmt. Sei $(H(t))_{0\le t\le T}$ die Lösung von der Gleichung (A.1) mit dem Anfangswert $H(0) = 1$, so gilt für $H(t)X^{-1}(t)$ mit der partiellen Integrationsformel:

$$\begin{aligned} dH(t)X^{-1}(t) &= H(t)dX^{-1}(t) + X^{-1}(t)dH(t) + d\langle H, X^{-1}\rangle_t \\ &= H(t)X^{-1}(t)r(t)dt - H(t)X^{-1}(t)r(t)dt + H(t)X^{-1}(t)\vartheta^\top(t)dW(t) \\ &= H(t)X^{-1}(t)\vartheta^\top(t)dW(t), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Somit besitzt diese stochastische Differentialgleichung nach [Pau11, 4.8] die Lösung:

$$H(t)X^{-1}(t) = H(0)X^{-1}(0)\exp\left(\int_0^t \vartheta^\top(s)\ dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2\ ds\right)$$

für alle $t \in [0,T]$. Folglich

$$\begin{aligned} H(t) &= X(t)\exp\left(\int_0^t \vartheta^\top(s)\ dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2\ ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t r(s)\ ds + \int_0^t \vartheta^\top(s)\ dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2\ ds\right), \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$.

A.2. Lösung der SDGL für den Vermögensprozess

Zu bestimmen ist die Lösung von

$$dY(t) = Y(t)r(t)dt + \pi(t)^\top\left[(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)dt + \sigma(t)dW(t)\right] - c(t)dt, \tag{A.2}$$

für alle $t \in [0,T]$ mit Anfangsbedingung $Y(0) = y$. Betrachte zunächst die homogene Differentialgleichung $d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt,\ \beta(0) = 1$, welche durch:

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right),$$

für alle $t \in [0,T]$ gelöst wird.

Die Lösung der inhomogenen Gleichung wird durch eine Variation der Konstanten bestimmt. Sei $(V(t))_{t\in[0,T]}$ eine Lösung von der stochastischen Differentialgleichung (A.2) mit Anfangswert $V(0) = x$, so gilt für $V(t)\beta^{-1}(t)$ mit der partiellen Integrationsformel:

$$\begin{aligned} dV(t)\beta^{-1}(t) &= V(t)d\beta^{-1}(t) + \beta^{-1}(t)dV(t) + d\langle V, \beta^{-1}\rangle_t \\ &= -V(t)\beta^{-1}(t)r(t)dt + \beta^{-1}(t)V(t)r(t)dt \\ &+ \beta^{-1}(t)\left[\pi^\top(t)\left[(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)dt + \sigma(t)dW(t)\right] - c(t)dt\right] \\ &= \beta^{-1}(t)\pi^\top(t)\left[(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n)dt + \sigma(t)dW(t)\right] - \beta^[-1](t)c(t)dt, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$. Dies folgert:

$$\begin{aligned} V(t)\beta^{-1}(t) = V(0)\beta^{-1}(0) &+ \int_0^t \beta^{-1}(s)\left[\pi^\top(s)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n) - c(s)\right] ds \\ &+ \int_0^t \beta^{-1}(s)\pi^\top(s)\sigma(s)dW(s), \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$. Das Ausmultiplizieren beider Seiten der Gleichung mit $\beta(t)$ liefert für alle $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} V(t) = \beta(t)\Bigg[x &+ \int_0^t \beta^{-1}(s)\left[\pi^\top(s)(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}_n) - c(s)\right] ds \\ &+ \int_0^t \beta^{-1}(s)\pi^\top(s)\sigma(s)dW(s)\Bigg]. \end{aligned}$$

A.3. Vergleich mit der Lösung von Kraft/Korn [KK01]

A.3.1. Das Bond-Portfolioproblem

Für den Teil des Vermögens, der in die Aktie im optimalen Fall investiert wird ,gilt:

$$\begin{aligned} \pi^{opt}(t) &= \left(\frac{1}{p-1}\,\frac{\vartheta(t)}{\sigma(t, T^*)} + \frac{p}{p-1}\,k(t)\right)V^{opt}(t) \\ &= \left(\frac{1}{1-p}\,\frac{\vartheta_{KK}(t)}{\sigma(t, T^*)} - \frac{p}{1-p}\,k(t)\right)V^{opt}(t), \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$[1] und dem in [KK01] definierten Martktpreis des Risikos ϑ_{KK}.

[1] Das ist das Ergebnis π_S, das Kraft/Korn in [KK01, Theorem 2.1, S. 1260] erhalten.

A.3.2. Das gemischte Aktien-Bond-Portfolioproblem

Für den Teil des Vermögens, der in die Aktie im optimalen Fall investiert wird, gilt:

$$\pi_S(t) = \left(\frac{1}{p-1}\left(\eta_S(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_{BS}(t)\right)\right)V^{opt}(t),$$

für alle $t \in [0,T]$. Dies lässt sich für alle $t \in [0,T]$ wie folgt umformen:

$$\frac{\pi_S(t)}{V^{opt}(t)} = \left(\frac{1}{p-1}\left(-\eta_S^{KK}(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\left(-\eta_{BS}^{KK}(t)\right)\right)\right).$$

Dies führt zu[2]:

$$\pi_S^{KK}(t) = \left(\frac{1}{1-p}\left(\eta_S^{KK}(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_{BS}^{KK}(t)\right)\right),$$

für alle $t \in [0,T]$.

Für den optimalen Teil des Kapitals, das zum Zeitpunkt t, für alle $t \in [0,T]$, in den T^*-Bond eingezahlt werden soll, gilt:

$$\pi_B(t) = \frac{1}{p-1}\left(\left(1 + \frac{\sigma_{SB}^2(t,T^*)}{\sigma_S^2(t,T^*)}\right)\eta_B(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_S(t) + p \cdot k(t)\right)V^{opt}(t).$$

Diese Gleichung lässt sich für alle $t \in [0,T]$ umformen zu:

$$\frac{\pi_B(t)}{V^{opt}(t)} = \frac{1}{p-1}\left(\left(1 + \frac{\sigma_{SB}^2(t,T^*)}{\sigma_S^2(t,T^*)}\right)(-\eta_B^{KK}(t)) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}(-\eta_S^{KK}(t)) + p \cdot k(t)\right).$$

Es ergibt sich[3]:

$$\pi_B^{KK}(t) = \frac{1}{1-p}\left(\left(1 + \frac{\sigma_{SB}^2(t,T^*)}{\sigma_S^2(t,T^*)}\right)\eta_B^{KK}(t) - \frac{\sigma_{SB}(t,T^*)}{\sigma_B(t,T^*)}\eta_S^{KK}(t) - p \cdot k(t)\right),$$

für alle $t \in [0,T]$.

[2] Das ist das Ergebnis π_S, das Kraft/Korn in [Kra04, Proposition 2.2, S. 38] erhalten.
[3] Das ist das Ergebnis π_B, das Kraft/Korn in [KK01, Theorem 2.2, S. 1263] erhalten.

Literaturverzeichnis

[Als07] Alsmeyer, Gerold: *Skripten zur mathematischen Statistik*. Bd. 30: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 5. Münster : Inst. für Mathematische Statistik, 2007

[Bal01] Balzer, Thomas: *Zeitorientierte Portfolio-Optimierung*. Norderstedt : Libri, 2001

[Bjö04] Björk, Tomas: *Arbitrage theory in continuous time*. 2. Oxford : Oxford Univ. Press, 2004

[BS04] Branger, Nicole ; Schlag, Christian: *Zinsderivate: Modelle und Bewertung*. Springer DE, 2004

[CH89] Cox, John C. ; Huang, Chi-fu: Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. In: *Journal of economic theory* 49 (1989), Nr. 1, S. 33–83

[CIJR85] Cox, John C. ; Ingersoll Jr, Jonathan E. ; Ross, Stephen A.: A theory of the term structure of interest rates. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1985), S. 385–407

[Dec06] Deck, Thomas: *Der Itô-Kalkül: Einführung und Anwendungen*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006

[DN90] Davis, Mark H. ; Norman, Andrew R.: Portfolio selection with transaction costs. In: *Mathematics of Operations Research* 15 (1990), Nr. 4, S. 676–713

[FHH03] Fleming, Wendell H. ; Hernández-Hernández, Daniel: An optimal consumption model with stochastic volatility. In: *Finance and Stochastics* 7 (2003), Nr. 2, S. 245–262

[Fli09] Fliessbach, Torsten: *Mechanik: Lehrbuch Zur Theoretischen Physik I*. Springer DE, 2009

[Has10] Hasow, Katharina: *Portfoliooptimierung in diskreten Finanzmarktmodellen*. 2010. – Universität Münster

[HL86] Ho, Thomas S. ; Lee, Sang-Bin: Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. In: *The Journal of Finance* 41 (1986), Nr. 5, S. 1011–1029

[HW90] Hull, John ; White, Alan: Pricing interest-rate-derivative securities. In: *Review of financial studies* 3 (1990), Nr. 4, S. 573–592

[Kar97] Karatzas, Ioannis: *Lectures on the mathematics of finance*. Bd. 8. Providence and R.I : American Mathematical Society, 1997

[KK01] Korn, Ralf ; Kraft, Holger: A Stochastic Control Approach to Portfolio Problems with Stochastic Interest Rates. In: *SIAM Journal on Control & Optimization* 40 (2001), Nr. 4, S. 1250–1269

[KLS87] Karatzas, Ioannis ; Lehoczky, John P. ; Shreve, Steven E.: Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a Small Investor on a Finite Time-Horizon. In: *SIAM Journal on Control & Optimization* 25 (1987), S. 1557–1586

[Kra04] Kraft, Holger: *Optimal portfolios with stochastic interest rates and defaultable assets*. Bd. 300. Berlin and New York : Springer-Verlag, 2004

[KS91] Karatzas, Ioannis ; Shreve, Steven E.: *Brownian motion and stochastic calculus*. Bd. 113. 2. New York : Springer-Verlag, 1991

[KS98] Karatzas, Ioannis ; Shreve, Steven E.: *Methods of mathematical finance*. Bd. 39. New York : Springer, 1998

[KS00] Karatzas, Ioannis ; Shreve, Steven E.: *Brownian motion and stochastic calculus*. Bd. 113. 2. ed., (corr. 6. print.). New York u.a : Springer, 2000

[Liu07] Liu, Jun: Portfolio selection in stochastic environments. In: *Review of Financial Studies* 20 (2007), Nr. 1, S. 1–39

[Mar52] Markowitz, Harry: Portfolio selection. In: *The journal of finance: the journal of the American Finance Association* 7 (1952), Nr. 1, S. 77–91

[Mar59] Markowitz, Harry: *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Yale university press, 1959 (16)

[Mar08] Markowitz, Harry: *Portfolio selection: Die Grundlagen der optimalen Portfolio-Auswahl*. 1. München : FinanzBuch-Verl., 2008

[Mer69] Merton, Robert C.: Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. In: *The Review of Economics and Statistics* 51 (1969), Nr. 3, S. 247–257

[Mer73] Merton, Robert C.: An intertemporal capital asset pricing model. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1973), S. 867–887

[Ost10] Ostwald, Alexander: Das HJM-Modell und das LIBOR Markt Modell zur Beschreibung von Zinsstrukturkurven. (2010). – Universität Münster

[Pau10] Paulsen, V.: *Handschriftliches Skript zu der Vorlesung Finanzmathematik I*. WS 2009/2010. – Universität Münster

[Pau11] Paulsen, V.: *Handschriftliches Skript zu der Vorlesung Mathematische Modelle*. SS 2011. – Universität Münster

[Pli86] Pliska, Stanley R.: A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios. In: *Mathematics of Operations Research* 11 (1986), S. 371–382

[RT06] Ringer, Nathanael ; Tehranchi, Michael: Optimal portfolio choice in the bond market. In: *Finance and Stochastics* 10 (2006), Nr. 4, S. 553–573

[Set97] Sethi, Suresh P.: *Optimal consumption and investment with bankruptcy.* Springer, 1997

[Vas77] Vasicek, Oldrich: An equilibrium characterization of the term structure. In: *Journal of financial economics* 5 (1977), Nr. 2, S. 177–188