



# KALIBRIERUNG EINES LIBOR-MARKT-MODELLS

MASTERARBEIT

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:  
*PD Dr. Volkert Paulsen*

Eingereicht von:  
*Erik Santen*

Münster, 28. Oktober 2013

### Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Erik Santen, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Münster, 28. Oktober 2013

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Zinssätze und Derivate . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Libor-Markt-Modell</b>	<b>9</b>
3.1	Einleitung . . . . .	9
3.2	Modellwahl . . . . .	14
3.3	Volatilitätsstruktur . . . . .	19
3.3.1	Stückweise konstante Volatilität . . . . .	19
3.3.2	Parametrischer Ansatz . . . . .	20
3.4	Modellierung der Korrelationsstruktur . . . . .	22
3.4.1	Klassische Ansätze zur Modellierung der Korrelationsstruktur	24
3.4.2	Schoenmakers & Coffey Ansatz . . . . .	25
3.5	Zinskurve . . . . .	27
3.6	Bewertung von Caps im Libor-Markt-Modell . . . . .	31
3.7	Cap-to-Caplet-Stripping . . . . .	34
3.8	Bewertung von Swaptions . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Kalibrierung des Libor-Markt-Modells</b>	<b>44</b>
4.1	Grundlagen für die Kalibrierung . . . . .	44
4.2	Gleichzeitige Kalibrierung an Swaptions und Caplets . . . . .	49
4.3	Stabilere Kalibrierung im erweiterten Modell . . . . .	52
4.3.1	Terminale Korrelation . . . . .	53
4.3.2	Kalibrierung mit terminaler Korrelation . . . . .	55
4.4	Unterschiedliche Laufzeiten von Caps und Swaptions . . . . .	57
4.5	Äquivalente Darstellung der Dynamiken der Libor-Raten . . . . .	59
4.6	Rangreduzierung . . . . .	61
4.7	Kalibrierungsschritte . . . . .	64
4.8	Ergebnisse der Kalibrierung . . . . .	66
4.9	Pricing . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>72</b>
A.1	Optimierungsmethode für die Kalibrierung . . . . .	72
A.1.1	Aktualisierung der Hesse-Matrix . . . . .	75
A.1.2	QP Algorithmus . . . . .	76
A.1.3	Globales/Lokales Minimum . . . . .	77
A.2	Integrationsterm . . . . .	77
A.3	Daten vom 02.08.2013 . . . . .	78
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>83</b>

## 1 Einleitung

Eines der meist verwendeten Zinsstrukturmodelle zur Bewertung von am Markt gehandelten Zinsderivaten ist das Libor-Markt-Modell. Der große Vorteil dieses Modells liegt in der Tatsache begründet, dass es im Gegensatz zu anderen Modellen, wie zum Beispiel den Short-Rate-Modellen, eine am Markt beobachtbare Größe, die „London Interbank Offered Rate“, kurz Libor, als Referenzzinssatz zugrunde legt.

Das Ziel der Arbeit besteht darin, zunächst einige theoretische Voraussetzungen für das Libor-Markt-Modell darzustellen um dieses dann auf Basis dieser Grundlagen herzuleiten. Im Anschluss daran werden wir das so erhaltene Modell an gegebene Marktdaten kalibrieren, um so eine Grundlage für die Bewertung verschiedener Zinsderivate zu erhalten. Für die Kalibrierung haben wir gewisse Annahmen zu treffen bzw. entsprechende Approximationen zu verwenden. Daher stellt die Herleitung und Begründung dieser Voraussetzungen für die Marktkalibrierung einen wesentlichen Teil dieser Arbeit dar und wird an den entsprechenden Stellen geliefert. Zusätzlich zu den dargestellten Annahmen werden auch Erweiterungsmöglichkeiten oder mögliche Alternativen genannt, die verdeutlichen sollen, dass es bei der Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an am Markt gegebene Daten durchaus unterschiedliche Vorgehensweisen mit jeweils eigenen Vor- und Nachteilen gibt. Die Wahl und die darauf aufbauende Anwendung eines für unsere Problemstellung geeigneten Ansatzes wird dann anschließend durchgeführt.

Insgesamt ist die Arbeit wie folgt aufgebaut:

Im **zweiten Kapitel** werden die finanzmathematischen und betriebswirtschaftlichen Hintergründe und Grundlagen dargestellt. Dabei werden vor allem relevante Zinssätze und Zinsderivate erläutert.

Im Anschluss daran wird im **dritten Kapitel** zunächst das Libor-Markt-Modell anhand der Ausführungen aus dem zweiten Kapitel aufgestellt. Es wird dargestellt, für welchen späteren Modellansatz wir uns in der Arbeit entschieden haben und es werden die für die spätere Kalibrierung verwendeten Strukturen für Volatilität und Korrelation hergeleitet. Danach werden die am Markt angegebenen Daten für Libor-Raten, Caps und Swaptions abgebildet und es wird dargelegt, wie daraus die vollständigen Daten, die für die Marktkalibrierung erforderlich sind, gewonnen werden. Zusätzlich wird die Bewertung von Zinsderivaten wie Caps bzw. Caplets und Swaptions im Libor-Markt-Modell erläutert.

Im **vierten Kapitel** der Arbeit werden zunächst die Kalibrierungsgrundlagen und Approximationsformeln geliefert. Mithilfe dieser Ansatzpunkte wird dann versucht eine direkte Kalibrierung durch Minimierung einer entsprechenden Zielfunktion durchzuführen, bevor dann eine Erweiterung dieser Methode – die dann letztendlich auch zur Anwendung kommt – angegeben wird. Hierbei werden zudem die verschiedenen Laufzeiten der verwendeten Zinsderivate berücksichtigt. Es wird außerdem dargestellt, wie ein Libor-Markt-Modell mit einer gewissen vorher fest

---

gewählten Anzahl an treibenden Faktoren, die für die „zufälligen“ Zinsentwicklungen verantwortlich sind, bestimmt werden kann. Darauf folgend werden dann die aus der Marktkalibrierung gewonnenen Daten angegeben und es wird beschrieben, wie diese Ergebnisse für die Bewertung weiterer Finanzprodukte verwendet werden können.

Das **fünfte Kapitel** dieser Arbeit fasst die gewonnenen Erkenntnisse noch einmal zusammen und komplettiert zusammen mit dem darauf folgenden Anhang und dem Literaturverzeichnis die vorliegende Arbeit. Dabei wird im Anhang die für die Implementierung der Kalibrierung genutzte Optimierungsmethode genauer dargestellt, sodass die zur Anwendung kommenden numerischen Verfahren nachvollzogen werden können.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Privatdozent Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung dieses Themas und die ausgezeichnete Betreuung während der Masterarbeit recht herzlich danken. Die vorliegende Arbeit ist in einer Kooperation mit dem Unternehmen „zeb/information.technology gmbh & co.kg.“ unter der Leitung von Herrn Christoph Moll entstanden. Auch ihm möchte ich meinen herzlichen Dank für die sehr gute Betreuung während der gesamten Arbeit aussprechen.

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die benötigten Grundlagen für die weitere Arbeit geschaffen werden. Dazu werden die wichtigsten Bausteine für die Darstellung und Herleitung des Libor-Markt-Modells geliefert. Die angegebenen Ausführungen orientieren sich vor allem an den Büchern [BM06], [Hul02], [AP10a] und an den Mitschriften aus [Pau13].

Die Basis des Libor-Markt-Modells bilden die Libor-Zinssätze, auch Libor-Raten genannt. Diese sind am Markt quotierte und somit bekannte Interbankenzinssätze, die für verschiedene Währungen berechnet werden. Im Euro-Raum dient dabei vor allem der sogenannte Euribor-Zinssatz als Referenzzins. In den Betrachtungen dieser Arbeit werden wir jedoch allgemein vom Libor-Zinssatz und den Libor-Raten sprechen, da dies die in der Theorie übliche Bezeichnung ist. Für die später durchgeführten Berechnungen verwenden wir aber auf dem Euribor-Zinssatz basierende Marktdaten. Mit diesen Daten ist eine Herleitung, Darstellung und Kalibrierung des Modells auf dieselbe Art und Weise möglich, wie wir es anhand der Libor-Raten darstellen werden.

Im Folgenden wird der Zeitraum der Betrachtungen des Modells immer als endlich vorausgesetzt und werde mit  $[0, T_N]$  bezeichnet, wobei  $0 \leq T_N < \infty$  ist.

### 2.1 Zinssätze und Derivate

Einer der Hauptbausteine des Modells sind die Zero-Coupon-Bonds, welche wir im weiteren Verlauf der Arbeit auch der Einfachheit halber als Bonds bezeichnen. Sie sind wie folgt definiert:

**Definition 2.1:** Zero-Coupon-Bond

Ein Zero-Coupon-Bond, oft auch als Nullkuponanleihe bezeichnet, ist ein verzinsliches Wertpapier ohne laufende Zinszahlungen. Es wird lediglich zu einem festgelegten zukünftigen Zeitpunkt  $T$  mit  $0 \leq T \leq T_N$  der Nennwert des Bonds, der in unserem Fall immer 1 Euro beträgt, ausgezahlt. Im weiteren Verlauf der Arbeit bezeichnet  $B(t, T)$  den Wert eines solchen Bonds zum Zeitpunkt  $t$  mit Auszahlung 1 in  $T$ .

Ein Zero-Coupon-Bond mit Auszahlungszeitpunkt  $T$  wird oftmals auch als  $T$ -Bond bezeichnet. Wir benötigen zusätzlich zu dieser Definition ein paar grundlegende Voraussetzungen an die Bonds:

Ein Bond entspricht für uns im Weiteren immer einer risikolosen Anlage. Der Inhaber des  $T$ -Bonds erhält zum Zeitpunkt  $T$  somit eine sichere Auszahlung von 1 Euro. Weiterhin ist der Wert eines Bonds in  $t$  immer positiv, das heißt es gilt  $B(t, T) > 0$  für alle  $t$  und  $T$ , für die  $0 \leq t \leq T \leq T_N$  ist. Der Bondpreis  $B(t, T)$  wird zudem als Funktion von  $T$  als monoton fallende Abbildung angenommen. Dies bedeutet, dass  $B(t, T_p) \geq B(t, T_q)$  für  $t, T_p, T_q$  mit  $0 \leq t \leq T_p \leq T_q \leq T_N$ .

Aufbauend auf den dargestellten Bonds als Basisfinanzgüter können wir nun einige weitere Annahmen und Definitionen treffen.

Zunächst wollen wir den jährlichen Zinssatz, mit dem eine risikolose Kapitalverzinsung zwischen dem heutigen Zeitpunkt  $t$  und einem zukünftigen Zeitpunkt  $T_1 \leq T_N$  möglich ist, untersuchen. Dieser Zinssatz soll als Spot-Libor-Rate bezeichnet werden. Soll nun eine Geldeinheit risikolos für den Zeitraum  $[t, T_1]$  angelegt werden, so kann dies durch den Kauf von  $B(t, T_1)^{-1}$   $T_1$ -Bonds erreicht werden. Man erhält somit dann durch eine Geldeinheit in  $t$  eine Rückzahlung von  $B(t, T_1)^{-1}$  Geldeinheiten in  $T_1$ .

Bezeichne nun  $L(t, T_1)$  den jährlichen Zinssatz einer risikolosen Anlage über den Zeitraum  $[t, T_1]$ , so erfüllt dieser Zinssatz die Gleichung

$$1 + L(t, T_1)(T_1 - t) = B(t, T_1)^{-1}.$$

Wir können also die Spot-Libor-Rate  $L(t, T_1)$  wie folgt definieren:

**Definition 2.2:** Spot-Libor-Rate

Gegeben sei der Zeitraum  $[t, T_1]$  mit dem heutigen Zeitpunkt  $t$  und dem zukünftigen Zeitpunkt  $T_1$  mit  $0 \leq t < T_1 \leq T_N$ . Dann ergibt sich die sogenannte Spot-Libor-Rate  $L(t, T_1)$  als Zinssatz für eine risikolose Anlage über diesen Zeitraum durch

$$L(t, T_1) = \frac{1}{T_1 - t} \left( \frac{1}{B(t, T_1)} - 1 \right). \quad (2.1)$$

Betrachten wir nun ein in der Zukunft liegendes Intervall  $[T_1, T_2]$  und den heutigen Zeitpunkt  $t$  mit  $0 \leq t < T_1 < T_2 \leq T_N$ . Das Ziel ist es nun, die Forward-Libor-Rate  $F(t; T_1, T_2)$ , also den risikolosen Zinssatz, der im Zeitpunkt  $t$  für das Intervall  $[T_1, T_2]$  garantiert werden kann, zu bestimmen. Dies werden wir im Folgenden ausgehend von der Betrachtung eines Forward Rate Agreements untersuchen.

### Forward Rate Agreement

Ein Forward Rate Agreement (FRA) ist ein Zinstermingeschäft, welches es zu einem Zeitpunkt  $t$  ermöglicht einen festen Zinssatz für einen in der Zukunft liegenden Zeitraum  $[T_1, T_2]$  zu sichern. Es wird also in  $t$  ein fester Zinssatz für das Intervall  $[T_1, T_2]$  vereinbart. Bei Zugrundelegen der Libor-Raten als Referenzzinssatz werden also in  $[T_1, T_2]$  die festen Zinsen  $K$  statt der variablen Zinsen, die durch die Spot-Libor-Rate  $L(T_1, T_2)$  gegeben sind, gezahlt. Ein FRA mit 1 Euro als Nominalwert führt somit unter Anwendung von Gleichung (2.1) in  $T_2$  zu der Auszahlung

$$(T_2 - T_1)(L(T_1, T_2) - K) = \frac{1}{B(T_1, T_2)} - 1 - K(T_2 - T_1).$$

Ausgehend von einem FRA kann man nun die Forward Rate bestimmen. Sie entspricht dem festen Zinssatz  $K$ , für den ein FRA zum Zeitpunkt  $t$  fair ist, also den Wert 0 hat. Um nun die Höhe der Forward Rate zu ermitteln, ist der



arbitragefreie Preis eines FRAs zum Zeitpunkt  $t$  zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst noch einmal die Auszahlung des FRAs in  $T_2$ , diese beträgt wie oben gesehen

$$\frac{1}{B(T_1, T_2)} - 1 - K(T_2 - T_1).$$

Um eine Auszahlung von  $B(T_1, T_2)^{-1}$  in  $T_2$  zu erhalten, muss man 1 Euro in  $T_1$  und daher  $B(t, T_1)$  Euro in  $t$  investieren. Weiterhin erhält man eine Auszahlung in Höhe von  $1 + K(T_2 - T_1)$  Euro in  $T_2$ , wenn man in  $t$  exakt  $(1 + K(T_2 - T_1))$   $T_2$  Bonds kauft. Insgesamt ergibt sich somit für den arbitragefreien Preis eines solchen FRAs der Zusammenhang

$$FRA(t; T_1, T_2) = B(t, T_1) - (1 + K(T_2 - T_1))B(t, T_2). \quad (2.2)$$

Die Forward Rate erhält man nun, indem man diese Gleichung gleich 0 setzt. Es ergibt sich

$$K = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right).$$

Hieraus können wir direkt folgern:

**Definition 2.3:** Forward-Libor-Rate

Betrachten wir die Zeitpunkte  $t, T_1$  und  $T_2$  mit  $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T_N$ . Die Forward-Libor-Rate ist der in  $t$  festgelegte risikolose Zinssatz für eine Verzinsung über das Intervall  $[T_1, T_2]$  und wird mit  $F(t; T_1, T_2)$  bezeichnet. Sie wird mithilfe der Bonds durch

$$F(t; T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right) \quad (2.3)$$

definiert.

**Bemerkung:** Im Weiteren bezeichnen wir die Forward-Libor-Rate als Libor-Rate. Außerdem schreiben wir zur Abkürzung für die  $i$ -te Libor-Rate, die die Verzinsung für den Zeitraum  $[T_i, T_i + 1]$  angibt, oftmals  $L_i(t)$  statt  $F(t; T_i, T_{i+1})$  für alle  $1 \leq i \leq N-1$ . Da wir im Modell nur diskrete Zinssätze betrachten, verzichten wir auf die Darstellung stetiger Zinssätze und verweisen dazu zum Beispiel auf [Hul02].

Anhand der Definition der Libor-Rate (2.3) und dem arbitragefreien Preis eines FRAs (2.2) kann man sehen, dass ein FRA mit den obigen Eigenschaften zum Zeitpunkt  $t$  den arbitragefreien Preis

$$FRA(t; T_1, T_2) = \delta_1 B(t, T_2) (F(t; T_1, T_2) - K)$$

mit  $\delta_1 = (T_2 - T_1)$  besitzt.

Ausgehend von diesen Grundlagen werden nun in den nächsten Abschnitten die in der Arbeit betrachteten Zinsderivate dargestellt.

## Zinscaps

Zinscaps, im Weiteren auch als Caps bezeichnet, sind am Markt gehandelte Zinsderivate. Ein Cap besteht aus mehreren Caplets, wobei jedes dieser Caplets eine Call-Option auf einen gewählten Zinssatz darstellt. Das Ziel beim Kauf eines Caplets besteht darin, sich gegen steigende variable Zinsen abzusichern.

In unseren Betrachtungen dient der Libor-Zinssatz als Referenzzinssatz. Außerdem beträgt der von uns gewählte Nominalbetrag zur Vereinfachung im Modell immer 1 Euro. Ein Caplet wird nun zum heutigen Zeitpunkt  $t$  für einen zukünftigen Zeitraum  $[T_i, T_{i+1}]$ ,  $1 \leq i, \leq N-1$  abgeschlossen. Hierbei stellt  $T_i$  den Zinsanpassungstermin dar. Am Zinsanpassungstermin wird jeweils der variable Zinssatz  $F(T_i; T_i, T_{i+1})$  für das Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  festgelegt und in  $T_{i+1}$  werden dann die Zinszahlungen vorgenommen. Übersteigen nun die variablen Zinsen  $F(T_i; T_i, T_{i+1})$  im Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  den in  $t$  festgelegten Strike  $K$ , so wird in  $T_{i+1}$  die Differenz dieser Zinssätze entsprechend des Anlagezeitraums  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$  ausgezahlt.

In  $T_{i+1}$  ergibt sich somit insgesamt die folgende Auszahlung für ein Caplet:

$$\delta_i (F(T_i; T_i, T_{i+1}) - K)^+$$

Somit erfolgt in  $T_{i+1}$  genau dann eine Auszahlung, wenn der Referenzzinssatz höher als der Strike  $K$  ist. Mithilfe der angegebenen Auszahlung eines Caplets lässt sich auch die Auszahlung eines Caps berechnen. Betrachten wir also zwei Termine  $T_n$  und  $T_m$  auf der Tenorstruktur mit  $1 \leq n < m \leq N$  und einen zugehörigen Cap über das Intervall  $[T_n, T_m]$ . Alle in dem Cap enthaltenen Caplets werden nun zum gleichen Strike  $K$  abgeschlossen. Bezeichnen wir also mit  $C_i(t; K)$  den Wert des Caplets mit Strike  $K$  für das Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  in  $t$ , so ergibt sich der Wert  $C_{n,m}^K(t)$  des gesamten Caps als Summe über die einzelnen Werte der Caplets, genauer

$$C_{n,m}^K(t) = \sum_{i=n}^{m-1} C_i(t; K).$$

## Zinsfloor

Ein Zinsfloor oder Floor bildet das Gegenstück zu einem Cap und dient zur Absicherung gegen fallende variable Zinsen. Analog zum Cap besteht ein Floor aus mehreren Floorlets. Jedes dieser Floorlets ist eine Put-Option auf den Referenzzinssatz. Für einen Floorlet werden ein Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  mit Zinsanpassungstermin  $T_i$ , Zahlungszeitpunkt  $T_{i+1}$  und ein Strike  $K$  festgelegt. Die Auszahlung eines solchen Floorlets mit Intervalllänge  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$  beträgt somit in  $T_{i+1}$

$$\delta_i (K - F(T_i; T_i, T_{i+1}))^+.$$

Der Wert eines Floors für das Intervall  $[T_n, T_m]$  ergibt sich dann zum Zeitpunkt  $t$  als Summe über die Werte der einzelnen Floorlets:

$$F_{n,m}^K(t) = \sum_{i=n}^{m-1} F_i(t; K)$$

Dabei bezeichnet  $F_i(t; K)$  den Wert eines Floorlets über das Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$ .

### Zinsswap

Ein Zinsswap, kurz Swap, bezeichnet einen Kontrakt zum Tausch von variablen gegen feste Zinsen. Es wird unterschieden zwischen einem Payer- und einem Receiver-Swap. Bei Ersterem werden feste Zinsen gezahlt und variable Zinsen abhängig vom Referenzzinssatz erhalten. Beim Receiver-Swap liegt ein umgekehrter Zahlungsfluss vor, der Inhaber zahlt abhängig vom Referenzzinssatz variable Zinsen und erhält feste Zahlungen. In der Praxis wird nur die Differenz zwischen festen und variablen Zinsen gezahlt. Die einzelnen festen und variablen Zahlungen erfolgen dabei nicht.

Betrachten wir nun die Termine  $T_n$  und  $T_m$  auf der Tenorstruktur mit  $1 \leq n < m \leq N$ . Ein Payer-Swap ist nun eine rollierende Abfolge von FRA-Kontrakten, die zum Zeitpunkt  $t$  für die Intervalle  $[T_i, T_{i+1}]$  mit  $n \leq i \leq m - 1$  abgeschlossen worden sind. Den Wert eines Payer-Swaps zum Zeitpunkt  $t$  erhält man somit durch

$$\begin{aligned} \text{Swap}(t; T_n, T_m) &= \sum_{i=n}^{m-1} \text{FRA}(t; T_i, T_{i+1}) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) (F(t; T_i, T_{i+1}) - K) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} B(t, T_i) - B(t, T_{i+1}) - K \delta_i B(t, T_{i+1}) \\ &= B(t, T_n) - B(t, T_m) - K \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}). \end{aligned}$$

Wir suchen nun den festen Zinssatz  $K$ , der dafür sorgt, dass die im Intervall  $[T_n, T_m]$  anfallenden variablen und festen Zinsen den gleichen Wert haben. Für diesen Zinssatz ist der Swap fair, der Gesamtwert der Zahlungen muss in  $t$  also 0 sein. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \text{Swap}(t; T_n, T_m) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow B(t, T_n) - B(t, T_m) - K \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichheit gilt genau dann, wenn der Zusammenhang

$$K = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1})} =: S_{n,m}(t)$$

gilt.

Hierbei wird  $S_{n,m}(t)$  als Swap-Rate bezeichnet. Man kann nun den Wert des Swaps in Abhängigkeit von der Swap-Rate angeben und erhält so:

$$\begin{aligned} \text{Swap}(t; T_n, T_m) &= B(t, T_n) - B(t, T_m) - K \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) \\ &= (S_{n,m}(t) - K) \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Gleichung können wir nun auch Optionen auf solche Swaps betrachten. Dies ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

### Swaption

Eine Swaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Es kann hierbei wieder zwischen Payer- und Receiver-Swaptions unterschieden werden. Beim Kauf einer Payer-Swaption erwirbt der Käufer das Recht, in einen Swap einzutreten, bei dem er einen festen Zinssatz zahlt und variable Zinsen erhält. Eine Receiver-Swaption dagegen ist das Recht, in einen Swap einzutreten, bei dem man einen festen Zinssatz bekommt und einen variablen Zinssatz zahlt.

Betrachten wir nun eine Payer-Swaption für das Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit  $1 \leq n < m \leq N$ . Diese Swaption ist eine Option auf einen Swap für das Intervall  $[T_n, T_m]$ . Der Inhaber der Swaption hat somit das Recht den Swap im Zeitpunkt  $T_n$  auszuüben. Er wird dies tun, wenn der Wert der Swaption in  $T_n$  nichtnegativ ist, wenn also gilt  $\text{Swap}(T_n; T_n, T_m) \geq 0$ . Es ergibt sich somit als Auszahlung der Swaption in  $T_n$  der Wert

$$(S_{n,m}(T_n) - K)^+ \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(T_n, T_{i+1}).$$

Nachdem wir nun die grundlegenden Zinssätze und Derivate dargestellt haben, wollen wir im nächsten Kapitel die Herleitung und den Aufbau des Libor-Markt-Modells liefern.

### 3 Libor-Markt-Modell

Im Folgenden wollen wir zunächst das Libor-Markt-Modell darstellen. Unser Ziel ist es, ausgehend von einigen generellen Annahmen herzuleiten, wie die im vorherigen Kapitel erwähnten Produkte mithilfe dieses Modells bewertet werden können. Die Ausführungen orientieren sich dabei vor allem an [Pau13] und [BM06].

#### 3.1 Einleitung

Ausgangspunkt des Libor-Markt-Modells sind die Libor-Raten, welche als Referenzzinssatz im Interbankengeschäft dienen und täglich fixiert werden. Das Libor-Markt-Modell liefert dabei einen Ansatz um die Struktur der Libor-Raten zu modellieren. Es wurde von Brace, Gatarek und Musiela in [BGM97], Jamshidian in [Jam97] und Miltersen, Sandmann und Sondermann in [MSS97] entwickelt. Im Unterschied zum traditionellen Ansatz der Short-Rate-Modelle, bei dem es darum geht die augenblicklichen Zinsraten zu modellieren, welche nicht am Markt beobachtet werden können und daher ein theoretisches Gebilde sind, versucht man nun die Entwicklung der Libor-Raten darzustellen. Diese stellen keine unbeobachtbaren Größen dar, sondern werden – wie angegeben – täglich am Markt fixiert.

Die zum heutigen Zeitpunkt angegebenen Libor-Raten sind vorliegende Eingangsgrößen und alle zukünftigen Forward-Libor-Raten stellen im Gegensatz dazu stochastische Größen dar. Das Ziel ist es im Libor-Markt-Modell diese Forward-Libor-Raten zu modellieren.

Folgende Voraussetzungen stellen die Grundlagen unserer Modellierung dar: Gegeben ist eine Tenorstruktur

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{N-1} < T_N$$

mit den Intervalllängen  $\delta_i = T_{i+1} - T_i, i = 0, \dots, N - 1$ . Die Bondpreise

$$(B(t, T_i))_{0 \leq t \leq T_i}, i = 1, \dots, N - 1$$

dienen in diesem Modell als Basisfinanzgüter. Als Numeraire Asset fungiert der Preisprozess des  $T_N$ -Bonds  $(B(t, T_N))_{0 \leq t \leq T_N}$ . Dadurch ist ein zeitstetiges Finanzmarktmodell mit  $N - 1$  Basisfinanzgütern und einem Numeraire Asset definiert. Weiterhin wird angenommen, dass ein  $(N - 1)$ -dimensionaler Wiener-Prozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  die Quelle des Zufalls darstellt. Es existiert somit ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_t, P)$ , so dass  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  die durch den Wiener-Prozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  erzeugte Wiener-Filtration ist.

Weiterhin gehen wir davon aus, dass das Modell arbitragefrei ist. Nach dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie (vgl. [Pau13]) existiert daher ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{T_N}$  mit den Eigenschaften:

- i)  $P_{T_N} \sim P$

ii)  $\left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_N)}\right)_{0 \leq t \leq T_i}$  ist ein  $P_{T_N}$ -Martingal für alle  $1 \leq i \leq N - 1$

$P_{T_N}$  ist somit in diesem Modell ein äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Numeraire Assets  $(B(t, T_N))_{0 \leq t \leq T_N}$ .

Das Forwardmartingalmaß  $P_{T_N}$  wird auch als „Terminal Measure“ bezeichnet, da  $T_N$  den letzten Zeitpunkt auf der Tenorstruktur des Modells darstellt.

Im Libor-Markt-Modell bilden die Libor-Raten die Grundlage der Modellierung. Die einzelnen Libor-Raten  $(L_i(t))_{0 \leq t \leq T_i}$  mit  $1 \leq i \leq N - 1$  sind jeweils gegeben durch

$$L_i(t) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} - 1 \right) \quad (3.1)$$

wobei die Länge der Tenorintervalle wie oben durch  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$  festgelegt ist.

Zusätzlich zu diesen Libor-Raten ist die Libor-Rate  $L_0(t)$  für  $t = 0$  verfügbar. Sie gibt die Verzinsung vom Zeitpunkt  $t = 0$  bis zum Zeitpunkt  $T_1$  auf der Tenorstruktur an.

Eine weitere Annahme des Modells besteht darin, dass wir voraussetzen, dass für jedes  $1 \leq i \leq N - 1$  der Libor-Raten-Prozess  $(L_i(t))_{0 \leq t \leq T_i}$  strikt positiv ist. Daraus lässt sich direkt folgern, dass die Prozesse  $(L_i(t))_{0 \leq t \leq T_i}$  für  $1 \leq i \leq N - 1$  strikt positive Semimartingale bezüglich  $P_{T_N}$  sind, da

$$\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} = \frac{B(t, T_i)/B(t, T_N)}{B(t, T_{i+1})/B(t, T_N)}$$

als Quotient zweier  $P_{T_N}$ -Martingale ein  $P_{T_N}$ -Semimartingal ist.

Bezüglich des Terminal Measures  $P_{T_N}$  kann man nun durch induktives Vorgehen, ausgehend von  $(L_{N-1}(t))_{0 \leq t \leq T_N}$  die Dynamiken der Libor-Raten-Entwicklung klären. Zudem können wir die Dynamik eines Libor-Raten-Prozesses  $(L_i(t))_t$  unter seinem individuellen Forwardmartingalmaß  $P_{T_{i+1}}$  angeben. Dies ist möglich, da wir wissen, dass  $\left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})}\right)_t$  und somit auch  $(L_i(t))_t = \left(\frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} - 1\right)\right)_t$  Martingale bezüglich  $P_{T_{i+1}}$  sind.

Wir erhalten also insgesamt folgende Dynamiken der Libor-Raten unter den angegebenen Maßen:

**Satz 3.1:** Dynamiken der Libor-Raten im Libor-Markt-Modell

Sei eine Tenorstruktur  $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{N-1} < T_N$  und  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$  für  $i = 1, \dots, N - 1$  gegeben. Dann ist die Dynamik der Libor-Rate  $(L_k(t))_t$  mit  $k \in 1, \dots, N - 1$  unter dem Forwardmartingalmaß  $P_{T_{i+1}}$  gegeben durch:

- $i = k, t \leq T_k$  :

$$dL_k(t) = \sigma_k(t) L_k(t) dW_k^{i+1}(t)$$

- $i < k, t \leq T_i + 1$  :

$$dL_k(t) = \sigma_k(t)L_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)L_j(t)}{1 + \delta_jL_j(t)} dt + \sigma_k(t)L_k(t)dW_k^{i+1}(t)$$

- $i > k, t \leq T_k$  :

$$dL_k(t) = -\sigma_k(t)L_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)L_j(t)}{1 + \delta_jL_j(t)} dt + \sigma_k(t)L_k(t)dW_k^{i+1}(t)$$

Hierbei bezeichnet  $W_k^{i+1}$  jeweils die  $k$ -te Komponente eines  $(N-1)$ -dimensionalen korrelierten Wiener-Prozesses  $W^{i+1}$  bezüglich  $P_{T_{i+1}}$  mit

$$d\langle W_k^{i+1}, W_j^{i+1} \rangle_t = \rho_{k,j} dt, \quad \forall k, j = 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

Die Korrelationsmatrix ist dann definiert durch  $(\rho_{k,j})_{k,j=1,\dots,N-1}$ . Wir nehmen weiterhin an, dass die Volatilität  $\sigma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dabei für jedes  $i = 1, \dots, N-1$  eine deterministische Funktion ist. Weitere Formen für die Volatilität  $\sigma_i$ , die über den deterministischen Ansatz hinausgehen, sind in Kapitel 3.2 dargestellt.

Eine Herleitung hierzu kann wie folgt analog zu der in [Pau13] angegebenen Vorgehensweise durchgeführt werden:

**Herleitung:** Wir starten, wie schon angekündigt, mit dem Terminal Measure  $P_{T_N}$  und klären bezüglich dieses Maßes die Dynamiken der Libor-Raten-Entwicklung. Dabei gehen wir induktiv rückwärts entlang der Tenorstruktur vor und führen zunächst den Maßwechsel von  $P_{T_N}$  nach  $P_{T_{N-1}}$  durch.

Beginnen wir also mit der „letzten“ Libor-Rate  $(L_{N-1}(t))_{0 \leq t \leq T_N}$ . Nach Voraussetzung ist

$$L_{N-1}(t) = \frac{1}{\delta_{N-1}} \left( \frac{B(t, T_{N-1})}{B(t, T_N)} - 1 \right)$$

ein positives Martingal bezüglich  $P_{T_N}$ .

Nach dem Martingaldarstellungssatz (vgl. [Pau12]) kann die Dynamik der Libor-Rate  $(L_{N-1}(t))_{0 \leq t \leq T_N}$  unter  $P_{T_N}$  durch

$$dL_{N-1}(t) = L_{N-1}(t)\sigma_{N-1}(t)dW_{N-1}^N(t)$$

angegeben werden. Dabei ist  $W^N$  ein  $(N-1)$ -dimensionaler korrelierter Wiener-Prozess unter  $P_{T_N}$ .  $\sigma_{N-1}(t)$  bestimmt die Volatilität der  $(N-1)$ -ten Libor-Rate.

Unser Ziel ist es nun die Dynamik von  $(L_{N-1}(t))_{0 \leq t \leq T_N}$  unter dem Forwardmartingalmaß zum Zeitpunkt  $T_{N-1}$ , also unter dem Maß  $P_{T_{N-1}}$  zu bestimmen. Die Radon-Nikodym-Dichte zur Definition des Maßwechsels von  $P_{T_N}$  zu  $P_{T_{N-1}}$  ist nach [Pau12] gegeben durch

$$\left. \frac{dP_{T_{N-1}}}{dP_{T_N}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T_{N-1})}{B(t, T_N)} \frac{B(0, T_N)}{B(0, T_{N-1})} =: R_{N-1}(t).$$

Wegen des Zusammenhangs

$$\frac{B(t, T_{N-1})}{B(t, T_N)} = 1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)$$

der aufgrund der Definition (3.1) der Libor-Raten zwischen den Bond Preisen und den Libor-Raten besteht, können wir die Radon-Nikodym-Dichte für  $t \leq T_{N-1}$  umschreiben zu

$$R_{N-1}(t) = \frac{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(0)}.$$

Wir können nun die Dynamik von  $R_{N-1}(t)$  bestimmen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} dR_{N-1}(t) &= d\left(\frac{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(0)}\right) \\ &= \frac{\delta_{N-1}}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(0)} dL_{N-1}(t) \\ &= \frac{\delta_{N-1}}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(0)} L_{N-1}(t) \sigma_{N-1}(t) dW_{N-1}^N(t) \\ &= \frac{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(0)} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)} \sigma_{N-1}(t) dW_{N-1}^N(t) \\ &= R_{N-1}(t) \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)} \sigma_{N-1}(t) dW_{N-1}^N(t) \end{aligned}$$

Definieren wir nun

$$X_{N-1}(t) := \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1} L_{N-1}(t)} \sigma_{N-1}(t)$$

so erhalten wir

$$dR_{N-1}(t) = R_{N-1}(t) X_{N-1}(t) dW_{N-1}^N(t). \quad (3.3)$$

Um nun  $R_{N-1}(t)$  als Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung schreiben zu können, benötigen wir das Konzept des exponentiellen Martingals (vgl. [Pau12]). Dieses besagt, dass die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.3) mit  $R_{N-1}(0) = 1$  gegeben ist durch

$$R_{N-1}(t) = \exp\left(\int_0^t X_{N-1}(s) dW_{N-1}^N(s) - \frac{1}{2} \int_0^t (X_{N-1}(s))^2 ds\right). \quad (3.4)$$

Wir benötigen nun die Darstellung des bezüglich  $P_{T_N}$  gegebenen Wiener-Prozesses  $W_{N-1}^N$  unter  $P_{T_{N-1}}$ . Mit dem Satz von Girsanov (siehe [Shr04], Theorem 5.2.3) unter Berücksichtigung der Korrelation erhalten wir nun, dass durch

$$W_{N-1}^{N-1}(t) := W_{N-1}^N(t) - \rho_{N-1, N-1} \int_0^t X_{N-1}(s) ds \quad (3.5)$$

ein Wiener-Prozess bezüglich  $P_{T_{N-1}}$  gegeben ist. Die Korrelation ist in diesem Fall aufgrund des Zusammenhangs  $d\langle W_{N-1}^N \rangle_t = dt$  gleich 1 und wir erhalten aus (3.5) somit insgesamt

$$dW_{N-1}^{N-1}(t) = dW_{N-1}^N(t) + X_{N-1}(t) dt.$$



Im nächsten Schritt betrachten wir die Libor-Rate  $L_{N-2}$ . Nach Definition gilt

$$L_{N-2}(t) = \frac{1}{\delta_{N-2}} \left( \frac{B(t, T_{N-2})}{B(t, T_{N-1})} - 1 \right)$$

für  $0 \leq t \leq T_{N-2}$ . Wir wissen bereits, dass  $(L_{N-2}(t))_{0 \leq t \leq T_{N-2}}$  ein positives Semimartingal bezüglich  $P_{T_N}$  ist. Mithilfe des Martingaldarstellungssatzes können wir daher schreiben:

$$dL_{N-2}(t) = L_{N-2}(t)(\mu_{N-2}(t)dt + \sigma_{N-2}(t)dW_{N-2}^N(t)).$$

Das Ziel ist es nun, die Drift  $\mu_{N-2}$  zu bestimmen und so die Dynamik der Libor-Rate bezüglich  $P_{T_N}$  zu erhalten.

Die Drift  $\mu_{N-2}$  ist dadurch festgelegt, dass  $(L_{N-2}(t))_{0 \leq t \leq T_{N-2}}$  ein  $P_{T_{N-1}}$ -Martingal ist.

Es gilt nach dem Satz von Girsanov analog zu (3.5):

$$W_{N-2}^{N-1}(t) = W_{N-2}^N(t) - \rho_{N-2, N-1} \int_0^t X_{N-1}(s) ds. \quad (3.6)$$

Für die Dynamik von  $(L_{N-2}(t))_{0 \leq t \leq T_{N-2}}$  bedeutet dies:

$$\begin{aligned} dL_{N-2}(t) &= L_{N-2}(t)(\mu_{N-2}(t)dt + \sigma_{N-2}(t)dW_{N-2}^N(t)) \\ &= L_{N-2}(t)((\mu_{N-2}(t) + \sigma_{N-2}(t)\rho_{N-2, N-1}X_{N-1}(t))dt \\ &\quad + \sigma_{N-2}(t)dW_{N-2}^{N-1}(t)) \\ &= L_{N-2}(t)((\mu_{N-2}(t) + \sigma_{N-2}(t)\rho_{N-2, N-1} \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1}L_{N-1}(t)}\sigma_{N-1}(t))dt \\ &\quad + \sigma_{N-2}(t)dW_{N-2}^{N-1}(t)). \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, ist  $(L_{N-2}(t))_{0 \leq t \leq T_{N-2}}$  bezüglich  $P_{T_{N-1}}$  ein Martingal. Der Driftterm muss also unter dem Maß  $P_{T_{N-1}}$  verschwinden, womit demnach

$$\mu_{N-2}(t) = -\sigma_{N-2}(t)\rho_{N-2, N-1} \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1}L_{N-1}(t)}\sigma_{N-1}(t)$$

gilt.

Die Dynamik bezüglich des Terminal Measures ergibt sich somit als

$$\begin{aligned} dL_{N-2}(t) &= L_{N-2}(t) \left( -\sigma_{N-2}(t)\rho_{N-2, N-1} \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t)}{1 + \delta_{N-1}L_{N-1}(t)}\sigma_{N-1}(t)dt \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{N-2}(t)dW_{N-2}^N(t) \right). \end{aligned}$$

Die Radon-Nikodym-Dichte zum Maßwechsel von  $P_{T_{N-1}}$  zu  $P_{T_{N-2}}$  lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{T_{N-2}}}{dP_{T_{N-1}}} \Big|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{B(t, T_{N-2})}{B(t, T_{N-1})} \frac{B(0, T_{N-1})}{B(0, T_{N-2})} \\ &= \frac{1 + \delta_{N-2}L_{N-2}(t)}{1 + \delta_{N-2}L_{N-2}(0)} \\ &=: R_{N-2}(t). \end{aligned}$$

Damit gilt analog zu oben

$$dR_{N-2}(t) = R_{N-2}(t) \frac{\delta_{N-2} L_{N-2}(t)}{1 + \delta_{N-2} L_{N-2}(t)} \sigma_{N-2} dW_{N-2}^{N-1}(t).$$

In weiteren Schritten kann dieses Verfahren induktiv fortgeführt werden, um so zur gewünschten Darstellung unter dem Terminal Measure zu gelangen. Nach dem Satz von Girsanov kann man iterativ analog zur Gleichung (3.6) herleiten, dass

$$\begin{aligned} dW_i^N(t) &= dW_i^{N-1}(t) + \rho_{i,N-1} X_{N-1}(t) dt \\ &= dW_i^{N-2}(t) + \rho_{i,N-2} X_{N-2}(t) dt + \rho_{i,N-1} X_{N-1}(t) dt \\ &= dW_i^{i+1}(t) + \sum_{k=i+1}^{N-1} \rho_{i,k} X_k(t) dt \end{aligned}$$

gilt.

Wir erhalten somit insgesamt:

$$dW_i^{i+1}(t) = dW_i^N(t) - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \sigma_k(t) \rho_{i,k} dt.$$

Setzt man dies in die bekannte Dynamik von  $(L_i(t))_t$  bezüglich des jeweiligen Forwardmartingalmaßes  $P_{T_{i+1}}$  ein, so erhält man die behauptete Dynamik unter dem Terminal Measure:

$$\begin{aligned} dL_i(t) &= \sigma_i(t) L_i(t) dW_i^{i+1}(t) \\ &= \sigma_i(t) L_i(t) \left( dW_i^N(t) - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} dt \right). \end{aligned}$$

Analog dazu lassen sich auch die Dynamiken unter den weiteren Forwardmartingalmaßen herleiten und man erhält die behauptete Darstellung.

Insgesamt ist zu erkennen, dass die Dynamiken der Libor-Raten nur von den gewählten Volatilitäten  $\sigma_k$  und der zugehörigen Korrelationsstruktur  $\rho_{i,k}$  abhängig sind. Daher gilt es für die Wahl dieser Parameter im Folgenden geeignete Ansätze zu untersuchen um mit diesen dann die Kalibrierung durchzuführen.

### 3.2 Modellwahl

Für die Modellierung der Volatilitäten  $\sigma_k$  wird häufig ein Separationsansatz in folgender Form gewählt:

$$\sigma_k(t) = \lambda_k(t) \varphi(L_k(t))$$

wobei  $\lambda_k$  eine beschränkte Funktion mit  $\lambda_k : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Die Funktion  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  wird als lokale Volatilitätsfunktion bezeichnet. Einige gängige Modelle für die Wahl der lokalen Volatilitätsfunktion sind (siehe z.B. [AP10b] und [Pau13]):

- i) Lognormaler Ansatz:  $\varphi(x) \equiv 1$   
 $\Rightarrow dL_k(t) = L_k(t)\lambda_k(t)dW_k^{k+1}(t)$
- ii) CEV Ansatz:  $\varphi(x) = x^{p-1}, 0 < p < 1,$   
 $\Rightarrow dL_k(t) = L_k(t)^p\lambda_k(t)dW_k^{k+1}(t)$
- iii) LCEV Ansatz:  $\varphi(x) = \min\{\epsilon^{p-1}, x^{p-1}\}, 0 < p < 1, \epsilon > 0$   
 $\Rightarrow dL_k(t) = L_k(t)\min\{\epsilon^{p-1}, L_k(t)^{p-1}\}\lambda_k(t)dW_k^{k+1}(t)$
- iv) Displaced Lognormal Ansatz:  $\varphi(x) = b + a/x,$  mit Konstanten  $b > 0, a \neq 0$   
 $\Rightarrow dL_k(t) = (bL_k(t) + a)\lambda_k(t)dW_k^{k+1}(t)$

Eine weitere Möglichkeit für die Wahl der Volatilität besteht in der Anwendung der sogenannten stochastischen Volatilität. In diesem Fall liegt der Volatilität  $\sigma_k$  ein weiterer stochastischer Prozess zugrunde. Eine mögliche Form für die stochastische Volatilität in einem solchen Modell lautet:

$$\sigma_k(V(t), t) = \sqrt{V(t)}\lambda_k(t),$$

wobei der Prozess  $(V(t))_t$  durch die folgende stochastische Differentialgleichung gegeben ist:

$$dV(t) = a(b - V(t))dt + \nu\sqrt{V(t)}d\widehat{W}(t).$$

Hierbei ist  $(\widehat{W}(t))_t$  ein eindimensionaler Wiener-Prozess,  $a, b, \nu > 0$  sind konstante Parameter und bei  $\lambda_k$  handelt es sich wie oben um eine beschränkte Funktion.

Um einen kurzen Einblick in die dargestellten Möglichkeiten für die Wahl der Volatilitätsfunktion zu erhalten, werden im Folgenden die Modelle verglichen und die Vor- bzw. Nachteile der einzelnen Modelle dargestellt.

### Lognormaler Ansatz

Das Lognormalmodell dient als Grundlage für alle später hergeleiteten Modellformen. Es beruht auf der Idee, dass die Libor-Raten lognormalverteilt sind. Aufgrund dieser Annahme ist eine einfache Bewertung von Caplets über eine analytische Formel (Black's Formel) möglich. Auch für die Bewertung von Swaptions kann man durch geeignete Approximationen der Swaption Volatilität eine geschlossene Bewertungsformel auf Basis von Black's Formel erhalten.

Der Nachteil des Lognormalmodells besteht darin, dass der am Markt beobachtbare und nach seiner Form benannte Volatilitäts-„Smile“ nicht dargestellt werden kann. Dieser entsteht bei der Betrachtung der impliziten Volatilität, also derjenigen Volatilität, für die der Modellpreis eines Caplets dem am Markt beobachteten Preis entspricht. In der Praxis lässt sich bei der Betrachtung der impliziten Volatilität eine Abhängigkeit vom Strike  $K$  beobachten und es tritt ein sogenannter „Smile“ auf. Dies bedeutet, dass die implizite Volatilität für Strikes  $K$ , die nicht At-The-Money (ATM) sind, steigt. Für ATM-Strikes ist die implizite Volatilität dagegen deutlich geringer. Im Lognormalmodell ist diese Abhängigkeit nicht erkennbar und die sich aus dem Modell ergebende implizite Volatilität der Caplets

ist für alle Strikes  $K$  konstant.

Aufbauend auf dem lognormalen Ansatz gibt es aber verschiedene Erweiterungen, die diesen „Smile“-Effekt berücksichtigen. Diese werden nun dargestellt.

### CEV-Modell

Eine erste Erweiterung des lognormalen Ansatzes stellt das sogenannte „Constant elasticity of variance“-Modell (CEV-Modell) dar. Die Dynamik der Libor-Raten besitzt in diesem Modell die Form

$$dL_k(t) = L_k(t)^p \lambda_k(t) dW_k^{k+1}(t), \quad 0 < p < 1.$$

Es handelt sich um eine Modifizierung des lognormalen Ansatzes, bei der auch die implizite Volatilität der Caplets eine Abhängigkeit vom Strike  $K$  aufweist. Es lassen sich allerdings nur monoton steigende oder fallende Verläufe der impliziten Volatilität, sogenannte „Skews“, darstellen. Dies stellt gegenüber dem lognormalen Ansatz insofern eine Verbesserung dar, als dass die implizite Volatilität nicht länger unabhängig vom Strike ist und zumindest entweder für Out-Of-The-Money- oder In-The-Money-Caplets eine entsprechende implizite Volatilität angegeben werden kann. Ein Vorteil des Modells besteht darin, dass sich für  $p \in (0, 1)$  eine geschlossene Formel für die Bewertung von Caplets herleiten lässt (siehe [Has12], Kapitel 4). Auch für die approximierten Swaptionpreise lässt sich eine geschlossene Formel herleiten. Diese Formeln sind allerdings komplexer als diejenigen im lognormalen Ansatz.

Das CEV-Modell beinhaltet jedoch auch einige Nachteile. Zum einen ist der Elastizitätsfaktor  $p$  für alle Libor-Raten gleich, so dass eine spezifische Modellierung der verschiedenen Raten nicht möglich ist. Zum anderen besteht ein erheblicher Nachteil darin, dass sich die geschlossenen Formeln für die Bewertung von Caplets und Swaptions nur unter der Bedingung ergeben, dass 0 als absorbierende Grenze für den Libor-Raten- beziehungsweise Swap-Raten-Prozess dient. Dies ist eine unerwünschte, mit der Realität nicht vereinbare Eigenschaft, die insbesondere die Bewertung von pfadabhängigen Zinsderivaten erschwert. Insbesondere existiert somit keine eindeutige positive Lösung der vorliegenden stochastischen Differentialgleichung. Um diesen unerwünschten Effekt zu umgehen, wird eine Modifizierung des CEV-Modells, das Limited CEV (LCEV)-Modell, eingeführt.

### LCEV-Modell

Das LCEV-Modell ist eine Erweiterung des dargestellten CEV-Modells. Die Dynamik der Libor-Raten ist nun gegeben durch

$$dL_k(t) = L_k(t) \min \{ e^{p-1}, L_k(t)^{p-1} \} \lambda_k(t) dW_k^{k+1}(t).$$

Dadurch wird das unerwünschte absorbierende Verhalten in 0 aufgehoben und es existiert nun eine eindeutige positive Lösung der stochastischen Differentialgleichung, was im CEV-Modell nicht der Fall ist.

Beim Übergang zu diesem Modell können jedoch die geschlossenen Formeln für die Bewertung von Caplets und Swaptions nicht beibehalten werden und die Preise aus dem CEV-Modell müssen als Näherung verwendet werden. Eine Kalibrierung im LCEV-Modell basiert also auf den Preisformeln aus dem CEV-Modell und einer anschließenden Bewertung anderer Derivate auf Basis des LCEV-Modells, um so die Vorteile beider Modelle ausnutzen zu können. Der Nachteil gegenüber aufwändigeren Modellen, der darin liegt, dass nur monotone implizite Volatilitätskurven zu erreichen sind, bleibt jedoch bestehen.

### Displaced Lognormal Modell

Ein weiteres Modell, welches ähnliche Dynamiken wie das CEV-Modell besitzt, ist das Displaced Lognormal Modell. Die Libor-Raten-Dynamiken sind hier gegeben durch

$$dL_k(t) = (bL_k(t) + a)\lambda_k(t)dW_k^{k+1}(t).$$

Hierdurch lassen sich einfachere – zu Black’s Formel ähnliche – Formeln für die Bewertung von Caplets und approximierten Swaptions erhalten (vgl. [Sch11a]). Zudem ist keine Kombination verschiedener Modelle wie CEV- und LCEV-Modell für die Kalibrierung und Preisbestimmung nötig.

Der Nachteil dieses Modells besteht aber in der Darstellung der impliziten Volatilität. Es sind wie im CEV-Modell nur monotone implizite Volatilitätskurven zu erzielen, welche zudem besonders schwer darzustellen sind, falls die Kurven eine stark fallende Form besitzen.

Um die Einschränkung auf monotone implizite Volatilitäten aufzuheben, bedarf es einer Erweiterung des Modells. Diese wird nun dargestellt.

### Stochastische Volatilität

Wie in den vorherigen Abschnitten dargestellt, gibt es sowohl bei der Wahl eines CEV-, beziehungsweise LCEV-Modells als auch bei der Verwendung des Displaced Lognormal Ansatzes noch unerwünschte Einschränkungen, vor allem was die Darstellung der impliziten Volatilität betrifft. Um einen vollständigen „Smile“ und nicht nur einen monotonen Verlauf der impliziten Volatilität darstellen zu können, wird in der Literatur der Ansatz der stochastischen Volatilität empfohlen. Dabei wird ein zusätzlicher stochastischer Prozess zur Beschreibung der Volatilität eingeführt. Es ergibt sich die Dynamik der Libor-Raten durch

$$dL_k(t) = \sqrt{V(t)}\lambda_k(t)L_k(t)dW_k^{k+1}(t).$$

Hierbei erfüllt der Prozess  $(V(t))_t$  die stochastische Differentialgleichung:

$$dV(t) = a(b - V(t))dt + \nu\sqrt{V(t)}d\widehat{W}(t)$$

mit einem eindimensionalen Wiener-Prozess  $(\widehat{W}(t))_t$ .

Durch Einführung des Prozesses  $(V(t))_t$  erhält das Modell eine hohe Flexibilität in der Modellierung und der am Markt oftmals beobachtbare „Smile“ ist darstellbar. Dieses Modell bietet so im Vergleich zu den anderen dargestellten Ansätzen eine realistischere Abbildung der am Markt beobachtbaren Zustände.

Der Nachteil der so gewonnenen Flexibilität besteht in der Komplexität. Das Modell ist deutlich aufwändiger und eine Herleitung geschlossener Formeln zur Bewertung von Derivaten ist nicht oder nur unter Verwendung von Fourier-Transformationen möglich (siehe [WZ06]). Auch die Kalibrierung an die Marktdaten gestaltet sich aufwändiger und schwieriger, da es zusätzliche Parameter zu bestimmen gilt (vgl. [Sch11a]).

Wir verzichten an dieser Stelle auf weitere Ausführungen und Herleitungen zu diesem Thema und stellen nun dar, welches Modell in unserer Arbeit für die Kalibrierung herangezogen werden soll.

### Wahl des Modells

Für die Kalibrierung werden wir uns zunächst mit dem deterministischen, lognormalen Ansatz beschäftigen, da dieser als Grundlage für alle weiteren Modelle dient. Das bedeutet, dass für ein beliebiges  $1 \leq k \leq N - 1$  die Libor-Rate  $L_k$  unter dem Forwardmartingalmaß  $P_{T_{k+1}}$  die stochastische Differentialgleichung

$$dL_k(t) = \sigma_k(t)L_k(t)dW_k^{k+1}(t) \quad (3.7)$$

mit beschränkter deterministischer Volatilitätsfunktion  $\sigma_k$  erfüllt.

Unter Verwendung von Itô's Lemma kann man direkt herleiten, dass der Logarithmus von  $(L_k(t))_t$  unter  $P_{T_{k+1}}$  für alle  $1 \leq k \leq N - 1$  die folgende Dynamik besitzt:

$$d \ln L_k(t) = -\frac{\sigma_k^2(t)}{2}dt + \sigma_k(t)dW_k^{k+1}(t).$$

Damit hat die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.7) die folgende Gestalt:

$$L_k(t) = L_k(0) \exp\left(\int_0^t \sigma_k(s)dW_k^{k+1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_k^2(s)ds\right).$$

Aufgrund dieser Form der Lösung der stochastischen Differentialgleichung lassen sich folgende Aussagen über die Verteilung von  $L_k$  unter dem Forwardmartingalmaß  $P_{T_{k+1}}$  treffen: Definiere für ein  $t \in [0, T_k]$   $X_t := \int_0^t \sigma_k(s)dW_k^{k+1}(s)$ . Dann gilt für die deterministische, beschränkte Funktion  $\sigma_k : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}$ , dass  $X_t$  normalverteilt ist mit

$$\mathbb{E}X_t = 0$$

und

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma_k(s)dW_k^{k+1}(s)\right)^2\right] = \int_0^t \sigma_k^2(s)ds.$$

Hierbei folgt die Berechnung der Varianz durch eine Anwendung der Itô-Isometrie.

Es gilt daher, dass

$$\left(\int_0^t \sigma_k(s) dW_k^{k+1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_k^2(s) ds\right)$$

normalverteilt ist mit Erwartungswert  $-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_k^2(s) ds$  und Varianz  $\int_0^t \sigma_k^2(s) ds$ . Mit der oben dargestellten Form der Lösung der stochastischen Differentialgleichung folgt damit direkt, dass  $\frac{L_k(t)}{L_k(0)}$  unter  $P_{T_{k+1}}$  lognormalverteilt ist. Aufgrund dieser Eigenschaft spricht man bei einem solchen Ansatz auch vom Lognormal-Modell.

Wir haben nun die Grundlagen für das von uns genutzte Libor-Markt-Modell geliefert und können damit in den nächsten Abschnitten die möglichen Strukturen für die Volatilität und die Korrelation betrachten.

### 3.3 Volatilitätsstruktur

Um später eine Kalibrierung des Modells an die gegebenen Marktdaten durchführen zu können, müssen wir zunächst eine funktionale Form für die von uns verwendete Volatilitätsstruktur wählen. Dazu sind die  $\sigma_k$  so zu spezifizieren, dass die Marktdaten so gut wie möglich getroffen werden und die Struktur aber dennoch möglichst zeithomogen ist.

In der Literatur gibt es hauptsächlich zwei Klassen von Ansätzen um diese Eigenschaften zu gewährleisten: Zum einen der Ansatz der stückweise konstanten Volatilitäten, zum anderen eine parametrische Form für die Modellierung der Volatilität. Diese beiden Ansätze werden im Folgenden dargestellt und verglichen.

#### 3.3.1 Stückweise konstante Volatilität

Bei dem Ansatz der stückweise konstanten Volatilität gehen wir, wie es der Name schon sagt, von konstanten Volatilitäten zwischen den einzelnen Tenorzeitpunkten aus. Nachfolgend werden verschiedene Formen der stückweise konstanten Volatilität in Anlehnung an [BM06] dargestellt. Weitere Möglichkeiten für die Wahl dieser stückweise konstanten Volatilität können ebenfalls in [BM06] nachgelesen werden.

Es gibt verschiedene Ansätze der stückweise konstanten Volatilität. Ein einfacher Ansatz ist sicherlich der, dass die Volatilität der jeweiligen Libor-Rate nur von der Zeit bis zur Fälligkeit dieser Rate abhängig ist. In diesem Fall hat die Volatilität die folgende Struktur:

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} := \eta_{k-(\beta(t)-1)}$$

Dabei bezeichnet  $\beta(t)$  den Index der ersten Libor Rate, die in  $t$  noch nicht fällig gewesen ist. Alle vorherigen Libor-Raten  $L_{\beta(t)-1}, L_{\beta(t)-2}, \dots$  sind bereits fällig gewesen. Ist zum Beispiel  $t \in (T_1, T_2]$ , so ist  $\beta(t) = 2$ , da die Libor-Rate  $L_2$  für eine Verzinsung von  $T_2$  bis  $T_3$  die erste Libor-Rate ist, die noch verfügbar ist. Somit kann man die Volatilitäten in einer Matrix wie in Tabelle 1 darstellen:

Vola.	$t \in (0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	$t \in (T_2, T_3]$	$\dots$	$t \in (T_{N-2}, T_{N-1}]$
$L_1(t)$	$\eta_1$	0	0	0	0
$L_2(t)$	$\eta_2$	$\eta_1$	0	0	0
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$L_{N-1}(t)$	$\eta_{N-1}$	$\eta_{N-2}$	$\eta_{N-3}$	$\dots$	$\eta_1$

Tabelle 1: Stückweise konstante Volatilitätsstruktur

Eine Erweiterung dieser Annahme besteht darin, dass wir eine Volatilitätsstruktur der Form

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} := \Phi_k \psi_{k-(\beta(t)-1)}, \forall t \in [0, T_k]$$

annehmen. Hierbei ist der Faktor  $\Phi_k > 0$  für alle  $1 \leq k \leq N-1$ . Die Volatilität  $\sigma_k$  besteht also jeweils aus einem zeithomogenen Teil  $\psi$  und einem zeitinhomogenen Teil  $\Phi_k$ . Jede Libor-Rate  $L_k$  wird dabei durch einen individuellen Faktor  $\Phi_k$  angepasst. Die oben genannte einfachere Struktur ist damit ein Spezialfall dieser allgemeineren stückweise konstanten Struktur.

Das Problem bei der Wahl der stückweise konstanten Volatilität liegt darin, dass wir viele Parameter, die durch eine Kalibrierung bestimmt werden müssen, erhalten. Im Normalfall haben wir  $N-1$  Parameter für  $\psi$  und weitere  $N-1$  Faktoren für  $\Phi$  zu kalibrieren. Ein wesentlicher Vorteil dieser konstanten Volatilitäten liegt in der einfachen Kalibrierung an die Marktdaten. Allerdings führt dieser Ansatz vor allem dann zu Problemen, wenn wir Modellerweiterungen, wie zum Beispiel stochastische Volatilität verwenden. Bei solchen komplexeren Modellen kann die hohe Anzahl an zu kalibrierenden Parametern problematisch werden.

### 3.3.2 Parametrischer Ansatz

Für die spätere Kalibrierung des Modells wählen wir einen parametrischen Ansatz zur Modellierung der Volatilitäten. Mit der Wahl entsprechender Bedingungen können wir bei diesem Ansatz sicherstellen, dass die Volatilität stets positiv ist und dass die am Markt beobachtbare Volatilitätsstruktur eingehalten werden kann. Insbesondere soll so – wie unter anderem in [Reb04] dargestellt – sichergestellt werden, dass die am Markt beobachtbare Wölbung im Graphen der Volatilitäten als Funktion der Zeit bis zur Fälligkeit der Libor-Raten dargestellt werden kann. Zur Veranschaulichung dieser Form sind in der aus [Reb04] entnommenen Abbildung 1 verschiedene Volatilitätsstrukturen, wie sie auch am Markt zu finden sind, angegeben.

Die im Folgenden in diesem Zusammenhang dargestellten Ausführungen orientieren sich im Wesentlichen an [BM06], [Sch11a] und [Reb04].

Um die angesprochenen Eigenschaften der Volatilitätsstruktur abbilden zu können, wählen wir die deterministische Funktion  $\sigma_k$  wie folgt:

$$\sigma_k(t) = \Phi_k \psi(T_k - t; a, b, c, d) := \Phi_k ([a + b(T_k - t)] e^{-c(T_k - t)} + d). \quad (3.8)$$



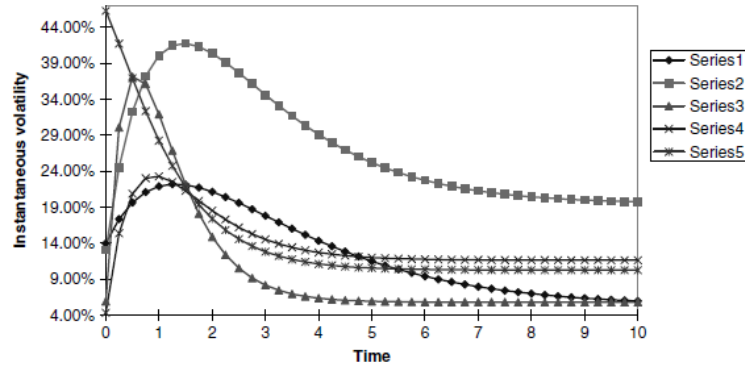


Abbildung 1: Verschiedene Formen der Volatilitätskurve, die sich aus der funktionalen Form (3.8) ergeben und ähnlich auch am Markt zu finden sind (Abbildung aus [Reb04])

Hierbei dient der Faktor  $e^{-c(T_k-t)}$  nach [GLHS07] dazu, die fallende Gestalt der Volatilitätsstruktur für spätere Zeitpunkte zu beschreiben, während der Faktor  $a + b(T_k - t)$  die Aufwärtskurve für die früheren Zeitpunkte darstellt. Insgesamt erhält man so die genannte Wölbung im Graphen der Volatilitätsstruktur. Eine wirtschaftliche Interpretation dieser Form kann zusätzlich in [Reb04] gefunden werden.

Wir haben somit – wie auch beim Ansatz mit stückweiser konstanter Volatilität – wieder einen zeithomogenen Teil  $\psi$  und einen zeitinhomogenen Teil  $\Phi_k$ , mit  $\Phi_k > 0$  für alle  $1 \leq k \leq N-1$ . Somit kann jede Libor-Rate  $L_k$  wieder durch einen eigenen konstanten Faktor  $\Phi_k$  angepasst werden. Je weniger die einzelnen Faktoren  $\Phi_k$  für unterschiedliche  $k$  mit  $1 \leq k \leq N-1$  voneinander abweichen, desto mehr bleibt die Zeithomogenität der Volatilitätsstruktur erhalten. Insgesamt haben wir also bei der Wahl dieses Ansatzes in der Kalibrierung  $N-1 + 4$  Parameter zu bestimmen. Für die vier Parameter  $a, b, c, d$  haben noch einige Nebenbedingungen zu gelten, um so eine Volatilitätsstruktur mit plausiblen Eigenschaften zu erhalten.

Die zu erfüllenden Nebenbedingungen lauten:

- i)  $a + d > 0$ ,
- ii)  $d > 0$ ,
- iii)  $c > 0$ .

Für  $t \rightarrow T_k$  sieht man, dass dann  $\sigma_k(t) = \Phi_k(a + d)$  gilt. Dies ist der Fall, wenn die Libor-Rate kurz vor ihrer Fälligkeit ist. Da die Volatilität niemals negativ sein sollte, folgt hieraus also die erste Bedingung.

Für den Fall  $T_k \rightarrow \infty$  erhalten wir für die Volatilität  $\sigma_k(t) = \Phi_k d$ . Hieraus folgt wieder mit der Begründung, dass die Volatilität stets positiv sein soll, die zweite Bedingung.

Die  $\Phi$ 's können – wie wir später sehen werden – so gewählt werden, dass die Caplet Volatilitäten exakt getroffen werden. Dazu werden wir später im Modell zuerst nur die Parameter  $a, b, c, d$  in der Kalibrierung bestimmen, um dann durch die Wahl dieser Parameter die  $\Phi$ 's festzulegen. Der genaue Zusammenhang für die Bestimmung der Faktoren  $\Phi_k$ ,  $1 \leq k \leq N-1$  anhand der Parameter  $a, b, c, d$  wird später in der Gleichung (4.9) angegeben.

Ein großer Vorteil der oben gewählten parametrischen Form für die Volatilität liegt darin, dass wir Integrale der Form

$$\int_{t_0}^{T_k} \sigma_i(s)\sigma_j(s)ds$$

analytisch berechnen können. Terme dieser Form werden sich später bei der Kalibrierung ergeben und können dann ohne numerische Approximationen direkt bestimmt werden. Da die Berechnung dieser Integrale zu sehr langen Termen führt, verzichten wir an dieser Stelle darauf diese anzugeben und verweisen auf den Anhang (A.2).

### 3.4 Modellierung der Korrelationsstruktur

Neben der Volatilität ist die Korrelation zweier Libor-Raten die zweite Unbekannte, die es in der Kalibrierung möglichst gut an die Marktdaten anzupassen gilt. Dabei betrachten wir zunächst die augenblickliche Korrelation zweier Libor-Raten, die durch die Korrelation der zugehörigen Wiener-Prozesse gegeben ist:

$$\rho_{i,j}(t) = \frac{d\langle L_i, L_j \rangle_t}{\sqrt{d\langle L_i \rangle_t} \sqrt{d\langle L_j \rangle_t}}.$$

Die augenblickliche Korrelation  $\rho_{i,j}$  bezieht sich somit direkt auf Änderungen in den Libor-Raten. Eine weitere Form der Korrelation ist die sogenannte terminale Korrelation. Durch sie wird der Grad der Abhängigkeit zwischen zwei verschiedenen Libor-Raten zu einem festen terminalen Zeitpunkt angegeben. Betrachten wir zum Beispiel die terminale Korrelation zum Zeitpunkt  $T_1$ , so ist die Korrelation zweier Libor-Raten  $L_i$  und  $L_j$  mit  $1 \leq i < j \leq N-1$  zum Zeitpunkt  $T_1$ , also die Korrelation von  $L_i(T_1)$  und  $L_j(T_1)$  gemeint. Es sei bemerkt, dass wir uns jedoch zunächst nur mit der augenblicklichen Korrelation beschäftigen. In Kapitel 4.3 werden wir dann ausführlicher auf die terminale Korrelation eingehen.

Um die augenblickliche Korrelation zu bestimmen gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit besteht darin, auf Basis historischer Libor-Raten die augenblickliche Korrelation zu bestimmen. Dies führt jedoch in der Praxis (vgl. [EKR04], [BM06], [Sch11a]) zu verschiedenen numerischen Instabilitäten, weshalb wir auf diese Vorgehensweise verzichten.

Die von uns und auch in der Theorie (vgl. [BM06], [Sch02]) häufig verwendete Vorgehensweise besteht darin, dass wir die augenblickliche Korrelation anhand der vorliegenden Daten für Derivate, bei deren Bewertung die Korrelation der Libor-Raten eine Rolle spielt, in unserem Fall Swaptions, implizieren und so gleichzeitig

neben der Volatilitätsstruktur auch die Struktur der augenblicklichen Korrelationen bestimmen. Auch dies kann zu verschiedenen numerischen Stabilitätsproblemen führen, auf die wir an dieser Stelle nicht weiter eingehen wollen (für genauere Informationen siehe [BM06]). Aufgrund der auftretenden Problemen, werden wir, wie es auch in anderen Artikeln oftmals der Fall ist, eine Parametrisierung der augenblicklichen Korrelation nutzen, um so die Korrelationsmatrix zu glätten und die typischen Eigenschaften einer Korrelationsmatrix zu gewährleisten.

Wie bei der Untersuchung der Volatilitätsstruktur gibt es auch bei der Korrelationsmatrix einige Eigenschaften, die es zu erfüllen gilt. Bezeichnen wir im Folgenden die Korrelationsmatrix mit  $\rho$  und identifizieren wir die Korrelation zwischen den Libor-Raten  $L_i$  und  $L_j$  mit dem Eintrag  $\rho_{i,j}$  dieser Matrix, dann lauten die typischen Eigenschaften einer Korrelationsmatrix:

- i)  $\rho$  ist reell und symmetrisch
- ii)  $\rho_{i,i} = 1, \forall i = 1, \dots, N - 1$  und  $-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1 \forall i, j \in \{1, \dots, N - 1\}$
- iii)  $\rho$  ist positiv definit
- iv) Die Abbildung  $i \mapsto \rho_{i,j}$  ist für  $i \geq j$  fallend
- v) Die Abbildung  $i \mapsto \rho_{i+p,i}$  ist für festes  $p \in \{0, (N - 1) - i\}$  wachsend

Hierbei sind die ersten drei Bedingungen generelle Bedingungen an Korrelationsmatrizen. Die letzten beiden Bedingungen hingegen sind spezielle Bedingungen für die Korrelation zwischen Forward-Raten bzw. Libor-Raten. Sie besagen zum einen, dass zwei Libor-Raten um so weniger korreliert sind, je größer die „Distanz“ zwischen diesen Libor-Raten ist. Zum anderen wird ausgedrückt, dass je zwei Libor-Raten, die den gleichen „Abstand“ zueinander haben, stärker korreliert sind, wenn sie auf der Tenorstruktur weiter am Ende liegen. Weiterhin erwartet man sicherlich, dass die Korrelationen positiv sind, das bedeutet, dass sogar  $\rho_{i,j} > 0$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, N - 1\}$  gilt.

Da wir im Modell  $N-1$  Libor-Raten betrachten, wird die Korrelationsmatrix durch  $N(N-1)/2$  Einträge charakterisiert. Diese Zahl ist zu groß, um jeden dieser Einträge einzeln zu kalibrieren. Deshalb wollen wir versuchen eine geeignete Parametrisierung mit einer geringen Anzahl an Parametern zu finden. Wie im Fall der Volatilität fordern wir zunächst auch für die augenblickliche Korrelation, dass sie zeithomogen ist, das bedeutet, dass wir eine Struktur der Form

$$\rho_{i,j}(t) = \rho(T_i - t, T_j - t), \quad i, j = 1, \dots, N - 1$$

verwenden wollen. Wir werden später in der Kalibrierung die Korrelation zum Zeitpunkt  $t = 0$  bestimmen und mit dieser konstanten Volatilität zur Vereinfachung dann weiterarbeiten. Wir definieren daher

$$\rho_{i,j} := \rho_{i,j}(0), \quad i, j = 1, \dots, N - 1.$$

Hierbei verwenden wir für eine kürzere Schreibweise die Indizes  $i$  und  $j$  anstelle der in der Korrelationsstruktur auftauchenden Tenorzeitpunkte  $T_i$  und  $T_j$ . Im Folgenden geben wir in Anlehnung an [BM06] und [Sch11a] einen Überblick über verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der Funktion, die die augenblickliche Korrelation zwischen zwei Libor-Raten beschreiben soll.

### 3.4.1 Klassische Ansätze zur Modellierung der Korrelationsstruktur

Die einfachste Form der Korrelationsfunktion ist die:

#### Einparametrische Korrelationsstruktur

$$\rho_{i,j} = \exp[-\beta|i - j|]. \quad (3.9)$$

Dabei ist  $\beta \geq 0$ . Es sei angemerkt, dass wir wie schon erwähnt, eine verkürzte Schreibweise für die Korrelation verwenden und die eigentliche Form dieser Struktur dann

$$\rho_{i,j} = \exp[-\beta|T_i - T_j|]$$

lautet. Im Weiteren werden wir – wie bereits angekündigt – nur noch  $i$  und  $j$  statt  $T_i$  und  $T_j$  schreiben.

Die sich aus dieser Struktur ergebende Korrelationsmatrix ist reell, symmetrisch und positiv definit. Das Problem ist jedoch, dass die letzte der oben genannten Bedingungen nicht erfüllt ist. Außerdem gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{i,j} = 0$  für festes  $i$ . Um dieses Verhalten aufzuheben, können wir die obige Funktion einfach anpassen, um so als Grenzwert für die Korrelation einen festen Wert  $\rho_\infty > 0$  zu festzulegen. Diese Erweiterung sieht dann wie folgt aus:

#### Klassische zweiparametrische Korrelationsstruktur

$$\rho_{i,j} = \rho_\infty + (1 - \rho_\infty) \exp[-\beta|i - j|].$$

Hierbei gelten die Nebenbedingungen  $\beta \geq 0$  und  $-1 \leq \rho_\infty \leq 1$ . Analog zu oben ist die Korrelationsmatrix durch diese Wahl reell, symmetrisch und positiv definit. Es ist jedoch erneut nicht sichergestellt, dass die letzte der Bedingungen erfüllt ist.

Um zusätzlich diese Bedingung erfüllen zu können, wurde von Rebonato eine Parametrisierung mit drei Parametern entwickelt:

#### Rebonatos dreiparametrische Korrelationsstruktur

$$\rho_{i,j} = \rho_\infty + (1 - \rho_\infty) \exp[(-\beta + \alpha(\max(i, j)))|i - j|].$$

Die Nebenbedingungen für die Parameter lauten ähnlich zu der vorherigen Parametrisierung  $\alpha, \beta \geq 0$  und  $-1 \leq \rho_\infty \leq 1$ . Die so entstehende Matrix erfüllt auch die letzte der oben genannten Bedingungen. Die Abbildung  $i \mapsto \rho_{i+p,i}$  ist für festes  $p \in \{0, (N - 1) - i\}$  somit wachsend. Ein Nachteil der so gewählten Korrelationsstruktur besteht jedoch darin, dass nicht sichergestellt ist, dass die Matrix

positiv definit oder positiv semidefinit ist. Man kann jedoch feststellen, dass eine so gewählte Korrelationsstruktur in gewöhnlichen Marktsituationen aber positiv definit und auch einfach zu kalibrieren ist.

Diese unterschiedlichen Korrelationsstrukturen geben einen kurzen Einblick in die verschiedenen Wahlmöglichkeiten für die Parametrisierung der Korrelation. Wir werden im Folgenden jedoch eine Erweiterung dieser klassischen Vorgehensweisen verwenden und die Herleitung in Anlehnung an [SC02] angeben.

### 3.4.2 Schoenmakers & Coffey Ansatz

Schoenmakers und Coffey leiten in [SC02] (auch dargestellt in [BM06]) eine parametrische Form für die Korrelationsmatrix, die nach Konstruktion schon positiv definit ist, her. Sie gehen dabei wie folgt vor:

Zunächst wird eine endliche Folge positiver reeller Zahlen

$$1 = c_1 < c_2 < \dots < c_{N-1},$$

mit

$$\frac{c_1}{c_2} < \frac{c_2}{c_3} < \dots < \frac{c_{N-2}}{c_{N-1}}$$

betrachtet.

Dies kann dadurch erzielt werden, dass zuerst eine endliche Folge nichtnegativer Zahlen  $\Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}$  gewählt wird und wir dann

$$\begin{aligned} c_i &= \exp \left[ \sum_{l=2}^{i-1} (l-1)\Delta_l + \sum_{l=i}^{N-1} (i-1)\Delta_l \right] \\ &= \exp \left[ \sum_{l=2}^{N-1} \min(l-1, i-1)\Delta_l \right], \quad \forall 2 \leq i \leq N-1 \end{aligned}$$

setzen.

Im Anschluss daran definieren wir

$$\rho_{i,j} := \frac{c_i}{c_j}, \quad i \leq j, \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

So erhalten wir dann:

$$\rho_{i,j} = \exp \left[ - \sum_{l=i+1}^{N-1} \min(l-i, j-i)\Delta_l \right], \quad i \leq j, \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Die Korrelation zwischen zwei benachbarten Raten beträgt daher  $\rho_{i,i+1} = c_i/c_{i+1}$  und wird somit größer für wachsendes  $i$ . Die obige Bedingung für die positiven reellen Zahlen  $c_i$  mit  $1 \leq i \leq N-1$  führt also insgesamt dazu, dass die Abbildung  $i \rightarrow \rho_{i+p,i}$  für alle  $p$  wachsend ist.

Die Zahl der für diese Kalibrierung benötigten Parameter ist  $N-2$ , da die Menge  $\{\Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}\}$  bestimmt werden muss. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass

die Matrix  $\rho$ , die sich aus den Einträgen  $\rho_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N-1$  ergibt, die Eigenschaften einer Korrelationsmatrix erfüllt.

Durch die Wahl der  $\Delta_i$ 's können so verschiedene Korrelationsstrukturen erzeugt werden. Im Folgenden werden wir einige der angegebenen Parametrisierungen darstellen:

Wählen wir  $\Delta_2 = \dots = \Delta_{N-2} = \alpha \geq 0$  und  $\Delta_{N-1} = \beta \geq 0$ , dann erhalten wir so die Korrelationsstruktur

$$\rho_{i,j} = \exp \left[ -|i-j| \left( \beta + \alpha \left( (N-1) - \frac{i+j+1}{2} \right) \right) \right], \quad i, j = 1, \dots, N-1. \quad (3.10)$$

Für  $\alpha = 0$  erhalten wir die einfache Korrelationsstruktur (3.9). Führen wir jetzt neue Parameter  $\rho_\infty := \rho_{1,(N-1)}$  und  $\eta := \alpha((N-1)-1)((N-1)-2)/2$  ein und setzen dies in (3.10) ein, so erhalten wir

$$\beta = -\frac{\alpha}{2}((N-1)-2) - \frac{\ln \rho_\infty}{(N-1)-1} = \frac{-\eta - \ln \rho_\infty}{(N-1)-1}.$$

Die Korrelationsstruktur (3.10) ergibt somit die

#### Stabile zweiparametrische Korrelationsstruktur

$$\rho_{i,j} = \exp \left[ -\frac{|i-j|}{(N-1)-1} \left( -\ln \rho_\infty + \eta \frac{(N-1)-i-j+1}{(N-1)-2} \right) \right] \quad (3.11)$$

mit den Bedingungen  $0 < \rho_\infty \leq 1$ ,  $0 \leq \eta \leq -\ln \rho_\infty$  und  $i, j = 1, \dots, N-1$ . Während die Korrelationsstrukturen (3.10) und (3.11) im Grunde genommen übereinstimmen, ist jedoch bei der Re-Parametrisierung von (3.10) zu (3.11) die Stabilität der Parameter verbessert worden. Relativ kleine Änderungen in der Folge der  $c_i$ 's führen nun nur zu kleinen Veränderungen der Parameter  $\rho_\infty$  und  $\eta$ . Dies kann unter anderem durch einen analytischen Vergleich der Ableitungen nach den unterschiedlichen Parametern in (3.10) und (3.11) gesehen werden (siehe [SC02]).

Eine Erweiterung dieser Korrelationsstruktur können wir erreichen, indem wir die  $\Delta_i$ 's so wählen, dass sie auf einer Geraden liegen, mit  $\Delta_2 = \alpha_1 \geq 0$ ,  $\Delta_{(N-1)-1} = \alpha_2 \geq 0$ , und  $\Delta_{N-1} = \beta \geq 0$ . Daher ergibt sich für  $i = 2, \dots, N-2$ :

$$\Delta_i = \alpha_1 \frac{(N-1)-i-1}{(N-1)-3} + \alpha_2 \frac{i-2}{(N-1)-3}.$$

Dann ergibt sich nach [SC02] die Korrelationsstruktur

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = \exp \left[ -|j-i| \left( \beta - \frac{\alpha_2}{6(N-1)-18} (i^2 + j^2 + ij - 6i - 6j - 3(N-1)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 15(N-1) - 7) + \frac{\alpha_1}{6(N-1)-18} (i^2 + j^2 + ij - 3(N-1)i - 3(N-1)j \right. \right. \\ \left. \left. + 3i + 3j + 3(N-1)^2 - 6(N-1) + 2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  nimmt die Gleichung (3.12) wieder die Form von (3.10) an.

Analog zum obigen Vorgehen setzen wir jetzt wieder  $\rho_\infty = \rho_{1,N-1}$  und erhalten

$$\beta = \frac{-\ln \rho_\infty}{(N-1)-1} - \frac{\alpha_1}{6}((N-1)-2) - \frac{\alpha_2}{3}((N-1)-2).$$

Um nun wie auch schon oben eine verbesserte Stabilität zu erhalten, setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{6\eta_1 - 2\eta_2}{((N-1)-1)((N-1)-2)}, \quad \alpha_2 = \frac{4\eta_2}{((N-1)-1)((N-1)-2)}$$

und die Gleichung (3.12) kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = \exp \left[ -\frac{|j-i|}{(N-1)-1} \left( -\ln \rho_\infty + \eta_1 \left( \frac{i^2 + j^2 + ij - 3(N-1)i}{((N-1)-2)((N-1)-3)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{-3(N-1)j + 3i + 3j + 2(N-1)^2 - (N-1) - 4}{((N-1)-2)((N-1)-3)} \right) \right. \\ \left. - \eta_2 \frac{i^2 + j^2 + ij - (N-1)i - (N-1)j - 3i - 3j + 3(N-1) + 2}{((N-1)-2)((N-1)-3)} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit  $i, j = 1, \dots, N-1$ ,  $3\eta_1 \geq \eta_2 \geq 0$ ,  $0 \leq \eta_1 + \eta_2 \leq -\ln \rho_\infty$  und  $0 < \rho_\infty \leq 1$ . Würde man nun  $\eta_1 = \eta_2 = \eta/2$  in die Gleichung (3.13) einsetzen, so erhielte man wieder die Korrelationsstruktur aus Gleichung (3.11).

Die Korrelationsstruktur (3.13) ist von Schoenmakers und Coffey in Kalibrierungen erfolgreich verwendet worden (vgl. [SC02]). Dabei ist beobachtet worden, dass in der Regel  $\eta_2 \approx 0$  ist. Da die Kalibrierung einer Korrelationsstruktur mit drei Parametern einen höheren Aufwand benötigt, als die mit nur zwei Parametern, kann eine weitere Struktur mit zwei Parametern hergeleitet werden, indem in (3.13)  $\eta_2 = 0$  gesetzt wird. Die sich so ergebende Korrelationsstruktur lautet dann

#### Verbesserte stabile zweiparametrische Korrelationsstruktur

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = \exp \left[ -\frac{|j-i|}{(N-1)-1} \left( -\ln \rho_\infty + \eta \left( \frac{i^2 + j^2 + ij - 3(N-1)i - 3(N-1)j}{((N-1)-2)((N-1)-3)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3i + 3j + 2(N-1)^2 - (N-1) - 4}{((N-1)-2)((N-1)-3)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $i, j = 1, \dots, N-1$ ,  $0 \leq \eta \leq -\ln \rho_\infty$  und  $0 < \rho_\infty \leq 1$ . Hierbei haben wir im Gegensatz zu (3.13) jetzt  $\eta_2 := 0$  und  $\eta := \eta_1$  gesetzt. In [SC02] wird begründet, dass diese Korrelationsstruktur eine in Bezug auf die Stabilität verbesserte und realistischere Korrelationsstruktur gegenüber der aus Gleichung (3.11) darstellt. Daher werden wir in unserer Kalibrierung die Korrelationsstruktur (3.14) verwenden.

### 3.5 Zinskurve

Nachdem wir die Strukturen für die Korrelation und die Volatilität im Libor-Markt-Modell gewählt haben, sind wir auf einige Eingabeparameter angewiesen,

anhand derer wir das Modell aufstellen wollen.

Um unser Modell an die gegebenen Marktdaten zu kalibrieren, benötigen wir für die unterschiedlichen Laufzeiten der Caps und Swaptions auch die entsprechenden aktuellen Libor-Raten, also eine aktuelle Zinskurve. Wie genau die Libor-Raten anhand gegebener Marktdaten bestimmt werden, wird im Folgenden anhand der Ausführungen in [AP10a], [HW06], [Fil03], [Smi12] und [Les08] dargestellt.

Ein erstes Problem unserer Kalibrierung besteht darin, dass weder die aktuellen Libor-Raten direkt am Markt gehandelt werden, noch die Bondpreise  $B(0, T_i)$  für alle unterschiedlichen Fälligkeitstermine  $T_i$  direkt am Markt verfügbar sind. Es sind zwar aktuelle Libor-Raten für verschiedene Laufzeiten verfügbar, die längste dieser Laufzeiten beträgt aber 12 Monate. In unserem Modell benötigen wir jedoch eine viel längere Zinskurve und müssen daher am Markt quotierte Produkte verwenden um daraus eine Zinskurve zu bestimmen.

Um nun die aktuellen Libor-Raten zu erhalten, verwendet man die Preise verschiedener am Markt gehandelter Produkte und bildet auf Basis dieser Werte die Libor-Raten-Kurve. Solche Produkte sind zum Beispiel Forward Rate Agreements und Swaps. Im Weiteren werden wir die aktuell ermittelte Libor-Raten-Kurve als Zinskurve bezeichnen, da die Libor-Raten in unserem Modell als Referenzzinssatz dienen.

Die Vorgehensweise bei der Ermittlung der Zinskurve ist nun wie folgt:

Für den Beginn der Zinskurve, etwa die ersten sechs Monate, verwenden wir die direkt am Markt angegebenen Libor-Raten. Da wir für unsere Kalibrierung nur die einzelnen Bondpreise  $B(0, T_i)$  beziehungsweise die sich daraus ergebenden Libor-Raten für Zeitpunkte auf unserer Tenorstruktur benötigen, verzichten wir auf die Bestimmung der kompletten Zinskurve und begnügen uns mit den Werten, die auf der Tenorstruktur liegen. Für die Bestimmung einer kompletten Zinskurve müsste ausgehend von den so bestimmten Werten noch eine geeignete Interpolation durchgeführt werden (siehe zum Beispiel in [HW06]).

Daran anschließend bilden wir den hinteren Teil der Zinskurve, indem wir am Markt angegebene Swap-Raten verwenden. Dabei machen wir von dem Zusammenhang Gebrauch, dass ein Bondpreis  $B(0, T_i)$  über die Preise anderer Bonds mit geringerer Laufzeit berechnet werden kann:

Wir erinnern uns dazu an die Darstellung der Swap-Raten aus Kapitel 2 und betrachten die Swap-Rate für das Intervall  $[T_0, T_n]$  mit  $0 \leq n \leq N$  und  $T_0 = 0$ . Es gilt

$$S_{0,n}(0) = \frac{B(0,0) - B(0,T_n)}{\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i B(0,T_{i+1})} = \frac{1 - B(0,T_n)}{\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i B(0,T_{i+1})}.$$



Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
S_{0,n}(0) \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i B(0, T_{i+1}) &= 1 - B(0, T_n) \\
\Leftrightarrow B(0, T_n) + S_{0,n}(0) \delta_{n-1} B(0, T_n) &= 1 - S_{0,n}(0) \sum_{i=0}^{n-2} \delta_i B(0, T_{i+1}) \\
\Leftrightarrow B(0, T_n) &= \frac{1 - S_{0,n}(0) \sum_{i=0}^{n-2} \delta_i B(0, T_{i+1})}{1 + S_{0,n}(0) \delta_{n-1}}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit iterativ die Bondpreise  $B(0, T_i)$  für alle  $i = 1, \dots, N$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Ausgehend davon können wir nun die Libor-Raten in  $t = 0$  über den Zusammenhang

$$L_i(0) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{B(0, T_i)}{B(0, T_{i+1})} - 1 \right) \tag{3.16}$$

erhalten.

Ist die Swap-Rate für das Intervall  $[T_0, T_i]$ , also  $S_{0,i}(0)$  nicht bekannt, so berechnen wir diese über eine lineare Interpolation, d.h. sind beispielsweise  $S_{0,i-1}(0)$  und  $S_{0,i+1}(0)$  bekannt, so lässt sich  $S_{0,i}(0)$  über den Zusammenhang

$$S_{0,i}(0) = \frac{1}{2} (S_{0,i-1}(0) + S_{0,i+1}(0)) \tag{3.17}$$

berechnen. Mit dieser Methode erhält man dann, wie auch in [AP10a] (Kapitel 6) dargestellt, eine sägezahnartige Form für die Libor-Raten, wie es auch in der Abbildung 2 erkennbar ist. Dies entspricht nicht unbedingt der Realität und könnte zum Beispiel durch Verwendung einer Spline-Interpolation, wie in Kapitel 6 in [AP10a] angegeben, verbessert werden. Für unsere Zwecke ist diese Interpolation jedoch ausreichend und wir verzichten daher an dieser Stelle auf weitere Untersuchungen.

Insgesamt erhalten wir nun für jeden Zeitpunkt  $T_i, 1 \leq i \leq N-1$  auf der Tenorstruktur ausgehend von den am Markt gegebenen Libor-Raten und Swap-Raten die Libor-Raten  $L_i(0)$  mit  $i = 0, \dots, N-1$ .

Die Marktdaten zu den Tenorzeitpunkten  $T_i$  sind für die unterschiedlichen Indizes  $i$  in Tabelle 2 angegeben.

Dabei stimmt die Swap-Rate in  $T_1$  mit der ersten Libor-Rate  $L_1$  überein. Es lassen sich nun mit der angegebenen Interpolationsmethode (3.17) die Swap-Raten für die weiteren Zeitpunkte auf der Tenorstruktur bestimmen. Daraus ergeben sich über die Zusammenhänge (3.15) und (3.16) die in Tabelle 3 angegebenen Libor-Raten.

Es ist zu bemerken, dass die Libor-Raten beziehungsweise Bondpreise zum Zeitpunkt  $t = 0$  hier zwar als Eingangsdaten für die Kalibrierung dienen, wir jedoch auf eine genauere Untersuchung dieser Daten verzichten. In einem aufwändigeren und möglicherweise noch präziseren Modell könnte man zum Beispiel verschiedene Interpolationsmöglichkeiten für die Swap-Raten untersuchen und zusätzliche Libor-Raten in die Betrachtung miteinbeziehen. Dies wären solche Libor-Raten,

$i$	Swap-Rate $S_{0,i}(0)$
1	0.3220
2	0.3340
3	0.3627
4	0.4000
6	0.4942
8	0.6294
10	0.7915
12	0.9630
14	1.1290
16	1.2845
18	1.4280
20	1.5595
22	1.6760
24	1.7795
30	2.0108
40	2.1735

Tabelle 2: Swap-Raten vom 18.04.2013 (in Prozent)

$i$	Libor-Rate $L_i(0)$	$i$	Libor-Rate $L_i(0)$
0	0.3220	20	2.9272
1	0.3460	21	3.0647
2	0.4203	22	3.0327
3	0.5124	23	3.1577
4	0.6367	24	2.8987
5	0.7318	25	2.9925
6	0.9724	26	3.0877
7	1.1103	27	3.1844
8	1.3726	28	3.2827
9	1.5404	29	3.3826
10	1.7631	30	2.6301
11	1.9440	31	2.6710
12	2.0893	32	2.7122
13	2.2681	33	2.7540
14	2.3651	34	2.7962
15	2.5363	35	2.8390
16	2.5991	36	2.8823
17	2.7607	37	2.9262
18	2.7988	38	2.9706
19	2.9505	39	3.0157

Tabelle 3: Berechnete Libor-Raten vom 18.04.2013 (in Prozent)

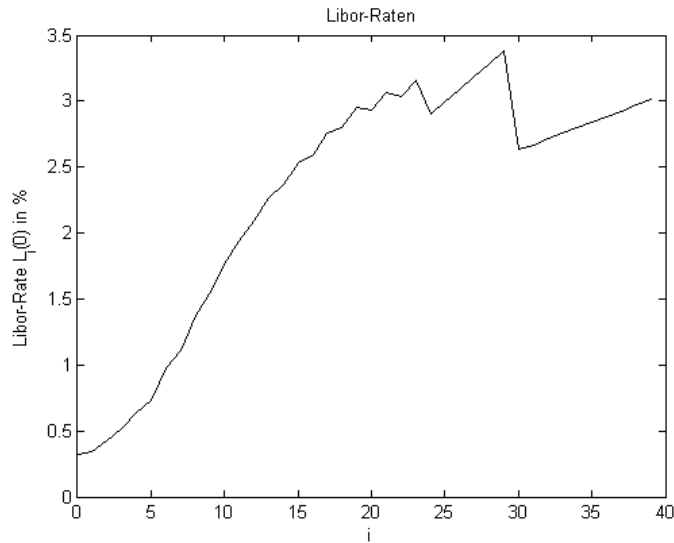


Abbildung 2: Berechnete Libor-Raten-Kurve vom 18.04.2013

die sich mit den aktuell betrachteten Zinssätzen überlappen, zum Beispiel eine Libor-Rate mit einem Verzinsungszeitraum von einem Monat bis in sieben Monaten. Zudem betrachten wir nur die für uns relevanten Libor-Raten auf der Tenorstruktur und keine komplette stetige Zinskurve. Eine solche Kurve könnte man zum Beispiel durch eine Spline-Interpolation, ausgehend von den Libor-Raten auf der Tenorstruktur, bestimmen. Weitere Ausführungen hierzu sind in [AP10a] (Kapitel 6) und [HW06] zu finden.

Nachdem wir nun die Zinskurve als einen Eingabeparameter für unser Modell bestimmt haben, besteht unser Ziel nun im folgenden Abschnitt darin, die Bewertung von Caps im Libor-Markt-Modell darzustellen um so die Bedingungen für die Kalibrierung des Modells an am Markt gegebene Cap Volatilitäten zu erhalten.

### 3.6 Bewertung von Caps im Libor-Markt-Modell

Wie oben bereits erwähnt, wollen wir nun die Vorgehensweise bei der Bewertung von Caps im Libor-Markt-Modell darstellen. Wir orientieren uns bei den Ausführungen zu diesem Thema größtenteils an [Pau13].

Ein Cap ist eine rollierende Folge von Caplets. Betrachten wir wieder die gegebene Tenorstruktur

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{N-1} < T_N$$

und einen Cap, der in  $T_p$  beginnt und in  $T_q$  endet mit  $1 \leq p < q \leq N$ . Für die Bewertung dieses Caps betrachtet man für jedes  $i = p, p+1, \dots, q-1$  ein Caplet mit Startzeitpunkt  $T_i$  und Endzeitpunkt  $T_{i+1}$ . Wollen wir nun den Preis dieses Caps im Zeitpunkt  $t < T_p$  bestimmen, so ergibt sich dieser als die Summe der Preise der einzelnen Caplets in  $t$ . Für die Bewertung von Caps genügt es also,

wenn wir die Preise der einzelnen Caplets bestimmen können.

Caplets sind Call-Optionen auf Libor-Raten. Ein Caplet für das Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  mit Strike  $K$  gibt dem Besitzer das Recht, im Zeitpunkt  $T_{i+1}$  die diskrete Spot-Rate

$$F(T_i; T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{1}{B(T_i, T_{i+1})} - 1 \right)$$

gegen einen festen Zinssatz  $K$  zu tauschen. Dies entspricht somit der Auszahlung

$$(F(T_i; T_i, T_{i+1}) - K)^+ \delta_i = (L_i(T_i) - K)^+ \delta_i$$

im Zeitpunkt  $T_{i+1}$ . Die Auszahlungshöhe des  $T_i$ -Caplets entspricht somit der Auszahlungshöhe einer Call-Option auf die Libor-Rate  $L_i$  mit Strike  $K$  und Ausübungszeitpunkt  $T_i$ . Unter der Annahme von deterministischer Volatilität kann man nun den Preis eines Caplets analog zur Bewertung einer Call-Option im Black-Scholes-Modell bestimmen.

Im ersten Schritt wird dazu der Terminpreis des Derivats zum Termin  $T_{i+1}$  in  $t$  bestimmt. Dieser beträgt

$$\mathbb{E}_{T_{i+1}}[\delta_i(L_i(T_i) - K)^+ | \mathcal{F}_t]. \quad (3.18)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbb{E}_{T_{i+1}}$  den Erwartungswert bezüglich des Forwardmartingalmaßes  $P_{T_{i+1}}$ . Um den Preis des  $T_i$ -Caplets mit Strike  $K$  in  $t = 0$  zu bestimmen, benötigen wir den Spotpreis des Caplets. Diesen erhalten wir durch das Diskontieren des Forwardpreises mithilfe des Bondpreises  $B(0, T_{i+1})$ . Da wir im Weiteren nur den Fall  $t = 0$  betrachten, können wir statt des bedingten Erwartungswertes in (3.18) zum unbedingten Erwartungswert übergehen. Der Spotpreis des Caplets ergibt sich somit als:

$$\begin{aligned} Ci(0; K) &= B(0, T_{i+1}) \delta_i \mathbb{E}_{T_{i+1}}[(L_i(T_i) - K)^+] \\ &= B(0, T_{i+1}) \delta_i \left( \mathbb{E}_{T_{i+1}}[L_i(T_i) \mathbb{1}_{\{L_i(T_i) > K\}}] - K P_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K) \right) \\ &= B(0, T_{i+1}) \delta_i \left( L_i(0) \mathbb{E}_{T_{i+1}} \left[ \frac{L_i(T_i)}{L_i(0)} \mathbb{1}_{\{L_i(T_i) > K\}} \right] - K P_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K) \right) \\ &= B(0, T_{i+1}) \delta_i \left( L_i(0) Q_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K) - K P_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{dQ_{T_{i+1}}}{dP_{T_{i+1}}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_i(t)}{L_i(0)} \quad \forall 0 \leq t \leq T_i.$$

Unter Verwendung der im Kapitel 3.2 dargestellten Verteilung der  $i$ -ten Libor-Rate kann nun die Wahrscheinlichkeit  $P_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K)$  bestimmt werden. Man

erhält:

$$\begin{aligned}
 & P_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K) \\
 &= P_{T_{i+1}}\left(\ln\left(\frac{L_i(T_i)}{L_i(0)}\right) > \ln\left(\frac{K}{L_i(0)}\right)\right) \\
 &= P_{T_{i+1}}\left(\frac{\ln\left(\frac{L_i(T_i)}{L_i(0)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}} > \frac{\ln\left(\frac{K}{L_i(0)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{L_i(0)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}}\right)
 \end{aligned}$$

Hierbei wird mit  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Wir haben bei unseren Rechnungen dabei ausgenutzt, dass

$$\frac{\ln\left(\frac{L_i(T_i)}{L_i(0)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}}$$

unter dem Forwardmartingalmaß  $P_{T_{i+1}}$  standardnormalverteilt ist.

Um nun  $Q_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K)$  zu bestimmen, muss zunächst die Verteilung von  $L_i$  unter dem Maß  $Q_{T_{i+1}}$  bestimmt werden. Dazu betrachten wir zunächst den Dichtequotientenprozess

$$\left.\frac{dQ_{T_{i+1}}}{dP_{T_{i+1}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_i(t)}{L_i(0)} = \exp\left(\int_0^t\sigma_i(s)dW_i^{i+1}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\sigma_i^2(s)ds\right), \quad \forall 0 \leq t \leq T_i.$$

Anhand dieser Gestalt des Dichtequotientenprozesses lässt sich erkennen, dass wir den  $Q_{T_{i+1}}$ -Wiener-Prozess  $\widetilde{W}^{i+1}$  mit dem Satz von Girsanov durch

$$\widetilde{W}_i^{i+1} = W_i^{i+1}(t) - \int_0^t\sigma_i(s)ds \quad \forall 0 \leq t \leq T_i$$

erhalten.

Hiermit ergibt sich für die Libor-Rate  $L_i$ :

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma_i(t)dW_i^{i+1}(t) = L_i(t)(\sigma_i(t)d\widetilde{W}_i^{i+1}(t) + \sigma_i^2(t)dt)$$

Wir erhalten somit die Dynamik von  $L_i$  unter dem Maß  $Q_{T_{i+1}}$ . Nun kann durch analoges Vorgehen zu oben die Wahrscheinlichkeit  $Q_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K)$  bestimmt werden und es ergibt sich:

$$Q_{T_{i+1}}(L_i(T_i) > K) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{L_i(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^{T_i}\sigma_i^2(s)ds}}\right)$$

Es ergibt sich damit insgesamt der folgende Satz:

**Satz 3.2:** Black's Formel für Caplets

Der Preis eines Caplets mit Strike  $K$  für das Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  mit  $1 \leq i \leq N-1$  im Zeitpunkt  $t = 0$  beträgt

$$C_i(0; K) = B(0, T_{i+1}) \delta_i [L_i(0) \Phi(d_1(L_i(0))) - K \Phi(d_2(L_i(0)))] \quad \text{mit}$$

$$d_1(x) = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + \frac{1}{2} \int_0^{T_i} \sigma_i^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_i} \sigma_i^2(s) ds}} \quad \text{und}$$

$$d_2(x) = \frac{\ln(\frac{x}{K}) - \frac{1}{2} \int_0^{T_i} \sigma_i^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_i} \sigma_i^2(s) ds}}.$$

Hierbei bezeichnet  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Mithilfe dieser Formel für die Bewertung von Caplets ist eine schnelle Kalibrierung des Modells an die Marktdaten möglich. Definieren wir uns  $\sigma_i^{CM}$  als die am Markt verfügbare implizite Caplet Volatilität für die Libor-Rate  $L_i$  und betrachten den Preis, der sich durch diese implizite Volatilität ergibt, so muss gelten, dass dieser mit dem Preis  $C_i(0; K)$  aus Black's Formel übereinstimmt. Damit erhalten wir die folgende Bedingung für die Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an die Caplet Volatilitäten:

$$(\sigma_i^{CM})^2 = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \sigma_i^2(t) dt. \quad (3.19)$$

Um die Kalibrierung durchzuführen, müssen wir – wie oben beschrieben – zunächst eine entsprechende Wahl für die Parametrisierung der Funktion  $\sigma_i(t)$  treffen.

Ein weiteres Problem, dass bei der Kalibrierung an die Caplets auftaucht, besteht darin, dass am Markt nur die Volatilitäten der verschiedenen Caps angegeben sind. Aus diesen Volatilitäten haben wir die Caplet Volatilitäten abzuleiten. Dies geschieht mit dem so genannten Cap-to-Caplet-Stripping.

### 3.7 Cap-to-Caplet-Stripping

Wie im vorherigen Kapitel gesehen, benötigen wir die impliziten Caplet Volatilitäten für eine Kalibrierung des Modells. Unser Ziel besteht also darin, diese Volatilitäten aus den am Markt verfügbaren Cap Volatilitäten zu gewinnen. Die Vorgehensweise ist dabei iterativ und es können so nach und nach die für die verschiedenen Zeitintervalle konstanten Caplet Volatilitäten bestimmt werden. Die angegebenen Darstellungen orientieren sich im Wesentlichen an den in [Sch05] dargestellten Ideen.

Betrachten wir dazu für jedes  $k = 2, \dots, N$  den ATM-Cap über den Zeitraum  $[T_1, T_k]$  mit dem Preis  $C_{1,k}^{ATM}$  in  $t = 0$ . Der ATM-Strike eines Caps entspricht dabei genau der Swap-Rate  $S_{1,k}(0)$  für den betrachteten Zeitraum. Am Markt sind die ATM Cap Preise implizit durch die Cap Volatilitäten  $\sigma_{1,k}^{ATM}$  gegeben. Dabei berechnet sich der Preis eines Caps als Summe der Preise der dem Cap

zugrundeliegenden Caplets, wobei für jedes Caplet die gleiche Volatilität  $\sigma_{1,k}^{ATM}$  zur Berechnung des Preises herangezogen wird. Der Cap Preis  $C_{1,k}^{ATM}$  setzt sich somit wie folgt zusammen:

$$C_{1,k}^{ATM} = \sum_{j=1}^{k-1} C_j(L_j, S_{1,k}, \sigma_{1,k}^{ATM}, T_j) \quad (3.20)$$

für  $k = 2, \dots, N$ . Hierbei bezeichnet  $C_j(L_j, S_{1,k}, \sigma_{1,k}^{ATM}, T_j) := C_j(0; S_{1,k})$  den Preis des  $T_j$ -Caplets mit Strike  $S_{1,k}(0)$  und Volatilität  $\sigma_{1,k}^{ATM}$ , der zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch Black's Formel gegeben ist als

$$C_j(L_j, S_{1,k}, \sigma_{1,k}^{ATM}, T_j) = B(0, T_{j+1}) \delta_j [L_j(0) \Phi(d_1(L_j(0))) - S_{1,k} \Phi(d_2(L_j(0)))] \quad \text{mit}$$

$$d_1(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{S_{1,k}}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_{1,k}^{ATM})^2 T_j}{\sigma_{1,k}^{ATM} \sqrt{(T_j)}} \quad \text{und}$$

$$d_2(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{S_{1,k}}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_{1,k}^{ATM})^2 T_j}{\sigma_{1,k}^{ATM} \sqrt{(T_j)}}.$$

$\sigma_{1,k}^{ATM}$  entspricht dabei im Allgemeinen nicht der tatsächlichen Volatilität des  $T_j$ -Caplets. Vielmehr wird die implizite Volatilität  $\sigma_{1,k}^{ATM}$  als eine Art durchschnittliche Volatilität betrachtet, so dass man durch die Gleichung (3.20) den ATM Cap Preis  $C_{1,k}^{ATM}$  erhält.

Unser Ziel besteht nun darin, eine Folge von Caplet Volatilitäten  $\sigma_j^{CM}$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$  zu finden, so dass

$$C_{1,k}^{ATM} = \sum_{j=1}^{k-1} C_j(L_j, S_{1,k}, \sigma_j^{CM}, T_j)$$

für  $k = 2, \dots, N$  gilt. Hierbei bezeichnet  $\sigma_j^{CM}$  jeweils wie oben die Volatilität des Caplets mit Startzeitpunkt  $T_j$  und Endzeitpunkt  $T_{j+1}$ .

Wir gehen dabei iterativ vor. Zunächst wird  $\sigma_1^{CM}$  anhand der Gleichung

$$C_{1,2}^{ATM} = C_1(L_1, S_{1,2}, \sigma_{1,2}^{ATM}, T_1) = C_1(L_1, S_{1,2}, \sigma_1^{CM}, T_1)$$

bestimmt. Es gilt also  $\sigma_1^{CM} = \sigma_{1,2}^{ATM}$ .

Somit haben wir also einen Anfangswert für unsere Folge von Caplet Volatilitäten und können nun iterativ die weiteren Volatilitäten  $\sigma_j^{CM}$ ,  $j = 2, \dots, N - 1$  bestimmen. Die allgemeine Vorgehensweise ist dabei wie folgt:

Angenommen wir haben für ein festes  $k$  mit  $k < N - 1$  bereits die Caplet Volatilitäten  $\sigma_j^{CM}$ ,  $\forall j = 1, \dots, k - 1$  bestimmt. Dann kann  $\sigma_k^{CM}$  mithilfe der Gleichung

$$C_k(L_k, S_{1,k+1}, \sigma_k^{CM}, T_k) = C_{1,k+1}^{ATM} - \sum_{j=1}^{k-1} C_j(L_j, S_{1,k+1}, \sigma_j^{CM}, T_j)$$

berechnet werden.

**Bemerkung 3.3:** Die dargestellte Methode des Cap-to-Caplet-Stripping ist nur für den At-The-Money Fall angegeben und kann analog auch für andere Strike Preise angewendet werden.

Weiterhin wird, um für jeden Zeitpunkt auf der Tenorstruktur eine Caplet Volatilität zu erhalten, auch für jedes  $T_i, i = 1 \dots, N$  eine Cap Volatilität  $\sigma_{1,i}^{ATM}$  benötigt. Da diese nicht komplett am Markt angegeben sind, wird zunächst über die vorhandenen Cap Volatilitäten eine Interpolation durchgeführt, um so als Ausgangspunkt für das Cap-to-Caplet-Stripping ein vollständiges System von Cap Volatilitäten für die gegebene Tenorstruktur zu erhalten. Wir wenden hierbei – wie in [Sch05] vorgeschlagen – eine Interpolation durch kubische Splines an. Bei diesem Verfahren wird eine Interpolation mit Polynomen dritten Grades durchgeführt, um so eine zweimal stetig differenzierbare Funktion zu erhalten. Eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens ist in [HW06] und [AP10b] zu finden.

Die vorliegenden am Markt beobachteten Cap Volatilitäten  $\sigma_{1,i}^{ATM}$  zu den Zeitpunkten  $T_i$  sind in Tabelle 4 dargestellt.

$i$	Cap Volatilität $\sigma_{1,i}^{ATM}$
2	108.70
4	81.44
6	81.89
8	74.58
10	68.54
12	61.70
14	54.40
16	49.40
18	45.15
20	41.70
24	37.45
30	32.75
40	29.70

Tabelle 4: ATM-Cap Volatilitäten vom 18.04.2013 (Angaben in Prozent)

Daraus ergeben sich mit der beschriebenen Methode des Cap-to-Caplet-Stripping die in Tabelle 5 dargestellten Caplet Volatilitäten

Um das Libor-Markt-Modell unter Berücksichtigung des in Kapitel 3 erwähnten Volatilitäts-„Smiles“ zu kalibrieren, sind neben den ATM Cap Volatilitäten auch die am Markt gegebenen Cap Volatilitäten für verschiedene Strike Preise zu beachten. Da wir in dieser Arbeit jedoch auf die Betrachtung solcher „Smile“-Effekte verzichten, werden wir auf diese Volatilitäten im Rahmen der Untersuchungen nicht weiter eingehen. Eine Bestimmung der Caplet Volatilitäten für andere Strike Preise kann jedoch, wie schon erwähnt, mit dem selben Algorithmus durchgeführt werden.



$i$	$\sigma_i^{CM}$	$i$	$\sigma_i^{CM}$	$i$	$\sigma_i^{CM}$
1	108.70	14	35.15	27	22.67
2	75.58	15	34.79	28	21.95
3	72.81	16	31.66	29	21.45
4	81.62	17	29.16	30	19.85
5	84.22	18	27.80	31	19.92
6	71.56	19	27.67	32	20.28
7	60.66	20	27.98	33	20.95
8	60.19	21	28.52	34	21.97
9	58.51	22	28.31	35	23.38
10	51.99	23	27.77	36	25.20
11	44.39	24	25.91	37	27.51
12	37.73	25	24.68	38	30.36
13	34.59	26	23.59	39	33.88

Tabelle 5: ATM-Caplet Volatilitäten vom 18.04.2013 (Angaben in Prozent)

### 3.8 Bewertung von Swaptions

Da unser Ziel im weiteren Verlauf der Arbeit darin besteht, unser Modell gleichzeitig an Swaptions und Caps zu kalibrieren, wollen wir zunächst herleiten, wie die Bewertung von Swaptions unter den gegebenen Modellannahmen aussieht. Die folgenden Verfahren zur Bewertung von Swaptions werden in Anlehnung an [Pau13] dargestellt.

Es sei wieder die Tenorstruktur  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N$  gegeben. Wir betrachten nun eine Swaption mit Strike-Zinssatz  $K$ , für die die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps in  $T_p$  beginnt und in  $T_q$  endet, wobei  $1 \leq p < q \leq N$  ist. Eine Payer-Swaption ist dabei das Recht, in  $T_p$  in einen Swap mit Endzeitpunkt  $T_q$  und Festzinssatz  $K$  einzutreten.

Der Wert des zugrunde liegenden Swaps zum Zeitpunkt  $t$  lässt sich – wie bereits im Abschnitt 2 dargestellt – als

$$\begin{aligned} Swap(t; T_p, T_q) &= \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) (L_i(t) - K) \\ &= B(t, T_p) - B(t, T_q) - K \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(t, T_{i+1}). \end{aligned}$$

berechnen. Unter Verwendung der in Kapitel 2 hergeleiteten Swap-Rate,

$$S_{p,q}(t) = \frac{B(t, T_p) - B(t, T_q)}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(t, T_{i+1})} \quad (3.21)$$

gilt somit

$$Swap(t; T_p, T_q) = (S_{p,q}(t) - K) \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(t, T_{i+1}).$$

Wie bereits dargestellt, ergibt sich für die Auszahlung der Swaption in  $T_p$  der Wert

$$(S_{p,q}(T_p) - K)^+ \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(T_p, T_{i+1}).$$

Der Ansatz zur Bewertung dieser Swaption ist nun die Berechnung des Terminpreises zum Termin  $T_p$ . Dieser beträgt zum Zeitpunkt  $t$

$$\mathbb{E}_{T_p} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(T_p, T_{i+1}) | \mathcal{F}_t].$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbb{E}_{T_p}$  den Erwartungswert bezüglich des Forwardmartingalmaßes  $P_{T_p}$  zum Termin  $T_p$ .

Man berechnet diesen Terminpreis nun mithilfe des Swapmartingalmaßes  $P^{Swap}$ . Dieses ist durch

$$\left. \frac{dP^{Swap}}{dP_{T_p}} \right|_{\mathcal{F}_t} =: L^{Swap}(t) = \frac{N_{p,q}(t)}{B(t, T_p)} \frac{B(0, T_p)}{N_{p,q}(0)} \quad \forall t \leq T_p \quad (3.22)$$

definiert. Dabei ist  $N_{p,q}(t)$  gegeben durch:

$$N_{p,q}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(t, T_{i+1}), \quad \forall 0 \leq t \leq T_p. \quad (3.23)$$

Unter  $P^{Swap}$  ist weiterhin

$$\left( \frac{B(t, T_i)}{N_{p,q}(t)} \right)_{0 \leq t \leq T_i}$$

für jedes  $1 \leq i \leq N-1$  ein lokales Martingal. Es ist dabei insbesondere  $(S_{p,q}(t))_{t \leq T_p}$  mit

$$S_{p,q}(t) = \frac{B(t, T_p) - B(t, T_q)}{N_{p,q}(t)} = \frac{B(t, T_p)}{N_{p,q}(t)} - \frac{B(t, T_q)}{N_{p,q}(t)}$$

ein lokales Martingal bezüglich  $P^{Swap}$ .

Mit der Bayes-Formel für bedingte Erwartungswerte (vgl. [Shr04], Lemma 5.2.2) und dem in Gleichung (3.22) definierten Dichtequotientenprozess  $(L^{Swap}(t))_t$  folgt nun, dass gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{T_p} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(T_p, T_{i+1}) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{T_p} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ N_{p,q}(T_p) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{Swap} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ N_{p,q}(T_p) \frac{L^{Swap}(t)}{L^{Swap}(T_p)} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{Swap} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ N_{p,q}(T_p) \frac{B(T_p, T_p) N_{p,q}(t)}{B(t, T_p) N_{p,q}(T_p)} | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{N_{p,q}(t)}{B(t, T_p)} \mathbb{E}^{Swap} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass  $B(T_p, T_p) = 1$  ist.

Der arbitragefreie Preis der Swaption zum heutigen Zeitpunkt ergibt sich nun durch Diskontieren mit dem  $T_p$ -Bond und Verwendung von  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} V_{Swaption}^{p,q}(0) &= B(0, T_p) \mathbb{E}_{T_p} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+ N_{p,q}(T_p)] \\ &= N_{p,q}(0) \mathbb{E}^{Swap} [(S_{p,q}(T_p) - K)^+]. \end{aligned}$$

Wie oben gesehen, ist  $(S_{p,q}(t))_t$  ein  $P^{Swap}$ -Martingal. Mit der Annahme, dass die Swap-Rate  $(S_{p,q}(t))_t$  unter dem Maß  $P^{Swap}$  lognormalverteilt mit Volatilität  $\sigma_{Swap}$  ist, erhalten wir die Dynamik

$$dS_{p,q}(t) = \sigma_{Swap}(t) S_{p,q}(t) dW^{Swap}(t) \quad (3.24)$$

mit einer deterministischen Volatilität  $\sigma_{Swap}$  und einem Wiener-Prozess  $W^{Swap}$  unter  $P^{Swap}$ . Unter Berücksichtigung dieser Annahme können wir analog zum Vorgehen bei der Berechnung der Caplet Preise auch die Swaption Preise mithilfe von Black's Formel berechnen. Wir können daher folgenden Satz für die Bewertung von Swaptions ohne Herleitung angeben:

**Satz 3.4:** Black's Formel für Swaptions

Der Preis einer Swaption für das Intervall  $[T_p, T_q]$ , mit  $1 \leq p < q \leq N$  und Strike  $K$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} V_{Swaption}^{p,q}(0) &= N_{p,q}(0) (S_{p,q}(0) \Phi(d_1(S_{p,q}(0))) - K \Phi(d_2(S_{p,q}(0)))) \quad \text{mit} \\ d_1(x) &= \frac{\ln(\frac{x}{K}) + \frac{1}{2} \int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(s) ds}} \quad \text{und} \\ d_2(x) &= \frac{\ln(\frac{x}{K}) - \frac{1}{2} \int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(s) ds}}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $(S_{p,q}(t))_t$  die in (3.21) definierte Swap-Rate und  $(N_{p,q}(t))_t$  ist wie in (3.23) definiert. Zudem wird eine deterministische Swap-Raten Volatilität unterstellt, sodass der Swap-Raten Prozess die in Gleichung (3.24) angegebene Dynamik besitzt.

Bezeichne nun  $\sigma_{p,q}^{SM}$  die am Markt angegebene implizite Volatilität einer Swaption mit zugrundeliegendem Swap über das Intervall  $[T_p, T_q]$ , dann gilt:

$$(\sigma_{p,q}^{SM})^2 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(s) ds. \quad (3.25)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Annahme einer deterministischen Swap-Raten Volatilität nicht direkt mit den von uns gewählten Grundlagen des Libor-Markt-Modells übereinstimmt. Wir werden deshalb später im Kapitel 4.1 einige Approximationen durchführen, sodass wir deterministische Volatilitäten der Swap-Raten erhalten. Aufgrund dieser Approximationen kann dann eine gleichzeitige Kalibrierung an

Swaptions und Caplets im Libor-Markt-Modell durchgeführt werden. Zunächst wollen wir aber im Folgenden die Dynamik und damit auch die tatsächliche Verteilung der Swap-Raten bestimmen.

Die Annahme im Libor-Markt-Modell besteht darin, dass die Libor-Raten deterministische Volatilitäten besitzen und damit lognormalverteilt sind. Ausgehend von dieser Annahme werden wir nun zeigen, dass die Swaption Volatilität  $(\sigma_{Swap}(t))_t$  ein stochastischer Prozess ist. Wir orientieren uns dabei an den Darstellungen in [HW00].

Betrachten wir zunächst erneut den Zusammenhang zwischen Bondpreisen und Libor-Raten: Aus der Definition der Libor-Raten folgt direkt der Zusammenhang

$$\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} = 1 + \delta_i L_i(t), \quad \forall 1 \leq i \leq N-1.$$

Es gilt somit für jedes fest gewählte  $q$  mit  $1 \leq i < q$  und  $q \in \mathbb{N}, q \leq N$

$$\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_q)} = \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} \frac{B(t, T_{i+1})}{B(t, T_{i+2})} \cdots \frac{B(t, T_{q-1})}{B(t, T_q)} = \prod_{k=i}^{q-1} (1 + \delta_k L_k(t)).$$

Hieraus ergibt sich für die Swap-Raten die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} S_{p,q}(t) &= \frac{B(t, T_p) - B(t, T_q)}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i B(t, T_{i+1})} \\ &= \frac{\frac{B(t, T_p)}{B(t, T_q)} - 1}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i \frac{B(t, T_{i+1})}{B(t, T_q)}} \\ &= \frac{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t)) - 1}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Wir können nun die Dynamik der Swap-Rate  $(S_{p,q}(t))_t$  mithilfe der Itô-Formel bestimmen. Dabei erhalten wir partielle Ableitungen nach den Libor-Raten und somit Terme der Form

$$\sum_{k=p}^{q-1} \frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} dL_k(t). \quad (3.27)$$

Wir setzen nun in diese Gleichung die Dynamik der Libor-Raten ein und betrachten dann nur die Terme, die nicht von beschränkter Variation sind, da diese für die Bestimmung der Swaption Volatilität  $\sigma_{Swap}$  von Bedeutung sind. Wir erhalten somit aus (3.27) den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=p}^{q-1} \frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} \sigma_k(t) L_k(t) dW_k(t). \quad (3.28)$$

Hierbei ist  $W_k$  die  $k$ -te Komponente eines  $(N-1)$ -dimensionalen Wiener-Prozesses unter einem beliebigen Forwardmartingalmaß, wie zum Beispiel dem Terminal

Measure. Da wir hier das Forwardmartingalmaß nicht explizit festlegen, verzichten wir auf die bisher vorgenommene Angabe des Indexes für die Festlegung des Maßes unter dem es sich um einen Wiener-Prozess handelt.

Es gilt nun die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)}, \text{ mit } p \leq k \leq q-1 \quad (3.29)$$

zu bestimmen.

Dies geschieht mithilfe des natürlichen Logarithmus und des Zusammenhangs

$$\frac{\partial \ln S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} = \frac{1}{S_{p,q}(t)} \frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)}. \quad (3.30)$$

Aus Gleichung (3.26) ergibt sich nun

$$\ln S_{p,q}(t) = \ln \left( \prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t)) - 1 \right) - \ln \left( \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t)) \right).$$

Wir bestimmen nun die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks nach  $L_k(t)$  und verwenden dann den Zusammenhang (3.30) um die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)}$  zu bestimmen.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} \\ &= \frac{\delta_k \prod_{i=p, i \neq k}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t))}{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t)) - 1} - \frac{\delta_k \sum_{i=p}^{k-1} \delta_i \prod_{j=i+1, j \neq k}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))} \\ &= \frac{\delta_k}{1 + \delta_k L_k(t)} \left( \frac{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t))}{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t)) - 1} - \frac{\sum_{i=p}^{k-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))} \right) \\ &= \frac{\delta_k}{1 + \delta_k L_k(t)} \gamma_k(t), \end{aligned}$$

mit

$$\gamma_k(t) := \frac{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t))}{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta_i L_i(t)) - 1} - \frac{\sum_{i=p}^{k-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta_j L_j(t))}.$$

Insgesamt folgt hieraus zusammen mit (3.30), dass

$$\frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} = \frac{S_{p,q}(t) \delta_k \gamma_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)}$$

gilt. Die Terme, die die Dynamik von  $S_{p,q}(t)$  beschreiben und nicht von endlicher Variation sind, haben dann nach (3.28) die Gestalt

$$S_{p,q}(t) \sum_{k=p}^{q-1} \sigma_k(t) \gamma_k(t) \frac{\delta_k L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} dW_k(t).$$

Da wir später nach dem Maßwechsel zum Swapmartingalmaß nur die Volatilitäts-Terme betrachten wollen, genügt es somit uns auf diese Ausdrücke zu beschränken.

Wir wissen aus Gleichung (3.24), dass die Swap-Rate  $S_{p,q}$  unter dem Swapmaß  $P^{Swap}$  die Dynamik

$$dS_{p,q}(t) = \sigma_{Swap}(t)S_{p,q}(t)dW^{Swap}(t)$$

hat.

Aus den beiden Gleichungen erhalten wir somit, dass die Volatilität der Swap-Raten durch

$$\sigma_{Swap}(t) = \sum_{k=p}^{q-1} \sigma_k(t) \gamma_k(t) \frac{\delta_k L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)}$$

gegeben ist, da sich die Volatilitäts-Terme bei einem Maßwechsel zum Swapmartingalmaß nicht ändern. Es handelt sich bei  $(\sigma_{Swap}(t))_t$  daher um einen stochastischen Prozess und nicht, wie in Black's Formel für Swaptions angenommen, um eine deterministische Funktion.

Im angegebenen Libor-Markt-Modell sind die Swap-Raten somit nicht lognormalverteilt. Man nennt das Modell, in dem man von lognormalverteilten Swap-Raten ausgeht auch Swap-Markt-Modell. Wie wir gesehen haben, ist dieses jedoch nicht konsistent mit dem Libor-Markt-Modell.

Insgesamt ist die Bewertung von Swaptions somit unter den dargestellten Annahmen nicht in einer geschlossenen Form möglich und es bedarf zum Beispiel der Anwendung von Monte Carlo Simulationen, um eine Bewertung durchführen zu können. Da diese jedoch einen hohen numerischen Aufwand beanspruchen und man eine analoge Form zu Black's Formel für Caplets auch für Swaptions verwenden möchte, bedient man sich einiger Approximationen, so dass die Volatilität  $\sigma_{Swap}$  durch eine deterministische Funktion angenähert wird und Black's Formel für Swaptions angewendet werden kann. Mögliche Vorgehensweisen für diese Approximation sind im Kapitel 4.1 durch die Formeln von Rebonato bzw. Hull und White dargestellt.

Wie bereits erwähnt, benötigen wir neben den in Kapitel 3.5 bestimmten aktuellen Libor-Raten und den in Kapitel 3.7 berechneten Caplet Volatilitäten noch die am Markt gegebenen Volatilitäten der von uns für die Kalibrierung genutzten Swaptions. Diese sind in Tabelle 6 angegeben.

$i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	94.66	85.90	76.30	65.80	56.60	48.90	43.60	39.80	37.10	35.10
2	75.82	75.60	68.80	59.90	52.75	46.95	42.90	39.90	37.80	36.00
4	77.27	66.10	58.00	50.05	46.25	42.15	39.25	37.40	35.30	34.05
6	63.68	55.05	48.55	44.00	40.85	37.85	36.20	33.90	32.60	31.65
8	50.92	45.40	40.35	37.60	35.50	33.45	31.75	30.75	29.95	29.35
10	41.44	37.80	35.20	33.25	31.70	30.40	29.45	28.70	28.15	27.75
12	35.95	33.09	31.29	29.90	28.91	27.98	27.37	26.90	26.54	26.39
14	30.92	28.75	27.65	26.80	26.30	25.75	25.40	25.20	25.10	25.10
16	28.73	27.08	26.19	25.53	25.51	24.81	24.55	24.56	24.82	24.64
18	26.34	25.34	24.62	24.28	24.63	23.77	23.81	23.92	24.54	24.17
20	24.07	23.55	23.20	23.00	23.70	23.00	23.15	23.35	24.30	23.75

Tabelle 6: Swaption Volatilitäten vom 18.04.2013 (Angaben in Prozent). Spalten geben die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps an, während Zeilen die Fälligkeit der Swaption angeben (Angaben in halben Jahren). Der erste Eintrag mit dem Wert 94.66 besagt zum Beispiel, dass die Swaption Volatilität für eine in  $T_1$  startende Swaption mit der Laufzeit  $2\delta$ , eine Swaption die also bis  $T_3$  läuft, 94.66 Prozent beträgt.

---

## 4 Kalibrierung des Libor-Markt-Modells

Das Ziel dieser Arbeit liegt in einer Kalibrierung des Libor-Markt-Modells. Dabei sind zunächst die Spezifikationen der Volatilitätsfunktion und der Korrelationsstruktur festzulegen. Ist dies geschehen, so kann das gewählte Modell an die aktuellen Libor-Raten und an die entsprechenden Derivate, in unserem Fall Swaptions und Caplets, kalibriert werden. Dabei erhalten wir die Volatilitäten der Caplets aus den am Markt quotierten Volatilitäten der entsprechenden Caps. Die Kalibrierung an die aktuellen Libor-Raten geschieht dabei automatisch, da diese Raten Anfangsbedingungen und somit zugleich Eingabeparameter für unser Modell sind. Die Kalibrierung an Swaptions und Caplets wird dann derart vollzogen, dass die Volatilitätsfunktionen und die Korrelationsstruktur so gewählt werden, dass die Modellpreise mit den Marktpreisen der Derivate möglichst gut übereinstimmen.

Wie wir gesehen haben, ist das Libor-Markt-Modell konsistent mit Black's Formel zur Bewertung von Caplets. Für die Berechnung von Swaption Preisen gibt es jedoch keine geschlossene Lösungsformel. Daher können Swaptions unter Zuhilfenahme von Monte Carlo Methoden bewertet werden. Dies bedeutet jedoch, dass in jedem Schritt in der Kalibrierung diese Preise neu berechnet werden müssen, was zu langen und aufwändigen Simulationen führt. Um diesen Aufwand zu umgehen, werden häufig approximierbare geschlossene Formeln für die Bewertung von Swaptions verwendet. Diese Formeln werden wir im Laufe des Kapitels darstellen und anschließend für die Kalibrierung verwenden.

### 4.1 Grundlagen für die Kalibrierung

Wie oben bereits angekündigt wollen wir das Libor-Markt-Modell gleichzeitig an die Marktdaten von Swaptions und Caplets kalibrieren. Dazu benötigen wir analog zu der sich für die Caplet Volatilitäten ergebenden Bedingung aus Black's Formel (vgl. (3.19)) noch eine Bedingung für die Swaption Volatilitäten im Modell. Die Annahme der lognormalverteilten Swaption Volatilitäten ist, wie im vorherigen Kapitel gesehen, nicht mit den Voraussetzungen des Libor-Markt-Modells konsistent. Daher bedarf es einer Approximation, um so das Libor-Markt-Modell auch an Swaptions kalibrieren zu können und die Bedingung (3.25) nutzen zu können. Diese Approximation wird im Folgenden dargestellt. Wir orientieren uns dabei an den in [Sch02] und [BM06] dargestellten Herleitungen.

Seien wie im vorherigen Kapitel Tenorzeitpunkte  $T_p$  und  $T_q$  gegeben mit  $1 \leq p < q \leq N$ . Dann kann zur Kalibrierung des Libor-Markt-Modells die am Markt angegebene Swaption Volatilität mit der Formel von Rebonato approximiert werden:

**Satz 4.1:** Approximationsformel nach Rebonato

Im Libor-Markt-Modell lässt sich die Volatilität einer Swaption über das Intervall



$[T_p, T_q]$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  approximieren durch

$$(\sigma_{p,q}^{SM})^2 \approx \sum_{i,j=p}^{q-1} \left( \frac{w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(0)L_j(0)\rho_{i,j}}{S_{p,q}^2(0)} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \right). \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnet  $S_{p,q}$  die Swap-Rate.  $\sigma_{p,q}^{SM}$  stellt die am Markt angegebene Volatilität der Swaption dar. Die Gewichte  $w_i$  sind für  $p \leq i \leq q-1$  gegeben durch:

$$w_i^{p,q}(t) = \frac{\delta_i \prod_{k=p}^i (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n \prod_{k=p}^n (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}} = \frac{\delta_i B(t, T_{i+1})}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n B(t, T_{n+1})}. \quad (4.2)$$

**Herleitung:** Zunächst bringen wir die Swap-Rate  $S_{p,q}(t)$  für  $t \leq T_p$  in eine andere Form, indem wir den Zusammenhang (3.1) zwischen Libor-Raten und Bondpreisen ausnutzen:

$$\begin{aligned} S_{p,q}(t) &= \frac{B(t, T_p) - B(t, T_q)}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n B(t, T_{n+1})} \\ &= \frac{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i L_i(t) B(t, T_{i+1})}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n B(t, T_{n+1})} \\ &= \frac{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i L_i(t) \frac{B(t, T_{i+1})}{B(t, T_p)}}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n \frac{B(t, T_{n+1})}{B(t, T_p)}} \\ &= \frac{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i L_i(t) \prod_{k=p}^i \frac{B(t, T_{k+1})}{B(t, T_k)}}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n \prod_{k=p}^n \frac{B(t, T_{k+1})}{B(t, T_k)}} \\ &= \frac{\sum_{i=p}^{q-1} \delta_i L_i(t) \prod_{k=p}^i (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}}{\sum_{n=p}^{q-1} \delta_n \prod_{k=p}^n (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}} \\ &= \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(t) L_i(t). \end{aligned}$$

Hierbei werden die Gewichte  $w_i^{p,q}$  wie in Gleichung (4.2) definiert.

Ein erster Approximationsschritt besteht nun aus dem sogenannten „Freezing“. D.h. die Gewichte  $w_i^{p,q}(t)$  werden durch ihre Ausgangswerte zum Zeitpunkt  $t = 0$  ersetzt. Wir erhalten also:

$$S_{p,q}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(t) L_i(t) \approx \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0) L_i(t).$$

Nutzen wir nun die uns bekannte Dynamik der Libor-Raten aus, so erhalten wir unter einem beliebigen äquivalenten Martingalmaß:

$$dS_{p,q}(t) \approx \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0) dL_i(t) = \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0) \sigma_i(t) L_i(t) dW_i(t) + (\dots) dt.$$

Hierbei müssen die Driftterme nicht weiter spezifiziert werden, da sie von beschränkter Variation sind und daher im Folgenden, wenn wir die quadratische Variation bzw. Kovariation betrachten, nicht beachtet werden müssen. Die Dynamik der quadratischen Variation der Swap-Raten ergibt sich somit mithilfe der in Kapitel 3 angegebenen Korrelation der Wiener-Prozesse (3.2) durch

$$d\langle S_{p,q} \rangle_t \approx \sum_{i,j=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(t)L_j(t)\rho_{i,j}\sigma_i(t)\sigma_j(t)dt. \quad (4.3)$$

Betrachten wir nun noch einmal die Dynamiken der Swap-Raten unter dem Swapmaß  $P^{Swap}$ . Diese sind nach Gleichung (3.24) gegeben durch

$$dS_{p,q}(t) = \sigma_{Swap}(t)S_{p,q}(t)dW^{Swap}(t).$$

Bestimmt man hier die quadratische Variation, so ergibt sich

$$d\langle S_{p,q} \rangle_t = \sigma_{Swap}^2(t)S_{p,q}(t)^2dt. \quad (4.4)$$

Wir setzen nun diesen Ausdruck (4.4) mit dem aus Gleichung (4.3) gleich und erhalten dann

$$\sigma_{Swap}^2(t)S_{p,q}(t)^2dt \approx \sum_{i,j=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(t)L_j(t)\rho_{i,j}\sigma_i(t)\sigma_j(t)dt.$$

Im nächsten Schritt approximieren wir sowohl die Libor-Raten als auch die Swap-Rate durch ihre Anfangswerte, um so einen deterministischen Term für die Swaption Volatilität zu erhalten. Weiterhin integrieren wir die so erhaltene Gleichung auf beiden Seiten und nutzen den in (3.25) angegebenen Zusammenhang zwischen der am Markt angegebenen Swaption Volatilität  $\sigma_{p,q}^{SM}$  und  $\sigma_{Swap}$ :

$$(\sigma_{p,q}^{SM})^2 T_p = \int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(t)dt.$$

Es ergibt sich damit insgesamt die behauptete Approximation für die Swaption Volatilität:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_p} \sigma_{Swap}^2(t)dt &\approx \int_0^{T_p} \frac{\sum_{i,j=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(0)L_j(0)\rho_{i,j}\sigma_i(t)\sigma_j(t)}{S_{p,q}(0)^2} dt \\ \Leftrightarrow (\sigma_{p,q}^{SM})^2 T_p &\approx \int_0^{T_p} \frac{\sum_{i,j=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(0)L_j(0)\rho_{i,j}\sigma_i(t)\sigma_j(t)}{S_{p,q}(0)^2} dt \\ \Leftrightarrow (\sigma_{p,q}^{SM})^2 &\approx \sum_{i,j=p}^{q-1} \left( \frac{w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(0)L_j(0)\rho_{i,j}}{S_{p,q}(0)^2} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \right). \end{aligned}$$

Es ist möglich diese Approximationsformel noch etwas zu verbessern. Diese Verbesserung wurde von Hull und White in [HW00] hergeleitet und ist zudem in

[BM06] dargestellt. Sie basiert auf einer Idee, die der von Rebonato recht ähnlich ist. Wir betrachten wieder die Darstellung

$$S_{p,q}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(t) L_i(t)$$

für die Swap-Rate. Jetzt nehmen wir die Koeffizienten der Linearkombinationen jedoch nicht als konstant an, wie wir es bei der Approximationsformel von Rebonato durch das „Freezing“ getan haben, sondern betrachten sie als Variablen, die wir bei der Bildung der partiellen Ableitung zu berücksichtigen haben. Somit erhalten wir zusätzliche partielle Ableitungen in der Darstellung der Swap-Rate.

Es ergibt sich die Dynamik

$$\begin{aligned} dS_{p,q}(t) &= \sum_{i=p}^{q-1} w_i^{p,q}(t) dL_i(t) + L_i(t) dw_i^{p,q}(t) + (\dots) dt \\ &= \sum_{i,j=p}^{q-1} \left( w_j^{p,q}(t) \delta_{\{i,j\}} + L_i(t) \frac{\partial w_i^{p,q}(t)}{\partial L_j(t)} \right) dL_j(t) + (\dots) dt. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\delta_{\{i,j\}}$  die Dirac-Funktion, die gegeben ist durch  $\delta_{\{i,i\}} = 1$  und  $\delta_{\{i,j\}} = 0$  für  $i \neq j$ .

Wie auch schon bei der Herleitung der Approximationsformel von Rebonato sind die Terme von beschränkter Variation für uns nicht weiter zu beachten und werden daher nicht genauer spezifiziert.

Analog zum Vorgehen in Kapitel 3.8 können wir nun auch wieder durch Betrachtung des Logarithmus die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial w_i^{p,q}(t)}{\partial L_j(t)}$$

für  $p \leq i, j < q$  berechnen und erhalten dann nach einigen Umformungen, indem wir die Darstellung der Gewichte  $w_i^{p,q}$  aus Gleichung (4.2) verwenden:

$$\frac{\partial w_i^{p,q}(t)}{\partial L_j(t)} = \frac{w_i^{p,q}(t) \delta_j}{1 + \delta_j L_j(t)} \left( \frac{\sum_{k=j}^{q-1} \delta_k \prod_{l=p}^k (1 + \delta_l L_l(t))^{-1}}{\sum_{k=p}^{q-1} \delta_k \prod_{l=p}^k (1 + \delta_l L_l(t))^{-1}} - \mathbf{1}_{\{i \geq j\}} \right)$$

Definieren wir nun

$$\bar{w}_j^{p,q}(t) := w_j^{p,q}(t) + \sum_{i=p}^{q-1} L_i(t) \frac{\partial w_i^{p,q}(t)}{\partial L_j(t)}, \quad (4.5)$$

so ergibt sich die Dynamik

$$dS_{p,q}(t) = \sum_{j=p}^{q-1} \bar{w}_j^{p,q}(t) dL_j(t) + (\dots) dt.$$

Erst im Anschluss an diese Herleitung führen wir wie auch bei der Approximationsformel von Rebonato das „Freezing“, also das Festhalten der Koeffizienten durch und erhalten somit die Approximation

$$dS_{p,q}(t) \approx \sum_{j=p}^{q-1} \bar{w}_j^{p,q}(0) dL_j(t) + (\dots) dt.$$

Durch eine analoge Vorgehensweise wie bei der Herleitung der Approximationsformel von Rebonato können wir nun, indem die Gewichte  $\bar{w}_j^{p,q}$  statt  $w_j^{p,q}$  betrachtet werden, folgende Formel für die Approximation der Swaption Volatilität erzielen:

**Satz 4.2:** Approximationsformel von Hull White

Im Libor-Markt-Modell lässt sich die Volatilität einer Swaption über das Intervall  $[T_p, T_q]$  approximieren durch

$$(\sigma_{p,q}^{SM})^2 \approx \sum_{i,j=p}^{q-1} \left( \frac{\bar{w}_i^{p,q}(0) \bar{w}_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0) \rho_{i,j}}{S_{p,q}(0)^2} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sigma_i(t) \sigma_j(t) dt \right). \quad (4.6)$$

Hierbei sind die Gewichte  $\bar{w}$  wie in (4.5) definiert.

Wie verschiedene Untersuchungen in [BM06] und [EKR04] ergeben haben, sind die Unterschiede zwischen den beiden Approximationsformeln in der Praxis sehr gering und die aufwändigere Formel von Hull und White (4.6) führt zu keiner wesentlichen Verbesserung. Daher werden wir der Einfachheit halber im weiteren Verlauf die Approximationsformel (4.1) von Rebonato verwenden.

Mit dieser Approximationsformel können wir nun das Libor-Markt-Modell gleichzeitig an die am Markt vorliegenden Daten von Swaptions und Caplets anpassen. Wir wollen dabei unser Modell nicht an historische Korrelationen der Libor-Raten kalibrieren, sondern die Korrelation implizit aus den Swaption Volatilitäten herleiten.

Dazu haben wir zunächst sowohl für die Volatilität als auch für die Korrelation jeweils einen der in den Kapiteln 3.3 und 3.4 dargestellten Ansätze zu wählen. Wir entscheiden uns aufgrund der in den jeweiligen Abschnitten dargestellten Begründungen für eine parametrische Volatilitätsstruktur der Form

$$\sigma_k(t) = \Phi_k \psi(T_k - t; a, b, c, d) := \Phi_k ([a + b(T_k - t)] e^{-c(T_k - t)} + d) \quad (4.7)$$

mit den Nebenbedingungen

- i)  $a + d > 0$ ,
- ii)  $d > 0$ ,
- iii)  $c > 0$ .

Für die Korrelation wählen wir aufgrund der in Kapitel 3.4 dargestellten Ausführungen den Ansatz

$$\rho_{i,j} = \exp \left[ - \frac{|j-i|}{(N-1)-1} \left( -\ln \rho_\infty + \eta \left( \frac{i^2 + j^2 + ij - 3(N-1)i - 3(N-1)j}{((N-1)-2)((N-1)-3)} + \frac{3i + 3j + 2(N-1)^2 - (N-1) - 4}{((N-1)-2)((N-1)-3)} \right) \right) \right], \quad (4.8)$$

mit  $i, j = 1, \dots, N-1$ ,  $\eta > 0$ ,  $0 \leq \eta \leq -\ln \rho_\infty$  und  $0 < \rho_\infty < 1$ . Die Korrelation wird somit durch die Parameter  $\rho_\infty$  und  $\eta$  festgelegt und wir schreiben daher im Folgenden  $\rho_{i,j}(\eta, \rho_\infty)$  statt  $\rho_{i,j}$  um dies hervorzuheben.

Nun besteht unsere Aufgabe darin, durch unser Modell die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten für Caplets und auch Swaptions möglichst gut abzubilden, d.h. die Parameter  $a, b, c, d, \rho_\infty$  und  $\eta$  so zu bestimmen, dass die mittlere quadratische Abweichung zwischen Marktvolatilitäten und Modellvolatilitäten möglichst gering ist.

Die genaue Vorgehensweise bei der Kalibrierung orientiert sich an den Darstellungen in [Sch02] und wird im folgenden Kapitel angegeben.

## 4.2 Gleichzeitige Kalibrierung an Swaptions und Caplets

Die Idee hinter dem von Schoenmakers in [Sch02] gewählten Ansatz der simultanen Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an Caplets und Swaptions besteht darin, dass man die Bedingung zur Kalibrierung des Modells an die Caplet Volatilitäten (3.19) in der Kalibrierung an die Swaption Volatilitäten verwendet. Dadurch wird das Modell direkt sowohl an die Volatilitäten der Swaptions als auch an die Marktdaten der Caplets angepasst. Für die Swaptions wird dabei die im Abschnitt 4.1 hergeleitete Approximationsformel von Rebonato verwendet.

Unsere Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Zunächst versuchen wir unter Verwendung der Caplet Volatilitäten durch eine direkte Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung zwischen Marktvolatilität und Modellvolatilität der Swaptions die benötigten Parameter für die Volatilität und die Korrelation zu gewinnen. Da dies zu numerischen Stabilitätsproblemen führen kann, wird darauf aufbauend eine Erweiterung des Kalibrierungsschritts vorgenommen. Die genauen Methoden werden im Folgenden dargestellt.

Wie schon erwähnt, werden wir die Approximationsformel von Rebonato aus Gleichung (4.1) verwenden. Diese bietet zwar nur eine Annäherung an die Swaption Volatilitäten im Libor-Markt-Modell, ist jedoch im Gegensatz zu einer exakten Kalibrierung an Marktdaten, beispielsweise durch Monte Carlo Simulationen, mit einem vergleichsweise geringen Aufwand anzuwenden. Zudem ist der durch die Approximationsformel entstandene Fehler gegenüber der Verwendung einer Monte Carlo Simulation nur sehr klein (siehe [EKR04]).

Betrachten wir nun die Bedingung für die Kalibrierung an die vorliegenden Caplet Volatilitäten, die – wie schon in (3.19) angegeben – wie folgt lautet:

$$(\sigma_i^{CM})^2 = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \sigma_i^2(t) dt.$$

Wir können nun die parametrische Form der Volatilität (4.7) in diese Gleichung einsetzen und erhalten dann

$$\begin{aligned} (\sigma_i^{CM})^2 &= \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} (\Phi_i \psi(T_i - t; a, b, c, d))^2 dt \\ &= \frac{\Phi_i^2}{T_i} \int_0^{T_i} \psi^2(T_i - t; a, b, c, d) dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Diese Bedingung werden wir dann später bei der Kalibrierung an die Volatilitäten der Swaptions verwenden, um so eine simultane Kalibrierung an Caplets und Swaptions zu erhalten.

Dafür definieren wir zunächst eine weitere Variable für  $p \leq \min(i, j)$  und formen den so erhaltenen Ausdruck dann mithilfe der Caplet Bedingung (4.9) und der gewählten Form für die Volatilität (4.7) um:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j,p}(a, b, c, d) &:= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \frac{\sigma_i(t) \sigma_j(t)}{\sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM}} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \frac{\Phi_i \psi(T_i - t; a, b, c, d) \Phi_j \psi(T_j - t; a, b, c, d)}{\sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM}} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \frac{\Phi_i \Phi_j}{\sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM}} \int_0^{T_p} \psi(T_i - t; a, b, c, d) \psi(T_j - t; a, b, c, d) dt \\ &= \frac{\sqrt{T_i} \sqrt{T_j}}{T_p} \frac{\int_0^{T_p} \psi(T_i - t; a, b, c, d) \psi(T_j - t; a, b, c, d) dt}{\sqrt{\int_0^{T_i} \psi^2(T_i - t; a, b, c, d) dt} \sqrt{\int_0^{T_j} \psi^2(T_j - t; a, b, c, d) dt}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die Koeffizienten  $\Phi_i$  fallen bei den Umformungen weg und können im Anschluss an die Kalibrierung bestimmt werden, so dass die Caplet Volatilitäten durch Wahl der entsprechenden  $\Phi_i$ 's über den Zusammenhang (4.9) exakt getroffen werden können.

Weiterhin besteht ein Vorteil darin, dass der Ausdruck (4.10), wie im Kapitel 3.3.2 beschrieben, analytisch berechnet werden kann. Da es bei der Berechnung der verschiedenen Integrale in Gleichung (4.10) zu langen, komplexen Ausdrücken kommt, verzichten wir an dieser Stelle auf eine genaue Angabe dieses Ausdrucks und verweisen auf die analytische Bestimmung der Integrale im Anhang A.2.

Wie oben bereits erwähnt, wollen wir die Swaption Volatilität durch die Formel von Rebonato approximieren (4.1) und erhalten

$$(\sigma_{p,q}^{SM})^2 \approx \sum_{i,j=p}^{q-1} \left( \frac{w_i^{p,q}(0) w_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0) \rho_{i,j}}{S_{p,q}(0)^2} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sigma_i(t) \sigma_j(t) dt \right).$$

Mit dieser Approximation und unter Verwendung von Zusammenhang (4.10) und der in Gleichung (4.8) angegebenen Korrelationsstruktur  $\rho_{i,j}(\eta, \rho_\infty)$  können wir nun die sich im Modell ergebende Volatilität für eine Swaption über den Zeitraum

$[T_p, T_q]$  definieren:

$$\sigma_{p,q}(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty) := \sqrt{\sum_{i,j=p}^{q-1} \left( \frac{w_i^{p,q}(0)w_j^{p,q}(0)L_i(0)L_j(0)}{S_{p,q}(0)^2} \rho_{i,j}(\eta, \rho_\infty) \sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM} \alpha_{i,j,p}(a, b, c, d) \right)}. \quad (4.11)$$

Hierbei haben wir also die Caplet Bedingung in die Kalibrierung an die Swaption Volatilitäten einfließen lassen.

Um nun eine Kalibrierung an die Marktdaten durchzuführen, versuchen wir die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung („Root Mean Square Error“) zwischen den am Markt gegebenen Swaption Volatilitäten  $\sigma_{p,q}^{SM}$  und den Modellvolatilitäten  $\sigma_{p,q}(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty)$  zu minimieren. Wir erhalten somit durch den zu minimierenden Ausdruck

$$RMS(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty) := \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(p,q) \in \mathcal{S}} \left( \frac{\sigma_{p,q}^{SM} - \sigma_{p,q}(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty)}{\sigma_{p,q}^{SM}} \right)^2} \quad (4.12)$$

ein Optimierungsproblem, welches es numerisch zu lösen gilt. Dabei bezeichnen wir die Menge aller Indexpaare, für die am Markt Swaptions mit Start  $T_p$  und Ende  $T_q$  existieren mit  $\mathcal{S}$ . D.h.

$$\mathcal{S} := \{(p, q) | \sigma_{p,q}^{SM} \text{ ist am Markt verfügbar}\}.$$

$|\mathcal{S}|$  gibt dabei die Anzahl der Elemente dieser Menge an.

Unser Ziel besteht nun somit darin, die Parameter  $a, b, c, d, \eta$ , und  $\rho_\infty$  so zu bestimmen, dass der Ausdruck  $RMS(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty)$  minimiert wird.

Im Anschluss an die Bestimmung der Parameter  $a, b, c, d, \eta$  und  $\rho_\infty$  können dann noch die Koeffizienten  $\Phi_i$  anhand des in Gleichung (4.9) gegebenen Zusammenhangs

$$(\sigma_i^{CM})^2 = \frac{\Phi_i^2}{T_i} \int_0^{T_i} \psi^2(T_i - t; a, b, c, d) dt$$

so bestimmt werden, dass die Caplet Preise exakt getroffen werden. Wir erhalten somit sowohl eine Volatilitäts- als auch eine Korrelationsstruktur mit zugehörigen Parametern und prinzipiell ist die Kalibrierung an die Marktdaten damit abgeschlossen.

In [Sch05] und [Sch02] wird jedoch gezeigt, dass die dargestellte direkte Kalibrierung zu Stabilitätsproblemen führt. Dies bedeutet, dass zum einen schon kleine Änderungen in den Ausgangsdaten zu großen Änderungen bei den Kalibrierungsparametern führen können. Zum anderen kann es bei dem Modell mit dieser direkten Kalibrierung dazu kommen, dass gegebenen Marktdaten etwa gleich gut mit deutlich unterschiedlichen Parametern angenähert werden. Um diese Probleme aufzuheben, ist eine Erweiterung der Vorgehensweise für eine stabilere Kalibrierung vonnöten. Diese Ergänzung werden wir im folgenden Kapitel herleiten und anwenden.

### 4.3 Stabilere Kalibrierung im erweiterten Modell

Da in der Kalibrierung unseres Modells gleichzeitig sowohl die Volatilitäts- als auch die Korrelationsstruktur der Libor-Raten bestimmt werden, kann es im Rahmen der numerischen Optimierung zu Stabilitätsproblemen kommen (siehe [Sch02] (Abschnitt 4) und [Sch05] (Kapitel 3) für Praxisbeispiele, die diesen Effekt verdeutlichen). Ein Grund dafür ist, dass die am Markt verfügbaren Informationen über Cap und Swaption Volatilitäten nicht ausreichend sind, um gleichzeitig die Korrelationen und die Volatilitäten der Libor-Raten zu bestimmen. Um ein verbessertes Libor-Markt-Modell zu erhalten, benötigen wir eine – von Schoenmakers in [Sch02] als „neues ökonomisches Konzept“ bezeichnete – Erweiterung, welche bei der Behebung von Stabilitätsproblemen im Zusammenhang mit der simultanen Kalibrierung an Swaptions und Caps zum Tragen kommt.

Schoenmakers schlägt in seinen Ausführungen in [Sch02] und [Sch05] die sogenannte „Market Swaption Formula“ als die oben angesprochene Erweiterung in der Kalibrierung vor. Diese orientiert sich an der Approximationsformel von Rebonato (4.1) und bezieht zusätzlich zu der bisher betrachteten augenblicklichen Korrelation der Libor-Raten noch die terminale Korrelation dieser Raten – auf die wir in Abschnitt 4.3.1 genauer eingehen wollen – mit ein. Die Formel lautet wie folgt:

**Definition 4.3:** Market Swaption Formula (MSF)

Seien die Volatilitäten der Caplets  $\sigma_i^{CM}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  und die terminalen Korrelationen der Libor-Raten  $\text{Corr}(L_i(T_p), L_j(T_p))$ ,  $1 \leq p \leq i < j \leq N-1$  gegeben. Dann sind die impliziten Volatilitäten  $\sigma_{p,q}^{MSF}$  der MSF Swaption Preise gegeben durch

$$S_{p,q}(0)^2 (\sigma_{p,q}^{MSF})^2 \approx \sum_{i,j=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0) w_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0) \sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM} \text{Corr}(L_i(T_p), L_j(T_p)). \quad (4.13)$$

Wie schon erwähnt, orientiert sich diese Formel an der Approximationsformel von Rebonato. Unser Ziel ist es, die MSF in einer erweiterten Kalibrierung zusätzlich verwenden. Hierbei beziehen wir uns vor allem auf die von Schoenmakers in [Sch02] dargestellten Ergebnisse. Diese besagen, dass durch die in (4.12) dargestellte direkte Minimierung zwar eine relativ genaue Approximation der Marktdaten erreicht werden kann, jedoch aber das Problem auftritt, dass vergleichbar gute Näherungen auf der einen Seite durch eine flache Volatilitätsfunktion und niedrige Korrelationen und auf der anderen Seite durch eine stark schwanke Volatilitätsfunktion und annähernd perfekte Korrelationen erzielt werden. Dieses Phänomen, dass durch die beiden entgegengesetzten Extremfälle ähnlich gute Ergebnisse erzielt werden können, so Schoenmakers weiter, ist vor allem in den Situationen aufgetreten, in denen die erzielten Differenzen zwischen Modellwerten und Marktdaten nicht zu klein waren. Um dies zu umgehen, sieht unsere Vorgehensweise nun so aus, dass wir das Libor-Markt-Modell im Prinzip wie im vorherigen Kapitel kalibrieren, um die Volatilitäten von Caps und Swaptions so gut wie möglich zu



approximieren. Zusätzlich soll jedoch die MSF Formel noch möglichst gut eingehalten werden. Wir erhalten somit eine Modifizierung der direkten Minimierung aus Kapitel 4.2. Die MSF dient dabei laut Schoenmakers als ein Instrument, welches den Ausgleich zwischen der Erklärungskraft der Korrelations- und der Volatilitätsstruktur festlegt und somit als Mittel gegen die Instabilität der direkten Kalibrierung wirkt. Für weitere Erläuterungen verweisen wir auf [Sch02] und [Sch05].

Wir werden also im weiteren Vorgehen das Minimierungsproblem der Kalibrierung, welches bisher durch (4.12) gegeben war, mithilfe der MSF erweitern, um so eine höhere Stabilität des Modells zu erhalten. Wir erhalten so zwei Minimierungsprobleme, die wir dann später in einer gemeinsamen Minimierung zusammenfassen werden. Um dies durchführen zu können, benötigen wir die terminale Korrelation, die im Folgenden dargestellt wird.

### 4.3.1 Terminale Korrelation

Wie bereits erwähnt, wird in der MSF unter anderem die terminale Korrelation betrachtet. Diese Korrelation kann man allgemein durch Monte Carlo Simulationen bestimmen. Da diese einen hohen numerischen Aufwand benötigen, werden wir die terminale Korrelation durch eine Approximationsformel angeben. Diese Formel wird nun analog zu den Darstellungen in [BM06] hergeleitet:

Betrachten wir dazu zunächst einen Zeitpunkt  $T_p$  auf der Tenorstruktur. Unser Ziel ist es, die terminale Korrelation der Libor-Raten  $L_i$  und  $L_j$ , mit  $1 \leq i < j \leq N-1$  zu diesem Zeitpunkt zu bestimmen. Hierbei wird der Erwartungswert unter einem Forwardmartingalmaß  $P_{T_y}$  mit  $y > p$  betrachtet.

Die terminale Korrelation ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} & \text{Corr}^y(L_i(T_p), L_j(T_p)) \\ &= \frac{\mathbb{E}^y[(L_i(T_p) - \mathbb{E}^y[L_i(T_p)])(L_j(T_p) - \mathbb{E}^y[L_j(T_p)])]}{\sqrt{\mathbb{E}^y[(L_i(T_p) - \mathbb{E}^y[L_i(T_p)])^2]} \sqrt{\mathbb{E}^y[(L_j(T_p) - \mathbb{E}^y[L_j(T_p)])^2]}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die Zeitpunkte seien dazu so gewählt, dass  $1 \leq p \leq i < j$  gilt.

In Satz 3.1 hatten wir die Dynamiken der Libor-Raten unter den verschiedenen Maßen angegeben. Hieraus erhalten wir die folgenden Dynamiken unter  $P_{T_y}$ :

$$\begin{aligned} dL_k(t) &= \sigma_k(t)L_k(t)dW_k(t), \quad k = y - 1, \\ dL_k(t) &= \sigma_k(t)L_k(t) \sum_{j=y}^k \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)L_j(t)}{1 + \delta_jL_j(t)} dt + \sigma_k(t)L_k(t)dW_k(t), \\ & \quad k = y, \dots, N - 1, \\ dL_k(t) &= -\sigma_k(t)L_k(t) \sum_{j=k+1}^{y-1} \frac{\rho_{k,j}\delta_j\sigma_j(t)L_j(t)}{1 + \delta_jL_j(t)} dt + \sigma_k(t)L_k(t)dW_k(t), \\ & \quad k = p, \dots, y - 2. \end{aligned}$$

Dabei ist  $W_k$  die  $k$ -te Komponente eines Wiener-Prozesses unter  $P_{T_y}$ . Mithilfe dieser Dynamiken könnte man nun die in Gleichung (4.14) auftretenden Erwartungswerte durch Monte Carlo Simulationen bestimmen. Um dies zu umgehen, approximieren wir in einem ersten Schritt die Libor-Raten zum Zeitpunkt  $t$  durch die in  $t = 0$  bekannten Libor-Raten. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} 0 &=: \mu_{y-1,k}(t), k = y - 1, \\ \sum_{j=y}^k \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} &\approx \sum_{j=y}^k \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) L_j(0)}{1 + \delta_j L_j(0)} =: \mu_{y-1,k}(t), k > y - 1, \\ - \sum_{j=k+1}^{y-1} \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) L_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} &\approx - \sum_{j=k+1}^{y-1} \frac{\rho_{k,j} \delta_j \sigma_j(t) L_j(0)}{1 + \delta_j L_j(0)} =: \mu_{y-1,k}(t), k < y - 1. \end{aligned}$$

Mit dieser Approximation können wir die Dynamiken der Libor-Raten unter dem Maß  $P_{T_y}$  wie folgt darstellen:

$$dL_k(t) = \bar{\mu}_{y-1,k}(t) L_k(t) dt + \sigma_k(t) L_k(t) dW_k(t). \quad (4.15)$$

Hierbei haben wir definiert:

$$\bar{\mu}_{y-1,k}(t) := \sigma_k(t) \mu_{y-1,k}(t).$$

Durch die stochastische Differentialgleichung (4.15) wird eine geometrische Brownsche Bewegung beschrieben. Die Lösung einer solchen Gleichung ist zum Beispiel aus [Paul2] bekannt und wird in (4.16) angegeben. Wir erhalten so unter  $P_{T_y}$  lognormalverteilte Zufallsgrößen mit

$$L_k(T_p) = L_k(0) \exp \left[ \int_0^{T_p} \left( \bar{\mu}_{y-1,k}(t) - \frac{\sigma_k^2(t)}{2} \right) dt + \int_0^{T_p} \sigma_k(t) dW_k(t) \right]. \quad (4.16)$$

Der Erwartungswert einer solchen geometrischen Brownschen Bewegung beträgt

$$\mathbb{E}^y[L_k(T_p)] = L_k(0) \exp \left( \int_0^{T_p} \bar{\mu}_{y-1,i}(t) dt \right).$$

Weiter gilt für  $p \leq i < j$

$$\begin{aligned} L_i(T_p) L_j(T_p) &= L_i(0) L_j(0) \exp \left[ \int_0^{T_p} \left( \bar{\mu}_{y-1,i}(t) + \bar{\mu}_{y-1,j}(t) - \frac{\sigma_i^2(t) + \sigma_j^2(t)}{2} \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T_p} \sigma_i(t) dW_i(t) + \int_0^{T_p} \sigma_j(t) dW_j(t) \right]. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert dieses Terms lässt sich analog zur Berechnung des Erwartungswerts der geometrischen Brownschen Bewegung bestimmen und beträgt aufgrund des Zusammenhangs  $d\langle W_i, W_j \rangle_t = \rho_{i,j} dt$

$$\mathbb{E}^y[L_i(T_p) L_j(T_p)] = L_i(0) L_j(0) \exp \left( \int_0^{T_p} \bar{\mu}_{y-1,i}(t) + \bar{\mu}_{y-1,j}(t) + \rho_{i,j} \sigma_i(t) \sigma_j(t) dt \right).$$

Insgesamt ergibt sich somit für die terminale Korrelation der folgende Satz:

**Satz 4.4:** Die terminale Korrelation der Libor-Raten  $L_i$  und  $L_j$  zum Zeitpunkt  $T_p$  mit  $p \leq i < j$  kann unter dem Forwardmartingalmaß  $P_{T_y}$  mit  $y > p$  wie folgt approximiert werden:

$$\text{Corr}^y(L_i(T_p), L_j(T_p)) \approx \frac{\exp\left(\int_0^{T_p} \sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{i,j}dt\right) - 1}{\sqrt{\exp\left(\int_0^{T_p} \sigma_i(t)^2dt\right) - 1}\sqrt{\exp\left(\int_0^{T_p} \sigma_j(t)^2dt\right) - 1}}. \quad (4.17)$$

Eine mögliche alternative Darstellung der Exponentialfunktion erhält man durch eine Taylorentwicklung um den Nullpunkt. Es ergibt sich so der Zusammenhang

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Stellt man nun die Exponentialterme aus der angegebenen Approximationsformel (4.17) durch eine Taylorreihe erster Ordnung dar, d.h. werden diese durch

$$e^x \approx \sum_{n=0}^1 \frac{x^n}{n!}$$

approximiert, so erhält man Rebonato's Formel für die terminale Korrelation:

$$\text{Corr}(L_i(T_p), L_j(T_p)) \approx \rho_{i,j} \frac{\int_0^{T_p} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt}{\sqrt{\int_0^{T_p} \sigma_i^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{T_p} \sigma_j^2(t)dt}}. \quad (4.18)$$

Die so erhaltene Approximation der terminalen Korrelation durch Rebonato's Formel (4.18) werden wir dann, wie in [Sch05] vorgeschlagen, bei der Anwendung der MSF verwenden.

### 4.3.2 Kalibrierung mit terminaler Korrelation

Die Formel von Rebonato für die terminale Korrelation (4.18) soll nun in unserer Kalibrierung genutzt werden. Unter Verwendung der gewählten Volatilitätsstruktur (4.7) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \text{Corr}(L_i(T_p), L_j(T_p)) \\ & \approx \rho_{i,j} \frac{\int_0^{T_p} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt}{\sqrt{\int_0^{T_p} \sigma_i^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{T_p} \sigma_j^2(t)dt}} \\ & \approx \rho_{i,j} \frac{\int_0^{T_p} \psi(T_i - t; a, b, c, d)\psi(T_j - t; a, b, c, d)dt}{\sqrt{\int_0^{T_p} \psi^2(T_i - t; a, b, c, d)dt}\sqrt{\int_0^{T_p} \psi^2(T_j - t; a, b, c, d)dt}} \\ & =: \varrho_{i,j,p}^{\psi,\rho}. \end{aligned}$$

Diese Approximation wird nun in die MSF (4.13) eingesetzt und wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
 S_{p,q}(0)^2 (\sigma_{p,q}^{MSF}(\psi; \rho))^2 &\approx \sum_{i,j=p}^{q-1} w_i^{p,q}(0) w_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0) \sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM} \varrho_{i,j,p}^{\psi,\rho} \\
 \Leftrightarrow \sigma_{p,q}^{MSF}(\psi; \rho) &\approx \sqrt{\sum_{i,j=p}^{q-1} \frac{w_i^{p,q}(0) w_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0)}{S_{p,q}(0)^2} \sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM} \varrho_{i,j,p}^{\psi,\rho}}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Wir betrachten nun noch einmal die direkte Kalibrierung aus dem vorherigen Kapitel. Die dort zu minimierende Funktion lautet

$$\begin{aligned}
 RMS(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty) &:= \\
 &\sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(p,q) \in \mathcal{S}} \left( \frac{\sigma_{p,q}^{SM} - \sigma_{p,q}(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty)}{\sigma_{p,q}^{SM}} \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Für eine vereinfachte Schreibweise definieren wir im Folgenden  $RMS(\psi; \rho) := RMS(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty)$ , da die Funktion  $\psi$  durch die Parameter  $a, b, c$  und  $d$  festgelegt ist und die Parameter  $\eta$  und  $\rho_\infty$  die funktionale Form der Korrelation  $\rho$  bestimmen. Wir schreiben dann im weiteren Verlauf nur  $\psi$  und  $\rho$  und meinen damit natürlich die entsprechenden zugehörigen Parameter.

Wir definieren nun analog zu (4.20) den zu minimierenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
 RMS^{MSF}(\psi; \rho) &:= \\
 &\sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(p,q) \in \mathcal{S}} \left( \frac{\sigma_{p,q}^{SM} - \sigma_{p,q}^{MSF}(\psi; \rho)}{\sigma_{p,q}^{SM}} \right)^2},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

der sich aus der MSF ergibt.

Unser weiteres Vorgehen ist jetzt von der folgenden Idee gekennzeichnet: Zunächst wollen wir versuchen, das Modell so genau wie möglich an die Marktdaten anzupassen, wie es auch in der direkten Kalibrierung in (4.20) geschieht. Zusätzlich soll jedoch der Fehler aus der MSF möglichst klein sein, weshalb wir daher zusätzlich den zu minimierenden Ausdruck (4.21) in der Kalibrierung nutzen. Ist eine exakte Kalibrierung an die Marktdaten möglich, so soll trotz des Hinzuziehens der MSF dieses exakte Ergebnis auch wiedergegeben werden. Aufgrund dieser in [Sch05] vorgeschlagenen Idee betrachten wir nun eine gemeinsame Minimierung der beiden Ausdrücke (4.20) und (4.21) in der Form

$$RMS(\psi; \rho) \max(RMS(\psi; \rho), RMS^{MSF}(\psi; \rho)). \tag{4.22}$$

Dabei werden wir dann den mittleren quadratischen Fehler  $MS(\psi; \rho)$  der Volatilität, der sich aus dem Zusammenhang

$$(RMS(\psi; \rho))^2 = MS(\psi; \rho) \tag{4.23}$$

ergibt, betrachten.

Hinter dem Ausdruck (4.22) steckt die folgende Idee: Für eine Wahl von  $\psi$  und  $\rho$  mit  $RMS^{MSF}(\psi; \rho) \leq RMS(\psi; \rho)$  wird der zu minimierende Ausdruck (4.22) zum mittleren quadratischen Fehler  $MS(\psi; \rho)$  der approximierten Swaption Volatilitäten und der Fehler aus der MSF Formel wird vernachlässigt. Ist andererseits  $RMS(\psi; \rho) \leq RMS^{MSF}(\psi; \rho)$ , so wird der Ausdruck (4.22) zum geometrischen Mittel  $\sqrt{MS(\psi; \rho)MS^{MSF}(\psi; \rho)}$  des mittleren quadratischen Fehlers  $MS(\psi; \rho)$  der approximierten Swaption Volatilitäten und des mittleren quadratischen Fehlers  $MS^{MSF}(\psi; \rho)$  der MSF Anpassung. Dieser ergibt sich analog zu (4.23) über den Zusammenhang

$$(RMS^{MSF}(\psi; \rho))^2 = MS^{MSF}(\psi; \rho).$$

So erhalten wir insgesamt ein Minimierungsproblem, welches die beiden bisher angesprochenen Fehlerterme (4.20) und (4.21) vereint.

Da eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit eines Optimierungsalgorithmus oftmals in der Differenzierbarkeit der zu minimierenden Funktion besteht, verwenden wir im Ausdruck (4.22) statt der Funktion  $\max(x, y)$  die Funktion  $\sqrt[4]{x^4 + y^4}$ . Diese Funktion ist für  $(x, y) \neq (0, 0)$  differenzierbar und liefert insbesondere für  $x, y \geq 0$ , was in unserem Fall vorliegt, keine allzu großen Abweichungen im Vergleich zur ursprünglichen Form.

Im Anschluss daran quadrieren wir die zu minimierende Funktion und erhalten somit insgesamt das folgende Minimierungsproblem:

$$MS(\psi; \rho) \sqrt{(MS(\psi; \rho))^2 + (MS^{MSF}(\psi; \rho))^2} \longrightarrow \min_{\psi: a, b, c, d; \rho: \eta, \rho_\infty} \quad (4.24)$$

Ist also eine exaktes Fitting durch die direkte Kalibrierung (4.20) möglich, so erhalten wir auch durch diese Erweiterung noch immer die entsprechenden Parameter, die für dieses exakte Fitting sorgen. In der Praxis ist es jedoch – wie auch in [Sch02] beschrieben – üblicherweise der Fall, dass kein exaktes Fitting durchgeführt werden kann. In diesem Fall werden dann die Modellparameter so bestimmt, dass der Fehler  $MS(\psi; \rho)$  möglichst nahe an Null ist und der Fehler  $MS^{MSF}(\psi; \rho)$  durch die MSF nicht zu groß wird.

Mithilfe dieser Erweiterung werden wir im Weiteren eine Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an die gegebenen Daten der Swaptions und Caplets vornehmen. Um diese Kalibrierung durchführen zu können, müssen wir jedoch zunächst auf die unterschiedlichen Laufzeiten von Swaptions und Caps eingehen. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

#### 4.4 Unterschiedliche Laufzeiten von Caps und Swaptions

Ein Problem bei der Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an die Marktdaten besteht in den unterschiedlichen Laufzeiten von Caplets und Swaps. Caplets sind jeweils halbjährlich verfügbar, wohingegen die Laufzeiten der Swaps Vielfache von einem Jahr sind.

Durch die unterschiedlichen Laufzeiten und somit zu verschiedenen Zeitpunkten auf der Tenorstruktur verfügbaren Swaptions und Caps bzw. Caplets bedürfen die

bisher dargestellten Methoden einer entsprechenden Anpassung. Wir betrachten daher ein Libor-Markt-Modell mit einer äquidistanten Tenorstruktur von jeweils 6 Monaten. Da im Modell die Zeit in Jahren angegeben wird, erhalten wir somit  $\delta = 0.5$  und  $T_j = t_0 + j\delta$ ,  $j \geq 0$ . Dabei ist  $t_0$  der aktuelle Zeitpunkt der am Markt gegebenen Daten. In unserem Modell betrachten wir dazu immer den Fall  $t_0 = 0$ . Um der jährlichen Laufzeit der Swaps, was auch bedeutet, dass die Zinsen nur jährlich getauscht werden, gerecht zu werden, modifizieren wir die Formel für die Swap-Raten, indem wir die Tenorlänge  $2\delta$  verwenden.

Wir betrachten also Swap-Raten  $\widehat{S}_{p,q}$  für einen dazugehörigen Swap über den Zeitraum  $[T_p, T_q]$ , wobei  $p$  und  $q$  beide gerade oder beide ungerade sind. Mit dieser Einschränkung spiegeln wir die jährlichen Laufzeiten der Swaps wider und die Formel für die Swap-Raten lässt sich wie folgt anpassen:

$$\widehat{S}_{p,q}(t) = \frac{B(t, T_p) - B(t, T_q)}{\sum_{k=1}^{(q-p)/2} 2\delta B(t, T_{p+2k})} = \sum_{i=p}^{q-1} \widehat{w}_i^{p,q}(t) L_i(t).$$

Hierbei werden die angepassten Gewichte  $\widehat{w}_i^{p,q}$  wie folgt definiert:

$$\widehat{w}_i^{p,q}(t) = \frac{\delta B(t, T_{i+1})}{\sum_{k=1}^{(q-p)/2} 2\delta B(t, T_{p+2k})} = \frac{B(t, T_{i+1})}{\sum_{k=1}^{(q-p)/2} 2B(t, T_{p+2k})}.$$

Die in Abschnitt 4.3.2 dargestellte Kalibrierung kann nun analog mit  $\widehat{S}_{p,q}(t)$  und  $\widehat{w}_i^{p,q}(t)$  statt  $S_{p,q}$  und  $w_i^{p,q}$  durchgeführt werden. Insbesondere erhält man dadurch Anpassungen in den Berechnungen der Modellvolatilitäten, die in den Gleichungen (4.11) und (4.19) angegeben worden sind. Die Modellvolatilitäten ergeben sich nun somit zu

$$\widehat{\sigma}_{p,q}(\psi; \rho) := \sqrt{\sum_{i,j=p}^{q-1} \left( \frac{\widehat{w}_i^{p,q}(0) \widehat{w}_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0)}{\widehat{S}_{p,q}(0)^2} \rho_{i,j}(\eta, \rho_\infty) \sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM} \alpha_{i,j,p}(a, b, c, d) \right)} \quad (4.25)$$

und

$$\widehat{\sigma}_{p,q}^{MSF}(\psi; \rho) := \sqrt{\sum_{i,j=p}^{q-1} \frac{\widehat{w}_i^{p,q}(0) \widehat{w}_j^{p,q}(0) L_i(0) L_j(0)}{\widehat{S}_{p,q}(0)^2} \sigma_i^{CM} \sigma_j^{CM} \varrho_{i,j,p}^{\psi, \rho}} \quad (4.26)$$

Die Formen für den mittleren quadratischen Fehler der Swaption Volatilität ergeben sich dann als

$$\widehat{MS}(\psi; \rho) := \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(p,q) \in \mathcal{S}} \left( \frac{\sigma_{p,q}^{SM} - \widehat{\sigma}_{p,q}(\psi; \rho)}{\sigma_{p,q}^{SM}} \right)^2$$

und für die MSF Anpassung analog als

$$\widehat{MS}^{MSF}(\psi; \rho) := \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(p,q) \in \mathcal{S}} \left( \frac{\sigma_{p,q}^{SM} - \widehat{\sigma}_{p,q}^{MSF}(\psi; \rho)}{\sigma_{p,q}^{SM}} \right)^2.$$

Diese Ausdrücke werden wir dann im Minimierungsproblem (4.24) anstelle der dort angegebenen Terme  $MS(\psi; \rho)$  bzw.  $MS^{MSF}(\psi; \rho)$  verwenden.

Wir haben nun insgesamt hergeleitet, durch die Minimierung welchen Ausdrucks unsere Kalibrierung an die Marktdaten vollzogen werden kann. Bevor wir in Abschnitt 4.7 die Vorgehensweise bei der Kalibrierung des Libor-Markt-Modells in einem Algorithmus explizit angeben, werden wir in den nächsten beiden Abschnitten darauf eingehen, inwiefern wir durch eine Rangreduzierung der Korrelationsmatrix unser Modell noch vereinfachen können.

#### 4.5 Äquivalente Darstellung der Dynamiken der Libor-Raten

Wie gesehen, erhalten wir in unserer Kalibrierung eine Korrelationsmatrix mit vollem Rang  $N-1$ . Oftmals besteht ein Ziel in der Kalibrierung aber im Hinblick auf eine spätere Simulation der Libor-Raten darin, ein Modell mit einem festgelegten Rang  $n < N-1$  zu erhalten. Um dieses Ergebnis zu erzielen, ist unter anderem der Rang der Korrelationsmatrix zu reduzieren. Für die Durchführung dieser Rangreduzierung benötigen wir die unterschiedlichen Möglichkeiten der Darstellung der Dynamiken der Libor-Raten und wollen diese daher zunächst einmal herleiten. Dies geschieht im Folgenden in Anlehnung an [Sch11a] und [Fri07].

Wir betrachten zunächst das Libor-Markt-Modell mit  $N-1$  Libor-Raten und nehmen an, dass die Dynamik für die Libor-Rate  $L_i$  unter dem zugehörigen Forwardmartingalmaß  $P_{T_{i+1}}$  wie bisher durch

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{i+1}(t), \forall t \leq T_i \quad (4.27)$$

gegeben ist. Hierbei ist  $1 \leq i \leq N-1$  und  $\sigma_i : [0, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist für alle  $i = 1, \dots, N-1$  eine eindimensionale Volatilitätsfunktion. Wir bezeichnen mit  $W_k^{i+1}$  jeweils die  $k$ -te Komponente eines  $(N-1)$ -dimensionalen korrelierten Wiener-Prozesses  $(W^{i+1}(t))_t$  unter dem Maß  $P_{T_{i+1}}$  und es gilt

$$d\langle W_k^{i+1}, W_j^{i+1} \rangle_t = \rho_{k,j} dt, \quad \forall k, j = 1, \dots, N-1.$$

Unter der Voraussetzung, dass ein Vektor  $\gamma_i(t) \in \mathbb{R}^{N-1}$  existiert, der die Bedingung

$$\sigma_i(t) := \|\gamma_i(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{i,k}^2(t)}, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

erfüllt und dass außerdem für die augenblickliche Korrelation

$$\rho_{i,j}(t) = \frac{\gamma_i^\top(t)\gamma_j(t)}{\|\gamma_i(t)\|\|\gamma_j(t)\|}$$

mit  $0 \leq t \leq \min(T_i, T_j)$  und  $1 \leq i, j \leq N-1$  gilt, ist die in (4.27) dargestellte Dynamik äquivalent zu der Darstellung

$$dL_i(t) = L_i(t)\gamma_i^\top(t)dZ^{i+1}(t), \quad \forall t \leq T_i. \quad (4.28)$$

Dabei ist  $(Z^{i+1}(t))_t$  ein  $(N-1)$ -dimensionaler unkorrelierter Wiener-Prozess unter dem Maß  $P_{T_{i+1}}$ .

Um eine solche äquivalente Darstellung zu erhalten, setzen wir nun

$$\gamma_i(t) = \sigma_i(t)f_i(t),$$

wobei die  $(N-1)$ -dimensionalen Vektoren  $f_i$  festgelegt sind durch den Zusammenhang

$$\rho_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{N-1} f_{i,k}(t)f_{j,k}(t) = f_i^\top(t)f_j(t), \quad 1 \leq i, j \leq N-1.$$

Die Vektoren  $f_i(t)$  seien normiert, d.h. es gelte  $\|f_i(t)\| = 1$ , für alle  $1 \leq i \leq N-1$  und  $t \leq T_i$ . Es lässt sich somit erkennen, dass

$$\|\gamma_i(t)\| = \|\sigma_i(t)f_i(t)\| = \sigma_i(t)\|f_i(t)\| = \sigma_i(t),$$

für alle  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $t \leq T_i$  gilt.

Es existiert also eine  $(N-1) \times (N-1)$  Matrix  $F = (f_{i,j})_{i,j=1 \dots N-1}$ , die eine Zerlegung der Korrelationsmatrix  $\rho$  darstellt und deren Spalten die Vektoren  $f_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq N-1$  sind, sodass

$$dW_i^{i+1}(t) = \sum_{k=1}^{N-1} f_{i,k}(t)dZ_k^{i+1}(t)$$

gilt. Hierbei bezeichnet der Index  $i$  wieder die jeweilige Spalte der Matrix  $F$ , die durch den Vektor  $f_i$  gegeben ist. Insgesamt erhalten wir so

$$dW^{i+1}(t) = F^\top(t)dZ^{i+1}(t).$$

Hierbei gilt für die Zerlegung der Korrelationsmatrix  $\rho$ :

$$F^\top(t)F(t) = \rho(t).$$

Definiert man  $F^\top(t) = G(t)$ , so erhält man die in der Theorie häufig angegebene Schreibweise

$$G(t)G^\top(t) = \rho(t).$$

Eine solche Zerlegung könnte zum Beispiel durch die Cholesky Zerlegung erreicht werden. Diese wird oft genutzt um einen Zusammenhang zwischen korrelierten und unkorrelierten Zufallsvektoren herzustellen.

Die modellierten Libor-Raten stellen üblicherweise die Forward-Raten für einen Zeitraum von 6 Monaten dar. Im Gegensatz dazu beträgt die Laufzeit einiger Zinsderivate oftmals mehrere Jahrzehnte. Dies bedeutet für unser Modell, dass die Anzahl an Wiener-Prozessen, die unserem Modell zugrunde liegen, relativ schnell einen großen Wert annimmt. Verschiedene Untersuchungen haben gezeigt (vgl. [Sel06], [PG04], [Fri07]), dass oftmals nur drei bis sechs Faktoren benötigt werden, um die Variationen der Forward-Raten anzugeben. Daher genügt es, nur drei bis sechs Wiener-Prozesse zu betrachten und den Rang der Korrelationsmatrix entsprechend zu reduzieren. Dies wird im folgenden Kapitel erläutert.



## 4.6 Rangreduzierung

Mit der in Kapitel 3.4 gewählten Korrelationsstruktur erhalten wir eine Korrelationsmatrix von vollem Rang. Dies führt zu einem Modell, in dem die Anzahl der Wiener-Prozesse mit der Anzahl der simulierten Libor-Raten übereinstimmt. In unserem Fall haben wir die Dynamiken der  $N-1$  Libor-Raten mithilfe von  $N-1$  korrelierten Wiener-Prozessen ausgedrückt. Unter dem Terminal Measure  $P_{T_N}$  zum Beispiel lautet die Dynamik bekanntlich

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t) \left( dW_i^N(t) - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} dt \right), \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Unser Ziel besteht nun darin, eine Beschreibung des Modells mit weniger Faktoren zu finden, da dies später zu einem geringeren Rechenaufwand bei der Simulation der Libor-Raten führt. Wie bereits erwähnt sind oft schon drei bis sechs Faktoren eine gute Wahl, um das Modell mit einem niedrigeren Rang darzustellen. Das Ziel wird es später sein, in der Kalibrierung ein Modell mit einem vorher festgelegten Rang zu erhalten. Wir wollen den Hintergrund dieser Überlegungen in Anlehnung an [Sch11a], [Fri07], [PG04] und [Sel06] darstellen.

Betrachten wir dazu im Folgenden eine Reduzierung des Rangs der Korrelationsmatrix von  $N-1$  auf einen Faktor  $n$  mit  $n < N-1$ , so wird auch die Anzahl der Wiener-Prozesse, die die Zufälligkeit im Modell angeben, von  $N-1$  auf  $n$  reduziert. Dabei besteht die generelle Idee hinter dieser Rangreduzierung darin, einen korrelierten  $(N-1)$ -dimensionalen Wiener-Prozess  $\bar{W}^{i+1}$  ähnlich zu der äquivalenten Darstellung der Libor-Raten im Kapitel 4.5 durch

$$d\bar{W}^{i+1}(t) = \bar{F}(t) d\bar{Z}^{i+1}(t) \tag{4.29}$$

anzugeben.

Hierbei ist  $\bar{F}$  eine  $(N-1) \times n$ -Matrix und  $\bar{Z}^{i+1}(t)$  ein  $n$ -dimensionaler unkorrelierter Wiener-Prozess. Es handelt sich nun bei  $\bar{W}^{i+1}$  um einen sogenannten  $(N-1)$ -dimensionalen  $n$ -faktoriellen Wiener-Prozess, dessen zugehörige Korrelationsmatrix eine möglichst gute Approximation der ursprünglichen Korrelationsmatrix darstellt. Die genaue Bestimmung der Matrix  $\bar{F}$  wird im Folgenden dargestellt.

Betrachten wir nun also die sich aus dem Kapitel 3.4 ergebende Korrelationsmatrix  $\rho$ . Diese Matrix kann entweder aus historischen Zinsdaten gewonnen werden, oder aber, wie es in unserem Fall geschieht, aus den Marktdaten der Swaptions impliziert werden. Unser Ziel ist es nun die so erhaltene Matrix vom Rang  $N-1$  mit einer Matrix vom Rang  $n$  möglichst gut zu approximieren.

Formal bedeutet dies:

Angenommen wir haben eine  $(N-1) \times (N-1)$  Korrelationsmatrix  $\rho$  und wir wollen diese möglichst gut durch eine Korrelationsmatrix vom Rang  $n < N-1$  approximieren. Eine möglichst gute Approximation bedeutet in diesem Fall, dass der „Abstand“ zwischen den beiden Matrizen möglichst gering sein soll. Um diesen „Abstand“ zu messen, benötigen wir eine Matrixnorm, zum Beispiel die häufig

verwendete Frobeniusnorm:

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 &= \text{spur}(AA^\top) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} |a_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Suchen wir nun die Matrix mit dem geringsten „Abstand“, so ist dies diejenige Matrix, sodass die Differenz beider Matrizen einen möglichst kleinen Wert bezüglich der Frobeniusnorm besitzt. Die am wenigsten von der Matrix  $\rho$  entfernte Matrix vom Rang  $n$  bezeichnen wir nun mit  $\rho_n$ . Sie ist gegeben durch  $\rho_n = Q_n Q_n^\top$ . Hierbei ist  $Q_n$  die Lösung des Problems

$$\min_{Q \in \mathbb{R}^{(N-1) \times n}} \|\rho - QQ^\top\|_F^2$$

unter der Nebenbedingung, dass alle Einträge auf der Hauptdiagonalen von  $QQ^\top$  gleich Eins sind.

Die Lösung  $\rho_n = Q_n Q_n^\top$  ist durch diese Nebenbedingung automatisch positiv semidefinit. Ein häufig verwendeter Ansatz, um dieses Problem zu lösen und den Rang zu reduzieren, basiert auf einer Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis). Dies ist eine Technik, bei der eine Hauptachsentransformation durchgeführt wird. Dabei wird eine Gruppe von Variablen in orthogonale Variablen transformiert. Die Hauptkomponentenanalyse basiert dabei auf der aus der linearen Algebra bekannten Singulärwertzerlegung, die im Folgenden – wie in [Sel06] angegeben – dargestellt wird:

**Satz 4.5:** Singulärwertzerlegung

Sei  $\rho \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$  eine symmetrische positiv semidefinite Matrix. Die Singulärwertzerlegung der Matrix  $\rho$  ist gegeben durch

$$\rho = UDU^\top,$$

wobei  $U$  eine orthogonale  $(N-1) \times (N-1)$  Matrix ist, d.h. es gilt  $UU^\top = I$ . Hierbei bezeichnet  $I$  die Einheitsmatrix im  $\mathbb{R}^{(N-1)}$ .  $D$  ist eine aus den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$  der Matrix  $\rho$  bestehende Diagonalmatrix mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq 0$ , d.h.

$$D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}).$$

Dann ist

$$\rho_n = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0) U^\top$$

diejenige symmetrische positiv semidefinite Matrix vom Rang  $n$  mit der geringsten Differenz zu  $\rho$  bezüglich der Frobeniusnorm. Insbesondere gilt

$$\|\rho - \rho_n\|_F^2 = \sum_{i=n+1}^{N-1} \lambda_i^2.$$

Mithilfe dieser Zerlegung erhalten wir jedoch nicht unbedingt eine Matrix bei der alle Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich Eins sind. Betrachten wir also nun die Matrizen  $\rho$  und  $\rho_n$  mit den entsprechenden oben angegebenen Zerlegungen. Um nun eine Korrelationsmatrix vom Rang  $n$  zu erhalten, haben wir die Matrix  $\rho_n$  noch zu normalisieren. Dies geschieht durch rechtsseitige und linksseitige Multiplikation der Matrix  $\rho_n$  mit der Diagonalmatrix

$$S = \text{diag}\left(\sqrt{\frac{1}{\rho_{1,1}^{(n)}}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{\rho_{N-1,N-1}^{(n)}}}\right).$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,i}^{(n)}$  den  $i$ -ten Eintrag auf der Hauptdiagonalen von  $\rho_n$ . Insgesamt erhalten wir so durch  $S\rho_n S$  eine Korrelationsmatrix vom Rang  $n$ . Durch die Normalisierung ist jedoch die Optimalität der Lösung verloren gegangen und  $S\rho_n S$  ist nicht die am wenigsten von  $\rho$  entfernte Korrelationsmatrix mit Rang  $n$ , weshalb diese Methode noch weiter verbessert werden kann.

Letztendlich wird in der Arbeit eine Methode verwendet, die auf Pietersz und Groenen zurückgeht und auf der dargestellten Hauptkomponentenanalyse basiert (siehe [PG04]). Die Methode trägt den Namen „iterative Majorisierung“ und funktioniert wie folgt:

Zunächst wird dazu angenommen, dass es eine Funktion  $f$  zu minimieren gilt. Um dieses Problem zu lösen, wird eine Funktion, die sogenannte Majorisierungsfunktion, konstruiert. Diese Funktion stimmt mit der ursprünglichen Funktion  $f$  in einem gewissen Punkt überein und ist ansonsten in allen anderen Punkten, in denen die Funktion definiert ist, größer oder gleich der ursprünglichen Funktion  $f$ . Dabei wird die Majorisierungsfunktion so konstruiert, dass sie leichter zu minimieren ist als die Funktion  $f$ . Ist nun ein Startpunkt gegeben, so wird mithilfe des Minimums der Majorisierungsfunktion ein weiterer Punkt gefunden, der dann den nächsten Schritt der Iteration darstellt. D.h. es wird wieder die Majorisierungsfunktion minimiert, die in diesem neuen Punkt mit der ursprünglichen Funktion  $f$  übereinstimmt. Dies wird solange durchgeführt, bis eine zusätzliche Iteration keine oder nur noch eine unwesentliche Verbesserung bringt. Zur Verdeutlichung ist die Vorgehensweise bei der Iteration in der Abbildung 3 aus [PG04] dargestellt.

In der betrachteten Rangreduzierung ist die zu minimierende Funktion  $f$  also nun gegeben durch

$$f(Q) = \|\rho - QQ^\top\|_F^2$$

mit der Nebenbedingung, dass alle Einträge auf der Hauptdiagonalen von  $QQ^\top$  gleich Eins sind. Es wird nun von Pietersz und Groenen im Artikel [PG04] eine Majorisierungsfunktion hergeleitet und die Iterationen werden dabei so lange durchgeführt, bis entsprechende Konvergenz erreicht wurde. Hierbei wird die Hauptkomponentenanalyse zu Beginn verwendet um eine geeignete Matrix als Startwert zu finden. In ihrer Arbeit haben die Autoren zudem einen Matlab Code für diesen Algorithmus angegeben, der so auch in der vorgenommenen Kalibrierung des Libor-Markt-Modells verwendet wird. Somit erhalten wir durch dieses

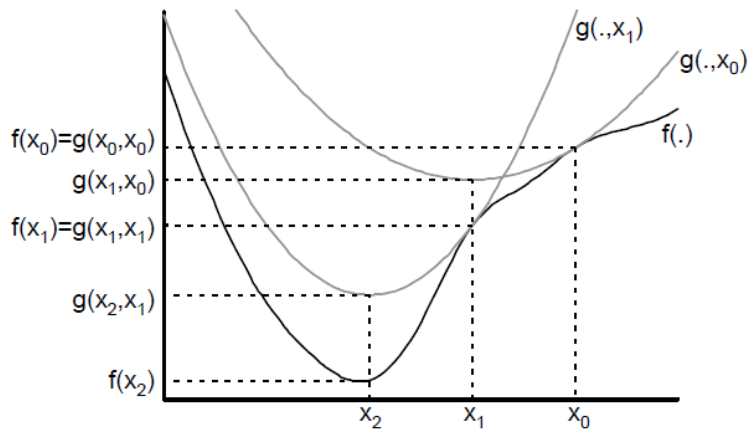


Abbildung 3: Idee der Majorisierung: Der Algorithmus startet im Punkt  $x_0$ . Die Majorisierungs-Funktion  $g(\cdot, x_0)$  wird angepasst indem der Funktionswert und die erste Ableitung mit denen der Funktion  $f$  im Punkt  $x_0$  übereinstimmen. Die Funktion  $g(\cdot, x_0)$  wird minimiert um den nächsten Punkt  $x_1$  zu erhalten. Diese Vorgehensweise wird wiederholt um  $x_2$  zu finden usw. (Abbildung aus [PG04])

Verfahren eine Korrelationsmatrix vom gewünschten, vorher festgelegten Rang  $n$ . Auf eine detailliertere Darstellung der Vorgehensweise verzichten wir an dieser Stelle und verweisen auf [PG04].

Weitere Verfahren um den Rang einer Korrelationsmatrix zu reduzieren, basieren ebenfalls auf der dargestellten Methode der Hauptkomponentenanalyse und werden zum Beispiel in [PG04], [Reb99] und [Sel06] untersucht und verglichen.

Wir haben nun alle Voraussetzungen für die Kalibrierung des Libor-Markt-Modells dargestellt und können mithilfe der in den Kapiteln 3.5, 3.7 und 3.8 angegebenen Daten die Kalibrierung an die Marktdaten durchführen.

Aufgrund der vorliegenden Daten erhalten wir für die Kalibrierung den Wert  $N = 40$ , wir betrachten also eine maximale Laufzeit von 20 Jahren. Wir erhalten dabei die in Abschnitt 4.8 angegebenen Ergebnisse.

Da die Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an die vorliegenden Daten der zentrale Punkt und das eigentliche Ziel dieser Arbeit ist, werden wir, bevor die Ergebnisse in Kapitel 4.8 dargestellt werden, in einer kurzen Zusammenfassung im folgenden Abschnitt das genaue Vorgehen für die Durchführung der Kalibrierung liefern.

## 4.7 Kalibrierungsschritte

Mithilfe der dargestellten Methode kann nun eine gleichzeitige Kalibrierung des Libor-Markt-Modells an die Volatilitäten von Swaptions und Caplets geschehen. Dafür benötigen wir zu Beginn die am Markt gegebenen Swaption Volatilitäten (siehe Kapitel 3.8) und die Caplet Volatilitäten, die wir – wie in Kapitel 3.7 beschrieben – aus den Cap Volatilitäten gewinnen. Zusätzlich zu diesen Volatilitäten

benötigen wir die aktuellen Libor-Raten, die wir – wie in Abschnitt 3.5 dargestellt – erhalten.

Liegen diese Daten vor, so können wir die Kalibrierung mit den angegebenen Approximationsformeln durchführen. Wir wählen dann eine Korrelationsstruktur und eine Form für die Volatilität und erhalten das folgende Minimierungsproblem, welches als Grundlage unserer Kalibrierung dient.

$$\widehat{MS}(\psi; \rho) \sqrt{(\widehat{MS}(\psi; \rho))^2 + (\widehat{MS}^{MSF}(\psi; \rho))^2} \longrightarrow \min_{\psi: a, b, c, d; \rho: \eta, \rho_\infty}. \quad (4.30)$$

Wir erinnern uns daran, dass – wie in Kapitel 4.2 dargestellt – die ursprünglich zu minimierende Funktion die Form

$$\begin{aligned} \widehat{RMS}(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty) := \\ \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(p,q) \in \mathcal{S}} \left( \frac{\sigma_{p,q}^{SM} - \widehat{\sigma}_{p,q}(a, b, c, d; \eta, \rho_\infty)}{\sigma_{p,q}^{SM}} \right)^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

hat und wir nur aufgrund der Stabilitätsprobleme zur Form (4.30) übergegangen sind. Im gesamten Kalibrierungsalgorithmus, der aus mehreren Schritten besteht, werden wir diese beiden Minimierungsprobleme berücksichtigen. Zudem benötigen wir noch den schon erwähnten Zusammenhang

$$(\sigma_i^{CM})^2 = \frac{\Phi_i^2}{T_i} \int_0^{T_i} \psi^2(T_i - t; a, b, c, d) dt \quad (4.32)$$

um die Faktoren  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  zu bestimmen.

Der Algorithmus für die Kalibrierung eines Libor-Markt-Modells mit  $n$  Faktoren ist nun wie folgt aufgebaut (vgl. [Sch05]):

- 1) Durchführung einer vollständigen Kalibrierung und Bestimmung der Parameter  $a, b, c, d, \eta, \rho_\infty$  durch Minimierung der Gleichung (4.30).
- 2) Anwendung der in Kapitel 4.6 dargestellten Rangreduzierung, um so eine Korrelationsmatrix  $\hat{\rho}$  vom gewählten Rang  $n$  aus der Korrelationsmatrix  $\rho$  zu erhalten.
- 3) Minimierung der Gleichung (4.31) zur Bestimmung der Parameter  $a, b, c, d$  unter Verwendung der Korrelationsmatrix  $\hat{\rho}$ . Da die stabilere Kalibrierung schon im ersten Schritt durchgeführt worden ist, um  $\rho$  zu bestimmen, muss das aufwändigere Minimierungsproblem (4.30) nicht noch einmal verwendet werden.
- 4) Bestimmung der Faktoren  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  über den Zusammenhang (4.32)

Mit dem dargestellten Algorithmus erhalten wir dann die im folgenden Abschnitt angegebenen Ergebnisse.

## 4.8 Ergebnisse der Kalibrierung

Kalibrierung an die Daten vom 18.04.2013:

Für ein Modell mit  $N-1$  Faktoren ( $N = 40$ ) erhalten wir für die Volatilitätsstruktur die Werte:

$$\begin{aligned} a &= 0.3261, \\ b &= -0.6790, \\ c &= 0.3725, \\ d &= 2.0594. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den zeithomogenen Teil  $\psi$  der Volatilitätsfunktion die Form

$$\psi(T_k - t) = [0.3261 - 0.6790(T_k - t)]e^{-0.3725(T_k - t)} + 2.0594.$$

Für jede einzelne Libor-Rate  $L_k$  erhalten wir dann die Volatilität durch das Produkt vom zeithomogenen Teil  $\psi$  und der jeweiligen Konstanten  $\Phi_k$  aus Tabelle 7:

$$\sigma_k(t) = \Phi_k \psi(T_k - t) := \Phi_k ([0.3261 - 0.6790(T_k - t)]e^{-0.3725(T_k - t)} + 2.0594).$$

$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$	$\Phi_5$	$\Phi_6$	$\Phi_7$	$\Phi_8$	$\Phi_9$	$\Phi_{10}$
0.4921	0.3647	0.3703	0.4332	0.4626	0.4038	0.3494	0.3521	0.3461	0.3097
$\Phi_{11}$	$\Phi_{12}$	$\Phi_{13}$	$\Phi_{14}$	$\Phi_{15}$	$\Phi_{16}$	$\Phi_{17}$	$\Phi_{18}$	$\Phi_{19}$	$\Phi_{20}$
0.2655	0.2260	0.2071	0.2101	0.2073	0.1879	0.1722	0.1634	0.1617	0.1626
$\Phi_{21}$	$\Phi_{22}$	$\Phi_{23}$	$\Phi_{24}$	$\Phi_{25}$	$\Phi_{26}$	$\Phi_{27}$	$\Phi_{28}$	$\Phi_{29}$	$\Phi_{30}$
0.1648	0.1627	0.1587	0.1473	0.1396	0.1328	0.1270	0.1224	0.1190	0.1097
$\Phi_{31}$	$\Phi_{32}$	$\Phi_{33}$	$\Phi_{34}$	$\Phi_{35}$	$\Phi_{36}$	$\Phi_{37}$	$\Phi_{38}$	$\Phi_{39}$	
0.1096	0.1112	0.1144	0.1196	0.1268	0.1363	0.1483	0.1632	0.1816	

Tabelle 7: Werte für die Faktoren  $\Phi_i$  aus der Kalibrierung an die Marktdaten vom 18.04.2013

Die Parameter der Korrelationsstruktur lauten:

$$\eta = 0.7896 \text{ und } \rho_\infty = 0.1154.$$

Mit diesen Parametern werden die Volatilitäten der Caplets aufgrund der Wahl der entsprechenden Faktoren  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  aus Tabelle 7 exakt getroffen.

Um die Güte unserer Kalibrierung zu überprüfen, werden wir die Abweichungen, die sich in den Swaption Volatilitäten ergeben, genauer betrachten. Die relativen Fehler in der Kalibrierung an die Swaption Daten sind in Tabelle 8 angegeben.

Aufgrund dieser Ergebnisse lässt sich die mittlere relative betragliche Abweichung von den Swaption Volatilitäten bestimmen. Diese beträgt 4.01 Prozent.

Eine andere Möglichkeit um die Abweichung der aus der Kalibrierung erhaltenen Volatilitäten für die Swaptions von den Marktdaten zu bestimmen, liegt darin, die

$i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	7.72	12.63	9.37	7.31	1.09	-2.41	-4.00	-5.75	-5.46	-5.17
2	5.92	5.35	8.02	3.49	0.68	0.57	-0.35	-0.08	1.15	1.14
4	-3.53	-0.49	-2.10	-5.43	-0.43	-1.00	-0.23	1.74	0.86	1.10
6	-0.32	-4.82	-5.42	-1.63	-0.24	0.02	2.26	0.41	0.11	0.71
8	-13.51	-10.20	-6.49	-4.53	-2.29	-1.55	-2.29	-2.11	-1.33	0.33
10	-13.47	-4.84	-4.10	-2.40	-0.89	-1.11	-1.41	-0.87	0.64	2.65
12	1.41	-2.86	-1.99	-0.79	-0.89	-1.89	-1.28	0.23	2.17	4.28
14	-11.33	-9.60	-6.70	-6.65	-6.47	-5.73	-3.67	-1.00	1.43	3.70
16	-4.39	-3.97	-5.35	-6.74	-4.06	-3.45	-1.00	1.93	5.18	5.83
18	-4.07	-7.57	-9.94	-8.37	-2.94	-2.76	0.55	3.33	7.01	5.51
20	-16.21	-16.95	-14.09	-9.98	-2.30	-1.86	1.30	3.38	6.82	2.39

Tabelle 8: Relativer Fehler der Swaption Volatilitäten vom 18.04.2013 (Angaben in Prozent). Spalten geben die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps an, während Zeilen die Fälligkeit der Swaption angeben (Angaben in halben Jahren).

relativ zum Nominalwert und zur Restlaufzeit der Swaption erzielte Abweichung zu bestimmen. Wir bestimmen also anhand der Volatilitäten die sich aus Black's Formel ergebenden Preise der Swaptions am Markt und im Modell und dividieren den Betrag dieser Differenz durch den Nominalwert und die Laufzeit der Swaption. Mathematisch ausgedrückt betrachten wir somit den Betrag des Ausdrucks

$$\frac{V_{Swaption}^{p,q}(0) - \widehat{V}_{Swaption}^{p,q}(0)}{\text{Nom}(T_q - T_p)},$$

wobei in unserem Fall der Nominalwert 1 beträgt, also  $\text{Nom} = 1$ . Mit  $\widehat{V}_{Swaption}^{p,q}(0)$  bezeichnen wir den Preis, der sich durch Einsetzen der Modellvolatilität in Black's Formel für Swaptions ergibt. Dann betrachten wir den Betrag dieser Abweichung in Basispunkten (100 Basispunkte entsprechen 1 Prozent). Die Ergebnisse sind in der Tabelle 9 dargestellt.

In Tabelle 9 sehen wir, dass vor allem die Swaptions mit einer Laufzeit von mindestens 4 Jahren (alle Spalten ab der mit dem Wert 8 versehenen Spalte) oder einer Fälligkeit bis zum Zeitpunkt  $T_{12}$  (erste sieben Zeilen der Ergebnisse) nur eine geringe relative Abweichung bezogen auf Nominalwert und Laufzeit aufweisen. Ähnliche Ergebnisse können auch in einer zweiten Kalibrierung an Marktdaten vom 02.08.2013 im Anhang A.3 beobachtet werden. Für die weitere Verwendung der Ergebnisse bedeutet dies, dass vor allem Finanzderivate mit Laufzeiten und Fälligkeiten in den angegebenen Bereichen bewertet werden können, ohne dass eine allzu große Ungenauigkeit durch falsche Modellwerte auftritt. Die genaue Vorgehensweise, um mithilfe der hier angegebenen Werte andere Derivate zu bewerten, ist im folgenden Kapitel dargestellt.

**Bemerkung:** Die Durchführung der Kalibrierung und alle numerischen Berechnungen sind in Matlab erfolgt und es sind dabei Optimierungsmethoden verwen-

$i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	0.76	1.40	1.17	0.99	0.16	0.35	0.60	0.87	0.84	0.80
2	0.78	0.86	1.50	0.71	0.15	0.13	0.08	0.02	0.27	0.27
4	0.89	0.14	0.65	1.74	0.15	0.34	0.08	0.62	0.30	0.39
6	0.12	1.97	2.31	0.71	0.11	0.01	1.02	0.18	0.05	0.31
8	6.65	5.21	3.31	2.34	1.19	0.80	1.16	1.07	0.66	0.16
10	7.74	2.81	2.38	1.39	0.51	0.63	0.79	0.48	0.35	1.44
12	0.91	1.80	1.24	0.49	0.54	1.14	0.76	0.14	1.26	2.43
14	7.48	6.17	4.28	4.20	4.06	3.51	2.22	0.60	0.84	2.14
16	3.09	2.72	3.60	4.46	2.65	2.20	0.63	1.19	3.16	3.48
18	2.92	5.28	6.77	5.53	1.97	1.79	0.35	2.07	4.37	3.33
20	11.30	11.61	9.31	6.53	1.55	1.18	0.81	2.08	4.29	1.45

Tabelle 9: Relativer Fehler der Swaption Preise im Bezug auf Nominalwert und Laufzeit (Angaben in Basispunkten, Daten vom 18.04.2013). Spalten geben die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps an, während Zeilen die Fälligkeit der Swaption angeben (Angaben in halben Jahren).

det worden, die bereits in Matlab implementiert sind. Die Funktionsweisen dieser Methoden werden im Anhang in A.1 erläutert.

## 4.9 Pricing

Haben wir unser Modell an die gegebenen Marktdaten kalibriert, so können die berechneten Parameter für die Bewertung unterschiedlicher Derivate im Libor-Markt-Modell genutzt werden. Dabei verwenden wir die im Kapitel 4.8 angegebenen Ergebnisse, um damit Derivate zu bewerten, deren Ausübungszeitpunkt auf der Tenorstruktur liegt. Für Berechnungen bei denen zusätzliche Zeitpunkte herangezogen werden, die nicht auf der Tenorstruktur liegen, sind entsprechende Interpolationsmethoden anzuwenden. Eine Untersuchung dieser Methoden ist zum Beispiel in [Sch11b] zu finden und geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Die Preise von Derivaten, deren Bewertung im Libor-Markt-Modell nicht durch eine analytische Formel möglich ist, können mithilfe von Monte Carlo Simulationen bestimmt werden. Natürlich ist dies auch für Derivate, für die es eine geschlossene Preisformel gibt, möglich. Dabei beruhen die Monte Carlo Methoden im Wesentlichen auf der Simulation der Libor-Raten-Pfade.

Hierfür ist es zunächst einmal notwendig, die unter dem Terminal Measure gegebene stochastische Differentialgleichung

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t) \left( dW_i^N(t) - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} dt \right)$$

für alle  $1 \leq i \leq N - 1$  zu diskretisieren. Im Anschluss daran können wir dann die Pfade der stochastischen Prozesse in den festgelegten diskreten Zeitpunkten auswerten. Dazu wird eine Schrittweite  $\Delta t$  für die  $\eta$  Diskretisierungsschritte eines Te-



norintervalls gewählt und es werden die entsprechenden Inkremente eines Wiener-Prozesses durch die Simulation normalverteilter Zufallszahlen erzeugt. Wie in Kapitel 9 in [KP92] dargestellt, erhält man so die Euler-Maruyama Approximation

$$Y_{n+1}^{(i)} = Y_n^{(i)} + \sigma_i(t_n) Y_n^{(i)} \left( \Delta W_n^{(i)} - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t_n) Y_n^{(k)}}{1 + \delta_k Y_n^{(k)}} \rho_{i,k} \Delta t \right), \quad (4.33)$$

mit  $0 \leq n \leq \eta - 1$  und einem Anfangsvektor  $Y_0 = L(0)$ . Hierbei unterteilen wir jedes Tenorintervall  $[T_i, T_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  in  $\eta$  Teilstücke. Der Index  $i$  mit  $1 \leq i \leq N - 1$  bezeichnet den jeweiligen Eintrag der Vektoren. Die Inkremente des Wiener-Prozesses sind gegeben durch  $\Delta W_n^{(i)} = W_i(t_{n+1}) - W_i(t_n)$ .

Anhand dieser Diskretisierung wird nun die Simulation der diskreten Pfade der Libor-Raten durchgeführt und die Preise entsprechender Derivate können mithilfe der Simulationsergebnisse approximiert werden. Dies wollen wir anhand der Bewertung eines Caplets nun exemplarisch darstellen:

Der Wert eines Caplets in  $t = 0$  ergibt sich nach Kapitel 3.6 durch

$$C_i(0; K) = B(0, T_{i+1}) \delta_i \mathbb{E}_{T_{i+1}} [(L_i(T_i) - K)^+].$$

Hierbei sind der Bondpreis  $B(0, T_{i+1})$  und auch die Intervalllänge  $\delta_i$  bereits bekannt. Es gilt nun den Erwartungswert

$$\mathbb{E}_{T_{i+1}} [(L_i(T_i) - K)^+]$$

durch Monte Carlo Simulationen zu bestimmen. Hierzu nutzen wir die Approximation (4.33) und simulieren  $n_0$  Pfade der entsprechenden Libor-Rate. Der Erwartungswert wird nun approximiert durch

$$\mathbb{E}_{T_{i+1}} [(L_i(T_i) - K)^+] \approx \frac{1}{n_0} \left( \sum_{j=1}^{n_0} \max\{Y_{ni}^{(i)(j)} - K, 0\} \right).$$

Hierbei identifizieren wir mit dem Index  $(j)$  das Ergebnis der  $j$ -ten Simulation. Zusätzlich ist noch zu beachten, dass wir den Erwartungswert unter dem Maß  $P_{T_{i+1}}$  betrachten, wir also die Euler-Maruyama Approximation der  $i$ -ten Libor-Rate bezüglich des Maßes  $P_{T_{i+1}}$  verwenden müssen. Dies kann analog zur oben genannten Darstellung unter dem Terminal Measure geschehen.

Für eine ausführlichere Betrachtung der Bewertung verschiedener Derivate im Libor-Markt-Modell durch Monte Carlo Methoden verweisen wir auf [BM06]. Zusätzlich sei bemerkt, dass – wie in Kapitel 4.6 dargestellt – die Anzahl der Faktoren und somit der Wiener-Prozesse, die das Modell treiben, reduziert werden kann, um so den Rechenaufwand in der Simulation der Wiener-Inkremente zu verringern.

---

## 5 Fazit

In dieser Arbeit haben wir ein Verfahren dargestellt und angewendet, mit dem es möglich ist, das Libor-Markt-Modell an gegebene Marktdaten zu kalibrieren. Hierbei geschieht eine gleichzeitige Kalibrierung an Caplet und Swaption Volatilitäten durch eine möglichst genaue Anpassung des Modells an die entsprechenden am Markt gegebenen Daten. Wie in Kapitel 4.8 angegeben, werden hierbei die Caplet Volatilitäten exakt getroffen. Die durchschnittliche relative Abweichung in den Swaption Volatilitäten beträgt hingegen etwa 4 Prozent. Die Auswirkungen dieser Abweichungen sind zudem in einen relativen Preisfehler in Bezug auf Nominalwert und Laufzeit der Swaptions umgerechnet worden und es ist deutlich geworden, inwieweit die Abweichungen der Kalibrierungsergebnisse auch zu leicht abweichenden Marktwerten führen können und welche Swaptionpreise durch das Modell schon gut wiedergespiegelt werden können.

Für die Durchführung der Marktkalibrierung sind zu Beginn der Arbeit die theoretischen Grundlagen hergeleitet worden, um dann hierauf aufbauend die entsprechenden Modelleigenschaften zu wählen. Hierbei ist zunächst die Zinskurve anhand der am Markt gegebenen Swap-Raten bestimmt worden. Wir haben uns dabei für eine lineare Interpolation entschieden. Dieses Verfahren kann sicherlich – wie schon erwähnt – im Rahmen einer aufwändigeren Untersuchung durch Einbeziehung zusätzlicher Swap-Raten und Verwendung anderer Interpolationsansätze (vgl. [AP10a]) noch verbessert werden.

Im Anschluss an die Bestimmung der Zinskurve sind die Caplet Volatilitäten aus den Cap Volatilitäten bestimmt worden. Hierbei haben wir uns an die in [Sch05] dargestellte Vorgehensweise gehalten. Auch hier wäre es durch ausgiebigere Untersuchungen möglich, unterschiedliche Varianten zur Extrahierung der Caplet Volatilitäten wie in [Sel06] zu vergleichen.

Es sei erwähnt, dass wir in unserem Modell eine gleichzeitige Kalibrierung an Swaptions und Caplets durchführen. Für eine Anwendung in der Praxis ist es ratsam, je nach Eigenschaften des im Anschluss zu bewertenden Derivats, eine angepasste Kalibrierung durchzuführen. Das bedeutet, dass man die Kalibrierung eventuell nur an Caplets, nur an Swaptions oder etwa nur an ausgewählte Caplets und Swaptions mit ähnlichen Attributen vollzieht. Eine weitere Möglichkeit bestünde auch in einer unterschiedlichen Gewichtung der zugrundeliegenden Marktdaten. Eine ausführlichere Diskussion dieser Möglichkeiten ist zum Beispiel in [AP10b] zu finden.

Wir haben zusätzlich zur Kalibrierung eines vollständigen Modells noch dargestellt, wie wir ein Modell mit einer vorher festgelegten Anzahl an Faktoren mithilfe der Rangreduzierung der Korrelationsmatrix erhalten. Dazu haben wir die in [PG04] dargestellte Methode der Majorisierung verwendet. Auch hier könnten im Rahmen weiterer Untersuchungen noch zusätzliche Rangreduzierungsverfahren untersucht und angewendet werden, so wie es zum Beispiel in [Sel06] zu finden ist. Weiterhin könnten wir noch zusätzliche Derivate, wie zum Beispiel CMS Spread Optionen verwenden, da diese äußerst sensitiv gegenüber der Korrelation sind und so vor allem bei der Bestimmung der Korrelationsmatrix von großem Nutzen sein können (vgl. [Sch11a]).

Insgesamt lässt sich somit festhalten, dass wir mit dieser Arbeit eine erste Möglichkeit der Kalibrierung eines Libor-Markt-Modelles mit deterministischer Volatilität aufgestellt haben. Unter Verwendung gegebener Marktdaten kann so ein vollständiges Libor-Markt-Modell mit Korrelations- und Volatilitätsstruktur aufgestellt werden, welches dann als Grundlage für weitere Simulationen zur Bestimmung der Preise unterschiedlicher Derivate im Modellrahmen genutzt werden kann.

Eine wesentliche Ergänzung des dargestellten Libor-Markt-Modells in einer ausführlicheren Betrachtung könnte vor allem auf eine Erweiterung des Modells zur Darstellung des Volatilitäts-„Smiles“ abzielen. Das von uns dargestellte Modell kann nur für die Kalibrierung an ATM-Caplets genutzt werden. Versucht man jedoch zusätzlich die Abhängigkeit der Caplets von den Strike Preisen zu berücksichtigen, so stößt man an die Grenzen des Modells. Um diese Restriktion in einem gewissen Maße oder sogar komplett zu umgehen, können die in Kapitel 3.2 vorgestellten Ansätze verwendet werden. Insbesondere der Ansatz der stochastischen Volatilität in Zusammenhang mit der in [WZ06] dargestellten Schnellen Fourier-Transformation zur Bewertung von Caplets und Swaptions kann wie zum Beispiel in [Sch11a] implementiert werden.

Eine zusätzliche Erweiterung des Modells könnte auch darin liegen, nicht nur Derivate auf der Tenorstruktur zu betrachten, sondern Interpolationsmöglichkeiten für Zeitpunkte außerhalb dieser Struktur zu untersuchen, wie es in [Sch11b] dargestellt ist.

---

## A Anhang

### A.1 Optimierungsmethode für die Kalibrierung

Um unser Modell möglichst gut an die gegebenen Marktdaten zu kalibrieren, haben wir eine Minimierung unter Nebenbedingungen durchzuführen. Wir erhalten, wie in (4.30) dargestellt, das folgende Minimierungsproblem:

$$\widehat{MS}(\psi; \rho) \sqrt{(\widehat{MS}(\psi; \rho))^2 + (\widehat{MS}^{MSF}(\psi; \rho))^2} \longrightarrow \min_{\psi: a, b, c, d; \rho: \eta, \rho_\infty}.$$

Um diese Minimierung durchzuführen, verwenden wir die in Matlab schon implementierte Funktion „fmincon“, deren Funktionsweise wir im Folgenden darstellen. Hiermit lässt sich das Minimum einer nichtlinearen multivariablen Funktion unter Nebenbedingungen finden. Diese Nebenbedingungen sind in unserem Fall

$$\begin{aligned} a + d &> 0, \\ d &> 0, \\ c &> 0, \\ \eta &> 0, \\ 0 &\leq \eta \leq -\ln \rho_\infty, \\ 0 &< \rho_\infty \leq 1. \end{aligned}$$

Ausgehend von einem Startvektor  $(a_0, b_0, c_0, d_0, \eta_0, \rho_\infty, 0)$  wird nun der Vektor  $(a^*, b^*, c^*, d^*, \eta^*, \rho_\infty^*)$  gesucht, der das dargestellte Problem minimiert.

Um das Minimum zu finden, verwenden wir die Methode der Quadratischen Programmierung. Diese Methode wollen wir im Folgenden kurz beschreiben. Unsere Ausführungen orientieren sich dabei im Wesentlichen an den Darstellungen aus [Docu], [Obe12] und [Ger07]. Wir werden nun lediglich einen kurzen Einblick in das Thema geben und verweisen für eine ausführlichere Untersuchung des Vorgehens auf diese Quellen.

Unsere generelle Vorgehensweise wird so aussehen, dass das Problem in ein einfacheres Subproblem, dessen Lösung dann als Ausgangspunkt einer Iteration dient, transformiert wird. Dies werden wir anhand eines allgemein gewählten Minimierungsproblems nun darstellen.

Bei der Minimierung unter Nebenbedingungen besteht die Aufgabe darin, einen Vektor  $x^* \in \mathbb{R}^n$  zu finden, der eine gegebene Funktion  $f$  unter Einhaltung entsprechender Nebenbedingungen minimiert. Es sei dazu das Minimierungsproblem

$$\min_x f(x) \tag{A.1}$$

mit den einzuhaltenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} G_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ G_i(x) &\leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{A.2}$$

gegeben. Hierbei ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die zu minimierende Zielfunktion. Mithilfe der vektorwertigen Funktion  $G(x)$  werden die Nebenbedingungen in  $x$  angegeben. Den für die Minimierung zulässigen Bereich  $X$  bilden alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , die die Nebenbedingungen (A.2) erfüllen.

Für einen zulässigen Punkt  $x \in X$  bezeichnen wir eine Nebenbedingung als aktiv, falls

$$G_i(x) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

gilt. Die Menge aller Indizes für die dann  $G_i(x) = 0$  gilt, bezeichnen wir als aktive Menge.

Um nun solche Minimierungsprobleme zu lösen, verwenden wir die Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Bedingungen. Sie stellen eine Verallgemeinerung der klassischen Lagrange-Methode zur Bestimmung von Extremstellen mit zusätzlichen Ungleichheitsnebenbedingungen dar. Wir werden diese Bedingungen im weiteren Verlauf ohne Beweis verwenden. Ein Beweis ist zum Beispiel in [Obe12] zu finden.

In der konvexen Optimierung, d.h. wenn die Funktionen  $f(x)$  und  $G_i(x), i = 1, \dots, m$ , konvex sind, sind die KKT Bedingungen notwendig und hinreichend für eine globale Lösung des Problems. Für unser Problem (A.1) ergeben sich zusätzlich zu den angegebenen Nebenbedingungen (A.2) die KKT Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_i G_i(x^*) &= 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{A.3}$$

für ein lokales Minimum  $x^*$ .

Hierbei wird durch die erste Gleichung beschrieben, wie sich die Gradienten der Zielfunktion und der aktiven Nebenbedingungen in der Lösung aufheben. Dafür sind die Lagrange-Multiplikatoren ( $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ ) verantwortlich. Da nur aktive Nebenbedingungen in (A.3) berücksichtigt werden sollen, müssen die Lagrange-Multiplikatoren für nicht aktive Nebenbedingungen gleich 0 sein, dies wird implizit durch die letzten beiden KKT Bedingungen gegeben.

Unser Ziel besteht nun somit darin, über die KKT Bedingungen ein Minimum unseres Problems zu finden. Da wir meist nicht direkt einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  finden, der alle KKT Bedingungen einhält, gehen wir nach der Idee vor, das generelle Problem in ein einfacheres Subproblem zu überführen. Dabei verwenden wir in unserem Algorithmus sogenannte Sequentielle-Quadratische-Programmierungsmethoden, die wir im weiteren als SQP-Methoden bezeichnen. Wir erhalten so eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , die für  $k \rightarrow \infty$  gegen ein Minimum  $x^*$  des Problems (A.1) konvergiert. Dieses Minimum erfüllt dann entsprechend die KKT Bedingungen.

Die generelle Methode wollen wir nun auf Basis der Ausführungen in [Docu], [Hop06] und [Ger07] angeben:

Haben wir nun das in (A.1) dargestellte allgemeine Minimierungsproblem gegeben, so besteht die Idee darin, dass wir ein Subproblem der quadratischen

Programmierung (QP Subproblem) formulieren, welches auf der quadratischen Approximation der Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x)$$

basiert. Hierbei bezeichnen  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$  die Lagrange-Multiplikatoren. Wir ersetzen dann die Zielfunktion  $f$  durch ihre lokale quadratische Approximation im aktuellen Iterationsschritt  $x_k$ :

$$f(x) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^\top (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^\top H_f(x_k) (x - x_k).$$

Hierbei bezeichnen wir den Gradienten von  $f$  im Punkt  $x$  mit  $\nabla f(x)$ , also

$$\nabla f(x) := \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^\top.$$

Weiterhin bezeichnen wir die Hesse-Matrix von  $f$  im Punkt  $x$  mit  $H_f(x)$ , d.h. die Einträge der Matrix sind gegeben durch

$$(H_f(x))_{i,j} := \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Für vektorwertige Funktionen  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  verwenden wir das Symbol  $\nabla$  auch für die Jacobi-Matrix von  $h$ . Es gilt der Zusammenhang

$$\nabla h(x) := \left( \nabla h_1(x), \dots, \nabla h_m(x) \right)^\top$$

Zusätzlich ersetzen wir die Funktionen für die Nebenbedingungen durch ihre lokalen linearen Approximationen:

$$G_i(x) \approx G_i(x_k) + \nabla G_i(x_k)^\top (x - x_k), \quad i = 1, \dots, m.$$

Definieren wir nun

$$d := x - x_k$$

und betrachten eine im Abschnitt A.1.1 genauer beschriebene Approximation der Hesse-Matrix im Punkt  $x_k$

$$H_k \approx H_f(x_k),$$

so erhalten wir das folgende QP Subproblem: Minimiere den Ausdruck

$$\frac{1}{2} d^\top H_k d + \nabla f(x_k)^\top d \tag{A.4}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla G_i(x_k)^\top d + G_i(x_k) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ \nabla G_i(x_k)^\top d + G_i(x_k) &\leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned}$$

in  $d$ .

Dieses Subproblem kann nun durch einen QP Algorithmus gelöst werden und die Lösung wird dann verwendet, um einen neuen Iterationsschritt zu vollziehen. Ist die Lösung des Subproblems zugleich auch Lösung des ursprünglichen Problems, d.h. erfüllt sie die KKT Bedingungen des ursprünglichen Problems, so endet der Algorithmus. Die Vorgehensweise beim QP Algorithmus wird im Abschnitt A.1.2 angegeben.

Für den nächsten Schritt definieren wir dann

$$x_{k+1} = x_k + a_k \hat{d}_k.$$

Dabei ist  $a_k \in \mathbb{R}$  die Schrittweite und  $\hat{d}_k \in \mathbb{R}^n$  die Suchrichtung um den neuen Iterationspunkt  $x_{k+1}$  zu erhalten. Wir werden im Kapitel A.1.2 genauer auf diese beiden Größen eingehen. Die Approximation  $H_k$  der Hesse-Matrix  $H$  geschieht durch eine Quasi-Newton Methode (für weitere Informationen zum Thema Quasi-Newton Verfahren verweisen wir auf [Sha70]). Wie genau diese Berechnungen aussehen, wird im Folgenden dargestellt:

### A.1.1 Aktualisierung der Hesse-Matrix

In jedem Iterationsschritt wird eine positiv definite Quasi-Newton Approximation der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion im Punkt  $x_k$  bestimmt. Es ist dann, wie z.B. in [Docu] angegeben,

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^\top}{q_k^\top s_k} - \frac{H_k s_k s_k^\top H_k^\top}{s_k^\top H_k s_k}.$$

Hierbei gilt

$$s_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$q_k = \left( \nabla f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(x_{k+1}) \right) - \left( \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(x_k) \right).$$

Nach [Pow78] wird empfohlen, dass die Hesse-Matrix in jedem Schritt positiv definit ist, da sonst die Lösbarkeit des QP Subproblems nicht gegeben ist. Dies wird dadurch erreicht, dass  $q_k^\top s_k$  in jedem Iterationsschritt positiv ist und dass die Ausgangsmatrix  $H_0$  positiv definit ist.

Ist  $q_k^\top s_k$  jedoch durch obige Definition nicht direkt positiv, dann ist  $q_k$  so zu modifizieren, dass  $q_k^\top s_k > 0$ . Das Ziel dieser Modifizierung besteht darin, diejenigen Einträge von  $q_k$ , die zu einer positiv definiten Aktualisierung beitragen, möglichst wenig zu verändern. Um dies zu erreichen, wird wiederholt der jeweils betragsmäßig größte Eintrag von  $(q_k)_i (s_k)_i$  – wobei der Index  $i$  hier den  $i$ -ten Eintrag des jeweiligen Vektors angibt und  $1 \leq i \leq n$  gilt – der ein negatives Vorzeichen hat, halbiert. Dies wird so lange durchgeführt, bis  $q_k^\top s_k$  größer oder gleich einer sehr kleinen negativen Toleranzgrenze ist. Ist nach Beenden dieser Vorgehensweise der Ausdruck  $q_k^\top s_k$  noch immer nicht positiv, so wird  $q_k$  weiter modifiziert, indem ein Vektor  $v$ , der mit einem konstanten Skalar  $w$  multipliziert wird, dazu addiert wird. Das bedeutet:

$$q_k = q_k + wv.$$

Hierbei sind die Einträge von  $v$  gegeben durch

$$v_i = \begin{cases} \nabla G_i(x_{k+1})G_i(x_{k+1}) - \nabla G_i(x_k)G_i(x_k) & , (q_k)_i w < 0, (q_k)_i (s_k)_i < 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Dabei wird die Konstante  $w$  sukzessive vergrößert bis  $q_k^\top s_k$  positiv ist. So erhalten wir jeweils eine aktualisierte Version der approximierten Hesse-Matrix. Um die gesamte Vorgehensweise zur Lösung des Problems zu verstehen, benötigen wir noch eine Darstellung des QP Algorithmus.

Im nächsten Abschnitt wollen wir nun auf die Vorgehensweise bei der Lösung des QP Subproblems eingehen.

### A.1.2 QP Algorithmus

In jedem Iterationsschritt ist neben der neuen Approximation der Hesse-Matrix  $H$  auch jeweils ein QP Problem der in (A.4) gegebenen Form zu lösen. Allgemein dargestellt lässt sich solch ein QP Problem in folgender Form schreiben:

Wir suchen den Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ , der den Ausdruck

$$q(d) = \frac{1}{2}d^\top H d + c^\top d \tag{A.5}$$

minimiert. Dabei sind im Allgemeinen Nebenbedingungen der Form

$$\begin{aligned} A_i d &= b_i, \quad i = 1, \dots, m_e \\ A_i d &\leq b_i, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{A.6}$$

zu erfüllen.  $A_i$  bezeichnet hierbei die  $i$ -te Zeile einer  $m \times n$  Matrix  $A$ .

Die in Matlab schon implementierte Funktion zur Lösung von QP Problemen ist dabei eine an [GMSW84] und [GMW91] angelehnte, sogenannte „active-set“-Methode, die für QP Probleme modifiziert worden ist. Dabei werden wieder die KKT Bedingungen aufgestellt und es wird damit das Minimum des quadratischen Problems gesucht. In Anlehnung an [Docu], [Wo11] und [Obe12] werden wir die Vorgehensweise für die Lösung des QP Problems kurz darstellen.

Die Lösung eines QP Problems wird in zwei Phasen gefunden. In der ersten Phase wird ein zulässiger Punkt, d.h. ein Punkt, der alle Nebenbedingungen erfüllt, bestimmt. Hierbei wird die Zielfunktion zunächst einmal ignoriert. Das Ziel ist es lediglich, einen Punkt zu bestimmen, der die Nebenbedingungen erfüllt. In der zweiten Phase wird dann eine iterative Folge  $(x_k)_k$  solcher zulässiger Punkte, die gegen die Lösung konvergiert, bestimmt. Dabei wird die Zielfunktion minimiert, während die Zulässigkeit eingehalten wird. Hierbei wird eine aktive Menge  $\bar{A}_k$ , die ein Schätzer der aktiven Nebenbedingungen im Lösungspunkt ist, gewählt. In jedem Iterationsschritt  $k$  wird nun  $\bar{A}_k$  aktualisiert und anschließend verwendet um eine Basis für die Suchrichtung  $\hat{d}_k$  zu bilden um dann einen Schritt von  $x_k$  nach  $x_{k+1}$  von der Form

$$x_{k+1} = x_k + a_k \hat{d}_k$$

zu vollziehen.



Dazu müssen sowohl die Schrittweite  $a_k$  als auch die Suchrichtung  $\hat{d}_k$  bestimmt werden. Ist die Suchrichtung  $\hat{d}_k$  als Lösung eines quadratischen Problems mithilfe der KKT Bedingungen gefunden, so wird die Schrittweite  $a_k$  durch eine sogenannte eindimensionale Liniensuche in Richtung  $\hat{d}_k$  bestimmt. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine genaue Herleitung dieser Größen und verweisen auf die Darstellungen in [Docu], [Wo11] und [Obe12].

Im Anschluss daran wird dann der nächste Iterationsschritt durchgeführt und es wird überprüft, ob  $x_{k+1}$  ein Minimum des ursprünglichen Problems darstellt. Falls dies nicht der Fall ist, wird nun wieder ein QP Problem gelöst, um dann  $x_{k+2}$  zu bestimmen. Dieses Verfahren wird nun so lange iterativ fortgeführt, bis wir einen Punkt  $x^*$  erhalten, der alle KKT Bedingungen erfüllt und somit ein Minimum darstellt.

### A.1.3 Globales/Lokales Minimum

Da es bei dem im vorherigen Kapitel dargestellten Algorithmus nach [Ger07] dazu kommen kann, dass das Verfahren lediglich für Startwerte, die in der Umgebung eines lokalen Minimums liegen, konvergiert, wird zusätzlich eine Bewertungsfunktion herangezogen, an Hand der dann entschieden wird, ob die neue Iterierte  $x_{k+1}$  eine Verbesserung gegenüber  $x_k$  darstellt, um so ein globales Minimum zu finden. Eine genauere Betrachtung dieser Bewertungsfunktion ist in [Docu] und [Ger07] zu finden. Mithilfe dieser Bewertungsfunktion kann es dennoch unter gewissen Umständen (siehe [Ger07]) dazu kommen, dass ein lokales und kein globales Minimum gefunden wird. Daher haben wir in unserem Programm zusätzliche Startpunkte für den Algorithmus implementiert. Es wird so, ausgehend von einer zu wählenden Anzahl von Startpunkten (in unserem Fall 25 Startpunkte), jeweils das dargestellte Minimierungsproblem gelöst. Dabei ist darauf zu achten, dass die jeweiligen Startwerte die angegebenen Nebenbedingungen erfüllen. So wird zu jedem Startpunkt ein Vektor  $x^*$  gefunden, der das Problem minimiert. Nachdem dies für alle Startpunkte geschehen ist, werden die Funktionswerte der jeweiligen Minima verglichen und es wird dasjenige Minimum mit dem geringsten Funktionswert ausgegeben. So können wir, falls es nicht möglich ist direkt ein globales Minimum zu finden, zumindest die jeweils erreichten lokalen Minima vergleichen und so ein verbessertes Ergebnis erzielen. Durch die Wahl von entsprechenden Optionen wie der maximalen Schrittweite oder auch der maximalen Anzahl an Iterationen, kann das Ergebnis in einigen Fällen noch verbessert werden. Dadurch wird jedoch die Rechendauer verlängert, so dass ein Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit gefunden werden muss.

## A.2 Integrationsterm

Unter Verwendung der parametrischen Volatilitätsstruktur

$$\sigma_k(t) = \Phi_k \psi(T_k - t; a, b, c, d) := \Phi_k([a + b(T_k - t)]e^{-c(T_k - t)} + d),$$

mit  $1 \leq k \leq N - 1$  ergibt sich für die Berechnung entsprechender Integrale über diese Funktion (vgl [Gol13]):

$$\begin{aligned}
 & \int \psi(T_n - t; a, b, c, d)\psi(T_m - t; a, b, c, d)dt \\
 &= \int ((a + b(T_n - t))e^{-c(T_n - t)} + d)((a + b(T_m - t))e^{-c(T_m - t)} + d)dt \\
 &= \frac{ad}{c}(e^{c(t - T_n)} + e^{c(t - T_m)}) + d^2t - \frac{bd}{c^2}(e^{c(t - T_n)}(c(t - T_n) - 1) \\
 &\quad + e^{c(t - T_m)}(c(t - T_m) - 1)) + \frac{e^{c(2t - T_n - T_m)}}{4c^3}(2a^2c^2 \\
 &\quad + 2abc(1 + c(T_n + T_m - 2t)) + b^2(1 + 2c^2(t - T_n)(t - T_m) + c(T_n + T_m - 2t))).
 \end{aligned}$$

### A.3 Daten vom 02.08.2013

Die Daten der Kalibrierung an die Marktwerte vom 02.08.2013 sind in den Tabellen 10, 11 und 12 angegeben.

$i$	Swap-Rate $S_{0,i}(0)$
1	0.3410
2	0.4310
3	0.5130
4	0.5936
6	0.7870
8	1.0185
10	1.2480
12	1.4480
14	1.6250
16	1.7815
18	1.9250
20	2.0530
22	2.1620
24	2.2550
30	2.4500
40	2.5570

Tabelle 10: Swap-Raten vom 02.08.2013 (in Prozent)

$i$	Cap Volatilität $\sigma_{1,i}^{ATM}$
2	62.65
4	61.35
6	60.70
8	57.30
10	52.55
12	48.25
14	44.80
16	41.90
18	39.35
20	37.05
24	34.40
30	31.10
40	29.30

Tabelle 11: ATM-Cap Volatilitäten vom 02.08.2013 (Angaben in Prozent)

$i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	66.98	67.30	63.40	55.70	49.55	43.70	39.70	36.30	33.75	32.00
2	59.56	60.05	55.40	49.40	45.40	41.20	38.55	35.80	33.75	32.30
4	58.00	51.40	45.90	42.10	39.70	37.10	34.80	32.80	31.50	30.50
6	47.28	42.60	39.50	37.10	35.20	33.40	31.50	30.00	29.05	28.35
8	39.43	36.65	35.10	33.30	31.70	30.40	29.05	28.20	27.55	27.00
10	36.42	33.70	32.10	30.60	28.70	28.50	27.15	26.70	26.35	26.10
12	32.57	30.64	29.32	28.25	27.06	26.69	25.95	25.68	25.45	25.38
14	28.85	27.60	26.60	26.00	25.50	25.00	24.80	24.70	24.70	24.70
16	27.09	26.06	25.34	24.92	24.66	24.28	24.17	24.25	24.32	24.39
18	25.51	24.70	24.20	24.00	23.87	23.61	23.72	23.86	24.00	24.13
20	24.07	23.40	23.20	23.10	23.10	23.10	23.30	23.50	23.70	23.90

Tabelle 12: Swaption Volatilitäten vom 02.08.2013 (Angaben in Prozent). Spalten geben die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps an, während Zeilen die Fälligkeit der Swaption angeben (Angaben in halben Jahren).

Hieraus ergeben sich die in Tabelle 13 und Abbildung 4 dargestellten aktuellen Libor-Raten. Weiterhin erhalten wir die Caplet Volatilitäten aus Tabelle 14.

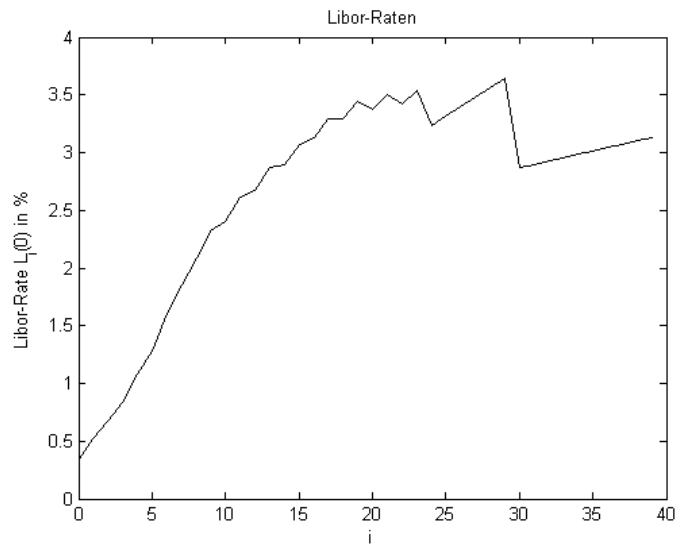


Abbildung 4: Berechnete Libor-Raten-Kurve vom 02.08.2013

$i$	Libor-Rate $L_i(0)$	$i$	Libor-Rate $L_i(0)$
0	0.3410	20	3.3697
1	0.5212	21	3.5017
2	0.6778	22	3.4184
3	0.8372	23	3.5336
4	1.0813	24	3.2286
5	1.2778	25	3.3097
6	1.6117	26	3.3921
7	1.8508	27	3.4757
8	2.0829	28	3.5607
9	2.3248	29	3.6471
10	2.3989	30	2.8713
11	2.6139	31	2.8988
12	2.6718	32	2.9267
13	2.8663	33	2.9548
14	2.8961	34	2.9832
15	3.0721	35	3.0120
16	3.1280	36	3.0412
17	3.2937	37	3.0706
18	3.2950	38	3.1005
19	3.4466	39	3.1307

Tabelle 13: Berechnete Libor-Raten vom 02.08.2013 (in Prozent)

$i$	$\sigma_i^{CM}$	$i$	$\sigma_i^{CM}$	$i$	$\sigma_i^{CM}$
1	62.65	14	33.10	27	22.75
2	61.00	15	31.65	28	21.99
3	61.08	16	30.14	29	21.45
4	61.13	17	28.52	30	20.04
5	59.57	18	26.62	31	20.13
6	55.68	19	26.14	32	20.57
7	51.02	20	26.90	33	21.39
8	46.62	21	27.90	34	22.64
9	42.93	22	28.09	35	24.39
10	40.08	23	27.73	36	26.71
11	38.03	24	26.09	37	29.68
12	36.30	25	24.84	38	33.46
13	34.84	26	23.71	39	38.28

Tabelle 14: ATM-Caplet Volatilitäten vom 02.08.2013 (Angaben in Prozent)

Mit diesen Daten ergeben sich die folgenden Ergebnisse für die Kalibrierung an die Daten vom 02.08.2013:

Für ein Modell mit  $N-1$  Faktoren ( $N = 40$ ) erhalten wir für die Volatilitätsstruktur die Werte:

$$\begin{aligned}
 a &= -2.4313, \\
 b &= -0.3657, \\
 c &= 0.0960, \\
 d &= 4.8202.
 \end{aligned}$$

Die Parameter der Korrelationsstruktur lauten:

$$\eta = 1.8981 \text{ und } \rho_\infty = 0.1498.$$

Die Volatilitäten der Caplets werden aufgrund der Wahl der entsprechenden Faktoren  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  aus Tabelle 15 exakt getroffen. Die relativen Fehler in der Kalibrierung an die Swaption Daten sind in Tabelle 16 angegeben. In Tabelle 17 sind die relativen Abweichungen im Bezug auf Nominal und Laufzeit dargestellt.

Aufgrund dieser Ergebnisse lässt sich die mittlere relative Abweichung von den Swaption Volatilitäten bestimmen. Diese beträgt 3.95 Prozent.

$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$	$\Phi_5$	$\Phi_6$	$\Phi_7$	$\Phi_8$	$\Phi_9$	$\Phi_{10}$
0.2657	0.2617	0.2648	0.2673	0.2625	0.2470	0.2275	0.2087	0.1928	0.1804
$\Phi_{11}$	$\Phi_{12}$	$\Phi_{13}$	$\Phi_{14}$	$\Phi_{15}$	$\Phi_{16}$	$\Phi_{17}$	$\Phi_{18}$	$\Phi_{19}$	$\Phi_{20}$
0.1714	0.1637	0.1570	0.1490	0.1422	0.1350	0.1273	0.1184	0.1158	0.1186
$\Phi_{21}$	$\Phi_{22}$	$\Phi_{23}$	$\Phi_{24}$	$\Phi_{25}$	$\Phi_{26}$	$\Phi_{27}$	$\Phi_{28}$	$\Phi_{29}$	$\Phi_{30}$
0.1223	0.1225	0.1201	0.1123	0.1062	0.1007	0.0959	0.0920	0.0891	0.0826
$\Phi_{31}$	$\Phi_{32}$	$\Phi_{33}$	$\Phi_{34}$	$\Phi_{35}$	$\Phi_{36}$	$\Phi_{37}$	$\Phi_{38}$	$\Phi_{39}$	
0.0823	0.0834	0.0860	0.0903	0.0965	0.1048	0.1155	0.1292	0.1466	

Tabelle 15: Werte für die Faktoren  $\Phi_i$  aus der Kalibrierung an die Marktdaten vom 02.08.2013

$i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	10.18	14.36	14.20	10.96	9.10	5.16	2.79	0.29	-0.92	-1.22
2	0.00	4.95	5.32	4.22	5.02	3.20	3.40	2.33	2.29	2.05
4	-1.58	-3.28	-3.14	-1.89	-0.38	0.67	0.73	0.81	0.97	0.79
6	-10.16	-8.14	-5.39	-3.66	-1.86	-0.66	-0.50	-1.29	-1.60	-1.22
8	-11.12	-8.57	-5.09	-3.58	-2.17	-0.39	-1.08	-1.41	-1.06	-0.15
10	-5.20	-5.79	-3.99	-2.45	-2.87	0.09	-2.44	-1.54	0.02	1.93
12	-7.35	-2.86	-4.18	-1.57	-2.53	-1.86	-2.23	-0.39	1.60	3.63
14	-10.47	-6.44	-4.63	-3.99	-4.40	-4.04	-1.90	0.65	3.02	4.77
16	-6.70	-7.68	-4.27	-5.13	-3.90	-2.45	0.18	2.98	5.01	5.98
18	-2.09	-3.37	-7.90	-6.28	-3.43	-1.17	2.00	4.41	5.56	5.04
20	-12.54	-15.09	-12.06	-7.89	-3.69	-0.47	2.46	3.86	3.35	0.37

Tabelle 16: Relativer Fehler der Swaption Volatilitäten vom 02.08.2013 (Angaben in Prozent). Spalten geben die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps an, während Zeilen die Fälligkeit der Swaption angeben (Angaben in halben Jahren).

$i$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1.12	2.05	2.44	2.04	1.76	0.99	0.53	0.05	0.17	0.22
2	0.00	1.08	1.35	1.14	1.41	0.90	0.96	0.64	0.63	0.55
4	0.55	1.25	1.26	0.77	0.16	0.28	0.30	0.32	0.38	0.31
6	5.05	4.17	2.80	1.90	0.96	0.34	0.25	0.63	0.76	0.56
8	6.68	5.12	3.06	2.13	1.27	0.23	0.61	0.77	0.57	0.08
10	3.58	3.87	2.63	1.59	1.79	0.06	1.47	0.91	0.01	1.10
12	5.33	4.54	2.91	1.08	1.68	1.22	1.41	0.24	0.98	2.16
14	7.65	5.53	3.27	2.78	3.00	2.66	1.23	0.42	1.89	2.91
16	5.14	2.53	3.12	3.66	2.70	1.65	0.12	1.94	3.18	3.72
18	1.63	4.27	5.77	4.44	2.39	0.80	1.33	2.86	3.54	3.16
20	9.53	11.04	8.49	5.48	2.55	0.32	1.60	2.47	2.11	0.23

Tabelle 17: Relativer Fehler der Swaption Preise in Bezug auf Nominalwert und Laufzeit (Angaben in Basispunkten, Daten vom 02.08.2013). Spalten geben die Laufzeit des zugrundeliegenden Swaps an, während Zeilen die Fälligkeit der Swaption angeben (Angaben in halben Jahren).

**Literatur**

- [AP10a] L. B. ANDERSEN, V. V. PITERBARG: *Interest Rate Modeling Volume I: Foundations and Vanilla Models* Atlantic Financial Press, 2010
- [AP10b] L. B. ANDERSEN, V. V. PITERBARG: *Interest Rate Modeling Volume II: Term Structure Models* Atlantic Financial Press, 2010
- [AP10c] L. B. ANDERSEN, V. V. PITERBARG: *Interest Rate Modeling Volume III: Products and Risk Management* Atlantic Financial Press, 2010
- [BGM97] A. BRACE, D. GATAREK, M. MUSIELA: *The Market model of interest rate dynamics* Mathematical Finance, 1997
- [BM06] D. BRIGO, F. MERCURIO: *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit* Springer, 2006
- [Docu] MATHWORKS DOCUMENTATION CENTER: *Constrained Nonlinear Optimization Algorithms*  
<http://www.mathworks.de/de/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html>
- [EKR04] R. PIETERSZ, P. GROENEN: *N. El-Karoui, E. Reiner* Ecole Polytechnique, 2004
- [Fil03] D. FILIPOVIĆ: *Interest Rate Models* Teaching Notes, Princeton University, 2003
- [Fri07] C. FRIES: *Mathematical Finance: Theory, Modeling, Implementation* Wiley, 2007
- [Ger07] M. GERDTS: *Optimierung* Vorlesungsskript, Universität der Bundeswehr München, 2007
- [GLHS07] S. GALLUCCIO, J-M. LY, Z. HUANG, O. SCAILLET: *Theory and Calibration of Swap Market Models* Mathematical Finance, 2007
- [GMSW84] P. E. GILL, W. MURRAY, M. A. SAUNDERS, M. H. WRIGHT: *Procedures for Optimization Problems with a Mixture of Bounds and General Linear Constraints* ACM Trans. Math. Software, 1984
- [GMW91] P. E. GILL, W. MURRAY, M. H. WRIGHT: *Numerical Linear Algebra and Optimization* Academic Press, 1981
- [Gol13] A. GOLLE: *The LIBOR Market Model* Master Thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 2013
- [Has12] K. HASOW: *Modellierung der Volatilitätsstruktur in LIBOR-Markt-Modellen* Masterarbeit, Universität Münster, 2012

- [Hop06] R. H. W. HOPPE: *Optimization Theory, Chapter 4: Sequential Quadratic Programming* Teaching Notes, University of Houston, 2006
- [Hul02] J. C. HULL: *Options, Futures and Other Derivatives* Pearson, 2002
- [HW00] J. C. HULL, A. WHITE: *Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the Libor Market Model* Journal of Fixed Income, 2000
- [HW06] P. S. HAGAN, G. WEST: *Interpolation Methods for Curve Construction* Applied Mathematical Finance, 2006
- [Jam97] F. JAMSHIDIAN: *LIBOR and swap market models and measures* Finance and Stochastic, 1997
- [JR03] P. JÄCKEL, R. REBONATO: *The link between caplet and swaption volatilities in a Brace-Gatarek-Musiela/Jamshidian framework: approximate solutions and empirical evidence* Journal of Computational Finance, 2003
- [KP92] P. E. KLOEDEN, E. PLATEN: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* Springer, 1992
- [Les08] ANDREW LESNIEWSKI: *Interest Rate and Credit Models, Lecture 1: The forward curve* Teaching Notes, NYU, 2008
- [MSS97] K. MILTERSEN, K. SANDMANN, D. SONDERMANN: *Closed-form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates* Journal of Finance, 1997
- [Obe12] H. J. OBERLE: *Optimierung, Kapitel 13: Allgemeine restringierte Optimierung; Kapitel 14: Quadratische Programme, Strategie der aktiven Menge* Vorlesungsskript Optimierung, Universität Hamburg, 2012
- [Pau12] V. PAULSEN: *Handschriftliches Skript zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik* SS 2012, Universität Münster
- [Pau13] V. PAULSEN: *Handschriftliches Skript zur Vorlesung Ausgewählte Kapitel der Finanzmathematik* WS 2012/2013, Universität Münster
- [PG04] R. PIETERSZ, P. GROENEN: *Rank Reduction of Correlation Matrices by Majorization* Quantitative Finance, 2004
- [Pow78] M. J. D. POWELL: *A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations* Numerical Analysis, G.A. Watson ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1978
- [Reb99] R. REBONATO: *On the simultaneous calibration of multifactor lognormal interest rate models to Black volatilities and to the correlation matrix* Journal of Computational Finance, 1999



- [Reb04] R. REBONATO: *Volatility and Correlation, Second Edition; The Perfect Hedger and the Fox* Wiley, 2005
- [SC00] J. SCHOENMAKERS, B. COFFEY: *Stable implied calibration of a multi-factor LIBOR model via a semi-parametric correlation structure* WIAS Preprint, 2000
- [SC02] J. SCHOENMAKERS, B. COFFEY: *Systematic generation of parametric correlation structures for the LIBOR market model* WIAS Preprint, 2002
- [Sch02] J. SCHOENMAKERS: *Calibration of LIBOR models to caps and swaptions: a way around intrinsic instabilities via parsimonious structures and a collateral market criterion* WIAS Preprint, 2002
- [Sch05] J. SCHOENMAKERS: *Robust Libor Modelling and Pricing of Derivative Products* Chapman & Hall/CRC, 2005
- [Sch11a] D. SCHÄTZ: *Robust Calibration of the Libor Market Model and Pricing of Derivative Products* Dissertation, Universität Ulm, 2011
- [Sch11b] D. SCHLOTMANN: *Interpolation im Rahmen des LIBOR-Markt-Modells Eine Analyse ausgewählter Ansätze* Diplomarbeit, Universität Münster, 2011
- [Sel06] N. ŠELIĆ: *The LIBOR Market Model* University of the Witwatersrand, 2006
- [Sha70] D. F. SHANNO: *Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization* Mathematics of Computation, 1970
- [Shr04] S. E. SHREVE: *Stochastic Calculus for Finance II* Springer, 2004
- [Smi12] D. J. SMITH: *A Teaching Note on Pricing and Valuing Interest Rate Swaps Using LIBOR and OIS Discounting* Boston, 2012
- [Wo11] E. WONG: *Active-Set Methods for Quadratic Programming* Dissertation, University of California, San Diego, 2011
- [WZ06] L. WU, F. ZHANG: *Libor market model with stochastic volatility* Journal of Industrial and Management Optimization, 2006