Die Elastizitätenmethode der Portfoliooptimierung

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:
PD Dr. Volkert Paulsen

Eingereicht von:
Manuel Bartsch

Münster, Februar 2015

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Thema „*Die Elastizitätenmethode der Portfoliooptimierung*“ selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel genutzt habe. Alle Ausführungen, die anderen veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften wörtlich oder sinngemäß entnommen wurden, habe ich kenntlich gemacht.

Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Fassung noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Münster, Februar 2015

(Manuel Bartsch)

Danksagung

Für die Auswahl des Themas der Masterarbeit sowie der guten Betreuung während des vorangegangenen Masterseminars zur Finanzmathematik und der Entstehungsphase dieser Arbeit möchte ich Herrn PD Dr. Volkert Paulsen herzlich danken. Außerdem möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich in irgendeiner Weise bei der Fertigstellung dieser Arbeit und der Vollendung meines Studiums unterstützt haben. Insbesondere sind an dieser Stelle meine Eltern Sigrid und Jürgen und meine Geschwister Christian und Daniel sowie meine engen Freunde, die ich während meines Studiums kennengelernt habe, zu nennen.
Ein Lob möchte ich schließlich noch an die Universität Münster aussprechen, die mir meinen Abschluss des Mathematikstudiums ermöglicht hat und mir dabei eine unvergessliche und wunderbare Studienzeit beschert hat.

Vielen herzlichen Dank

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Seit einigen Jahren ist zu beobachten, dass der Marktzins innerhalb des Euroraums ein sehr niedriges Niveau besitzt. Hervorgerufen wird dies unter anderem durch die Niedrigzinspolitik der Europäischen Zentralbank und dem daraus resultierenden sinkenden Leitzins. Konsequenz ist, dass die Inflationsrate zumeist höher ist als der Nominalzins, der an Investoren für sichere Geldanlagen wie beispielsweise ein Sparbuch oder Tagesgeldkonto ausgezahlt wird. Dadurch besteht die Gefahr, dass der Realwert eines Vermögens auf Dauer nicht zunimmt und somit kein Inflationsausgleich stattfinden kann. Um diesem Umstand dennoch entgegen zu wirken, verfolgen viele Investoren am Finanzmarkt das Ziel eine höhere Rendite zu erhalten. Folglich gewinnt die Geldanlage an Kapitalmärkten, beispielsweise dem Aktienmarkt zunehmend an Relevanz.
In der heutigen Zeit besteht für private Investoren jedoch die Möglichkeit, auf eine Vielzahl von Anlagemöglichkeiten auf dem Finanzmarkt zurückzugreifen. Dabei möchte jeder rational denkende Investor gerade diejenige Anlagestrategie wählen, die ihm eine möglichst hohe Rendite bei möglichst geringem Risiko verspricht. Jedoch verursacht eine höhere Rendite in der Regel auch ein steigendes Risiko für den Anleger. Hieraus resultiert die Frage, wie der Investor sein Vermögen auf die vorhandenen Anlagemöglichkeiten verteilen soll, um das bestmögliche Ergebnis zu erzielen. Genauer heißt dies, aus der Investition in die vorhandenen Assets den größtmöglichen erwarteten Nutzen für den Investor zu ziehen, während das Finanzrisiko so gering wie möglich gehalten wird. Um die Beantwortung dieser Frage bemüht sich die moderne Portfoliotheorie.

Den Grundstein der Portfoliooptimierung legte der Wirtschaftswissenschaftler Harry Markowitz 1952 mit seiner bedeutenden Arbeit „*Portfolio Selection*“, in der ein diskretes Ein-Faktor-Modell betrachtet wird. Eine weitere grundlegende Arbeit im zeitstetigen Fall lieferte Robert C. Merton, der 1969 Mertons Portfolioproblem formulierte und mithilfe der Theorie der stochastischen Steuerung eine Lösung zur optimalen Vermögensverteilung herleitete. Der Investor hat in diesem Modell die Möglichkeit, sein Vermögen in eine Unternehmensaktie und in eine risikofreie Anlage zu investieren, womit schließlich ein Optimierungsproblem aufgestellt wird.
Ausgehend von diesen Arbeiten wurden bis heute viele Verallgemeinerungen, Fortführungen und neue Methoden zur Optimierung in der Portfoliotheorie entwickelt. In dieser Arbeit soll sich hauptsächlich mit der Optimierung verschiedener Portfolioprobleme mithilfe des Begriffs der Elastizität befasst werden. Die Elastizität ist im finanzwissenschaftlichen Kontext ein Maß, das die relative Änderung eines abhängigen Finanzgutes auf eine relative Änderung einer unabhängigen Variable, die das Finanzgut beeinflusst, beschreibt. Mit Blick auf ein Beispielportfolio, in dem weitere Anlagemöglichkeiten als ausschließlich in ein risikobehaftetes Asset vorhanden sind, kann ein Verfahren zur Lösung der Optimierung hergeleitet werden, welches als Elastizitätenmethode bezeichnet wird. Der Vorteil besteht darin, dass dann das Optimum eines vielseitigeren Portfolios mittels dieser Methode bestimmt werden kann. Die Umsetzung erfolgt in einem Zwei-Schritte-Verfahren, bei dem das untersuchte Portfolioproblem zu einem einfacheren Modell reduziert und dadurch das Optimum des ursprünglichen Modells ermittelt werden kann. Hierzu erweist sich besonders die Anwendung der Methode in einem Modell zur Unternehmensbewertung/Firm Value Model als äußerst nützlich, um eine optimale Investitionsstrategie in Unternehmensaktien und -anleihen zu ermitteln.
Die beschriebene Elastizitätenmethode wird in dem Buch „*Optimal Portfolios with Stochastic Interest Rate and Defaultable Assets*“ (siehe [Kra13]) von Holger Kraft als „elasticity approach to portolio optimization“ entwickelt und in dem Artikel „*Optimal Portfolios with Defaultable Securities*“ von Ralf Korn und Holger Kraft (siehe [KK03]) in „Merton's firm value model“ und weiteren Modellen zur Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Ausfallrisiken fortgeführt. Aus diesem Grund orientiert sich diese Arbeit insbesondere an diesen beiden Quellen.

Im nachfolgenden Kapitel 2 wird zunächst die Modellierung des Finanzmarktes vorgenommen sowie die allgemeine Portfoliooptimierung vorgestellt. Anschließend wird das Optimierungsproblem explizit gelöst. In Kapitel 3 wird das Hauptaugenmerk auf Elastizitäten und den Ansatz der Elastizitätenmethode zur Optimierung im eindimensionalen Modell gelegt. Es folgt eine Anwendung der Methode anhand Optionsgeschäften und Portfolios mit ausfallrisikobehafteten Anlagemöglichkeiten im Rahmen des Merton-Modells. Eine Verallgemeinerung der Elastizitätenmethode und dessen Anwendung im mehrdimensionalen Fall wird in Kapitel 4 beschrieben. Danach soll in Kapitel 5 eine Verallgemeinerung des Modells durch die Annahme einer stochastischen Zinsrate vorgenommen und betrachtet werden. Nachdem das Modell im Rahmen eines Vasicek-Modells definiert und die Portfoliooptimierung in Short-Rate-Modellen auf dieser Grundlage erläutert wurde, kann letztlich die Elastizitätenmethode anhand des Vasicek-Modells entwickelt werden. Insbesondere soll diese dann in einem weiteren Modell zur Unternehmensbewertung Anwendung finden. Genauer wird dies ein Briys-de Varenne-Modell sein. Im letzten Teil dieser Arbeit erfolgt eine abschließende Zusammenfassung der Resultate und ein Ausblick auf zukünftige, mögliche Forschungsinhalte bzgl. der Elastizitätenmethode.

Ziel dieser Arbeit ist anfangs die ausführliche Erklärung und Erläuterung der Elastizitätenmethode im Rahmen des ein- und mehrdimensionalen Black-Scholes-Modells mit zeitlich variablen Koeffizienten. In der bisher zu diesem Thema erschienenen Literatur wird der Ansatz ausschließlich im eindimensionalen Fall behandelt. Insgesamt soll die Methode allgemeiner formuliert und die Anwendbarkeit auf verschiedene Portfolios gezeigt. Dazu sollen vor allem Portfolioprobleme mit ausfallrisikobehafteten Assets im Vordergrund stehen.
Des Weiteren sollen die Resultate der Arbeit zeigen, dass die Anwendung der Elastizitätenmethode zur Portfoliooptimierung innerhalb eines Short-Rate-Modells möglich ist. Im Ansatz geschieht dies bereits in [KK03], S. 20 ff. anhand eines konkret spezifizierten Modells zur Unternehmensbewertung, soll aber in dieser Arbeit allgemeiner sowie unter der Voraussetzung einer anderen Nutzenfunktion betrachtet werden.

Da ein Verständnis der Grundlagen in den Gebieten Wahrscheinlichkeitstheorie, stochastische Analysis und stetige Finanzmathematik in dieser Arbeit vorausgesetzt wird, wird dem Leser empfohlen, ein gewisses Grundlagenwissen in diesen Themenbereichen mitzubringen. Im Übrigen wird auf die zahlreiche Literatur zu den jeweiligen Themen und den Anhang dieser Arbeit verwiesen.

Kapitel 2

Grundlagen der Portfoliooptimierung

Allgemein formuliert beschäftigt sich die moderne Portfoliotheorie damit, die Verteilung von Investitionen am Finanzmarkt zu untersuchen (siehe dazu [Mak52]). Genauer wird untersucht, wie ein vorhandenes Vermögen in verschiedene Anlagemöglichkeiten investiert werden soll, damit ein optimales Portfolio erzielt wird. Ein optimales Portfolio heißt in diesem Kontext, dass eine Strategie gesucht wird, welche die erwartete Rendite des Portfolios maximiert, während das Risiko des Investors so gering wie möglich gehalten wird. Unter diesem Aspekt sollen im Folgenden die Anteile des Vermögens, die in die vorhandenen Anlagemöglichkeiten investiert werden, bestimmt werden.
Auf das finanzmathematische Modell übertragen bedeutet das, dass der Erwartungswert des Nutzens eines Endvermögens optimiert werden soll, der durch die Anlagestrategie erzielt wird. In den Artikeln [Mer69] und [Mer73] wurde erstmalig dieses Optimierungsproblem als Grundlage der Portfoliooptimierung im zeitstetigen Fall modelliert und daraufhin gelöst. Aus diesem Grund bieten sich diese Quellen sowie [Kor01] als Einführung in die Portfoliooptimierung an.

Im nachfolgenden Kapitel ist es nun das Ziel, die Modellierung eines stetigen Finanzmarktes anhand eines Black-Scholes-Modells mit deterministischen und zeitlich variablen Koeffizienten einzuführen sowie die grundlegende Theorie der Portfoliooptimierung zu erläutern. Sowohl in Mertons grundlegender Arbeit als auch in [KK03] wird ein „firm value model“ betrachtet, welches wir im Folgenden als ein Modell zur

Unternehmensbewertung[1] bezeichnen. Hier soll zuerst die Betrachtung eines üblichen Black-Scholes-Modells im Vordergrund stehen, bevor dann im weiteren Verlauf auf das Merton-Modell zur Unternehmensbewertung und dessen Verallgemeinerungen eingegangen wird.
Die Annahmen und Voraussetzungen, welche in diesem Kapitel getroffen werden, gelten bis auf Weiteres auch für die Folgenden. Zusätzlich ist anzumerken, dass der Konsum des Investors, der in der Literatur teils berücksichtigt wird im Wesentlichen (ausgenommen Abschnitt 2.3) bewusst vernachlässigt wird, da das entscheidende Ziel dieser Arbeit die Herleitung und Anwendung der Elastizitätenmethode in der Portfoliooptimierung ist und der Konsum dazu eine nebensächliche Rolle spielt.

2.1 Das mehrdimensionale Finanzmarktmodell

Ein bekanntes, mathematisches Modell in der Finanzmathematik zur Bewertung von Finanzgütern ist das von Fischer Black und Myron Samuel Scholes 1973 entwickelte zeitstetige Black-Scholes-Modell. Charakteristisch in diesem ist eine konstante Drift sowie konstante Volatilität. Die Annahme von konstanten Koeffizienten wollen wir jedoch nicht übernehmen und blicken auf ein Modell mit deterministischen, jedoch zeitlich variablen Koeffizienten. Als Verweis bieten sich zahlreiche Quellen an, beispielsweise [Shr04], Kapitel 3 und 4 oder [Ste01], Kapitel 8, 9 und 10.

Für die Modellierung des Finanzmarktes betrachten wir nun einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer zugehörigen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, welche die gewöhnlichen Eigenschaften/usual conditions erfüllt, vgl. dazu [Ste01], S. 51. Genauer sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ für einen festen Handelszeitraum $[t_0, T],\ 0 \leq t_0 < T$ eine Wiener-Filtration, welche von einem m-dimensionalen Wiener-Prozess

$$\big(\boldsymbol{W}(t)\big)_{t\in[t_0,T]} := \big((W_1(t), \dots, W_m(t))^\intercal\big)_{t\in[t_0,T]}$$

erzeugt wird. Zur genauen Definition verweisen wir auf [Shr04], S. 97 f. Im Folgenden setzen wir ohne Einschränkung $t_0 = 0$, wodurch der Handelszeitraum dem Intervall $[0, T]$ entspricht.
Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum werden nun die Preisprozesse der auf dem

[1] In der Literatur sind unterschiedliche Bezeichnungen zu finden, beispielsweise Unternehmens- oder Firmenwertmodell.

Finanzmarkt gehandelten Basisfinanzgüter/Assets (Aktien, Bonds, Optionen etc.) modelliert. Dies geschieht mithilfe des stetigen Semimartingalmodells.[2] Aus diesem Grund wird angenommen, dass die Preisprozesse strikt positive Semimartingale sind. Der Preisprozess des risikofreien Bonds ist dagegen als eine Art Vergleichsgröße bzw. Numéraire anzusehen. Die Herleitung der Modells führen wir an dieser Stelle nicht aus und verweisen z. B. auf [Sim13], S. 2 f.

Es wird nun angenommen, dass d risikobehaftete Assets auf dem Finanzmarkt gehandelt werden. Wir bezeichnen mit dem stochastischen Prozess[3] $S_i(t,\omega) := S_i(t),\ (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ den Preis des i-ten Assets für alle $1 \le i \le d$. Aus der Annahme des Semimartingalmodells folgend unterliegt der i-te Preisprozess der stochastischen Differentialgleichung (Abk. SDE)

$$dS_i(t) = S_i(t) \left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t) dW_j(t) \right) \tag{2.1}$$

mit Anfangswert $S_i(0) := s_i$ für alle $1 \le i \le d$ und den Funktionen der deterministischen Koeffizienten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &:= \left(\mu_1, \ldots, \mu_d\right)^{\mathsf{T}} : \qquad [0,T] \to \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} &:= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{d1} & \ldots & \sigma_{dm} \end{pmatrix} : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times m}_{>0}, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ die $\mathbb{R}^d$-wertige Driftfunktion und $\boldsymbol{\sigma}$ die $(d \times m)$-Volatilitätsmatrix ist. Weiter sei $\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}(t)$ positiv semidefinit für alle $t \in [0,T]$.

Wie oben bereits erwähnt existiert zusätzlich ein weiterer Prozess $(M(t))_{t\in[0,T]}$ eines risikofreien Bonds. Dieser repräsentiert das risikofreie Geldmarktkonto und ist abhängig vom Marktzins. Im Folgenden wird der risikofreie Bond als Geldmarktkonto bezeichnet. Der Preis unterliegt dabei der Differentialgleichung

$$dM(t) = r(t)M(t)dt,\ M(0) = 1, \tag{2.2}$$

wobei $r : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine deterministische, zeitlich variable Zinsrate bezeichnet. Im

[2] In dieser Arbeit werden ausschließlich stetige Semimartingale betrachtet, vgl. dazu Definition A.1.1 Semimartingal im Anhang.

[3] Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir im weiteren Verlauf das Argument ω der stochastischen Prozessen immer auslassen.

späteren Verlauf der Arbeit wird diese Annahme verworfen und es wird von einer stochastischen Zinsrate ausgegangen.
Weiter seien die Funktionen $r(t), \boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)$ progressiv messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$ mit

$$\int_0^t \mu_i(s)ds < \infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{2.3}$$

$$\int_0^t \sigma_{ij}^2(s)ds < \infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2.4}$$

für alle $1 \leq i \leq d, \ 1 \leq j \leq m$ und $t \in [0, T]$.
Unter diesen Voraussetzungen existiert nun nach [Øks00], S. 66 f. eine eindeutige Lösung[4] der SDE (2.1). Die Lösung kann leicht mithilfe der Itô-Formel (vgl. Satz A.1.6 im Anhang) hergeleitet werden, sodass diese gegeben ist durch den stochastischen Prozess $(S_i(t))_{t\in[0,T]}$ mit der Gestalt

$$S_i(t) = s_i \exp\left(\int_0^t \left(\mu_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s)\right)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j(s)\right) \tag{2.5}$$

für alle $1 \leq i \leq d$.
Weiter handelt es sich bei Gleichung (2.2) um eine gewöhnliche Differentialgleichung. Daher ist leicht zu zeigen, dass für die Lösung gerade

$$M(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt.
Als nächstes benötigen wir noch weitere Voraussetzungen an den Finanzmarkt, damit eine risikoneutrale Bewertung der gehandelten Finanzgüter ermöglicht wird. Wir fordern deshalb im Folgenden die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes (vgl. Definition A.1.2 im Anhang) und die daraus folgende Arbitragefreiheit des Finanzmarktes. Zusätzlich nehmen wir die Vollständigkeit des Finanzmarktes an, wodurch jeder bedingte Claim absicherbar/hedgebar ist, der eine endliche diskontierte Auszahlung zum Ende der Laufzeit aufweist. Die genaue Definition eines bedingten Claims wird in Kapitel 2 geliefert.
Aufgrund der geforderten Vollständigkeit muss weiter die Volatilitätsmatrix $\boldsymbol{\sigma}(t)$ für alle $t \in [0, T]$ invertierbar sein bzw. vollen Rang haben. Dies ist nur unter der

[4] Setze $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t, S(t)) := S(t)\boldsymbol{\mu}(t)$ und $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t, S(t)) := S(t)\boldsymbol{\sigma}(t)$. Dann ist leicht zu überprüfen, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Voraussetzung gewährleistet, wenn die Anzahl der Assets gleich der Dimension des Wiener-Prozesses $\boldsymbol{W}$ ist. Folglich nehmen wir also an, dass $d = m$ gilt. Dies wollen wir im folgenden fundamentalen Satz zusammenfassen.

Satz 2.1.1 (Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Finanzmarktes)**.** *Betrachtet wird ein vollständiges, arbitragefreies Finanzmarktmodell. Dann ist das äquivalente Martingalmaß eindeutig definiert durch*

$$L(t) := \left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \sum_{j=1}^d \theta_j(s)dW_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_j^2(s)ds\right) \tag{2.6}$$

mit dem bzgl. $\mathcal{F}_t$ *progressiv messbaren Prozess* $\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)_{t\in[0,T]} := \big((\theta_1(t),\ldots,\theta_d(t))^\intercal\big)_{t\in[0,T]}$ *bestimmt durch das d-dimensionale Gleichungssystem*[5]

$$\boldsymbol{\mu}(t) - r(t)\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\theta}(t) = 0, \tag{2.7}$$

wobei $\boldsymbol{1} := (1,\ldots,1)^\intercal$ *der d-dimensionale Einsvektor sei.*
Weiter ist dann $\boldsymbol{W}^* = (W_1^*,\ldots,W_d^*)^\intercal$ *nach dem Satz von Girsanov ein Wiener-Prozess bzgl.* $\mathbb{P}^*$ *(siehe z.B. [KS00], S. 191 f.) mit der Darstellung*

$$W_j^*(t) = W_j(t) - \int_0^t \theta_j(s)ds. \tag{2.8}$$

für alle $1 \le j \le d,\ t \in [0,T]$.

Beweis. Die Aussage des Satzes entspricht dem ersten und zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie und dem Satz von Girsanov. Wir verweisen auf [Shr04], S. 209 ff. ∎

Für den diskontierten Preisprozess $S^* := \frac{S}{M}$ gilt demnach mit (2.8)

$$dS_i^*(t) = S_i^*(t)\left(\big(\mu_i(t) - r(t)\big)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right) = S_i^*(t)\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j^*(t) \tag{2.9}$$

für alle $1 \le i \le d$.
Im folgenden Abschnitt fahren wir nun mit einigen erforderlichen Definitionen zur Portfoliotheorie fort.

[5]Aufgrund der Vollständigkeit des Finanzmarktmodells besitzt das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

2.2 Einführung in die Portfoliotheorie

Wie beschrieben ist das Ziel jedes rational denkenden Investors, den erwarteten Nutzen seines Endvermögens zu maximieren. Da der Investor jedoch eine bestimmte Risikoaversion aufweist, wird er hierzu immer die Möglichkeit mit dem geringsten Risiko bei gleichem erwarteten Nutzen wählen. Um diese Nutzenmaximierung zu erreichen, stehen dem Investor die Anlagemöglichkeit in d risikobehaftete Assets sowie in das risikofreie Geldmarktkonto zur Verfügung.
Es wird nun jedoch die Frage aufgeworfen, wie der Investor das Vermögen innerhalb des Handelszeitraums konkret auf die gegebenen Anlagemöglichkeiten verteilen soll. Im Endeffekt soll also, falls existent, eine optimale Investmentstrategie gefunden werden, welche zum Ende des Handelszeitraums das Portfolio unter den angesprochenen Aspekten optimiert. Die Antwort auf diese Frage wird im folgenden Verlauf genauer erläutert und im nächsten Abschnitt schließlich eine explizite Lösung geliefert.

Zunächst werden noch eine Reihe an grundlegenden Definitionen benötigt, damit eine Gleichung des Investors in dem betrachteten Modell aufgestellt werden kann, die das Vermögen des Investors während des Handelszeitraums widerspiegelt. Hierzu definieren wir eine Art Investitionsstrategie, die beschreibt, wie viel Vermögen zu welcher Zeit in welche Anlage investiert werden muss. Darauf aufbauend können wir dann schließlich die Vermögensgleichung aufstellen.

Definition 2.2.1 (Handelsstrategie). *Eine Handelsstrategie ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger stochastischer Prozess*

$$\big(\Phi(t)\big)_{t\in[0,T]} = \big((\varphi_M(t), \varphi_{S_1}(t), \ldots, \varphi_{S_d}(t))^T\big)_{t\in[0,T]},$$

welcher progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ ist und die Bedingungen

$$\int_0^T |\varphi_M(s)| ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \int_0^T (\varphi_{S_i}(s) S_i(s))^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall \;\; 1 \le i \le d \tag{2.11}$$

erfüllt.

Der Prozess φ_{S_i} gibt also die Anzahl der vom Investor gehaltenen risikobehafteten

i-ten Assets zum Zeitpunkt t an. Dies können beispielsweise Aktien, Bonds oder Optionsderivate sein. Weiter beschreibt φ_M die Menge des risikofrei angelegten Kapitals (auf dem Geldmarktkonto). Das Anfangsvermögen der Handelsstrategie wird dann mit dem Wert

$$x_0 := X(0) := \varphi_M(0) + \sum_{i=0}^{d} \varphi_{S_i}(0) \cdot s_i$$

definiert und beschreibt das Vermögen des Investors zu Beginn des Handelszeitraums. Hier ist zu bemerken, dass der Investor während des Handelszeitraums die Freiheit hat, seine Strategie beliebig oft zu ändern und dadurch sein investiertes Vermögen in die Anlagemöglichkeiten ohne Einschränkungen zu jeder Zeit umverteilen kann.
Bezüglich dieser Handelsstrategie lautet nun die Vermögensgleichung des Investors folgendermaßen.

Definition 2.2.2 (Vermögensgleichung)**.** *Sei Φ eine $(d+1)$-dimensionale Handelsstrategie. Die Vermögensgleichung oder der Vermögensprozess X des Investors bzgl. des Anfangsvermögens x_0 ist dann definiert durch den Prozess*

$$\begin{aligned} X(t) :&= \varphi_M(t)M(t) + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i}(t)S_i(t) \ \textit{ bzw. für } d=1 \\ X(t) :&= \varphi_M(t)M(t) + \varphi_S(t)S(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Wir bemerken hier, dass wir für den eindimensionalen Fall $S := S_1$ sowie $s := s_1$ gesetzt haben.[6]
Ferner benötigen wir im Folgenden eine Handelsstrategie, die in gewisser Weise kostenneutral ist. Das bedeutet, dass zu jedem Zeitpunkt t das momentane Vermögen gleich dem Anfangsvermögen plus der Gewinne/Verluste beträgt. Wir geben dazu folgende Definition.

Definition 2.2.3 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie)**.** *Eine Handelsstrategie*

[6] Der eindimensionale Fall wird hier teilweise zusätzlich aufgeführt, da im Folgenden zuerst dieser betrachtet wird.

heißt selbstfinanzierend, falls die zugehörige Vermögensgleichung die Gleichung

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(0) + \int_0^t \varphi_M(s)dM(s) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \varphi_{S_i}(s)dS_i(s) \ \textit{bzw. für } d=1 \qquad (2.12)\\
X(t) &= X(0) + \int_0^t \varphi_M(s)dM(s) + \int_0^t \varphi_S(s)dS(s)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$ erfüllt.

Dies impliziert also, dass zu jeder Zeit $t \in [0,T]$ die Gleichung

„Momentanes Vermögen“ = „Anfangskapital“ + „Gewinne/Verluste“

erfüllt sein muss.

Bemerkung 2.2.4. Da mithilfe der Differentialgleichungen (2.1) und (2.2)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi_M(s)dM(s) &= \int_0^T \varphi_M(s)M(s)r(s)ds \quad \text{und}\\
\sum_{i=1}^{d} \int_0^T \varphi_{S_{i(s)}} dS_i(s) &= \sum_{i=1}^{d} \Bigg(\int_0^T \varphi_{S_i}(s)S_i(s)\mu_i(s)ds\\
&\quad + \int_0^T \varphi_{S_i}(s)S_i(s) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(s)dW_j(s) \Bigg)
\end{aligned}$$

gilt, die Bedingungen (2.10) und (2.11) erfüllt sind und die Koeffizienten $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$ und r obige Eigenschaften besitzen, existieren offensichtlich die Integrale in Definition 2.2.3.

Wir werden nun im Folgenden immer von einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ausgehen. Aus diesem Grund bietet sich an, die Vermögensgleichung (2.12) als Differential darzustellen. Es folgt für die Vermögensgleichung

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \varphi_M(t)dM(t) + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i}(t)dS_i(t)\\
&= \varphi_M(t)r(t)M(t)dt\\
&\quad + \sum_{i=1}^{d} \Bigg(\varphi_{S_i}(t)S_i(t)\mu_i(t)dt + \varphi_{S_i}(t)S_i(t) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t)dW_j(t) \Bigg) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

mit Anfangskapital (Anfangswertbedingung) $X(0) = x_0$.
Zuletzt führen wir noch die Definition des Portfolioprozesses ein. Damit werden die investierten Anteile in die vorhandenen Anlagemöglichkeiten als prozentualer Anteil des Vermögens beschrieben. Dies kann leicht mithilfe der Handelsstrategie formuliert werden.

Definition 2.2.5 (Portfolioprozess)**.** *Sei Φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit zugehörigem Vermögensprozess X, der $\mathbb{P}$-f.s. größer null für alle $t \in [0,T]$ ist. Dann bezeichnet der $\mathbb{R}^d$-wertige Prozess*

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{\pi}(t)\big)_{t\in[0,T]} &:= \big((\pi_{S_i}(t),\ldots,\pi_{S_d}(t))^T\big)_{t\in[0,T]}\\ \textit{mit } \pi_{S_i}(t) &= \frac{\varphi_{S_i}(t)\cdot S_i(t)}{X(t)} \quad \forall \quad 1 \le i \le d\end{aligned}$$

einen Portfolioprozess zur selbstfinanzierenden Handelsstrategie Φ.

Der Ausdruck π_{S_i} entspricht damit dem prozentualen Anteil des Vermögens X zu einem beliebigen Zeitpunkt, der in das i-te Asset investiert wird. Der Anteil des Vermögens, der in den risikofreien Bond investiert wird, ist folglich gegeben durch

$$\pi_M(t) := 1 - \sum_{i=1}^{d} \pi_{S_i}(t) = \frac{\varphi_M(t)\cdot M(t)}{X(t)}.$$

Aus diesem Grund wird π_M in der Definition nicht mit aufgeführt.
Blicken wir nun wieder auf die Vermögensgleichung (2.13), so erhalten wir mithilfe der Definition (2.2.5) die SDE

$$\begin{aligned}dX(t) &= X(t)\pi_M(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^{d} X(t)\pi_{S_i}(t)\left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right)\\ &= X(t)\left(\left(r(t) + \sum_{i=1}^{d}\pi_{S_i}(t)(\mu_i(t)-r(t))\right)dt + \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}\pi_{S_i}(t)\sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right)\\ &= X(t)\left(\left(r(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\mathsf{T}(\boldsymbol{\mu}(t) - r(t)\mathbf{1})\right)dt + \boldsymbol{\pi}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{W}(t)\right)\\ &= X(t)\left(\left(r(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}(t)\right)dt + \boldsymbol{\pi}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{W}(t)\right) \qquad (2.14)\end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $X(0) = x_0 > 0$. Der $\mathbb{R}^d$-wertige Prozess der Überrendite sei definiert durch

$$\big(\boldsymbol{\lambda}(t)\big)_{t\in[0,T]} := \big((\lambda_1(t),\ldots,\lambda_d(t))^\mathsf{T}\big)_{t\in[0,T]}$$
$$\text{mit } \lambda_i := \mu_i - r \ \ \forall \ \ 1 \leq i \leq d.$$

Für den Fall $d = m = 1$ lautet die Vermögensgleichung dementsprechend

$$dX(t) = X(t)\bigg((r(t) + \pi_S(t)\lambda(t)dt + \pi_S(t)\sigma(t)dW(t)\bigg). \tag{2.15}$$

Die betrachtete SDE wird auch als kontrollierte stochastische Differentialgleichung bezeichnet, da offensichtlich der Portfolioprozess $\boldsymbol{\pi}$ als eine Art Kontrollvariable fungiert. Dies wird oft in der Literatur durch den Ausdruck $X(t) = X^{x,\pi}(t)$ verdeutlicht werden, da die Vermögensgleichung sowohl vom Startkapital als auch vom gewählten Portfolioprozess unter diesem Aspekt kontrolliert werden kann.

Bemerkung 2.2.6. Anhand der Gleichung (2.14) sehen wir, warum in Definition 2.2.1 gerade

$$\sum_{i=1}^{d}\int_0^T (\varphi_{S_i}(s)S_i(s))^2 ds < \infty \ \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gefordert wird. Dies ist äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{d}\int_0^T (X(s)\pi_i(s))^2 ds < \infty \ \ \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

woraus die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichungen (2.14) bzw. (2.15) analog zur Lösung der S_i folgt.

Die Lösung lautet dementsprechend

$$\begin{aligned} X(t) = x_0 \exp\Bigg(\int_0^t \bigg(r(s) + \boldsymbol{\pi}(s)^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}(t) - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\pi}(s)^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(s)\|^2\bigg) ds \\ + \int_0^t \boldsymbol{\pi}(s)^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(s) d\boldsymbol{W}(s)\Bigg) \end{aligned} \tag{2.16}$$

bzw. im eindimensionalen Fall

$$\begin{aligned} X(t) = x_0 \exp\Bigg(\int_0^t r(s) + \pi_S \lambda(s) - \frac{1}{2}\pi_S^2(s)\sigma^2(s)ds \\ + \int_0^t \pi_S(s)\sigma(s)dW(s) \Bigg). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Schließlich wollen wir die diskontierte Vermögensgleichung $X^* := \frac{X}{M}$ mithilfe der diskontierten Preisprozesse (2.9) sowie der Selbstfinanzierung der Handelsstrategie berechnen, da wir in Kapitel 5 die diskontiert Vermögensgleichung betrachten werden. Mit partieller Integration stochastischer Prozesse folgt dann

$$\begin{aligned} dX^*(t) = d\left(\frac{X(t)}{M(t)}\right) &= Xd\left(\frac{1}{M(t)}\right) + \frac{1}{M(t)}dX \\ &= -X\frac{1}{M(t)}rdt + \frac{1}{M(t)}\left(\varphi_M(t)dM(t) + \sum_{i=1}^d \varphi_{S_i}(t)dS_i(t)\right) \\ &= -X^*rdt + \left(X^* - \sum_{i=1}^d \varphi_{S_i}(t)S_i^*(t)\right)rdt \\ &+ \sum_{i=1}^d \varphi_{S_i}(t)S_i^*(t)\left(rdt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j^*(t)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \varphi_{S_i}(t)S_i^*(t)\sigma_{ij}(t)dW_j^*(t) \\ &= X^*(t)\sum_{i,j=1}^d \pi_{S_i}(t)\sigma_{ij}(t)dW_j^*(t). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Wir fahren fort mit der Formulierung und Lösung des Portfolioproblems auf Grundlage der eingeführten Definitionen.

2.3 Stochastischer Steuerungsansatz in der Portfoliooptimierung

Betrachten wir die Vermögensgleichung (2.16) bzw. (2.18) genauer, so wird diese offensichtlich nur von dem Portfolioprozess $\boldsymbol{\pi}$ kontrolliert. Es muss jedoch zugleich der sogenannte Konsumprozess als weitere kontrollierbare Größe betrachtet werden. Der Konsum des Investor liefert dem Investor im Laufe des Handelszeitraums einen

Nutzen, bringt jedoch auch Kosten mit sich, sodass der Konsumprozess negativ in die Vermögensgleichung miteinbezogen werden muss. Aus diesem Grund wird der Konsum für das folgende Optimierungsproblem berücksichtigt.
Unter diesem Aspekt stellt sich nun die Frage, wie die optimale Allokation des Vermögens in die Investition in die verschiedenen Anlagemöglichkeiten und in den Konsum während des gesamten Handelszeitraums bestimmt ist, um das Ziel der Maximierung des erwarteten Nutzens zu erreichen.

Damit die Formulierung des Optimierungsproblems nun im mathematisch korrekt möglich ist, werden wir zuerst den Begriff des Konsumprozesses einführen und diesen danach in die Vermögensgleichung miteinbeziehen.

Definition 2.3.1 (Konsumprozess)**.** *Ein Konsumprozess $(c(t))_{t\in[0,T]}$ ist ein nicht-negativer Prozess, welcher progressiv-messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ ist und für den*

$$\int_0^T c(t)dt < \infty \ \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

gilt.

Da der Konsum aufgrund der Kosten wie oben beschrieben negativ in die Vermögensgleichung einfließt, hat die Vermögensgleichung unter Berücksichtigung des Konsumprozesses die Gestalt

$$dX(t) = X(t)\left(\left(r(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}(t)\right)dt + \boldsymbol{\pi}(t)^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{W}(t)\right) - c(t)dt$$

Insgesamt wird nun nach dem Tupel $(\boldsymbol{\pi}, c)$ gesucht, welches den größtmöglichen Nutzen für den Investor zum Ende des Handelszeitraums liefert. Um unter diesen Bedingungen den Nutzen eines Investors zu beschreiben, wird als nächstes eine Nutzenfunktion definiert, die das Verhalten eines Individuums bzgl. des Nutzens realitätsnah modelliert.

Definition 2.3.2 (Nutzenfunktion)**.** *Eine stetig differenzierbare, strikt konkave und monoton wachsende Funktion $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, welche die Bedingungen*

$$U'(0) := \lim_{x\searrow 0} U'(x) = +\infty \quad \textit{und} \quad U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$$

erfüllt, heißt Nutzenfunktion.

Einige geläufige Nutzenfunktionen sind beispielsweise

(i) $U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma,\ 0 < \gamma < 1$ (Power-Nutzen)

(ii) $U(x) = \ln(x)$ (logarithmischer Nutzen)

(iii) $U(x) = \sqrt[\alpha]{x}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$

Wir werden im weiteren Verlauf zumeist die Power-Nutzenfunktion genauer in Betracht ziehen.
Als nächstes soll nun die Menge der Portfolioprozesse festgelegt werden, die für den Investor zulässig sind. Dazu führen wir folgende Definition eines zulässigen Portfolioprozesses ein.

Definition 2.3.3 (Zulässiger Portfolioprozess)**.** *Ein Portfolioprozess* $\boldsymbol{\pi}$ *heißt zulässig, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\boldsymbol{\pi}(t)$ *ist progressiv messbar bzgl.* $\mathcal{F}_t$ *für alle* $t \in [0, T]$.

(ii) Für alle Anfangsbedingungen $x_0 \in (0, \infty)$ *besitzt der Vermögensprozess* X *eine pfadweise eindeutige Lösung* $(X(t))_{t \in [0,T]}$.

(iii) $X(t) \geq 0 \quad \forall \quad t \in [0, T]$.

Die Bedingung (ii) ist nach Bemerkung 2.2.6 offensichtlich wieder erfüllt. Sollte der Fall eintreten, dass der Investor im Laufe des Handelszeitraums kein Vermögen besitzen sollte bzw. eine endliche Stoppzeit $\tau := \inf\{t \in [0, T] | X(t) = 0\}$ mit $X(\tau) = 0$ existiert, so würde direkt $\pi_{S_i}(t) \equiv 0$ für alle $t \in [\tau, T],\ 1 \leq i \leq d$ folgen. Das heißt also, dass die Investitionen aufgrund von fehlendem Kapital zu diesem Zeitpunkt beendet sind.
Als nächstes definieren wir nun die Menge der Tupel $(\boldsymbol{\pi}, c)$, unter der das Optimierungsproblem gelöst werden soll. Sei dazu $\mathcal{A}(t_0, x_0)$ eine Menge abhängig von dem Anfangszeitpunkt $t_0 \in [0, T]$ und dem Startkapital $x_0 = X(t_0)$ mit

$$\mathcal{A}(t_0, x_0) := \Big\{ (\boldsymbol{\pi}, c) |\ \boldsymbol{\pi} \text{ zulässig und } \mathbb{E}(U(X(T)^-) < \infty \Big\}. \tag{2.19}$$

Neben der Zulässigkeit des Portfolioprozesses wird also zusätzlich gefordert, dass der Negativteil des Erwartungswertes endlich ist. Diese Bedingung ist ausreichend für die Existenz des Erwartungswertes (vgl. dazu [Als07], S. 71). Insbesondere wird dadurch

nicht verhindert, dass ein unendlicher positiver Nutzen des Endvermögens erreicht werden kann. Diese Möglichkeit soll erhalten bleiben, da trivialerweise jeder rational denkende Investor nach diesem Ziel strebt. Weiter erinnern wir an dieser Stelle daran, dass der Anfangszeitpunkt und das Startkapital in der Vermögensgleichung als Argumente enthalten sind.
Das zeitstetige Optimierungsproblem kann schließlich mithilfe der eingeführten Definitionen formuliert werden. Es lautet

$$\max_{(\boldsymbol{\pi},c)\in\mathcal{A}(t_0,x_0)} \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{T} U_1(c(s))ds + U_2(X(T))\right), \tag{2.20}$$

wobei U_1, U_2 beliebige Nutzenfunktionen darstellen. U_1 ist dabei ausschließlich von dem gewählten Konsumprozess und U_2 von dem resultierenden Endvermögen abhängig.
Das Optimierungsproblem 2.20 soll nun explizit unter der Bedingung $(\boldsymbol{\pi}, c) \in \mathcal{A}(t_0, x_0)$ gelöst werden. Zur Lösung wenden wir dafür den Ansatz der stochastischen Steuerung an. Dies ist eine verbreitete Methode zur Lösung eines solchen Optimierungsproblems. Es existiert dazu unter anderem ein weiteres Verfahren zur Portfoliooptimierung, welches als Martingalmethode bezeichnet wird und zum gleichen Ergebnis für den gesuchten Portfolioprozess führt. Zur weiteren Erläuterung verweisen wir beispielsweise auf [Kor01], Kapitel 5. Im Folgenden werden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit und der Analogie zum mehrdimensionalen Ansatz den Fall $d = m = 1$ betrachten. Für die Kontrollvariable gilt daher $\boldsymbol{\pi} = \pi = \pi_S$.
Nachdem das Optimierungsproblem nun formuliert wurde, soll im ersten Schritt das Optimalitätsprinzip von Bellman auf (2.20) angewendet werden. Knapp zusammengefasst kann dann mithilfe der Itô-Formel eine partielle Differentialgleichung hergeleitet werden, womit das Portfolioproblem explizit gelöst werden kann.
Wir beginnen damit das Maximum des erwarteten Nutzens unter der Menge (2.19) als eine Funktion in Abhängigkeit des Anfangszeitpunktes und des Startkapitals zu definieren. Dazu setzen wir das Maximum des Erwartungswertes gleich einer Funktion in Abhängigkeit von der Startzeit $t_0 \in [0, T]$ und dem zugehörigen Anfangskapital $x_0 := X(t_0)$. Es sei also

$$V(t_0, x_0) := \max_{(\pi,c)\in A(t_0,x_0)} \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{T} U_1(s, X(s), c(s))ds + U_2(X(T))\right) \tag{2.21}$$

mit $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$ und der Endbedingung $V(T, X(T)) = U(X(T))$.

Mithilfe des Optimalitätsprinzips von Bellman kann nun Gleichung (2.21) umgeformt werden zu

$$V(t_0,x_0)=\max_{(\pi,c)\in A(t_0,x_0)}\mathbb{E}\left(\int_{t_0}^{\theta}U_1(s,X(s),c(s))ds+V(\theta,X(\theta))\right) \tag{2.22}$$

für ein $t_0\in[0,T],\ \theta\in[t,T]$ mit der gleichbleibenden Endbedingung $V(T,X(T))=U(X(T))$.
Die Folgerung von (2.21) nach (2.22) ist in dieser Situation durchaus plausibel, da zu jedem Zeitpunkt innerhalb des Handelszeitraums das Tupel (π,c) schon optimal sein muss. Andererseits könnte es der Fall sein, dass ein Tupel existiert, das einen höheren Nutzen bis hierhin verspricht.
Im nächsten Schritt werden wir nun die mehrdimensionale Itô-Formel (vgl. [Øks00], S. 48) auf $V(\theta,X(\theta))$ anwenden. Die Voraussetzungen an V sind dafür erfüllt. Im Folgenden kürzen wir die partiellen Ableitungen mit $\partial_t V,\partial_x V,\partial_{xx}V$ ab. Die Itô-Formel liefert

$$\begin{aligned}V(t,x)&=\max_{(\pi,c)\in A(t,x)}\mathbb{E}\Bigg(\int_t^{\theta}U_1(c(s))ds+V(t,x)+\int_t^{\theta}\partial_tV(s,X(s))ds\\&\qquad+\int_t^{\theta}\partial_xV(s,X(s))dX(s)+\frac{1}{2}\int_t^{\theta}\partial_{xx}V(s,X(s))d\langle X,X\rangle_s\Bigg)\\&=\max_{(\pi,c)\in A(t,x)}\mathbb{E}\Bigg(V(t,x)+\int_t^{\theta}\big(U_1(c(s))+\partial_tV(s,X(s))\\&+\partial_xV(s,X(s))\big(X(s)(r+\pi\lambda)-c\big)+\frac{1}{2}\partial_{xx}V(s,X(s))X^2(s)\pi^2\sigma^2\big)ds\\&+\int_t^{\theta}\partial_xV(s,X(s))\pi\sigma dW(s)\Bigg).\end{aligned}$$

Aufgrund der Itô-Isometrie ist der Erwartungswert des dW-Terms gleich null und verschwindet. Weiter ziehen wir auf beiden Seiten $V(t,x)$ ab, teilen durch $\frac{1}{\theta-t}$ und nehmen den rechtsseitigen Limes $\theta\searrow t$.

Dann folgt mithilfe des Differentialquotienten

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{(\pi,c)\in A(t,x)} \mathbb{E}\Bigg(\lim_{\theta \searrow t} \frac{1}{\theta - t} \int_t^\theta & \big(U_1(c(s)) + \partial_t V(s, X(s)) \\
&+ \partial_x V(s, X(s))\big(X(s)(r + \pi\lambda) - c\big)ds + \frac{1}{2}\partial_{xx} V(s, X(s)) X(s)^2 \pi^2 \sigma^2\big)ds\Bigg) \\
\iff \quad 0 = \max_{(\pi,c)\in A(t,x)} \mathbb{E}\Bigg(& U_1(c(t)) + \partial_t V(t, X(t)) \\
&+ \partial_x V(t, X(t))\big(X(t)(r + \pi\lambda) - c\big) + \frac{1}{2}\partial_{xx} V(t, X(t)) X^2(t) \pi^2 \sigma^2\Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Da wir uns in dieser Arbeit auf die Maximierung des Nutzens, der aus dem erwarteten Endvermögen resultiert, konzentrieren möchten, setzen wir im Folgenden den Konsum während des gesamten Handelszeitraums konstant gleich null. Das heißt also, es gilt $c \equiv 0$ bzw. $U_1 \equiv 0$.
Da der verbliebene Ausdruck innerhalb des Erwartungswerts keiner stochastischen Größe mehr unterliegt, muss der Erwartungswert in (2.23) nicht weiter berücksichtigt werden. Insbesondere kann nun die Optimierung über alle Anfangswerte der Kontrollvariablen durchgeführt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden dabei die Argumente der Koeffizienten ausgelassen.
Insgesamt ergibt sich dann die zeitstetige Version einer sogenannten Hamilton-Jacobi-Bellmann Optimalitätsgleichnug (HJB-Gleichung) bzgl. des Optimierungsproblems (2.20) mit der Gestalt

$$
0 = \partial_t V(t, x) + \max_{\pi} \left(\partial_x V(t, x) x (r + \pi\lambda) + \frac{1}{2}\partial_{xx} V(t, x) x^2 \pi^2 \sigma^2 \right). \tag{2.24}
$$

Um nun den optimalen Portfolioprozess π^* herzuleiten, muss als erstes π in Abhängigkeit von den noch unbekannten Funktionen $\partial_t V$, $\partial_x V$ und $\partial_{xx} V$ ermittelt werden und danach die partielle Differentialgleichung mit der Randbedingung $V(T, X(T)) = U(X(T))$ gelöst werden. Dies liefert insgesamt die optimale Kontrollvariable π^*.
Die HJB-Gleichung wurde hier nur heuristisch hergeleitet. Aus diesem Grund wird ein Theorem benötigt, dass die Lösung der Optimierung verifiziert und einen Beweis für die Anwendbarkeit des Ansatzes auf das formulierte Optimierungsproblem liefert. Da der Satz eher theoretisch und für unsere weiteren Untersuchungen

nicht von besonders großem Nutzen ist, führen wir den Satz im Anhang aus und verweisen zum Beweis und für ausführlichere Erklärungen auf die Literatur (siehe beispielsweise [KK03], S. 223 ff.).

Im Folgenden soll nun die Vorgehensweise zur Lösung des betrachteten Portfolioproblems mithilfe des Verifikationstheorems zusammengefasst werden.[7] Als erstes wird dazu das Maximum der HJB-Gleichung (A.4) abhängig von der unbekannten Funktion $V(t,x)$ (siehe Satz A.2) ermittelt. Danach kann mithilfe des bestimmten π^* die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t V(t,x) + \tilde{\mu}(t,x,u^*)\partial_x V(t,x) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t,x,u^*)\partial_{xx} V(t,x) = 0$$

mit der Randbedingung (A.5) gelöst werden. Im letzten Schritt soll dann schließlich überprüft werden, ob die benötigten Voraussetzungen (A.1) bis (A.3) und $|V(t,x)| \leq K(1+|x|^k))$ erfüllt sind.
Diese Vorgehensweise soll nun auf das hier gegebene Portfolioproblem anwendet werden. Demnach bestimmen wir nach dem oben beschriebenen Verfahren zuerst die Lösung des Maximums. Dazu leiten wir Gleichung (2.24) nach π ab und lösen weiter nach der Kontrollvariable auf. Es folgt

$$\begin{aligned} & 0 = \partial_x V x \lambda + \partial_{xx} V x^2 \pi \sigma^2 \\ \iff \quad & \pi^* = -\frac{\partial_x V \lambda}{\partial_{xx} V x \sigma^2} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Aufgrund der Monotonie des Erwartungswerts und der strengen Konkavität der Nutzenfunktion, nehmen wir wie üblich

$$\partial_{xx} V < 0$$

an (vgl. [Kor01], S. 241). Dies liefert die hinreichende Bedingung für ein Maximum an der Stelle π^*. Einsetzen von (2.25) in Gleichung (2.23) für $t < T$ liefert nun

[7] Wir setzen an dieser Stelle $L = U_1$, $\Psi = U_2$ und $u = (\pi, c)$, damit der Satz auf die vorliegende Optimierung passend zugeschnitten ist.

abschließend

$$\begin{aligned}
&\partial_t V + \partial_x V x \left(r + \lambda \left(-\frac{\partial_x V \lambda}{\partial_{xx} V x \sigma^2} \right) \right) + \frac{1}{2} \partial_{xx} V x^2 \left(-\frac{\partial_x V \lambda}{\partial_{xx} V x \sigma^2} \right)^2 \sigma^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \partial_t V + \partial_x V x r - \frac{(\partial_x V)^2 \lambda^2}{\partial_{xx} V \sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_x V)^2 \lambda^2}{\partial_{xx} V \sigma^2} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \partial_t V + \partial_x V x r - \frac{1}{2} \frac{(\partial_x V)^2 \lambda^2}{\partial_{xx} V \sigma^2} = 0. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Gemäß der geforderten Randbedingung muss zudem

$$V(T, X(T)) = U(X(T))$$

gelten.
Nachdem wir nun den Ansatz der stochastischen Steuerung erläutert haben, soll im folgenden Abschnitt das Optimierungsproblem unter der Voraussetzung einer bestimmten Nutzenfunktion gelöst werden.

2.4 Lösung der Portfoliooptimierung unter der Power-Nutzenfunktion

Wir betrachten nun explizit die Power-Nutzenfunktion

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma, \ 0 < \gamma < 1$$

und führen die Optimierung damit fort. Der Faktor γ ist hier ein beliebiger Parameter zwischen null und eins, der die Risikoaversion des Investor beschreibt.
Im Folgenden soll nun die partielle Differentialgleichung gelöst werden. Eine geeignete Methode zu Lösung ist hier der Separationsansatz bzw. die Methode der Trennung der Variablen (vgl. dazu [Eva08], S. 167 ff.). Folglich nehmen wir also an, es existiert eine positive, reellwertige und stetig-differenzierbare Funktion f mit $f(T) = 1$, mit der V darstellbar ist als Produkt der Form

$$V(t, x) = f(t) \cdot \frac{1}{\gamma} x^\gamma. \qquad (2.27)$$

Dieser Ansatz liegt nahe, da $V(T, X(T)) = U(X(T)) = \frac{1}{\gamma} X(T)^\gamma$ gilt und die Endbedingung erfüllt ist.

Substituieren wir jetzt $V,\ \partial_t V,\ \partial_x V$ und $\partial_{xx} V$ in Gleichung (2.26) mit dem Ausdruck (2.27), erhalten wir für $t < T$

$$\begin{aligned}
f'(t)\frac{1}{\gamma}x^\gamma + f(t)x^{\gamma-1}xr - \frac{1}{2}\frac{f^2(t)x^{2(\gamma-1)}\lambda^2}{f(t)(\gamma-1)x^{\gamma-2}\sigma^2} &= 0 \\
\iff \qquad \frac{1}{\gamma}x^\gamma\frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{1}{2}\frac{f^2(t)}{f^2(t)}\frac{x^{2\gamma-2}\lambda^2}{(\gamma-1)x^{\gamma-2}\sigma^2} - x^\gamma r \\
\iff \qquad \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{1}{2}\frac{\gamma x^{(2\gamma-2-\gamma+2-\gamma)}\lambda^2}{(\gamma-1)\sigma^2} - r\gamma \\
\iff \qquad -\frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{1}{2}\frac{\gamma\lambda^2}{(1-\gamma)\sigma^2} + r\gamma
\end{aligned} \tag{2.28}$$

sowie für den Fall $t = T$

$$f(T)x^\gamma = x^\gamma \iff f(T) = 1.$$

Weiter lösen wir die Differentialgleichung (2.28) mithilfe der Exponentialfunktion. Hier müssen wir beachten, dass die Koeffizienten eine zeitabhängige Komponente besitzen. Es folgt

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}\ln(f(t)) &= \frac{\gamma\lambda^2(t)}{2(1-\gamma)\sigma^2(t)} + r(t)\gamma \\
\iff \qquad -\ln(f(t)) &= \int_t^T \frac{\gamma\lambda^2(s)}{2(1-\gamma)\sigma^2(s)} + r(s)\gamma\, ds \\
&= \int_t^T \frac{(\mu(s)-r(s))^2\gamma}{2\sigma^2(s)(1-\gamma)} + r(s)\gamma\, ds \\
\iff \qquad f(t) &= \exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma\lambda^2(s)}{2(1-\gamma)\sigma^2(s)} + r(s)\gamma\, ds\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann für den Lösungsansatz (2.27)

$$V(t,x) = \exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma\lambda^2(s)}{2(1-\gamma)\sigma^2(s)} + r(s)\gamma\, ds\right)\cdot\frac{1}{\gamma}x^\gamma. \tag{2.29}$$

Schließlich erhalten wir durch Einsetzen von (2.29) in den Ausdruck (2.25) die optimale Lösung für π. Diese lautet

$$\begin{aligned}\pi^*(t) &= -\frac{\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma\lambda^2(s)}{2(1-\gamma)\sigma^2(s)} + r(s)\gamma\, ds\right) x^{\gamma-1}\lambda(t)}{\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma\lambda^2(s)}{2(1-\gamma)\sigma^2(s)} + r(s)\gamma\, ds\right)(\gamma-1)x^{\gamma-2}x\sigma^2(t)} \\ &= -\frac{\lambda(t)}{(\gamma-1)\sigma^2(t)} \cdot x^{\gamma-1-1-\gamma+2} = \frac{1}{1-\gamma}\frac{\lambda(t)}{\sigma^2(t)}.\end{aligned}$$

Es muss zuletzt noch überprüft werden, dass die Voraussetzungen für den Satz A.2.1 erfüllt sind. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(t,x,u(t)) &:= X(t)\big(r(t) + \pi_S(t)\lambda(t)\big) - c(t), \\ \tilde{\sigma}(t,x,u(t)) &:= X(t)\pi_S(t)\sigma(t).\end{aligned}$$

mit $u := (\pi, c)$.
Da die Koeffizienten die Bedingungen (2.3) bzw. (2.4) erfüllen, sind die Voraussetzungen (A.1) - (A.3) an $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\sigma}$ erfüllt. Weiter können wir a und b ausreichend groß wählen, sodass die Menge der π in dem Intervall $[a,b]$ enthalten ist. Da weiter V die Gestalt von (2.27) besitzt, ist diese Funktion aufgrund der Positivität von f und der strengen Konkavität der Nutzenfunktion ebenfalls streng konkav. Weiter gilt für die Exponentialfunktion in (2.29)

$$\exp\left(-\int_t^T \frac{\gamma\lambda^2(s)}{2(1-\gamma)\sigma^2(s)} + r(s)\gamma\, ds\right) < K$$

für eine Konstante $K > 0$. Dazu ist $\frac{1}{\gamma}x^\gamma < 1 + x^k$ für alle $\gamma \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}$, sodass die Bedingung

$$|V(t,x)| \leq K(1 + |x|^k)$$

für alle (t,x) erfüllt ist. Insgesamt sind daher alle Voraussetzungen an Satz A.2.1 erfüllt. Folglich stellt π^* eine optimale Lösung des Portfolioproblems unter der Voraussetzung der Power-Nutzenfunktion dar.
Schließlich erhalten wir, dass die Lösung des stochastischen Optimierungsproblems

bzgl. der Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma$ gegeben ist durch den Portfolioprozess

$$\pi_S^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)} \quad \forall \;\; t \in [0,T] \tag{2.30}$$

ist. Dies soll im folgenden Satz festgehalten werden.

Satz 2.4.1 (Lösung des Portfolioproblems)**.** *Für den eindimensionalen Fall ergeben sich sich für das Optimierungsproblem unter den obigen Annahmen die Lösungen:*

(i) Für die Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma,\ 0 < \gamma < 1$ *lautet die optimale Strategie* $\pi_S^*(t)$ *für (2.20)*

$$\pi_S^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)}.$$

(ii) Für die Log-Nutzenfunktion $U(x) = \ln x$ *ist die optimale Strategie*[8] $\pi_S^*(t)$ *für (2.20) gegeben durch*

$$\pi_S^*(t) = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)}.$$

Beweis. :
(i) Siehe obige Herleitung.
(ii) Wenn wir den Ansatz

$$V(t,x) := f(t) \cdot \ln(x)$$

wählen und dann analog vorgehen, so liefert dies das Ergebnis für den logarithmischen Nutzen. ∎

Hervorzuheben ist hier, dass π_S^* in beiden Fällen nur von der Zeitkomponente abhängig ist. Dies bedeutet, dass die optimale Strategie zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0,T]$ so bestimmt ist, dass ein konstanter Anteil des Vermögens in das risikobehaftete Asset investiert werden soll. Ferner beträgt der Anteil in das risikofreie Geldmarktkonto für den Power-Nutzen

$$\pi_M(t) = 1 - \pi_S(t) = 1 - \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)}.$$

[8]Siehe zur Herleitung für den logarithmischen Nutzen z. B. [Mer69] oder nutze die Martingalmethode.

Der Quotient (2.30) wird als Merton Ratio bezeichnet. Der Zähler ist hierbei die Differenz zwischen der Drift des risikobehafteten Assets und der Rendite des Geldmarktkontos. Bei positiver Differenz wird dies auch als Überrendite oder Alphafaktor bezeichnet.[9] Betrachten wir das Ergebnis unter der Annahme, dass Leerverkäufe nicht zugelassen sind. Der Investor wird aus diesem Grund sein gesamtes Vermögen ausschließlich in das risikolose Geldmarktkonto investieren, falls $\mu - r \leq 0$ gilt. Der Grund hierfür ist offensichtlich, da der Investor andernfalls mehr Risiko bei gleichbleibender oder sogar geringerer Rendite aufnimmt. Falls die Differenz $\mu - r$ dagegen positiv ist, sollte der Anleger genau den Anteil (2.30) in das risikobehaftete Asset investieren, um seinen Nutzen gemäß der Portfoliooptimierung zu maximieren.
Der Wert wird offensichtlich nicht nur durch den Zähler bestimmt, sondern auch vom Nenner beeinflusst. Hier sehen wir, dass ein Anstieg von σ^2 eine Abnahme von π_S^* herbeiführt und umgekehrt. Diese Eigenschaft ist in dieser Situation plausibel, da eine erhöhte Volatilität aufgrund der Risikoaversion des Investors eine höhere Abneigung gegen eine Investition in das risikobehaftete Asset hervorruft, da größere Preisschwankungen anzunehmen sind. Der im Nenner stehende $(1 - \gamma)$-Wert ist ebenfalls sinnvoll, da dieser den Einfluss der Volatilität auf die Ratio beschreibt. Ein niedriger Parameter weist diesbezüglich dem Investor eine hohe Risikoaversion zu, wodurch insgesamt die Merton Ratio sinkt bzw. der investierte Anteil des Vermögens in das risikobehaftete Asset geringer wird. Je höher die Risikoaversion des Investors ist, desto niedriger ist das investierte Vermögen in risikobehaftete Assets.

Der Ansatz der stochastischen Kontrolle kann analog auch im mehrdimensionalen Modell durchgeführt werden. Wir folgern unmittelbar aus Satz 2.4.1 das Ergebnis der Portfoliooptimierung für den mehrdimensionalen Fall $d > 1$.

[9] Die Überrendite ist ein Maß für die Rendite einer Anlage gegenüber einem Vergleichswert, welcher in dieser Situation der Zinssatz r ist.

Korollar 2.4.2 (Lösung der Optimierung im mehrdimensionalen Modell)**.** *Betrachte den Fall $m \geq d \geq 1$. Falls die Matrix $\boldsymbol{\sigma\sigma}^\intercal$ vollen Rang hat, so ergibt sich für das Optimierungsproblem bzgl. der Power-Nutzenfunktion die Lösung*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}^*(t) = (\pi^*_{S_1}(t), \dots, \pi^*_{S_d}(t))^\intercal &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot \big(\boldsymbol{\sigma\sigma}^\intercal\big)^{-1} \big(\boldsymbol{\mu}(t) - r(t)\mathbf{1}\big) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{1j}(t)(\mu_j(t) - r(t)) \\ \vdots \\ \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{dj}(t)(\mu_j(t) - r(t)) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei $\big((\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{ij}\big)_{1 \leq i,j \leq d}$ die Einträge der inversen Matrix von $(\boldsymbol{\sigma\sigma}^\intercal)$ bezeichnet.

Beweis. Analoge Vorgehensweise wie im eindimensionalen Fall. Hierbei muss beachtet werden, dass $m \geq d$ gilt und die Matrix $\boldsymbol{\sigma\sigma}^\intercal$ vollen Rang besitzt, damit die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet ist. ∎

Der optimale Anteil in den risikofreien Bond im mehrdimensionalen Fall ist demnach

$$\pi^*_M(t) = 1 - \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{ij}(t)(\mu_j(t) - r(t)).$$

Die stochastische Optimierung des Portfolioproblems ist nun abgeschlossen. Als Fortführung kann der Fall der Portfoliooptimierung in einem Modell mit stochastischer Zinsrate betrachtet werden (siehe dazu z. B. [Kor01], S. 21 ff.). Auch ist eine Anwendung auf Modelle mit stochastischer Volatilität, beispielsweise das Heston-Modell möglich. Dies soll in dieser Arbeit jedoch nicht weiter thematisiert werden.

Kapitel 3

Elastizitäten in der Portfoliooptimierung

Im Folgenden wollen wir nun das Hauptaugenmerk auf die Anwendung von Elastizitäten in der Portfoliooptimierung legen. Hierbei ist es das Ziel mithilfe der Elastizität ein Portfolio zu vereinfachen und damit den optimalen Portfolioprozess unter den zuvor gemachten Voraussetzungen zu bestimmen, obwohl weitere Investitionsmöglichkeiten hinzugekommen sind. Wir beginnen zuerst mit der Definition und Erläuterung der Elastizität im wirtschaftlichen und finanzmathematischen Kontext. Allgemein formuliert ist eine Elastizität unter wirtschaftlicher Betrachtungsweise die Beeinflussung einer Größe durch Veränderung einer anderen. Diese Größen müssen dafür offensichtlich eine bestimmte Abhängigkeit aufweisen. Der Begriff der Elastizität wird auf verschiedenartige Inhalte angewandt. Ein anschauliches Beispiel aus der Mikroökonomie ist dafür die Preiselastizität der Nachfrage, welche die Veränderung der Nachfrage eines bestimmten Gutes aufgrund der Preisveränderungen eines anderen Gutes beschreibt. In diesem Fall wird nun die Elastizität bzgl. der vorhandenen Finanzgüter betrachtet.
Wir werden im Folgenden das zuvor eingeführte Finanzmarktmodell mit den gleichen Voraussetzungen annehmen. Dazu beginnen wir nun als erstes mit der mathematischen Definition der Elastizität und formulieren diese dann bzgl. der Preisprozesse der vorliegenden Assets.

3.1 Die Elastizitätsfunktion

Genauer ist die Elastizität eine Maß, das den Einfluss auf die relative Änderung einer Größe auf die relative Änderung einer anderen beschreibt. Hierbei ist es wichtig, dass die eine Größe abhängig von der anderen, unabhängigen Größe ist. Als erstes soll der Begriff dazu mathematisch korrekt definiert werden.

Definition 3.1.1 (Elastizität). *Sei $y : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Elastizitätsfunktion $\varepsilon_y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ von y bzgl. einer Variable $x \in (0, \infty)$ ist dann gegeben durch*

$$\varepsilon_y(x) := \frac{\frac{dy(x)}{y(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d}{dx} y(x) \frac{x}{y(x)} = y'(x) \frac{x}{y(x)}. \tag{3.1}$$

Ferner beschreiben Elastizitäten von Anlagemöglichkeiten am Finanzmarkt den Wert der relativen Änderung des Finanzgutes zur relativen Änderung eines anderen Finanzgutes.

Dieser Quotient liefert also gerade das Verhältnis von der relativen Änderung von y bzgl. der relativen Änderung von x unter dem Aspekt, dass y von x abhängig ist. Wir wollen dazu den Ausdruck (3.1) mithilfe des Differentialquotienten zur besseren Anschauung umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{x}{y(x)} y'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{x + h - x} \frac{x}{y(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{y(x)} \frac{x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 - \frac{y(x+h)}{y(x)}}{1 - \frac{x+h}{x}}. \end{aligned}$$

Anhand des letzten Quotienten ist nun zu erkennen, dass mit der Funktion (3.1) der Einfluss der relativen Änderung beschrieben wird. Beispielsweise kann nun der Wert eines beliebigen Derivats C (z.B. einer europäischen Call-Option) als Funktion in Abhängigkeit von einem Asset S betrachtet werden, sodass $y = C$ und $x = S$ gesetzt wird.
Dementsprechend lautet unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Preisprozesse die Elastizität[1] von C bzgl. S

$$\varepsilon_C(S) = \frac{d}{dS} C \cdot \frac{S}{C}.$$

[1] Im Folgenden werden wir $\varepsilon_{C,S} := \varepsilon_C(S)$ setzen.

Wie oben beschrieben findet der Begriff der Elastizität jedoch hauptsächlich in der Mikroökonomie Verwendung. Aus diesem Grund verweisen wir auf [Fra04], 36 ff. zu genaueren Erläuterung. Zur Herleitung der Elastizitätenmethode in Modellen mit stochastischer Zinsrate (wie z.B. in Short-Rate-Modellen) wird der Begriff der Duration benötigt und deshalb im späteren Verlauf definiert. Dies ist eine ähnliche Kennzahl und hängt mit der Elastizität zusammen. Zur genaueren Erläuterung verweisen wir auf Abschnitt 5.3.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die Kontrollvariable des Portfolioprozesses durch die Elastizität ersetzt werden kann, während die anderen Größen in der Vermögensgleichung unverändert bleiben. Mithilfe dieses Resultats kann dann die optimale Elastizität bzgl. des Portfolioproblems bestimmt werden, aus der dann der optimale Portfolioprozess abgeleitet werden kann. Dies liefert uns dann schließlich wieder den angestrebten maximalen Nutzen des Endververmögens anhand der jeweiligen Nutzenfunktion.
Bevor der Zusammenhang zwischen dem Portfolioprozess und der Elastizität gezeigt wird, benötigen wir noch einige Vorbereitungen zur risikoneutralen Bewertung der Finanzgüter.

3.2 Herleitung eines replizierenden Portfolios

Es wird nun angenommen, es existiert eine weitere Anlagemöglichkeit auf dem Finanzmarkt in Form eines sogenannten Claims. Unter bestimmten Bedingungen soll dazu eine partielle Differentialgleichung hergeleitet werden, welche als Lösung den risikoneutralen Preis dieses Derivats besitzt. Der Ansatz ist hierbei, eine Short-Position (Verkaufsposition) mit den gegeben Anlagemöglichkeiten abzusichern. Anders formuliert wird ein replizierendes Portfolio zu dem relevanten Claim erstellt. Wir beginnen mit der formalen Definition eines Claims und werden dann die Herleitung für den eindimensionalen Fall zeigen.

Definition 3.2.1 (Ein bedingter Claim)**.** *Ein bedingter Claim C mit Laufzeit T ist ein progressiv messbarer, stochastischer Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ mit der Gestalt*

$$C : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

der den Wert zum Zeitpunkt t angibt, bestimmte Auszahlungen innerhalb der Rest-

laufzeit $(T-t)$ *auszuschütten.*

In dieser Situation betrachten wir genauer einen bedingten Claim mit einer festen Auszahlung zum Ende des Handelszeitraums. Dazu betrachten wir eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable

$$C_T := C(T) : \Omega \to \mathbb{R},$$

welcher die Auszahlung zur Zeit T beschreibt. Aufgrund der Vollständigkeit (siehe Definition A.1.4) des Modells ist jeder Claim mit der Eigenschaft $\mathbb{E}^*|C^*(T)| < \infty$ bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ hedgebar bzw. es existiert eine Hedge-Strategie zu dem betrachteten Claim.[2] Der Beweis hierfür ist in [Shr04] S. 232 ff. zu finden.
Da nach einer risikoneutralen Bewertung gestrebt wird, soll der Claim einen Preis bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes zugeordnet werden. Dieser ist dann gegeben durch die erwartete, diskontierte Auszahlung zum Ende der Laufzeit. Der faire Preis des Claims zur Zeit $t \in [0,T]$ ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}^*\left(C_T^*|\mathcal{F}_t\right). \tag{3.2}$$

Damit der Preis des Claims auf dem Finanzmarkt risikoneutral bewertet werden kann, leiten wir eine Handelsstrategie bzgl. der bekannten Anlagemöglichkeiten her, welche die diskontierte Auszahlung des Claims zu jeder Zeit $t \in [0,T]$ repliziert und aufgrund der Vollständigkeit diese in dem Modell existiert. Es muss für die Vermögensgleichung dementsprechend

$$X^*(T) = C_T^* \tag{3.3}$$

gelten.
Da C_T^* $\mathcal{F}_T$-messbar und der diskontierte Vermögensprozess ein $\mathbb{P}^*$-Martingal ist, folgt weiter

$$\mathbb{E}^*\left(C_T^*|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^*\left(X^*(T)|\mathcal{F}_t\right) = X^*(t).$$

Die Handelsstrategie liefert also ein replizierendes Portfolio, wenn der

[2]Der Ausdruck C^* bezeichne die diskontierte Auszahlung des Claims mit dem Faktor des Geldmarktkontos M. Es gilt also $C^* = \frac{C}{M}$.

Vermögensprozess während des gesamten Handelszeitraums gleich der erwarteten Auszahlung (3.2) ist. Weil die Preisprozesse der vorliegenden Assets ausschließlich Diffusionsprozesse sind, kann nun die Markov-Eigenschaft[3] von S genutzt werden, sodass mit (3.3) der Wert des Claims gegeben ist durch

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{M(T)} | \mathcal{F}_t \right) \cdot M(t) = \mathbb{E} \left(C \cdot \exp \left(- \int_t^T M(s) ds \right) \bigg| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E} \left(C \cdot \exp \left(- \int_t^T M(s) ds \right) \bigg| S(t) \right) =: C(t, S(t)). \end{aligned}$$

Der faire Preis des Claims ist also durch die stetig-differenzierbare Funktion

$$C : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

darstellbar. Insbesondere ist C ein Itô-Prozess und es gilt $C \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$.
Die Vermögensgleichung des replizierenden Portfolios bzgl. der Short-Position in einen Claim zu gegebenem Anfangskapital muss also im gesamten Handelszeitraum mit dem Wert des Claims übereinstimmen.
Wir erhalten nun als nächstes mithilfe der Itô-Formel[4] die Dynamik

$$\begin{aligned} dC(t, S(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} C(t, S(t)) dt + \frac{\partial}{\partial S} C(t, S(t)) dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} C(t, S(t)) d\langle S, S \rangle_t \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} C(t, S(t)) + \frac{\partial}{\partial S} C(t, S(t)) S(t) \mu(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} C(t, S(t)) S^2(t) \sigma^2(t) \right) dt \\ &+ \frac{\partial}{\partial S} C(t, S(t)) S(t) \sigma(t) dW(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wie gerade beschrieben, muss dann also die Gleichung

$$dX(t) = dC(t, S(t)) \iff 0 = dX(t) - dC(t, S(t))$$

mit Anfangsbedingung $X(0) = C(0, S(0))$ erfüllt sein.

[3]Siehe zur Definition eines Markov-Prozesses und deren Eigenschaft z.B. [Øks00], S. 111.
[4]Vgl. Lemma von Itô im Anhang, Satz (A.1.6).

Setzen wir nun (3.4) für dC ein und kürzen die partiellen Ableitungen mit der bereits bekannten Schreibweise ab, so erhalten wir mit der Eigenschaft der Selbstfinanzierung

$$
\begin{aligned}
0 &= dx - dC = \varphi_M dM + \varphi_S dS - dC \\
&= \varphi_M M r dt + \varphi_S S(\mu dt + \sigma dW) - \left(\partial_t C + \partial_S C S \mu - \frac{1}{2}\partial_{SS} C S^2 \sigma^2\right) dt \\
&+ \partial_S C S \sigma dW \\
&= \left((C - \varphi_S S) r + \varphi_S S \mu - \partial_t C + \partial_S C S \mu - \frac{1}{2}\partial_{SS} C S^2 \sigma^2\right) dt \\
&+ S(\varphi_S - \partial_S C)\sigma dW.
\end{aligned}
$$

Es muss nun das Itô-Integral verschwinden, damit der Preis des Claims unter risikofreien Bedingungen ermittelt wird. Aus diesem Grund muss für den Anteil des investierten Vermögens in das risikobehaftete Asset

$$\varphi_S(t) = \partial_S C(t) \quad \forall \quad t \in [0, T] \tag{3.5}$$

gelten, wodurch der Diffusionsterm gleich null ist. Insgesamt bedeutet dies, dass nun der verbliebene dt-Term ausschließlich von deterministischen Parametern abhängt und deshalb nicht von einer stochastischen Größe beeinflusst wird.
Mit (3.5) erhalten wir weiter

$$
\begin{aligned}
& 0 = (C - \partial_S C S) r + \partial_S C S \mu - \partial_t C + \partial_S C S \mu - \frac{1}{2}\partial_{SS} C S^2 \sigma^2 \\
\Longleftrightarrow \qquad & 0 = rC - \partial_t C - r \partial_S C S - \frac{1}{2}\partial_{SS} C S^2 \sigma^2
\end{aligned}
$$

bzw. ausformuliert

$$
\begin{aligned}
0 &= r(t) C(t, S(t)) - \frac{d}{dt} C(t, S(t)) - r(t) \frac{d}{dS} C(t, S(t))) \\
&- \frac{1}{2} \frac{d^2}{dS^2} C(t, S(t))) S^2(t) \sigma^2(t).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Dies ist offensichtlich eine partielle Differentialgleichung (Abk. PDE) mit Anfangsbedingung $X(0) = C(0, S(0))$. Zusätzlich gilt für $t = T$ die vorausgesetzte Endbedingung $X(T) = C(T, S(T)) = C_T$. Eine Lösung dieser PDE liefert dann einen fairen Preis des vorliegenden Claims $C(t, S(t))$. Die Gleichung (3.6) ist die bekannte

Black-Scholes-Differentialgleichung mit deterministischen, zeitlich variablen Koeffizienten. Insgesamt wurde nun mit $\varphi_S \equiv \partial_S C$ eine Handelsstrategie hergeleitet, die einen Hedge für die Short-Position in einem Claim liefert.

Bemerkung 3.2.2. Wie schnell gezeigt ist, resultiert aus $\varphi_S = C_S$ unmittelbar die Gestalt von φ_M. Dies lässt sich leicht bestimmen durch

$$\begin{aligned} & 0 = \varphi_M(t)M(t) + \frac{d}{dS}C(t,S(t))S(t) - C(t,S(t)) \\ \iff \quad & \varphi_M(t) = \frac{C(t,S(t)) - \frac{d}{dS}C(t,S(t))S(t)}{M(t)} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. Nach den obigen Ergebnissen liegt also mit der bestimmten Handelsstrategie $\left((\varphi_M, \varphi_S)^\intercal\right)_{t\in[0,T]}$ ein replizierendes Portfolio für den gegebenen Claim vor.

Die Wahl von $\varphi_S = \partial_S C$ ist als sogenannter Delta/Δ-Hedge bekannt. Im gesamten Handelszeitraum ist zur Absicherung der Short-Position die Anzahl der gehaltenen Assets gleich der partiellen Ableitung des Claims nach dem Asset. Der Begriff Δ stammt von den sogenannten Greeks-Kennzahlen. Dies sind Maßzahlen, welche die Sensitivität der partiellen Ableitungen eines Claims, insbesondere Optionen bzgl. des Basiswerts beschreiben. Zur näheren Ausführung verweisen wir auf [HK05], Kapitel 18 und blicken nun im folgenden Abschnitt auf das eigentliche Ziel der Arbeit.

3.3 Die Elastizitätenmethode im Black-Scholes-Modell

Betrachten wir nun die Annahme, es besteht für den Anleger die Möglichkeit neben dem Geldmarktkonto M und einem risikobehafteten Asset S in einen bedingten Claim C mit Basiswert S zu investieren. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt gilt dann $C := C(t, S(t))$. Wir orientieren uns im Folgenden nun hauptsächlich an den Quellen [Kra13], S. 71 ff und [KK03], da dort die Elastizitätenmethode erstmalig formuliert wird.

Anfangs betrachten wir nun die Vermögensgleichung aus Abschnitt 2.2, die gegeben ist durch die Dynamik

$$dX(t) = X(t)\Big((r(t) + \lambda(t)\pi_S(t))dt + \pi_S(t)\sigma(t)dW(t)\Big).$$

Allgemein beschrieben ist nun das Ziel, die Vermögensgleichung an eine Handelsstrategie mit weiteren Anlagemöglichkeiten anzupassen, sodass danach der Portfolioprozess als Kontrollvariable des Portfolioproblems durch die Elastizität ersetzt werden, währenddessen die anderen Größen in der Gleichung nicht beeinflusst und verändert werden. Genauer soll dies unter der Voraussetzung geschehen, dass mindestens eine weitere Anlagemöglichkeit in Form eines bedingten Claims hinzukommt.
Um dies zu erreichen, werden wir als erstes eine vereinfachte Dynamik von C herleiten und danach die Elastizität entsprechend einzufügen. Betrachten wir also dazu wieder den Preisprozess des Claims C und wenden darauf die Itô-Formel an. Es folgt

$$dC(t,S(t)) = \left(\partial_t C + \partial_S C S(t)\mu(t) + \frac{1}{2}\partial_{SS} C S(t)^2\sigma(t)^2\right)dt + \partial_S C S(t)\sigma(t)dW(t) \tag{3.7}$$

Aufgrund der Resultate aus dem vorigen Abschnitt löst der Claim die Differentialgleichung (3.6) unter dem Aspekt der risikoneutralen Bewertung. Lösen wir die Gleichung nach $\partial_t C$ auf und setzen dies danach in die Dynamik (3.7) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} dC(t,S(t)) = \Big(& r(t)C(t,S(t)) - r(t)S(t)\partial_S C(t,S(t)) - \frac{1}{2}\partial_{SS}C(t,S(t))S(t)^2\sigma^2(t) \\ &+ \partial_S C(t,S(t))S(t)\mu(t) + \frac{1}{2}\partial_{SS}C(t,S(t))S(t)^2\sigma^2(t)\Big)dt \\ &+ \partial_S C(t,S(t))S(t)\sigma(t)dW(t) \\ =& \Big(r(t)C(t,S(t)) + \partial_S C(t,S(t))S(t)\lambda(t)\Big)dt \\ &+ \partial_S C(t,S(t))S(t)\sigma(t)dW(t) = (*). \end{aligned}$$

Mithilfe der Black-Scholes-Differentialgleichung konnte nun der Ausdruck, der durch den quadratischen Variationsterm $d\langle S,S\rangle$ erzeugt wird, gekürzt werden.
Wir führen nun als nächstes die Elastizität des Claims C bzgl. des risikobehafteten Assets S gemäß Definition 3.1.1 ein. Es gilt dann

$$\varepsilon_C(t) := \frac{dC/C(t,S(t))}{dS/S(t)} = \frac{d}{dS}C(t,S(t)) \cdot \frac{S(t)}{C(t,S(t))} = \frac{\partial_S C(t,S(t)) \cdot S(t)}{C(t,S(t))}.$$

Durch das Einsetzen des Produkts $\varepsilon_C(t) \cdot C$ in $(*)$ erhalten wir schließlich

$$dC(t, S(t)) = C(t, S(t))\Big((r(t) + \varepsilon_C(t)\lambda(t))dt + \varepsilon_C(t)\sigma(t)dW(t)\Big). \tag{3.8}$$

Insgesamt ist nun in der Dynamik neben den bekannten Koeffizienten und der Zinsrate die Elastizität hinzugekommen. Mithilfe dieser Gleichung kann nun die kontrollierte Vermögensgleichung so verändert werden, dass die Elastizität den Portfolioprozess als Kontrollvariable ersetzt. Im Hinblick auf die Optimierung des Portfolioproblems kann dann die optimale Elastizität ermittelt werden, welche den erwarteten Nutzen des Endvermögens maximiert.
Wir fahren also mit der Vermögensgleichung zu den folgenden Anlagemöglichkeiten fort. Betrachten wir dazu das Portfolioproblem aus Abschnitt (2.3) unter der Annahme einer bestimmten dreidimensionalen Handelsstrategie. Der Investor hat dazu die Möglichkeit, sein Vermögen in zwei risikobehaftete Anlagen zu investieren sowie in das risikofreie Geldmarktkonto. Genauer existieren die Anlagemöglichkeiten in das Geldmarktkonto M, in das Asset S sowie in einen Claim C mit dem Asset als Basiswert und Laufzeit T. Die Handelsstrategie hat daher die Gestalt

$$\big(\Phi(t)\big)_{t\in[0,T]} = \big((\varphi_M(t), \varphi_S(t), \varphi_C(t))^\mathsf{T}\big)_{t\in[0,T]}$$

Eine Situation könnte nun sein, dass der Claim eine europäische Call- oder Put-Option darstellt, was im folgenden Abschnitt genauer betrachtet wird.
Aufgrund der Handelsstrategie ist der Vermögensprozess für alle $t \in [0, T]$ demnach gegeben durch die Gleichung

$$X(t) := \varphi_M(t)M(t) + \varphi_S(t)S(t) + \varphi_C(t)C(t).$$

Aufgrund der Selbstfinanzierung folgt dann wie gehabt

$$dX(t) = \varphi_M(t)dM(t) + \varphi_S(t)dS(t) + \varphi_C(t)dC(t) \tag{3.9}$$

mit Anfangswert $x_0 = X(0)$.
Wir modellieren die Vermögensgleichung (3.9) laut Definition 2.2.5 im weiteren Verlauf über den zugehörigen Portfolioprozess

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_S, \pi_C)^\mathsf{T}.$$

Es folgt dann für die Gleichung (3.9) mithilfe von (3.8) und der Dynamik des Assets

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \varphi_M(t)dM(t) + \varphi_S(t)dS(t) + \varphi_C(t)dC(t) \\
&= \varphi_M(t)M(t)r(t)dt + \varphi_S(t)S(t)\Big(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\Big) \\
&+ \varphi_C(t)C(t,S(t))\Big((r(t) + \varepsilon_C(t)\lambda)dt + \varepsilon_C(t)\sigma(t)dW(t)\Big) \\
&= (1 - \pi_S(t) - \pi_C(t))X(t)r(t)dt + \pi_S(t)X(t)\Big(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\Big) \\
&+ \pi_C(t)X(t)\Big((r(t) + \varepsilon_C(t)\lambda(t))dt + \varepsilon_C(t)\sigma(t)dW(t)\Big) \\
&= X(t)\Big((r(t) + (\pi_S(t) + \pi_C(t)\varepsilon_C(t))\lambda(t))dt \\
&\qquad\qquad + (\underbrace{\pi_S(t) + \pi_C(t)\varepsilon_C(t)}_{\varepsilon(t):=})\sigma(t)dW(t)\Big).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Aufgrund der Gestalt der letzten Gleichung, definieren wir einen zusammenfassenden Begriff der Elastizitäten in Gleichung (3.10), den wir als Portfolio-Elastizität bezeichnen und in folgender Definition festlegen.

Definition 3.3.1 (Portfolio-Elastizität)**.** *Sei die Handelsstrategie gegeben durch*

$$\big((\varphi_M(t), \varphi_S(t), \varphi_C(t))^T\big)_{t\in[0,T]}.$$

Dann ist die Portfolio-Elastizität definiert durch

$$\varepsilon(t) := \pi_M\varepsilon_M(t) + \pi_S(t)\varepsilon_S(t) + \pi_C(t)\varepsilon_C(t).$$

Nach Definition der Elastizität bzgl. S gilt offensichtlich

$$\varepsilon_S = \frac{\frac{dS}{S}}{\frac{dS}{S}} = 1.$$

Ferner wird der Marktzins r von dem risikobehafteten Asset sowie dem Claim nicht beeinflusst, sodass dementsprechend

$$\varepsilon_M = 0$$

gilt. Es folgt insgesamt

$$\varepsilon = \pi_S + \pi_C \varepsilon_C. \tag{3.11}$$

Die genaue Gestalt der Portfolio-Elastizität ist offensichtlich davon abhängig, wie viele Anlagemöglichkeiten vorhanden sind. Angenommen es sind mehr als ein Claim zur Investition vorhanden, so müsste der Ausdruck mit den jeweiligen Elastizitäten der hinzugekommenen Claims erweitert werden.

Offensichtlich können wir nun die Portfolio-Elastizität in die Vermögensgleichung (3.10) einfügen, sodass

$$dX(t) = X(t)((r(t) + \varepsilon(t)\lambda(t))dt + \varepsilon(t)\sigma(t)dW(t)). \tag{3.12}$$

folgt. Dadurch wird die Vermögensgleichung zu einer kontrollierten stochastischen Differentialgleichung mit der Portfolio-Elastizität ε als Kontrollvariable verändert. Vergleichen wir diese mit der anfangs formulierten Vermögensgleichung (2.15) aus Abschnitt 2.2, so unterscheiden sich die beiden Gleichungen ausschließlich durch ihre Kontrollvariable ε gegenüber π_S. Der Unterschied ist jedoch, dass in der betrachteten Situation eine Handelsstrategie vorliegt, welche eine zusätzliche Anlagemöglichkeit enthält. Genauer existiert in Gleichung (3.10) durch π_C neben der Investition in das Asset die zusätzliche Möglichkeit, das Vermögen in einen Claim zu investieren. Daraus resultierend können wir nun theoretisch die Portfolio-Elastizität in Gleichung (3.12) durch den Portfolioprozess aus Gleichung (2.15) ersetzen und damit die Portfoliooptimierung durchführen.
Insgesamt unterscheiden sich die Vermögensgleichungen also nur in der Kontrollvariablen π und ε, obwohl die Investitionsmöglichkeiten nicht gleich geblieben sind. Mithilfe dieser Erkenntnis können wir das Portfolioproblem in gewisser Art reduzieren und damit die Optimierung im vorliegendem Modell vereinfachen.
Wir fassen das Ergebnis im folgenden Satz ausführlich zusammen und halten uns dabei an das gerade erzielte Resultat.

Satz 3.3.2 (Reduzierung des Portfolioproblems)**.** *Gegeben sei ein vollständiges, arbitragefreies Finanzmarktmodell mit einem risikobehafteten Asset S mit der Dynamik*

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)),\ S(0) = s_0,$$

einem bedingten Claim C mit Basiswert S und Laufzeit T und einem Geldmarktkonto M mit

$$dM(t) = r(t)M(t)dt,\ M(0) = 1.$$

Weiter wird angenommen, dass der Investor zu jeder Zeit $t \in [0, T]$ in alle vorhandenen Anlagemöglichkeiten investieren kann.
Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Die Kontrollvariable in der Vermögensgleichung bzgl. der selbstfinanzierenden Handelsstrategie

$$\left((\varphi_M(t), \varphi_S(t), \varphi_C(t))^T\right)_{t\in[0,T]}$$

kann ausschließlich auf die Portfolio-Elastizität gemäß Definition 3.3.1 reduziert werden. Ferner gilt dann für die optimale Steuerung der Portfolio-Elastizität

$$\varepsilon^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\lambda(t)}{\sigma^2(t)} \quad \forall \quad t \in [0, T] \tag{3.13}$$

unter der Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma$.

(ii) Die optimale Portfolio-Elastizität kann ohne weitere Kenntnisse über die Anzahl der Anlagemöglichkeiten durch den optimalen Portfolioprozess bzgl. der Handelsstrategie

$$\left((\varphi_M(t), \varphi_S(t))^T\right)_{t\in[0,T]} \tag{3.14}$$

bestimmt werden.

Beweis. :
(i) Da die Gleichungen (2.15) und (3.12) sich ausschließlich ihrer Kontrollvaria-

ble unterscheiden, konnte dementsprechend das Portfolio reduziert werden (siehe vorangegangene Herleitung) und mithilfe des Satzes (2.4.1) die optimale Portfolio-Elastizität bestimmt werden. Es folgt demnach

$$\varepsilon^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\lambda(t)}{\sigma^2(t)}.$$

(ii) Aufgrund der Reduzierung der Vermögensgleichung mithilfe der Elastizität, kann das Portfolioproblem bzgl. der Handelsstrategie (3.14) betrachtet werden. In dessen Vermögensgleichung ist ausschließlich π_S bzgl. der Portfoliooptimierung relevant, sodass die investierten Anteile in die übrigen Anlagemöglichkeiten unabhängig von der Anzahl nicht berücksichtigt werden müssen. ■

Bemerkung 3.3.3. :

- Nach Satz 3.3.2 hat der Investor nun die Möglichkeit, unter jeglichen Kombinationen der Investmentstrategien in die vorhandenen Anlagemöglichkeiten zu wählen. Dabei muss ausschließlich Gleichung (3.13) erfüllt sein, damit ein optimales Portfolio vorliegt, das den erwarteten Nutzen maximiert.

- Die optimale Portfolio-Elastizität hängt offensichtlich nicht von einem bestimmten risikobehafteten Asset ab, sodass wir das Ergebnis auf ein Finanzmarktmodell mit weiteren Anlagemöglichkeiten anwenden können, zum Beispiel mit d Unternehmensaktien und n bedingten Claims ($d, n \in \mathbb{N}$ beliebig). Wir verweisen dazu auf Kapitel 4, wo die Elastizitätenmethode für den mehrdimensionalen Fall untersucht wird.

Anhand des Satzes kann deshalb insgesamt auch von einer Reduzierung des Portfolioproblems gesprochen werden, weil ein derartiges Portfolioproblem zuerst in ein vereinfachtes Modell reduziert und anschließend gelöst wird. Die Vorgehensweise lässt sich knapp in zwei Schritten beschreiben. Hierzu wird als erstes die optimale Portfolio-Elastizität mithilfe der Gleichung (3.13) berechnet. Dies erfolgt unabhängig von der Anzahl der Anlagemöglichkeiten durch einfaches Einsetzen der Koeffizienten. Danach wird dann der Portfolioprozess genau so gewählt, dass die Gleichung (3.11) erfüllt ist und diese mit der zuvor bestimmten, optimalen Portfolio-Elastizität übereinstimmt. Insgesamt wird dies dann als vereinfachtes oder reduziertes Modell bezeichnet.
Die Herleitung der Elastizitätenmethode und das Verfahren zur Reduzierung des

Portfolioproblems wurde nun ausführlich erläutert, sodass wir das Resultat nun anhand einiger Beispiele angewendet werden kann. Als erstes werden wir dazu ein Portfolio mit europäischen Optionen betrachten.

3.4 Anwendung auf ein Portfolioproblem mit Optionsgeschäften

Betrachten wir nun folgende Situation. Der Claim C sei nun eine Option mit Basiswert S. Genauer sei dies eine europäische Call-Option mit Laufzeit $T > 0$ und Ausübungspreis F. Dementsprechend ist die Auszahlung zum Zeitpunkt T gegeben durch

$$C(T) = \max\{S(T) - F, 0\} =: (S(T) - F)^+.$$

Auf Grundlage der Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Finanzmarkts kann nun der Preis einer europäischen Option bestimmt werden (siehe dazu Anhang, (A.1.7)). Demnach gilt für den Preis der Call-Option

$$C(t, S(t)) = S(t) \cdot \phi(c_1(t)) - F \cdot \exp\left(- \int_0^{T-t} r(t+s)ds \right) \cdot \phi(c_2(t)) \tag{3.15}$$

bzw. für eine europäische Put-Option

$$P(t, S(t)) = F \cdot \exp\left(- \int_0^{T-t} r(t+s)ds \right) \cdot \phi(-c_2(t)) - S(t) \cdot \phi(-c_1(t))$$

mit

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{F}\right) + \int_0^{T-t} r(t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t+s)ds}{\sqrt{\int_0^{T-t} \sigma^2(t+s)ds}}, \\ c_2(t) &:= c_1(t) - \sqrt{\int_0^{T-t} \sigma^2(t+s)ds}, \end{aligned}$$

wobei $\phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.
Insgesamt kann nun gezeigt werden, wie der Portfolioprozess $\boldsymbol{\pi}$ gewählt werden muss, um den Nutzen bzgl. der Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma,\ 0 < \gamma < 1$ zu maximieren. P bezeichnet im Folgenden den Preis der Put-Option bzw. π_P den investierten Anteil in diese Anlage.

Satz 3.4.1 (Optimaler Portfolioprozess für europäische Optionen)**.** *Wir betrachten das Portfolioproblem im beschriebenen Modell. Es gelten dann folgende Aussagen über den Portfolioprozess* $\boldsymbol{\pi}$*.*

(i) Falls der Investor die Möglichkeit hat sein Vermögen in das Geldmarktkonto M *und eine europäische Call/Put-Option* C *bzw.* P *mit Basiswert* S*, Laufzeit* T *und Ausübungspreis* F *zu investieren, dann ist der optimale Portfolioprozess gegeben durch*

$$\pi_C^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \frac{C(t,S(t))}{\phi(c_1(t))\cdot S(t)} \text{ bzw.}$$
$$\pi_P^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \frac{P(t,S(t))}{\phi(-c_1(t))\cdot S(t)}$$

mit $c_1(t)$ *wie oben definiert.*

(ii) Falls der Investor zusätzlich die Möglichkeit hat, sein Vermögen in das risikobehaftete Asset S *zu investieren, ist der optimale Portfolioprozess gegeben durch alle Kombinationen von* $(\pi_S, \pi_C)^{\mathsf{T}}$*, welche die Formel*

$$\varepsilon^*(t) = \pi_S(t)\varepsilon_S(t) + \pi_C(t)\varepsilon_C(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \quad \forall \quad t \in [0,T] \tag{3.16}$$

erfüllen (analog mit Put-Option). Das heißt, die Portfolio-Elastizität muss gleich der Kombination des Portfolioprozesses mit den jeweiligen Elastizitäten sein.

Beweis. :
(i) Nach Satz (3.3) ist die optimale Portfolio-Elastizität gegeben durch

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)}.$$

Aufgrund der eingeschränkten Investitionsmöglichkeiten ist $\pi_S \equiv 0$ und $\varepsilon = \pi_C\varepsilon_C$. Demnach gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\pi_C^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \frac{C(t,S(t))}{\partial_S C(t,S(t))\cdot S(t)} \quad \text{bzw.} \tag{3.17}$$
$$\pi_P^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \frac{P(t,S(t))}{\partial_S P(t,S(t))\cdot S(t)}. \tag{3.18}$$

Ferner betrachten wir eine europäische Call/Put-Option, sodass der Preis des Claims gegeben ist durch (3.15). Betrachten wir dann den Δ-Hedge, so gilt für die Ableitungen der Call/Put-Option

$$\begin{aligned} \partial_S C(t, S(t)) &= \phi(c_1(t)) \quad \text{bzw.} \\ \partial_S P(t, S(t)) &= \phi(-c_1(t)). \end{aligned}$$

Einsetzen in (3.17) bzw. (3.18) liefert die Behauptung.
(ii) Analog zu *(i)* gilt wieder $\varepsilon^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)}$. Aus diesem Grund muss das Gleichungssystem

$$\frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} = \pi_S(t)\varepsilon_S(t) + \pi_C(t)\varepsilon_C(t)$$

für alle $t \in [0, T]$ erfüllt sein. Offensichtlich ist die Lösung nicht eindeutig bestimmt, da zwei Variablen auftauchen. ■

Setzen wir $\pi = \pi_S$, so erhalten wir trivialerweise das gleiche Ergebnis des Satzes (2.4.1)

$$\pi_S^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\lambda(t)}{\sigma^2(t)}.$$

Zuletzt soll nun gezeigt werden, dass das investierte Vermögen in S für alle $t \in [0, T]$ größer als die Investition in die Call-Option ist, da dies eine interessante Aussage für die Anwendung im folgenden Abschnitt liefert. Wir betrachten dazu die Ungleichung

$$\begin{aligned} \pi_S^*(t)X^*(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot X^*(t) > & \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \underbrace{\frac{C(t,S(t))}{\phi(c_1(t))\cdot S(t)}}_{<1} \cdot X^*(t) \\ \iff \qquad \pi_S^*(t)X^*(t) > & \pi_C^*(t)X^*(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Der Quotient ist hier kleiner eins, da

$$\phi(c_1(t))\cdot S(t) > \underbrace{\phi(c_1(t))\cdot S(t) - F\cdot\exp\left(-\int_0^{T-t} r(t+s)ds\right)\cdot\phi(d_2(t))}_{=C(t,S(t)),\ \text{da Preis der Call-Option}}$$

gilt, ϕ eine Verteilungsfunktion darstellt und S ein strikt positives Semimartingal ist.
Insgesamt bedeutet dies, dass der Investor aufgrund seiner Risikoaversion mehr Anteile seines Vermögens in das Asset anstatt in die Call-Option investiert. Der Grund

hierfür ist, dass der Claim ein bestimmtes Risiko aufweist, keine Auszahlung zum Zeitpunkt T zu liefern. Offensichtlich ist das der Fall für $S(T) \leq F$. Diese Tatsache hat eine interessante Aussagekraft bzgl. des Elastizitätenansatzes in einem Modell zur Unternehmensbewertung, der im folgenden Abschnitt betrachtet wird.

3.5 Elastizitätenansatz zur Unternehmensbewertung

Abschließend soll nun ein Modell zur Unternehmensbewertung betrachtet werden, in dem die Elastizitätenmethode eine hervorragende Anwendung zur Optimierung eines Portfolioproblems findet. Als erstes werden wir dazu in diesem Abschnitt die mathematische Modellierung des Unternehmenswerts mithilfe von Optionen erklären.

Das Merton-Modell zur Unternehmensbewertung („Merton's Firm Value Model“) war einer der ersten und immer noch geläufigen Ansätze eines Modells zur mathematischen Bewertung eines Unternehmenswerts (siehe dazu [Mer69] bzw. [Mer73]). Hierbei wird der gesamte Unternehmenswert als zugrunde liegende dynamische Größe angesehen und davon ausgehend mithilfe der Accounting Equation der Wert der Unternehmensaktien und -anleihen modelliert. Die Accounting Equation ist eine bekannte Gleichung aus der Wirtschaftswissenschaft und beschreibt vereinfacht den Unternehmenswert als Summe des vorhandenen Eigen- und aufgenommenen Fremdkapitals. Allgemein formuliert lautet die Gleichung

$$\text{„}\textit{Assets} = \textit{Liabilites} + \textit{Shareholder Equity}\text{“}. \tag{3.20}$$

Hinsichtlich dieses Modells bedeutet dies, dass der Unternehmenswert als Summe aus den Preisen der Unternehmensaktien und -anleihen dargestellt werden kann. Betrachten wir dazu den Unternehmenswert V, welcher der bekannten Dynamik

$$dV(t) = V(t)(\mu(t) + \sigma(t)dW(t)),\ V(0) = v_0 > 0$$

unterliegt. Zusätzlich existiert das freie Geldmarktkonto M gemäß (2.2).
Seien nun die Preisprozesse der emittierten Unternehmensaktien und -anleihen mit $\tilde{S}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet. Nach Mertons Modell zur Unternehmensbewertung gilt aufgrund

der Gleichung (3.20) gerade

$$V = \tilde{S} + \tilde{B}. \tag{3.21}$$

Ferner wird angenommen, dass die Anleihe einem Ausfallrisiko unterliegt. Ein Ausfall bedeutet in dieser Situation, das Unternehmen kann in bestimmten Situationen die Anleihe zur Fälligkeit nicht vollständig an die Gläubiger zurückzahlen. Dieser Fall tritt ein, wenn zum Ende der Laufzeit $V(T) - F < 0$ gilt, wobei F die Schulden des Unternehmens an die Anleihebesitzer darstellt. Sollte dieser Fall eintreten, wird den Gläubigern der Differenz der Schulden und des Unternehmenswert zum Zeitpunkt T, also $F - V(T)$ gezahlt. Gilt dagegen $V(T) - F \geq 0$, findet kein Ausfall statt und die positive Differenz gibt den Wert der Unternehmensaktie an.
Insgesamt folgt also, dass der Wert der Unternehmensanleihen zum Zeitpunkt T gegeben ist durch

$$\tilde{B}(T) = \min\{V(T), F\} = F - (F - V(T))^+.$$

und demnach der Wert der Unternehmensaktien

$$\tilde{S}(T) = (V(T) - F)^+. \tag{3.22}$$

Es fällt nun auf, dass die Werte mit den Auszahlungen zum Ende der Laufzeit einer europäischen Call- bzw. Put-Option übereinstimmen. Insbesondere kann hier nun festegehalten werden, dass der gesamte Unternehmenswert aufgrund der Gleichung (3.21) mittels europäischer Optionen repräsentiert werden kann. Dies ist eine nützliche Eigenschaft, da zumeist der Unternehmenswert kein direkt gehandeltes Finanzinstrument auf dem Markt bildet.

Bemerkung 3.5.1. Bei dieser Darstellung fällt nun auf, dass die Unternehmensaktie und -anleihe als bedingte Claims auf dem Unternehmenswert V modelliert werden. Aus diesem Grund ist der Unterschied zum vorigen Modell, dass die betrachteten Finanzgüter nicht einem risikobehafteten Asset gemäß (2.1) entsprechen. Aufgrund der Übersichtlichkeit werden deshalb hier die Unternehmensaktie und -anleihe mit Tilde gekennzeichnet uns als $\tilde{S} = \tilde{S}(t, V(t))$ und $\tilde{B} = \tilde{B}(t, V(t))$ für $t \in [0, T]$ gesetzt.

Im Hinblick auf die Elastizitätenmethode kann nun das Merton-Modell zur Unternehmensbewertung mit Satz 3.4.1 reduziert und der optimale Portfolioprozess geliefert werden. Die Portfolio-Elastizität lautet bzgl. der betrachteten Situation demnach $\varepsilon(t) = \pi_{\tilde{S}}(t)\varepsilon_{\tilde{S},V}(t) + \pi_{\tilde{B}}(t)\varepsilon_{\tilde{B},V}(t)$.

Sei die Situation nun gegeben, dass der Investor die Möglichkeit hat sein Vermögen in die Unternehmensaktie und das Geldmarktkonto zu investieren. Folglich gilt für den optimalen Anteil

$$\pi^*_{\tilde{S}}(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \frac{\tilde{S}(t, V(t))}{\phi(c_1(t))\cdot V(t)}.$$

Falls dagegen die Möglichkeit existiert in die Anleihe und das Geldmarktkonto zu investieren, gilt

$$\pi^*_{\tilde{B}}(t) = \frac{\lambda(t)}{(1-\gamma)\cdot\sigma^2(t)} \cdot \frac{\tilde{B}(t, V(t))}{\phi(-c_1(t))\cdot V(t)}$$

und wir haben schließlich als Resultat die optimalen Anteile in einem Modell zur Unternehmensbewertung.

Blicken wir nun nochmals auf die hergeleitete Ungleichung 3.19, so gilt nun $\pi^*_V > \pi^*_{\tilde{S}}$ bzw. $\pi^*_V > \pi^*_{\tilde{B}}$. In diesem Fall ist die Aussage, dass der Investor mehr Vermögen in das gesamte Unternehmen als in die Unternehmensaktie bzw. -anleihe investiert, durchaus plausibel. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann könnte die Situation auftreten, dass der Wert der gehaltenen Unternehmensaktien echt größer als der Wert der gehaltenen Anteile am gesamten Unternehmen ist. Diese Tatsache ist jedoch ein Widerspruch zur der Annahme der Accounting Equation, da sonst der Wert der Unternehmensanleihen negativ wäre.
Das Merton-Modell zur Unternehmensbewertung ist eng verknüpft mit vorangegangen Modell. Existiert nämlich keine Unternehmensanleihe auf dem Finanzmarkt (also $\tilde{B} = 0$), so gilt mit (3.21) gerade $V(t) = \tilde{S}(t)$ für alle $t \in [0, T]$, sodass $\tilde{S}$ wieder der bekannten Dynamik (2.1) unterliegt.

Zuletzt soll das gleiche Portfolio nochmals unter der Berücksichtigung einer Restriktion an die Handelsstrategie betrachtet werden. Das heißt, es wird die Menge der zulässigen Portfolioprozesse durch weitere Bedingungen eingeschränkt. Dadurch wird die Lösung des Portfolioproblems für bestimmte Situationen verändert, was sich auf das Ergebnis der optimalen Portfolio-Elastizität auswirkt.

Dazu nehmen wir nun an, dass dem Investor weder die Aufnahme von Fremdmitteln noch Leerverkäufe gestattet sind. Daher gilt für den Portfolioprozess

$$0 \leq \pi_{\tilde{S}}(t) \leq 1, \; 0 \leq \pi_{\tilde{B}}(t) \leq 1 \;\; \forall \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Eine weitere Restriktion soll zusätzlich die Anzahl der gehaltenen Aktien und Anleihen beschränken und zwar auf maximal eine. Die Handelsstrategie ist dann durch

$$|\varphi_{\tilde{S}}(t)|, |\varphi_{\tilde{B}}(t)| \leq 1 \;\; \forall \;\; 0 \leq t \leq T.$$

beschränkt. Insgesamt gilt also für den Portfolioprozess durch die Restriktion

$$0 \leq \pi_{\tilde{S}}(t) \leq \frac{\tilde{S}(t)}{X(t)} \text{ und } 0 \leq \pi_{\tilde{B}}(t) \leq \frac{\tilde{B}(t)}{X(t)}. \tag{3.23}$$

Formen wir nun die Portfolio-Elastizität um zu

$$\varepsilon(t) = \pi_{\tilde{S}}(t)\varepsilon_{\tilde{S},V}(t) + \pi_{\tilde{B}}(t)\varepsilon_{\tilde{B},V}(t) = \pi_{\tilde{S}}(t)\phi(c_1(t))\frac{V(t)}{\tilde{S}(t)} + \pi_{\tilde{B}}(t)\phi(-c_1(t))\frac{V(t)}{\tilde{B}(t)},$$

so muss aufgrund von (3.23) die Portfolio-Elastizität ε aus dem Intervall

$$\begin{aligned} &\left[0, \frac{\tilde{S}(t)}{X(t)}\phi(c_1(t))\frac{V(t)}{\tilde{S}(t)} + \frac{\tilde{B}(t)}{X(t)}\phi(-c_1(t))\frac{V(t)}{\tilde{B}(t)}\right] = \\ &\left[0, \frac{V(t)}{X(t)}\Big(\phi(c_1(t)) + \phi(-c_1(t))\Big)\right] = \left[0, \frac{V(t)}{X(t)}\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

stammen. Die Lösung des Portfolioproblems unter der Restriktion (3.24) lautet dann gemäß [Sto14], Abschnitt 4.2.3

$$\varepsilon^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma}\frac{\lambda(t)}{\sigma^2(t)}, & \text{falls } < \frac{V(t)}{X(t)} \\ \frac{V(t)}{X(t)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

für alle $t \in [0, T]$. Der optimale Portfolioprozess lässt sich dann analog zu Satz 3.4.1 unter Beachtung der Restriktion bestimmen. Falls die Anlagemöglichkeit ausschließlich in die Aktie bzw. die Anleihe verfügbar ist, ändert sich das Intervall (3.24) dann lediglich zu $[0, \frac{V}{X}\partial_V S]$ bzw. $[0, \frac{V}{X}\partial_V B]$.
Insgesamt lässt sich also feststellen, dass die Elastizitätenmethode eine nützliche Anwendung in einem Modell zur Unternehmensbewertung findet. Dies kann nun, bei-

spielsweise auf einem Black-Cox-Modell fortgeführt werden unter Berücksichtigung der Möglichkeit eines Zahlungsausfalls während der gesamten Laufzeit. In Kapitel 5 wird dazu eine Verallgemeinerung des Merton-Modells unter einer stochastischen Zinsrate betrachtet. Zuvor werden wir jedoch die Elastizitätenmethode im mehrdimensionalen Fall formulieren.

Kapitel 4

Elastizitäten im mehrdimensionalen Fall

In diesem Kapitel soll nun der mehrdimensionale Fall betrachtet und insbesondere die mehrdimensionale Elastizitätenmethode formuliert werden. Die Rechnungen und Herleitungen sind dabei mit dem eindimensionalen Fall vergleichbar.
Dazu betrachten wir zuerst $d > 1$ risikobehaftete Assets mit zugehörigen Preisprozess $(S_i(t))_{t\in[0,T]}$. Die Dynamiken der Preisprozesse lauten dann analog zu Kapitel 2.1, (2.1) den SDEs

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)),\ S_i(0) := s_i \ \ \forall \ \ 1 \leq i \leq d,$$

wobei hier deterministische, zeitlich variable Koeffizienten betrachtet werden.
Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum und der m-dimensionale Wiener-Prozess seien analog zum vorigen Kapitel definiert. Aufgrund der Voraussetzung eines vollständigen Marktes wird $d = m$ gesetzt. Zusätzlich herrscht auf dem betrachteten Finanzmarkt Arbitragefreiheit, sodass ein äquivalentes Martingalmaß existiert und demnach die Vollständigkeit des Marktes gegeben ist.
Betrachten wir nun die Situation, dass der Investor die Möglichkeit hat sein Vermögen in d Aktien sowie in $n \geq d$ bedingte Claims zu investieren. Im Rahmen dieser Situation kann nun weitestgehend analog zum eindimensionalen Fall die mehrdimensionale Elastizitätenmethode eingeführt werden.
Ein beachtlicher Unterschied wird in dieser Herleitung sein, dass auf dem Finanzmarkt mehr Claims als Aktien als Anlagemöglichkeit zur Verfügung stehen können.

In Bemerkung 3.3.3 wurde diese Situation schon für den eindimensionalen Fall beschrieben.
Der Aufbau ist hierbei analog zum vorangegangen Kapitel. Wir halten uns jedoch ein wenig kürzer in der Einführung der teilweise bekannten Theorie und in den analog durchgeführten Rechenschritten. Wir beginnen deshalb mit einer kurzen Einführung der kontrollierten Vermögensgleichung im mehrdimensionalen Fall, erstellen danach ein replizierendes Portfolio und beginnen dann mit der Definition der Elastizitäten sowie der darauf zugrundeliegenden Elastizitätenmethode. Danach findet schließlich die Methode anhand zweier Beispiele Anwendung.

4.1 Einführende Grundlagen im mehrdimensionalen Modell

Wir betrachten also den Fall, dass d gehandelte, risikobehaftete Assets auf dem Finanzmarkt vorhanden sind. Daraus folgt für die d-dimensionale Handelsstrategie

$$\big((\varphi_M(t), \varphi_{S_1}(t), \ldots, \varphi_{S_d}(t))^\top\big)_{t\in[0,T]}$$

bzw. für den Portfolioprozess

$$\big(\boldsymbol{\pi}(t)\big)_{t\in[0,T]} = \big((\pi_{S_i}(t), \ldots, \pi_{S_d}(t))^\top\big)_{t\in[0,T]}.$$

Weiter gelten die gleichen Voraussetzungen an die Handelsstrategie wie zuvor vorausgesetzt, wodurch eine eindeutige Lösung der folgenden Vermögensgleichung existiert. Wie schon gezeigt ist die Dynamik der Vermögensgleichung für alle $t \in [0,T]$ gegeben durch

$$dX(t) = X(t)\bigg(\big(r(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top\boldsymbol{\lambda}(t)\big)dt + \boldsymbol{\pi}(t)^\top\boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{W}(t)\bigg),\ X(0) = x_0.$$

Betrachten wir nun als nächstes n bedingte Claims. Wir setzen hier zuerst $n = d$, damit wir noch keine unübersichtliche Indexmenge betrachten müssen. Der i-te bedingte Claim zum Basiswert S_i ist gegeben durch

$$C_i := C_i(t, S_i(t)),\quad 1 \leq i \leq n.$$

Hiermit lassen sich nun die jeweiligen Elastizitäten bzgl. der Assets definieren. Die i-te Elastizität bzgl. S_i ist dann gegeben durch

$$\varepsilon_{C_i,S_i}(t) := \frac{dC_i/C_i(t,S(t))}{dS_i/S_i(t)} = \frac{\frac{d}{dS_i}C_i(t,S_i(t))\cdot S_i(t)}{C_i(t,S_i(t))}$$

für alle $t \in [0,T],\ 1 \leq i \leq n$.
Wir bemerken hier, dass gemäß Definition 3.1.1 offensichtlich

$$\varepsilon_{C_i,S_j} = 0 \ \ \forall \ \ 1 \leq i \neq j \leq n$$

gilt, sodass wir die jeweiligen Elastizitäten außer Acht lassen können.

Schließlich soll ein replizierendes Portfolio bzgl. des i-ten Claims C_i hergeleitet werden. Aufgrund der Analogie zum eindimensionalen Fall dies nicht so ausführlich thematisiert wie im Vorigen.

Bemerkung 4.1.1. Wir werden hier ohne Einschränkung den Fall $n = d$ annehmen. Jedoch ist hier zu bemerken, dass die Strategie für eine beliebige Anzahl $n \in \mathbb{N}$ ebenfalls ein risikofreies Portfolio erstellt. Einzige Bedingung ist dabei nur, dass die zugehörigen Basiswerte ausschließlich aus den vorhandenen Assets $S_1, \dots, S_d$ gewählt sind. Andererseits liegt die Vollständigkeit des Finanzmarkts nicht mehr weiter vor, sodass nicht alle betrachteten Claims hedgebar sind.

Demnach sei also $n = d$. Es folgt nun für die Dynamik des i-ten Claims C_i mithilfe der Itô-Formel

$$\begin{aligned} dC_i &= \partial_t C_i dt + \partial_{S_i} C_i dS_i + \frac{1}{2}\partial_{S_iS_i} C_i d\langle S_i, S_i\rangle_t \\ &= \partial_t C_i dt + \partial_{S_i} C_i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j\right) + \frac{1}{2}\partial_{S_iS_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{jj}^2 dt \\ &= \left(\partial_t C_i + \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i + \frac{1}{2}\partial_{S_iS_i} S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2\right) dt + \partial_{S_i} S_i \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Um an dieser Stelle eine selbstfinanzierende Handelsstrategie herzuleiten, welche jeweils einen Claim absichert, betrachten wir wieder die Vermögensgleichung für $\varphi_{C_i} \equiv -1$ für alle $1 \leq i \leq d$. Der Unterschied zum eindimensionalen Fall ist nun der, dass der Investor die Möglichkeit hat in d Assets zu investieren. Es folgt daher für die Vermögensgleichung

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi_M dM + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i} dS_i - \sum_{i=1}^{d} dC_i \\
&= \varphi_M rM dt + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i} S_i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j \right) \\
&- \sum_{i=1}^{d} \left(\left(\partial_t C_i + \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i + \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \right) dt + \partial_{S_i} C_i S_i \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j \right) \\
&= \left(\varphi_M rM + \sum_{i=1}^{d} \left(\varphi_{S_i} S_i \mu_i - \partial_t C_i - \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i - \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \right) \right) dt \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{d} S_i \big(\varphi_{S_i} - \partial_{S_i} C_i \big) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \right) dW_j. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

und Anfangskapital $X(0) = \sum_{i=1}^{d} C_i$.
Damit die Diffusionsterme nun verschwinden, muss offensichtlich

$$
\varphi_{S_i} = \partial_{S_i} C_i \quad \forall \quad 1 \leq i \leq d
$$

gelten. Da für den Anteil des Geldmarktkontos

$$
\varphi_M(t) M(t) = \sum_{i=1}^{d} C_i - \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i} S_i
$$

gilt, folgt für den dt-Term der Gleichung (4.2) dann

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{d} \left(\left(C_i - \varphi_{S_i} S_i \right) r + \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i - \partial_t C_i - \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \right) dt \\
\iff \quad 0 &= \sum_{i=1}^{d} \left(rC_i - \partial_t C_i - r \partial_{S_i} C_i S_i - \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \right). \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir demnach für C_i die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t C_i = rC_i - r\partial_{S_i} C_i S_i - \frac{1}{2}\partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \quad \forall \;\; 1 \leq i \leq d. \tag{4.4}$$

Das Ergebnis soll in folgendem Satz festgehalten werden. Es liefert gerade die Black-Scholes-Differentialgleichung im mehrdimensionalen Fall für alle $C_i,\; 1 \leq i \leq d$.

Satz 4.1.2 (Replizierende Handelsstrategie im mehrdimensionalen Fall)**.** *Angenommen es existieren n Claims $C_1(t, S_1), \ldots, C_n(t, S_n)$, die aus der Menge $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ sind. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Eine replizierende Handelsstrategie $\Phi = (\varphi_M, \varphi_{S_1}, \ldots, \varphi_{S_n})^T$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi_{S_i}(t) &= \partial_{S_i} C(t, S_i(t)) \quad \forall \;\; 1 \leq i \leq n, \\ \varphi_M(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{d} C_i(t, S_i(t)) - \partial_{S_i} C(t, S_i(t)) S_i(t)}{M(t)} \end{aligned}$$

und die Funktion C_i ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$0 = \partial_t C_i - rC_i + r\partial_{S_i} C_i S_i + \frac{1}{2}\partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \quad \forall \;\; 1 \leq i \leq d. \tag{4.5}$$

(ii) Der Wertprozess C_i unterliegt der SDE

$$\begin{aligned} dC_i(t, S(t)) = &\big(r(t)C_i(t, S_i(t)) + \partial_{S_i} C(t, S_i(t)) S_i(t) \lambda_i(t)\big) dt \\ &+ \partial_{S_i} C(t, S_i(t)) S_i(t) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) dW_j(t). \end{aligned}$$

für alle $1 \leq i \leq d$.

Beweis. :
(i) Ergibt sich aus den obigen Ergebnissen speziell mithilfe der Itô-Formel.
(ii) Betrachten wir die Dynamik (4.1) und setzen dort Gleichung (4.5) ein, so erhal-

ten wir direkt die SDE

$$\begin{aligned} dC_i &= \left(\partial_t C_i + \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i + \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 \right) dt + \partial_{S_i} C_i \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j \\ &= \left(r C_i - r \partial_{S_i} C_i S_i - \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 + \partial_{S_i} C_i S_i \mu_i \right) dt \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{S_i S_i} C_i S_i^2 \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j \\ &= \left(r C_i + \partial_{S_i} C_i S_i \lambda_i \right) dt + \partial_{S_i} C_i S_i \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j \quad \forall \quad 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.1.3. :

- Offensichtlich unterscheidet sich Gleichung (3.6) ausschließlich von dem eindimensionalen Fall, dass die Summe der Volatilitäten der risikobehafteten Assets hinzukommt.
- Falls wie oben beschrieben $n < d$ Claims vorhanden sind, so werden die φ_{S_i}, die nicht für den Hedge benötigt werden, gleich null gesetzt.
- Der Satz 4.1.2 kann ebenfalls für die Situation formuliert werden, dass einzig ein Claim der Form $C := C(t, S_1(t), \ldots, S_d(t))$ betrachtet wird. Dann hat das replizierende Portfolio trotzdem die Gestalt $\varphi_{S_i} = \partial_{S_i} C$ für alle $1 \leq i \leq d$. Ein anschauliches Beispiel wird hierzu in Abschnitt 4.3 bzgl. einer Index-Option mit zwei risikobehafteten Basiswerten geliefert.

Im Folgenden soll nun der Elastizitätenansatz für den mehrdimensionalen Fall betrachtet werden.

4.2 Die mehrdimensionale Elastizitätenmethode

Wir wollen nun unter den vorigen Bedingungen die mehrdimensionale Elastizitätenmethode formulieren und dadurch Satz 3.3.2 auf den mehrdimensionalen Fall $d > 1$ ausweiten. Anders als in Kapitel 3 entwerfen wir jedoch erst den Satz und werden danach den vollständigen Beweis liefern. Wie im eindimensionalen Fall kann damit das Portfolio zuerst reduziert und anschließend die optimale Portfolio-Elastizität bestimmt werden. Wir bemerken hier, dass nun auch der Fall $n > d$ miteinbezogen wird. Damit sich nun im Folgenden die Anzahl der verschiedenen Claims mit dem jeweiligen Basiswert darstellen lässt, führen wir eine Indexmenge ein. Wir definieren dazu die Indizes $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ mit $1 =: n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d$ zur Kennzeichnung, welcher Basiswert vorliegt. Schließlich kann die Elastizitätenmethode formuliert werden.

Satz 4.2.1 (Die mehrdimensionale Elastizitätenmethode)**.** *Gegeben sei ein vollständiges, arbritragefreies Finanzmarktmodell wie im vorigen Abschnitt. Dazu seien die Anlagemöglichkeiten in d risikobehaftete Assets mit der Dynamik*

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)), \ \ S_i(0) := s_i,$$

sowie in das Geldmarktkonto M gegeben. Zusätzlich hat der Investor die Möglichkeit, sein Vermögen in n bedingte Claims der Form

$$C_1(t, S_1), \dots, C_{n_2-1}(t, S_1), C_{n_2}(t, S_2), \dots, C_{n_d-1}(t, S_{d-1}), C_{n_d}(t, S_d), \dots, C_n(t, S_d)$$

mit Laufzeit T zu investieren.
Das Portfolioproblem bzgl. der $(d+n+1)$-dimensionalen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie

$$\big((\varphi_M(t), \varphi_{S_1}(t), \dots, \varphi_{S_d}(t), \varphi_{C_1}(t), \dots, \varphi_{C_n}(t))^{\mathsf{T}}\big)_{t\in[0,T]}, \tag{4.6}$$

kann dann so reduziert werden, dass die jeweilige Vermögensgleichung durch die Portfolio-Elastizität[1] $\boldsymbol{\varepsilon}$ kontrolliert wird und unabhängig von der genauen Anzahl der Anlagemöglichkeiten ist. Ferner ist die optimale Portfolio-Elastizität dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^*(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_d^*(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma_{1j}^{-1})^2(t)\lambda_1(t) \\ \vdots \\ \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma_{dj}^{-1})^2(t)\lambda_d(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$.

[1] Siehe Definition 3.3.1.

Beweis. Blicken wir als erstes auf die Dynamik des k-ten Claims mit Basiswert S_i. Es gilt also $k \in \{n_i, n_i+1, \ldots, n_{i+1}-1\}$[2]. Nach Satz 4.1.2 gilt dann für alle k

$$dC_k = \Big(rC_k + \partial_{S_i} C_k S_i \lambda_i\Big)dt + \partial_{S_i} C_k S_i \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j.$$

Durch Einsetzen der Elastizität erhalten wir

$$dC_k = \Big(rC_k + C_k \varepsilon_{C_k,S_i} \lambda_i\Big)dt + C_k \varepsilon_{C_k,S_i} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j$$

mit $\varepsilon_{C_k,S_i} = \frac{\partial_{S_i} C_k \cdot S_i}{C_k}$ als Elastizität des k-ten Claims bzgl. S_i.
Weiter betrachten wir die Vermögensgleichung X bzgl. der Handelsstrategie (4.6). Es gilt

$$\begin{aligned}
dX &= \varphi_M dM + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i} dS_i + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{C_k} dC_k \\
&= \varphi_M r M dt + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{S_i} S_i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \varphi_{C_k} \left(\Big(rC_k + C_k \varepsilon_{C_k,S_i} \lambda_i\Big)dt + C_k \varepsilon_{C_k,S_i} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen des Portfolioprozesses

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_{S_1}, \ldots, \pi_{S_d}, \pi_{C_1}, \ldots, \pi_{C_n})^\mathsf{T}$$

[2] Für $i = d$ setze dann $n_{d+1} := n + 1$.

liefert nun

$$\begin{aligned}
dX &= X\Bigg(\Bigg(1-\sum_{i=1}^{d}\pi_{S_i}-\sum_{k=1}^{n}\pi_{C_k}\Bigg)r+\sum_{i=1}^{d}\pi_{S_i}\Bigg(\mu_i dt+\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dW_j\Bigg)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\pi_{C_k}\Bigg(\Bigg(rC_k+C_k\varepsilon_{C_k,S_i}\lambda_i\Bigg)dt+C_k\varepsilon_{C_k,S_i}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dW_j\Bigg)\Bigg)\\
&= X\Bigg(r+\sum_{i=1}^{d}\underbrace{\Bigg(\pi_{S_i}+\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\pi_{C_k}\varepsilon_{C_k,S_i}\Bigg)}_{\varepsilon_i:=}\lambda_i dt\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{d}\Bigg(\pi_{S_i}+\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\pi_{C_k}\varepsilon_{C_k,S_i}\Bigg)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dW_j\Bigg).
\end{aligned}$$

Die Portfolio-Elastizität ist hier also mit $\varepsilon_{S_i,S_i}=1$ für alle i gegeben durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_d\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\pi_{S_1}+\sum_{k=1}^{n_2-1}\pi_{C_k}\varepsilon_{C_k,S_1}\\ \vdots\\ \pi_{S_d}+\sum_{k=n_d}^{n}\pi_{C_k}\varepsilon_{C_k,S_d}\end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Insgesamt folgt dann für die Vermögensgleichung

$$\begin{aligned}
dX &= X\Bigg(r+\sum_{i=1}^{d}\varepsilon_i\lambda_i+\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_i\sigma_{ij}dW_j\Bigg)\\
&= X\Big(r+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}dt+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{W}\Big).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Vergleichen wir nun (4.8) mit der Vermögensgleichung bzgl. des Portfolioprozesses $(\pi_{S_1},\ldots,\pi_{S_d})^{\mathsf{T}}$ (vgl. Abschnitt 2.2, (2.14)),

$$dX(t) = X(t)\Bigg(\Bigg(r(t)+\boldsymbol{\pi}(t)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)\Bigg)dt+\boldsymbol{\pi}(t)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\sigma}(t)d\boldsymbol{W}(t)\Bigg),$$

so unterscheiden sich die beiden Gleichungen analog zum eindimensionalen Fall nur durch $\boldsymbol{\varepsilon}$ statt $\boldsymbol{\pi}$. Daraus folgt mit gleicher Argumentation wie aus Satz 3.3, dass das Portfolio reduziert werden kann und ausschließlich über die Portfolio-Elastizität kontrolliert wird.

Unter der Voraussetzung, dass die Laufzeiten der betrachteten Claims übereinstimmen, können wir das Ergebnis der mehrdimensionalen Portfoliooptimierung zur Hilfe nehmen, sodass Korollar 2.4.2 die Behauptung für die optimale Portfolio-Elastizität beweist. Diese lautet dann

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(t).$$

und die Aussage des Satzes ist gezeigt. ■

Bemerkung 4.2.2. :

- Für die i-te optimale Portfolio-Elastizität kann trivialerweise $\varepsilon_i = \pi_{S_i}$ gelten. Offensichtlich ist dies der Fall, wenn keine weiteren Anlagemöglichkeiten in einen Claim existieren. Der optimale Anteil des investierten Vermögens in das i-te risikobehaftete Asset ist dann für alle $1 \leq i \leq d$ gegeben durch

$$\varepsilon_i^* = \pi_{S_i}^* = \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma\sigma_{ij}^{\mathsf{T}})^{-1}(t)\lambda_j(t).$$

- In Satz 4.2.1 wird ganz bewusst vorausgesetzt, dass alle Claims die gleiche Laufzeit T haben. Sollte es der Fall, dass ein Claim eine Laufzeit $0 < T_0 < T$ aufweist, so ändert sich in dem Intervall $[T_0, T]$ die optimale Portfolio-Elastizität aufgrund der wegfallenden Anlagemöglichkeit.

Es kann nun die Aussage in Bemerkung 3.3.3 bzgl. der beliebigen Anzahl der risikobehafteten Claims bestätigt werden. Dazu setzen wir einfach $d = m = 1$ und $n > d$. Für den Fall $n = 2$ wurde dies in dem Modell zur Unternehmensbewertung in Abschnitt 3.5 schon genutzt.

Die hergeleitet Methode reduziert also wieder das Portfolioproblem mithilfe der Elastizitäten und liefert den optimalen Portfolioprozess für die betrachtete Handelsstrategie. Das Vorgehen zur Vereinfachung des Modells ist analog zum eindimensionalen Fall durchzuführen. Dies wurde bereits in Abschnitt 3.3 erläutert.
Wir wollen die Ergebnisse nun anhand eines gegebenen Portfolios anwenden, um damit den Nutzen des formulierten Elastizitätenansatzes zu zeigen.

4.3 Anwendung auf verschiedene Portfolios

Abschließend betrachten wir nun zwei Beispielportfolios, in denen die Elastizitätenmethode zur Optimierung bzgl. verschiedener Optionsgeschäfte angewendet werden soll.
Als erstes wollen wir dazu ein Portfolio untersuchen, das genauer europäische Optionen enthält. Betrachten wir dazu die Situation, der Investor hat die Möglichkeit in n europäische Call-Optionen mit Laufzeit T und Ausübungspreis F zu investieren.[3]
Das heißt, es gilt $\pi_{S_i} \equiv 0$ für alle $1 \le i \le d$ und mithilfe der Elastizitätenmethode, Satz 4.2.1 folgt für den optimalen Portfolioprozess

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n_2-1} \pi^*_{C_k} \frac{\partial_{S_1} C_k S_1}{C_k} \\ \vdots \\ \sum_{k=n_d}^{n} \pi^*_{C_k} \frac{\partial_{S_1} C_k S_1}{C_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma\sigma^\intercal_{1j})^{-1} \lambda_j \\ \vdots \\ \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma\sigma^\intercal_{dj})^{-1} \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist der optimale Portfolioprozess für den Fall $n > d$ nicht eindeutig bestimmt. Falls jedoch d Call-Optionen der Form $C_i(t, S_i(t))$ für alle $1 \le i \le d$ vorliegen, so erhalten wir die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \pi^*_{C_i}(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma\sigma^\intercal_{ij})^{-1}(t)\lambda_j(t) \cdot \frac{C_i(t, S_i(t))}{\partial_{S_i} C_i(t, S_i(t)) \cdot S_i(t)} \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \sum_{j=1}^{d} (\sigma\sigma^\intercal_{ij})^{-1}(t)\lambda_j(t) \cdot \frac{C_i(t, S_i(t))}{\phi(c_{i_1}(t)) \cdot S_i(t)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

für alle $1 \le i \le d$, wobei

$$c_{i_1}(t) := \frac{\ln\left(\frac{S_i(t)}{F}\right) + \int_0^{T-t} r(t+s) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma^2_{ij}(t+s) ds}{\sqrt{\int_0^{T-t} \sum_{j=1}^{d} \sigma^2_{ij}(t+s) ds}}.$$

gemäß der Black-Scholes-Formel im mehrdimensionalen Fall definiert ist.
Der optimale Portfolioprozess $\boldsymbol{\pi}^*$ ist dann eindeutig gegeben durch (4.9) für alle $1 \le i \le d$. Dies kann beispielsweise in einem mehrdimensionalen Modell zur Unternehmensbewertung Anwendung finden.

[3] Wir nutzen wieder die gleiche Nummerierung wie im vorigen Abschnitt.

Zum Schluss soll nun eine Anwendung der Elastizitätenmethode auf ein Portfolio betrachtet werden, das eine spezielle Option mit mindestens zwei Basiswerten beinhaltet. Der Unterschied zum vorangegangen Beispiel ist nun, dass aufgrund des Auftretens der Elastizitäten bzgl. weiterer Assets der Elastizitätenansatz ein Gleichungssystem liefert. Dies soll in folgender Situation mithilfe einer Index-Option veranschaulicht werden.
Wir betrachten dazu eine Option mit mehr als einem Basiswert (hier genau zwei). Dies kann beispielsweise eine Index- oder Minimum/Maximum-Option[4] sein. Genauer soll dann ein Portfolio bzgl. einer Handelsstrategie optimiert werden, wo der Investor genau vier bestimmte Anlagemöglichkeiten zur Verfügung hat. Dies sind zum einen zwei Unternehmensaktien S_1, S_2 und das Geldmarktkonto M. Zusätzlich gibt es die Möglichkeit in eine europäische Option C mit den Basiswerten S_1 und S_2 und Laufzeit T, sodass der Wert der Option durch die Funktion $C := C(t, S_1(t), S_2(t))$ beschrieben werden kann. Dementsprechend folgt für die vorliegende Handelsstrategie

$$\Phi = (\varphi_M, \varphi_{S_1}, \varphi_{S_2}, \varphi_C)^\mathsf{T}\,.$$

Da in der betrachteten Situation der Claim zwei Aktien als Basiswert besitzt, hat dies Einfluss auf die relevanten Elastizitäten der Option.
Betrachten wir dazu zuerst die Vermögensgleichung, so gilt

$$\begin{aligned}
dX &= \varphi_M dM + \varphi_{S_1} dS_1 + \varphi_{S_2} dS_2 + \varphi_C dC \\
&= (1 - \varphi_{S_1} - \varphi_{S_2} - \varphi_C)\, rM dt + \sum_{i=1}^{2} \varphi_{S_i} S_i \left(\mu_i dt + \sigma_{i1} dW_1 + \sigma_{i2} dW_2\right) \\
&+ \varphi_C \Bigg(\partial_t C + \partial_{S_1} C S_1 \mu_1 + \partial_{S_2} C S_2 \mu_2 + \frac{1}{2} \partial_{S_1 S_1} C S_1^2 (\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) \\
&+ \frac{1}{2} \partial_{S_2 S_2} C S_2^2 (\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2) + \partial_{S_1 S_2} C S_1 S_2 (\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}) \Bigg) dt
\end{aligned}$$

[4] Siehe zur ausführlichen Beschreibung exotischer Optionen z. B. [HK05], S. 345 ff.

Nach analogem Vorgehen wie im Beweis von Satz 4.2.1 erhalten wir letztlich

$$\begin{aligned} dX = X\Bigg(&\big(r + (\pi_{S_1} + \pi_C \varepsilon_{C,S_1})\lambda_1 + (\pi_{S_2} + \pi_C \varepsilon_{C,S_2})\lambda_2\big) dt \\ &+ (\pi_{S_1} + \pi_C \varepsilon_{C,S_1}) \sum_{j=1}^{2} \sigma_{1j} dW_j + (\pi_{S_2} + \pi_C \varepsilon_{C,S_2}) \sum_{j=1}^{2} \sigma_{2j} dW_j \Bigg). \end{aligned}$$

Das heißt, die Portfolio-Elastizität ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^\mathsf{T} = (\pi_{S_1} + \pi_C \varepsilon_{C,S_1}, \pi_{S_2} + \pi_C \varepsilon_{C,S_2})^\mathsf{T}.$$

Mithilfe der mehrdimensionalen Elastizitätenmethode kann nun der optimale Portfolioprozess bestimmt, indem das Gleichungssystem

$$\varepsilon_1^*(t) = \pi_{S_1}(t) + \pi_C(t)\varepsilon_{C,S_1}(t) = \frac{1}{1-\gamma}\big((\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{11}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{12}(t)\lambda_2(t)\big) \tag{4.10}$$

$$\varepsilon_2^*(t) = \pi_{S_2}(t) + \pi_C(t)\varepsilon_{C,S_2}(t) = \frac{1}{1-\gamma}\big((\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{21}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{22}(t)\lambda_2(t)\big) \tag{4.11}$$

gelöst wird.
Die Lösung des betrachteten Gleichungssystems ist in diesem Fall jedoch nicht eindeutig bestimmt, sodass keine eindeutige Lösung existiert. Auf dem Finanzmarkt ist es jedoch bei Index-Optionen geläufig, dass ein Asset mittels eines börsennotierten Indexwerts, beispielsweise der DAX oder Dow Jones beschrieben wird. Es sei also S_2 ein Indexwert. Das heißt also, es liegt kein direkt handelbares Finanzgut vor und folglich ist π_{S_2} während des Handelszeitraums gleich null.
Dadurch kann nun das vereinfachte Gleichungssystem (4.10), (4.11) nach dem optimalen Portfolioprozess aufgelöst werden. Wir erhalten schließlich die optimalen Anteile $\big((\pi^*_{S_1}(t), \pi^*_C(t))^\mathsf{T}\big)_{t\in[0,T]}$ in Form von

$$\begin{aligned} \pi^*_C(t) &= \frac{1}{1-\gamma}\big((\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{21}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{22}(t)\lambda_2(t)\big) \cdot \frac{C(t,S(t))}{\partial_{S_2}C(t,S(t)) \cdot S_2(t)}, \\ \pi^*_{S_1}(t) &= \frac{1}{1-\gamma}\Bigg(\big((\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{11}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{12}(t)\lambda_2(t)\big) \\ &\qquad - \big((\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{21}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\mathsf{T})^{-1}_{22}(t)\lambda_2(t)\big) \cdot \varepsilon_{S_2,S_1}(t)\Bigg). \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. Es ist hier zu bemerken, dass das Ergebnis die Elastizität von S_2 bzgl. S_1 enthält, was eine Besonderheit zu den vorigen Portfolios darstellt. Formen wir diese Elastizität wieder zu dem Ausdruck[5] $\frac{\partial_{S_1} CS_1}{\partial_{S_2} CS_2}$ um und betrachten speziell die Index-Option mit der Auszahlung zum Ende der Laufzeit

$$C(T, S_1(T), S_2(T)) = \left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)} - \frac{S_2(T)}{S_2(0)} \right)^+ ,$$

so ergibt sich für den optimalen Anteil, der in die Unternehmensaktie S_1 investiert wird, das Ergebnis

$$\begin{aligned} \pi^*_{S_1}(t) = \frac{1}{1-\gamma} \Bigg(& \big((\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{11}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{12}(t)\lambda_2(t) \big) \\ & - \big((\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{21}(t)\lambda_1(t) + (\sigma\sigma^\intercal)^{-1}_{22}(t)\lambda_2(t) \big) \cdot \frac{\phi(d_1(t))S_1(t)}{\phi(d_2(t))S_2(t)} \Bigg), \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, wobei d_1, d_2 in Satz A.1.8 (siehe Anhang) definiert sind. Insgesamt wurde also eine Lösung des betrachteten Portfolioproblems geliefert.

Abschließend konnte also gezeigt werden, dass die Elastizitätenmethode auf den mehrdimensionalen Fall übertragbar ist. Insbesondere konnte hier verdeutlicht werden, dass die Anzahl der bedingten Claims für die optimale Portfolio-Elastizität nicht ausschlaggebend ist. Des Weiteren kann unter gewissen Voraussetzungen der Ansatz bei speziellen Claims mit mehr als einem Basiswert zur Optimierung genutzt werden. Um die Anwendung der Elastizitätenmethode nun auf weitere Finanzmarktmodelle zu erweitern, wird im Folgenden ein Short-Rate-Modell betrachtet.

[5] Unter der Annahme der Differenzierbarkeit der einzelnen Assets können die partiellen Ableitungen in der Weise umgeschrieben werden.

Kapitel 5

Übertragung auf Short-Rate-Modelle

Im Folgenden wird nun ein mathematisches Finanzmarktmodell betrachtet, in dem der Momentanzins/die Short-Rate einer SDE unterliegt und sich im Gegensatz zu einem Black-Scholes-Modell mit einer deterministischen Zinsrate unterscheidet. Auf dieser Grundlage der Modellierung soll dann die Elastizitätenmethode im Rahmen eines Vasicek-Modells formuliert werden. Als Hilfsmittel wird dazu neben der Elastizität die Einführung einer weiteren Sensitivitätskennzahl in Form der Duration benötigt. Analog zum vorangegangen Fall soll die Methode eine Reduzierung eines Portfolios herbeiführen, um schließlich den optimalen Portfolioprozess zu ermitteln.

Damit ein grundlegendes Verständnis des Vasicek-Modells vorliegt, soll nun als erstes eine knappe Einführung in die Theorie der Short-Rate-Modelle (speziell anhand des Vasicek-Modells) erfolgen. Darauf aufbauend soll dann die Portfoliooptimierung innerhalb eines Ein-Faktor-Vasicek-Modells thematisiert werden, damit ein explizites Ergebnis der Optimierung im reduzierten Modell zur Verfügung steht. Zu den Grundlagen des Vasicek-Modells werden wir uns hauptsächlich an den Quellen [Sim13], S. 19 ff. und [Aco06], S. 7 ff. sowie der begründenden Arbeit von Oldrich Vašícek [Vas77] orientieren. Für detailliertere Erläuterungen und Ausführungen der Sätze und zugehörigen Beweise wird größtenteils auf die genannten Quellen verwiesen.

5.1 Einführung des Ein-Faktor-Vasicek-Modells

Als Grundlage der Modellierung betrachten wir einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bzgl. einer Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}$ für ein $T* > 0$ mit den gleichen Voraussetzungen wie aus Abschnitt 2.1. Auf diesem Raum wird nun ein Finanzgut in Form eines T_1-Bonds, $0 < T_1 \leq T^*$ modelliert, dessen Preisprozess $B(t, T_1)$ der SDE

$$dB(t, T_1) = B(t, T_1)(\mu(t, T_1)dt + \sigma(t, T_1)dW(t))$$

mit Endbedingung $B(T_1, T_1) = 1$ unterliegt, wobei die Koeffizienten progressiv messbare Prozesse bzgl. $(\mathcal{F})_{t\in[0,T^*]}$ sind.[1] Weiter fordern wir die Arbitragefreiheit auf dem Finanzmarkt, sodass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existiert, welches analog zum Black-Scholes-Modell hergeleitet und definiert werden kann (siehe zur Definition Satz 2.1.1, (2.6)).

Es kann nun innerhalb des betrachteten Modells unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit gezeigt werden, dass die zukünftige Wertentwicklung von einer/einem Nullkuponanleihe/Zero Coupon Bond mit bestimmter Laufzeit mittels der Short-Rate modelliert werden kann. Dazu wird zuerst angenommen, die Dynamik der Short-Rate bzgl. $\mathbb{P}^*$ ist gegeben durch die SDE

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW^*(t), \;\; r(0) = r_0 \tag{5.1}$$

für alle $t \in [0, T^*]$, wobei W^* ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^*$ bezeichnet und die Koeffizienten messbare Funktionen

$$\alpha : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\beta : [0, T^*] \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

seien, welche ausreichende Integrabilitätsbedingungen erfüllen, sodass eine eindeutige Lösung von (5.1) existiert. Offensichtlich ist r dann ein Markov-Prozess.

Aufgrund der geforderten Arbitragefreiheit kann nun gezeigt werden, dass der Preis

[1] Die Preisprozesse erfüllen wieder die üblichen Eigenschaften, siehe dazu [Sim13], S. 19.

eines T_1-Bonds unter dem risikoneutralen Maß explizit berechnet werden kann durch

$$B(t,T_1) = \mathbb{E}^* \left(\exp\left(- \int_t^{T_1} r(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad \forall \quad t \in [0,T_1]. \tag{5.2}$$

Dabei wird die Martingaleigenschaft des diskontierten Bondpreisprozess bzgl. $\mathbb{P}^*$ genutzt. Weiter wird angenommen, dass der Preisprozess B darstellbar ist als Funktion abhängig von $(t, r(t))$ und aus der Menge $C^{1,2}([0,T^*] \times \mathbb{R})$ stammt. Mithilfe der Itô-Formel kann dann gezeigt werden, dass die Dynamik des T_1-Bonds bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ gegeben ist durch

$$dB(t,T_1) = B(t,T_1)(r(t)dt + \sigma(t,r(t),T_1)dW^*(t), \tag{5.3}$$

sowie für die Volatilität

$$\sigma(t,r(t),T_1) = \frac{\partial_r B(t,T_1)}{B(t,T_1)} \beta(t,r(t))$$

gilt.

Die Besonderheit ist also in einem Short-Rate-Modell, dass die Gestalt der Bond-Volatilität mithilfe der Short-Rate angegeben werden kann. Falls dazu ein affines Modell vorliegt, kann der Bondpreis und damit ebenfalls die Volatilität explizit berechnet werden. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden ein Ein-Faktor-Vasicek-Modell betrachten.

In der grundlegenden Arbeit [Vas77] wird angenommen, dass die Dynamik der Short-Rate durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess beschrieben wird. Genauer unterliegt die Short-Rate der SDE mit der Form

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW^*(t), \; r(0) = r_0, \tag{5.4}$$

wobei a, b und δ konstante Koeffizienten sind sowie W^* wieder ein Wiener-Prozess bzgl. des risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$ beschreibt. Aus diesem Grund kann ohne großen Aufwand die SDE (5.4) explizit gelöst werden. Weiter kann damit eine Lösung des T_1-Bondpreisprozesses und dessen Volatilität geliefert werden. Dies soll in den folgenden Sätzen festgehalten werden.

Satz 5.1.1 (Der Bondpreisprozess im Ein-Faktor-Vasicek-Modell)**.** *Der Preis eines T_1-Bonds auf einem arbitragefreien Finanzmarkt ist für alle $T_1 \in (0, T^*]$ gegeben durch*

$$B(t, T_1) = \exp\big(- r(t) g(T_1 - t) - h(T_1 - t) \big)$$

mit

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{1 - \exp(-bt)}{b}, \qquad (5.5) \\ h(t) &:= \left(t - \frac{1 - \exp(-bt)}{b} \right) \left(a - \frac{\delta^2}{2b^2} \right) + \frac{\delta^2}{4b} \left(\frac{1 - \exp(-bt)}{b} \right)^2. \end{aligned}$$

Satz 5.1.2 (Volatilität eines Bonds im Vasicek-Modell)**.** *Die Volatilität eines Bonds ist für alle Fälligkeiten $T_1 \in (0, T^*]$ deterministisch und zum Zeitpunkt $t \in [0, T_1]$ gegeben durch*

$$\sigma(t, T_1) = \frac{\partial_r B(t, T_1)}{B(t, T_1)} \delta = -g(T_1 - t)\delta = \frac{\delta}{b}(\exp(-b(T_1 - t) - 1).$$

Beweis. Das Resultat der beiden Sätze beruht auf der Gestalt von r und der Eigenschaft, dass die Short-Rate im Ein-Faktor-Vasicek-Modell normalverteilt ist. Wir verweisen z.B. auf [Sim13], S. 27 ff. ■

Schließlich wurden alle benötigten Definitionen und theoretischen Grundlagen des (Vasicek-)Short-Rate-Modells geliefert, sodass nun im folgenden Abschnitt die Portfoliooptimierung innerhalb dieses Modells betrachtet wird.

5.2 Portfoliooptimierung im Vasicek-Modell

In diesem Abschnitt ist es nun das Ziel, die Portfoliooptimierung innerhalb eines Ein-Faktor-Vasicek-Modells zu erläutern und die Ergebnisse knapp zusammenzufassen. Hierzu werden ausschließlich die Begriffe und Hilfsmittel aus Abschnitt 2.2 verwendet, sodass keine weitere Einführung innerhalb der Portfoliotheorie notwendig ist. Abweichend von den Kapitel 3 und 4 werden wir in diesem Modell die SDEs der gehandelten Assets ausschließlich unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$ betrachten. Als erstes modellieren wir das Bond Portfolioproblem. In dieser Situation hat der Investor die Möglichkeit, sein Vermögen in das bekannte Geldmarktkonto sowie in eine

Nullkuponanleihe mit Laufzeit $T_1 \in (0, T^*]$ in Form von dem zuletzt eingeführten T_1-Bond zu investieren. Wir setzen hier ohne Einschränkung $T_1 = T^*$ für den folgenden Teil. Auf dieser Grundlage kann nun das Portfolioproblem innerhalb des Handelszeitraums $[0, T]$ mit $0 < T < T_1$ aufgestellt werden. Die zugehörige Handelsstrategie hat dann die Gestalt

$$\big(\Phi(t)\big)_{t\in[0,T]} = \big((\varphi_M(t), \varphi_B(t))^\mathsf{T}\big)_{t\in[0,T]} \tag{5.6}$$

Weiter lautet die kontrollierte SDE der Vermögensgleichung dementsprechend (unter der Annahme der Selbstfinanzierung) für den Handelszeitraum $[0, T]$

$$dX(t) = X(t)\left(r(t)dt + \pi_B(t)\sigma(t, T_1)dW^*(t)\right), \; X(0) = x_0.$$

Analog zu der Optimierung im Merton-Modell soll nun der erwartete Nutzen des Endvermögens maximiert werden. Dazu betrachten wir wieder eine Power-Nutzenfunktion gemäß Definition 2.3.2.

Zur Lösung des betrachteten Optimierungsproblems eignen sich unter anderem zwei spezielle Ansätze. Zum einen ist dies der bekannte Ansatz mithilfe der stochastischen Steuerung und der daraus folgenden Lösung der HJB-Gleichung (vgl. Abschnitt 2.2). Unter der Voraussetzung einer Power-Nutzenfunktion wird dies innerhalb eines Bond Portfolioproblems in [Kra13], S. 24 ff. durchgeführt. Auf der anderen Seite kann das Portfolioproblem unter Voraussetzung der Vollständigkeit mit der Martingalmethode gelöst werden. Wir verweisen zur genauen Berechnung auf [Sim13], Kapitel 4 unter der Voraussetzung einer Power- und logarithmischen Nutzenfunktion. Beide Verfahren führen zum gleichen Ergebnis. Dies halten wir im folgenden Satz fest.

Satz 5.2.1 (Lösung des Bond Portfolioproblems im Vasicek-Modell)**.** *Unter der Annahme der Power-Nutzenfunktion* $U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma, \; 0 \le \gamma \le 1$ *ist der optimale Portfolioprozess bzgl. der Handelsstrategie*

$$\Phi(t) := (\varphi_M(t), \varphi_B(t))^T\big)_{t\in[0,T]}$$

im Ein-Faktor-Vasicek-Modell für $0 \le t < T < T_1$ *gegeben durch*

$$\pi_B^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{\sigma(t,T)}{\sigma(t,T_1)}.$$

Beweis. Siehe [Kra13], S. 34 ff., Satz 2.1. oder [Sim13], S. 34. ∎

Bemerkung 5.2.2. Offensichtlich unterscheidet sich der optimale Portfolioprozess verglichen mit der Lösung von Mertons Portfolioproblem nur darin, dass im Vasicek-Modell ein sogenannter Korrekturterm zu der bekannten Merton Ratio hinzugekommen ist.

Damit die Martingalmethode für die Power-Nutzenfunktion angewendet werden kann, müssen die Bedingungen

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{L(T)}{M(T)} \right) < \infty, \tag{5.7}$$

$$\mathbb{E}^* \left(\left(\frac{L(T)}{M(T)} \right)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right) < \infty \tag{5.8}$$

erfüllt sein, wobei L der Dichtequotientenprozess bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes bezeichnet. Es ist leicht zu zeigen, dass die erste Bedingung mit einem endlichen Anfangspreises eines Bonds gleichbedeutend ist. Die zweite Voraussetzung folgt, wenn θ gemäß Satz 2.6, Gleichung (2.7) deterministisch ist.

Schließlich blicken wir auf ein erweitertes Portfolioproblem, in dem die Handelsstrategie durch eine zusätzliche Anlagemöglichkeit in ein risikobehaftetes Asset aufgestockt wird. In dieser Situation betrachten wir genauer eine Aktie. Damit nun die Dynamik des Assets unter Beibehaltung der Vollständigkeit des Modells gegeben werden kann, wird ein zweidimensionaler Wiener-Prozess benötigt. Wir definieren dazu

$$\big(\boldsymbol{W}(t)\big)_{t\in[0,T^*]} := \big((W_1(t), W_2(t))^\mathsf{T}\big)_{t\in[0,T^*]}$$

mit $d\langle W_1, W_2\rangle = dt$.
Weiter unterliegen die Preisprozesse des T_1-Bonds $(B(t,T_1))_{t\in[0,T_1]}$ und der (Unternehmens-)Aktie $(S(t))_{t\in[0,T]}$ den Dynamiken

$$dB(t) = B(t)(r(t)dt + \sigma_{11}(t,T_1)dW_1^*(t)),\ B(T_1,T_1) = 1 \tag{5.9}$$

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma_{21}(t)dW_1^*(t) + \sigma_{22}(t)dW_2^*(t)),\ S(0) = s_0, \tag{5.10}$$

wobei $\boldsymbol{W}^* := (W_1^*, W_2^*)^\mathsf{T}$ nach Satz 2.1.1 ein zweidimensionaler Wiener-Prozess bzgl. des äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ ist.
Die Driftfunktion wird mit $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \mu_2)^\mathsf{T}$ bezeichnet und die Volatilitätsmatrix hat

offensichtlich die Gestalt

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t, T_1) & 0 \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \forall \ \ t \in [0, T].$$

Insbesondere ist die Volatilität σ_{11} des T_1-Bonds deterministisch und kann nach Satz 5.1.2 genau bestimmt werden. Folglich gilt dann für alle $t \in [0, T^*]$ durch einfaches Rechnen

$$\boldsymbol{W}^*(t) = \boldsymbol{W}(t) + \int_0^t \boldsymbol{\theta}(s) ds \text{ mit } \boldsymbol{\theta}(t) := (\theta_1(t), \theta_2(t))^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \\ \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}} - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} \end{pmatrix}.$$

Es soll nun die Lösung des Portfolioproblems bzgl. der Handelsstrategie

$$\Phi = (\varphi_M, \varphi_B, \varphi_S)^\mathsf{T} \tag{5.11}$$

innerhalb des Handelszeitraums $0 < T < T_1$ gegeben werden. Im Folgenden wird dies als Stock Bond Portfolioproblem bezeichnet.

Satz 5.2.3 (Lösung des Stock Bond Portfolioproblem im Vasicek-Modell)**.** *Es ergibt sich für das Optimierungsproblem bzgl. der Handelsstrategie (5.11) unter der Power-Nutzenfunktion* $U(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot x^\gamma,\ 0 \leq \gamma \leq 1$ *als Lösung*

$$\begin{aligned} \pi_B^*(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(\frac{\theta_1(t)}{\sigma_{11}(t, T_1)} - \gamma \frac{\sigma_{11}(t, T)}{\sigma_{11}(t, T_1)} \right), \\ \pi_S^*(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$*, wobei* $(\theta_1, \theta_2)^\mathsf{T}$ *gemäß Satz 2.1.1 definiert ist.*

Beweis. Wir verweisen an dieser Stelle auf [Kra13], S. 34 und [Sim13], S. 37. ■

Die aufgeführten Ergebnisse innerhalb dieses Abschnitts können nun im Folgenden für die Anwendung der Elastizitätenmethode genutzt werden. Bevor dies geschieht, benötigen wir neben der Elastizität eine weitere Sensitivitätskennzahl aus der Finanzwissenschaft.

5.3 Die Bond Duration

Im Hinblick auf (Zins-)Derivate und Bonds ist die Duration ein Sensitivitätsmaß, welches die prozentuale Veränderung des Bondpreises durch eine Veränderung der Zinsrate beschreibt. Da die betrachteten Bonds im Vorigen offensichtlich von der Short-Rate abhängig sind, ist es sinnvoll diese Kennzahl in einem Short-Rate-Modell in Betracht zu ziehen. Insbesondere wird die Duration bei der Herleitung der Elastizitätenmethode benötigt, da diese dann einen vergleichbaren Zweck wie die Elastizität erfüllt. Wir beginnen zuerst mit der mathematischen Definition der Duration.

Definition 5.3.1 (Die modifizierte Duration)**.** *Sei C eine reellwertige, von der Zinsrate r abhängige Funktion $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und nach r differenzierbar ist. Dann ist die modifizierte Duration von C bzgl. r im stetigen Finanzmarktmodell gegeben durch den Ausdruck*

$$D_C := -\frac{1}{C(r)} \cdot \frac{\partial C}{\partial r}(r) = -\frac{\partial \ln(C(r))}{\partial r}.$$

Die Duration ist also der negative Quotient aus der partiellen Ableitung nach des Zinsprozesses durch die Zinsrate selbst. Die Begründung der Wahl dieser Kennzahl kann anschaulicher im diskreten Fall gezeigt werden. Wir verweisen dazu auf [HK05], S. 89 ff.

Zuvor wurde der Preisprozess eines T_1-Bonds betrachtet, welcher offensichtlich von r abhängig ist. Dazu wurde weiter vorausgesetzt, dass B eine Funktion aus $C^{1,2}([0,T_1] \times \mathbb{R})$ darstellt[2], sodass die Bond Duration in der betrachteten Situation existiert und explizit gegeben ist durch $D_B := -\frac{\partial_r B}{B}$ für alle $t \in [0,T]$.

Wie schon bemerkt besteht ein Zusammenhang zwischen der Elastizität und Duration bzgl. einer Anleihe und der Duration eines beliebigen Zinsderivats. Wir betrachten dazu einen Claim C, der von der Zinsrate abhängig ist. Demnach gilt $C := C(t,r)$. Die Duration ist dann gegeben durch $D_C = -\frac{\partial_r C}{C}$, sodass mit der Definition der Elastizität

$$\varepsilon_{C,B} = \frac{\partial_B C B}{C} = \frac{\frac{dCdr}{dBdr} B}{C} = \frac{\partial_r C}{C} \frac{B}{\partial_r B} = \frac{-D_C}{-D_B} = \frac{D_C}{D_B}$$

gilt.

Die Duration kann nun in der Portfoliooptimierung im Rahmen von Short-Rate-

[2]Siehe dazu Gleichungen (5.2) und (5.3).

Modellen verwendet werden, um dieses Sensitivitätsmaß mit entsprechenden Vorbereitungen in die Vermögensgleichung einzusetzen. Dadurch kann schließlich das Portfolioproblem reduziert werden und das gleiche Ziel erreicht werden, wie es in Kapitel 3 mithilfe der Elastizität im Merton-Modell erzielt wurde. Die Voraussetzung ist dafür das Vorliegen von Finanzgütern, die von der Short-Rate abhängig sind. Dies ist in einem (Stock) Bond Portfolio ganz offensichtlich der Fall. Zur ausführlicheren Erläuterung des Durations-Begriffs verweisen wir auf zahlreiche Literatur, beispielsweise [NSB05].

Die Einführung der theoretischen Grundlagen zum Verständnis des Short-Rate-Modells und die darauf betrachtete Portfoliooptimierung sowie die Vorbereitung zur Herleitung der Elastizitätenmethode ist nun abgeschlossen, sodass im folgenden Abschnitt der Elastizitätenansatz innerhalb eines Stock Bond Portfolios näher betrachtet werden kann.

5.4 Die Elastizitätenmethode im Vasicek-Modell

Wir wollen nun das Hauptaugenmerk auf die Herleitung der Elastizitätenmethode innerhalb des Vasicek-Modells legen. Hierbei motivieren wir uns an dem Artikel [KK03], S. 20 ff., in dem ein Portfolioproblem betrachtet wird, das im Rahmen eines „*Generalized Briys-de Varenne Model*“[3] mit stochastischer Short-Rate-Dynamik aufgestellt und dann mittels der Elastizität und Duration unter bestimmten Nebenbedingungen reduziert und gelöst wird. Das Ziel ist hier nun, die Elastizitätenmethode innerhalb eines Vasicek-Modells allgemein zu formulieren. Der Unterschied ist also zu [KK03] zum einen, dass wir eine Power- anstatt logarithmische Nutzenfunktion betrachten. Zum anderen werden wir nicht den Lagrange-Ansatz zur Optimierung wählen, sondern die zuvor eingeführten Ergebnisse der Portfoliooptimierung in Short-Rate-Modellen und die bekannte Vorgehensweise des Elastizitätenansatzes nutzen. Insgesamt soll die Elastizitätenmethode im Vasicek-Modell bewiesen werden und danach anhand einiger Portfolios Anwendung finden.

[3]Das Briys-de Varenne-Modell ist ein Modell zur Unternehmensbewertung auf Grundlage eines Vasicek-Modells. Wir werden in Abschnitt 5.5 dieses Modell genauer erläutern.

Als erstes betrachten wir dazu ein Portfolioproblem mit einem T_1-Bond B und einem risikobehafteten Asset S, für welche die SDEs wie im Stock Bond Portfolioproblem vorliegen (vgl. (5.9) bzw. (5.10)). Zusätzlich sei mindestens ein bedingter Claim gegeben, der sowohl von S als auch der Short-Rate r beeinflusst wird, sodass der Wert des Claims gegeben ist durch $C := C(t, S(t), r(t))$. Insbesondere kann C dann als Itô-Prozess dargestellt werden. Dies kann unter Ausnutzung der Markov-Eigenschaft von S und r analog zu Abschnitt 3.2 gezeigt werden. Für einen Claim mit der Short-Rate als Basiswert wurde die Methode mithilfe des Begriff der Duration in [Kra13] beschrieben. Hier wird jedoch ein Claim betrachtet, der zusätzlich noch ein Asset als Basiswert besitzt. Aufgrund dessen müssen weitere Ableitungen bei der Herleitung der Dynamik von C berücksichtigt werden.
Blicken wir nun auf eben diese Dynamik. Für C folgt dann mit der Itô-Formel[4]

$$\begin{aligned}
dC &= \partial_t C dt + \partial_S C dS + \partial_r C dr + \frac{1}{2}\partial_{SS} C d\langle S,S\rangle + \frac{1}{2}\partial_{rr} C d\langle r,r\rangle + \partial_{Sr} C d\langle S,r\rangle \\
&= \partial_t C dt + \partial_S C S(r dt + \sigma_{21} dW_1^* + \sigma_{22} dW_2^*) + \partial_r C(a(b-r)dt + \delta dW_1^*) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_{SS} C S^2(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)dt + \frac{1}{2}\partial_{rr} C \delta^2 dt + \partial_{Sr} C S \sigma_{21}\delta dt \\
&= \Bigg(\partial_t C + \partial_S C S r + \partial_r C a(b-r) \\
&+ \frac{1}{2}\big(\underbrace{\partial_{SS} C S^2(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2) + \partial_{rr} C \delta^2 + 2\partial_{Sr} C S \sigma_{21}\delta}_{\mathbf{A}(t):=}\big)\Bigg) \\
&+ (\partial_S C S \sigma_{21} + \partial_r C \delta) dW_1^* + \partial_S C S \sigma_{22} dW_2^* = (*)
\end{aligned}$$

Damit wir den Claim nun risikoneutral bewerten können, muss zuerst ein replizierendes Portfolio nach der üblichen Vorgehensweise hergeleitet werden. Ein Unterschied wird hier sein, dass wir die Prozesse mit den Wiener-Prozessen bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes betrachten. Wir orientieren uns dazu an [Mer73] und [Duf01], S. 148 ff.
Da die Short-Rate kein direkt gehandeltes Finanzgut ist, betrachten wir deshalb die Handelsstrategie $\big((\varphi_M(t), \varphi_B(t), \varphi_S(t))^\intercal\big)_{t\in[0,T]}$, wobei B ein T-Bond sei. Mithilfe dieser Handelsstrategie wird nun das replizierende Portfolio erstellt.
Setzen wir dazu als erstes die Vermögensgleichung mit der Dynamik des Claims

[4] Wie üblich werden die partiellen Ableitungen abgekürzt und die Argumente ausgelassen.

gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned} dX(t) &= dC(t, S(t), r(t)) \\ \Longleftrightarrow \quad \varphi_M(t)dM(t) + \varphi_B(t)dB(t) + \varphi_S(t)dS(t) &= dC(t, S(t), r(t)) \end{aligned}$$

Setzen wir nun die hergeleitete SDE $(*)$ ein, dann folgt

$$\begin{aligned} & \varphi_M M r dt + \varphi_B B(r dt + \sigma_{11} dW_1^*) + \varphi_S S(r dt + \sigma_{21} dW_1^* + \sigma_{22} dW_2^*) \\ &= \left(\partial_t C + \partial_S C S r + \partial_r C a(b-r) + \frac{1}{2}\mathbf{A}\right) \\ &+ (\partial_S C S \sigma_{21} + \partial_r C \delta) dW_1^* + \partial_S C S \sigma_{22} dW_2^*. \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= \Big((C - \varphi_B B - \varphi_S S) r + \varphi_B B r + \varphi_S S r \\ &- \partial_t C - \partial_S C S r - \partial_r C a(b-r) - \frac{1}{2}\mathbf{A}\Big) dt \\ &+ (\varphi_B B \sigma_{11} + S\sigma_{21}(\varphi_S - \partial_S C) - \partial_r C \delta) dW_1^* + S\sigma_{22}(\varphi_S - \partial_S C) dW_2^*. \end{aligned}$$

Damit nun der stochastische Teil des Terms verschwindet, muss das Gleichungssystem

$$\varphi_S S - \partial_S C S = 0 \tag{5.12}$$

$$\varphi_B B \sigma_{11} - \partial_r C \delta = 0. \tag{5.13}$$

für φ_S, φ_B gelöst werden. Die Gleichung (5.12) liefert wieder den bekannten Δ-Hedge $\varphi_S = \partial_S C$. Weiter betrachten wir Gleichung (5.13) und setzen die Volatilität des T-Bonds dort ein. Es folgt dann mit Satz 5.1.2

$$\begin{aligned} \varphi_B(t) B(t,T) \sigma_{11}(t,T) &= \partial_r C(t) \delta \\ \Longleftrightarrow \quad \varphi_B(t) B(t,T) \frac{\partial_r B(t,T)}{B(t,T)} \delta &= \partial_r C(t) \delta \\ \Longleftrightarrow \quad \varphi_B(t) &= \frac{\partial_r C(t)}{\partial_r B(t,T)} \end{aligned} \tag{5.14}$$

und wir erhalten das replizierende Portfolio in Form von (5.12) und (5.14). Nachdem der dW^* verschwindet, folgt schließlich die partielle Differentialgleichung

$$0 = rC - \partial_t C - \partial_S CSr - \partial_r Ca(b-r) - \frac{1}{2}\mathbf{A} \tag{5.15}$$

mit Anfangsbedingung $C(0, S(0), r(0)) = X(0) =: x_0$ und $\mathbf{A}$ wie bekannt. Diese partielle Differentialgleichung liefert nun den Ansatz zur risikoneutralen Bewertung des Claims.
Um nun die Dynamik des Claims entsprechend umzuformen, setzen wir (5.15) für $\partial_t C$ ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} dC &= \left(rC - \partial_S CSr - \partial_r Ca(b-r) - \frac{1}{2}A + \partial_S CSr + \partial_r Ca(b-r) + \frac{1}{2}A \right) dt \\ &\quad + (\partial_S CS\sigma_{21} + \partial_r C\delta)dW_1^* + \partial_S CS\sigma_{22} dW_2^* \\ &= rCdt + (\partial_S CS\sigma_{21} + \partial_r C\delta)dW_1^* + \partial_S CS\sigma_{22} dW_2^*. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Da wir eine geeignete Dynamik des Claims C bestimmt haben, kann damit nun die Elastizitätenmethode innerhalb des Vasicek-Modells hergeleitet werden. Wie bekannt benötigen wir dazu wieder die Portfolio-Elastizität. Da neben der Elastizität jedoch auch die Duration eine wesentliche Rolle spielt, wird folglich auch die Portfolio-Duration analog definiert.

Satz 5.4.1 (Elastizitätenmethode im Vasicek-Modell)**.** *Gegeben sei ein arbitragefreies Ein-Faktor-Vasicek-Modell mit der Short-Rate-Dynamik (5.1). Dazu sind die Anlagemöglichkeiten in einen T_1-Bond, $T_1 > T$ und in ein risikobehaftetes Asset mit den SDEs*

$$\begin{aligned} dB(t, T_1) &= B(t, T_1)\big((r(t)dt + \sigma_{11}(t, T_1)dW_1^*(t)\big),\ B(T_1, T_1) = 1 \\ dS(t) &= S(t)\big((rdt + \sigma_{21}(t)dW_1^*(t) + \sigma_{22}(t)dW_2^*(t)\big),\ S(0) = s_0, \end{aligned}$$

sowie in das risikofreie Geldmarktkonto M gegeben. Zusätzlich existiert zur Investition ein bedingter Claim auf dem Asset und der Short-Rate mit Laufzeit T.
Dann wird die Vermögensgleichung bzgl. der gegebenen Handelsstrategie gesteuert durch die Portfolio-Elastizität $\varepsilon := \pi_S + \pi_C \varepsilon_{C,S}$ und der Portfolio-Duration $D := \pi_B D_B + \pi_C D_C$. Ferner kann dann die optimale Portfolio-Elastizität ε^* bzw. -Duration D^* für den gesamten Handelszeitraum $t \in [0, T]$ bzgl. der Power-Nutzenfunktion bestimmt werden über das reduzierte Portfolioproblem bzgl. der Han-

delsstrategie $(\varphi_M, \varphi_B, \varphi_S)^\mathsf{T}$. *Insbesondere gilt demnach*

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*(t) &= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)},\\
D^*(t) &= -\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T_1)}{\delta}\right),
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$.

Beweis. Wir blicken als erstes auf die Vermögensgleichung bzgl. der vorliegenden Handelsstrategie $(\varphi_M, \varphi_B, \varphi_S, \varphi_C)^\mathsf{T}$. Es gilt mit (5.16)

$$\begin{aligned}
dX &= \varphi_M dM + \varphi_B dB + \varphi_S dS + \varphi_C dC\\
&= \varphi_M M r dt + \varphi_B B(rdt + \sigma_{11}dW_1^* + \varphi_S S(rdt + \sigma_{21}dW_1^* + \sigma_{22}dW_2^*)\\
&+ \varphi_C(rCdt + (\partial_S CS\sigma_{21} + \partial_r C\delta)dW_1^* + \partial_S CS\sigma_{22}dW_2^*)\\
&= \Big((X - \varphi_B B - \varphi_S S - \varphi_C C)r + \varphi_B Br + \varphi_S Sr + \varphi_C Cr\Big)dt\\
&+ (\varphi_B B\sigma_{11} + \varphi_S S\sigma_{21} + \varphi_C\partial_S CS\sigma_{21} + \varphi_C\partial_r C\delta)dW_1^*\\
&+ (\varphi_S S\sigma_{22} + \varphi_C\partial_S CS\sigma_{22})dW_2^* = (*)
\end{aligned}$$

Setzen wir nun den Portfolioprozess $(\pi_B, \pi_S, \pi_C)^\mathsf{T}$ und die Elastizität sowie Duration ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
(*) = X\Big(rdt &+ \big(\pi_B \underbrace{\sigma_{11}}_{=\frac{\partial_r B}{B}\delta} + \pi_S\sigma_{21} + \pi_C\varepsilon_{C,S}\sigma_{21} - \pi_C D_C\delta\big)dW_1^*\\
&+ \big(\pi_S\sigma_{22} + \pi_C\varepsilon_{C,S}\sigma_{22}\big)dW_2^*\\
&= X\Big(rdt - \big(\pi_B D_B + \pi_C D_C\big)\delta dW_1^* + \big(\pi_S + \pi_C\varepsilon_{C,S}\big)\big(\sigma_{21}dW_1^* + \sigma_{22}dW_2^*\big)\Big)\\
&= X\Big(rdt - D\delta dW_1^* + \varepsilon\big(\sigma_{21}dW_1^* + \sigma_{22}dW_2^*\big)\Big).
\end{aligned}$$

Für die diskontierte Vermögensgleichung ergibt sich schließlich die kontrollierte SDE

$$\begin{aligned}
dX^* = d\left(\frac{X}{M}\right) &= X(-\frac{1}{M^2}Mrdt) + \frac{1}{M}dX\\
&= X^*\Big(- D\delta dW_1^* + \varepsilon(\sigma_{21}dW_1^* + \sigma_{22}dW_2^*)\Big) \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

bzgl. der Kontrollvariable D und ε mit Anfangskapital $X(0) = x_0$.
Vergleichen wir nun (5.17) mit der diskontierten Vermögensgleichung bzgl. der Handelsstrategie $(\varphi_M, \varphi_B, \varphi_S)^\mathsf{T}$, die innerhalb der Optimierung mithilfe der Martingalmethode genutzt wird (vgl. [Sim13], S. 38f.), mit der Gestalt

$$dX^*(t) = X^*(t)\Big(\pi_B(t)\sigma_{11}(t,T_1)dW_1^*(t) + \pi_S(t)\big(\sigma_{21}(t)dW_1^*(t) + \sigma_{22}(t)dW_2^*(t)\big)\Big),$$

so unterscheiden die Gleichungen sich einzig durch $-D\delta$ anstatt $\pi_B\sigma_{11}$ bzw. ε gegenüber π_S.
Analog zur Martingalmethode liefert nun ein Koeffizientenvergleich bzgl. der dW^*-Terme aus (5.17) und der Vermögensgleichung in [Sim13], S. 38 f. das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varepsilon(t)\sigma_{22}(t) &= \frac{1}{1-\gamma}\theta_2(t), \\ \varepsilon(t)\sigma_{21}(t) - D(t)\delta &= \left(\frac{1}{1-\gamma}\big(\theta_1(t) + \sigma_{11}(t,T)\big) + \sigma_{11}(t,T)\right). \end{aligned}$$

Es soll hier bemerkt werden, dass in dem Ausdruck $D\delta$ die Volatilität $\sigma_{11}(t,T_1)$ des T_1-Bonds enthalten ist und dadurch die Volatilität σ_{11} auf der linken und rechten Seite der Gleichung unterschieden werden müssen.
Lösen wir weiter nach ε und D auf, folgt

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1-\gamma}\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}, \tag{5.18}$$

$$D(t) = -\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right), \tag{5.19}$$

für alle $t \in [0,T]$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ∎

Bemerkung 5.4.2. :

- Die Voraussetzungen zum Ansatz der Martingalmethode (vgl. (5.7) und (5.8)) sind erfüllt, da sich weder das äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ noch das T-Forward-Martingalmaß[5] $\mathbb{P}^T$ geändert hat.

- Mithilfe der Elastizitätenmethode konnte nun das Portfolioproblem reduziert werden, wie wir es schon im Merton-Modell gezeigt haben. Dies ist unabhängig von der Anzahl der bedingten Claims, sodass beliebig viele Anlagemöglichkeiten in weitere Claims hinzugenommen werden dürfen. Es muss bei der Bestimmung des optimalen Portfolioprozesses jedoch beachtet werden, welche und wie viele Möglichkeiten dem Investor zur Anlage vorliegen. Einige Situation sollen hierzu im nächsten Satz erläutert werden.

Es hätte auch direkt das Ergebnis aus Satz 5.2.3 genutzt werden können. Der optimale Portfolioprozess kann dann mittels des Elastizitätenansatzes auf $-D\delta$ und ε übertragen werden. Es muss allerdings dann beachtet werden, dass die optimale Portfolio-Duration gegeben ist durch $D(t) = -\frac{\pi_B^*(t)\sigma_{11}(t,T_1)}{\delta}$. Daraus folgt jedoch direkt das gerade erhaltene Ergebnis (5.19).

Mithilfe der Elastizitätenmethode können wir nun den optimalen Portfolioprozess bestimmen. Wie in Bemerkung 5.4.2, (ii) erläutert, muss die genaue Anzahl der Anlagemöglichkeiten berücksichtigt werden, da sonst der Fall auftreten kann, dass der Portfolioprozess nicht eindeutig bestimmt ist. Im Hinblick auf die Anwendung in einem Modell zur Unternehmensbewertung wollen wir die relevanten Fälle zusammenfassen.

Satz 5.4.3 (Optimaler Portfolioprozess im Vasicek-Modell)**.** *Betrachten wir das gleiche Modell wie in Satz 5.4.1, wobei mindestens zwei Claims C_1, C_2 mit Basiswert S und r existieren. Dann lassen sich folgende Fälle unterscheiden:*

(i) Der Investor hat die Möglichkeit ausschließlich in zwei Claims zu investieren. Falls dann die Matrix

$$\mathbf{\Sigma}(t) := \begin{pmatrix} \varepsilon_{C_1,S}(t) & \varepsilon_{C_2,S}(t) \\ D_{C_1}(t) & D_{C_2}(t) \end{pmatrix}$$

[5] Siehe dazu Definition A.1.9 im Anhang.

für alle $t \in [0, T]$ vollen Rang besitzt, gilt für den optimalen Portfolioprozess

$$\pi^*_{C_1}(t) = \frac{\varepsilon^*(t) D_{C_2}(t) - \varepsilon_{C_2,S}(t) D^*(t)}{\varepsilon_{C_1,S}(t) D_{C_2}(t) - \varepsilon_{C_2,S}(t) D_{C_1}(t)}, \tag{5.20}$$

$$\pi^*_{C_2}(t) = \frac{\varepsilon_{C_1,S}(t) D^*(t) - \varepsilon^*(t) D_{C_1}(t)}{\varepsilon_{C_1,S}(t) D_{C_2}(t) - \varepsilon_{C_2,S}(t) D_{C_1}(t)} \tag{5.21}$$

während des gesamten Handelszeitraums.
Gilt dagegen $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}) = 0$ *für ein beliebiges $t \in [0, T]$, dann existiert ein $c(t) \in \mathbb{R}$ mit*

$$\pi_{C_1}(t) D_{C_1}(t) + \pi_{C_2}(t) D_{C_2}(t) = c(t)\big(\pi_{C_1}(t)\varepsilon_{C_1,S}(t) + \pi_{C_2}(t)\varepsilon_{C_2,S}(t)\big), \tag{5.22}$$

sodass der optimale Portfolioprozess für den gesamten Handelszeitraum nicht eindeutig bestimmt werden kann.

(ii) Es stehen n Claims ($n > 2$) zur Investition zur Verfügung. Dann liefern alle Kombinationen $(\pi_{C_1}, \ldots, \pi_{C_n})$, die der optimalen Portfolio-Elastizität und -Duration genügen, ein optimales Portfolio. Das heißt, der gewählte Portfolioprozess $(\pi_{C_1}, \ldots, \pi_{C_n})^\mathsf{T}$ muss das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t) &= \pi_{C_1}(t)\varepsilon_{C_1,S}(t) + \cdots + \pi_{C_n}(t)\varepsilon_{C_n,S}(t), \\ D^*(t) &= \pi_{C_1}(t) D_{C_1}(t) + \cdots + \pi_{C_n}(t) D_{C_n}(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ lösen.

(iii) Falls der Investor einzig die Möglichkeit hat in genau einen Claim zu investieren, dann kann der optimale Portfolioprozess π_C mit diesem Ansatz nicht explizit bestimmt werden.

Beweis. :
(i) Als erstes betrachten wir das Gleichungssystem, das durch die Gestalt der Portfolio-Elastizität und -Duration aufgestellt wird. Dies lautet

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t) &= \pi_{C_1}(t)\varepsilon_{C_1,S}(t) + \pi_{C_2}(t)\varepsilon_{C_2,S}(t), \\ D^*(t) &= \pi_{C_1}(t) D_{C_1,S}(t) + \pi_{C_2}(t) D_{C_2,S}(t). \end{aligned}$$

bzw. mithilfe der Matrix $\mathbf{\Sigma}$ als

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^*(t) \\ D^*(t) \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}(t) \cdot \begin{pmatrix} \pi_{C_1}(t) \\ \pi_{C_2}(t) \end{pmatrix} \quad \forall \quad t \in [0, T].$$

Nach Voraussetzungen besitzt die Matrix vollen Rang, sodass die inverse Matrix von $\mathbf{\Sigma}$ existiert und für den optimalen Portfolioprozess

$$\begin{pmatrix} \pi^*_{C_1}(t) \\ \pi^*_{C_2}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon^*(t) \\ D^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_{C_2}}{\varepsilon_{C_1,S} D_{C_2} - \varepsilon_{C_2,S} D_{C_1}} & \frac{-\varepsilon_{C_2,S}}{\varepsilon_{C_1,S} D_{C_2} - \varepsilon_{C_2,S} D_{C_1}} \\ \frac{-D_{C_1}}{\varepsilon_{C_1,S} D_{C_2} - \varepsilon_{C_2,S} D_{C_1}} & \frac{\varepsilon_{C_1,S}}{\varepsilon_{C_1,S} D_{C_2} - \varepsilon_{C_2,S} D_{C_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^*(t) \\ D^*(t) \end{pmatrix}$$

gilt. Dieses System liefert die Lösungen (5.20) und (5.21).
Falls $\mathbf{\Sigma}$ nicht vollen Rang besitzt, so sind die Zeilenvektoren linear abhängig, sodass wir die Gleichung (5.22) erhalten. Demnach ist ein unterbestimmtes Gleichungssystem gegeben, sodass nicht direkt eine eindeutige Lösung gegeben werden kann.
(ii) Offensichtlich ist auch hier das Gleichungssystem unterbestimmt, sodass mehr als eine Lösung existieren.
(iii) In dieser Situation ist keine Vollständigkeit des Modells gegeben, da wir ein überbestimmtes Gleichungssystem von π_C erhalten. Aus diesem Grund kann keine Lösung gegeben werden. ■

Bemerkung 5.4.4. :

- Es wurden im vorigen Satz nicht alle Kombinationen der Anlagemöglichkeiten aufgezählt, da die nicht aufgeführten Fälle analog herzuleiten sind. Sind auf dem Finanzmarkt beispielsweise die Anlagemöglichkeiten einzig in den T_1-Bond und in das risikobehaftete Asset gegeben, dann ergibt sich offensichtlich das gleiche Ergebnis für π_B und π_S, siehe Resultat aus Satz 5.2.3.

- Hat der Investor einzig die Möglichkeit in den T_1-Bond zu investieren, dann ist das Resultat der Elastizitätenmethode in diesem Fall nicht mehr gültig. Dies resultiert aus der Tatsache, dass in der speziellen Situation ein Bond Portfolioproblem betrachtet und somit das Ergebnis aus Satz 5.2.1 herangezogen werden muss. Insgesamt folgt als Resultat ein anderer optimaler Portfolioprozess.

Damit haben wir den optimalen Portfolioprozess mithilfe der Elastizitätenmethode innerhalb eines Vasicek-Modells geliefert. Die Vorgehensweise zur expliziten Lösung

kann analog zu der Elastizitätenmethode aus Abschnitt 3.3 übernommen werden.
Die Methode kann nun an einer Reihe von Beispielen angewendet werden. Dazu blicken wir als erstes auf ein Portfolio, das als Anlagemöglichkeiten europäische Optionsgeschäfte enthält. Hilfreich ist dabei die Preisformel von Call- und Put-Optionen in Short-Rate-Modellen, die im Rahmen des Vasicek-Modells explizit angegeben werden kann.[6]
Des Weiteren kann der Elastizitätenansatz in einem Modell zur Unternehmensbewertung (vgl. Abschnitt 3.5) im Rahmen eines Vasicek-Modells genutzt werden. Unter diesen Voraussetzungen kommt beispielsweise ein vereinfachtes Briys-de Varenne-Modell in Frage, wie es vergleichbar in dem Artikel [Kra13], S. 20 ff. betrachtet wird. Hier erweist sich die Methode als äußerst nützlich, da ein optimaler Portfolioprozess unter der Voraussetzung einer Power-Nutzenfunktion geliefert werden kann.

Abschließend soll in diesem Abschnitt eine Handelsstrategie mit einer europäischen Call-Option betrachtet werden, um damit den Unterschied zwischen der Portfoliooptimierung und dem Hedging innerhalb eines Short-Rate-Modells hervorzuheben.
Dazu habe der Investor nun die Absicht, eine Call-Option auf einer Aktie mit Laufzeit T und Ausübungspreis F zu verkaufen.[7] Danach soll das vorhandene Vermögen optimal in eine Aktie und einen T_1-Bond, $T_1 > 0$ investiert werden. Da nun die Option in einem Short-Rate-Modell betrachtet wird, ist diese zusätzlich von r abhängig, sodass für den Wertprozess der Call-Option zur Zeit t gerade $C := C(t, S(t), r(t))$ gilt.
Es gilt also für die Handelsstrategie des Investors

$$\big(\Phi(t)\big)_{t\in[0,T]} = \big((\varphi_M(t), \varphi_S(t), \varphi_B(t), \varphi_C(t))^\mathsf{T}\big)_{t\in[0,T]},$$

mit $\varphi_C \equiv -1$. Demnach ist die Portfolio-Elastizität und -Duration mit $\pi_C = -\frac{C}{X}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \pi_S(t) - \frac{C(t, S(t), r(t))}{X(t)} \varepsilon_{C,S}(t), \\
D(t) &= \pi_B(t) D_B(t) - \frac{C(t, S(t), r(t))}{X(t)} D_C(t).
\end{aligned}$$

[6]Siehe beispielsweise [Aco06], S. 27 zur Berechnung der Optionspreise im Vasicek-Modell.
[7]Der Investor nimmt hier also eine Short-Position in der Call-Option ein.

Die Elastizitätenmethode (vgl. Satz 5.4.1) liefert dann

$$\begin{aligned}\varepsilon^* &= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\theta_2}{\sigma_{22}(t)},\\ D^* &= -\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right).\end{aligned}$$

Lösen wir weiter nach den einzelnen Anteilen auf, erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi_S^*(t) &= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)} + \frac{C(t,S(t),r(t))}{X(t)}\frac{\partial_S C(t)S(t)}{C(t,S(t),r(t))}\\ &= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)} + \frac{\partial_S C(t)S(t)}{X(t)}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\pi_B^*(t) &= \left(\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right) + \frac{C(t,S(t),r(t))}{X(t)}\frac{\partial_r C(t)}{C(t,S(t),r(t))}\right)\cdot\frac{B(t,T)}{\partial_r B(t,T_1)}\\ &= \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right)\cdot\frac{B(t,T_1)}{\partial_r B(t,T_1)} + \frac{B(t,T_1)}{X(t)}\cdot\frac{\partial_r C(t)}{\partial_r B(t,T_1)}\\ &= \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1(t)}{\sigma_{11}(t,T)} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\sigma_{11}(t,T_1)}\right) + \frac{B(t,T_1)}{X(t)}\cdot\frac{\partial_r C(t)}{\partial_r B(t,T_1)}.\end{aligned}$$

Formen wir dieses Ergebnis schließlich nach φ_S und φ_B um, liefert dies das Resultat

$$\varphi_S^*(t) = \partial_S C(t) + \frac{1}{1-\gamma}\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}\cdot\frac{X(t)}{S(t)}, \tag{5.23}$$

$$\varphi_B^*(t) = \frac{\partial_r C(t)}{\partial_r B(t,T_1)} + \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\theta_1}{\sigma_{11}(t,T)} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\sigma_{11}(t,T_1)}\right)\cdot\frac{X(t)}{B(t,T_1)} \tag{5.24}$$

für alle $t \in [0,T]$.

Blicken wir zurück auf Abschnitt 5.4, so kann hier der wesentliche Unterschied zwischen der Portfoliooptimierung und des Hedgings von Optionsgeschäften in der Theorie offenbart wird. Falls der Investor ausschließlich die Absicht verfolgt eine Call-Option abzusichern, dann ist der Hedge mit der Anzahl von $\partial_S C$ Aktien und $\frac{\partial_r C(t)}{\partial_r B(t)}$ T_1-Bonds gegeben. Im Sinne der Portfoliooptimierung und der Maximierung des erwarteten Nutzens macht dies jedoch nur Sinn, wenn der Investor extrem risikoavers ist, was gleichbedeutend mit $\gamma = -\infty$ ist. Folglich wäre in diesem Fall in (5.23) bzw. (5.24) der Term der Portfoliooptimierung gleich null. Falls der Investor dagegen eine nicht so extreme Risikoaversion aufweist, erhöhen sich die Anteile in

die Aktie und den Bond, sodass mehr Vermögen in die risikobehafteten Anlagen investiert wird.
Insgesamt wurde also eine explizite Lösung des optimalen Portfolioprozesses unter den betrachteten Voraussetzungen geliefert. Dies wurde schon in [Kra13], S. 76 f. im Rahmen des Merton-Modells analysiert, wo in gleicher Weise das Hedging von Optionsgeschäften mit den Resultaten der Portfoliooptimierung verglichen wird. Analog zum Merton-Modell ist ebenfalls hier zu erkennen, dass ausschließlich in Höhe des Δ-Hedges in die Aktie investiert wird, falls der Fall $\gamma = -\infty$ eintritt.

Anhand dieses Beispiels konnte nun gezeigt werden, dass der Elastizitätenansatz ebenso in Short-Rate-Modellen eine gute Anwendung in Portfolioproblemen mit Optionsderivaten findet. Es liegt deshalb nahe, im folgenden Abschnitt ein Modell zur Unternehmensbewertung betrachten, da wissend aus dem Merton-Modell der Unternehmenswert in diesen über Optionen modelliert wird.

5.5 Anwendung der Elastizitätenmethode im Briys-de Varenne-Modell

Blicken wir als erstes auf das Merton-Modell aus Abschnitt 3.5. Mit dem Ziel einer möglichst realistischen Bewertung eines Unternehmenswerts weist dieses Modell zwei wesentliche Schwächen auf. Ein Nachteil ist der, dass ein Zahlungsausfall der Unternehmensanleihe nur zum Ende der Laufzeit eintreten kann. Es ist jedoch durchaus der Realität entsprechend, dass ein Ausfall während der Laufzeit stattfinden wird. Dies wurde zum ersten Mal 1976 im Black-Cox-Modell mithilfe einer konstanten oder deterministischen Ausfallschranke eingeführt. Ein weitere Schwäche des Merton-Modells bringt die Annahme der deterministischen Zinsrate mit sich, weil damit Zinsänderungsrisiken, die mithilfe einer stochastischen Zinsrate modelliert werden, nicht berücksichtigt werden (vgl. [NSB05], S. 356 ff.). Aus diesem Grund wurde 1997 von Eric Briys und Francois de Varenne ein verallgemeinertes Modell zur Unternehmensbewertung[8] formuliert, das den Defiziten des Merton-Modells entgegenwirken soll.

[8]Siehe dazu den Artikel [BV97].

Im Folgenden betrachten wir also das sogenannte Briys-de Varenne-Modell. In diesem Modell wird unter anderem neu berücksichtigt, dass ein möglicher Zahlungsausfall an die Gläubiger während des gesamten Handelszeitraums auftreten kann. Dies geschieht mithilfe einer stochastischen Ausfallschranke.[9] Falls der Unternehmenswert unter einen bestimmten Wert fällt, ist dies gleichbedeutend mit einem Zahlungsausfall an die Anleihebesitzer. Ein wichtiger Unterschied, beispielsweise zum Longstaff-Schwarz Modell (1995) ist hier, dass die Zahlung an die Gläubiger im Falle des Ausfalls nicht größer ist als der Unternehmenswert selbst, was im Allgemeinen auch realitätsnäher erscheint. Dies wird im Folgenden durch die Definition der Ausfallschranke und der Struktur der Anleihen gewährleistet.
Blicken wir nun auf die genaue Modellierung. Das Modell wird in dieser Arbeit im Rahmen eines Ein-Faktor-Vasicek-Modells formuliert, wodurch wir vom ursprünglich angenommenen, erweiterten Vasicek-Modell abweichen und folglich das Briys-de Varenne-Modell geringfügig vereinfachen. Da es jedoch das Ziel ist, die Anwendbarkeit der Elastizitätenmethode zu verdeutlichen, besitzt die Einschränkung keine große Relevanz. Es sei also die Short-Rate wie bekannt durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess gegeben. Genauer gilt

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW^*(t),\ r(0) = r_0.$$

Der Preis eines risikofreien T_1-Bonds mit der Dynamik (5.3) sowie dessen Volatilität ist dann nach Satz 5.1.1 und 5.1.2 bestimmt. Eine Annahme im Briys-de Varenne-Modell ist nun, dass der Unternehmenswert V unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$ der SDE[10]

$$dV(t) = V(t)\big(r(t)dt + \sigma_{21}(t)dW_1^* + \sigma_{22}(t)dW_2^*\big),\ V(0) = v_0 \tag{5.25}$$

unterliegt, wobei die Koeffizienten die üblichen Eigenschaften besitzen.
Weiter soll nun die Ausfallschranke definiert werden. Dazu sei die Schranke als Funk-

[9]Es eignet sich an dieser Stelle auch der Begriff Insolvenzschranke, da ein Zahlungsausfall gleichbedeutend mit der Insolvenz des Unternehmens ist.

[10]In der Literatur wird häufig für die Entwicklung des Unternehmenswertes die Dynamik $dV = V(rdt + \sigma(\rho dW_1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_2)$ genannt, wobei ρ die Korrelation zwischen der Short-Rate und dem Unternehmenswert ist. Wir betrachten ohne Einschränkung jedoch (5.25).

tion eines T-Bonds definiert durch

$$L(t) = \begin{cases} k \cdot F \cdot B(t,T), & \text{falls } t < T, \\ F, & \text{falls } t = T. \end{cases} \tag{5.26}$$

für ein $0 < k < 1$. Falls der Unternehmenswert den Wert der Schranke berührt bzw. unterschreitet, lässt sich der Zeitpunkt des Ausfalls durch die Stoppzeit

$$\tau = \inf\{t \in [0,T] : V(t) = L(t)\} \tag{5.27}$$

beschreiben. Offensichtlich wird die Entwicklung der Ausfallschranke durch die Short-Rate wesentlich beeinflusst, da in (5.26) ein T-Bond enthalten ist.
Als nächstes wird nun wieder die Annahme getroffen, dass mithilfe der Accounting Equation der gesamte Unternehmenswert in Eigenkapital (Wert der Unternehmensaktien) und Fremdkapital (Wert der Unternehmensanleihen) aufgeteilt werden kann. Die Unternehmensaktien und -anleihen werden dann aufgrund ihrer Zahlungsstruktur zum Ende der Laufzeit als bedingte Claims, die als Basiswert V und r besitzen, modelliert.
Blicken wir zuerst auf den Wert der Unternehmensanleihe. Unter den beschriebenen Voraussetzungen gilt nun für die Auszahlung eines ausfallrisikobehafteten T-Bond $(\tilde{B}(t, V(t), r(t)))_{t\in[0,T]}$ im Briys-de Varenne-Modell

$$\tilde{B}(T, V(T), r(T)) = F\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + V(T)\mathbb{1}_{\{\tau=T\}} + kF\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}.$$

Falls also ein Zahlungsausfall vor Ende der Laufzeit stattfindet, erhalten die Anleihegläubiger gerade die Auszahlung in Höhe von $V(\tau) = kF \cdot B(\tau, T)$. Kommt es andererseits zum Ausfall genau zum Ende Laufzeit (also $\tau = T$), dann wird der Betrag F ausgezahlt. Findet schließlich kein Ausfall statt, dann liegt die Situation analog zum Merton-Modell vor. Aufgrund der Annahmen ist dann der Unternehmensaktienpreis $S(t, V(t), r(t))_{t\in[0,T]}$ zur Zeit T gegeben durch

$$S(T, V(T), r(T)) = (V(T) - F)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\tau>T\}}.$$

An dieser Stelle kann nun ein Portfolioproblem mit den Anlagemöglichkeiten in zwei Claims aufgestellt werden, das mithilfe des Elastizitätenansatzes optimiert werden kann. Genauer betrachten wir nun die Situation, ein Investor hat die Absicht sein innerhalb des Handelszeitraums $[0,T]$ in Unternehmensaktien und -anleihen zu investieren. Wie gewöhnlich steht weiterhin das risikofreie Geldmarktkonto zur Verfügung. Für die Handelsstrategie folgt dementsprechend

$$\Phi = (\varphi_M, \varphi_{\tilde{S}}, \varphi_{\tilde{B}})^\mathsf{T}.$$

Weil das Modell im Rahmen eines Ein-Faktor-Vasicek-Modells betrachtet wird, können wir die Elastizitätenmethode nach Satz 5.4.3, (i) anwenden. Es folgt dann für den optimalen Portfolioprozess $(\pi^*_{\tilde{S}}, \pi^*_{\tilde{B}})^\mathsf{T}$ für den Handelszeitraum $[0,\tau\wedge T]$ unter der Voraussetzung der Power-Nutzenfunktion

$$\begin{aligned}
\pi^*_{\tilde{S}}(t) &= \frac{\varepsilon^*(t)D_{\tilde{B}}(t) - \varepsilon_{\tilde{B},V}(t)D^*(t)}{\varepsilon_{\tilde{S},V}(t)D_{\tilde{B}}(t) - \varepsilon_{\tilde{B},V}(t)D_{\tilde{S}}(t)} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}D_{\tilde{B}}(t) - \varepsilon_{\tilde{B},V}(t)\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right)}{\varepsilon_{\tilde{S},V}(t)D_{\tilde{B}}(t) - \varepsilon_{\tilde{B},V}(t)D_{\tilde{S}}(t)} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}\frac{\partial_r\tilde{B}(t)}{\tilde{B}(t)} - \frac{\partial_V\tilde{B}(t)V(t)}{\tilde{B}(t)}\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right)}{\frac{\partial_V\tilde{S}(t)V(t)}{\tilde{S}(t)}\frac{\partial_r\tilde{B}(t)}{\tilde{B}(t)} - \frac{\partial_V\tilde{B}(t)V(t)}{\tilde{B}(t)}\frac{\partial_r\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t)}} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\tilde{S}(t)\cdot\frac{\frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}\partial_r\tilde{B}(t) + \partial_V\tilde{B}(t)V(t)\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right)}{\partial_V\tilde{S}(t)V(t)\partial_r\tilde{B}(t) - \partial_V\tilde{B}(t)V(t)\partial_r\tilde{S}(t)}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

und

$$\begin{aligned}
\pi^*_{\tilde{B}}(t) &= \frac{\varepsilon_{\tilde{S},V}(t)D^*(t) - \varepsilon^*(t)D_{\tilde{S}}(t)}{\varepsilon_{\tilde{S},V}(t)D_{\tilde{B}}(t) - \varepsilon_{\tilde{B},V}(t)D_{\tilde{S}}(t)} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\varepsilon_{\tilde{S},V}(t)\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right) - \frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}D_{\tilde{S}}(t)}{\varepsilon_{\tilde{S},V}(t)D_{\tilde{B}}(t) - \varepsilon_{\tilde{B},V}(t)D_{\tilde{S}}(t)} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\frac{\partial_V\tilde{S}(t)V(t)}{\tilde{S}(t)}\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right) - \frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}\frac{\partial_r\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t)}}{\frac{\partial_V\tilde{S}(t)V(t)}{\tilde{S}(t)}\frac{\partial_r\tilde{B}(t)}{\tilde{B}(t)} - \frac{\partial_V\tilde{B}(t)V(t)}{\tilde{B}}\frac{\partial_r\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t)}} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\tilde{B}(t)\cdot\frac{\partial_V\tilde{S}V\left(\frac{\theta_1(t)}{\delta} - \gamma\frac{\sigma_{11}(t,T)}{\delta}\right) - \frac{\theta_2(t)}{\sigma_{22}(t)}\partial_r\tilde{S}(t)}{\partial_V\tilde{S}(t)V(t)\partial_r\tilde{B}(t) - \partial_V\tilde{B}(t)V(t)\partial_r\tilde{S}(t)}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Bemerkung 5.5.1. Aufgrund der stochastisch beeinflussten Ausfallschranke ist hier die Veränderung des Handelszeitraums zu beachten. Falls also ein Zahlungsausfall innerhalb des Handelszeitraums $[0, T]$ stattfindet, so ist der Portfolioprozess (5.28) bzw. (5.29) optimal für das Intervall $[0, \tau]$. Während der verbliebenen Laufzeit $(\tau, T]$ ist dagegen sowohl $\pi_{\tilde{S}}$ als auch $\pi_{\tilde{B}}$ gleich null und folglich wird das gesamte Vermögen in das Geldmarktkonto investiert, woraus $\pi_M(t) = 1$ für $t \in (\tau, T]$ folgt. Offensichtlich liegt der Grund darin, dass die Investitionsmöglichkeit in die von dem Unternehmen emittierten Finanzgüter aufgrund der Insolvenz nicht mehr als Anlage zur Verfügung stehen. Infolgedessen beschreiben (5.28) und (5.29) den optimalen Portfolioprozess lediglich für das Zeitintervall $[0, \tau \wedge T]$.
Ein wesentlicher Unterschied wird hier jedoch zu Mertons Modell sichtbar, da nun nicht mehr über einen festen Handelszeitraum, sondern über das Intervall $[0, \tau \wedge T]$ optimiert wird. Aufgrund der Stoppzeit (5.27) liegt also kein fester Handelszeitraum vor, wodurch die angenommenen Voraussetzungen der Portfoliooptimierung, beispielsweise die Optimierung mithilfe der Martingalmethode verändern. Es ist jedoch aus finanzökonomischer Sicht durchaus plausibel, dass der optimale Portfolioprozess durch die Stoppzeit τ nicht weiter beeinflusst wird und somit ebenso für den Zeitraum $[0, \tau \wedge T]$ gilt. Aus diesem Grund ist die Elastizitätenmethode ebenfalls in einem Modell zur Unternehmensbewertung, in dem Ausfallrisiken über den gesamten Handelszeitraum betrachtet werden, anwendbar.

Insgesamt haben wir also eine Lösung des Portfolioprozesses für den Handelszeitraum $[0, T]$ unter der Voraussetzung einer Power-Nutzenfunktion erhalten. Als nächstes können nun alle relevanten Größen in dem Ausdruck (5.28) bzw. (5.29) explizit berechnet werden. Zum einen ist das im Rahmen des Vasicek-Modells möglich aufgrund der Berechnung des risikofreien Bondpreises und der deterministischen Volatilität (siehe Satz 5.1.1 und 5.1.2). Zum anderen können dann $\tilde{S}$ sowie $\tilde{B}$ und dessen partiellen Ableitungen mit der Bewertung von Call- und Put-Optionen innerhalb eines Short-Rate-Modells bestimmt werden. Für eine explizite Preisformel der Assets im Briys-de Varenne-Modell verweisen wir beispielsweise auf [BR02], S. 104 ff.
Im nächsten Kapitel sollen nun die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und auf einen möglichen, fortführenden Ausblick hingewiesen werden.

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

Zusammenfassend haben wir in dieser Arbeit die Einführung und Herleitung der Elastizitätenmethode in der Portfoliooptimierung auf der Grundlage verschiedener finanzmathematischer Modelle erarbeitet. Dazu haben wir zunächst die Methode innerhalb des Black-Scholes-Modells sowohl für den eindimensionalen als auch an späterer Stelle für den mehrdimensionalen Fall vorgestellt, um im Anschluss anhand des Merton-Modells zur Unternehmensbewertung die Reduzierung und danach folgende Lösung von Portfolioproblemen mithilfe des eingeführten Begriffs der Elastizität aufzuzeigen. Es resultierte daraus die Möglichkeit der expliziten Bestimmung der optimalen Vermögensanteile, die in die risikobehaftete Unternehmensaktie und/oder -anleihe investiert werden sollen. Zudem hat sich anhand dieser Anwendung herausgestellt, dass sich der Elastizitätenansatz als hervorragende Methode zur Optimierung von Portfolios mit ausfallrisikobehafteten Assets erweist. Um dieses Lösungsverfahren in der Portfoliooptimierung unter anderem an weiteren, verallgemeinerten Modellen zur Unternehmensbewertung anzuwenden, haben wir den Ansatz der Elastizitätenmethode auf Short-Rate-Modelle, speziell auf das Vasicek-Modell erweitert, da die jüngsten Modelle zur Unternehmensbewertung zumeist eine stochastische Short-Rate aufweisen. Insbesondere konnten wir damit eine so in der Literatur bisher noch nicht gegebene, allgemeine Formulierung der Elastizitätenmethode in einem Short-Rate-Modell für den Fall einer Power-Nutzenfunktion herleiten. Dabei konnten wir deutlich machen, dass die Resultate der Portfoliooptimierung im Vasicek-Modell im Rahmen eines Stock Bond Portfolios hinzugezogen werden müssen, da das Portfolioproblem innerhalb eines Short-Rate-Modells auf zwei Kontrollvariablen in Form der bekannten Elastizität sowie der Duration reduziert wird. Abschließend haben wir dann den Elastizitätenansatz in der Portfoliooptimierung anhand eines geringfügig vereinfachten Briys-de Varenne-Modell genutzt, um damit ein explizites Ergebnis eines Portfolioproblems im einem Modell zur Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Zahlungsausfall- und Zinsänderungsrisiken zu liefern, wodurch die gute Anwendbarkeit der Elastizitätenmethode in der Portfoliooptimierung nochmals verdeutlicht werden konnte.

Ausgehend von dieser Grundlage wäre eine mögliche Erweiterung der Arbeit die numerische Berechnung der optimalen Portfolio-Elastizität und -Duration in einem Beispielportfolio, um damit den optimalen Portfolioprozess ermitteln zu können. Dies bietet sich an, da in der Regel eine geschlossene Lösung der Optimierungen geliefert werden konnte und die Elastizität sowie die Duration Sensitivitätskennzahlen darstellen, die sehr gut mithilfe einer numerischen Kalkulation berechnet werden können. Im Hinblick auf die Optimierung von Portfolioproblemen bzgl. ausfallrisikobehafteten Finanzgütern wäre eine anknüpfende Fortführung, die Elastizitätenmethode auf weiteren Modellen zur Unternehmensbewertung anzuwenden. An dieser Stelle bieten sich neben dem Longstaff-Schwartz-Modell auch Sprung-Diffusions-Modelle an, in denen Kreditausfallrisiken mithilfe eines Poisson-Prozesses modelliert werden. Ein anderer Aspekt wäre die Suche nach weiteren Kennzahlen, die eine ähnliche Reduzierung des Portfolioproblems herbeiführen und somit einen neuen Ansatz zur Portfoliooptimierung darstellen würden. Hier kämen beispielsweise die Sharpe-Ratio oder Risikoprämie als zu untersuchende Größen in Frage.

Kapitel A

Appendix

In diesem Kapitel sollen wichtige Grundlagen, Definitionen und Sätze der stochastischen Analysis und stetigen Finanzmathematik, welche innerhalb der Arbeit benötigt werden, knapp zusammengefasst werden. Zur detaillierteren Ausführung wird jedoch auf zahlreich vorhandene Literatur zum relevanten Themenbereich verwiesen.
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, der in Abschnitt 2.1 eingeführt wurde.

A.1 Grundlagen der stetigen Finanzmathematik

Wir beginnen mit den einigen Definition bzgl. der Modellierung des Finanzmarktes.

Definition A.1.1 (Semimartingal)**.** *Ein adaptierter stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt Semimartingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, wenn der Prozess folgende Eigenschaften erfüllt.*

(i) Die Pfade von $(X_t)_{t\geq 0}$ sind càdlàg.

(ii) Es existiert eine Zerlegung $X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$ für alle $t \in [0, T]$, wobei $X(0)$ $\mathcal{F}_0$-messbar, M ein lokales Martingal und A ein Prozess mit lokaler finiter Variation bezeichnet. Ferner gilt $M(0) = A(0) = 0$.

Definition A.1.2 (Äquivalentes Maringalmaß)**.** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ heißt äquivalentes Martingalmaß, wenn gilt:*

(i) $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ auf dem $(\Omega, \mathcal{F})$.

(ii) Der diskontierte Preisprozess

$$(S^*(t))_{t\geq 0} := \left(\frac{S(t)}{M(t)}\right)_{t\geq 0}$$

ist ein lokales $\mathbb{P}^*$-Martingal.

Definition A.1.3 (Arbitragefreier Markt)**.** *Ein Finanzmarktmodell heißt arbitragefrei, falls ein nach Definition A.1.2 äquivalentes Martingalmaß existiert.*

Definition A.1.4 (Vollständigkeit des Marktes)**.** *Ein Finanzmarktmodell heißt vollständig, falls die folgenden Aussagen gelten.*

(i) Es existiert ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ zu $\mathbb{P}$, sodass der diskontierte Preisprozess $\left(\frac{S(t)}{M(t)}\right)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal auf dem betrachteten Handelszeitraum ist.

(ii) Jeder bedingte Claim C mit endlicher erwarteter Auszahlung, $\mathbb{E}^*|C^*| < \infty$ ist hedgebar durch eine zulässige Handelsstrategie. Anders formuliert existiert dann zu jedem Claim C ein replizierendes Portfolio.

Da in dieser Arbeit angenommen wird, dass der Finanzmarkt vollständig und arbitragefrei ist, existiert ein äquivalentes Martingalmaß, das eindeutig definiert ist.

Einer der meist genutzten Theoreme in der stetigen Finanzmathematik ist das Lemma von Itô. Wir führen die Formel für Itô-Prozesse ein, da alle Preisprozesse in dieser Arbeit gerade diese Art von Prozessen darstellen.

Definition A.1.5 (Itô-Prozess)**.** *Sei W ein eindimensionaler Wiener-Prozess. Ein eindimensionaler Itô-Prozess ist ein stochastische Prozess $(X(t))_{t\geq 0}$, der für alle t darstellbar ist als*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(sds + \int_0^t h(s)dW(s).$$

wobei $X(0)$ $\mathcal{F}_0$-messbar, $(g(t))_{t\geq 0}$ und $(h(t))_{t\geq 0}$ progressiv messbare Prozesse bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sind mit

$$\int_0^t |g(s)|ds < \infty, \int_0^t h^2(s)ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle t.

Mit der letzten Eigenschaft ist die Existenz der Integrale gewährleistet.

Theorem A.1.6 (Eindimensionale Itô-Formel)**.** *Sei W ein eindimensionaler Wiener-Prozess und X ein eindimensionaler Itô-Prozess mit*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(s)ds + \int_0^t h(s)dW(s) \quad \forall \quad t \geq 0.$$

Weiter sei $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t \partial_s f(s, X(s))ds + \int_0^t \partial_x f(s, X(s))dX(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int \partial_{xx} f(s, X(s))d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^t \Big(\partial_s f(s, X(s)) + \partial_x f(s, X(s))g(s) \\ &+ \frac{1}{2}\partial_{xx} f(s, X(s))h^2(s) \Big) ds + \int_0^t \partial_x f(s, X(s))h(s)dW(s). \end{aligned}$$

Alle Integrale sind aufgrund der Voraussetzungen endlich. Der Ausdruck $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet hier die quadratische Variation.

Beweis. Wir verweisen auf zahlreiche Literatur, beispielsweise [Øks00], S. 46 ff. oder [Shr04], S. 147 ff. ■

Für einen d-dimensionalen Itô-Prozess und eine m-dimensionalen Wiener-Prozess kann die mehrdimensionale Itô-Formel formuliert werden. Wir verweisen an dieser Stelle auf [Øks00], S. 48 ff.
Der nächste Satz liefert den arbitragefreien Preis von europäischen Call- und Put-Optionen.

Korollar A.1.7 (Arbitragefreier Optionspreis im Black-Scholes-Modell)**.** *Sei C und P der Wert einer europäischen Call- und Put-Option mit Laufzeit T und Ausübungspreis F. In einem vollständigen, arbitragefreien Black-Scholes-Modell ist der arbitragefreie Preis einer Call-Option gegeben durch*

$$p^*_{call}(t) = S(t) \cdot \phi(c_1(t)) - F \cdot \exp\left(- \int_t^T r(s)ds \right) \cdot \phi(c_2(t))$$

bzw. einer Put-Option

$$p^*_{put}(t) = F \cdot \exp\left(- \int_t^T r(s)ds \right) \cdot \phi(-c_2(t)) - S(t) \cdot \phi(-c_1(t))$$

mit

$$c_1(t) := \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{F}\right) + \int_0^{T-t} r(t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t+s)ds}{\sqrt{\int_0^{T-t} \sigma^2(t+s)}},$$

$$c_2(t) := c_1(t) - \sqrt{\int_0^{T-t} \sigma^2(t+s)ds.}$$

Beweis. Siehe beispielsweise [Shr04], Abschnitt 4.5.4. ■

Weiter wird nun der Preis einer Option mit zwei risikobehafteten Assets als Basiswert gegeben.

Satz A.1.8 (Preis einer Index-Option)**.** *In einem zweidimensionalen Black-Scholes-Modell wird eine Option mit Laufzeit T und Auszahlung*

$$C(T, S_1(T), S_2(T)) = \left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)} - \frac{S_2(T)}{S_2(0)} \right)^+$$

betrachtet. Dann ist der diskontierte, arbitragefreie Preis zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ gegeben durch

$$p^*_{call}(t) = S_1(t) \cdot \phi(d_1(t)) - S_2(t)\phi(d_2(t))$$

mit

$$d_1(t) := \frac{\ln(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}) + \frac{1}{2}\int_0^{T-t} (\sigma_{11}(t+s) - \sigma_{21}(t+s))^2 + (\sigma_{21}(t+s) - \sigma_{22}(t+s))^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T-t} (\sigma_{11}(t+s) - \sigma_{21}(t+s))^2 + (\sigma_{21}(t+s) - \sigma_{22}(t+s))^2 ds}},$$

$$d_2(t) := d_1(t) - \sqrt{\int_0^{T-t} (\sigma_{11}(t+s) - \sigma_{21}(t+s))^2 + (\sigma_{21}(t+s) - \sigma_{22}(t+s))^2 ds}$$

für alle $t \in [0,T]$.

Beweis. Wir verweisen für den Fall der konstanten Koeffizienten auf [Kor01], S. 164 f. ■

Schließlich folgt noch die Definition des Forward-Martingalmaßes, welches einen T-Bond als Numéraire nutzt und in Short-Rate-Modellen eine besondere Rolle spielt.

Definition A.1.9 (Das T-Forward-Martingalmaß)**.** *Das T-Forward-Martingalmaß ist definiert über die Radon-Nikodým-Dichte bzgl. $\mathbb{P}$ durch*

$$\frac{dP_T}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\frac{B(t,T)}{B(0,T)}}{\frac{M(t)}{M(0)}} = \frac{B(t,T)}{B(0,T)M(t)}.$$

A.2 Verifikationstheorem für HJB-Gleichungen

Das in Abschnitt 2.3 benötigte Verifikationstheorem soll hier formuliert werden. Es gelten die gleichen Voraussetzungen.

Theorem A.2.1 (Verifikation der Lösungen der HJB-Gleichung)**.** *Betrachtet wird eine kontrollierte stochastische Differentialgleichung der Form*

$$dX(t) = \tilde{\mu}(t,x,u)dt + \tilde{\sigma}(t,x,u)dW(t).$$

Weiter gelten für die Koeffizienten $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\sigma}$ die Bedingungen

$$\tilde{\mu}(.,.,u),\ \tilde{\sigma}(.,.,u) \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}) \ \ \forall \ \ u \in U := [a,b]\times\mathbb{R}^+,\ a<b. \tag{A.1}$$

Zusätzlich gelten für ein konstantes $C>0$ die Abschätzungen

$$|\partial_t\tilde{\mu}| + |\partial_x\tilde{\mu}| \le C, \quad |\partial_t\tilde{\sigma}| + |\partial_x\tilde{\sigma}| \le C, \tag{A.2}$$

$$|\tilde{\mu}(t,x,\pi(t))| + |\tilde{\sigma}(t,x,\pi(t))| \le C\cdot(1+|x|+|u|). \tag{A.3}$$

Schließlich sei $G \in C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R})$ und stetig auf $[0,T]\times\overline{\mathbb{R}}$ mit $|G(t,x)| \le K(1+|x|^k)$ für eine Konstante $K>0,\ k\in\mathbb{N}$. Dies sei eine Lösung der HJB-Gleichung

$$\max_{u\in[a,b]\times\mathbb{R}^+} L(t,u) + \partial_t G(t,x) + \tilde{\mu}(t,x,u)\partial_x G(t,x) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t,x,u)\partial_{xx}G(t,x) = 0,\ (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}, \tag{A.4}$$

$$G(t,x) = \Psi(t,x),\ (t,x)\in\{T\}\times\mathbb{R} \tag{A.5}$$

Dann gelten die Aussagen

(i) $G(t,x) \geq J(t,x,u) := \mathbb{E}\left(\int_t^T L(s,X(s),c(s))ds + \Psi(T,X(T))\right)$ *für alle* $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ *und zulässigen* u.

(ii) *Falls für alle* $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ *ein zulässiges* u *existiert mit*

$$
\begin{aligned}
u^*(s) \in \arg\max_{u \in U} L(s,X(s),u) + \partial_s G(s,X(s)) + \partial_x G(s,X(s))\tilde{\mu}(s,X(s),u) \\
+ \frac{1}{2}\partial_{xx} G(s,X(s))\tilde{\sigma}^2(s,X(s),u).
\end{aligned}
$$

für alle $s \in [t,T]$, *wobei* $X(s)$ *eine kontrollierte Vermögensgleichung bzgl.* u^* *ist. Dann gilt*

$$G(t,x) = V(t,x) = J(t,x,u^*).$$

Beweis. Wir verweisen auf eine allgemeinere Formulierung des Satzes. Siehe dazu beispielsweise [Kor01], S. 229 ff. ∎

Literaturverzeichnis

[Aco06] D. M. Acott - *Equity Options and Stochastic Interest Rates:* Errors in Black-Scholes Prices and Hedges for European- and American-style equity options when short rates are Ornstein-Uhlenbeck, dissertation at the University of Cape Town (2006).

[Als07] G. Alsmeyer - *Skripten zur Mathematischen Statistik - Wahrscheinlichkeitstheorie* (2007).

[BC76] F. Black, J. C. Cox - *Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions*, Journal of Finance, Volume 31, Issue 2 (1976).

[BR02] T. Bielecki, M. Rutkowski - *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer (2002).

[BV97] E. Briys, F. de Varenne - *Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 32, No. 2, (June 1997).

[Duf01] D. Duffie - *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton Series in Finance, Princeton University Press; Third edition (2001).

[Eva08] L. C. Evans - *Partial Differential Equations* Second Edition, Oxford University Press (2010).

[Fra04] A. Frantzke - *Grundlagen der Volkswirtschaftslehre: Mikroökonomische Theorie*, Schäffer-Poeschel; Auflage: 2. (2004).

[Hul11] J. C. Hull - *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall; Auflage: 8th edition. Global Edition (2011).

[HK05] P. J. Hunt, J. E.Kennedy - *Financial Derivatives in Theory and Practice*. Wiley; Revised Edition edition (2005).

[KS00] I. Karatzas, S. Shreve - *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer; Auflage: 2nd Corrected ed. (1998).

[Kor01] R. Korn, E. Korn - *Option Pricing and Portfolio Optimization*, Modern Methods of Financial Mathematics, Oxford University Press; Auflage: First Edition, First Printing (2001).

[KK03] R. Korn, H. Kraft - *Optimal Portfolios with Defaultable Securities - A Firm Value Approach*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 6, pp. 793-819, (2003).

[Kra13] H. Kraft - *Optimal Portfolios with Stochastic Interest Rates and Defaultable Assets*, (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems), Springer; Auflage: Softcover reprint of the original 1st ed. 2004 (2013).

[Mak52] H. Markowitz - *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91 (1954)

[Mer69] R. Merton - *Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuos-Time Case*, The Review of Economics and Statistics 51: 247-257 (1969).

[Mer73] R. Merton - *Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*, Journal of Economic Theory 3: 373-413 (1973).

[NSB05] S. Nawalka, G. Soto, N. Beliaeva- *Interest Rate Risk Modeling*, The Fixed Income Valuation Course, John Wiley & Sons; Auflage: 1. Auflage (2005).

[Øks00] B. Øksendal - *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Springer; Auflage: 5th ed., corr. 5th printing (2000).

[Shr04] S. Shreve - *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models*, Springer; Auflage: Softcover reprint of the original 1st ed. (2004).

[Sim13] S. Simann - *Portfoliooptimierung im Vasicek-Modell*, Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2013).

[Ste01] J. M. Steele - *Stochastic Calculus and Financial Applications* (Stochastic Modelling and Applied Probability), Springer New York; Auflage: Softcover reprint of the original 1st ed. (2001).

[Sto14] D. Stöppel - *Portfoliooptimierung unter Restriktionen*, Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität (2014).

[Vas77] O. Vasicek - *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, 1977, vol. 5, issue 2, pages 177-188 (1977).