Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Masterarbeit zum Thema

Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken

1. Prüfer: PD Dr. Volkert Paulsen
2. Prüfer: Prof. Dr. Steffen Dereich

vorgelegt von

Olga Funk
Matrikelnummer: 366480

Lüdinghausen, März 2015

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Neben der Optionsbewertung und dem Risikomanagement zählt die Portfoliooptimierung zu einem der wichtigsten Teilgebieten der modernen Finanzmathematik. Bereits Anfang der fünfziger Jahre wurde die Portfoliotheorie entwickelt und inzwischen sind in dieser beträchtliche Fortschritte erreicht worden. Das Ziel jeder Portfoliooptimierung ist dabei die Bestimmung von optimalen Anlagestrategien; diese ermöglicht also einem Investor sein vorhandenes Kapital über die gesamte Handelsperiode auf die gegebenen Finanzgüter optimal aufzuteilen.

Es gibt unterschiedliche Ansätze der Portfoliooptimierung. Zu den wichtigsten Methoden gehören zum einen der Martingalansatz und zum anderen der Ansatz von Hamilton-Jacobi-Bellman (kurz HJB-Ansatz), welcher auf der dynamischen Programmierung basiert. Eine ausführliche Beschreibung des ersten Ansatzes findet man zum Beispiel in den Büchern von Karatzas und Shreve [11] und von Karatzas [10] oder kann auch bei Pliska in [16, S. 371-382] und bei Cox und Huang in [5, S. 33-83] nachgeschlagen werden. Die Martingalmethode wird zur Lösung des zeitlich dynamischen Portfoliooptimierungsproblems der Maximierung des erwarteten Nutzens aus Endvermögen oder/und Konsum verwendet. Einer der Vorteile dieser Methode besteht darin, dass explizite Lösungen schnell und leicht berechnet werden. Der Nachteil des Ansatzes liegt jedoch darin, dass die Vollständigkeit des Marktes vorausgesetzt wird. Dabei erfolgt die Lösung des Problems in zwei Schritten. Zunächst wird das optimal zu erreichende Endvermögen bestimmt als Lösung eines sogenannten statischen Optimierungsproblems mit Nebenbedingung. Im zweiten Schritt wird ein sogenanntes Darstellungsproblem gelöst, indem eine optimale Portfoliostrategie konstruiert wird, die das optimale Endvermögen repliziert. Letzteres ist aufgrund der vorausgesetzten Vollständigkeit des Finanzmarktes möglich. Denn die Vollständigkeit des Marktes ermöglicht es dem Investor, jedes angestrebte Zielvermögen mit einem gegebenen Startkapital durch das Handeln gemäß einer richtig gewählten zulässigen, selbstfinanzierenden Portfoliostrategie zu erreichen. Beim zweiten Ansatz wird das zeitstetige Portfolioproblem als ein stochastisches Kontrollproblem betrachtet und mit der sogenannten Hamilton-Jacobi-Gleichung gelöst. Diese Methode kann zum Beispiel im Buch „Deterministic and Stochastic optimal control“ von Fleming [6] nachgeschlagen werden.

Während die oben genannten Methoden bislang zur Durchführung der Portfoliooptimierung in den Finanzmärkten benutzt wurden, werden in der vorliegenden Arbeit neben dem Anlagerisiko auch noch die Mortalitätsrisiken betrachtet. Es wird von einem Portfolio eines Versicherungsunternehmens ausgegangen, bestehend aus den Versicherungsverträgen für eine Gruppe von gleichaltrigen Versicherten, die mit dem Versicherungsunternehmen eine reine Erlebensfallversicherung abgeschlossen haben. Zu Beginn des Vertrages wird von jedem Versicherungsnehmer ein einmaliger Beitrag gezahlt und das erhaltene Geld kann am Finanzmarkt angelegt werden. Dafür steht dem Versicherungsunternehmen unterschiedliche Finanzgüter zu Verfügung. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine optimale Investmentstrategie für das Versicherungsunternehmen zu finden. Das bedeutet, es soll die möglichst optimale Aufteilung des zur Verfügung stehenden Vermögens auf die vorliegenden Finanzgüter unter Berücksichtigung von Verpflichtungen des Versicherungsunternehmens gegenüber den Versicherten bestimmt werden. Wir werden sehen, dass bei der Portfoliooptimierung in kombinierten Märkten die Martinaglmethode und der HJB-Ansatz nur gemeinsam zum Ziel führen können. Dabei können wir nicht die genaue optimale Investmentstrategie bestimmen. Jedoch wird es uns gelingen, einen guten Kandidaten für die Lösung des Portfolioproblems zu finden, der als suboptimal definiert wird.

Die vorliegende Masterarbeit ist dabei wie folgt strukturiert:

Im ersten Kapitel wird zunächst kurz die Problemstellung der vorliegenden Masterarbeit dargestellt. Weiter erfolgt die Beschreibung einer reinen Erlebensfallversicherung für eine Gruppe von gleichaltrigen versicherten Personen, welche in dieser Arbeit als Versicherungsmarkt für kombinierte Marktmodelle dienen wird und schließlich werden finanzmathematische Grundlagen zum besseren Verständnis der Arbeit eingeführt.

Im zweiten Kapitel werden wir das eindimensionale Black-Scholes-Modell mit deterministischen Koeffizienten als vollständigen Finanzmarkt und das im ersten Kapitel eingeführte Lebensversicherungsmodell betrachten. In diesem kombinierten Markt werden wir ein allgemeines Schema für die Berechnung der Portfolioprobleme unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken ausarbeiten. Die von uns erhaltenen Resultate werden wir auf drei Nutzenfunktionen, CARA, CRRA und logarithmische, anwenden und die gesuchte suboptimale Portfoliostrategie explizit angeben.

Im nächsten Kapitel werden wir wieder mit einem eindimensionalen vollständigen Finanzmarkt arbeiten, mit dem Unterschied, dass es in diesem neben einem Geldmarktkonto eine Nullkuponanleihe als weitere Investitionsmöglichkeit zur Verfügung steht. Für die Berechnung des Bond-Portfolioproblems unter Berücksichtigung von Sterblichkeitsrisiken wird dabei das Vasicek-Modell ausgesucht.

Weiter wird der Finanzmarkt aus dem dritten Kapitel um eine Aktie erweitert, es handelt sich also um ein zweidimensionales Finanzmarktmodell, bestehend aus einem Geldmarktkonto, einer Aktie und einem Bond. Die gewonnenen Ergebnisse aus den vorherigen zwei Kapiteln werden auf das gemischte Aktien-Bond-Portfolioproblem im neuen kombinierten Markt übertragen und die Berechnung der expliziten Lösung des Optimierungsproblems erleichtern.

Im fünften und sechsten Kapiteln werden wir uns schließlich mit mehrdimensionalen Bondmarkt- und gemischten Finanzmarktmodellen beschäftigen. In diesen werden die verallgemeinerten Bond- und gemischten Aktien-Bond-Portfolioprobleme unter Berücksichtigung der Mortalitätsrisiken behandelt. Für die Modellierung des Short-Rate-Prozesses wird dabei insbesondere das Mehrfaktor-Vasicek-Modell gewählt.

Im Fazit werden schließlich die gewonnenen Ergebnisse der vorliegenden Masterarbeit zusammengefasst.

Grundlage der Arbeit ist das Paper von D. Hainaut und P. Devolder „A martingale approach applied to the management of life insurances“.

Kapitel 1

Einführung

Das Ziel dieses Kapitels besteht zum einen darin, ein Lebensversicherungsportfolio zu beschreiben, welches im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit als Versicherungsmarkt in den kombinierten Modellen dienen wird und zum anderen darin, einige Grundbegriffe aus der Finanzmathematik einzuführen und zu erläutern.

1.1 Problemstellung

Wir wollen zuerst kurz beschreiben, welche Aufgabe wir in dieser Masterarbeit zu bewältigen haben. Wie schon in der Einleitung erwähnt, betrachten wir in der vorliegenden Arbeit kombinierte Versicherungs- und Finanzmarktmodelle. Dabei bleibt der Versicherungsmarkt immer gleich und es handelt sich bei diesem um eine reine Erlebensfallversicherung für mehrere Versicherungsnehmer des gleichen Alters. Zu Vertragsbeginn bekommt das Versicherungsunternehmen von jedem Versicherten einen einmaligen Beitrag. Das erhaltene Geld kann vom Versicherungsunternehmen am Finanzmarkt angelegt werden. Dafür werden unterschiedliche Finanzgüter für Investitionen zur Verfügung gestellt. Aus der Sicht des Versicherungsunternehmens besteht die Aufgabe darin, das gegebene Kapital auf die vorliegenden Finanzgüter während der ganzen Vertraglaufszeit von T Jahren möglichst optimal aufzuteilen, sodass zum Zeitpunkt T der erwartete Nutzen des Überschusses, welcher aus der Differenz zwischen dem erreichten Endvermögen und dem Wert der Verpflichtungen gegenüber den Versicherten entsteht, maximiert wird.

1.2 Lebensversicherungsmarkt

In diesem Abschnitt werden wir ein Modell zur Beschreibung der Lebensdauer in einer Gruppe von Individuen einführen. Dafür werden wir hier eine reine Erlebensfallversicherung betrachten. Reine Erlebensfallversicherung ist eine Versicherungsart, bei welcher dem Versicherungsnehmer die Versicherungssumme K im Falle seines Überlebens der vereinbarten Vertragslaufzeit von T Jahren vom Versicherungsunternehmen ausgezahlt wird. Beim vorzeitigen Tod wird keine Auszahlung fällig. Dabei orientieren wir uns an [13, Abschnitt 2.2], [8, Abschnitt 2] und [1, Abschnitte 4.1-4.2].

Wir betrachten eine Gruppe von n_a versicherten Personen des Alters a. Das Versicherungsunternehmen wird jedem, der das Alter $a + T$ lebend erreicht, eine feste Summe K auszahlen. Die Restlebenszeiten der Versicherten, die wir mit T_1, T_2,..., T_{n_a}

bezeichnen werden, seien eine Folge von nicht negativen, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, welche auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^v, \mathcal{F}^v, \mathbb{P}^v)$ definiert sind. Die Zufallsvariable T_i modelliert also die zukünftige Restlebensdauer der i-ten versicherten Person für alle $i \in \{1, \ldots, n_a\}$. Es wird angenommen, dass die Verteilung von T_1 absolut stetig ist bezüglich des Lebesgue-Maßes mit Dichte f, d.h. für die Verteilungsfunktion F von T_1 gilt:

$$F(t) = \mathbb{P}^v(T_1 \leq t) = \int_0^t f(s)ds \quad \forall t > 0 \ .$$

Weiter ist die Hazardrate, auch Sterberate genannt, von T_1 zur Zeit t, welche die relative Momentansterblichkeit in t beschreibt, definiert als:

$$\mu(a+t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ \mathbb{P}^v(t < T_1 \leq t+h | T_1 > t) \ .$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^v(t < T_1 \leq t+h | T_1 > t) &= \frac{\mathbb{P}^v(\{t < T_1 \leq t+h\} \cap \{T_1 > t\})}{\mathbb{P}^v(T_1 > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}^v(t < T_1 \leq t+h)}{\mathbb{P}^v(T_1 > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{\mathbb{P}^v(T_1 > t)} \end{aligned}$$

ist diese dann für Lebesgue-fast-alle t gegeben durch

$$\mu(a+t) = \frac{f(t)}{P^v(T_1 > t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)ds} \ . \tag{1.1}$$

Die Hazardrate $\mu(a+t)$ gibt also die Sterberate einer a-jährigen Person zur Zeit t an, unter der Bedingung, dass sie bis t überlebt hat. Folgende Beobachtung

$$\mu(a+t) = \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)ds} = -\frac{d}{dt} \log\left(\int_t^\infty f(s)ds\right)$$

impliziert nun, dass die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines a-jährigen gegeben ist durch

$${}_tp_a = \mathbb{P}^v(T_1 > t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(a+s)ds\right) \quad \text{mit} \quad \frac{d_tp_a}{dt} = -\mu(a+t)_tp_a \ .$$

Mit anderen Worten hat jeder Versicherungsnehmer aus der Gruppe die gleiche Überlebenswahrscheinlichkeit und somit ist die Wahrscheinlichkeit des Erlebens des Alters $a+T$ für alle Versicherten gleich groß ${}_Tp_a$.

Als Nächstes wollen wir berechnen können, wie hoch die erwartete Summe ist, die das Versicherungsunternehmen am Ende der Vertragslaufzeit T auszuzahlen hat. Dafür müssen wir wissen, was die erwartete Gesamtanzahl von Versicherten ist, die das Alter $a+T$ erleben. Um diese Fragen beantworten zu können, betrachten wir den Zählprozess $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$, gegeben durch

$$N_t = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

welcher die Gesamtanzahl der Todesfälle in der Gruppe zum Zeitpunkt t angibt. Dabei ist die versicherungsmathematische Filtration $\mathcal{F}^v$ in diesem Modell die von N erzeugte natürliche Filtration, also

$$\mathcal{F}_t^v = \sigma\{N_s | s \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Offensichtlich ist der Prozess N ein Markovscher Sprungprozess auf $\{0, \dots, n_a\}$ mit der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P}(s,t) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(s,t) & p_{0,1}(s,t) & \dots & p_{0,n_a}(s,t) \\ 0 & p_{1,1}(s,t) & \dots & p_{1,n_a}(s,t) \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq t,$$

wobei die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt gegeben sind:

$$p_{i,j}(s,t) = \begin{cases} \mathbb{P}^v(N_t = j | N_s = i), & \text{falls } P^v(N_s = i) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \; i,j \in \{0, \dots, n_a\}, \; i \leq j \; .$$

Wir wollen weiter dessen stochastische Intensität berechnen. Diese beschreibt, wie viele Versicherungsnehmer innerhalb eines unendlich kleinen Zeitintervalls sterben. Dafür betrachten wir zunächst einen Versicherungsnehmer des Alters a und definieren mit $D_i(t) = \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}$ den Prozess, der den Todesfall des i-ten Versicherten zum Zeitpunkt t angibt. Sei $(\mathcal{D}_t^i := \sigma\{D_i(s) | s \leq t\})_{t>0}$ die von $(D_i(t))_{t>0}$ erzeugte natürliche Filtration, dann ist

$$D_i(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{T_i > s\}} \mu(a+s) ds = D_i(t) - \int_0^t (1 - D_i(s)) \mu(a+s) ds$$

ein Martingal bezüglich $\mathcal{D}^i$, dabei sind alle Erwartungswerte in diesem Abschnitt bezüglich $\mathbb{P}^v$. Dies folgt aus der Tatsache, dass für alle $s > t$

$$\mathbb{E}\left[D_i(s) - D_i(t) - \int_t^s \mathbb{1}_{\{T_i > u\}} \mu(a+u) du | \mathcal{D}_t^i\right] = 0$$

ist. Denn einerseits gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[D_i(s) - D_i(t) | \mathcal{D}_t^i\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_i \leq s\}} - \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}} \middle| \mathcal{D}_t^i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t < T_i \leq s\}} \middle| \mathcal{D}_t^i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t < T_i \leq s\}} \mathbb{1}_{\{T_i > t\}} \middle| \mathcal{D}_t^i\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{T_i > t\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t < T_i \leq s\}} \middle| \mathcal{D}_t^i\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{T_i > t\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t < T_i \leq s\}} \middle| T_i > t\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{T_i > t\}} \mathbb{P}^v\left(t < T_i \leq s | T_i > t\right) \\ &= (1 - D_i(t)) \frac{F(s) - F(t)}{1 - F(t)} \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_{\{T_i>u\}}\middle|\mathcal{D}_t^i\right] &= \mathbb{E}\left[1_{\{T_i>u\}}\mathbb{1}_{\{T_i>t\}}\middle|\mathcal{D}_t^i\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_i>t\}}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_i>u\}}\middle|T_i>t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_i>t\}}P^v\left(T_i>u|T_i>t\right) \\
&= (1-D_i(t))\frac{P^v\left(T_i>u\right)}{P^v\left(T_i>t\right)} \\
&= (1-D_i(t))\frac{1-F(u)}{1-F(t)} \quad \forall u>t
\end{aligned}$$

ergibt sich für alle $t<u\leq s$ andererseits :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^s \mathbb{1}_{\{T_i>u\}}\mu(a+u)du - \int_0^t \mathbb{1}_{\{T_i>u\}}\mu(a+u)du|\mathcal{D}_t^i\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^s \mathbb{1}_{\{T_i>u\}}\mu(a+u)du\middle|\mathcal{D}_t^i\right] \overset{\text{Fubini}}{=} \int_t^s \mathbb{E}\left[1_{\{T_i>u\}}\middle|\mathcal{D}_t^i\right]\mu(a+u)du \\
&= (1-D_i(t))\frac{1}{1-F(t)}\int_t^s (1-F(u))\mu(a+u)du \\
&\overset{(1.1)}{=} (1-D_i(t))\frac{1}{1-F(t)}\int_t^s (1-F(u))\frac{f(u)}{1-F(u)}du \\
&= (1-D_i(t))\frac{1}{1-F(t)}\int_t^s f(u)du \\
&= (1-D_i(t))\frac{F(s)-F(t)}{1-F(t)},
\end{aligned}$$

vgl. [1, Seite 127]. Da die Terme $(1-D_i(s))\mu(a+s)$ und $\lambda_i(s) := (1-D_i(s-))\mu(a+s)$ bis auf endlich viele Werte gleich sind, gilt die Gleichheit:

$$D_i(t) - \int_0^t (1-D_i(s))\mu(a+s)ds = D_i(t) - \int_0^t (1-D_i(s-))\mu(a+s)ds\ .$$

Somit ist

$$D_i(t) - \int_0^t (1-D_i(s-))\mu(a+s)ds = D_i(t) - \int_0^t \lambda_i(s)ds$$

auch ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{D}^i$ und wir bemerken weiter, dass der Prozess $(\lambda_i(t))_{t>0}$ im Gegensatz zu $((1-D_i(t))\mu(a+t))_{t>0}$ linksseitig stetig und daher vorhersehbar ist. Dieser definiert also den Intensitätsprozess zu D_i.

Betrachtet man wieder n_a Versicherungsnehmer, dann lässt sich der Zählprozess der Todesfälle wie folgt umschreiben:

$$N_t = \sum_{i=1}^{n_a} D_i(t), \quad 0\leq t\leq T,$$

und $\left(D_i(t) - \int_0^t \lambda_i(s)ds\right)_{t>0}$ ist wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $T_1,\dots,T_{n_a}$ auch ein $(\mathcal{F}_t^v)_{t>0}$-Martingal. Damit erhalten wir für die Intensität des Zählprozesses N folgendes Resultat:

$$\lambda_t = \sum_{i=1}^{n_a}\lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{n_a}(1-D_i(t-))\mu(a+t) = (n_a - N_{t-})\mu(a+t), \quad 0\leq t\leq T \tag{1.2}$$

und $(M_t)_{t>0}$, definiert durch:

$$M_t := N_t - \int_0^t \lambda_s ds \tag{1.3}$$

bezeichnet man als kompensierten Prozess von N. Dieser ist unter $\mathbb{P}^v$ ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}^v$.

Nun können wir die am Anfang des Abschnittes gestellten Fragen beantworten. Die erwartete Gesamtanzahl der Versicherten, die das Alter $a+T$ erleben, gegeben, dass der Versicherer sich zum Zeitpunkt $t \leq T$ befindet, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(n_a - N_T)|\mathcal{F}_t^v\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n_a} \mathbb{1}_{\{T_i>T\}}|\mathcal{F}_t^v\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n_a} \mathbb{1}_{\{T_i>T\}}\mathbb{1}_{\{T_i>t\}}|\mathcal{F}_t^v\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_a} \mathbb{1}_{\{T_i>t\}}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_i>T\}}|\mathcal{F}_t^v\right] = (n_a - N_t)\mathbb{P}^v\left(T_i > T|T_i > t\right) \\
&= (n_a - N_t)\frac{{}_Tp_a}{{}_tp_a} = (n_a - N_t)\,{}_{T-t}p_{a+t} \; .
\end{aligned}$$

Bei Fälligkeit erfolgt also die Gesamtauszahlung im Wert von $(n_a - N_T)K$ und die aktuarielle Bewertung zum Zeitpunkt $t \leq T$ ist:

$$\mathbb{E}\left[K(n_a - N_T)|\mathcal{F}_t^v\right] = K(n_a - N_t)\,{}_{T-t}p_{a+t} \; . \tag{1.4}$$

1.3 Das Finanzmarktmodell

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung in das grundlegende Finanzmarktmodell. Als Literaturquelle wird das erste Kapitel aus [11] verwendet.

Es sei ein filtrierter vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^f, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$ gegeben, wobei $(\mathcal{F}_t^f)_{t\geq 0}$ die von einem d-dimensionalen Wiener Prozess

$$W_t^{\mathbb{P}^f} = (W_1^{\mathbb{P}^f}(t), \ldots, W_d^{\mathbb{P}^f}(t))^\top, \quad t > 0$$

erzeugte Wiener-Filtration ist, d.h. die Quelle des Zufalls im Modell erhält man durch $(W_t^{\mathbb{P}^f})_{t>0}$. Da die Vertragslaufzeit der reinen Erlebensfallversicherung aus dem zweiten Abschnitt genau T Jahre beträgt, beschränken wir uns auf den Handelsraum $[0, T]$. In der vorliegenden Masterarbeit gehen wir von einem vollständigen, arbitragefreien Finanzmarkt aus, bestehend aus $d+1$ Assets (auch Finanzgüter genannt), in die man investieren kann. Bei einem Asset handelt es sich um ein Geldmarktkonto, dessen Preisprozess wir mit $(\beta_t)_t$ bezeichnen werden. Dieses ist risikofrei und gegeben durch

$$\beta_t = \int_0^t r_s ds, \quad t \geq 0,$$

wobei $(r_t)_{t\leq 0}$ ein adaptierter Prozess mit der Eigenschaft

$$\int_0^t |r_s| ds < \infty, \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

ist, der die zufällige Entwicklung der Zinsrate modelliert. Die restlichen d Assets nennt man **risky Assets**, in der Regel sind es Aktien und/oder Bonds. Es sind also risikobehaftete Finanzgüter, deren Preisprozesse S_i, $i = 1, \dots, d$ folgende stochastische Differentialgleichung erfüllen:

$$dS_i(t) = S_i(t) \left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) W_j^{\mathbb{P}^f}(t) \right), \quad t \geq 0, \; i = 1, \dots, d,$$

wobei der Driftvektor $\mu_t = (\mu_i(t), \dots, \mu_d(t))^\top$ und die Volatilitätsmatrix $(\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq d}$ $(\mathcal{F}_t^f)_{t \geq 0}$ progressiv-messbar sind und folgende Bedingungen erfüllen:

$$\int_0^T \|\mu_s\| ds < \infty, \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \int_0^T \|\sigma_s\|^2 ds < \infty, \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

Arbitragefreiheit und Vollständigkeit:

Existiert ein zu $\mathbb{P}^f$ äquivalentes Martingalmaß, so gibt es keine zulässigen Arbitragemöglichkeiten und der Finanzmarkt ist also arbitragefrei. Dieser ist genau dann vollständig, wenn das äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt ist. Um also die Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Finanzmarktes sicherzustellen, setzten wir die Existenz eines eindeutig bestimmten Martingalmaßes voraus. Nach den Sätzen 4.2 und 6.6 in [11, Kapitel 1] ist es genau dann der Fall, wenn die Volatilitätsmatrix σ_t für jedes $t \geq 0$ invertierbar ist und es einen previsiblen Prozess $\theta_t = (\theta_i(t), \dots, \theta_d(t))^\top$, $t \geq 0$ gibt mit

$$\theta_t = \sigma_t^{-1}(r_t \mathbb{1}_d - \mu_t)$$

und

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^T \theta_i(s) dW_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s\|^2 ds \right) \right] = 1 \; .$$

Hierbei ist $\mathbb{1}_d = (1, \dots, 1)^\top$ ein d-dimensionaler Vektor von Einsen. Der Prozess $(\theta_t)_{t \geq 0}$ erfüllt weiter

$$\int_0^T \|\theta_s\|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

und wird als **Marktpreis des Risikos** bezeichnet. Das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß $\mathbf{Q}^f$, bezüglich dessen $S_i^*(t) = \frac{S_i(t)}{\beta(t)}$, $t \geq 0$ lokale Martingale sind, ist gegeben durch

$$L_t := \left. \frac{d\mathbf{Q}^f}{d\mathbb{P}^f} \right|_{\mathcal{F}_t^f} = \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \theta_s dW_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds \right), \quad t \geq 0 \; .$$

Nach dem Satz von Girsanov ist

$$dW_t^{\mathbf{Q}^f} = dW_t^{\mathbb{P}^f} - \theta_t dt, \quad t \geq 0$$

ein d-dimensionaler Wiener Prozess bezüglich $\mathbf{Q}^f$ und die Preisprozesse der risikobehafteten Assets werden für diesen durch die Dynamik:

$$dS_i(t) = S_i(t) \left(r(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) W_j^{\mathbf{Q}^f}(t) \right), \quad t \geq 0, \; i = 1, \dots, d$$

beschrieben.

Portfolio- und Vermögensprozess:

Eine Portfoliostrategie ist ein bezüglich $(\mathcal{F}_t^f)_{t\geq 0}$ progressiv-messbarer $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess $(\pi_t)_{t\geq 0} = ((\pi_1(t), \ldots, \pi_d(t))^\top)_{t\geq 0}$ mit

$$\int_0^T \|\pi_s^\top \sigma(s)\|^2 ds + \int_0^T |\pi_s^\top (\mu_s - r_s \mathbb{1}_d)| ds < \infty, \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

Dabei ist $\pi_i(t)$, $i = 1, \ldots, d$ als Vermögensanteil zu verstehen, der zum Zeitpunkt t in das i-te risikobehaftete Asset investiert wird und der verbleibende Anteil vom Gesamtvermögen $1 - \sum_{i=1}^d \pi_i(t)$ dient für die Investition in das Geldmarktkonto. Wenn eine Portfoliostrategie selbstfinanzierend ist, d.h. der Vermögenszuwachs ergibt sich nur durch Gewinn aus dem Handel, dann genügt der zugehörige Vermögensprozess $(X_t^\pi)_{t\geq 0}$ folgender Dynamik:

$$\frac{dX_t^\pi}{X_t^\pi} = \sum_{i=1}^d \pi_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} + \left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_i(t)\right) \frac{d\beta_t}{\beta_t} \ .$$

1.4 Weitere Grundlagen

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der Nutzenfunktion und der konvex Konjugierten von dieser einführen. Dabei werden die wichtigen Eigenschaften der beiden Funktionen vorgestellt. Weiter werden wir das Prinzip der Lagrange-Methode erläutern. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ausführungen werden des Weiteren für die Lösung der Optimierungsprobleme genutzt.

1.4.1 Nutzenfunktion

Die hier aufgeführten Ergebnisse sind die Resultate der konvexen Analysis und werden zum Beispiel in [11, Kapitel 3.4] behandelt.

Definition 1.4.1. Eine strikt konkave Funktion

$$U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

heißt **Nutzenfunktion**, falls sie streng monoton wachsend und stetig differenzierbar ist mit

$$\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} U'(x) = +\infty \ .$$

Bemerkung 1.4.2. Aufgrund der strikten Konkavität, der stetigen Differenzierbarkeit und den anderen Annahmen an U ist ihre Ableitung

$$U' : (0, \infty) \to (0, \infty)$$

stetig, bijektiv und strikt fallend. Die Inverse von U' bezeichnen wir mit

$$I : (0, \infty) \to (0, \infty),$$

das heißt für alle $x \in (0, \infty)$ gilt

$$I(U'(x)) = x \quad \text{und} \quad U'(I(x)) = x \ .$$

Definition 1.4.3. Für eine Nutzenfunktion U heißt die Abbildung

$$U^*(\theta) := \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - \theta x], \quad \theta \in \mathbb{R}$$

konvex Konjugierte von U. Oft sagt man auch, U^* ist **dual** zu U.

Satz 1.4.4. Die konvex Konjugierte von U ist konvex, von unten halbstetig und erfüllt folgende Eigenschaften

(1)
$$U^*(\theta) = \begin{cases} U(I(\theta)) - \theta I(\theta), & \theta > 0 \\ U(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} U(x), & \theta = 0 \\ \infty, & \theta < 0 \end{cases}$$

(2) für die Ableitung der konvexen Konjugierte gilt:
$$(U^*)'(\theta) = -I(\theta), \quad 0 < \theta < \infty$$

(3) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$U(x) = \inf_{\theta\in\mathbb{R}}\{U^*(\theta) + x\theta\}$$

(4) für festes $x \in (\overline{x}, \infty)$, wobei $\overline{x} := \inf\{y \in \mathbb{R}|U(y) > -\infty\}$ ist, gilt:
$$U(x) = U^*(U'(x)) + xU'(x)$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [11, Kapitel 3.4]. □

Beispiel 1.4.5.

(1) Logaritmische Nutzenfunktion:
$$U(x) = \ln(x), \quad x > 0 \quad \text{mit} \quad I(x) = \frac{1}{x}$$

(2) Exponentielle Nutzenfunktion:
$$U(x) = -e^{-\alpha x}, \quad x, \alpha > 0 \quad \text{mit} \quad I(x) = -\frac{1}{\alpha}\ln(\frac{x}{\alpha})$$

(3) Power-Nutzenfunktion:
$$U(x) = \frac{1}{1-\rho}x^{1-\rho}, \quad x > 0, \quad \rho \in (-1,\infty)\backslash\{1\} \quad \text{mit} \quad I(x) = x^{-\frac{1}{\rho}}$$

1.4.2 Lagrange-Methode

Unser Ziel ist es, eine Funktion unter Nebenbedingungen zu maximieren. Dazu betrachten wir eine strikt konkave Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

und eine konvexe Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

mit $f,\, g \in C^1$.
Das Optimierungsproblem

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{gegeben} \quad g(x) = y$$

hat genau dann die Lösung $x^{opt} \in \mathbb{R}^n$, wenn es ein $\lambda^{opt} \in \mathbb{R}^k$ gibt, sodass $(x^{opt},\, \lambda^{opt}) \in \mathbb{R}^{n+k}$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = 0, & i = 1,\ldots,n \\ g_i(x) = y_i, & i = 1,\ldots,k \end{cases}$$

erfüllt. Mit anderen Worten ist $(x^{opt},\, \lambda^{opt}) \in \mathbb{R}^{n+k}$ die Nullstelle der Ableitung der Abbildung

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top (y - g(x)) \ .$$

Diese wird **Lagrange-Funktion** genannt und λ^{opt} bezeichnet man als **Lagrange-Multiplikator**. Der vorgestellte Ansatz ermöglicht es uns also, ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen auf ein Problem ohne Nebenbedingungen zu reduzieren, indem die Lagrange-Multiplikatoren für jede Nebenbedingung eingeführt werden, eine Linearkombination mit den Multiplikatoren als Koeffizienten definiert und das Problem schließlich als Kombination der zu optimierenden Funktion und der neu definierten Linearkombination umformuliert wird.

Bemerkung 1.4.6. Für $\lambda^{opt} \in \mathbb{R}^k_+$ löst x^{opt} darüberhinaus das Optimierungsproblem

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{gegeben} \quad g(x) \leq y \ .$$

Zum Optimierungsproblem in der vorliegenden Arbeit:

Mit den getroffenen Vorbereitungen lässt sich das in dem Abschnitt 1.1 dargestellte Portfolioproblem wie folgt formulieren:
Für den Wert der Verpflichtungen gegenüber den Versicherten

$$(n_a - N_T)K$$

und den zu einer Portfoliostrategie $(\pi_t)_{t\geq 0}$ zugehörigen Vermögensprozess $(X_t^\pi)_{t\geq 0}$ erhält man am Ende der Vertragslaufzeit T den Überschuss:

$$X_T^\pi - (n_a - N_T)K \ .$$

Die Aufgabe ist es, eine optimale Strategie zu finden, die den erwarteten Nutzen des Überschusses maximiert:

$$\sup_\pi \mathbb{E}\left[U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)\right] \ .$$

Im Folgenden bleibt der Versicherungsmarkt unverändert und wir betrachten unterschiedliche Finanzmärkte. Wir fangen zunächst mit den eindimensionalen arbitragefreien und vollständigen Finanzmärkten, die dann um weitere Finanzgüter erweitert werden, bis wir schließlich mit den mehrdimensionalen Marktmodellen arbeiten.

Kapitel 2

Optimierung in einem Black-Scholes-Modell

In diesem Kapitel werden wir den im Abschnitt 1.2 konstruierten Versicherungsmarkt und das eindimensionale Black-Scholes-Modell mit deterministischen Koeffizienten betrachten. Dabei stehen als Investitionsmöglichkeiten ein Geldmarktkonto und eine Aktie zur Verfügung. Unsere Zielsetzung ist die Optimierung der Anlagepolitik zur Maximierung des erwarteten Nutzens des Überschusses, wobei dieser aus der Differenz zwischen dem Endvermögen und der Gesamtauszahlung an die überlebenden Versicherten entsteht. Wir orientieren uns hierbei hauptsächlich an dem Paper von D. Hainaut und P. Devolder „A martingale approach applied to the management of life insurances“ [8]. Weitere Referenzen werden in den entsprechenden Abschnitten angegeben.

2.1 Das Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir als finanzmathematisches Modell das eindimensionale Black-Scholes-Modell mit deterministischen Koeffizienten.

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^f, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$, dabei ist $(\mathcal{F}_t^f)_{t\geq 0}$ die von einem eindimensionalen Wiener Prozess $(W_t^{\mathbb{P}^f})_{t\geq 0}$ erzeugte Wiener-Filtration, d.h. die Quelle des Zufalls im Modell erhält man durch $(W_t^{\mathbb{P}^f})_{t\geq 0}$. Wir betrachten einen Finanzmarkt, bestehend nur aus zwei Finanzgütern, die in dem Handelszeitraum $[0, T]$ gehandelt werden. Dabei geht es um eine risikobehaftete Finanzanlage (Aktie) und eine risikolose Finanzanlage (Geldmarktkonto). Der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ wird durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds\right) \exp\left(\int_0^t \sigma_s W_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right),$$

dieser ist also die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}^f}),$$

wobei die Koeffizienten μ und σ deterministische Drift- und Volatilitätsfunktionen sind, welche folgende Bedingungen:

$$\int_0^T |\mu_s| ds < \infty \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

$$\int_0^T \sigma_s^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

erfüllen. Weiter ist der Preisprozess des Geldmarktkontos mit einer deterministischen Zinsratefunktion r mit der Eigenschaft

$$\int_0^t |r_s| ds < \infty \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

gegeben durch

$$\beta_t = \beta_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

und erfüllt damit die Differentialgleichung

$$d\beta_t = \beta_t r_t dt \ .$$

Der Finanzmarkt ist arbitragefrei und vollständig, da es zu $\mathbb{P}^f$ ein einziges äquivalentes Martingalmaß $\mathbf{Q}^f$ gibt, welches eindeutig bestimmt ist durch

$$L_t := \left.\frac{d\mathbf{Q}^f}{d\mathbb{P}^f}\right|_{\mathcal{F}_t^f} = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right) \tag{2.1}$$

mit einer deterministischen Funktion

$$\theta_t := -\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \quad 0 \leq t < T \quad \text{mit} \quad \int_0^T \theta_s^2 ds < \infty \ .$$

Nach dem Satz von Girsanov ist

$$W_t^{\mathbf{Q}^f} = W_t^{\mathbb{P}^f} - \int_0^t \theta_s ds$$

ein Wiener Prozess bezüglich $\mathbf{Q}^f$. Für diesen wird der Preisprozess der Aktie durch die Dynamik

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbf{Q}^f})$$

beschrieben.

2.2 Das kombinierte Modell

Nun wollen wir ein Marktmodell konstruieren, welches sich aus einer Kombination der Versicherungs- und Finanzmärkte ergibt. Die generellen Referenzen sind [13, Abschnitt 2.3] und [8, Abschnitt 4].

Dafür sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der Wahrscheinlichkeitsraum des kombinierten Marktes mit

$$\Omega = \Omega^v \times \Omega^f$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^v \otimes \mathcal{F}^f \vee \mathcal{N}$$
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^v \otimes \mathbb{P}^f,$$

wobei $\mathcal{N}$ die σ-Algebra ist, welche von allen Teilmengen der Nullmengen aus $\mathcal{F}^v \otimes \mathcal{F}^f$ erzeugt wird. Der globale Markt ist unvollständig aufgrund der ungewissen Lebensdauer der Versicherungsnehmer. Somit gibt es mehrere äquivalente Martingalmaße zu $\mathbb{P}$, das kann zum Beispiel in [13] nachgelesen werden. Da Mortalitäten keinen Einfluss auf die Entwicklung von Finanzgütern haben, wird angenommen, dass das globale äquivalente Martingalmaß, das wir mit $\mathbf{Q}$ bezeichnen werden, gleich dem Produkt von dem finanziellen äquivalenten Martingalmaß $\mathbf{Q}^f$ und dem versicherungsmathematischen Maß $\mathbb{P}^v$ ist, also:

$$\mathbf{Q} = \mathbb{P}^v \otimes \mathbf{Q}^f \ .$$

Weiter definieren wir einen Prozess

$$H(t,T) := \frac{\beta_t}{\beta_T} \frac{L_T}{L_t}, \tag{2.2}$$

den man zur Berechnung des Preises einer Nullkuponanleihe $B(t,T)$ über die Formel:

$$\mathbb{E}\left[H(t,T)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\middle|\mathcal{F}_t\right] = B(t,T) \tag{2.3}$$

nutzen kann.

2.3 Das Optimierungsproblem

In diesem Abschnitt setzen wir uns zum Ziel, die Anlagepolitik so zu optimieren, dass der erwartete Nutzen des Überschusses zum Zeitpunkt T maximiert wird. Dabei ist der Überschuss die Differenz zwischen dem Endvermögen und der Gesamtauszahlung an die überlebenden Versicherungsnehmer.

Problem (Nutzen des Überschusses)

Im Folgenden fixieren wir einen Zeitpunkt $t \geq 0$, ein zu t gegebenes Startkapital x und n Verstorbene in $[0,t]$. Aus dem Standpunkt der Versicherung betrachtend beträgt der Wert der Verpflichtungen gegenüber den Versicherten $(n_a - N_T)K$, vgl. Abschnitt 1.2. Eine Anlagestrategie $(\pi_u)_{u\geq t}$ führt zum Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ und am Ende der Vertragslaufzeit T hat man den Überschuss $X_T^\pi - (n_a - N_T)K$. Gesucht ist eine optimale Strategie, die den erwarteten Nutzen des Überschusses maximiert, man hat also folgendes Problem:

$$\sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)\right]$$

zu lösen.

Wir wollen nun das Optimierungsproblem genauer formulieren. Dafür sei zunächst mit $(\pi_u)_{u\geq t}$ eine Portfoliostrategie bezeichnet, also ein bezüglich $(\mathcal{F}_u)_{u\geq t}$ progressiv-messbarer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$, wobei π_u der Anteil vom Gesamtvermögen ist, der zur Zeit u in die Aktie investiert wird. Der Vermögensanteil für die Investition in das Geldmarktkonto ist dann $1-\pi_u$. Wegen der Annahme der Selbstfinanzierung kann der Vermögensprozess durch die Portfoliostrategie $(\pi_u)_{u\geq t}$, eindeutig bestimmt werden. Um die Abhängigkeit des Prozesses von der Strategie π zu betonen, wird dieser mit $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ bezeichnet. Der Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ erfüllt unter Berücksichtigung der Selbstfinanzierungsbedingung somit folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} dX_u^\pi &= \pi_u X_u^\pi \frac{dS_u}{S_u} + (1-\pi_u) X_u^\pi \frac{d\beta_u}{\beta_u} \\ &= \pi_u X_u^\pi(\mu_u du + \sigma_u dW_u^{\mathbb{P}^f}) + (1-\pi_u) X_u^\pi r_u du \\ &= (r_u + \pi_u(\mu_u - r_u)) X_u^\pi du + \pi_u \sigma_u X_u^\pi dW_u^{\mathbb{P}^f} \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Zur Beschreibung des Optimierungsproblems als stochastisches Kontrollproblem: Für jeden Zeitpunkt $t \geq 0$, vorhandenes Kapital x und n Verstorbene definiere $\mathbb{P}^{t,x,n}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit folgenden Eigenschaften:

1. $(X_u^\pi)_{u \geq t}$ mit Anfangsbedingung $X_t^\pi = x$ löst bezüglich $\mathbb{P}^{t,x,n}$ die stochastische Differentialgleichung (2.4) für alle Strategien π

2. der Zählprozess der Todesfälle N aus dem ersten Kapitel ist bezüglich der Familie $(\mathbb{P}^{t,x,n})_{\substack{t \geq 0, x > 0, \\ n \in \{0,\dots,n_a\}}}$ ein Markov-Prozess mit $N_t = n$,

d.h. $\mathbb{P}^{t,x,n}(.) = \mathbb{P}(.|X_t^\pi = x, N_t = n)$.

Es gibt verschiedene Methoden der Portfoliooptimierung. Wir schauen uns zuerst den Martingalansatz an.

2.4 Das statische Optimierungsproblem

In Analogie zur Martingalmethode betrachten wir in diesem Abschnitt das statische Optimierungsproblem. Dieses lässt sich wie folgt formulieren: Für beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$, das zu dieser Zeit vorhandene Kapital x und die Anzahl der zu t beobachteten Sterbefälle n ist die Wertfunktion gegeben durch:

$$V(t, x, n) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n} \left[U(X_T - (n_a - N_T)K) \right], \tag{2.5}$$

wobei die Maximierung über alle nichtnegativen Endvermögen erfolgt mit der Eigenschaft, dass die Erwartung des abdiskontierten Endvermögens nicht größer als das zu t aktuelle Kapital x ist, also:

$$\mathcal{A}_t(x) = \left\{ X_T \middle| \, X_T \geq 0, \, \mathbb{E}^{t,x,n} \left[H(t,T) X_T \right] \leq x \right\} \tag{2.6}$$

und U eine wie im Unterabschnitt 1.4.1 definierte Nutzenfunktion ist. Insbesondere bezeichnet man die Einschränkung

$$\mathbb{E}^{t,x,n} \left[H(t,T) X_T \right] \leq x$$

als **Budgetrestriktion**, d.h. aus dem Kapital x können wir X_T finanzieren. Wir bemerken, dass wegen der Budgetrestriktion $\mathbb{E}^{t,x,n} [H(t,T)X_T] \leq x$ das Kapital X_T von t und x abhängt.

Die Lösung des statischen Optimierungsproblems (2.5) mit Nebenbedingung (2.6) ist das optimale Endvermögen, welches durch einen Lagrangeansatz bestimmt werden kann. Aufgrund der Unvollständigkeit des kombinierten Marktes kann das angestrebte Zielvermögen in der Regel durch keine Portfoliostrategie perfekt repliziert werden, da Mortalitäten nicht hedgebar sind. Ist das optimal zu erreichende Endvermögen unabhängig von der Anzahl der Überlebenden, dann ist es wegen der Vollständigkeit des Finanzmarktes erreichbar und es kann eine optimale Portfoliostrategie konstruiert werden, die dieses repliziert. Für den Fall, dass das optimale Endvermögen unerreichbar ist, ist die Martingalmethode leider nur für die Berechnung des angestrebten Zielvermögens und der expliziten Darstellung der Wertfunktion V gut und führt nicht zum Ziel.

Bemerkung 2.4.1. Die Wertfunktion V ist in x strikt konkav. Dies folgt aus der strikten Konkavität der Nutzenfunktion. Seien nämlich $\lambda \in (0,1)$, $\hat{X}_T \in \mathcal{A}_t(x_1)$ und $\check{X}_T \in \mathcal{A}_t(x_2)$. Dann ist

$$\lambda \hat{X}_T + (1-\lambda)\check{X}_T$$

ein Element der Menge $\mathcal{A}_t(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ und es gilt wegen der strikten Konkavität der Nutzenfunktion die Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\lambda U(\hat{X}_T - (n_a - N_T)K) + (1-\lambda)U(\check{X}_T - (n_a - N_T)K) \\
&< U(\lambda \hat{X}_T + (1-\lambda)\check{X}_T - (n_a - N_T)K) \ .
\end{aligned}$$

Wertet man weiter den bedingten Erwartungswert und $\sup\limits_{\substack{\hat{X}_T \in \mathcal{A}_t(x_1) \\ \check{X}_T \in \mathcal{A}_t(x_2)}}$ aus, so erhält man:

$$\lambda V(t, x_1, n) + (1-\lambda)V(t, x_2, n) < V(t, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, n) \ .$$

2.4.1 Lösung des statischen Optimierungsproblems

In diesem Abschnitt geht es um die Bestimmung des optimal zu erreichenden Endvermögens, das wir mit X_T^{opt} bezeichnen werden, als Lösung des statischen Optimierungsproblems (2.5) mit Nebenbedingung (2.6). Für die Berechnung von diesem wird der im Abschnitt 1.4.2 erläuterte Lagrangeansatz benutzt. Wir orientieren uns hauptsächlich an Karatzas und Shreve in [11] und Cox und Huang in [5]. Bei den Autoren wird diese Technik für vollständige Märkte ausführlich behandelt.

Es sei $\lambda_t \in \mathbb{R}^+$ ein Lagrange-Multiplikator für die Budgetrestriktion. Wir können unser statisches Optimierungsproblem mit Nebenbedingung mittels dessen auf ein Problem ohne Nebenbedingung reduzieren. Dafür betrachten wir die Lagrange-Funktion, gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(t, x, n, X_T, \lambda_t) \\
&= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K)\right] + \lambda_t \left(x - \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)X_T\right]\right) \ .
\end{aligned}$$

Sei U^* dual zur Nutzenfunktion U, dann ergibt sich für diese Funktion:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(t, x, n, X_T, \lambda_t) \\
&= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K)\right] + \lambda_t \left(x - \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)X_T\right]\right) \\
&= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K) - \lambda_t H(t,T)X_T\right] + \lambda_t x \\
&= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K) - \lambda_t H(t,T)(X_T - (n_a - N_T)K)\right] \\
&\qquad\qquad - \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\lambda_t H(t,T)(n_a - N_T)K\right] + \lambda_t x \\
&\le \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U^*(\lambda_t H(t,T))\right] - \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\lambda_t H(t,T)(n_a - N_T)K\right] + \lambda_t x,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der konvex Konjugierten von U benutzt haben. Wegen $\lambda_t H(t,T) > 0$ können wir den Satz 1.4.4 Teil (1) anwenden. Somit wird im letzten Schritt aus der Ungleichung nur dann eine Gleichheit, d.h. die Lagrange-Funktion wird bezüglich X_T maximiert, wenn

$$X_T - (n_a - N_T)K = I(\lambda_t H(t,T))$$

gilt. Für die Nullstelle der partiellen Ableitung von $\mathcal{L}(t, x, n, X_T, \lambda_t)$ nach λ_t erhalten wir weiter:

$$x = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)X_T\right] \ . \tag{2.7}$$

Das Einsetzen des erhaltenen Ausdrucks für X_T in die Gleichung (2.7) liefert schließlich für den Multiplikator λ_t:

$$x = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)(I(\lambda_t H(t,T)) + (n_a - N_T)K)\right] \ .$$

Wegen der Unabhängigkeit zwischen der Mortalität und dem Finanzmarkt gilt:

$$\mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)(n_a - N_T)K\right] = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)\right]\mathbb{E}^{t,x,n}\left[(n_a - N_T)K\right]$$

und wir können die beiden oben stehenden Erwartungswerte berechnen. Für den ersten Erwartungswert folgern wir:

$$\mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)\right] = \mathbb{E}\left[H(t,T)\right] = \mathbb{E}\left[H(t,T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \overset{(2.3)}{=} e^{-\int_t^T r_s ds} \ .$$

Dabei haben wir zum einen benutzt, dass $H(t,T)$ nicht von der Anzahl der Sterbefälle und dem Anfangskapital x abhängt und zum anderen, dass $H(t,T)$ aufgrund der Deterministik der Zinsrate r und des Marktrisikos θ auch unabhängig von $\mathcal{F}_t$ ist. Aus dem oben genannten Grund werden die Bedingungen $N_t = n$ und $X_t^\pi = x$ bei den Erwartungswerten von $H(t,T)$ im weiteren Verlauf dieses Kapitels einfach weggelassen. Für den zweiten Erwartungswert ergibt sich mittels der Markoveigenschaft des Prozesses N nach (1.4):

$$\mathbb{E}^{t,x,n}\left[(n_a - N_T)K\right] = K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t} \ .$$

Der gewonnene Ausdruck für den Multiplikator lässt sich somit wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} x &= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)I(\lambda_t H(t,T))\right] + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,T)(n_a - N_T)K\right] \\ &= \mathbb{E}\left[H(t,T)I(\lambda_t H(t,T))\right] + e^{-\int_t^T r_s ds}K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t} \end{aligned}$$

und es gilt:

$$x - e^{-\int_t^T r_s ds}K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t} = \mathbb{E}\left[H(t,T)I(\lambda_t H(t,T))\right] =: \mathcal{X}(\lambda_t) \ .$$

Vorausgesetzt, dass die Funktion $\mathcal{X}$ eine Inverse $\mathcal{Y}$ besitzt, kann der optimale Lagrange-Multiplikator durch

$$\mathcal{Y}(x - e^{-\int_t^T r_s ds}K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}) = \lambda_t$$

eindeutig berechnet werden, vgl. [11, Abschnitt 3.6]. Daher erhalten wir für das optimale Endvermögen folgendes Resultat:

$$X_T^{opt} = I(\lambda_t^{opt} H(t,T)) + (n_a - N_T)K,$$

wobei der optimale Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt ist durch

$$x = \mathbb{E}\left[H(t,T)I(\lambda_t^{opt} H(t,T))\right] + e^{-\int_t^T r_s ds}K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t} \ . \tag{2.8}$$

Insbesondere lässt sich dann die Wertfunktion zu einer Funktion in Abhängigkeit von dem optimalen Lagrange-Multiplikator umschreiben :

$$V(t,x,n) = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(I(\lambda_t^{opt} H(t,T)))\right] = \mathbb{E}\left[U(I(\lambda_t^{opt} H(t,T)))\right] \ . \tag{2.9}$$

Da das optimale Endvermögen von der Anzahl der Überlebenden zur Zeit T abhängt, kann es nicht durch eine Investmentstrategie perfekt repliziert werden. Daher kommt man mit dem Martingalansatz nicht mehr weiter und es muss eine neue Methode gefunden werden. Wir entscheiden uns für den sogenannten HJB-Ansatz. Dieser basiert auf der stochastischen Kontrolltheorie und ist eine weitere bekannte Methode zur Lösung von Portfolioproblemen.

2.5 HJB-Ansatz

In diesem Abschnitt werden wir den HJB-Ansatz zur Lösung des Portfolioproblems betrachten. Dabei werden wir feststellen, dass die optimale Investmentstrategie für bestimmte Klassen von Nutzenfunktionen nicht ermittelt werden kann. Jedoch wird es uns möglich sein, eine vernünftige Portfoliostrategie zu bestimmen, welche dann als suboptimal angesehen wird.

2.5.1 Allgemeine Beschreibung

Zum besseren Verständnis beginnen wir zunächst mit einer kurzen Einführung in die Stochastische Kontrolltheorie und Portfoliooptimierung ohne Mortalitätsrisiken. Die generellen Referenzen sind dabei [3] und [6].

Hierfür betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer von einem d-dimensionalen Wiener Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ erzeugten Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Für eine Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ heißt ein progressiv-messbarer Prozess $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ mit Werten in U eine **Kontrollstrategie** und für jede Kontrollstrategie u ist der n-dimensionale **kontrollierte Prozess** $(X_t)_{t\in[0,T]}$ gegeben durch

$$dX_t^u = b(t, X_t^u, u_t)dt + \sigma(t, X_t^u, u_t)dW_t,\ X_0^u = x \in \mathbb{R}^n \qquad (*)$$

wobei

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

zwei messbare Funktionen sind. Eine Kontrollstrategie u heißt **zulässig**, falls die oben stehende stochastische Differentialgleichung eindeutig lösbar ist. Man unterscheidet dabei folgende Spezialfälle:

- **Open-loop-Kontrollstrategie**: $u_t(\omega) = f(t)$ ist eine deterministische Funktion in t
- **Feedback-Kontrollstrategie**: u ist adaptiert bezüglich der natürlichen Filtration des gesteuerten Prozesses, d.h. u_t ist $\sigma(X_s^u : s \leq t)$-messbar
- **Markovstrategie**: u ist eine Feedback-Kontrollstrategie, für welche eine messbare Funktion $\alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to U$ existiert, sodass $u_t = \alpha(t, X_t^u)$ für alle $0 \leq t \leq T$ gilt

Die Menge aller zulässigen Kontrollstrategien mit Startwert (t,x) bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(t,x)$.

Nun können wir das stochastische Kontrollproblem formulieren. Das Ziel besteht darin, für beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$ mit zugehöriger Anfangsbedingung $X_t^u = x$ folgende Funktion

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T U_1(s, X_s^u, u_s)ds + U_2(X_T^u)\right]$$

über alle zulässigen Kontrollstrategien $u \in \mathcal{U}(t,x)$ zu maximieren. Dabei sind U_1 und U_2 zwei Nutzenfunktionen und die Schreibweise $\mathbb{E}^{t,x}[.]$ ist die Abkürzung von $\mathbb{E}[.|X_t^u = x]$. Die Wertfunktion unseres Problems ist also gegeben durch

$$W(t,x) = \sup_{u\in\mathcal{U}(t,x)} \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T U_1(s, X_s^u, u_s)ds + U_2(X_T^u)\right] .$$

Für die optimale Kontrollstrategie $(u_s^*)_{s\geq t}$, sofern diese existiert, und den zugehörigen optimalen kontrollierten Prozess $(X_s^{u^*})_{s\geq t}$ gilt für die Wertfunktion insbesondere

$$W(t,x) = J(t,x,u^*) = \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T U_1(s, X_s^{u^*}, u_s^*)ds + U_2(X_T^{u^*})\right] .$$

Die Kontrollstrategie bei der Portfoliooptimierung entspricht der Investmentstrategie und/oder dem Konsum. Wird zum Beispiel vom Investor kein Konsum des Vermögens während der Handelsperiode getätigt, dann verschwindet das Integral und wir erhalten folgende Wertfunktion:

$$W(t,x) = \sup_{u\in\mathcal{U}(t,x)} \mathbb{E}^{t,x}\left[U_2(X_T^u)\right] .$$

Der Ansatz der stochastischen Kontrolltheorie zur Lösung des zeitstetigen Portfolioproblems basiert auf dem sogenannten **Bellman-Prinzip**. Die grundlegende Idee der dynamischen Programmierung besteht darin, das Optimierungsproblem nicht auf dem gesamten Zeitintervall zu lösen, sondern es als Probleme auf Teilintervallen zu betrachten:

> „An optimal policy has the property that, whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.“
>
> Richard Bellman, 1957

Für jedes $\Delta t \in [0, T-t]$ gilt nach dem Prinzip von Bellman:

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \sup_{u\in\mathcal{U}(t,x)} \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t} U_1(s, X_s^u, u_s)ds + W(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^u)\right] \\ &= \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t} U_1(s, X_s^{u^*}, u_s^*)ds + W(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{u^*})\right] . \end{aligned}$$

Wir beweisen das Prinzip für den Spezialfall, dass nur zulässige Markovstrategien u betrachtet werden, sodass die kontrollierten Prozesse X^u in $(*)$ Itô-Diffusionen mit Erzeuger

$$A^u f(t,x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right)^\top b(t,x,u) + \frac{1}{2}Spur\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right)\sigma(t,x,u)\right)$$

sind und somit die starke Markoveigenschaft erfüllen. Da beim optimalen Investieren zu einem beliebigen Zeitpunkt nur das zu dieser Zeit vorhandene Vermögen wichtig ist und es keine Rolle spielt, wie dieses erreicht wurde, kann man mit einer Markovstrategie mindestens genauso gut abschneiden wie mit jeder anderen Kontrollstrategie. Ein allgemeiner Beweis ist sehr kompliziert und kann zum Beispiel bei [21, Kapitel 2] nachgeschlagen werden.

Zunächst wird die Existenz einer zulässigen optimalen Markovstrategie vorausgesetzt. Bei optimaler Kontrollstrategie wird zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ der Zustand $X_{t+\Delta t}^{u^*}$ und somit auch der Nutzen $\int_t^{t+\Delta t} U_1(s, X_s^{u^*}, u_s^*)ds$ erreicht. Unsere Aufgabe ist es, eine optimale Kontrollstrategie nach $t+\Delta t$ zu finden, um den erwarteten Gesamtnutzen zu optimieren. Dabei spielt es für die zukünftige optimale Kontrollstrategie aufgrund der starken Markoveigenschaft des kontrollierten Prozesses keine Rolle, wie der Zustand $X^{u^*}_{t+\Delta t}$ erreicht wurde. Somit kann das Optimierungsproblem auf dem Zeitintervall $[t+\Delta t, T]$ als das Problem auf dem Zeitintervall $[t,T]$ nur mit einer neuen Ausgangsposition $(t+\Delta t, X^{u^*}_{t+\Delta t})$ aufgefasst werden. Aufgrund der Markoveigenschaft zusammen mit der Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswertes gilt nämlich:

$$
\begin{aligned}
W(t,x) \geq J(t,x,u') &= \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^T U_1(s, X_s^{u'}, u'_s)ds + U_2(X_T^{u'})\right] \\
&= \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t} U_1(s, X_s^{u'}, u'_s)ds\right] + \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_{t+\Delta t}^T U_1(s, X_s^{u'}, u'_s)ds + U_2(X_T^{u'})\right] \\
&= \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t} U_1(s, X_s^{u'}, u'_s)ds\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}^{t,x}\left[\mathbb{E}^{t+\Delta t, X^{u'}_{t+\Delta t}}\left[\int_{t+\Delta t}^T U_1(s, X_s^{u'}, u'_s)ds + U_2(X_T^{u'})\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t} U_1(s, X_s^{u'}, u'_s)ds + J(t+\Delta t, X^{u'}_{t+\Delta t})\right]
\end{aligned}
$$

Stimmt u' auf ganz $[t,T]$ mit u^* überein, so erhalten wir in der obigen Ungleichung Gleichheit. Mit anderen Worten handelt man auf dem Gesamtzeitintervall $[t,T]$ optimal, indem man auf dem kleineren Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ optimal handelt und dann zur Zeit $t+\Delta t$ mit dem bis zu diesem Zeitpunkt erreichten Vermögen weiterarbeitet. Es ist damit ausreichend, die optimale Strategie auf den Teilintervallen zu kennen. Dabei je kleiner der Zeitschritt $\Delta t > 0$ wird, desto weniger weit müssen wir in die Zukunft schauen, um die optimale Investmentstrategie zu konstruieren. So erhält man für $\Delta t \downarrow 0$ die optimale Aufteilung des Gesamtvermögens für die aktuelle Zeit t.

Die Idee für die Lösung des Optimierungsproblems besteht nun darin, die Länge des Teilintervalls Δt gegen die Null laufen zu lassen, um auf diese Weise eine Differentialgleichung, die sogenannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (oder kurz HJB-Gleichung), für die Wertfunktion W zu erstellen und mit Hilfe von dieser die optimale Strategie zu ermitteln, vgl. [3, Abschnitt 3.3.2]. Diese hat folgende Gestalt:

$$0 = \sup_u \{U_1(t,x,u) + \frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + A^u W(t,x)\},\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

mit Randbedingung $W(T,x) = U_2(x)$ und ist ein notwendiges Kriterium für die Wertfunktion des stochastischen Kontrollproblems. Für das hinreichende Kriterium müssen weitere Voraussetzungen erfüllt werden. Man nutzt das sogenannte Verifikationstheorem, um zu zeigen, dass eine Lösung der HJB-Gleichung tatsächlich der Wertfunktion W entspricht und ein Maximierer von $u \to U_1(t,x,u) + A^u W(t,x)$ eine optimale Kontrollstrategie definiert. Die genaue Vorgehensweise bei der Herleitung der HJB-Gleichung und der Verifikationsansatz können zum Beispiel in [3, Abschnitt 3.3] nachgeschlagen werden.

2.5.2 HJB-Ansatz im Portfoliooptimierungsproblem

Die allgemeinen Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt sind auf unser zeitstetige Portfolioproblem noch nicht anwendbar. Wir müssen diese durch Hinzunahme von Mortalitätsrisiken modifizieren.

Wir wollen nun das zeitstetige Portfolioproblem in unserem kombinierten Markt formulieren. Dafür fixieren wir zunächst einen beliebigen festen Zeitpunkt $t \geq 0$, das zu dieser Zeit vorhandene Vermögen $X_t^\pi = x$ und die Anzahl der zu t beobachteten Sterbefälle $N_t = n$. Im Gegensatz zum üblichen stochastischen Portfolioproblem betrachten wir hier ein Kontrollproblem, bei welchem der Endnutzen auch vom Zustand des Sprungprozesses abhängt. Unser Ziel ist es

$$\mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)\right]$$

bezüglich aller zulässigen Investmentstrategien π zu maximieren. Der zugehörige Vermögensprozess genügt dabei der stochastischen Differentialgleichung (2.4) und die Schreibweise $\mathbb{E}^{t,x,n}[.]$ bezeichnet den bedingten Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$ gegeben, dass $X_t^\pi = x$ und $N_t = n$ sind, also

$$\mathbb{E}^{t,x,n}[.] := \mathbb{E}\left[.\middle| X_t^\pi = x, N_t = n\right] .$$

Die Wertfunktion unseres Kontrollproblems ist damit gegeben durch

$$v(t,x,n) = \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)\right] . \tag{2.10}$$

Da der Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ für alle zulässigen Markovschen Strategien und der Zählprozess N Markov-Prozesse sind, können wir das Prinzip von Bellman auf die oben definierte Wertfunktion anwenden.

Mit $(\pi_u^*)_{u\geq t}$ sei die optimale Portfoliostrategie (sofern sie existiert) und mit $(X_u^{\pi^*})_{u\geq t}$ sei der zugehörige Vermögensprozess bezeichnet. Nach dem Bellman-Prinzip gilt dann für alle $t + \Delta t \in [t, T]$:

$$\begin{aligned} v(t,x,n) &= \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\left[v(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^\pi, N_{t+\Delta t})\right] \\ &= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[v(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{\pi^*}, N_{t+\Delta t})\right] . \end{aligned}$$

Weiter ist der Prozess N aus dem ersten Kapitel ein Sprungprozess nur mit Sprüngen der Höhe 1, d.h. $\Delta N_t = N_t - N_{t-} \in \{0, 1\}$. Für eine messbare Funktion f gilt für diesen pfadweise:

$$\begin{aligned} f(N_t) &= f(0) + \sum_{0<s\leq t} (f(N_s) - f(N_{s-})) \\ &= f(0) + \sum_{0<s\leq t} (f(1+N_{s-}) - f(N_{s-}))\Delta N_s \\ &= f(0) + \int_{(0,t]} (f(1+N_{s-}) - f(N_{s-}))dN_s, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit sich aus der Tatsache ergibt, dass $\Delta N_s = 1$ im Falle eines Sprunges zum Zeitpunkt s und sonst $\Delta N_s = 0$ ist, und die dritte Gleichheit nach der Definition des Integrals folgt. Da der Prozess N mit seiner Intensität λ und dem kompensierten Prozess M nach (1.3) im folgenden Zusammenhang $dN_s = dM_s + \lambda_s ds$

steht, ergibt sich für den Erwartungswert von $f(N_t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(N_t)] &= f(0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t (f(1+N_{s-}) - f(N_{s-}))dN_s\right] \\
&= f(0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t (f(1+N_{s-}) - f(N_{s-}))(dM_s + \lambda_s ds)\right] \\
&= f(0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t (f(1+N_{s-}) - f(N_{s-}))\lambda_s ds\right] \\
&= f(0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t (f(N_s+1) - f(N_s))\lambda_s ds\right] .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vorletzten Gleichheit benutzt, dass der Erwartungswert des Integrals $\int_0^t (f(1+N_{s-}) - f(N_{s-}))dM_s$ aufgrund seiner Martingaleigenschaft verschwindet und das letzte Gleichheitszeichen wird damit begründet, dass der Wert des Lebesgue-Integrals nicht ändert, wenn der Integrand (durch den Austausch von N_{s-} gegen N_s) an abzählbar vielen Punkten geändert wird.

Wie es schon erwähnt wurde, reicht es, unser Portfolioproblem auf einen Teilintervall $[t, t+\Delta t]$ zu reduzieren und auf diesem die optimale Strategie zu bestimmen. In dem Fall, dass die Wertfunktion v bezüglich der Zeit und des Raumes genügend glatt ist, können wir die Herleitung der HJB-Gleichung für unser Optimierungsproblem erläutern. Wendet man nun die Itô-Formel auf $v(t+\Delta t, X^\pi_{t+\Delta t}, N_{t+\Delta t})$, so bekommt man folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
&v(t+\Delta t, X^\pi_{t+\Delta t}, N_{t+\Delta t}) \\
&= v(t,x,n) + \int_t^{t+\Delta t} v_t(s, X^\pi_s, N_s)ds + \int_t^{t+\Delta t} (r_s + \pi_s(\mu_s - r_s))\, X^\pi_s v_x(s, X^\pi_s, N_s)ds \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} \pi_s\sigma_s X^\pi_s v_x(s, X^\pi_s, N_s)dW^{\mathbb{P}^f}_s + \frac{1}{2}\int_t^{t+\Delta t} \pi_s^2\sigma_s^2(X^\pi_s)^2 v_{xx}(s, X^\pi_s, N_s)ds \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} (v(s, X^\pi_s, 1+N_{s-}) - v(s, X^\pi_s, N_{s-}))dN_s .
\end{aligned}$$

Hierfür bezeichnen wir mit $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ und $v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ die partiellen Ableitungen der Wertfunktion bezüglich der Zeit und des Vermögens. Da das stochastische Integral $\int_t^{t+\Delta t} \pi_s\sigma_s X^\pi_s v_x(s, X^\pi_s, N_s)dW^{\mathbb{P}^f}_s$ unter der zusätzlichen Forderung

$$\mathbb{E}\left[\left\langle \int_t^{t+\Delta t} \pi_s\sigma_s X^\pi_s v_x(s, X^\pi_s, N_s)dW^{\mathbb{P}^f}_s \right\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t} \pi_s^2\sigma_s^2(X^\pi_s)^2 v_x^2(s, X^\pi_s, N_s)ds\right] < \infty$$

ein Martingal ist und somit Erwartungswert 0 besitzt, folgern wir für den bedingten Erwartungswert von $v(t+\Delta t, X^\pi_{t+\Delta t}, N_{t+\Delta t})$ mit dem gewonnenen Ergebnis für den Sprungprozess N und der Definition seiner Intensität weiter:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x,n}\left[v(t+\Delta t, X^\pi_{t+\Delta t}, N_{t+\Delta t})\right] \\
&= v(t,x,n) + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int_t^{t+\Delta t} (v(s, X^\pi_s, N_s+1) - v(s, X^\pi_s, N_s))(n_a - N_s)\mu(a+s)ds\right] \\
&\quad + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int_t^{t+\Delta t} (v_t(s, X^\pi_s, N_s) + (r_s + \pi_s(\mu_s - r_s))X^\pi_s v_x(s, X^\pi_s, N_s))\, ds\right] \\
&\quad + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2 (X^\pi_s)^2 v_{xx}(s, X^\pi_s, N_s)ds\right] .
\end{aligned}$$

Setzt man das erhaltene Resultat als Nächstes in die Gleichung aus dem Bellman-Prinzip ein und subtrahiert man $v(t,x,n)$ auf beiden Seiten, so bekommt man eine neue Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int_t^{t+\Delta t} (v(s, X^\pi_s, N_s+1) - v(s, X^\pi_s, N_s))(n_a - N_s)\mu(a+s)ds\right] \\
&\quad + \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\Bigg[\int_t^{t+\Delta t}\Bigg(v_t(s, X^\pi_s, N_s) + (r_s + \pi_s(\mu_s - r_s))X^\pi_s v_x(s, X^\pi_s, N_s) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\pi_s^2\sigma_s^2 (X^\pi_s)^2 v_{xx}(s, X^\pi_s, N_s)\Bigg)ds\Bigg] .
\end{aligned}$$

Teilt man die beiden Seiten der neu gewonnenen Gleichung durch die Länge des Integrationsintervalls Δt und bildet man schließlich den Grenzwert für $\Delta t \downarrow 0$, so erhält man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz zusammen mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
0 &= \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\Bigg[v_t(t, X^\pi_t, N_t) + (r_t + \pi_t(\mu_t - r_t))X^\pi_t v_x(t, X^\pi_t, N_t) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\pi_t^2\sigma_t^2 (X^\pi_t)^2 v_{xx}(t, X^\pi_t, N_t)\Bigg] \\
&\quad + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[(v(t, X^\pi_t, N_t+1) - v(t, X^\pi_t, N_t))(n_a - N_t)\mu(a+t)\right] .
\end{aligned}$$

Da aber zum Zeitpunkt t sowohl der Wert von X^π_t als auch der von π_t bekannt ist, kann der Erwartungswertoperator in der letzten Gleichung weggelassen werden. Mit dem von π abhängigen Erzeuger

$$A^\pi v(t,x,n) = (r_t + \pi_t(\mu_t - r_t))x v_x(t,x,n) + \frac{1}{2}\pi_t^2\sigma_t^2 x^2 v_{xx}(t,x,n)$$

erhalten wir schließlich eine Differentialgleichung für v:

$$0 = v_t(t,x,n) + \sup_\pi A^\pi v(t,x,n) + (v(t,x,n+1) - v(t,x,n))(n_a - n)\mu(a+t) \ . \quad (2.11)$$

Dies ist die HJB-Gleichung mit folgender Randbedingung:

$$v(T,x,n) = U(x-(n_a-n)K)\ .$$

Mit Hilfe von dieser können wir die allgemeine Formel der optimalen Portfoliostrategie in Abhängigkeit von den partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Wertfunktion v bezüglich des Vermögens herleiten.

Satz 2.5.1 (Verifikationstheorem)**.**

Sei $\bar{v}(\cdot,\cdot,n) \in C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R}) \cap C([0,T]\times\mathbb{R})$ mit $|\bar{v}(t,x,n)| \leq C(1+|x^2|)$, $C>0$ eine Lösung der HJB-Gleichung

$$0 = \bar{v}_t(t,x,n) + \sup_{\pi} A^{\pi}\bar{v}(t,x,n) + (\bar{v}(t,x,n+1) - \bar{v}(t,x,n))(n_a-n)\mu(a+t)$$

für alle $(t,x,n) \in [0,T)\times\mathbb{R}\times\{0,\dots,n_a\}$ und erfülle die Funktion $\bar{v}$ die Randbedingung $\bar{v}(T,x,n) = U(x-(n_a-n)K)$ für alle x,n. Dann gilt:

(i) $\bar{v}(t,x,n) \geq v(t,x,n)$ für alle $(t,x,n) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\{0,\dots,n_a\}$

(ii) Existiert für jedes (t,x,n) ein $\alpha(t,x,n)$ mit

$$\alpha(t,x,n) \in \operatorname*{argmax}_{\pi} \Big\{ \bar{v}_t(t,x,n) + A^{\pi}\bar{v}(t,x,n) + (\bar{v}(t,x,n+1) - \bar{v}(t,x,n))(n_a-n)\mu(a+t) \Big\},$$

sodass $\pi^* = (\pi_t^*)_{t\in[0,T]}$, $\pi_t^* = \alpha(t, X_t^{\pi^*}, N_t)$ eine zulässige Strategie definiert, wobei $X_t^{\pi^*}$ die Lösung der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung (2.4) unter der Kontrollstrategie π_s^* auf $[0,t)$ ist, d.h.

$$dX_t^{\pi^*} = (r_t + \pi_t^*(\mu_t - r_t))X_t^{\pi^*}dt + \pi_t^*\sigma_t X_t^{\pi^*} dW_t^{\mathbb{P}^f}\ .$$

Dann gilt $\bar{v} = v$ und π^* ist eine optimale Strategie.

Beweis. (i) Fixiere (t,x,n). Für eine beliebige Strategie π definieren wir zunächst die Stoppzeit:

$$\tau_m := \inf\{s \geq t : |X_s^{\pi} - x| \geq m\} \wedge T\ \forall m \in \mathbb{N}\ .$$

Mit der Itô-Formel gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_x(\tau_m, X_{\tau_m}^{\pi}, N_{\tau_m}) \\
&= \bar{v}(t,x,n) + \int_t^{\tau_m} (\bar{v}_t(s, X_s^{\pi}, N_s) + A^{\pi}\bar{v}(s, X_s^{\pi}, N_s))\, ds \\
&+ \int_t^{\tau_m} \sigma_s \pi_s X_s^{\pi} \bar{v}_x(s, X_s^{\pi}, N_s) dW_s^{\mathbb{P}^f} + \int_t^{\tau_m} (\bar{v}(s, X_s^{\pi}, 1+N_{s-}) - \bar{v}(s, X_s^{\pi}, N_s)) dN_s\ .
\end{aligned}$$

Da X^{π} auf dem Intervall $[t,\tau_m]$ beschränkt ist, ist auch $\bar{v}_x$ als stetige Funktion auf diesem beschränkt und wir folgern

$$\mathbb{E}\left[\Big\langle \int_t^{\tau_m} \pi_s \sigma_s X_s^{\pi} \bar{v}_x(s, X_s^{\pi}, N_s) dW_s^{\mathbb{P}^f} \Big\rangle \right] < \infty\ .$$

Das Integral $\int\limits_t^{\tau_m} \pi_s \sigma_s X_s^\pi \bar{v}_x(s, X_s^\pi, N_s) dW_s^{\mathbb{P}^f}$ hat also als Martingal den Erwartungswert Null. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x,n}\left[\bar{v}_x(\tau_m, X_{\tau_m}^\pi, N_{\tau_m})\right] \\
&= \bar{v}(t,x,n) + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int\limits_t^{\tau_m} (\bar{v}_t(s, X_s^\pi, N_s) + A^\pi \bar{v}(s, X_s^\pi, N_s)) ds\right] \\
&\quad + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int\limits_t^{\tau_m} (\bar{v}(s, X_s^\pi, N_s + 1) - \bar{v}(s, X_s^\pi, N_s))(n_a - N_s)\mu(a+s) ds\right] .
\end{aligned}
$$

Da $\bar{v}$ die HJB-Gleichung erfüllt, gilt für alle $s \geq t$:

$$
\begin{aligned}
0 \geq\ & \bar{v}_t(s, X_s^\pi, N_s) + A^\pi \bar{v}(s, X_s^\pi, N_s) \\
& + (\bar{v}(s, X_s^\pi, N_s + 1) - \bar{v}(s, X_s^\pi, N_s))(n_a - N_s)\mu(a+s) .
\end{aligned}
$$

Dies impliziert:

$$\mathbb{E}^{t,x,n}\left[\bar{v}_x(\tau_m, X_{\tau_m}^\pi, N_{\tau_m})\right] \leq \bar{v}(t,x,n) .$$

Wegen $|\bar{v}_x(\tau_m, X_{\tau_m}^\pi, N_{\tau_m})| \leq C(1 + |(X_{\tau_m}^\pi)^2|) \leq C(1 + \sup\limits_{s\in[t,T]} |(X_s^\pi)^2|)$ erhalten wir mit dominierter Konvergenz weiter für $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\bar{v}_x(\tau_m, X_{\tau_m}^\pi, N_{\tau_m})\right] = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\bar{v}_x(T, X_T^\pi, N_T)\right] .$$

Mit $\bar{v}_x(T, X_T^\pi, N_T) = U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)$ folgt somit die erste Behauptung:

$$v(t,x,n) = \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)\right] \leq \bar{v}(t,x,n) .$$

Die Behauptung (i) stimmt sogar auch dann, wenn $\bar{v}$ die HJB-Ungleichung

$$0 \geq \bar{v}_t(t,x,n) + \sup_\pi A^\pi \bar{v}(t,x,n) + (\bar{v}(t,x,n+1) - \bar{v}(t,x,n))(n_a - n)\mu(a+t)$$

erfüllt.

(ii) Für die Strategie π^* herrscht in (i) überall Gleichheit, es gilt also

$$v(t,x,n) = \bar{v}(t,x,n) = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T^{\pi^*} - (n_a - N_T)K)\right]$$

und π^* definiert eine Lösung des optimalen Kontrollproblems. □

Kann man das Verifikationstheorem anwenden, um unser Portfolioproblem zu lösen, so kann man nach (ii) die optimale Strategie als Maximierer der HJB-Gleichung (2.11) berechnen, indem man den Erzeuger $A^\pi v(t,x,n)$ bezüglich π maximiert. In dem Fall wäre die optimale Portfoliostrategie $(\pi_t^*)_t$ mit dem zugehörigen Vermögensprozess $(X_t^{\pi^*})_t$ nach dem Verifikationstheorem gegeben durch:

$$\pi_t^* = -\frac{(\mu_t - r_t)}{\sigma_t^2} \frac{v_x(t, X_t^{\pi^*}, N_t)}{v_{xx}(t, X_t^{\pi^*}, N_t)} \frac{1}{X_t^{\pi^*}} = \frac{\theta_t}{\sigma_t} \frac{v_x(t, X_t^{\pi^*}, N_t)}{v_{xx}(t, X_t^{\pi^*}, N_t)} \frac{1}{X_t^{\pi^*}}, \quad t \in [0,T]$$

und für die HJB-Gleichung (2.11) gälte dann:

$$0 = v_t(t,x,n) + \left(r_t x - \frac{1}{2}\theta_t^2 \frac{v_x(t,x,n)}{v_{xx}(t,x,n)} \right) v_x(t,x,n) \\ + (v(t,x,n+1) - v(t,x,n))(n_a - n)\mu(a+t)$$

mit der Randbedingung $v(T,x,n) = U(x - (n_a - n)K)$. Wenn wir die obere Differentialgleichung lösen könnten, wären wir schon fertig. Diese ist jedoch komplizierter als die Differentialgleichung ohne Mortalitätsrisiken. Es ist allgemein nicht bekannt, wie die Wertfunktion v aussieht. Der Versuch, die optimale Investmentstrategie für konkrete Nutzenfunktionen zu ermitteln, scheitert daher daran, dass wir den expliziten Ausdruck für die Wertfunktion v und somit auch ihre partiellen Ableitungen nicht angeben können. Wir sehen also, dass die HJB-Gleichung nicht zum Ziel führt. In dieser Arbeit verfolgen wir den oben genannten Ansatz nicht weiter und versuchen stattdessen eine Funktion $\bar{v}$, welche die HJB-Ungleichung

$$0 \geq v_t(t,x,n) + \sup_{\pi} A^{\pi} v(t,x,n) + (v(t,x,n+1) - v(t,x,n))(n_a - n)\mu(a+t) \quad (2.12)$$

erfüllt, und einen Maximierer für die Ungleichung zu finden. Dieser Maximierer ist dann eine vernünftige Handelsstrategie.

2.5.3 Lösen der HJB-Ungleichung

Als Lösung der HJB-Ungleichung (2.12) kommt das statische Optimierungsproblem (2.5) mit Nebenbedingung (2.6) in Frage, denn die Wertfunktion V stimmt am Ende mit der Nutzenfunktion U überein:

$$V(T,x,n) = U(x - (n_a - n)K), \quad x \in \mathbb{R},\, n \in \{0, \dots, n_a\}$$

und es gilt für alle (t,x,n):

$$V(t,x,n) \geq v(t,x,n)\ .$$

Unsere Aufgabe ist es, zu zeigen, dass V eine Lösung der HJB-Ungleichung (2.12) ist. Dies folgt aus dem Bellman-Prinzip, dessen Gültigkeit für das statische Optimierungsproblem noch bewiesen werden muss. Dazu setzen wir voraus, dass die Wertfunktion bezüglich der Zeit und des Raumes genügend glatt ist und für eine geeignete Konstante $C > 0$ die Wachstumsbedingung:

$$|V(t,x,n)| \leq C(1 + |x^2|)$$

erfüllt. Für einen beliebigen festen Zeitpunkt $t \geq 0$, gegebenes Vermögen x und n Verstorbene in der Gruppe bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_t(x)$ die Menge aller $(\mathcal{F}_u)_{u \geq t}$-adaptierten stochastischen Prozesse $(X_u)_{u \geq t}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $u \geq t$ der abdiskontierte Preis von X_u unter den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t das Kapital x nicht übersteigt, also:

$$\mathcal{B}_t(x) = \{(X_u)_{u \geq t} |\ p_t(X_u) = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[H(t,u)X_u\right] \leq x\ \forall\ u \geq t\}\ .$$

Weiter betrachten wir das folgende dynamische Optimierungsproblem

$$\sup_{X \in \mathcal{B}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K)\right] \qquad (**)$$

Für dieses folgt aus den Definitionen der Mengen $\mathcal{A}_t(x)$ und $\mathcal{B}_t(x)$ offensichtlich:

$$\sup_{X\in\mathcal{B}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T-(n_a-N_T)K)\right] = \sup_{X_T\in\mathcal{A}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(X_T-(n_a-N_T)K)\right]$$

und das dynamische Optimierungsproblem (∗∗) stimmt somit mit dem statischen Optimierungsproblem (2.5) mit Nebenbedingung (2.6) überein. Im Unterabschnitt 2.4.1 haben wir schon das angestrebte Zielvermögen

$$X_T^{opt} = I(\lambda_t^{opt}H(t,T)) + (n_a-N_T)K$$

bestimmt, daher kann das dynamische Problem gelöst werden, indem wir den Preisprozess $(\mathbb{E}^{u,X_u^{opt},N_u}\left[H(u,T)X_T^{opt}\right])_{u\geq t}$ des optimalen Endvermögens X_T^{opt} betrachten, den wir mit $(X_u^{opt})_{u\geq t}$ bezeichnen werden, d.h. für alle $u\geq t$ gilt:

$$X_u^{opt} := \mathbb{E}\left[H(u,T)I(\lambda_t^{opt}H(t,T))|\mathcal{F}_u\right] + e^{-\int_u^T r_s ds}K(n_a-N_u)_{T-u}p_{a+u},$$

vgl. Unterabschnitt 2.4.1. Das statische Optimierungsproblem (2.5) mit Nebenbedingung (2.6) kann somit auf Probleme auf Teilintervallen zurückgeführt werden:

Lemma 2.5.2 (Bellman-Prinzip). Es sei $(X_u^{opt})_{u\geq t}\in\mathcal{B}_t(x)$ die Lösung des dynamischen Optimierungsproblems (∗∗), dann gilt für jedes Δt aus dem Intervall $[0,T-t]$:

$$V(t,x,n) = \mathbb{E}^{t,x,n}\left[V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{opt}, N_{t+\Delta t})\right] \ . \tag{2.13}$$

Beweis. Um die Richtigkeit der Gleichung (2.13) zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass das optimale Endvermögen X_T^{opt} aus dem Unterabschnitt 2.4.1 auch das optimale Endvermögen ist, wenn wir aus $t+\Delta t$ mit dem Kapital $X_{t+\Delta t}^{opt}$ und $N_{t+\Delta t}$ Verstorbenen starten.

Sei $t+\Delta t\in[t,T]$ beliebig, dann erfüllt $\bar{X}_T$ als Lösung des statischen Optimierungsproblems $V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{opt}, N_{t+\Delta t})$ nach dem Lagrangeansatz in analoger Weise folgende Gleichung:

$$\bar{X}_T = I(\bar{\lambda}_{t+\Delta t}^{opt}H(t+\Delta t,T)) + (n_a-N_T)K,$$

wobei der optimale Lagrange-Multiplikator $\bar{\lambda}_{t+\Delta t}^{opt}$ wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[H(t+\Delta t,T)I\left(\bar{\lambda}_{t+\Delta t}^{opt}H(t+\Delta t,T)\right)|\mathcal{F}_{t+\Delta t}\right] \\
&\qquad = X_{t+\Delta t}^{opt} - e^{-\int_{t+\Delta t}^T r_s ds}K(n_a-N_{t+\Delta t})_{T-(t+\Delta t)}p_{a+(t+\Delta t)} \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[H(t+\Delta t,T)I(\lambda_t^{opt}H(t,T))|\mathcal{F}_{t+\Delta t}\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[H(t+\Delta t,T)I\left([\lambda_t^{opt}H(t,t+\Delta t)]H(t+\Delta t,T)\right)|\mathcal{F}_{t+\Delta t}\right] \ .
\end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichheit wurde dabei die Definition von $X_{t+\Delta t}^{opt}$ ausgenutzt. Man sieht leicht, dass

$$\bar{\lambda}_{t+\Delta t}^{opt} = \lambda_t^{opt}H(t,t+\Delta t)$$

gelten muss, d.h. $\bar{X}_T$ stimmt mit X_T^{opt} überein. Somit ist X_T^{opt} auch die Lösung des statischen Problems $V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{opt}, N_{t+\Delta t})$ und wir folgern mit der Turmeigenschaft insbesondere:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{t,x,n}\left[V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{opt}, N_{t+\Delta t})\right] &= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\mathbb{E}\left[U(I(\lambda_t^{opt}H(t,T)))|\mathcal{F}_{t+\Delta t}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[U(I(\lambda_t^{opt}H(t,T)))\right] = V(t,x,n) \ .
\end{aligned}$$

□

Da der Prozess $(X_u^{opt})_{u\geq t} \in \mathcal{B}_t(x)$ die Wertfunktion V maximiert, gilt nach (2.13) für jeden anderen Prozess $(X_u)_{u\geq t} \in \mathcal{B}_t(x)$ mit $(X_u)_{u\geq t} \neq (X_u^{opt})_{u\geq t}$ und somit auch für jeden gesteuerten Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ mit $X_t^\pi = x$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} V(t,x,n) &= \mathbb{E}^{t,x,n}\left[V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{opt}, N_{t+\Delta t})\right] \\ &\geq \mathbb{E}^{t,x,n}\left[V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{\pi}, N_{t+\Delta t})\right] \ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Mit der Itô-Formel angewandt auf $V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^\pi, N_{t+\Delta t})$ ergibt sich für jede zulässige Anlagestrategie π und jedes $\Delta t \in [0, T-t]$ weiter:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{t,x,n}\left[V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}^{\pi}, N_{t+\Delta t})\right] \\ &= V(t,x,n) + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int_t^{t+\Delta t} (V_t(s, X_s^\pi, N_s) + A^\pi V(s, X_s^\pi, N_s))ds\right] \\ &\quad + \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\int_t^{t+\Delta_t} (V(s, X_s^\pi, N_s+1) - V(s, X_s^\pi, N_s))(n_a - N_s)\mu(a+s)ds\right], \end{aligned}$$

wobei wir mit $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$, $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ die partiellen Ableitungen der Wertfunktion bezüglich der Zeit und des Vermögens bezeichnen und der Erzeuger $A^\pi V(s, X_s^\pi, N_s)$ wie folgt gegeben ist:

$$A^\pi V(s, X_s^\pi, N_s) = (r_s + \pi_s(\mu_s - r_s))\, X_s^\pi V_x(s, X_s^\pi, N_s) + \frac{1}{2}\pi_s^2 \sigma_s^2 (X_s^\pi)^2 V_{xx}(s, X_s^\pi, N_s)$$

Setzt man das erhaltene Resultat in die Ungleichung (2.14) ein, subtrahiert man $V(t,x,n)$ auf beiden Seiten und betrachtet man $\frac{1}{\Delta t}\lim\limits_{\Delta t \downarrow 0}$, so erhält man nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz zusammen mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$0 \geq V_t(t,x,n) + \sup_\pi A^\pi V(t,x,n) + (V(t,x,n+1) - V(t,x,n))(n_a - n)\mu(a+t) \ .$$

Die Wertfunktion V ist also eine Lösung der HJB-Ungleichung in (2.12) mit der Randbedingung $V(T,x,n) = U(x - (n_a - n)K)$ und der Maximierer der oberen Ungleichung ist ein guter Kandidat für die Lösung unseres Portfolioproblems. In der vorliegenden Arbeit nennen wir diese Strategie **suboptimal** und sie wird mit π^{opt} bezeichnet. Wegen der strikten Konkavität der Wertfunktion V ist $V_{xx}(t,x,n)$ und somit auch $\sigma_t^2 x^2 V_{xx}(t,x,n)$ negativ. Daher ist die Nullstelle der ersten Ableitung von $A^\pi V(t,x,n)$ bezüglich π, gegeben durch:

$$\pi_t^{opt} = -\frac{(\mu_t - r_t)}{\sigma_t^2}\frac{V_x(t,x,n)}{V_{xx}(t,x,n)}\frac{1}{x} = \frac{\theta_t}{\sigma_t}\frac{V_x(t,x,n)}{V_{xx}(t,x,n)}\frac{1}{x},$$

ein wohldefiniertes Maximum. Die suboptimale Investmentstrategie $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$ mit dem zugehörigen Vermögensprozess $(X_u^{\pi opt})_{u\geq t}$ ist dann gegeben durch:

$$\pi_u^{opt} = -\frac{(\mu_u - r_u)}{\sigma_u^2}\frac{V_x(u, X_u^{\pi opt}, N_u)}{V_{xx}(u, X_u^{\pi opt}, N_u)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} = \frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{V_x(u, X_u^{\pi opt}, N_u)}{V_{xx}(u, X_u^{\pi opt}, N_u)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}},\ u \geq t. \tag{2.15}$$

In analoger Weise können alle weiteren Portfolioprobleme unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken gelöst werden. In den nächsten vier kombinierten Modellen werden wir für das Lösen der Portfolioprobleme genauso vorgehen wie in diesem Kapitel und eine ausführliche Beschreibung der Methode zur Bestimmung der suboptimalen Portfoliostrategie wird daher nicht mehr nötig sein.

2.6 Anwendung auf spezielle Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir für unser Portfolioproblem unter Anwendung der in den letzten Abschnitten gewonnenen Resultate eine explizite Lösung bei logarithmischer, CARA- und CRRA-Nutzenfunktionen angeben. Dabei orientieren wir uns an dem Paper [8, Abschnitte 7-8].
CARA=konstante absolute Risikoaversion$[ARA(y) = -U''(y)/U'(y)]$
CRRA= konstante relative Risikoaversion$[RRA(y) = -yU''(y)/U'(y)]$.

2.6.1 Optimierungsproblem bei CARA-Nutzen

In diesem Unterabschnitt betrachten wir eine exponentielle Nutzenfunktion aus der Klasse der CARA-Nutzenfunktionen mit einem Risikoaversionsparameter $\alpha \in (0, \infty)$

$$U(y) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha y) \; .$$

Die Wertfunktion V zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch:

$$V(t,x,n) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha(X_T - (n_a - N_T)K)\right)\right] \; .$$

Die Umkehrabbildung der ersten Ableitung von U ist $I(y) = -\frac{1}{\alpha}\ln(y)$ und die Wertfunktion zur Zeit t sieht somit nach (2.9) wie folgt aus:

$$V(t,x,n) = -\frac{1}{\alpha}\lambda_t^{opt}\mathbb{E}\left[H(t,T)\right] = -\frac{1}{\alpha}\lambda_t^{opt}e^{-\int_t^T r_s ds} \; . \tag{2.16}$$

Für den optimalen Lagrange-Multiplikator gilt nun mit (2.8):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha}\ln(\lambda_t^{opt}) = {} & \frac{1}{\mathbb{E}\left[H(t,T)\right]}\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}\right) \\ & + \frac{1}{\mathbb{E}\left[H(t,T)\right]}\frac{1}{\alpha}\,\mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Die Gleichung (2.17) ist dabei erfüllt, da die bedingten Erwartungswerte

$$\mathbb{E}\left[H(t,T)\right] \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]$$

aufgrund der im Abschnitt 2.1 genannten Annahmen an die Funktionen r und θ endlich sind. Die einzelnen Terme werden noch berechnet.

Proposition 2.6.1. Unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion hat der optimale Lagrange-Multiplikator folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \lambda_t^{opt} = {} & \exp\left(-\alpha e^{\int_t^T r_s ds}\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}\right)\right) \\ & \cdot \exp\left(\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds\right) \; . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Beweis. Um den expliziten Ausdruck für den optimalen Lagrange-Multiplikator zu bestimmen, müssen wir den Erwartungswert von $H(t,T)\ln(H(t,T))$ berechnen. Da die

Zinsrate r und das Marktrisiko θ deterministisch sind, d.h. der bedingte Erwartungswert von $H(t,T)$ bezüglich $\mathcal{F}_t$ gleich dem Erwartungswert $\mathbb{E}[H(t,T)]$ ist, ergibt sich durch den Maßwechsel von $\mathbb{P}$ zu $\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H(t,T)\ln(H(t,T))] = \mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-\int_t^T r_s ds}\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[-\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s dW_s\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-\int_t^T r_s ds}\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[-\int_t^T r_s ds + \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s dW_s^{\mathbf{Q}^f}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= -e^{-\int_t^T r_s ds}\left(\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds\right),
\end{aligned}$$

wobei wir hier die Darstellung des Wiener Prozesses $dW_s^{\mathbf{Q}^f} = dW_s^{\mathbb{P}^f} - \theta_s ds$ bezüglich $\mathbf{Q}^f$ ausgenutzt haben. Wir setzen das gewonnene Resultat und $\mathbb{E}[H(t,T)] = e^{-\int_t^T r_s ds}$ in die Gleichung (2.17) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\alpha}\ln(\lambda_t^{opt}) = {} & e^{\int_t^T r_s ds}\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}\right) \\
& - \frac{1}{\alpha}\left(\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds\right) .
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung. □

Das Einsetzen der Gleichung (2.18) in die Gleichung (2.16) liefert die explizite Darstellung der Wertfunktion V zur Zeit t:

$$\begin{aligned}
V(t,x,n) = {} & -\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha e^{\int_t^T r_s ds}\underbrace{\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}\right)}_{\text{Eigenkapital}}\right) \\
& \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds\right) .
\end{aligned}$$

Die Wertfunktion ist bei CARA-Nutzen also abhängig von der Differenz zwischen dem zu t vorhandenen Vermögen x und den erwarteten abdiskontierten Verbindlichkeiten $Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}$. Dies kann als Eigenkapital des Versicherungsunternehmens angesehen werden. Damit ist Folgendes gemeint: Wenn die Anzahl der zu t beobachteten Sterbefälle n ist, dann sind zur Zeit t genau $n_a - n$ Versicherten in der Gruppe. Die erwartete Anzahl der Personen, die weitere $T - t$ Jahre überleben, ist also $(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}$ und die erwartete Gesamtauszahlung an die Überlebenden beträgt somit $K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}$. Da die Versicherungssumme K an jeden Versicherungsnehmer, der das Alter $a + T$ erlebt, auf jeden Fall auszuzahlen ist, wird zu t der erwartete abdiskontierte Wert $e^{-\int_t^T r_u du}K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}$ zurückgestellt. Daher steht dem Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt t für das Vermögen x die Differenz

$$x - e^{-\int_t^T r_u du}K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}$$

als Eigenkapital für Investitionen in die Aktie und das Geldmarktkonto zur Verfügung.

Nun können wir die erste und zweite Ableitung der Wertfunktion nach x berechnen, es gilt:

$$\frac{\partial V(t,x,n)}{\partial x} = -\alpha e^{\int_t^T r_s ds} V(t,x,n) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V(t,x,n)}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{2\int_t^T r_s ds} V(t,x,n) \ .$$

Wir setzen die gewonnenen Ergebnisse in die Formel (2.15) ein und erhalten die suboptimale Portfoliostrategie $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$ mit zugehörigen Wertprozess $(X_u^{\pi opt})_{u\geq t}$:

$$\pi_u^{opt} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} e^{-\int_u^T r_s ds} \ .$$

Insbesondere stellen wir fest, dass bei CARA-Nutzen der suboptimale Anteil vom Gesamtvermögen, welcher in die Aktie investiert wird, im Gegensatz zur Wertfunktion völlig unabhängig von dem Eigenkapital und somit auch unabhängig von dem Wert der Verbindlichkeiten ist. Wenn man nur den vollständigen Finanzmarkt aus dem Abschnitt 2.1 betrachtet und das Lebensversicherungsmodell außer Acht lässt, so maximiert die gewonnene suboptimale Anlagestrategie in diesem Markt den erwarteten Nutzen des Endvermögens. Sie ist also die Lösung des Portfolioproblems ohne Mortalitätsrisiken und wir behaupten, dass diese auch die Lösung des dynamischen Optimierungsproblems (2.10) aus dem Unterabschnitt 2.5.2 und somit die optimale Strategie ist.

Satz 2.6.2. Für das zeitstetige Portfolioproblem (2.10) ist die optimale Investmentstrategie $(\pi_u^*)_{u\geq t}$ mit zugehörigen Vermögensprozess $(X_u^{\pi^*})_{u\geq t}$ gegeben durch:

$$\pi_u^* = -\frac{1}{\alpha}\frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{1}{X_u^{\pi^*}} e^{-\int_u^T r_s ds}, \quad u \geq t$$

und stimmt daher mit der suboptimalen Portfoliostrategie $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$ überein.

Beweis. Für den Beweis des Satzes 2.6.2 brauchen wir noch einige Vorbereitungen:

1. Das Endvermögen X_T^π lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
X_T^\pi &= e^{\int_t^T r_u du}\left(e^{-\int_t^T r_u du} X_T^\pi\right) \\
&= e^{\int_t^T r_u du}\left(X_t^\pi + \int_t^T \frac{\pi_u X_u^\pi}{S_u} d\left(e^{-\int_t^u r_s ds} S_u\right)\right) \\
&= e^{\int_t^T r_u du}\left(X_t^\pi + \int_t^T \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{-\int_t^u r_s ds} dW_u^{\mathbf{Q}^f}\right) \\
&= X_t^\pi e^{\int_t^T r_u du} + \int_t^T \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{\int_u^T r_s ds} dW_u^{\mathbf{Q}^f} \\
&= X_t^\pi e^{\int_t^T r_u du} + \int_t^T \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{\int_u^T r_s ds} dW_u^{\mathbb{P}^f} - \int_t^T \theta_u \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{\int_u^T r_s ds} du,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Zusammenhang

$$dW_u^{\mathbf{Q}^f} = dW_u^{\mathbb{P}^f} - \theta_u du$$

zwischen den Wienerprozessen $W_u^{\mathbf{Q}^f}$ und $W_u^{\mathbb{P}^f}$ ausgenutzt haben.

2. Somit ergibt sich für den Überschuss:

$$X_T^\pi - (n_a - N_T)K = X_t^\pi e^{\int_t^T r_u du} + \int\limits_t^T \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{\int\limits_u^T r_s ds} dW_u^{\mathbb{P}^f}$$
$$- \int\limits_t^T \theta_u \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{\int\limits_u^T r_s ds} du - (n_a - N_T)K \ .$$

Zur Abkürzung definieren wir den Prozess $(C_u)_{u \geq t}$ durch:

$$C_u := \sigma_u \pi_u X_u^\pi e^{\int\limits_u^T r_s ds}$$

und der Ausdruck für den Überschuss wird dann verkürzt auf:

$$X_T^\pi - (n_a - N_T)K = X_t^\pi e^{\int_t^T r_u du} + \int\limits_t^T C_u dW_u^{\mathbb{P}^f} - \int\limits_t^T \theta_u C_u du - (n_a - N_T)K \ .$$

Durch die getroffenen Vorbereitungen zusammen mit der Eigenschaft des Exponentialmartingals lässt sich der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}^{t,x,n}$ von dem CARA-Nutzen des Überschusses wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,x,n}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha(X_T^\pi - (n_a - N_T)K))\right] \\
&= -\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}^{t,x,n}\Bigg[\exp\left(-\alpha X_t^\pi e^{\int_t^T r_u du}\right) \\
&\qquad\qquad \cdot \exp\left(\alpha(n_a - N_T)K - \alpha\int\limits_t^T C_u dW_u^{\mathbb{P}^f} + \alpha\int\limits_t^T \theta_u C_u du\right)\Bigg] \\
&= -\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x e^{\int_t^T r_u du}\right) \\
&\quad \cdot \mathbb{E}^{t,x,n}\left[e^{\alpha(n_a - N_T)K}\exp\left(\alpha\int\limits_t^T \theta_u C_u du - \alpha\int\limits_t^T C_u dW_u^{\mathbb{P}^f} \pm \frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_t^T C_u^2 du\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x e^{\int_t^T r_u du}\right)\mathbb{E}^{t,x,n}\left[e^{\alpha(n_a - N_T)K}\exp\left(\alpha\int\limits_t^T \theta_u C_u du + \frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_t^T C_u^2 du\right)\right]
\end{aligned}$$

Für die Wertfunktion des dynamischen Optimierungsproblems (2.10) erhält man beim CARA-Nutzen also:

$$\begin{aligned}
v(t,x,n) &= \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha(X_T^\pi - (n_a - N_T)K))\right] \\
&= -\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x e^{\int_t^T r_u du}\right) \\
&\qquad \cdot \inf_\pi \mathbb{E}^{t,x,n}\left[e^{\alpha(n_a - N_T)K}\exp\left(\alpha\int\limits_t^T \theta_u C_u du + \frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_t^T C_u^2 du\right)\right] \ .
\end{aligned}$$

Da der Term $e^{\alpha(n_a-N_T)K}$ von π unabhängig, π_u $\mathcal{F}_u$-adaptiert und die Exponentialfunktion streng monoton wachsend sind, reicht es

$$\inf_{\pi}\left(\alpha\int\limits_t^T \theta_u C_u du + \frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_t^T C_u^2 du\right)$$

zu bestimmen, d.h. wir müssen

$$\frac{1}{2}\alpha^2 C_u^2 + \alpha\theta_u C_u = \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_u^2\pi_u^2(X_u^\pi)^2 e^{2\int\limits_u^T r_s ds} + \alpha\sigma_u\theta_u\pi_u X_u^\pi e^{\int\limits_u^T r_s ds}$$

bezüglich π_u minimieren. Es geht daher um die Berechnung des Minimums einer quadratischen Funktion. Wegen $\alpha^2\sigma_u^2(X_u^\pi)^2 e^{2\int\limits_u^T r_s ds} > 0$ ist die Nullstelle der ersten Ableitung von $\frac{1}{2}\alpha^2 C_u^2 + \alpha\theta_u C_u$ bezüglich π_u, gegeben durch

$$\pi_u = -\frac{1}{\alpha}\frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{1}{X_u^\pi}e^{-\int_u^T r_s ds},$$

ein eindeutiges Minimum. Daher erfüllt die optimale Portfoliostrategie wie behauptet folgende Gleichung

$$\pi_u^* = -\frac{1}{\alpha}\frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{1}{X_u^{\pi^*}}e^{-\int_u^T r_s ds}, \quad u \geq t$$

und die von uns gefundene suboptimale Strategie ist somit optimal. □

2.6.2 Optimierungsproblem bei CRRA-Nutzen

In diesem Unterabschnitt betrachten wir eine Power-Nutzenfunktion aus der Klasse der CRRA-Nutzenfunktionen mit einem Risikoaversionsparameter γ

$$U(y) = \frac{1}{\gamma}y^\gamma \quad \text{für} \quad \gamma \in (0,1) .$$

Für die Wertfunktion V zur Zeit t gilt:

$$V(t,x,n) = \sup_{X_T\in\mathcal{A}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n}\left[\frac{1}{\gamma}(X_T - (n_a - N_T)K)^\gamma\right] .$$

Die Umkehrabbildung der ersten Ableitung dieser Nutzenfunktion ist gegeben durch $I(y) = y^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Mit (2.9) lässt sich die Wertfunktion dann wie folgt schreiben:

$$V(t,x,n) = \frac{1}{\gamma}(\lambda_t^{opt})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] . \tag{2.19}$$

Weiter folgt mit (2.8), dass der optimale Lagrange-Multiplikator unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion definiert ist durch:

$$(\lambda_t^{opt})^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]}\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}\right) . \tag{2.20}$$

Die Gleichung (2.20) ist erfüllt wegen $\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] < \infty$, was wiederum aufgrund der im Abschnitt 2.1 genannten Annahmen an die Funktionen r und θ gilt.

Proposition 2.6.3. Für die explizite Darstellung von $(\lambda_t^{opt})^{\frac{1}{\gamma-1}}$ gilt:

$$(\lambda_t^{opt})^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}}{\exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}\int_t^T r_s ds + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}\int_t^T \theta_s^2 ds\right)}. \tag{2.21}$$

Beweis. Um die Richtigkeit von (2.21) zu zeigen, müssen wir den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]$$

berechnen, welcher wegen der Deterministik der Zinsrate r und des Marktrisikos θ mit dem bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}|\mathcal{F}_t\right]$ übereinstimmt. Dafür führen wir zuerst einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$ durch:

$$\bar{L}_t := \frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds\right)$$

mit einem Wiener Prozess $dW_s^{\bar{\mathbb{P}}} = dW_s - \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s ds$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$, vgl. Satz von Girsanov. Dies ist möglich, da die Novikov-Bedingung

$$\int_0^T \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds < \infty$$

für die deterministische Funktion θ erfüllt ist, welche die Martingaleigenschaft von $\bar{L}_t$ liefert. Mit der Bayes-Formel folgern wir weiter:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] &= \mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{\bar{L}_t}{\bar{L}_T}\right)\frac{\bar{L}_T}{\bar{L}_t}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{\bar{L}_t}{\bar{L}_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(-\int_t^T r_s ds + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma-1}\int_t^T \theta_s^2 ds\right)\right)|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(-\int_t^T r_s ds + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma-1}\int_t^T \theta_s^2 ds\right)\right).
\end{aligned}$$

Das Einsetzen der von uns erhaltenen Ergebnisse in die Gleichung (2.20) liefert die Behauptung. □

Daher ergibt sich für die explizite Darstellung der Wertfunktion mit (2.19) und (2.21) folgendes Resultat:

$$V(t,x,n) = \frac{1}{\gamma}\left(\underbrace{x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}}_{\text{Eigenkapital}}\right)^{\gamma}\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma}.$$

Auch für die Nutzenfunktion CRRA ist die Wertfunktion abhängig von dem Eigenkapital.

Für die Bestimmung der suboptimalen Investmentstrategie benötigen wir nur die ersten zwei partiellen Ableitungen der Wertfunktion nach x:

$$\frac{\partial V(t,x,n)}{\partial x} = \left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a - n)_{T-t}p_{a+t}\right)^{\gamma-1}\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma}$$

$$\frac{\partial^2 V(t,x,n)}{\partial x^2} = (\gamma-1)\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a-n)_{T-t}p_{a+t}\right)^{\gamma-2} \mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma} .$$

Für die suboptimale Portfoliostrategie folgt dann aus der Formel (2.15):

$$\pi_u^{opt} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{\left(X_u^{\pi opt} - Ke^{-\int_u^T r_s ds}(n_a-N_u)_{T-u}p_{a+u}\right)}{X_u^{\pi opt}}, \; u \geq t \; .$$

Insbesondere hängt die suboptimale Investmentstrategie bei CRRA-Nutzen vom Eigenkapital anstelle des Gesamtvermögens ab und diese berücksichtigt im Gegensatz zur suboptimalen Anlagestrategie bei CARA-Nutzenfunktion den Wert der Verbindlichkeiten. Gibt es in der Versicherungsgruppe keine Überlebenden mehr, d.h. es bestehen auch keine Verbindlichkeiten. Dann verschwindet der letzte Bruch und wir erhalten eine Strategie, welche die Lösung des Portfolioproblems ohne Mortalitätsrisiken ist.

2.6.3 Optimierungsproblem beim logarithmischen Nutzen

In diesem Unterabschnitt betrachten wir schließlich die logarithmische Nutzenfunktion $U(y) = \ln(y)$. Unser Ziel ist es, die suboptimale Portfoliostrategie bei diesem Nutzen explizit zu ermitteln.

Für die erste Ableitung von U und deren Umkehrabbildung gilt $U'(y) = I(y) = \frac{1}{y}$ und wir erhalten somit für den optimalen Lagrange-Multiplikator mit (2.8) folgendes Resultat: $1/\lambda_t^{opt} = x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a-n)_{T-t}p_{a+t}$. Weiter ergibt sich die Wertfunktion nach (2.9) zusammen mit dem oben erhaltenen Ergebnis durch

$$V(t,x,n) = \ln\left(\underbrace{x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a-n)_{T-t}p_{a+t}}_{\text{Eigenkapital}}\right) - \mathbb{E}\left[\ln(H(t,T))\right],$$

wobei für den letzten Term gilt:

$$\mathbb{E}\left[\ln(H(t,T))\right] = \mathbb{E}\left[-\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s dW_s\right] = -\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds \; .$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\int_t^T \theta_s dW_s$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}^f$ und die Zinsrate r und das Marktrisiko θ deterministisch sind. Auch hier ist die Wertfunktion abhängig vom Eigenkapital.

Die ersten zwei partiellen Ableitungen nach x sind gegeben durch:

$$\frac{\partial V(t,x,n)}{\partial x} = \frac{1}{x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a-n)_{T-t}p_{a+t}}$$

und

$$\frac{\partial^2 V(t,x,n)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\left(x - Ke^{-\int_t^T r_s ds}(n_a-n)_{T-t}p_{a+t}\right)^2} .$$

Somit folgt für die suboptimale Portfoliostrategie aus der Formel (2.15):

$$\pi_u^{opt} = -\frac{\theta_u}{\sigma_u}\frac{\left(X_u^{\pi opt} - Ke^{-\int_u^T r_s ds}(n_a-N_u)_{T-u}p_{a+u}\right)}{X_u^{\pi opt}}, \; u \geq t \; .$$

Wie auch bei CRRA-Nutzenfunktion werden beim logarithmischen Nutzen die Verbindlichkeiten berücksichtigt. Für den Fall, dass es in der Gruppe keine Überlebenden mehr gibt, verschwindet der letzte Bruch und wir erhalten die Lösung des Portfolioproblems ohne Mortalitätsrisiken.

Kapitel 3

Optimierung in einem Vasicek-Bondmarkt

In diesem Kapitel werden wir wieder eine Kombination aus einem eindimensionalen Finanzmarkt und einer Lebensversicherung betrachten. Dabei bleibt das Versicherungsportfolio unverändert und wird aus dem Abschnitt 1.2 übernommen. Im Unterschied zu dem vorherigen Kapitel beschäftigen wir uns hier mit einem Finanzmarkt, bestehend aus einem Geldmarktkonto und einer Nullkuponanleihe mit Maturität $T^* > T$, wobei für die Modellierung des Short-Rate-Prozesses $(r_t)_t$ das Einfaktor-Vasicek-Modell gewählt wird. Auch in diesem Kapitel ist es unser Ziel, das bestehende Kapital zum Zeitpunkt t auf die zwei Finanzgüter, welche uns als Investitionsmöglichkeiten zur Verfügung stehen, optimal aufzuteilen, sodass der erwartete Nutzen des Überschusses am Ende der Handelsperiode maximiert wird. Dafür werden zunächst das neue Finanzmarktmodell konstruiert und einige Ergebnisse aus dem Vasicek-Modell vorgestellt. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels geht es um die Lösung des Optimierungsproblems im neuen kombinierten Modell und die Anwendung der CARA-, CRRA- und logarithmischen Nutzenfunktionen auf dieses Bond-Portfolioproblem. Bei der Lösung des Problems handelt es sich dabei auch wie im zweiten Kapiel um einen suboptimalen Portfolioprozess. Wir orientieren uns hier an [9].

3.1 Das Bondmarktmodell

Es sei $(\Omega^f, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$ ein filtrierter vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Dabei wird die Filtration $(\mathcal{F}_t^f)_{t\geq 0}$ von einem eindimensionalen Wiener Prozess $(W_t^{\mathbb{P}^f})_{t\geq 0}$ erzeugt. Auf diesem betrachten wir einen arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt, welcher aus zwei Finanzgütern besteht: einem Geldmarktkonto und einem T^*-Bond mit $T^* > T$. Die Dynamik des Geldmarktkontos ist gegeben durch

$$d\beta_t = \beta_t r_t dt,$$

wobei der Prozess $(r_t)_t$ durch das Einfaktor-Vasicek-Modell definiert ist:

$$dr_t = b(a - r_t)dt + \delta dW_t^{\mathbf{Q}^f}$$

mit Anfangswert $r_0 > 0$ und strikt positiven Konstanten a, b und δ. Weiter erfüllt die Entwicklung des Preisprozesses des T^*-Bonds die stochastische Differentialgleichung:

$$dB(t, T^*) = B(t, T^*) \left(r_t dt + \sigma(t, T^*) dW_t^{\mathbf{Q}^f} \right)$$

und ist als Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung wie folgt gegeben:

$$B(t,T^*) = B(0,T^*) \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \sigma(s,T^*) dW_s^{\mathbf{Q}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,T^*)^2 ds\right)$$

mit $B(0,T^*) \in (0,\infty)$. Dabei ist $W_t^{\mathbf{Q}^f}$ ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich eines zu $\mathbb{P}^f$ äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$, welches eindeutig bestimmt ist durch:

$$L_t := \left.\frac{d\mathbf{Q}^f}{d\mathbb{P}^f}\right|_{\mathcal{F}_t^f} = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

für einen previsiblen Prozess θ mit

$$\theta_t = -\frac{\mu(t,T^*) - r_t}{\sigma(t,T^*)} = -\frac{\mu(t,T) - r_t}{\sigma(t,T)}, \quad 0 \leq t \leq T^* \ .$$

Der Marktpreis des Risikos θ erfüllt die Bedingung

$$\int_t^{T^*} \theta_s^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}^f\text{-f.s.}$$

und es wird vorausgesetzt, dass dieser Prozess deterministisch ist. Nach dem Satz von Girsanov gilt für die beiden Wiener Prozesse $W_t^{\mathbf{Q}^f}$ und $W_t^{\mathbb{P}^f}$ die Gleichung

$$dW_t^{\mathbf{Q}^f} = dW_t^{\mathbb{P}^f} - \theta_t dt$$

und für die Dynamik des T^*-Bonds bezüglich $\mathbb{P}^f$ folgern wir:

$$dB(t,T^*) = (r_t - \sigma(t,T^*)\theta_t)\, B(t,T^*)dt + \sigma(t,T^*)B(t,T^*)dW_t^{\mathbb{P}^f} \ .$$

Nun wollen wir einige Ergebnisse aus dem Vasicek-Modell vorstellen, die wir im weiteren Verlauf des Kapitels benötigen werden. Dabei orientieren wir uns an [7], [18] und [22].

Satz 3.1.1. Die Short-Rate ist im Einfaktor-Vasicek-Modell gegeben durch

$$r_t = r_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW_s^{\mathbf{Q}^f} \tag{3.1}$$

und ist bezüglich $\mathbf{Q}^f$ normalverteilt

$$r_t \sim \mathcal{N}\left(r_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}),\ \delta^2 \frac{1 - e^{-2bt}}{2b}\right) \ .$$

Beweis. Für die erste Behauptung zerlegt man die Differentialgleichung

$$dr_t = b(a - r_t)dt + \delta dW_t^{\mathbf{Q}^f}$$

in einen homogenen und inhomogenen Teil. Dabei wird die Lösung der inhomogenen Gleichung durch eine Variation der Konstanten bestimmt. Für die zweite Behauptung berechnen wir den Erwartungswert und die Varianz von r_t bezüglich $\mathbf{Q}^f$. Da nach Satz 4.4.9 aus [20] gilt:

$$\int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW_s^{\mathbf{Q}^f} \sim \mathcal{N}\left(0,\ \int_0^t \left(\delta e^{-b(t-s)}\right)^2 ds\right),$$

erhalten wir

$$\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}[r_t] = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[r_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW_s^{\mathbf{Q}^f}\right] = r_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}[r_t] &= \mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}\left[r_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW_s^{\mathbf{Q}^f}\right] \\ &= \mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW_s^{\mathbf{Q}^f}\right] = \int_0^t \left(\delta e^{-b(t-s)}\right)^2 ds\ .\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

Satz 3.1.2. Sei $(r_t)_t$ der Short-Rate-Prozess, welcher durch das Einfaktor-Vasicek-Modell definiert ist. Dann ist der Preis eines T-Bonds zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$\begin{aligned}B(t,T) = \exp&\left(-r_t \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}\right) \\ &\cdot \exp\left(-\left(\frac{\delta^2}{2b^2} - a\right)\left(\frac{1-e^{-b(T-t)}}{b} - (T-t)\right) - \frac{\delta^2}{4b}\left(\frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}\right)^2\right)\ .\end{aligned} \tag{3.2}$$

Weiter ist die Volatilität $\sigma(t,T)$ eine deterministische Funktion, welche zum Zeitpunkt t wie folgt definiert ist:

$$\sigma(t,T) = \delta\ \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}\ .$$

Beweis. Um die Richtigkeit der Gleichung (3.2) zu beweisen, zeigt man als Erstes, dass $\int_t^T r_s ds$ normalverteilt ist. Denn dann gilt für $\int_t^T r_s ds$ als eine normalverteilte Zufallsvariable:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) |\mathcal{F}_t^f\right] \\ &= \exp\left(-\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T r_s ds|\mathcal{F}_t^f\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T r_s ds|\mathcal{F}_t^f\right]\right)\ .\end{aligned}$$

Man berechnet als Nächstes für diese den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz bezüglich $\mathbf{Q}^f$ und erhält die Behauptung. Einen ausführlichen Beweis findet man zum Beispiel in [18, Abschnitt 3.4]. □

Das kombinierte Modell wird wie im Abschnitt 2.2 konstruiert, der einzige Unterschied besteht darin, dass wir neben dem Geldmarktkonto eine Nullkuponanleihe mit Maturität $T^* > T$ statt einer Aktie als weitere Investitionsmöglichkeit zur Verfügung haben.

3.2 Bestimmung des suboptimalen Portfolios

In diesem Abschnitt setzen wir uns zum Ziel, den erwarteten Nutzen des Überschusses im neuen kombinierten Markt zu maximieren. Dabei werden wir genauso vorgehen wie im zweiten Kapitel. Es wird das statische Optimierungsproblem mit Nebenbedingung im neuen Modell formuliert und die suboptimale Portfoliostrategie wird als Maximierer der HJB-Ungleichung für die Wertfunktion des statischen Problems bestimmt. Im Unterschied zum letzten Kapitel ist der Zinssatz $(r_t)_t$ ein Markov-Prozess und wir haben bei der Wertfunktion V eine weitere Bedingung zu beachten.

Wir wollen zuerst die Änderungen bei dem dynamischen Portfolioproblem und dem Verifikationstheorem in unserem neuen globalen Markt festhalten. Dafür fixieren wir einen beliebigen festen Zeitpunkt $t \geq 0$, das zu dieser Zeit vorhandene Vermögen x, die Anzahl der zu t beobachteten Sterbefälle n und den zu diesem Zeitpunkt gegebenen Zinssatz r. Ist π_u der Anteil vom Gesamtvermögen, welcher zur Zeit u in den T^*-Bond investiert wird, dann kann der Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ unter Berücksichtigung der Selbstfinanzierungsbedingung durch folgende Dynamik beschrieben werden:

$$\begin{aligned} dX_u^\pi &= \pi_u X_u^\pi \frac{dB(u,T^*)}{B(u,T^*)} + (1-\pi_u) X_u^\pi \frac{d\beta_u}{\beta_u} \\ &= (r_u - \pi_u \sigma(u,T^*)\theta_u) X_u^\pi du + \pi_u \sigma(u,T^*) X_u^\pi dW_u^{\mathbb{P}^f} \ . \end{aligned}$$

Die Wertfunktion des zeitstetigen Portfolioproblems ist somit gegeben durch:

$$v(t,x,n,r) = \sup_\pi \mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[U(X_T^\pi - (n_a - N_T)K)\right] \ .$$

Dabei ist $H(t,T)$ definiert wie in (2.2), $\mathbb{E}^{t,x,n,r}[.]$ ist die Kurzschreibweise für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[.|X_t^\pi = x, N_t = n, r_t = r]$ und mit U bezeichnen wir eine wie im Unterabschnitt 1.4.1 vorgestellte Nutzenfunktion. Ähnlich wie im zweiten Kapitel gilt für den Verifikationsansatz unter Berücksichtigung einer weiteren Anfangsbedingung $r_t = r$ insbesondere:

Satz 3.2.1 (Verifikationstheorem)**.**

Sei $\bar{v}(\cdot,\cdot,n,\cdot) \in C^{1,2,2}([0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap C([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit

$$\bar{v}(t,x,n,r)| \leq C(1+|x^2|), \quad C > 0$$

eine Lösung der HJB-Gleichung

$$0 = \bar{v}_t(t,x,n,r) + \sup_\pi A^\pi \bar{v}(t,x,n,r) + (\bar{v}(t,x,n+1,r) - \bar{v}(t,x,n,r))(n_a - n)\mu(a+t)$$

für alle $(t,x,n,r) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times \{0,\ldots,n_a\} \times \mathbb{R}$ und erfülle $\bar{v}$ die Randbedingung

$$\bar{v}(T,x,n,r) = U(x - (n_a - n)K)$$

für alle x, n, r. Dann gilt:

(i) $\bar{v}(t,x,n,r) \geq v(t,x,n,r)$ für alle $(t,x,n,r) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \{0,\ldots,n_a\} \times \mathbb{R}$

(ii) Existiert für jedes (t,x,n,r) ein $\alpha(t,x,n,r)$ mit

$$\begin{aligned} \alpha(t,x,n,r) \in \operatorname*{argmax}_\pi \Big\{ & \bar{v}_t(t,x,n,r) + A^\pi \bar{v}(t,x,n,r) \\ & + (\bar{v}(t,x,n+1,r) - \bar{v}(t,x,n,r))(n_a - n)\mu(a+t) \Big\}, \end{aligned}$$

sodass $\pi^* = (\pi_t^*)_{t\in[0,T]}$, $\pi_t^* = \alpha(t, X_t^{\pi^*}, N_t, r_t)$ eine zulässige Strategie definiert, wobei X^{π^*} die zu π^* gehörige Lösung der gesteuerten stochastischen Differentialgleichung:

$$dX_t^{\pi^*} = (r_t - \pi_t^*\sigma(t,T^*)\theta_t)X_t^{\pi^*}dt + \pi_t^*\sigma(t,T^*)X_t^{\pi^*}dW_t^{\mathbb{P}^f}$$

ist. Dann gilt $\bar{v} = v$ und π^* ist eine optimale Strategie.

Das Theorem kann ähnlich wie der Satz 2.5.1 bewiesen werden. Man stellt analog zu den Unterabschnitten 2.5.2 und 2.5.3 fest, dass die HJB-Gleichung nicht zum Ziel führt und dass wir mit Hilfe der HJB-Ungleichung eine vernünftige Strategie berechnen können.

Nun kommen wir zum statischen Optimierungsproblem in unserem neuen globalen Markt. Ausgehend von den Anfangsbedingungen $X_t^\pi = x$, $N_t = n$ und $r_t = r$ erfolgt also die Maximierung von

$$\mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K)\right]$$

ähnlich wie im letzten Kapitel über alle möglichen Endvermögen unter der Budgetbedingung, dass die Erwartung des abdiskontierten Endvermögens das zur Zeit t fest vorgegebene Kapital x nicht übersteigen kann:

$$\mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[H(t,T)X_T\right] \leq x\ .$$

Das heißt die Wertfunktion V ist gegeben durch:

$$V(t,x,n,r) = \sup_{X_T\in\mathcal{A}_t(x)} \mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[U(X_T - (n_a - N_T)K)\right] \tag{3.3}$$

mit

$$\mathcal{A}_t(x) = \left\{X_T \middle|\ X_T \geq 0,\ \mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[H(t,T)X_T\right] \leq x\right\}\ . \tag{3.4}$$

Die Budgetrestriktion garantiert wieder, dass wir aus dem Kapital x das Endvermögen X_T finanzieren können.

Um die vernünftige Portfolioaufteilung in unserem neuen Modell zu finden, bestimmen wir zunächst mittels des Lagrangeansatzes die allgemeinen Ausdrücke für das optimale Endvermögen und die Wertfunktion in Abhängigkeit von dem optimalen Lagrange-Multiplikator. Wir erhalten ähnliche Resultate wie im Unterabschnitt 2.4.1. Der einzige Unterschied ist das Vorhandensein einer weiteren Bedingung $r_t = r$. Das angestrebte Zielvermögen und die Wertfunktion sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} X_T^{opt} &= I(\lambda_t^{opt}H(t,T)) + (n_a - N_T)K \\ V(t,x,n,r) &= \mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[U(I(\lambda_t^{opt}H(t,T)))\right], \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei der optimale Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt ist durch:

$$x = \mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[H(t,T)(I(\lambda_t^{opt}H(t,T)) + (n_a - N_T)K)\right]\ .$$

Wir bemerken, dass aufgrund der Unabhängigkeit zwischen der Mortalität und dem Finanzmarkt gilt:

$$\mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[H(t,T)(n_a - N_T)K\right] = \mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[H(t,T)\right]\mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[(n_a - N_T)K\right]\ .$$

Da $H(t,T)$ nicht von der Anzahl der Sterbefälle und auch nicht von dem Kapital abhängt, ist:

$$\mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[H(t,T)\right] = \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\right],$$

somit werden die Bedingungen $N_t = n$ und $X_t^\pi = x$ bei den Erwartungswerten von $H(t,T)$ im weiteren Verlauf des Kapitels einfach weggelassen. Insbesondere gilt mit der Markoveigenschaft der Short-Rate nach (2.3):

$$\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\right] = B(t,T),$$

wobei der Preis des T-Bonds $B(t,T)$ von t und r abhängt. Für den zweiten Erwartungswert erhalten wir wegen der Markoveigenschaft des Prozesses N mit (1.4):

$$\mathbb{E}^{t,x,n,r}\left[(n_a - N_T)K\right] = \mathbb{E}^{t,n}\left[(n_a - N_T)K\right] = K(n_a - n)_{T-t}p_{a+t} \ .$$

Der Ausdruck für den optimalen Lagrange-Multiplikator lässt sich daher wie folgt vereinfachen :

$$\begin{aligned} x - B(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t} &= \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)I(\lambda_t^{opt}H(t,T))\right] \\ &=: \mathcal{X}(\lambda_t) \ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Das heißt unter der Voraussetzung, dass die Funktion $\mathcal{X}$ eine Inverse $\mathcal{Y}$ besitzt, kann der optimale Multiplikator durch

$$\mathcal{Y}(x - B(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}) = \lambda_t$$

eindeutig berechnet werden, vgl. [11, Abschnitt 3.6].

Nun können wir die suboptimale Portfoliostrategie berechnen. Es wird dabei die gleiche Vorgehensweise wie im zweiten Kapitel gewählt. Wir bezeichnen mit V_t, V_x, V_{xx}, V_r, V_{xr} und V_{rr} die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Wertfunktion bezüglich der Zeit, des Vermögens und des Zinssatzes. Für den Erzeuger $A^\pi V(u, X_u^\pi, N_u, r_u)$ gilt dann für alle $u \geq t$:

$$\begin{aligned} A^\pi V(u, X_u^\pi, N_u, r_u) = {} & (r_u - \pi_u\sigma(u,T^*)\theta_u)X_u^\pi V_x + \frac{1}{2}\pi_u^2\sigma(u,T^*)^2(X_u^\pi)^2 V_{xx} \\ & + \pi_u\sigma(u,T^*)\delta X_u^\pi V_{xr} + b(a - \frac{\delta\theta_u}{b} - r_u)V_r + \frac{1}{2}\delta^2 V_{rr} \end{aligned}$$

und man erhält in analoger Weise, dass V für alle zulässigen Strategien und jedes (t,x,n,r) folgende HJB-Ungleichung

$$0 \geq V_t + \sup_\pi A^\pi V(t,x,n,r) + (V(t,x,n+1,r) - V(t,x,n,r))(n_a - n)\mu(a+t) \tag{3.7}$$

mit der Randbedingung $V(T,x,n,r) = U(x - (n_a - n)K)$ erfüllt. Die Portfoliostrategie, die die HJB-Ungleichung (3.7) maximiert, ist die gesuchte suboptimale Strategie. Nach dem Verifikationstheorem müssen wir also den Erzeuger $A^\pi V(u, X_u^\pi, N_u, r_u)$ bezüglich π_u maximieren. Wegen der strikten Konkavität der Wertfunktion V ist die Nullstelle der ersten Ableitung des Erzeugers bezüglich π_u ein wohldefiniertes Maximum und dieses wird angenommen für:

$$\pi_u^{opt} = \frac{\theta_u}{\sigma(u,T^*)}\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \frac{\delta}{\sigma(u,T^*)}\frac{V_{xr}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}},\ u \geq t \ . \tag{3.8}$$

Somit ist $(\pi_u^{opt})_{u \geq t}$ aus (3.8) die gesuchte suboptimale Anlagestrategie mit dem zugehörigen Vermögensprozess $(X_u^{\pi opt})_{u \geq t}$.

3.3 Anwendung auf spezielle Nutzenfunktionen

Das Ziel in diesem Abschnitt ist das Optimieren des aus einer Nullkuponanleihe mit Maturität T^* und einem Geldmarktkonto bestehenden Portfolios im kombinierten Marktmodell zur Maximierung des erwarteten Nutzens des Überschusses für die logarithmische, CARA- und CRRA-Nutzenfunktionen, wobei die Short-Rate durch das Vasicek-Modell beschrieben wird.

3.3.1 CARA-Nutzenfunktion

Wir betrachten hier die Anwendung der CARA-Nutzenfunktion aus dem Unterabschnitt 2.6.1 auf das Portfolioproblem in dem kombinierten Lebensversicherungs- und Vasicek-Bondmarktmodell.

Ähnlich wie im Kapitel 2 erhalten wir für den optimalen Lagrange-Multiplikator mit (3.6) folgendes Resultat:

$$-\frac{1}{\alpha}\ln(\lambda_t^{opt}) = \frac{1}{B(t,T)}\left((x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)) + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]\right)$$

und aus diesem ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}\lambda_t^{opt} &= \exp\left(-\alpha B(t,T)^{-1}\left(x - B(t,T)(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}\right)\right)\\ &\quad\cdot\exp\left(-B(t,T)^{-1}\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]\right)\ .\end{aligned} \tag{3.9}$$

Für die Bestimmung des expliziten Ausdrucks für den optimalen Lagrange-Multiplikator müssen wir den bedingten Erwartungswert:

$$\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]$$

berechnen. Wegen der Markoveigenschaft des Short-Rate-Prozesses gilt für jede beschränkte, messbare Funktion f und alle $0 \le t \le s$:

$$\mathbb{E}\left[f(r_s)\middle|\mathcal{F}_t^f\right] = \mathbb{E}\left[f(r_s)\middle|r_t\right] \text{ und somit } \mathbb{E}\left[f(r_s)\middle|\mathcal{F}_t^f\right] = \mathbb{E}\left[f(r_s^{t,r})\right]\Big|_{r_t=r},$$

wobei $(r_s^{t,r})_{s\ge t}$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dr_s = b(a-r_s)ds + \delta dW_s^{\mathbf{Q}^f}$$

mit der Anfangsbedingung $r_t = r$ ist. Aus diesem Grund und wegen der Deterministik der Volatilität σ und des Marktrisikos θ reicht es für die Bestimmung des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right] =: g(r)$$

den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] =: g(r_t)$ zu berechnen und anschließend r_t gleich r zu setzen. Für diesen führen wir einen Maßwechsel von $\mathbf{Q}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_T := \mathbb{P}^v \otimes \mathbb{P}_T^f$ durch, welches das Produkt von dem T-Forwardmartingalmaß $\mathbb{P}_T^f$ und dem versicherungsmathematischen Maß $\mathbb{P}^v$ ist:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbf{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{B(t,T)}{B(0,T)}\frac{1}{\beta(t)} = \frac{B(t,T)}{B(0,T)}\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)\\ &= \exp\left(\int_0^t \sigma(s,T)dW_s^{\mathbf{Q}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,T)^2 ds\right),\end{aligned}$$

wobei $W^{\mathbb{P}_T}$, gegeben durch $dW_s^{\mathbb{P}_T} = dW_s^{\mathbf{Q}} - \sigma(s,T)ds$, nach dem Satz von Girsanov ein eindimensionaler Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{P}_T$ ist. Aus der Formel von Bayes ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{B(T,T)}{B(0,T)}\beta(T)\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{B(t,T)}{B(0,T)}\beta(t)\big|\mathcal{F}_t\right]} \\ &= \frac{1}{B(t,T)}E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] \ .\end{aligned}$$

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] \ . \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Es bleibt den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right]$ zu berechnen.

Proposition 3.3.1. Der Erwartungswert $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right]$ ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s\sigma(s,T)ds, \quad (3.11)$$

wobei für den bedingten Erwartungswert von $\int_t^T r_s ds$ bezüglich $\mathbb{P}_T$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] &= -r_t\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} - \left(\frac{\delta^2}{b^2}-a\right)\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}+(T-t)\right) \\ &+ \frac{\delta^2}{2b}\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}\right)^2 \ . \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Beweis. Für Wiener Prozesse bezüglich $\mathbb{P}_T^f$ und $\mathbf{Q}^f$ erhalten wir nach dem Satz von Girsanov folgendes Resultat:

$$\begin{cases} dW_s^{\mathbf{Q}^f} = dW_s^{\mathbb{P}^f} - \theta_s ds \\ dW_s^{\mathbb{P}_T^f} = dW_s^{\mathbf{Q}^f} - \sigma(s,T)ds \end{cases} \implies dW_s^{\mathbb{P}_T^f} = dW_s^{\mathbb{P}^f} - (\sigma(s,T)+\theta_s)ds \ .$$

Mit diesem Ergebnis und wegen der Deterministik des Marktpreises des Risikos θ und der Volatilität σ folgern wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[-\int_t^T r_s ds + \int_t^T \theta_s dW_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds\big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \theta_s dW_s^{\mathbb{P}^f}\big|\mathcal{F}_t\right] - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds \\ &= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] + \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \theta_s dW_s^{\mathbb{P}_T^f}\big|\mathcal{F}_t\right]}_{=0,\text{ da } \int_t^T \theta_s dW_s^{\mathbb{P}_T^f} \text{ ein Martingal ist}} - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds \\ &+ \int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s\sigma(s,T)ds \\ &= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s\sigma(s,T)ds \ .\end{aligned}$$

Somit ist die erste Behauptung bewiesen. Für die zweite Behauptung betrachten wir den Satz 3.1.1 aus dem ersten Abschnitt dieses Kapitels. Laut diesem hat die Short-Rate im Einfaktor-Vasicek-Modell folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-u)} dW_u^{\mathbf{Q}^f} \\ &= r_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-u)} \sigma(u,T) du + \int_0^t \delta e^{-b(t-u)} dW_u^{\mathbb{P}_T^f}, \end{aligned}$$

wobei wir den Zusammenhang $dW_u^{\mathbb{P}_T^f} = dW_u^{\mathbf{Q}^f} - \sigma(u,T)du$ zwischen den Wiener Prozessen bezüglich $\mathbf{Q}^f$ und $\mathbb{P}_T^f$ ausgenutzt haben. Wir erhalten für $s \geq t$:

$$r_s = r_t e^{-b(s-t)} + a(1-e^{-b(s-t)}) + \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} \sigma(u,T) du + \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} dW_u^{\mathbb{P}_T^f} \ .$$

Es gilt also mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s ds &= \int_t^T r_t e^{-b(s-t)} ds + \int_t^T a(1-e^{-b(s-t)}) ds \\ &\quad + \int_t^T \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} \sigma(u,T) du ds + \int_t^T \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} dW_u^{\mathbb{P}_T^f} ds \\ &= \int_t^T r_t e^{-b(s-t)} ds + \int_t^T a(1-e^{-b(s-t)}) ds \\ &\quad + \int_t^T \int_u^T \delta e^{-b(s-u)} \sigma(u,T) ds du + \int_t^T \int_u^T \delta e^{-b(s-u)} ds dW_u^{\mathbb{P}_T^f} \\ &= -r_t \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) + \frac{a}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) + a(T-t) \\ &\quad - \int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1) dW_u^{\mathbb{P}_T^f} - \int_t^T \underbrace{\frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1)\sigma(u,T)}_{=\frac{\delta^2}{b^2}(e^{-b(T-u)}-1)^2} du \\ &= -r_t \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} + a\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} + (T-t)\right) \\ &\quad - \frac{\delta^2}{b^2}\left((T-t) + \frac{2e^{-b(T-t)} - 2}{b} - \frac{e^{-2b(T-t)} - 1}{2b}\right) \\ &\quad - \int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1) dW_u^{\mathbb{P}_T^f} \\ &= -r_t \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \left(\frac{\delta^2}{b^2} - a\right)\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} + (T-t)\right) \\ &\quad + \frac{\delta^2}{2b}\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}\right)^2 - \int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1) dW_u^{\mathbb{P}_T^f} \end{aligned}$$

Somit folgt die zweite Behauptung, denn es gilt wegen der Martingaleigenschaft

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1) dW_u^{\mathbb{P}_T^f} \middle| \mathcal{F}_t\right] = 0 \ .$$

□

Insgesamt gilt mit (3.10)-(3.12):

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right] \\
&= B(t,T)\Bigg[\frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s \sigma(s,T) ds + r\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} \\
&\qquad + \left(\frac{\delta^2}{b^2}-a\right)\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}+(T-t)\right) - \frac{\delta^2}{2b}\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}\right)^2\Bigg] . \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist dieser Erwartungswert endlich und daher ist die Gleichung (3.9) erfüllt.

Für die Wertfunktion erhalten wir mit (3.9) und (3.13):

$$
\begin{aligned}
&V(t,x,n,r) = -\frac{1}{\alpha}\lambda_t^{opt}\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\right] \\
&= -\frac{1}{\alpha}B(t,T)\exp\left(-\alpha B(t,T)^{-1}\underbrace{(x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))}_{\text{Eigenkapital}}\right) \\
&\cdot \exp\left[-r\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} - \left(\frac{\delta^2}{b^2}-a\right)\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}+(T-t)\right) + \frac{\delta^2}{2b}\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}\right)^2\right] \\
&\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds - \int_t^T \theta_s\sigma(s,T)ds\right) . \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Wir bemerken, dass die Wertfunktion von der Differenz zwischen dem zu t aktuellen Vermögen x und dem erwarteten abdiskontierten Wert der Verbindlichkeiten $(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)$ abhängt, dieser Betrag wird als Eigenkapital des Versicherungsunternehmens gesehen. Damit ist Folgendes gemeint: Zum Zeitpunkt t sind in der Gruppe genau n_a-n Versicherungsnehmer. Die erwartete Gesamtauszahlung an die Überlebenden beträgt somit $K(n_a-n)_{T-t}p_{a+t}$. Um die fälligen Verbindlichkeiten gegenüber den Versicherten bedienen zu können, muss das Versicherungsunternehmen den erwarteten abdiskontierten Wert $(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)$ zurückstellen. Daher hat es zur Zeit t die Differenz

$$
x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)
$$

als Eigenkapital für Investitionen zur Verfügung.

Nun können wir die erste und zweite partiellen Ableitungen der Wertfunktion nach x berechnen:

$$
\frac{\partial V(t,x,n,r)}{\partial x} = -\alpha B(t,T)^{-1}V(t,x,n,r)
$$

und

$$
\frac{\partial^2 V(t,x,n,r)}{\partial x^2} = \alpha^2 B(t,T)^{-2}V(t,x,n,r) .
$$

Wir leiten weiter die erste partielle Ableitung nach x partiell nach r ab und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V(t,x,n,r)}{\partial x \partial r} &= -\alpha^2\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1)xB(t,T)^{-2}V(t,x,n,r) \\
&\quad + \alpha\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1)B(t,T)^{-1}V(t,x,n,r) \\
&= \alpha\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1)V(t,x,n,r)B(t,T)^{-2}\left(B(t,T)-\alpha x\right) .
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass für die partielle Ableitung von $B(t,T)$ nach r mit (3.2) gilt:

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial r} = \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1)B(t,T) \ .$$

Weiter folgern wir daraus:

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -\frac{1}{\alpha}B(t,T) \quad \text{und} \quad \frac{V_{xr}}{V_{xx}} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1)\left(B(t,T) - \alpha x\right) \ .$$

Schließlich liefert das Einsetzen der gewonnenen Ergebnisse in die Formel (3.8) die suboptimale Portfoliostrategie, diese ist gegeben durch:

$$\pi_u^{opt} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\theta_u}{\sigma(u,T^*)}\frac{B(u,T)}{X_u^{\pi opt}} - \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{\sigma(u,T)}{\sigma(u,T^*)}\frac{(B(u,T) - \alpha X_u^{\pi opt})}{X_u^{\pi opt}}}_{\text{Korrekturterm}}, \ u \geq t \ .$$

Dabei ist die suboptimale Strategie bei CARA-Nutzen auch wie im letzten Kapitel völlig unabhängig vom Eigenkapital und berücksichtigt daher auch nicht den Wert der Verbindlichkeiten gegenüber den Versicherten. Wir bemerken weiter, dass der zweite Term der oben stehenden Gleichungen als ein Korrekturterm interpretiert werden kann. Da die Volatilität des T-Bonds zum Zeitpunkt T verschwindet, geht dieser Korrekturterm für $u \to T$ gegen Null.

3.3.2 CRRA-Nutzenfunktion

Wir betrachten die im Unterabschnitt 2.6.2 definierte CRRA-Nutzenfunktion. Unser Ziel ist das explizite Lösen des Bond-Portfolioproblems bei diesem Nutzen. Für die Wertfunktion gilt nach (3.5):

$$V(t,x,n,r) = \frac{1}{\gamma}(\lambda_t^{opt})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right],$$

wobei der optimale Multiplikator nach (3.6) gegeben ist durch:

$$(\lambda_t^{opt})^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1}{\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]}\left(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\right) \ .$$

Um die suboptimale Portfoliostrategie zu bestimmen, benötigen wir den expliziten Ausdruck für die Wertfunktion V. Damit wir die Wertfunktion explizit angeben können, müssen wir zunächst folgenden Erwartungswert

$$\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]$$

berechnen. Dabei gehen wir genauso vor wie im letzten Unterabschnitt, wir berechnen zunächst den Erwartungswert $\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$ und setzen danach anstelle von r_t den Wert r ein. Hierfür führen wir einen Maßwechsel von $\mathbb{P}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}} := \mathbb{P}^v \otimes \bar{\mathbb{P}}^f$ durch:

$$\bar{L}_t := \left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds\right)$$

mit einem Wiener Prozess $dW_s^{\bar{\mathbb{P}}} = dW_s - \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s ds$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$, vgl. Satz von Girsanov. Es ergibt sich aus der Bayes-Formel also:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(-\int_t^T r_s ds + \int_t^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds\right)\right)\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\int_t^T \theta_s^2 ds + \frac{1}{2}\int_t^T \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds\right)\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^2 ds\right) \\
&\qquad \cdot \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds\right)\big|\mathcal{F}_t\right] \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass der Marktpreis des Risikos θ und die Volatilität σ deterministisch sind, vgl. Abschnitt 3.1. Denn dies hat zur Folge, dass auch

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^2 ds\right)$$

deterministisch ist und aus dem bedingten Erwartungswert herausgezogen werden kann.

Proposition 3.3.2. Für den bedingten Erwartungswert von $\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds\right)$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds\right)\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} r_t \frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} a\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} + (T-t)\right)\right) \\
&\cdot \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \frac{\delta^2}{b^2}\left((T-t) + \frac{2e^{-b(T-t)}-2}{b} - \frac{e^{-2b(T-t)}-1}{2b}\right)\right) \\
&\cdot \exp\left(\int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}\theta_u \sigma(u,T) du\right) . \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Beweis. Da folgende Zusammenhänge zwischen den Wiener Prozessen

$$\begin{cases} dW_s^{\mathbf{Q}^f} = dW_s^{\mathbb{P}^f} - \theta_s ds \\ dW_s^{\bar{\mathbb{P}}^f} = dW_s^{\mathbb{P}^f} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s ds \end{cases} \implies dW_s^{\mathbf{Q}^f} = dW_s^{\bar{\mathbb{P}}^f} + \frac{\theta_s}{\gamma-1} ds$$

gelten, erfüllt die Short-Rate Entwicklung im Einfaktor-Vasicek-Modell die stochastische Differentialgleichung:

$$dr_t = b(a - r_t)dt + \frac{\delta\theta_t}{\gamma-1}dt + \delta dW_t^{\bar{\mathbb{P}}^f} .$$

und ist somit nach (3.1) gegeben durch:

$$r_t = r_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \int_0^t \frac{\delta}{\gamma-1}\theta_u e^{-b(t-u)} du + \int_0^t \delta e^{-b(t-u)} dW_u^{\bar{\mathbb{P}}^f} .$$

Nun betrachten wir für $s \geq t$ den Zeitpunkt t als Zins in s und erhalten mit dem Satz von Fubini ähnlich wie im Beweis zur Proposition 3.3.1:

$$
\begin{aligned}
\int_t^T r_s ds &= \int_t^T r_t e^{-b(s-t)} ds + \int_t^T a(1-e^{-b(s-t)}) ds \\
&+ \int_t^T \int_t^s \frac{\delta}{\gamma-1} \theta_u e^{-b(s-u)} du ds + \int_t^T \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} dW_u^{\bar{\mathbb{P}}^f} ds \\
&= -r_t \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1) + \frac{a}{b}(e^{-b(T-t)}-1) + a(T-t) \\
&- \int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)}-1) dW_u^{\bar{\mathbb{P}}^f} - \int_t^T \frac{1}{\gamma-1} \underbrace{\frac{\delta}{b}\theta_u (e^{-b(T-u)}-1)}_{=\theta_u \sigma(u,T)} du \,. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Mit [20, Satz 4.4.9] ist der Summand $\int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)}-1)dW_u^{\bar{\mathbb{P}}^f}$ als Summe zweier normalverteilter Zufallsvariablen normalverteilt:

$$
\int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)}-1) dW_u^{\bar{\mathbb{P}}^f} \sim \mathcal{N}\left(0, \int_t^T \left(\frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)}-1)\right)^2 du\right) \,. \qquad (3.18)
$$

Also ist das Integral $-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}^f$ normalverteilt und es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \mathrm{Var}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right]\right) \,. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Für die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz von $\int_t^T r_s ds$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ benutzen wir die Ergebnissen (3.17) und (3.18), es folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right] &= -r_t \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1) + a\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} + (T-t)\right) \\
&\quad - \underbrace{\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \theta_u \sigma(u,T) du \middle| \mathcal{F}_t\right]}_{=\int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\theta_u\sigma(u,T)du, \text{ da deterministisch}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right] &= \int_t^T \left(\frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)}-1)\right)^2 du \\
&= \frac{\delta^2}{b^2}\left((T-t) + \frac{2}{b}(e^{-b(T-t)}-1) - \frac{1}{2b}(e^{-2b(T-t)}-1)\right),
\end{aligned}
$$

da $\int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)}-1)dW_u^{\bar{\mathbb{P}}^f}$ ein Martingal ist. Mit den oben erhaltenen Resultaten eingesetzt in die Gleichung (3.19) folgt die Behauptung. □

Insgesamt gilt aufgrund der Markoveigenschaft des Short-Rate-Prozesses mit (3.15) und (3.16):

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^2 ds\right) \\
&\cdot \exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} r \frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}\right)\cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} a\left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}+(T-t)\right)\right) \\
&\cdot \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \frac{\delta^2}{b^2}\left((T-t)+\frac{2e^{-b(T-t)}-2}{b}-\frac{e^{-2b(T-t)}-1}{2b}\right)\right) \\
&\cdot \exp\left(\int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}\theta_u \sigma(u,T)du\right) \ .
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Insbesondere ist der oben stehende Erwartungswert endlich und die Gleichung für den optimalen Lagrange-Multiplikator am Anfang dieses Unterabschnittes ist somit erfüllt.

Die Wertfunktion lässt sich daher wie folgt umschreiben:

$$
V(t,x,n,r) = \frac{1}{\gamma}\Bigg(\underbrace{x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)}_{\text{Eigenkapital}}\Bigg)^{\gamma}\ \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma}
$$

und ist auch wie bei CARA-Nutzen abhängig vom Eigenkapital. Weiter gilt mit (3.20):

$$
\frac{\partial \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]}{\partial r} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1)\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] \ .
$$

Also können wir V_x, V_{xx} und V_{xr} explizit berechnen. Für die ersten zwei partiellen Ableitungen der Wertfunktion nach x erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(t,x,n,r)}{\partial x} &= (x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^{\gamma-1}\ \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma} \\
\frac{\partial^2 V(t,x,n,r)}{\partial x^2} &= (\gamma-1)\,(x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^{\gamma-2}\ \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma} .
\end{aligned}
$$

Für die partielle Ableitung von $\dfrac{\partial V(t,x,n)}{\partial x}$ nach r ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V(t,x,n,r)}{\partial x \partial r} &= -\gamma\frac{(e^{-b(T-t)}-1)}{b}\,(x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^{\gamma-1}\ \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma} \\
&\quad -(\gamma-1)(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}\frac{(e^{-b(T-t)}-1)}{b}B(t,T) \\
&\qquad \cdot (x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^{\gamma-2}\ \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma}
\end{aligned}
$$

und wir folgern somit:

$$
\begin{aligned}
\frac{V_x}{V_{xx}} &= \frac{1}{\gamma-1}\,(x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)) \\
\frac{V_{xr}}{V_{xx}} &= -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{(e^{-b(T-t)}-1)}{b}\left(x-\frac{1}{\gamma}(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\right) \ .
\end{aligned}
$$

Die suboptimale Portfoliostrategie erhält man durch Einsetzen der berechneten Ergebnisse in die Formel (3.8), zur Zeit $u \geq t$ gilt für den suboptimalen Anteil, welcher in den T^*-Bond investiert wird:

$$\begin{aligned}\pi_u^{opt} =& \frac{1}{\gamma-1}\frac{\theta_u}{\sigma(u,T^*)}\frac{(X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T))}{X_u^{\pi opt}} \\ &+ \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\sigma(u,T)}{\sigma(u,T^*)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left(X_u^{\pi opt} - \frac{1}{\gamma}(n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)\right)}_{\text{Korrekturterm}} \ .\end{aligned}$$

Die suboptimale Investmentstrategie lässt sich also als Summe aus zwei Komponenten interpretieren. Dabei ist der erste Term proportional zum Prozentsatz des Eigenkapitals des Versicherungsunternehmens und berücksichtigt somit den Wert der Verbindlichkeiten. Beim zweiten Term handelt es sich um ein Korrekturterm, welcher für $u \to T$ zur Null geht.

Mit der Optimierung des Bond-Portfolioproblems im Vasicek-Modell befassen sich viele Mathematiker. Kraft und Korn lösen zum Beispiel das Problem in [12] mittels der stochastischen Kontrolltheorie und in [19] geschieht die Herleitung dieses Problems mit Hilfe der Martingalmethode. Dabei gehen sie alle von einem arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt aus, bestehend aus einer risikobehafteten Finanzanlage in Form eines Bonds und einem Geldmarktkonto, also von einem Marktmodell ohne Mortalitätsrisiken. Für die optimale Portfoliostrategie erhalten die Autoren für die Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$:

$$\pi_u^{opt} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\theta_u}{\sigma(u,T^*)} + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\sigma(u,T)}{\sigma(u,T^*)}}_{\text{Korrekturterm}} \ .$$

Wir bemerken, dass wenn man den Wert der Verbindlichkeiten gleich Null setzt, so bekommt man eine Startegie, welche mit der oben stehenden übereinstimmt. Das heißt im Falle, dass es keine überlebenden Versicherten mehr gibt, ist die erhaltene Investmentstrategie die Lösung des Bond-Portfolioproblems ohne Mortalitätsrisiken.

3.3.3 Logarithmische Nutzenfunktion

In diesem Unterabschnitt wollen wir schließlich die logarithmische Nutzenfunktion auf das Bond-Portfolioproblem unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken anwenden.

Für den optimalen Lagrange-Multiplikator erhalten wir mit (3.6) ähnlich wie im Unterabschnitt 2.6.3:

$$1/\lambda_t^{opt} = x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)$$

und die Wertfunktion ist somit gegeben durch

$$V(t,x,n,r) = \ln(\underbrace{x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)}_{\text{Eigenkapital}}) - \mathbb{E}^{t,r}\left[\ln(H(t,T))\right] \ .$$

Um den bedingten Erwartungswert von $\ln(H(t,T))$ zu bestimmen, betrachten wir für $s \geq t$ den Zeitpunkt t als Zins in s. Der Satz 3.1.1 liefert zusammen mit dem Zusammenhang $dW_s^{\mathbf{Q}^f} = dW_s^{\mathbb{P}^f} - \theta_s ds$ und dem Satz von Fubini ähnlich wie in den letzten zwei Unterabschnitten folgendes Ergebnis:

$$\int_t^T r_s ds = -r_t \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) + \frac{a}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) + a(T-t)$$
$$+ \int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1)\theta_u du - \int_t^T \frac{\delta}{b}(e^{-b(T-u)} - 1) dW_u^{\mathbb{P}^f} \ .$$

Mit diesem Resultat folgern wir für $\mathbb{E}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]$ unter Ausnutzung der Martingaleigenschaft:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[-\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds + \int_t^T \theta_s dW_s^{\mathbb{P}^f}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= r_t \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - \frac{a}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - a(T-t) \\ &\quad - \int_t^T \theta_s \sigma(s,T) ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds \ .\end{aligned}$$

Schließlich gilt aufgrund der Markoveigenschaft der Short-Rate insbesondere:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{t,r}\left[\ln(H(t,T))\right] = r\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - \frac{a}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - a(T-t) \\ - \int_t^T \theta_s \sigma(s,T) ds - \frac{1}{2}\int_t^T \theta_s^2 ds \ .\end{aligned}$$

Nun können wir die partiellen Ableitungen der Wertfunktion bestimmen. Dabei spielt der oben stehende Erwartungswert bei der Berechnung der Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$ und $\frac{V_x}{V_{xr}}$ keine Rolle. Für die ersten zwei partiellen Ableitungen nach x gilt:

$$\frac{\partial V(t,x,n,r)}{\partial x} = (x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^{-1}$$
$$\frac{\partial^2 V(t,x,n,r)}{\partial x^2} = -(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^{-2} \ .$$

Für die partielle Ableitung von $\frac{\partial V(t,x,n,r)}{\partial x}$ nach r ergibt sich dann:

$$\frac{\partial^2 V(t,x,n,r)}{\partial x \partial r} = \frac{\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)}{(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^2} \ .$$

und somit erhalten wir:

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -(x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)), \quad \frac{V_{xr}}{V_{xx}} = -\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1)(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T) \ .$$

Das Einsetzen der oben erhaltenen Ergebnisse in die Formel (3.8) liefert die suboptimale Portfoliostrategie:

$$\begin{aligned}\pi_u^{opt} = &-\frac{\theta_u}{\sigma(u,T^*)}\frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}{X_u^{\pi opt}} \\ &+ \underbrace{\frac{\sigma(u,T)}{\sigma(u,T^*)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}(n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}_{\text{Korrekturterm}} \ , \ u \geq t \ .\end{aligned}$$

Die suboptimale Anlagestrategie berücksichtigt insbesondere auch den Wert der Verbindlichkeiten. Wird dieser gleich Null gesetzt, also keine Überlebenden, dann fallen der Korrekturterm und der letzte Bruch des ersten Terms weg und die Strategie wird somit die Lösung des Bond-Portfolioproblems ohne Mortalitätsrisiken.

Kapitel 4

Optimierung in einem Aktien- und Bondmarkt

In diesem Kapitel haben wir die Aufgabe, die optimale Aufteilung des zum Zeitpunkt t bestehenden Kapitals auf einen Geldmarktkonto, einen T^*-Bond mit Maturität $T^* > T$ und eine Aktie unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisken zu bestimmen, welche zur Maximierung des erwarteten Nutzens des Überschusses führt. Dazu werden wir uns mit einer Kombination aus dem Versicherungsmarkt aus dem ersten Kapitel und einem zweidimensionalen Finanzmarktmodell, bestehend aus einem Geldmarktkonto und zwei risikobehafteten Finanzanlagen (Aktie und T^*-Bond) beschäftigen. Dabei wird der Short-Rate-Prozess $(r_t)_t$, auch wie im letzten Kapitel, durch das Einfaktor-Vasicek-Modell definiert. Zur Bewältigung der oben genannten Aufgabe wird zunächst die suboptimale Portfoliostrategie als Maximierer der HJB-Ungleichung für das Optimierungsproblem (3.3) mit Nebenbedingung (3.4) im neuen erweiterten kombinierten Modell allgemein bestimmt und später für CARA-, CRRA- und logarithmische Nutzenfunktionen explizit berechnet.

4.1 Das zweidimensionale Finanzmarktmodell

In diesem Abschnitt betrachten wir einen filtrierten vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^f, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$, wobei $(\mathcal{F}_t^f)_{t\geq 0}$ die von einem zweidimensionalen Wiener Prozess $W_t^{\mathbb{P}^f} = (W_t^{B,\mathbb{P}^f}, W_t^{S,\mathbb{P}^f})^\top$, $t \geq 0$ erzeugte Wiener-Filtration ist. Auf diesem modellieren wir einen vollständigen Finanzmarkt, welcher aus drei Finanzgütern besteht: einem Geldmarktkonto, einem T^*-Bond mit $T^* > T$ und einer Aktie.
Das Geldmarktkonto ist die Lösung folgender Differentialgleichung

$$d\beta_t = \beta_t r_t dt \ ,$$

wobei der Prozess $(r_t)_t$ durch das Einfaktor-Vasicek-Modell definiert ist:

$$dr_t = b(a - r_t)dt + \delta dW_t^{B,\mathbf{Q}^f} , \quad \alpha, \beta, \delta > 0 \ .$$

Die Dynamik des zweiten Finanzgutes ist gegeben durch

$$dB(t, T^*) = B(t, T^*) \left(r_t dt + \sigma^B(t, T^*) dW_t^{B,\mathbf{Q}^f} \right)$$

und für den Aktienpreisprozess gilt die stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t = S_t \left(r_t dt + \sigma_t^S dW_t^{S,\mathbf{Q}^f} + \sigma_t^{SB} dW_t^{B,\mathbf{Q}^f} \right) \ .$$

Dabei ist

$$W_t^{\mathbf{Q}^f} = (W_t^{B,\mathbf{Q}^f}, W_t^{S,\mathbf{Q}^f})^\top$$

ein zweidimensionaler Wiener Prozess bezüglich eines zu $\mathbb{P}^f$ eindeutig bestimmten äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$, gegeben durch

$$L_t := \left.\frac{d\mathbf{Q}^f}{d\mathbb{P}^f}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left[\int_0^t \theta_s^B dW_s^{B,\mathbb{P}^f} + \int_0^t \theta_s^S dW_s^{S,\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds\right],$$

für welchen nach dem Satz von Girsanov gilt:

$$dW_t^{B,\mathbf{Q}^f} = dW_t^{B,\mathbb{P}^f} - \theta_t^B dt \quad \text{und} \quad dW_t^{S,\mathbf{Q}^f} = dW_t^{S,\mathbb{P}^f} - \theta_t^S dt \ .$$

Der previsible Prozess $\theta = \left(\theta^B, \theta^S\right)^\top$ erfüllt folgende Gleichungen:

$$\mu_t^B + \sigma^B(t,T^*)\theta_t^B = r_t \tag{4.1}$$

$$\mu_t^S + \sigma_t^S\theta_t^S + \sigma_t^{SB}\theta_t^B = r_t \tag{4.2}$$

und es wird angenommen, dass θ deterministisch ist und $\sigma_t^S \neq 0$ für alle $t \in [0, T^*]$ gilt. Die Preisprozesse des T^*-Bonds und der Aktie werden bezüglich $\mathbb{P}^f$ also durch folgende Dynamiken beschrieben:

$$dB(t,T^*) = B(t,T^*)\left(r_t dt + \sigma^B(t,T^*)\left(dW_t^{B,\mathbb{P}^f} - \theta_t^B dt\right)\right)$$

und

$$dS_t = S_t\left(r_t dt + \sigma_t^S\left(dW_t^{S,\mathbb{P}^f} - \theta_t^S dt\right) + \sigma_t^{SB}\left(dW_t^{B,\mathbb{P}^f} - \theta_t^B dt\right)\right) \ .$$

Der Versicherungsmarkt bleibt gleich wie in den vorherigen zwei Kapiteln und das neue kombinierte Modell wird genauso wie im Abschnitt 2.2 konstruiert. Im Unterschied zu den ersten zwei Modellen haben wir hier drei Investitionsmöglichkeiten: einen Geldmarktkonto, eine Aktie und einen T^*-Bond.

4.2 Bestimmung des suboptimalen Portfolios

In diesem Abschnitt besteht unser Ziel darin, eine allgemeine Lösung des statischen Optimierungsproblems im neuen kombinierten Modell zu bestimmen und die suboptimale Portfoliostrategie als Maximierer der zugehörigen HJB-Ungleichung zu ermitteln. Die Aufgabe ist also die Optimierung der Anlagepolitik zu einem Zeitpunkt $T < T^*$, damit der erwartete Nutzen des Überschusses maximiert wird.

Im neuen globalen Markt stimmt das statische Optimierungsproblem mit dem aus dem letzten Modell überein, mit dem Unterschied, dass wir nun insgesamt drei Finanzgüter betrachten. Sind π_u^B und π_u^S die Anteile vom Gesamtvermögen, welche zum Zeitpunkt u in die Aktie und in den Bond mit der Fälligkeit T^* investiert werden, so ist $1 - \pi_u^B - \pi_u^S$ der Vermögensanteil für die Investition in das Geldmarktkonto und der dazugehörige Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ ist unter der Berücksichtigung der Selbstfinanzierungsbedingung die Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} dX_u^\pi &= \left(\pi_u^S \frac{dS_u}{S_u} + \pi_u^B \frac{dB(u,T^*)}{B(u,T^*)} + (1 - \pi_u^S - \pi_u^B)\frac{d\beta_u}{\beta_u}\right) X_u^\pi \\ &= \left(r_u - \pi_u^S\left(\sigma_u^S\theta_u^S + \sigma_u^{SB}\theta_u^B\right) - \pi_u^B\sigma^B(u,T^*)\theta_u^B\right) X_u^\pi du \\ &\quad + \pi_u^S\sigma_u^S X_u^\pi dW_u^{S,\mathbb{P}^f} + \left(\pi_u^S\sigma_u^{SB} + \pi_u^B\sigma^B(u,T^*)\right) X_u^\pi dW_u^{B,\mathbb{P}^f} \ . \end{aligned}$$

Somit müssen wir das statische Optimierungsproblem nicht mehr lösen, die im Abschnitt 3.2 erhaltenen Resultate können einfach übernommen werden.

Die Herleitung der allgemeinen Formel zur Bestimmung des suboptimalen Portfolioprozesses $\pi^{opt} = (\pi^{Bopt}, \pi^{Sopt})^\top$ geschieht entsprechend unseren Überlegungen aus dem zweiten Kapitel. Die Wertfunktion V erfüllt in analoger Weise für alle zulässigen Strategien und jedes (t, x, n, r) folgende HJB-Ungleichung:

$$0 \geq V_t + \sup_\pi A^\pi V(t,x,n,r) + (V(t,x,n+1,r) - V(t,x,n,r))(n_a - n)\mu(a+t)$$

mit der Randbedingung $V(T,x,n,r) = U(x - (n_a - n)K)$, wobei für den Erzeuger $A^\pi V(u, X_u^\pi, N_u, r_u)$ in unserem Modell für alle $u \geq t$ gilt:

$$\begin{aligned}
&A^\pi V(u, X_u^\pi, N_u, r_u)\\
&= \left(r_u - \pi_u^S\left(\sigma_u^S\theta_u^S + \sigma_u^{SB}\theta_u^B\right) - \pi_u^B\sigma^B(u,T^*)\theta_u^B\right) X_u^\pi V_x\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\left(\pi_u^S\sigma_u^S\right)^2 + \left(\pi_u^S\sigma_u^{SB} + \pi_u^B\sigma^B(u,T^*)\right)^2\right)(X_u^\pi)^2 V_{xx}\\
&\quad + b(a - \frac{\delta\theta_u^B}{b} - r_u)V_r + \left(\pi_u^S\sigma_u^{SB} + \pi_u^B\sigma^B(u,T^*)\right)\delta X_u^\pi V_{xr} + \frac{1}{2}\delta^2 V_{rr}\ .
\end{aligned}$$

Der Maximierer von dieser HJB-Ungleichung definiert die suboptimale Investmentstrategie. Wegen der strikten Konkavität der Wertfunktion V erhält man diese durch Differenzieren des Erzeugers $A^\pi V(u, X_u^\pi, N_u, r_u)$ nach π_u. Für den suboptimalen Investitionsanteil in die Aktie π_u^{Sopt}, $u \geq t$ gilt:

$$\begin{aligned}
\pi_u^{Sopt} = \frac{\theta_u^S}{\sigma_u^S}\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} &\overset{1}{=} -\frac{\mu_u^S - r_u + \sigma_u^{SB}\theta_u^B}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&\overset{2}{=} -\left(\frac{\mu_u^S - r_u}{\left(\sigma_u^S\right)^2} - \sigma_u^{SB}\frac{\mu_u^B - r_u}{\left(\sigma_u^S\right)^2\sigma^B(u,T^*)}\right)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&= -\left(\eta_u^S - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(t,T^*)}\eta_u^{SB}\right)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

und der suboptimale Anteil vom Gesamtvermögen π_u^{Bopt}, $u \geq t$, der in den T^*-Bond investiert wird, ist also:

$$\begin{aligned}
\pi_u^{Bopt} &= \left(\frac{\theta_u^B}{\sigma^B(u,T^*)} - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{\theta_u^S}{\sigma_u^S}\right)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \frac{\delta}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{V_{xr}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&= \left(\left(1 + \frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\frac{\theta_u^B}{\sigma^B(u,T^*)} - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{\sigma_u^S\theta_u^S + \sigma_u^{SB}\theta_u^B}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&\quad - \frac{\delta}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{V_{xr}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&\overset{1,2}{=} -\left(\left(1 + \frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\frac{\mu_u^B - r_u}{\sigma^B(u,T^*)^2} - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{\mu_u^S - r_u}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&\quad - \frac{\delta}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{V_{xr}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\\
&= -\left(\left(1 + \frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\eta_u^B - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^S\right)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \frac{\delta}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{V_{xr}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

mit

$$\eta_u^S := \frac{\mu_u^S - r_u}{(\sigma_u^S)^2}, \quad \eta_u^B := \frac{\mu_u^B - r_u}{\sigma^B(u,T^*)^2} \quad \text{und} \quad \eta_u^{SB} := \frac{\mu_u^B - r_u}{(\sigma_u^S)^2} \ .$$

Dabei wurden für die Gleichheiten 1 und 2 die Gleichungen (4.2) und (4.1) benutzt. Kraft und Korn haben für die Portfoliooptimierung in [12] ähnliche Ergebnisse erhalten.

4.3 Anwendung auf spezielle Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt ist es unser Ziel, das gemischte Aktien-Bond-Portfolioproblem im Vasicek-Modell unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken bei logarithmischen, CARA- und CRRA-Nutzen explizit zu lösen. Wir werden also ein Portfolio, das aus einem Geldmarktkonto, einer Aktie und einem T^*-Bond besteht, zu einem Zeitpunkt $T < T^*$ für die zwei Nutzenfunktionen so optimieren, dass der erwartete Nutzen des Überschusses maximiert wird.

4.3.1 CARA-Nutzenfunktion

Für die Bestimmung des suboptimalen Porfolioprozesses $\pi^{opt} = (\pi^{Bopt}, \pi^{Sopt})^\top$ bei CARA-Nutzen $U(y) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha y)$ orientieren wir uns an dem Unterabschnitt 3.3.1.

Die explizite Darstellung des optimalen Lagrange-Multiplikators bleibt bis auf die Gestalt des Erwartungswertes $\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]$ identisch:

$$\begin{aligned}\lambda_t^{opt} &= \exp\left(-\alpha B(t,T)^{-1}\left(x - B(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}\right)\right)\\ &\quad \cdot \exp\left(-B(t,T)^{-1}\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]\right) \ .\end{aligned}$$

Um diesen Erwartungswert zu berechnen, führen wir analog zum Abschnitt 3.3 einen Maßwechsel von $\mathbf{Q}$ zu einem Produktwahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_T$ von dem T-Forwardmartingalmaß $\mathbb{P}_T^f$ und dem Maß $\mathbb{P}^v$ durch:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbf{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \sigma^B(s,T)dW_s^{B,\mathbf{Q}^f} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^B(s,T)^2 ds\right),$$

wobei $dW_s^{B,\mathbb{P}_T} = dW_s^{B,\mathbf{Q}} - \sigma^B(s,T)ds$ nach dem Satz von Girsanov ein Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{P}_T$ ist. Aus der Formel von Bayes ergibt sich analog zum dritten Kapitel:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{B(t,T)}E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

und für den zu bestimmenden Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] \ .\end{aligned}$$

Es bleibt also, nur noch den Erwartungswert $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]$ zu berechnen. Dafür betrachten wir zunächst die Zusammenhänge zwischen den Wiener Prozessen bezüglich der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_T^f$ und $\mathbb{P}^f$:

$$dW_s^{B,\mathbb{P}_T^f} = dW_s^{B,\mathbb{P}^f} - (\sigma^B(s,T) + \theta_s^B)ds \quad \text{und} \quad dW_s^{S,\mathbb{P}_T^f} = dW_s^{S,\mathbb{P}^f} - \theta_s^S ds \ .$$

Mit Hilfe von diesen erhalten wir zusammen mit der Tatsache, dass die Prozesse θ und σ^B deterministisch sind, folgendes Resultat:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[-\int_t^T r_s ds + \int_t^T \theta_s^B dW_s^{B,\mathbb{P}^f} + \int_t^T \theta_s^S dW_s^{S,\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_t^T \left[\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right] ds\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \theta_s^B dW_s^{B,\mathbb{P}_T^f}\big|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \theta_s^S dW_s^{S,\mathbb{P}_T^f}\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad + \int_t^T \theta_s^B\left(\sigma^B(s,T) + \theta_s^B\right) ds + \int_t^T \left(\theta_s^S\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds \\
&= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds + \int_t^T \theta_s^B \sigma^B(s,T) ds,
\end{aligned}
$$

wobei die Erwartungswerte $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \theta_s^B dW_s^{B,\mathbb{P}_T^f}\big|\mathcal{F}_t\right]$ und $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T \theta_s^S dW_s^{S,\mathbb{P}_T^f}\big|\mathcal{F}_t\right]$ aufgrund der Martingaleigenschaft wegfallen. Die Berechnung der expliziten Darstellung von $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\big|\mathcal{F}_t\right]$ haben wir schon im dritten Kapitel ausführlich erläutert, siehe Proposition 3.3.1, und diese wird einfach übernommen. Insbesondere folgern wir aufgrund der Markoveigenschaft der Short-Rate:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right] \\
&= B(t,T)\left[\frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds + \int_t^T \theta_s^B\sigma^B(s,T) ds + r\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}\right. \\
&\qquad\left. + \left(\frac{\delta^2}{b^2} - a\right)\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} + (T-t)\right) - \frac{\delta^2}{2b}\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Die Wertfunktion nimmt daher analog zum Abschnitt 3.3 folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
V(t,x,n,r) &= -\frac{1}{\alpha}B(t,T)\exp\left(-\alpha B(t,T)^{-1}x + \alpha(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}\right) \\
&\cdot \exp\left[-r\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \left(\frac{\delta^2}{b^2} - a\right)\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} + (T-t)\right) + \frac{\delta^2}{2b}\left(\frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}\right)^2\right] \\
&\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds - \int_t^T \theta_s^B\sigma^B(s,T) ds\right).
\end{aligned}
$$

Man stellt schnell fest, dass sich nichts für die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$ und $\frac{V_{xr}}{V_{xx}}$ ändert, diese können aus dem Unterabschnitt 3.3.1 einfach übernommen werden. Für den suboptimalen Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$ ergibt sich somit mit den Formeln (4.3) und (4.4):

$$
\pi_u^{Sopt} = \frac{1}{\alpha}\left(\eta_u^S - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^{SB}\right)\frac{B(u,T)}{X_u^{\pi opt}},
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_u^{Bopt} = \frac{1}{\alpha}&\left(\left(1 + \frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\eta_u^B - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^S\right)\frac{B(u,T)}{X_u^{\pi opt}} \\
&\underbrace{-\frac{1}{\alpha}\frac{\sigma^B(u,T)}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left(B(u,T) - \alpha X_u^{\pi opt}\right)}_{\text{Korrekturterm}}.
\end{aligned}
$$

Wir bemerken, dass die beiden suboptimalen Anteile bei CARA-Nutzen auch wie in den vorherigen Kapiteln völlig unabhängig von dem Wert der Verbindlichkeiten sind.

4.3.2 CRRA-Nutzenfunktion

Das Ziel dieses Unterabschnittes ist die Lösung des Portfolioproblems bei CRRA-Nutzen $U(y) = \frac{1}{\gamma} y^\gamma$. Hierfür orientieren wir uns an dem Unterabschnitt 3.3.2. Für den optimalen Lagrange-Multiplikator und die Wertfunktion gilt:

$$(\lambda_t^{opt})^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1}{\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]} (x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))$$

$$V(t,x,n) = \frac{1}{\gamma} (x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))^\gamma \, \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma},$$

siehe Abschnitt 3.3. Der Erwartungswert $\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$ wird dabei ähnlich berechnet, wie im Unterabschnitt 3.3.2. Wir führen zunächst einen Maßwechsel von $\mathbb{P}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$ durch:

$$\begin{aligned}\bar{L}_t := \left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} &= \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^B dW_s^{B,\mathbb{P}} + \int_0^t \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^S dW_s^{S,\mathbb{P}}\right) \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^B\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^S\right)^2\right) ds\right)\end{aligned}$$

wobei folgende Prozesse

$$dW_s^{B,\bar{\mathbb{P}}} = dW_s^{B,\mathbb{P}} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^B ds$$

$$dW_s^{S,\bar{\mathbb{P}}} = dW_s^{S,\mathbb{P}} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^S ds$$

nach dem Satz von Girsanov Wiener Prozesse bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ sind. Aufgrund der Deterministik des Prozesses θ ergibt sich aus der Bayes-Formel:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^B\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^S\right)^2\right) ds\right) \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds\right) \\ &\cdot \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

vgl. (3.15). Eine ausführliche Berechnung des bedingten Erwartungswertes

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1} r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

ist nicht notwendig, diese findet man im Abschnitt 3.3, siehe Proposition 3.3.2. Wir übernehmen nur das Resultat. Insgesamt folgern wir mit der Markoveigenschaft der

Short-Rate:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^B\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s^S\right)^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right)\right) ds\right)\\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} r \frac{e^{-b(T-t)}-1}{b}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} a \left(\frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} + (T-t)\right)\right)\\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \frac{\delta^2}{b^2}\left((T-t) + \frac{2e^{-b(T-t)}-2}{b} - \frac{e^{-2b(T-t)}-1}{2b}\right)\right)\\
&\quad \cdot \exp\left(\int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}\theta_u^B \sigma^B(u,T) du\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Für die partielle Ableitung von $\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]$ nach r erhalten wir also:

$$
\frac{\partial \mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]}{\partial r} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)}-1)\mathbb{E}^{t,r}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] \quad .
$$

Daher ändert sich nichts für die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$ und $\frac{V_{xr}}{V_{xx}}$ und wir können diese aus dem Unterabschnitt 3.3.2 übernehmen.

Die Formeln (4.3) und (4.4) liefern den suboptimalen Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$. Der suboptimale Investitionsanteil in die Aktie ist abhängig vom Eigenkapital des Versicherungsunternehmens:

$$
\pi_u^{Sopt} = \frac{1}{1-\gamma}\left(\eta_u^S - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^{SB}\right)\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\underbrace{\left(X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)\right)}_{\text{Eigenkapital}}
$$

und der suboptimale Anteil vom Gesamtvermögen, welcher in den T^*-Bond investiert wird, ist die Summe aus zwei Komponenten. Der erste Term ist dabei proportional zum Prozentsatz des Eigenkapitals und der andere Term ist ein Korrekturterm:

$$
\begin{aligned}
\pi_u^{Bopt} = \frac{1}{1-\gamma}&\left(\left(1 + \frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\eta_u^B - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^S\right)\\
&\qquad \cdot \frac{1}{X_u^{\pi opt}}\underbrace{\left(X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)\right)}_{\text{Eigenkapital}}\\
&- \underbrace{\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\sigma^B(u,T)}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left(X_u^{\pi opt} - \frac{1}{\gamma}(n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)\right)}_{\text{Korrekturterm}} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Lösung des gemischten Aktien-Bond-Portfolioproblems in einem Marktmodell ohne Mortalitäsrisiken findet man zum Beispiel bei Kraft und Korn in [12]. Für die optimale Portfoliostrategie erhalten diese Autoren für die Nutzenfunktion $U(y) = \frac{1}{\gamma}y^\gamma$ folgende Ergebnisse:

$$
\pi_u^{Sopt} = \frac{1}{1-\gamma}\left(\eta_u^S - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^{SB}\right)
$$

und

$$\pi_u^{Bopt} = \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(1+\frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\eta_u^B - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^S\right) - \underbrace{\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\sigma^B(u,T)}{\sigma^B(u,T^*)}}_{\text{Korrekturterm}} .$$

Gibt es keine Überlebenden mehr in der Gruppe von Versicherten, also keine Verbindlichkeiten. So stimmen unsere Resultate mit denen von Kraft und Korn überein.

4.3.3 Logarithmische Nutzenfunktion

Unser Ziel ist, die Bestimmung des suboptimalen Portfolioprozesses für die Nutzenfunktion $U(y) = \ln(y)$. Die expliziten Darstellungen des optimalen Lagrange-Multiplikators und der Wertfunktion werden aus dem vorherigen Kapitel übernommen:

$$\begin{aligned} 1/\lambda_t^{opt} &= x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T) \\ V(t,x,n) &= \ln(\underbrace{x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)}_{\text{Eigenkapital}}) - \mathbb{E}^{t,r}\left[\ln(H(t,T))\right], \end{aligned}$$

wobei für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}^{t,r}\left[\ln(H(t,T))\right]$ ähnlich wie im Unterabschnitt 3.3.3 gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{t,r}\left[\ln(H(t,T))\right] &= r\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - \frac{a}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) - a(T-t) \\ &\quad - \int_t^T \theta_s^B \sigma^B(s,T)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\theta_s^B\right)^2 + \left(\theta_s^S\right)^2\right) ds . \end{aligned}$$

Die Wertfunktion hier stimmt also bis auf die Gestalt von $\mathbb{E}^{t,r}\left[\ln(H(t,T))\right]$ mit der Wertfunktion aus dem Unterabschnitt 3.3.3 überein. Da der erwähnte Erwartungswert nicht vom Vermögen x abhängt und somit für die Berechnung der partiellen Ableitungen nach x unwichtig ist, können wir die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$ und $\frac{V_{xr}}{V_{xx}}$ aus dem vorherigen Kapitel übernehmen. Durch Einsetzen dieser Werte in die Formeln (4.3) und (4.4) ergibt sich somit der suboptimale Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$. Der suboptimale Investitionsanteil in die Aktie ist auch wie bei CRRA-Nutzen abhängig vom Eigenkapital des Versicherungsunternehmens:

$$\pi_u^{Sopt} = \left(\eta_u^S - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^{SB}\right)\frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}{X_u^{\pi opt}}$$

und der suboptimale Anteil vom Gesamtvermögen, der in den T^*-Bond investiert wird, ist die Summe zweier Komponenten. Der erste Term berücksichtigt dabei den Wert der Verbindlichkeiten und beim zweiten Term handelt sich um einen Korrekturterm:

$$\begin{aligned} \pi_u^{Bopt} &= \left[\left(1+\frac{\left(\sigma_u^{SB}\right)^2}{\left(\sigma_u^S\right)^2}\right)\eta_u^B - \frac{\sigma_u^{SB}}{\sigma^B(u,T^*)}\eta_u^S\right]\frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}{X_u^{\pi opt}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\sigma^B(u,T)}{\sigma^B(u,T^*)}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}(n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}_{\text{Korrekturterm}} . \end{aligned}$$

Betrachtet man den Fall, dass es in der Gruppe keine überlebenden Versicherten mehr gibt, also den Fall, dass es keine Verbindlichkeiten bestehen, dann erhalten wir einen Portfolioprozess, welcher mit der Lösung des gemischten Aktien-Bond-Portfolioproblems ohne Mortalitätsrisiken übereinstimmt.

Kapitel 5

Optimierung in einem Mehrfaktor-Vasicek-Bondmarkt

In diesem Kapitel setzen wir uns zum Ziel, die Portfoliooptimierung für das Mehrfaktor-Vasicek-Modell unter Berücksichtigung von Sterblichkeitsrisiken durchzuführen. Dazu werden wir eine Kombination aus dem im ersten Kapitel eingeführten Versicherungsmarkt und einem vollständigen Finanzmarktmodell, bestehend aus einem Geldmarktkonto und k Nullkuponanleihen mit Maturitäten $T_1, \ldots, T_k > T$, betrachten. Unsere Aufgabe wird es also sein, das zur Zeit t verfügbares Vermögen auf ein Geldmarktkonto und k weitere Finanzgüter unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisken optimal aufzuteilen, sodass der maximale erwartete Nutzen des Überschusses erreicht wird. Für die Bewältigung der oben genannten Aufgabe werden zunächst der Short-Rate-Prozess $(r_t)_t$ durch das k-Faktor-Vasicek-Modell definiert und in diesem eine Bondpreisformel bestimmt. Weiter wird das Bond-Portfolioproblem im neuen kombinierten Modell zuerst allgemein und später bei logarithmischen, CARA- und CRRA-Nutzen explizit gelöst. Es handelt sich bei der Lösung des Problems dabei auch wie in den letzten Kapiteln um eine suboptimale Portfoliostrategie.

5.1 Das Mehrfaktor-Vasicek-Modell

In diesem Abschnitt werden wir uns als Erstes mit der Modellierung der Zinsrate $(r_t)_t$ im Mehrfaktor-Vasicek-Modell und als Nächstes mit der Ermittlung einer Formel für Bondpreise in diesem beschäftigen. Es werden weiter einige wichtige Eigenschaften des Prozesses $(r_t)_t$ untersucht, welche uns helfen werden, den Short-Rate-Prozess besser zu verstehen. Dabei orientieren wir uns hauptsächlich an dem Buch von Shreve „Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models“ [20].

5.1.1 Modellierung der Short-Rate

Es sei ein filtrierter vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^f, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$ gegeben, wobei $(\mathcal{F}_t^f)_{t \geq 0}$ die von einem k-dimensionalen Wiener Prozess

$$W_t^{\mathbb{P}^f} = (W_1^{\mathbb{P}^f}(t), \ldots, W_k^{\mathbb{P}^f}(t))^\top, \qquad t \geq 0$$

erzeugte Wiener-Filtration ist. Wir betrachten auf diesem einen arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt, bestehend aus $k+1$ Finanzgütern, einem Geldmarktkonto und k Bonds mit Fälligkeiten $T < T_1, \ldots, T_k$. Die Existenz eines zu $\mathbb{P}^f$ eindeutig bestimmten äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$ ist insbesondere gesichert. Das k-Faktor-Vasicek-Modell ist in der allgemeinen Form ein überparametrisiertes Modell, welches jedoch auf ein kanonisches k-Faktor-Modell reduziert werden kann, vgl. [20, Abschnitt 10.2]. In diesem kanonischen Modell wird die Short-Rate für einen k-dimensionalen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$dY_t = -\Lambda_k Y_t dt + dW_t^{\mathbf{Q}^f} \tag{5.1}$$

mit einer $(k \times k)$-Matrix

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda_{k1} & \ldots & \lambda_{kk} \end{pmatrix}, \, \lambda_{ii} > 0 \ \forall \ i \in \{1, \ldots, k\} \text{ und } k \geq 2$$

oder in komponentenweiser Schreibweise

$$\begin{aligned} dY_1(t) &= -\lambda_{11} Y_1(t) dt + dW_1^{\mathbf{Q}^f}(t) \\ dY_2(t) &= -(\lambda_{21} Y_1(t) + \lambda_{22} Y_2(t)) dt + dW_2^{\mathbf{Q}^f}(t) \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ dY_k(t) &= -(\lambda_{k1} Y_1(t) + \lambda_{k2} Y_2(t) \ldots + \lambda_{kk} Y_k(t)) dt + dW_k^{\mathbf{Q}^f}(t) \end{aligned}$$

wie folgt definiert

$$r_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i Y_i(t) \ .$$

Hierbei sind $\delta_0, \ldots, \delta_k$ Konstanten und

$$W_t^{\mathbf{Q}^f} = (W_1^{\mathbf{Q}^f}(t), \ldots, W_k^{\mathbf{Q}^f}(t))^\top, \quad t \geq 0$$

ein k-dimensionaler Wiener Prozess bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$. Das allgemeine Mehrfaktor-Vasicek-Modell und die Herleitung der kanonischen Form für den Fall $k = 2$ kann bei Shreve [20, Unterabschnitt 10.2.1] nachgeschlagen werden.

5.1.2 Bondpreise im Mehrfaktor-Vasicek-Modell

Nun wollen wir uns mit der Herleitung der Bondpreisformel im Mehrfaktor-Vasicek-Modell befassen. Dies geschieht in Anlehnung an [20, S. 411-413]. Es ist bekannt, dass der Preis eines T-Bonds zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ gegeben ist durch

$$B(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f} \left[\exp\left(-\int_t^T r_u du \right) | \mathcal{F}_t^f \right] \ .$$

Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass es im Einfaktor-Vasicek-Modell sich geschlossene Formeln für die Bondpreisprozesse angeben lassen. Unser Ziel ist es, eine geschlossene Formel für die Entwicklung des Bondpreises im Mehrfaktorfall des Vasicek-Modells zu ermitteln. Dafür sehen wir uns die Prozesse $Y_1, \ldots, Y_k$ genauer an. Diese sind als Lösungen ihrer stochastischen Differentialgleichungen markovsch, somit ist die

Short-Rate r_t als von $Y_1(t), \dots, Y_k(t)$ abhängige Funktion auch ein Markov-Prozess. Es gibt daher eine Funktion $g(t, y_1, \dots, y_k)$, sodass für den Preis des T-Bonds gilt:

$$B(t,T) = g(t, Y_1(t), \dots, Y_k(t)) \ .$$

Da der abdiskontierte Bondpreisprozess weiter ein $\mathbf{Q}^f$-Martingal ist, gibt es nach dem Martingaldarstellungssatz einen previsiblen Prozess H, sodass folgende stochastische Differentialgleichung:

$$d\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right) = H(t)dW^{\mathbf{Q}^f}(t) \tag{5.2}$$

gilt. Wir wenden die Itô-Formel auf den abdiskontierten Bondpreisprozess an und bekommen folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right) &= d\left(\frac{g(t, Y_1(t), \dots, Y_k(t))}{\beta(t)}\right) \\
&= -r_t \frac{g(t, Y_1(t), \dots, Y_k(t))}{\beta(t)} dt + \frac{1}{\beta(t)} dg(t, Y_1(t), \dots, Y_k(t)) \\
&= \frac{1}{\beta(t)}\Bigg[- r_t g(t, Y_1(t), \dots, Y_k(t))dt + g_t dt + \sum_{i=1}^{k} g_{y_i} dY_i(t) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} g_{y_i y_j} d\left\langle Y_i, Y_j \right\rangle (t) \Bigg] \\
&= \frac{1}{\beta(t)}\Bigg[- \left(\delta_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i Y_i(t)\right) g(t, Y_1(t), \dots, Y_k(t)) + g_t \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{k} g_{y_i} \left(\sum_{n=1}^{i} \lambda_{in} Y_n(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} g_{y_i y_i} \Bigg] dt \\
&\quad + \frac{1}{\beta(t)} \sum_{i=1}^{k} g_{y_i} dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t) \ .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Dabei sind g_t, g_{y_i} und $g_{y_i y_i}$ die partiellen Ableitungen der Funktion g, $i \in \{1, \dots, k\}$. Der Vergleich der Darstellungen (5.2) und (5.3) zeigt, dass der dt-Term in (5.3) verschwinden muss. Wir erhalten also folgendes Gleichungssystem, für alle $t \in [0, T)$ und $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(\delta_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i y_i\right) g(t, y_1, \dots, y_k) + g_t - \sum_{i=1}^{k} g_{y_i}\left(\sum_{n=1}^{i} \lambda_{in} y_n\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} g_{y_i y_i} \\
1 &= g(T, y_1, \dots, y_k),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei die Endbedingung wegen der Gleichheit $B(T,T) = 1$ erfüllt ist. Als Lösung des oben genannten Gleichungssystems kommt eine Funktion der Form

$$g(t, y_1, \dots, y_k) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} y_i C_i(T-t) - A(T-t)\right) \tag{5.5}$$

in Frage.

Aus der Endbedingung (5.4) folgern wir zunächst, dass

$$A(0) = C_1(0) = \cdots = C_k(0) = 0$$

gelten muss. Weiter setzen wir $\tau := T - t$ und erhalten für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\frac{d}{dt}C_i(\tau) = \frac{d}{dt}\frac{d(\tau)}{d(\tau)}C_i(\tau) = \frac{dC_i(\tau)}{d(\tau)}\frac{dT - dt}{dt} = -\frac{dC_i(\tau)}{d(\tau)}$$

und analog gilt auch:

$$\frac{d}{dt}A(\tau) = -\frac{dA(\tau)}{d(\tau)} \ .$$

Somit erhalten wir für die partiellen Ableitungen der Funktion g aus (5.5) folgende Resultate:

$$g_t = \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \frac{dC_i}{d\tau} + \frac{dA}{d\tau}\right) g,$$

$$g_{y_i} = -C_i g \quad \text{und} \quad g_{y_i y_j} = C_i C_j g \quad \forall i, j = 1, \ldots, k \ .$$

Das Einsetzen der oben gewonnenen Ergebnisse in unser Gleichungssystem liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \Bigg[& y_1 \left(\frac{dC_1}{d\tau} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i1} C_i - \delta_1\right) + y_2 \left(\frac{dC_2}{d\tau} + \sum_{i=2}^{k} \lambda_{i2} C_i - \delta_2\right) \\ & + \ldots + y_k \left(\frac{dC_k}{d\tau} + \lambda_{kk} C_k - \delta_k\right) + \frac{dA}{d\tau} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} C_i^2 - \delta_0 \Bigg] g \quad \forall y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Da die obige Gleichung für alle $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$ gelten muss, müssen alle zu y_i gehörigen Terme gleich Null sein und somit muss auch der letzte Term verschwinden, also:

$$\frac{dC_1}{d\tau} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i1} C_i - \delta_1 = \frac{dC_2}{d\tau} + \sum_{i=2}^{k} \lambda_{i2} C_i - \delta_2 = \ldots = \frac{dC_k}{d\tau} + \lambda_{kk} C_k - \delta_k = 0$$

$$\frac{dA}{d\tau} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} C_i^2 - \delta_0 = 0 \ .$$

Daher erhält man ein neues lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dC_1(\tau)}{d\tau} &= \delta_1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i1} C_i(\tau) \\ \frac{dC_2(\tau)}{d\tau} &= \delta_2 - \sum_{i=2}^{k} \lambda_{i2} C_i(\tau) \\ &\vdots \\ \frac{dC_k(\tau)}{d\tau} &= \delta_k - \lambda_{kk} C_k(\tau) \\ \frac{dA(\tau)}{d\tau} &= \delta_0 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} C_i^2(\tau) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $A(0) = C_1(0) = \cdots = C_k(0) = 0$.

Aus den Gleichungen $C_k(0) = 0$ und $\dfrac{dC_k(\tau)}{d\tau} = \delta_k - \lambda_{kk} C_k(\tau)$ ergibt sich die Lösung für C_k:

$$C_k(\tau) = \frac{\delta_k}{\lambda_{kk}} \left(1 - \exp(-\lambda_{kk}\tau)\right) \ .$$

Weiter können wir die gewonnene Darstellung benutzen, um C_{k-1} zu ermitteln und diese wird dann bei der Ermittlung von C_{k-2} gebraucht usw. Somit können C_{k-1} bis C_1 nach und nach und zuletzt auch A über das Integral

$$A(\tau) = \int_0^\tau \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} C_i^2(s) + \delta_0 \right] ds$$

bestimmt werden. Für die geschlossene Bondpreisformel im k-Faktor-Vasicek-Modell gilt daher mit C_i und A:

$$B(t,T) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} Y_i(t) C_i(T-t) - A(T-t) \right) \ . \tag{5.6}$$

Bemerkung 5.1.1. Die Volatilität σ eines Bonds im Mehrfaktorfall des Vasicek-Modells ist auch wie im Einfaktor-Vasicek-Modell deterministisch. Wir wollen eine explizite Darstellung von σ für einen T-Bond zur Zeit t angeben. Dafür betrachten wir zunächst die Dynamik des Bondpreisprozesses, gegeben durch

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(t,T) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t),$$

und wenden die Itô-Formel auf den abdiskontierten Preisprozess des T-Bonds an:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right) &= -r_t \frac{1}{\beta(t)} B(t,T)dt + \frac{1}{\beta(t)} dB(t,T) \\ &= -r_t \frac{1}{\beta(t)} B(t,T)dt + \frac{1}{\beta(t)} B(t,T) \left(r_t dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(t,T) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t) \right) \\ &= \frac{B(t,T)}{\beta(t)} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(t,T) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t) \ . \end{aligned}$$

Dann vergleichen wir die oben erhaltene Darstellung mit der von (5.3) und folgern zusammen mit (5.6):

$$\frac{B(t,T)}{\beta(t)} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(t,T) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t) = -\frac{B(t,T)}{\beta(t)} \sum_{i=1}^{k} C_i(T-t) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t) \ .$$

Schließlich liefert der Vergleich der $dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t)$-Terme die Gleichheit

$$\sigma_i(t,T) = -C_i(T-t) \quad \forall\ i = 1, \ldots, k \ . \tag{5.7}$$

Aus dem Kapitel 3 wissen wir, dass die Short-Rate im Einfaktor-Vasicek-Modell bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes normalverteilt ist, vgl. Satz 3.1.1. Wir wollen zeigen, dass der Prozess $(r_t)_t$ diese Eigenschaft auch im k-Faktorfall des Vasicek-Modells für $k \geq 2$ besitzt. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 5.1.2. Es sei

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda_{k1} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ und $k \geq 2$. Dann lässt sich die Matrix wie folgt schreiben

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \Lambda_{k-1} & 0 \\ \lambda' & \lambda_{kk} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\Lambda_{k-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda_{k-11} & \dots & \lambda_{k-1k-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda' = (\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kk-1})$$

und es gilt

$$(\Lambda_k t)^n = \begin{pmatrix} (\Lambda_{k-1} t)^n & 0 \\ P_{k,n} & (\lambda_{kk} t)^n \end{pmatrix}$$

mit

$$P_{k,n} = P_{k,n-1} \Lambda_{k-1} t + (\lambda_{kk} t)^{n-1} \lambda' t \quad \text{und} \quad P_{k,0} = 0 \; .$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

IA: Für $n = 0$ gilt:

$$(\Lambda_k t)^0 = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_{k-1} t)^0 & 0 \\ P_{k,0} & (\lambda_{kk} t)^0 \end{pmatrix},$$

wobei I_{k-1} die Einheitsmatrix der Dimension $k - 1$ ist, d.h. die Behauptung stimmt für $n = 0$.

IS: Wir nehmen an, die Aussage gelte für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} (\Lambda_k t)^{n+1} = (\Lambda_k t)^n \Lambda_k t &\overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} (\Lambda_{k-1} t)^n & 0 \\ P_{k,n} & (\lambda_{kk} t)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{k-1} t & 0 \\ \lambda' t & \lambda_{kk} t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\Lambda_{k-1} t)^{n+1} & 0 \\ P_{k,n} \Lambda_{k-1} t + (\lambda_{kk} t)^n \lambda' t & (\lambda_{kk} t)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\Lambda_{k-1} t)^{n+1} & 0 \\ P_{k,n+1} & (\lambda_{kk} t)^{n+1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

□

Insbesondere gilt für $k = 2$ und $\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$ bzw. $\lambda_{11} = \lambda_{22}$:

$$(\Lambda_2 t)^n = \begin{pmatrix} (\lambda_{11} t)^n & 0 \\ \lambda_{21} t^n \frac{\lambda_{11}^n - \lambda_{22}^n}{\lambda_{11} - \lambda_{22}} & (\lambda_{22} t)^n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\Lambda_2 t)^n = \begin{pmatrix} (\lambda_{11} t)^n & 0 \\ k \lambda_{21} \lambda_{11}^{n-1} t^n & (\lambda_{11} t)^n \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

dies kann analog zum Lemma 5.1.2 mittels vollständiger Induktion nach n bewiesen werden, siehe zum Beispiel [20, Lemma 10.2.3].

Satz 5.1.3. Die Short-Rate $(r_t)_t$ ist im Mehrfaktor-Vasicek-Modell bezüglich $\mathbf{Q}^f$ normalverteilt.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, müssen wir zeigen, dass die Prozesse Y_i für alle $i = 1, \ldots, k$ gaußverteilt sind. Dafür folgert man als Erstes nach Lemma 5.1.2 mit der vollständigen Induktion, dass für alle $k \geq 2$ gilt:

$$\frac{d}{dt} e^{\Lambda_k t} = e^{\Lambda_k t} \Lambda_k \ . \tag{5.9}$$

Für die Induktionsannahme benutzt man dabei die Resultate aus (5.8) und für den Induktionsschritt das vorherige Lemma. Mit (5.9) ergibt sich als Nächstes, dass

$$d(e^{\Lambda_k t} Y_t) = e^{\Lambda_k t} \Lambda_k Y_t dt + e^{\Lambda_k t} dY_t = e^{\Lambda_k t}(\Lambda_k Y_t dt + dY_t) \overset{(5.1)}{=} e^{\Lambda_k t} dW_t^{\mathbf{Q}^f}$$

und somit auch

$$e^{\Lambda_k t} Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\Lambda_k s} dW_s^{\mathbf{Q}^f}$$

gelten. Daraus folgt wegen der Invertierbarkeit der Dreiecksmatrix $e^{\Lambda_k t}$ schließlich:

$$Y_t = e^{-\Lambda_k t} Y_0 + \int_0^t e^{-\Lambda_k (t-s)} dW_s^{\mathbf{Q}^f} \ . \tag{5.10}$$

Daher sind die Prozesse Y_i für alle $i = 1, \ldots, k$ gaußverteilt und die Short-Rate ist als von $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ abhängige Funktion $r_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i Y_i(t)$, $t \geq 0$ normalverteilt. $\square$

Bemerkung 5.1.4. Da die Short-Rate im Mehrfaktor-Vasicek-Modell bezüglich $\mathbf{Q}^f$ normalverteilt ist, gilt für den Preis des T-Bonds zum Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) | \mathcal{F}_t^f\right] \\ &= \exp\left(-\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t^f\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t^f\right]\right) \ . \end{aligned}$$

Um den Preis des Bonds zu ermitteln, müssen wir also den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von $\int_t^T r_s ds$ bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes berechnen. Wegen der Definition der Short-Rate $r_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i Y_i(t)$ bestimmen wir zuerst den bedingten Erwartungswert von

$$\int_t^T \delta^\top Y_s ds,$$

wobei wir mit δ den k-dimensionalen Vektor $(\delta_1, \ldots, \delta_k)^\top$ bezeichnen. Nach (5.10) gilt:

$$\int_t^T \delta^\top Y_s ds = \int_t^T \delta^\top e^{-\Lambda_k (s-t)} Y_t ds + \int_t^T \int_t^s \delta^\top e^{-\Lambda_k (s-v)} dW_v^{\mathbf{Q}^f} ds$$

und der bedingte Erwartungswert von $\int_t^T \delta^\top Y_s ds$ ist somit gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T \delta^\top Y_s ds \big| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T \delta^\top e^{-\Lambda_k(s-t)} Y_t ds + \int_t^T \int_t^s \delta^\top e^{-\Lambda_k(s-v)} dW_v^{\mathbf{Q}^f} ds \big| \mathcal{F}_t^f\right] \\
&= \int_t^T \delta^\top e^{-\Lambda_k(s-t)} Y_t ds + \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T \int_v^T \delta^\top e^{-\Lambda_k(s-v)} ds dW_v^{\mathbf{Q}^f} \big| \mathcal{F}_t^f\right] \\
&= \left[-\delta^\top e^{-\Lambda_k(s-t)} \Lambda_k^{-1} Y_t\right]_t^T + \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T \left[-\delta^\top e^{-\Lambda_k(s-v)} \Lambda_k^{-1}\right]_v^T dW_v^{\mathbf{Q}^f} \big| \mathcal{F}_t^f\right] \\
&= \delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-t)}) \Lambda_k^{-1} Y_t + \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T \delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-v)}) \Lambda_k^{-1} dW_v^{\mathbf{Q}^f} \big| \mathcal{F}_t^f\right]}_{=0,\ \text{da Martingal}} .
\end{aligned}
$$

Für den bedingten Erwartungswert von $\int_t^T r_s ds$ bezüglich $\mathbf{Q}^f$ ergibt sich also:

$$
\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T r_s ds \big| \mathcal{F}_t^f\right] = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T (\delta_0 + \delta^\top Y_s) ds \big| \mathcal{F}_t^f\right] = \delta_0 (T-t) + \delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-t)}) \Lambda_k^{-1} Y_t
$$

und für die bedingte Varianz gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T r_s ds \big| \mathcal{F}_t^f\right] &= \mathrm{Var}^{\mathbf{Q}^f}\left[\int_t^T \delta^\top Y_s ds \big| \mathcal{F}_t^f\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\left(\int_t^T \delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-v)}) \Lambda_k^{-1} dW_v^{\mathbf{Q}^f}\right)^2 \big| \mathcal{F}_t^f\right] \\
&= \int_t^T \|\delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-v)}) \Lambda_k^{-1}\|^2 dv .
\end{aligned}
$$

Schließlich folgern wir für den Preis des T-Bonds zum Zeitpunkt t:

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^f}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \big| \mathcal{F}_t^f\right] \\
&= \exp\left[-\delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-t)}) \Lambda_k^{-1} Y_t - \int_t^T \left[-\frac{1}{2}\|\delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-s)}) \Lambda_k^{-1}\|^2 + \delta_0\right] ds\right]
\end{aligned}
$$

Der Vergleich der oben gewonnenen Darstellung für $B(t,T)$ mit (5.6) liefert zusammen mit der Bemerkung 5.1.1 folgendes Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
\delta^\top (I_k - e^{-\Lambda_k(T-t)}) \Lambda_k^{-1} &= (C_1(T-t), \ldots, C_k(T-t)) \\
&= -(\sigma_1(t,T), \ldots, \sigma_k(t,T)) .
\end{aligned}
$$

Die oben erhaltenen Resultate implizieren insbesondere für die Short-Rate:

$$
\int_t^T r_s ds = \delta_0 (T-t) - \sum_{i=1}^k \sigma_i(t,T) Y_i(t) - \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(s) . \tag{5.11}
$$

5.2 Das k-dimensionale Bondmarktmodell

Wie schon am Anfang des Abschnittes 5.1 erwähnt wurde, besteht unser arbitragefreier und vollständiger Finanzmarkt aus $k+1$ Finanzgütern. Es stehen bis zu einem Zeitpunkt T also ein Geldmarktkonto β_t und k Bonds, deren Preisprozesse mit $B(t,T_j)$ für $j=1,\dots,k$ und $T_1,\dots,T_k > T$ bezeichnet werden, als Investitionsmöglichkeiten zur Verfügung. Die Dynamik vom Geldmarktkonto ist gegeben durch:

$$d\beta_t = \beta_t r_t dt$$

und für $j=1,\dots,k$ sind die Bondpreisprozesse $B(t,T_j)$ die Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen:

$$\frac{dB(t,T_j)}{B(t,T_j)} = r_t dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(t,T_j) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(t) = r_t dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(t,T_j) \left(dW_i^{\mathbb{P}^f}(t) - \theta_i(t)dt \right)$$

oder in Matrixschreibweise für den k-dimensionalen Vektor $\mathbb{1}_k = (1,\dots,1)^\top$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dB(t,T_1)}{B(t,T_1)}, \dots, \frac{dB(t,T_k)}{B(t,T_k)} \right)^\top &= \mathbb{1}_k r_t dt + \Sigma(t) dW_t^{\mathbf{Q}^f} \\ &= \mathbb{1}_k r_t dt + \Sigma(t) \left(dW_t^{\mathbb{P}^f} - \theta_t dt \right), \end{aligned}$$

wobei $\Sigma(t)$ die Volatilitätsmatrix ist, welche wie folgt definiert ist:

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t,T_1) & \dots & \sigma_k(t,T_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(t,T_k) & \dots & \sigma_k(t,T_k) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

und es sei angenommen, dass diese für jedes t invertierbar ist. Hierfür ist weiter

$$W_t^{\mathbf{Q}^f} = (W_1^{\mathbf{Q}^f}(t), \dots, W_k^{\mathbf{Q}^f}(t))^\top, \quad t \geq 0$$

der k-dimensionale Wiener Prozess bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$, gegeben durch:

$$L_t := \left. \frac{d\mathbf{Q}^f}{d\mathbb{P}^f} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \int_0^t \theta_i(s) dW_i^{\mathbb{P}^f}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds \right)$$

für einen previsiblen Prozess $\theta_t = (\theta_1(t), \dots, \theta_k(t))^\top$ mit

$$\mu_j(t) + \sum_{i=1}^{k} \theta_i(t,T_j)\theta_i(t) = r_t, \quad 1 \leq j \leq k \ .$$

Wir setzen voraus, dass der Marktpreis des Risikos θ deterministisch ist.

Weiter ist der globale Markt als Kombination aus dem k-dimensionalen Bondmarktmodell und dem Versicherungsmarkt aus dem ersten Kapitel aufgrund der Mortalitätsrisiken unvollständig. Im Unterschied zu den kombinierten Modellen aus den Kapiteln 2-4 gibt es in diesem genau $k+1$ Finanzgüter, ein Geldmarktkonto und k Bonds, in welche investiert werden kann.

5.3 Bestimmung des suboptimalen Portfolios

In diesem Abschnitt bleibt unsere Zielsetzung unverändert. Die Aufgabe besteht darin, die Anlagepolitik so zu optimieren, dass der erwartete Nutzen des Überschusses im neuen globalen Markt maximiert wird. Für die Bewältigung der Aufgabe gehen wir genauso vor wie im zweiten Kapitel. Zuerst wird das statische Optimierungsproblem mit Nebenbedingung im neuen kombinierten Modell formuliert und gelöst, und dann wird die suboptimale Portfoliostrategie als Maximierer der zugehörigen HJB-Ungleichung für die Wertfunktion des statischen Problems bestimmt. Im Unterschied zu den letzten zwei Kapiteln ist die Short-Rate r_t im Mehrfaktor-Vasicek-Modell eine von Markov-Prozessen $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ abhängige Funktion. Daher haben wir weitere Bedingungen zu beachten.

Sind $\pi_1(u), \ldots, \pi_k(u)$ die möglichen Investitionsanteile vom Gesamtvermögen in die k Bonds zur Zeit u, dann wird der Rest in das Geldmarktkonto investiert und der zugehörige Vermögensprozess $(X_u^\pi)_{u \geq t}$ erfüllt unter der Berücksichtigung der Selbstfinanzierungsbedingung folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_u^\pi}{X_u^\pi} &= \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \frac{dB(u,T_j)}{B(u,T_j)} + \frac{d\beta_u}{\beta_u} \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \left(r_u du + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(u,T_j) dW_i^{\mathbf{Q}^f}(u) \right) + r_u du \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \right) \\
&= r_u du + \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \left(- \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(u,T_j)\theta_i(u) du + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(u,T_j) dW_i^{\mathbb{P}^f}(u) \right) \\
&= r_u du - \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(u,T_j)\theta_i(u) du + \sum_{j=1}^{k} \pi_j(u) \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(u,T_j) dW_i^{\mathbb{P}^f}(u) \; .
\end{aligned}$$

Unser Ziel ist es also, für beliebigen festen Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den zugehörigen Anfangsbedingungen $N_t = n$ und $Y_i(t) = y_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und das zu dieser Zeit gegebene Vermögen x folgendes Optimierungsproblem:

$$V(t, x, n, y_1, \ldots, y_k) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}_t(x)} E^{t,x,n,y_1,\ldots,y_k} \left[U(X_T - (n_a - N_T)K) \right] \tag{5.12}$$

mit der Budgetrestriktion als Nebenbedingung

$$\mathcal{A}_t(x) = \left\{ X_T \middle| \; X_T \geq 0, \, \mathbb{E}^{t,x,n,y_1,\ldots,y_k} \left[H(t,T) X_T \right] \leq x \right\} \tag{5.13}$$

zu lösen. Dabei ist $\mathbb{E}^{t,n,y_1,\ldots,y_k}[.]$ die Kurzschreibweise für den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$ gegeben, dass $N_t = n$, $X_t^\pi = x$ und $Y_i(t) = y_i$ für $i = 1, \ldots, k$ sind:

$$\mathbb{E}^{t,x,n,y_1,\ldots,y_k}[.] = \mathbb{E}^{t,x,n,y_1,\ldots,y_k} \left[. \middle| X_t^\pi = x, N_t = n, Y_1(t) = y_1, \ldots, Y_k(t) = y_k \right] \; .$$

Weiter sind $H(t,T)$ definiert wie in (2.2) und U eine wie im Unterabschnitt 1.4.1 vorgestellte Nutzenfunktion.

Mittels der Lagrange-Methode können wir ähnlich wie im zweiten Kapitel das angestrebte Zielvermögen und die Wertfunktion in Abhängigkeit von dem optimalen Lagrange-Multiplikator allgemein bestimmen. Es gilt:

$$X_T^{opt} = I(\lambda_t^{opt} H(t,T)) + (n_a - N_T)K$$

$$V(t,x,n,y_1,\ldots,y_k) = \mathbb{E}^{t,x,n,y_1,\ldots,y_k}\left[U(I(\lambda_t^{opt}H(t,T)))\right],$$

wobei der optimale Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt ist durch:

$$x = \mathbb{E}^{t,x,n,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)(I(\lambda_t^{opt}H(t,T) + (n_a - N_T)K)\right].$$

Wegen der Markoveigenschaft der Prozesse $Y_1,\ldots,Y_k$ und aus der Unabhängigkeit zwischen der Mortalität und dem Finanzmarkt folgern wir weiter:

$$x = \mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)I(\lambda_t^{opt}H(t,T))\right] + B(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}, \tag{5.14}$$

wobei $B(t,T)$ von t und $y_1,\ldots,y_k$ abhängt.

Die Bestimmung der suboptimalen Anlagestrategie erfolgt dabei ähnlich wie in den letzten Kapiteln mit Hilfe des HJB-Ansatzes. Mittels dessen lässt sich in analoger Weise herleiten, dass die Wertfunktion V für alle zulässigen Strategien und jedes $(t,x,n,y_1,\ldots,y_k)$ die eindeutige Lösung der HJB-Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \geq V_t &+ \sup_\pi A^\pi V(t,x,n,y_1,\ldots,y_k) \\ &+ (V(t,x,n+1,y_1,\ldots,y_k) - V(t,x,n,y_1,\ldots,y_k))(n_a-n)\mu(a+t) \end{aligned}$$

mit der Randbedingung $V(T,x,n,y_1,\ldots,y_k) = U(x-(n_a-n)K)$ ist. Der Maximierer dieser HJB-Ungleichung definiert nach Verifikationstheorem die suboptimale Portfoliostrategie. Um diese Strategie zu bestimmen, müssen wir also den Erzeuger $A^\pi V(u,X_u^\pi,N_u,Y_1(u),\ldots,Y_k(u))$, welcher wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned} &A^\pi V(u,X_u^\pi,N_u,Y_1(u),\ldots,Y_k(u)) \\ &= \left[r_u - \sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_j)\theta_i(u)\right] X_u^\pi V_x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k\left[\sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sigma_i(u,T_j)\right]^2 (X_u^\pi)^2 V_{xx} \\ &- \sum_{i=1}^k\left[\sum_{n=1}^i \lambda_{in}Y_n(u) + \theta_i(u)\right] V_{y_i} + \sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_j)X_u^\pi V_{xy_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k V_{y_iy_i}, \end{aligned}$$

für jedes $u \geq t$ bezüglich π_u maximieren.

Das Ableiten nach $\pi_j(u)$ für $j = 1, \ldots, k$ liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_1)\sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sigma_i(u,T_j) - \sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_1)\theta_i(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} + \sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_1)\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} = 0 \\ &\sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_2)\sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sigma_i(u,T_j) - \sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_2)\theta_i(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} + \sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_2)\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} = 0 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_k)\sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sigma_i(u,T_j) - \sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_k)\theta_i(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} + \sum_{i=1}^k \sigma_i(u,T_k)\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} = 0 \end{aligned}$$

Durch das Addieren aller Gleichungen erhalten wir weiter:

$$\sum_{i=1}^k\left[\left(\sum_{n=1}^k \sigma_i(u,T_n)\right)\left(\sum_{j=1}^k \pi_j(u)\sigma_i(u,T_j) - \theta_i(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} + \frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi}\right)\right] = 0$$

Die gewonnene Gleichung ist dabei genau dann erfüllt, wenn für jedes $i = 1, \ldots, k$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j^{opt}(u)\sigma_i(u,T_j) = \theta_i(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}},\ u \geq t \tag{5.15}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\pi_u^{opt}\Sigma(u) = \theta_u^\top \frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \frac{V_{xy}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}},\ u \geq t \tag{5.16}$$

mit

$$\pi_u^{opt} = \left(\pi_1^{opt}(u), \ldots, \pi_k^{opt}(u)\right) \quad \text{und} \quad V_{xy} = (V_{xy_1}, \ldots, V_{xy_k})\ .$$

Dies ist die suboptimale Portfoliostrategie mit dem zugehörigen Vermögensprozess $(X_u^{\pi opt})_{u \geq t}$.

5.4 Anwendung auf spezielle Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt geht es um die explizite Lösung des verallgemeinerten Bond-Portfolioproblems im Mehrfaktor-Vasicek-Modell unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken bei logarithmischen, CARA- und CRRA-Nutzen. Unsere Aufgabe wird es also sein, ein aus einem Geldmarktkonto und k Bonds bestehendes Portfolio für die drei Nutzenfunktionen zum Zeitpunkt T so zu optimieren, dass der erwartete Nutzen des Überschusses maximiert wird.

5.4.1 CARA-Nutzenfunktion

Wir betrachten hier die Anwendung der CARA-Nutzenfunktion aus dem Unterabschnitt 2.6.1 auf das Portfolioproblem in unserem neuen globalen Markt. Bei der Bestimmung der expliziten Darstellungen des optimalen Lagrange-Multiplikators und der Wertfunktion orientieren wir uns an dem Unterabschnitt 3.3.1. Da viele Schritte analog durchgeführt werden können, werden einige Rechnungen ausgelassen.

Ähnlich wie im Abschnitt 3.3 erhalten wir für den optimalen Lagrange-Multiplikator bei CARA-Nutzen mit (5.14) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\lambda_t^{opt} &= \exp\left(-\alpha B(t,T)^{-1}\left(x - B(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}\right)\right)\\ &\quad \cdot \exp\left(-B(t,T)^{-1}\mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right]\right).\end{aligned}$$

Um die Wertfunktion explizit angeben zu können, führen wir zunächst ähnlich wie im Abschnitt 3.3 einen Maßwechsel von $\mathbf{Q}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}^v \otimes \mathbb{P}_T^f$ durch:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbf{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\sum_{i=1}^{k}\int_0^t \sigma_i(s,T)dW_i^{\mathbf{Q}^f}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma(s,T)\|^2 ds\right),$$

wobei $\mathbb{P}_T^f$ das T-Forwardmartingalmaß ist und $dW_i^{\mathbb{P}_T}(s) = dW_i^{\mathbf{Q}}(s) - \sigma_i(s,T)ds$ für $i = 1, \ldots, k$ nach dem Satz von Girsanov eindimensionale Wiener Prozesse bezüglich $\mathbb{P}_T$ sind. Es folgt mittels der Formel von Bayes analog zum Unterabschnitt 3.3.1:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]\ .\end{aligned}$$

Dabei geschieht die Bestimmung des Erwartungswertes $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln(H(t,T))\middle|\mathcal{F}_t\right]$ analog zur Proposition 3.3.1. Da θ und σ deterministisch sind, folgern wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln\left(H(t,T)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] &= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \int_t^T \theta_i(s)\sigma_i(s,T)ds + \frac{1}{2}\int_t^T \|\theta_s\|^2 ds\ .\end{aligned}$$

Nach (5.11) und wegen der Gleichheit

$$\sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)dW_i(s)^{\mathbf{Q}^f} = \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)^2 ds + \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)dW_i(s)^{\mathbb{P}_T^f}$$

ergibt sich weiter für den bedingten Erwartungswert von $\int_t^T r_s ds$ bezüglich $\mathbb{P}_T$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\middle|\mathcal{F}_t\right] = \delta_0(T-t) - \sum_{i=1}^k \sigma_i(t,T)Y_i(t) - \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)^2 ds\ .$$

Somit gilt aufgrund der Markoveigenschaft der Prozesse $Y_1,\dots Y_k$ insbesondere:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{t,y_1,\dots,y_k}\left[H(t,T)\ln(H(t,T))\right] \\ &= B(t,T)\left[\sum_{i=1}^k \int_t^T \theta_i(s)\sigma_i(s,T)ds + \frac{1}{2}\int_t^T \|\theta_s\|^2 ds - \delta_0(T-t)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum_{i=1}^k y_i\sigma_i(t,T) + \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)^2 ds\right]\ .\end{aligned}$$

Mit den gewonnenen Resultaten erhält man weiter für die Wertfunktion:

$$\begin{aligned}&V(t,x,n,y_1,\dots,y_k) \\ &\quad = -\frac{1}{\alpha}B(t,T)\exp\left[-\alpha B(t,T)^{-1}(x - B(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t})\right] \\ &\qquad\qquad \cdot \exp\left[\delta_0(T-t) - \sum_{i=1}^k y_i\sigma_i(t,T) - \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)^2 ds\right] \\ &\qquad\qquad \cdot \exp\left[-\sum_{i=1}^k \int_t^T \theta_i(s)\sigma_i(s,T)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \|\theta_s\|^2 ds\right]\end{aligned}$$

Nun können wir die partiellen Ableitungen der Wertfunktion bezüglich x und y_i und daher auch die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$, $\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}$ berechnen, mit

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial y_i} = -C_i(T-t)B(t,T) \overset{(5.7)}{=} \sigma_i(t,T)B(t,T), \quad i = 1,\dots,k \tag{5.17}$$

ergibt sich ähnlich wie im dritten Kapitel :

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -\frac{1}{\alpha}B(t,T) \ \text{ und } \ \frac{V_{xy_i}}{V_{xx}} = \frac{1}{\alpha}\sigma_i(t,T)\left(B(t,T) - \alpha x\right), \quad i = 1,\dots,k\ . \tag{5.18}$$

Es folgt für den suboptimalen Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$ mit (5.16) und (5.18):

$$\pi_u^{opt} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left(\theta_u^\top B(u,T) + \sigma(u,T)^\top \left(B(u,T) - \alpha X_u^{\pi opt}\right)\right)\Sigma(u)^{-1},$$

wobei

$$\sigma(u,T) = (\sigma_1(u,T),\dots,\sigma_k(u,T))^\top$$

ist. Die suboptimale Anlagestrategie lässt auch wie im Modell mit einem Geldmarktkonto und nur einem einzigen Bond als Investitionsmöglichkeiten den Wert der Verbindlichkeiten völlig unberücksichtigt. Wir bemerken insbesondere, dass die oben erhaltene Lösung eine Verallgemeinerung des Resultates aus dem Unterabschnitt 3.3.1 ist.

5.4.2 CRRA-Nutzenfunktion

In diesem Unterabschnitt handelt es sich um die Bestimmung der suboptimalen Portfoliostrategie bei CRRA-Nutzen. Dabei orientieren wir uns an dem Unterabschnitt 3.3.2.

Der optimale Lagrange-Multiplikator ist nach (5.14) gegeben durch:

$$(\lambda_t^{opt})^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1}{\mathbb{E}^{t,y_1,\dots,y_k}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]}\left(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\right)$$

Um den Erwartungswert $\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\big|\mathcal{F}_t\right]$ explizit anzugeben, führen wir ähnlich wie im Abschnitt 3.3 einen Maßwechsel von $\mathbb{P}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$ durch:

$$\left.\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\sum_{i=1}^k\int_0^t \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_i(s)dW_i^{\mathbb{P}}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\|^2 ds\right)$$

mit einem k-dimensionalen Wiener Prozess $dW_s^{\bar{\mathbb{P}}} = dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s ds$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$, vgl. den Satz von Girsanov. Die Deterministik des Prozesses θ ausnutzend erhalten wir mittels der Bayes-Formel analog zum Kapitel 3:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\big|\mathcal{F}_t\right] &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \|\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\|^2 ds - \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}\|\theta_s\|^2 ds\right)\\ &\quad\cdot \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}r_s ds\right)\big|\mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

Die Berechnung des noch zu bestimmenden bedingten Erwartungswertes erfolgt wie im letzten Abschnitt. Nach Bemerkung 5.1.4 und wegen

$$\sum_{i=1}^k\int_t^T \sigma_i(s,T)dW_i^{\mathbf{Q}^f}(s) = \sum_{i=1}^k\int_t^T \frac{\sigma_i(s,T)\theta_i(s)}{\gamma-1}ds + \sum_{i=1}^k\int_t^T \sigma_i(s,T)dW_i^{\bar{\mathbb{P}}^f}(s)$$

gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}r_s ds\right)\big|\mathcal{F}_t\right] &= \exp\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\sum_{i=1}^k \sigma_i(t,T)Y_i(t) - \delta_0(T-t)\right)\right]\\ &\quad\cdot\exp\left[\sum_{i=1}^k\int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}\sigma_i(s,T)\theta_i(s)ds\right]\\ &\quad\cdot\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2\sum_{i=1}^k\int_t^T \sigma_i(s,T)^2 ds\right].\end{aligned}$$

Insbesondere folgt aufgrund der Markoveigenschaft der Prozesse $Y_1, \ldots, Y_k$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] &= \exp\left[\frac{1}{2}\int_t^T \|\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta_s\|^2 ds - \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\gamma}{\gamma-1}\|\theta_s\|^2 ds\right] \\ &\cdot \exp\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\sum_{i=1}^k y_i\sigma_i(t,T) - \delta_0(T-t)\right)\right] \\ &\cdot \exp\left[\sum_{i=1}^k \int_t^T \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}\sigma_i(s,T)\theta_i(s)ds\right] \\ &\cdot \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)^2 ds\right] .\end{aligned}$$

Daher ist die partielle Ableitung von $\mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]$ nach y_i für alle $i = 1, \ldots, k$ gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]}{\partial y_i} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\sigma_i(t,T)\mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] . \tag{5.19}$$

Weiter erhalten wir für die Wertfunktion mit den gewonnenen Resultaten ähnlich wie im Unterabschnitt 3.3 folgende Darstellung:

$$V(t,x,n) = \frac{1}{\gamma}\left(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\right)^\gamma \mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[H(t,T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma} ,$$

und für die partiellen Ableitungen ergibt sich dann mit (5.17) und (5.19):

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = \frac{1}{\gamma-1}\left(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\right)$$

und

$$\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\sigma_i(t,T)\left(x - \frac{1}{\gamma}(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\right), \; i = 1, \ldots, k .$$

Also können wir nun den suboptimalen Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$ explizit angeben, für diesen gilt nach (5.16) zusammen mit den oben erhaltenen Ergebnissen:

$$\begin{aligned}\pi_u^{opt} = &\frac{1}{\gamma-1}\left[\theta_u^\top \frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left(X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)\right)\right]\Sigma(u)^{-1} \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\sigma(u,T)^\top \frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left(X_u^{\pi opt} - \frac{1}{\gamma}(n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)\right)\right]\Sigma(u)^{-1} .\end{aligned}$$

Auch wie im Unterabschnitt 3.3.2 lässt sich die suboptimale Investmentstrategie hier als Summe von zwei Komponenten interpretieren. Der erste Term ist proportional zum Prozentsatz des Eigenkapitals und der zweite Term ist ein Korrekturterm, welcher für $u \to T$ gegen Null läuft. Dies ist eine Verallgemeinerung der Resultate aus dem Unterabschnitt 3.3.2.

In [19, Abschnitt 6.1] wird das verallgemeinerte Bond-Portfolioproblem im Mehrfaktor-Vasicek-Modell ohne Mortalitätsrisiken mittels der Martingalmethode gelöst. Für dieselbe Nutzenfunktion erhält der Autor ein ähnliches Resultat:

$$\pi_u^{opt} = \frac{1}{\gamma-1}\left(\theta_u^\top + \gamma\sigma(u,T)^\top\right)\Sigma(u)^{-1} .$$

5.4.3 Logarithmische Nutzenfunktion

Nun wollen wir das verallgemeinerte Bond-Portfolioproblem unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken für die logarithmische Nutzenfunktion explizit lösen. Wir orientieren uns dabei an dem Unterabschnitt 3.3.3.

Für den optimalen Lagrange-Multiplikator erhalten wir ähnlich wie im Abschnitt 3.3:

$$1/\lambda_t = x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)$$

und für die Wertfunktion gilt somit nach Abschnitt 5.3:

$$V(t,x,y_1,\ldots,y_k) = \ln(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)) - \mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[\ln(H(t,T))\right],$$

wobei nach Bemerkung 5.1.4 und wegen

$$\int_t^T \sum_{i=1}^k \sigma_i(s,T)dW_i(s)^{\mathbf{Q}^f} = -\int_t^T \sum_{i=1}^k \sigma_i(s,T)\theta_i(s)ds + \int_t^T \sum_{i=1}^k \sigma_i(s,T)dW_i(s)^{\mathbb{P}^f}$$

der noch zu bestimmende Erwartungswert $\mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[\ln(H(t,T))\right]$ wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[\ln(H(t,T))\right] \\
&= \mathbb{E}^{t,y_1,\ldots,y_k}\left[-\int_t^T r_s ds + \sum_{i=1}^k \int_t^T \theta_i(s)dW_i(s)^{\mathbb{P}^f} - \frac{1}{2}\int_t^T \|\theta_s\|^2 ds\right] \\
&= -\delta_0(T-t) + \sum_{i=1}^k y_i\sigma_i(s,T) - \sum_{i=1}^k \int_t^T \sigma_i(s,T)\theta_i(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \|\theta_s\|^2 ds\ .
\end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich weiter:

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = -(x - (n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))$$

und mit (5.17) für alle $i = 1,\ldots,k$

$$\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}} = -\sigma_i(t,T)(n_a - n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T)\ .$$

Das Einsetzen der oben erhaltenen Resultate in die Formel (5.16) liefert den suboptimalen Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u\geq t}$:

$$\begin{aligned}
\pi_u^{opt} = &-\left[\theta_u^\top \frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}{X_u^{\pi opt}}\right]\Sigma(u)^{-1} \\
&+ \left[\sigma(u,T)^\top \frac{(n_a - N_u)K_{T-u}p_{a+u}B(u,T)}{X_u^{\pi opt}}\right]\Sigma(u)^{-1}\ .
\end{aligned}$$

Das erhaltene Ergebnis verallgemeinert die Resultate aus dem Unterabschnitt 3.3.3.

Kapitel 6

Optimierung in einem mehrdimensionalen Aktien- und Bondmarkt

In diesem Kapitel haben wir nun das Ziel, in einem kombinierten Markt, bestehend aus einem gemischten $(k+m)$-dimensionalen Finanzmarktmodell und dem im Abschnitt 1.2 konstruierten Versicherungsmarkt, eine Portfoliooptimierung zur Maximierung des erwarteten Nutzens des Überschusses durchzuführen. Wir werden hier die suboptimale Portfoliostrategie als Maximierer der zugehörigen HJB-Ungleichung für das Optimierungsproblem (5.12) mit Nebenbedingung (5.13) im neuen globalen Markt zunächst allgemein bestimmen und dann bei logarithmischen, CARA- und CRRA-Nutzen explizit angeben.

6.1 Das (k+m)-dimensionale Finanzmarktmodell

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder einen filtrierten vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^f, \mathcal{F}^f, \mathbb{P}^f)$ und modellieren auf diesem einen arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt mit $k+m+1$ Finanzgütern. Als mögliche Investitionsanlagen stehen zur Verfügung ein Geldmarktkonto, k Bonds und m Aktien. Die Existenz eines eindeutig bestimmten äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$ ist insbesondere gesichert. Bei der Konstruktion des Finanzmarktmodells gehen wir wie folgt vor: als Erstes werden die Voraussetzungen für einen vollständigen Finanzmarkt mit einem Geldmarktkonto und k Bonds mit Fälligkeiten $T_1, \ldots, T_k$ aus dem Abschnitt 5.2 übernommen und als Nächstes wird dieses Modell um weitere m Finanzgüter, also um m Aktien, deren Preisprozesse wir mit $S_1, \ldots S_m$ bezeichnen werden, erweitert. Nun wollen wir die Finanzgüter näher beschreiben. Das Geldmarktkonto ist gegeben durch:

$$d\beta_t = \beta_t r_t dt$$

und die Bond- beziehungsweise Aktienpreisprozesse werden durch die Dynamiken

$$\begin{aligned}
\frac{dB(t,T_j)}{B(t,T_j)} &= r_t dt + \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(t,T_j) dW_n^{B,\mathbf{Q}^f}(t) \\
&= r_t dt + \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(t,T_j) \left(dW_n^{B,\mathbb{P}^f}(t) - \theta_n^B(t) dt \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= r_t dt + \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(t) dW_n^{B,\mathbf{Q}^f}(t) + \sum_{n=1}^{m} \sigma_{in}^{S}(t) dW_n^{S,\mathbf{Q}^f}(t) \\ &= r_t dt + \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(t) \left(dW_n^{B,\mathbb{P}^f}(t) - \theta_n^B(t)dt \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{m} \sigma_{in}^{S}(t) \left(dW_n^{S,\mathbb{P}^f}(t) - \theta_n^S(t)dt \right)\end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, k$ und $i = 1, \dots, m$ beschrieben. Dabei sind

$$W_t^{\mathbb{P}^f} = \left(W_1^{B,\mathbb{P}^f}(t), \dots, W_k^{B,\mathbb{P}^f}(t), W_1^{S,\mathbb{P}^f}(t), \dots W_m^{S,\mathbb{P}^f}(t) \right)^\top$$

und

$$W_t^{\mathbf{Q}^f} = \left(W_1^{B,\mathbf{Q}^f}(t), \dots, W_k^{B,\mathbf{Q}^f}(t), W_1^{S,\mathbf{Q}^f}(t), \dots W_m^{S,\mathbf{Q}^f}(t) \right)^\top$$

zwei $(k+m)$-dimensionale Wiener Prozesse bezüglich $\mathbb{P}^f$ und eines zu $\mathbb{P}^f$ äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}^f$, welches eindeutig bestimmt ist durch

$$L_t := \left.\frac{d\mathbf{Q}^f}{d\mathbb{P}^f}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left[\sum_{n=1}^{k} \int_0^t \theta_n^B(s) dW_n^{B,\mathbb{P}^f}(s) + \sum_{n=1}^{m} \int_0^t \theta_n^S(s) dW_n^{S,\mathbb{P}^f}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds \right] .$$

Hierfür ist weiter $\theta_t = \left(\theta_1^B(t), \dots, \theta_k^B(t), \theta_1^S(t), \dots \theta_m^S(t) \right)^\top$ ein previsibler Prozess mit den Eigenschaften

$$r_t = \mu_j^B(t) + \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(t, T_j) \theta_n^B(t), \quad j = 1, \dots, k \tag{6.1}$$

und

$$r_t = \mu_i^S(t) + \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(t) \theta_n^B(t) + \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{S} \theta_n^S(t), \quad i = 1, \dots, m \,. \tag{6.2}$$

Dieser wird als deterministisch vorausgesetzt und damit die Gleichungen (6.1) und (6.2) eindeutig lösbar sind, wird weiter angenommen, dass die Volatilitätsmatrizen

$$\Sigma^B(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^B(t, T_1) & \dots & \sigma_k^B(t, T_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1^B(t, T_k) & \dots & \sigma_k^B(t, T_k) \end{pmatrix},$$

$$\Sigma^S(t) = \left(\sigma_{ij}^S(t) \right)_{0 \le i,j \le m} \quad \text{und} \quad \Sigma^{SB}(t) = \left(\sigma_{ij}^{SB}(t) \right)_{0 \le i \le m, 0 \le j \le k}$$

für alle $t \geq 0$ invertierbar sind.

Das kombinierte Modell entsteht ähnlich wie in den letzten Kapiteln als Kombination aus dem oben konstruierten Finanzmarktmodell und dem Versicherungsmarkt aus dem Abschnitt 1.2. In diesem können wir insbesondere das verallgemeinerte gemischte Aktien-Bond-Portfolioproblem unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken behandeln.

6.2 Bestimmung des suboptimalen Portfolios

Im Abschnitt 6.2 geht es um eine Portfoliooptimierung für ein Geldmarktkonto, k Bonds und m Aktien zur Maximierung des erwarteten Nutzens des Überschusses. Unsere Aufgabe wird es also hier sein, das statische Optimierungsproblem mit Nebenbedingung im neuen kombinierten Modell zu formulieren, dieses zu lösen und schließlich die suboptimale Portfoliostrategie als Maximierer der zugehörigen HJB-Ungleichung zu ermitteln.

In unserem neuen globalen Markt lässt sich das statische Optimierungsproblem wie das Optimierungsproblem (5.12) mit Nebenbedingung (5.13) aus dem vorherigen Kapitel formulieren, mit dem Unterschied, dass $(X_u^\pi)_{u\geq t}$ als Vermögensprozess zu den möglichen Investitionsanteilen vom Gesamtvermögen in die k Bonds:

$$\pi_1^B(u), \dots, \pi_k^B(u), \quad u \geq t,$$

m Aktien:

$$\pi_1^S(u), \dots, \pi_m^S(u), \quad u \geq t$$

und in das Geldmarktkonto:

$$1 - \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) - \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u), \quad u \geq t$$

folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_u^\pi}{X_u^\pi} &= \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) \frac{dB(u,T_j)}{B(u,T_j)} + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \frac{dS_i(u)}{S_i(u)} + \frac{d\beta_u}{\beta_u} \left[1 - \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) - \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \right] \\
&= r_u du - \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u,T_j)\theta_n^B(u)du + \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u,T_j) dW_n^{B,\mathbb{P}^f}(u) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(u)\theta_n^B(u)du + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(u) dW_n^{B,\mathbb{P}^f}(u) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \sum_{n=1}^{m} \sigma_{in}^{S}(u)\theta_n^S(u)du \; + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \sum_{n=1}^{m} \sigma_{in}^{S}(u) dW_n^{S,\mathbb{P}^f}(u)
\end{aligned}$$

erfüllt. Somit müssen wir dieses nicht mehr lösen, die allgemeinen Resultate für den optimalen Lagrange-Multiplikator und die Wertfunktion können einfach aus dem Abschnitt 5.3 übernommen werden.

Um die suboptimale Anlagestrategie zu bestimmen, gehen wir genauso vor wie im zweiten Kapitel. Mit Hilfe von Itô-Formel erhalten wir analog zu den letzten Kapiteln folgende HJB-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
0 \geq V_t &+ \sup_\pi A^\pi V(t,x,n,y_1,\dots,y_k) \\
&+ (V(t,x,n+1,y_1,\dots,y_k) - V(t,x,n,y_1,\dots,y_k))(n_a - n)\mu(a+t),
\end{aligned}$$

die von der Wertfunktion V für jedes $(t,x,n,y_1,\dots,y_k)$ und alle zulässigen Strategien erfüllt ist. Der Maximierer der HJB-Ungleichung definiert nach Verifikationstheorem die suboptimale Portfoliostrategie. Dabei ist der Erzeuger $A^{\pi}V(u, X_u^{\pi}, N_u, Y_1(u), \ldots, Y_k(u))$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&A^{\pi}V(u, X_u^{\pi}, N_u, Y_1(u), \ldots, Y_k(u)) \\
&= r_u X_u^{\pi} V_x - \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u, T_j)\theta_n^B(u) X_u^{\pi} V_x \\
&- \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \left[\sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(u)\theta_n^B(u) + \sum_{n=1}^{m} \sigma_{in}^{S}(u)\theta_n^S(u) \right] X_u^{\pi} V_x \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u)\sigma_n^B(u, T_j) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u) \right]^2 (X_u^{\pi})^2 V_{xx} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{S}(u) \right]^2 (X_u^{\pi})^2 V_{xx} + \sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u, T_j) X_u^{\pi} V_{xy_n} \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u) \sum_{n=1}^{k} \sigma_{in}^{SB}(u) X_u^{\pi} V_{xy_n} - \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{n=1}^{i} \lambda_{in} Y_n(u) + \theta_i^B(u) \right] V_{y_i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} V_{y_n y_n} \; .
\end{aligned}$$

Das Ableiten von $A^{\pi}V(u, X_u^{\pi}, N_u, Y_1(u), \ldots, Y_k(u))$ nach $\pi_j^B(u)$ für $j = 1, \ldots, k$ liefert folgendes Gleichungssystem mit k Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u, T_1) \Bigg[\sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u)\sigma_n^B(u, T_j) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u) \\
&\qquad - \theta_n^B(u) \frac{V_x}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} + \frac{V_{xy_n}}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} \Bigg] \\
0 = &\sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u, T_2) \Bigg[\sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u)\sigma_n^B(u, T_j) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u) \\
&\qquad - \theta_n^B(u) \frac{V_x}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} + \frac{V_{xy_n}}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} \Bigg] \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
0 = &\sum_{n=1}^{k} \sigma_n^B(u, T_k) \Bigg[\sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u)\sigma_n^B(u, T_j) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u) \\
&\qquad - \theta_n^B(u) \frac{V_x}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} + \frac{V_{xy_n}}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} \Bigg]
\end{aligned}$$

Durch das Addieren aller Gleichungen erhalten wir als Ergebnis:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \sigma_n(u, T_l) \Bigg[\sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u)\sigma_n^B(u, T_j) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u) - \theta_n^B(u) \frac{V_x}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} + \frac{V_{xy_n}}{V_{xx}} \frac{1}{X_u^{\pi}} \Bigg] = 0 \; .
\end{aligned}$$

Die neu gewonnene Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j^B(u)\sigma_n^B(u,T_j) = \theta_n^B(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} - \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u) - \frac{V_{xy_n}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi}, \quad n = 1,\dots,k \ . \tag{6.3}$$

Ähnlich verhält sich das Ableiten nach $\pi_i^S(u)$ für $i = 1,\dots,m$. Es folgt:

$$\begin{aligned}0 = &\sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \sigma_{ln}^S(u)\left[\sum_{i=1}^{m}\pi_i^S(u)\sigma_{in}^S(u) - \theta_n^S(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi}\right]\\ &+ \sum_{n=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} \sigma_{ln}^{SB}(u)\left[\sum_{j=1}^{k}\pi_j^B(u)\sigma_n^B(u,T_j) + \sum_{i=1}^{m}\pi_i^S(u)\sigma_{in}^{SB}(u)\right.\\ &\qquad\left. - \theta_n^B(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi} + \frac{V_{xy_n}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi}\right] \ .\end{aligned} \tag{6.4}$$

Das Einsetzen von (6.3) in die Gleichung (6.4) liefert eine neue Gleichung:

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \sigma_{ln}^S(u)\left[\sum_{i=1}^{m}\pi_i^S(u)\sigma_{in}^S(u) - \theta_n^S(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi}\right] = 0 \ .$$

Diese wird gelöst durch

$$\sum_{i=1}^{m}\pi_i^S(u)\sigma_{in}^S(u) = \theta_n^S(u)\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^\pi}, \quad n = 1,\dots,m \ .$$

Daher ist der suboptimale Anteil vom Gesamtvermögen $(\pi_u^{Sopt})_{u\geq t}$, welcher in die Aktien investiert wird, gegeben durch

$$\pi_u^{Sopt} = \theta_u^S \frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\Sigma^S(u)^{-1} \tag{6.5}$$

mit

$$\pi_u^{Sopt} = \left(\pi_1^{Sopt}(u),\dots,\pi_m^{Sopt}(u)\right) \quad \text{und} \quad \theta_u^S = \left(\theta_1^S(u),\dots,\theta_m^S(u)\right)$$

und für den suboptimalen Anteil vom Gesamtvermögen $(\pi_u^{Bopt})_{u\geq t}$, der in die Bonds investiert wird, erhalten wir

$$\pi_u^{Bopt} = \left(\theta_u^B\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \frac{V_{xy}}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}} - \theta_u^S\frac{V_x}{V_{xx}}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\Sigma^S(u)^{-1}\Sigma^{SB}(u)\right)\Sigma^B(u)^{-1} \tag{6.6}$$

mit

$$\pi_u^{Bopt} = \left(\pi_1^{Bopt}(u),\dots,\pi_k^{Bopt}(u)\right), \quad \theta_u^B = \left(\theta_1^B(u),\dots,\theta_k^B(u)\right)$$

und

$$V_{xy} = (V_{xy_1},\dots,V_{xy_k}) \ .$$

6.3 Anwendung auf spezielle Nutzenfunktionen

Nun werden wir in diesem Abschnitt die explizite Lösung des verallgemeinerten gemischten Aktien-Bond-Portfolioproblems unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken für die logarithmische, CARA- und CRRA-Nutzenfunktionen bestimmen. Dabei orientieren wir uns an den Abschnitten 4.3 und 5.4.

6.3.1 CARA-Nutzenfunktion

Wir betrachten zunächst die CARA-Nutzenfunktion $U(y) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha y)$ und wollen für diese den suboptimalen Portfolioprozess explizit angeben.

Analog zu den Unterabschnitten 4.3.1 und 5.4.1 berechnen wir zunächst den bedingten Erwartungswert von $\ln(H(t,T))$ bezüglich des Produktwahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}^v \otimes \mathbb{P}_T^f$ von dem versicherungsmathematischen Maß $\mathbb{P}^v$ und dem T-Forwardmartingalmaßes $\mathbb{P}_T^f$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\ln\left(H(t,T)\right)\big|\mathcal{F}_t\right] = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\int_t^T r_s ds\Big|\mathcal{F}_t\right] + \sum_{i=1}^k \int_t^T \theta_i^B(s)\sigma_i^B(s,T)ds \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \int_t^T \theta_i^B(s)^2 ds + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \int_t^T \theta_i^S(s)^2 ds\ .\end{aligned}$$

Eine ausführliche Berechnung des bedingten Erwartungswertes von $\int_t^T r_s ds$ bezüglich $\mathbb{P}_T$ findet man dabei im Unterabschnitt 5.4.1. Mit den Markoveigenschaften der Prozesse $Y_1,\ldots,Y_k$ zusammen mit dem oben stehenden Resultat folgern wir weiter für die Wertfunktion:

$$\begin{aligned}&V(t,x,n,y_1,\ldots,y_k)\\ &= -\frac{1}{\alpha}B(t,T)\exp\left[-\alpha B(t,T)^{-1}(x-(n_a-n)K_{T-t}p_{a+t}B(t,T))\right]\\ &\quad\cdot\exp\left[\delta_0(T-t) - \sum_{i=1}^k y_i\sigma_i^B(t,T) - \sum_{i=1}^k\int_t^T \sigma_i^B(s,T)^2 ds\right]\\ &\quad\cdot\exp\left[-\sum_{i=1}^k\int_t^T \theta_i^B(s)\sigma_i^B(s,T)ds\right]\\ &\quad\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k\int_t^T\theta_i^B(s)^2 ds - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\int_t^T\theta_i^S(s)^2 ds\right],\end{aligned}$$

Wir stellen schnell fest, dass die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$, $\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}$ mit den aus dem Unterabschnitt 5.4.1 übereinstimmen. Diese werden einfach übernommen. Das Einsetzen von (5.18) in die Formel (6.5) liefert den suboptimalen Vermögensanteil, investiert in m Aktien,

$$\pi_u^{Sopt} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\theta_u^S B(u,T)\Sigma^S(u)^{-1},\ u \geq t$$

und für den suboptimalen Anteil vom Gesamtvermögen, welcher in k Bonds investiert wird, erhält man mit (5.18) eingesetzt in die Formel (6.6):

$$\begin{aligned}\pi_u^{Bopt} = &-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\left[\left(\theta_u^B - \theta_u^S\Sigma^S(u)^{-1}\Sigma^{SB}(u)\right)B(u,T)\right]\Sigma^B(u)^{-1}\\ &-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{X_u^{\pi opt}}\sigma^B(u,T)\left(B(u,T)-\alpha X_u^{\pi opt}\right)\Sigma^B(u)^{-1},\ u\geq t,\end{aligned}$$

wobei $\sigma(u,T) = (\sigma_1^B(u,T),\ldots,\sigma_k^B(u,T))$ ist. Das Resultat verallgemeinert insbesondere die Ergebnisse aus dem Unterabschnitt 4.3.1.

6.3.2 CRRA-Nutzenfunktion

Hier haben wir das Ziel, den suboptimalen Portfolioprozess für die CRRA-Nutzenfunktion $U(y) = \frac{1}{\gamma} y^\gamma$ explizit zu bestimmen.

Ähnlich wie in den Unterabschnitten 4.3.2 und 5.4.2 erhalten wir für die optimale Wertfunktion:

$$V(t, x, n, y_1, \ldots, y_k) = \frac{1}{\gamma} \left(x - (n_a - n) K_{T-t} p_{a+t} B(t, T)\right)^\gamma \mathbb{E}^{t, y_1, \ldots, y_k} \left[H(t, T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{1-\gamma} .$$

Dabei geschieht die Berechnung des Erwartungswertes $\mathbb{E}^{t, y_1, \ldots, y_k} \left[H(t, T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]$ analog zum Abschnitt 5.4. Wir stellen insbesondere fest, dass dessen partielle Ableitung nach y_i für jedes $i = 1, \ldots, k$ und somit auch die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$, $\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}$ unverändert bleiben. Sie können einfach aus dem Unterabschnitt 5.4.2 übernommen werden. Das Einsetzen dieser in die Formeln (6.5) und (6.6) liefert als Lösung für den suboptimalen Porfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u \geq t}$ eine Verallgemeinerung der Resultate aus dem Unterabschnitt 4.3.2:

$$\pi_u^{Sopt} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{X_u^{\pi opt}} \left[X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u) K_{T-u} p_{a+u} B(u, T)\right] \theta_u^S \Sigma^S(u)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \pi_u^{Bopt} &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[\theta_u^B - \theta_u^S \Sigma^S(u)^{-1} \Sigma^{SB}(u)\right] \frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u) K_{T-u} p_{a+u} B(u, T)}{X_u^{\pi opt}} \Sigma^B(u)^{-1} \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sigma^B(u, T) \frac{X_u^{\pi opt} - \frac{1}{\gamma}(n_a - N_u) K_{T-u} p_{a+u} B(u, T)}{X_u^{\pi opt}} \Sigma^B(u)^{-1} . \end{aligned}$$

Die Lösung des verallgemeinerten gemischten Bond-Portfolioproblems im Mehrfaktor-Vasicek-Modell ohne Mortalitätsrisiken kann in [19, Abschnitt 6.2] nachgeschlagen werden. Für dieselbe Nutzenfunktion erhält der Autor mittels der Martingalmethode ein ähnliches Resultat:

$$\pi_u^{Sopt} = \frac{1}{\gamma - 1} \theta_u^S \Sigma^S(u)^{-1}$$

$$\pi_u^{Bopt} = \frac{1}{\gamma - 1} \left[\theta_u^B + \gamma \sigma^B(u, T) - \theta_u^S \Sigma^S(u)^{-1} \Sigma^{SB}(u)\right] \Sigma^B(u)^{-1} .$$

6.3.3 Logarithmische Nutzenfunktion

Schließlich besteht unsere Aufgabe darin, das gemische Bond-Portfolioproblem unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken für die logarithmische Nutzenfunktion explizit zu lösen.

Dafür berechnet man zunächst analog zum Unterabschnitt 5.4.3 den expliziten Ausdruck für die Wertfunktion. Dieser bleibt bis auf die Gestalt des Erwartungswertes $\mathbb{E}^{t, y_1, \ldots, y_k} [\ln(H(t, T))]$ unverändert:

$$V(t, x, y_1, \ldots, y_k) = \ln(x - (n_a - n) K_{T-t} p_{a+t} B(t, T)) - \mathbb{E}^{t, y_1, \ldots, y_k} [\ln(H(t, T))] .$$

Da der oben erwähnte Erwartungswert von x unabhängig und daher für die partielle Ableitung nach x unwichtig ist, stimmen die Werte $\frac{V_x}{V_{xx}}$, $\frac{V_{xy_i}}{V_{xx}}$ mit den aus dem Unterabschnitt 5.4.3 überein. Durch das Einsetzen dieser Werte in die Formeln (6.5) und

(6.6) erhalten wir für den suboptimalen Portfolioprozess $(\pi_u^{opt})_{u \geq t}$:

$$\pi_u^{Sopt} = -\left[\theta_u^S \frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u) K_{T-u} p_{a+u} B(u,T)}{X_u^{\pi opt}}\right] \Sigma^S(u)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\pi_u^{Bopt} = &- \left[\theta_u^B - \theta_u^S \Sigma^S(u)^{-1} \Sigma^{SB}(u)\right] \frac{X_u^{\pi opt} - (n_a - N_u) K_{T-u} p_{a+u} B(u,T)}{X_u^{\pi opt}} \Sigma^B(u)^{-1} \\ &+ \sigma^B(u,T) \frac{(n_a - N_u) K_{T-u} p_{a+u} B(u,T)}{X_u^{\pi opt}} \Sigma^B(u)^{-1} \ .\end{aligned}$$

Das erhaltene Ergebnis verallgemeinert die Resultate aus dem Unterabschnitt 4.3.3.

Fazit

In der vorliegenden Arbeit hatten wir als Hauptziel die Optimierung der Portfolioprobleme in kombinierten Finanz- und Versicherungsmärkten. Dazu haben wir eine reine Erlebensfallversicherung für eine Gruppe der gleichaltrigen Versicherten mit einer Vertragslaufzeit von T Jahren und unterschiedliche Finanzmärkte betrachtet. In dieser Masterarbeit ging es in erster Linie um die Bestimmung einer optimalen Aufteilung des gegebenen Kapitals auf die vorliegenden Finanzgüter zur Maximierung des erwarteten Nutzens des Gesamtüberschusses zu einem festen Endzeitpunkt T. Unsere Aufgabe war es also die Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung von zwei verschiedenen Risiken, dem Anlage- und dem Sterblichkeitsrisiko. Dabei wurden dem Versicherungsunternehmen immer unterschiedliche Finanzgüter für Investitionen zur Verfügung gestellt. Zu Beginn gab es nur zwei Assets, ein Geldmarktkonto als risikolose und eine Aktie bzw. ein Bond als risikobehaftete Finanzanlagen, in welche man investieren konnte. Dann wurden die Märkte um weitere Finanzgüter erweitert und somit mehrdimensionale Bond- und gemischte Finanzmarktmodelle untersucht. Man hatte zunächst Bond- und gemischte Aktien-Bond-Portfolioprobleme im Einfaktor-Vasicek-Modell und später verallgemeinerte Optimierungsprobleme im Mehrfaktor-Vasicek-Modell unter Berücksichtigung von Mortalitätsrisiken zu lösen.

Dabei gingen wir bei der Berechnung der Portfolioprobleme wie folgt vor. Wir bestimmten zunächst die allgemeine Darstellung des optimalen Endvermögens als Lösung des statischen Optimierungsproblems mittels des Martingalansatzes und stellten fest, dass dieses von der Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt T abhängt und somit nicht perfekt repliziert werden kann. Für die Ermittlung der optimalen Portfoliostrategie konnte daher die Martingalmethode nicht mehr benutzt werden und es wurde weiter mit dem HJB-Ansatz gearbeitet. Die HJB-Gleichung führte zwar auch nicht zum Ziel, da wir den expliziten Ausdruck für die Wertfunktion des dynamischen Portfolioproblems nicht angeben konnten, dennoch bot uns der HJB-Ansatz die Möglichkeit an, eine vernünftige Strategie mit Hilfe der zugehörigen HJB-Ungleichung zu finden. Dafür musste gezeigt werden, dass das statische Optimierungsproblem diese HJB-Ungleichung erfüllt und wir konnten den Maximierer von dieser in Abhängigkeit von partiellen Ableitungen der Wertfunktion des statischen Problems ermitteln. Die erhaltene Portfoliostrategie nannten wir dann suboptimal. Schließlich wurde die Anwendung der mittels der beiden Methoden gewonnenen Ergebnisse anhand dreier Beispiele verdeutlicht. Es wurden konkret die exponentielle, die logarithmische und die Power-Nutzenfunktionen betrachtet.

Bei CARA-Nutzen bekamen wir in jedem kombinierten Markt die suboptimale Portfoliostrategie, völlig unabhängig von den Verbindlichkeiten gegenüber den Versicherten. Für die logarithmische und die CRRA-Nutzenfunktionen erhielten wir im Gegensatz zum exponentiellen Nutzen die suboptimalen Investmentstrategien in Abhängigkeit vom Eigenkapital des Versicherungsunternehmens, also der Differenz zwischen dem vorhandenen Vermögen und den erwarteten abdiskontierten Verbindlichkeiten. Man hat gesehen, dass wenn die Mortalitätsrisiken nicht mehr vorhanden sind, d.h. es gibt keine Überlebenden mehr in der Gruppe. Dann stimmen die suboptimalen Anlagestrategien für diese Nutzenfunktionen mit den Lösungen der Portfolioprobleme ohne Mortalitätsrisiken überein, welche zum Beispiel bei Kraft und Korn in [12] und in [19] zu finden sind.

Da bei logarithmischen und CRRA-Nutzen im Gegensatz zur Nutzenfunktion CARA der Wert der Verbindlichkeiten gegenüber den Versicherten berücksichtigt wird, sind diese Nutzenfunktionen insbesondere die bessere Wahl bei der Lösung der Portfolioprobleme in kombinierten Finanz- und Versicherungsmärkten.

Literaturverzeichnis

[1] T.R. Bielecki & M. Rutkowski. *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer, 2004.

[2] T. Björk. *An Introduction to Point Processes from a Martingale Point of View.* KTH, 2011.
`http://streamdp.hhs.se/LinkedStaffDocs/download.aspx?dl=00037_007`

[3] S. Christensen. *Optimierungsprobleme in der Finanzmathematik.* Vorlesungsskript, 2013.
`http://www.math.uni-kiel.de/stochastik/WinterSemester2012-13/optimization/control_christensen.pdf`

[4] R. Cont & P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.

[5] J. Cox & C.F. Huang. *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process.* Journal of economic theory 49, 1989.

[6] W. Fleming & R. Rishel. *Deterministic and Stochastic optimal control.* Springer, 1975.

[7] D. Filipovic. *Term-Structure Models. A Graduate Course.* Springer, 2009.

[8] D. Hainaut & P. Devolder. *A martingale approach applied to the management of life insurances.* ICFAI Journal of Risk and Insurance, 2006.

[9] D. Hainaut & P. Devolder. *Management of a pension fund under stochastic mortality and interest rates.* Insurance: Mathematics and Economics 41, S. 134-155, 2007.

[10] I. Karatzas. *Lectures on the Mathmatics of Finance.* American Mathematical Society, 1997.

[11] I. Karatzas & S. Shreve. *Methods of mathematical Finance.* Springer, 1998.

[12] R. Korn & H. Kraft. *A Stochastic Control Approach to Portfolio Problems with Stochastic Interest Rates.* SIAM Journal on Control and Optimization 40, S. 1250-1269, 2001.

[13] T. Møller. *Risk minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts.* ASTIN Bulletin 28, S. 17-47, 1998.

[14] B. Øksendal & A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Springer, 2005.

[15] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Springer, 2002.

[16] S. Pliska. *A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios.* Mathematics of Operations Research 11, 1986.

[17] N. Privault. *Notes on Stochastic Finance.* Vorlesungsskript, 2013. `http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/MA5182/notes.pdf`

[18] M. Puhle. *Bond Portfolio Optimization.* Springer, 2007. `http://vts.uni-ulm.de/docs/2006/5713/vts_5713_7573.pdf`

[19] S. Simann. *Portfoliooptimierung im Vasicek-Modell.* Masterarbeit, Universität Paderborn, 2013.

[20] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.* Springer, 2004.

[21] N. Touzi. *Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE.* Springer, 2013.

[22] O. Vasicek. *An Equilibrium Characterization of the Term Structure.* Journal of Financial Economics 5, S. 177-188, 1977.

[23] V.R. Young. & T. Zariphopoulou. *Pricing dynamic insurance risks using the principle of equivalent utility.* Scandinavian Actuarial Journal 4, S. 246-279, 2002.

Plagiatserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder noch nicht veröffentlichten Quellen entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Zeichnungen oder Abbildungen in dieser Arbeit sind von mir selbst erstellt worden oder mit einem entsprechenden Quellennachweis versehen. Diese Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Prüfungsbehörde eingereicht worden.

Lüdinghausen, den 17.03.2015

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

Lüdinghausen, den 17.03.2015