



# NUTZENBASIERTE BEWERTUNG VON DERIVATEN IN UNVOLLSTÄNDIGEN MÄRKTEN

MASTERARBEIT  
zur Erlangung des akademischen Grades  
MASTER OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:

*PD Dr. Volkert Paulsen*

Eingereicht von:

*Jörn Borrink*

Münster, den 31. März 2015

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Einleitung</b>                                                         | <b>1</b>  |
| <b>2. Einführung in die nutzen-neutrale Bewertung</b>                        | <b>3</b>  |
| 2.1. Nutzen-neutrale Preise . . . . .                                        | 4         |
| 2.2. Beispiel: Nutzen-neutrale Bewertung im Trinomialmodell . . . . .        | 5         |
| 2.3. Eigenschaften der nutzen-neutralen Preise . . . . .                     | 7         |
| <b>3. Modellrahmen</b>                                                       | <b>14</b> |
| 3.1. Nutzenfunktionen . . . . .                                              | 14        |
| 3.1.1. Arrow-Pratt-Maße . . . . .                                            | 15        |
| 3.1.2. HARA-Nutzenfunktionen . . . . .                                       | 17        |
| 3.2. Stetige unvollständige Märkte . . . . .                                 | 18        |
| 3.2.1. NTAM (Non-traded assets model) . . . . .                              | 20        |
| 3.2.2. SVM (Stochastic volatility model) . . . . .                           | 21        |
| 3.3. Problemstellung . . . . .                                               | 23        |
| <b>4. Der grundlegende Ansatz</b>                                            | <b>26</b> |
| 4.1. Stochastische Kontrolltheorie und das Bellman-Prinzip . . . . .         | 26        |
| 4.1.1. Setting . . . . .                                                     | 26        |
| 4.1.2. Zielfunktion und Wertfunktion . . . . .                               | 28        |
| 4.1.3. Bellman-Prinzip . . . . .                                             | 28        |
| 4.1.4. Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung . . . . .                           | 30        |
| 4.2. Anwendung . . . . .                                                     | 34        |
| 4.2.1. Übersetzung der Theorie auf die Modelle . . . . .                     | 34        |
| 4.2.2. NTAM . . . . .                                                        | 37        |
| 4.2.3. SVM . . . . .                                                         | 49        |
| <b>5. Der duale Ansatz</b>                                                   | <b>54</b> |
| 5.1. $q$ -optimale Maße und die fundamentale Darstellungsgleichung . . . . . | 55        |
| 5.1.1. in Mertons Portfolioproblem . . . . .                                 | 56        |

---

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| 5.1.2. in der Portfoliooptimierung mit Claim . . . . . | 66        |
| 5.2. Anwendung . . . . .                               | 67        |
| 5.2.1. NTAM . . . . .                                  | 68        |
| 5.2.2. SVM . . . . .                                   | 72        |
| 5.3. Der Ansatz von Tehranchi . . . . .                | 74        |
| <b>6. Resultate für die nutzen-neutralen Preise</b>    | <b>78</b> |
| 6.1. Marginale Preise . . . . .                        | 78        |
| 6.1.1. NTAM . . . . .                                  | 80        |
| 6.1.2. SVM . . . . .                                   | 85        |
| <b>7. Fazit und Ausblick</b>                           | <b>87</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                            | <b>88</b> |
| <b>A. Anhang</b>                                       | <b>91</b> |

# 1. Einleitung

Die Veröffentlichung des Black-Scholes-Modells (BSM) in dem Paper „*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*“ [2] war ein Meilenstein zur Bewertung von Derivaten. Die verwendete Methodik nutzt als zentrale Idee die Vollständigkeit des Marktes, welche impliziert, dass jede Option durch geschickte Anlage in das Underlying repliziert („*delta hedging*“) und jegliches Risiko der Option aus dem Portfolio des Investors eliminiert werden kann. Insbesondere ist der Preis der Option nach dem Replikationsprinzip eindeutig festgelegt, und jeder Investor wird dem Claim mit diesem Preis bewerten. Wird die Vollständigkeitsannahme aufgehoben, welches zum Beispiel durch die Integration eines nicht-handelbaren Gutes oder einer stochastischen Volatilität geschehen kann, so existieren Claims mit nicht komplett eliminierbarem Risiko. Da allein aus der No-Arbitrage-Annahme nur triviale Schlussfolgerungen bezüglich des Preises eines nicht-replizierbaren Claims gezogen werden können, wie Hubalek & Schachermayer in [23] zeigen, müssen zur Analyse der Bewertungsmaßstäbe eines Investors für solche Claims die traditionellen Paradigma der risikoneutralen Bewertung und Replikation durch neue Argumentationen ersetzt werden. Vor allem muss die zentrale Frage, wie der Investor mit dem verbliebenen Risiko des Claims umgeht, beantwortet werden. Aus diesem Grund bietet sich die Konstruktion eines neuen Konzept an, welches die Risikoaversion des Investors in das Modell involviert. Geschehen kann die Einbindung dieses Charakteristikums durch den Einsatz von Nutzenfunktionen, welche sowohl die grundsätzliche Ausrichtung der Risikoaversion als auch deren Stärke modellieren. Zu den ersten, die das neue Konzept namens nutzen-neutralen Bewertung („*utility indifference pricing*“) einführten, gehören Hodges & Neuberger [22]. Das Ziel dieser dynamischen Erweiterung des statischen Sicherheitsäquivalenz-Prinzips („*certainty equivalence*“) ist die Berechnung des Preises für einen Claim, welcher den Investor bei der Konstruktion eines Portfolios zur Optimierung seines Endnutzens indifferent zwischen der Wahl *mit* oder *ohne* Claim macht. Dieser Preis wird nutzen-neutraler Preis genannt, und deren Berechnung in stetigen Märkten unter Berücksichtigung unterschiedlicher Nutzenfunktionen ist die zentrale Problemstellung der vorliegenden Masterarbeit. Als Hauptquelle dient das zweite Kapitel des Buches „*Indifference Pricing - Theory and Applications*“

von Rene Carmona. Dieses von Henderson & Hobson verfasste Kapitel „*Utility Indifference Pricing - An Overview*“ [15] stellt eine komprimierte Zusammenfassung der wichtigsten Resultate der nutzen-neutralen Preistheorie in stetigen Märkten dar. Wir werden uns ausführlich mit diesen Resultaten auseinandersetzen, insbesondere werden die Herleitungen im Detail aufgeführt. Hilfreich für das Verständnis dieser Masterarbeit kann die diskrete Preistheorie sein, da viele ihrer Ideen auf den stetigen Fall angewendet werden. Wir verweisen auf die Paper von Musiela & Zariphopoulou [31, 32], wobei der Artikel „*The Single Period Binomial Model*“ zeitgleich das erste Kapitel des obigen Buches ist.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt:

Wir beginnen im *zweiten Kapitel* mit einer Einführung in die nutzen-neutrale Bewertung, welche neben der Definition auch die Eigenschaften der nutzen-neutralen Preise beinhaltet. Das *dritte Kapitel* brauchen wir zur Festlegung des Modellrahmens. Die Märkte und Nutzenfunktionen, deren Betrachtung wir uns widmen wollen, werden vorgestellt und abschließend das Vorgehen zum Lösen der zentralen Problemstellung formuliert. Hierbei wurden zwei unterschiedliche Ansätze hergeleitet, der Grundlegende und der Duale. Ersterer basiert auf der stochastischen Kontrolltheorie und bedient sich des Bellman-Prinzips. Die zugehörigen theoretischen Grundlagen sowie die Anwendung auf die relevanten Märkte sind im *vierten Kapitel* vorzufinden. Letzterer befasst sich mit optimalen Martingalmaßen und der fundamentalen Darstellungsgleichung. Im *fünften Kapitel* haben wir für diesen Ansatz den Theorie- und Anwendungspart aufgeführt. Zudem geben wir dort einen kurzen Einblick in einen weiteren Ansatz, nämlich die Idee von Tehranchi. Das *sechste Kapitel* fasst die Resultate der nutzen-neutralen Preise für allgemeine Claims zusammen, wendet diese auf spezielle Claims an, und führt in die Theorie der marginalen Preise ein. Letztlich bildet das Fazit kombiniert mit einem Ausblick den Abschluss dieser Masterarbeit.

## 2. Einführung in die nutzen-neutrale Bewertung

Gegeben sei ein Investor mit Anfangskapital  $x > 0$ , welcher im Zeitraum  $[0, T]$  an einem Basisfinanzgütermarkt (bestehend aus Aktien und einem Geldmarktkonto) interagieren möchte und keinen Konsum in diesem Zeitraum vornimmt. Als zusätzliche Anlagemöglichkeit werde ihm das Angebot unterbreitet, im heutigen Zeitpunkt  $k$  Stück eines europäischen Claims mit Maturity  $T$  zu kaufen. Der Gesamtpreis  $p_{var}(k)$  dieser Offerte sei verhandelbar. In diesem Szenario kann der Investor zwei mögliche Strategien in Erwägung ziehen:

**(Buy Claim)** Kaufe die  $k$  Claims zum Preis von  $p_{var}(k)$  und investiere das restliche Vermögen  $x - p_{var}(k)$  in die Basisfinanzgüter.

**(No Claim)** Lehne das Claim-Angebot ab und investiere das komplette Vermögen  $x$  in die Basisfinanzgüter.

Grundsätzlich besteht in beiden Situationen das Problem, eine Strategie zu finden, die im Endzeitpunkt  $T$  *das für den Investor bestmögliche Ergebnis* liefert. Dieses Optimierungsproblem entspricht der Berechnung des erwarteten Nutzens seines Endvermögens unter Wahl der optimalen Strategie, definiert durch

$$V(z, k) := \sup_{X_T \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)].$$

Hierbei modelliert  $U$  die Präferenzen des Investors und  $\mathcal{A}(z)$  stellt die Menge aller Endvermögen  $X_T$  dar, welche mit einer selbst-finanzierenden Handelstrategie und Startkapital in Höhe von  $z$  am Basisfinanzgütermarkt generiert werden können. Wir unterstellen dem Investor rationales Handeln, insbesondere präferiert er höheres Endvermögen und  $U$  ist monoton wachsend. Im Bezug auf die beiden Wahlmöglichkeiten ergibt sich im Falle der Strategie (Buy Claim) der maximale erwartete Nutzen  $V(x - p_{var}(k), k)$  und bei der Strategie (No Claim) entspricht dieser dem Wert  $V(x, 0)$ . Das Verhältnis dieser beiden Werte entscheidet über die Wahl des Investors, dabei gilt

- (i)  $V(x - p_{var}(k), k) < V(x, 0)$  : Der Investor wählt die Strategie (No Claim).
- (ii)  $V(x - p_{var}(k), k) > V(x, 0)$  : Der Investor wählt die Strategie (Buy Claim).
- (iii)  $V(x - p_{var}(k), k) = V(x, 0)$  : Der Investor ist indifferent zwischen den beiden Strategien.

Der kritische Punkt für die Entscheidungsfindung ist der Preis des Claimangebots, bei welchem der Investor indifferent zwischen den beiden Alternativen ist. Dies führt uns zu den nutzen-neutralen Preisen, welche das bereits durch den Namen suggerierte Charakteristikum besitzen, dass bei einem Claimangebot zu diesem Preis der optimale erwartete Nutzen des Endvermögens in beiden Strategien übereinstimmt.

## 2.1. Nutzen-neutrale Preise

### Definition 2.1

Der nutzen-neutrale Kaufpreis („utility indifference buy price“) ist gegeben durch die Funktion

$$\begin{aligned} p^b : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto p^b(k), \end{aligned}$$

wobei  $p^b(k)$  durch die Erfüllung der Gleichung

$$V(x - p^b(k), k) = V(x, 0)$$

festgelegt wird. Analog wird der nutzen-neutrale Verkaufspreis („utility indifference sell price“)

$$\begin{aligned} p^s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto p^s(k), \end{aligned}$$

definiert. Der Wert  $p^s(k)$  entspricht dabei dem Preis, welcher die Gleichung

$$V(x + p^s(k), -k) = V(x, 0)$$

erfüllt.

Mit dieser Definition können die drei obigen Fälle, welche für die Entscheidung des

Investors relevant sind, überführt werden in eine Abhängigkeit von der Höhe des nutzen-neutralen Kaufpreises  $p^b(k)$ :

- (i)  $p^b(k) < p_{var}(k)$  : Der Investor wählt die Strategie (No Claim).
- (ii)  $p^b(k) > p_{var}(k)$  : Der Investor wählt die Strategie (Buy Claim).
- (iii)  $p^b(k) = p_{var}(k)$  : Der Investor ist indifferent zwischen den beiden Strategien.

Insbesondere liefert die Kenntnis des nutzen-neutralen Kaufpreises  $p^b(k)$  für  $k$  Claims dem Investor den maximalen Preis, welchen er in den Preisverhandlungen akzeptieren würde, und aus diesem Grund sind die Preisfunktionen  $p^b$  und  $p^s$  von besonderer Relevanz. Die nutzen-neutrale Bepreisung kann dabei in drei Arbeitsschritte unterteilt werden und wir möchten dieses Vorgehen anhand eines simplen diskreten Modells veranschaulichen.

## 2.2. Beispiel: Nutzen-neutrale Bewertung im Trinomialmodell

### Beispiel 2.2

Gegeben sei ein einperiodisches Trinomialmodell bestehend aus einer Aktie  $S$  und einem risikolosen Geldmarktkonto  $B$ . Der aktuelle Kurs der Aktie beträgt  $S_0 = 100$  und die möglichen Endkurse  $S_1 \in \{90, 110, 130\}$  treten jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  ein. Das Geldmarktkonto notiert im heutigen Zeitpunkt bei  $B_0 = 100$  und der zukünftige Kurs liegt bei  $B_1 = 110$ . Die Nutzenfunktion  $U$  sei gegeben durch

$$U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}$$

mit  $\gamma > 0$ .

Wir wollen für einen Investors mit Anfangskapital  $x$  die nutzen-neutralen Preise für den europäischen Call mit Strike  $K = 110$  berechnen. Die ausführlichen Berechnungen vorgestellten Schritte können im Anhang (A.1) nachvollzogen werden.

### 1. Schritt

Begonnen wird mit der Kalkulation von  $V(x, 0)$ , wir berechnen also den maximal erwarteten Endnutzen, der bei Kauf keiner einzigen Call-Option erreicht werden kann.



Für die Anlagemöglichkeiten des Investors stehen in diesem Model nur das risky asset und das Geldmarktkonto zur Verfügung, daher gilt

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(X_T)] \\ &= \sup_{\alpha B_0 + \beta S_0 = x} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (\alpha B_T + \beta S_T)) \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird maximiert für  $\beta = 0$  und wir erhalten

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-1.1\gamma x).$$

## 2. Schritt

Im zweiten Schritt gehen wir vom Kauf von  $k \in \mathbb{R}$  Call-Optionen zum Gesamtpreis  $p^b(k)$  aus. Die Kalkulation von  $V(x - p^b(k), k)$  liefert

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)] \\ &= \sup_{\alpha B_0 + \beta S_0 = x - p^b(k)} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (\alpha B_T + \beta S_T + k(S_T - 110)^+)) \right], \end{aligned}$$

folglich ergibt sich in diesem Fall

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{3\gamma} \exp(-1.1\gamma \cdot (x - p^b(k))) [2 \exp(-10\gamma k) + 1].$$

## 3. Schritt

Der nutzen-neutralen Kaufpreis  $p^b(k)$  für  $k$  Call-Optionen mit Strike  $K = 110$  berechnet sich aus der Gleichung  $V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$  und lautet

$$p^b(k) = \frac{1}{1.1\gamma} \ln \left( \frac{3}{2 \exp(-10\gamma k) + 1} \right).$$

### Bemerkung 2.3

Sei zum Beispiel  $\gamma = \frac{1}{10}$ , dann beträgt der nutzen-neutralen Kaufpreis für einen Call bzw. für zwei Calls

$$\begin{aligned} p^b(1) &= \frac{10}{1.1} \ln \left( \frac{3}{2 \exp(-1) + 1} \right) \approx 4.97, \\ p^b(2) &= \frac{10}{1.1} \ln \left( \frac{3}{2 \exp(-2) + 1} \right) \approx 7.81. \end{aligned}$$

Auffällig ist, dass der Preis für zwei Call-Optionen nicht dem doppelten Preis von einer

entspricht. Insbesondere gilt die strikte Ungleichung

$$\frac{p^b(2)}{2} < p^b(1),$$

welche sich in der Risikoaversion des Investors begründet. Er will für das zusätzlich eingegangene Risiko, welches der Kauf eines weiteren Calls beinhaltet, in Form einer Reduktion des Stückpreises entschädigt werden. Insbesondere ist die Funktion  $p^b$  in diesem Beispiel strikt konkav.

Auf die explizite Kalkulation der nutzen-neutralen Verkaufspreise mittels der Berechnung von  $V(x + p^s(k), -k)$  wird verzichtet, da über die Gleichung

$$p^b(k) = -p^s(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}$$

die nutzen-neutralen Verkaufspreise direkt aus den nutzen-neutralen Kaufpreisen abgeleitet werden können. Die Gültigkeit dieser Gleichung und weitere interessante Eigenschaften der nutzen-neutralen Preise wollen wir im nächsten Abschnitt beweisen. Unter anderen wird die durch die obige Bemerkung suggerierte Vermutung, dass die Funktion  $p^b$  für jeden europäischen Claim strikt konkav ist, betrachtet.

## 2.3. Eigenschaften der nutzen-neutralen Preise

Im Folgenden sei  $C$  ein beliebiger europäischer Claim mit Endauszahlung  $C_T$  und  $V(z, k) := \sup_{X_T \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)]$  bezeichne den erwarteten Nutzen des Endvermögens bei optimaler Strategiewahl unter der Voraussetzung, dass  $k$  Claims gekauft wurden. Vorerst stellen wir als einzige Voraussetzung an die Funktion  $U$ , dass diese monoton wachsend ist, der Investor also höheres Endkapital bevorzugt. Sei dieser mit einem Startkapital in Höhe von  $x$  ausgestattet, dann erfüllt der nutzen-neutrale Kaufpreis  $p^b$  die Gleichung

$$V(x - p^b(k), k) = V(x, 0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}.$$

Andererseits gilt für den nutzen-neutralen Verkaufspreis  $p^s$

$$V(x + p^s(k), -k) = V(x, 0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R},$$

insbesondere sind die nutzen-neutralen Preise eindeutig. Wir beginnen mit dem bereits erwähnten Bezug zwischen dem Kauf- und Verkaufspreis.

**Theorem 2.4**

*Der nutzen-neutrale Kaufpreis  $p^b$  und der nutzen-neutrale Verkaufspreis  $p^s$  besitzen die Beziehung*

$$-p^b(k) = p^s(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

*Beweis.* Für jedes  $k \in \mathbb{R}$  gilt

$$V(x + p^s(-k), k) = V(x + p^s(-k), -(-k)) \stackrel{n.V.}{=} V(x, 0) \stackrel{n.V.}{=} V(x - p^b(k), k)$$

und die Eindeutigkeit der nutzen-neutralen Preise liefert  $p^s(-k) = -p^b(k)$ . □

Aufgrund des Theorems 2.4 betrachten wir im Weiteren nur die nutzen-neutralen Kaufpreise. Analoge Resultate für die Verkaufspreise können unter Benutzung der Gleichung (2.1) hergeleitet werden. Das nächste Theorem zeigt, dass der nutzen-neutrale Kaufpreis für einen replizierbaren Claims dem Preis des Hedges entspricht.

**Theorem 2.5**

*Sei  $C$  ein replizierbarer, europäischer Claim und bezeichne  $p^{arb}$  den eindeutigen arbitragefreien Preis des Hedges. Bei Kenntnis von  $p^{arb}$  kann der nutzen-neutrale Kaufpreis  $p^b$  direkt angegeben werden. Genauer gilt*

$$p^b(k) = k \cdot p^{arb} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R},$$

*insbesondere ist  $p^b$  eine lineare Funktion.*

*Beweis.* Wir nutzen die Tatsache, dass wir  $X_T \in \mathcal{A}(z)$  umschreiben können in

$$X_T = X_T - z \cdot R_T + z \cdot R_T =: \tilde{X}_T + z \cdot R_T,$$

wobei  $R_T$  den Zeitwert zum Zeitpunkt  $T$  von einer im Zeitpunkt 0 investierten Einheit bezeichnet und somit  $\tilde{X}_T \in \mathcal{A}(0)$  folgt. Dementsprechend kann bei einem zum Anfangskapital  $p^{arb}$  replizierbaren Claim die Auszahlung in  $C_T = \tilde{C}_T + p^{arb} \cdot R_T$  umgeschrieben werden. Wir bemerken, dass aufgrund der Hedgebarkeit des Claims das Endkapital  $\tilde{C}_T$  durch eine Handelsstrategie mit Startkapital 0 erreicht werden kann, also  $\tilde{C}_T \in \mathcal{A}(0)$

gilt. Insgesamt impliziert dies für  $X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))$

$$\begin{aligned} X_T + kC_T &= \tilde{X}_T + (x - p^b(k)) \cdot R_T + k\tilde{C}_T + kp^{arb} \cdot R_T \\ &= (x - p^b(k) + kp^{arb}) \cdot R_T + \underbrace{k\tilde{C}_T + \tilde{X}_T}_{\in \mathcal{A}(0)}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Auszahlung  $X_T + kC_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k) + kp^{arb})$  und

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &:= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)] \\ &= \sup_{X_T + kC_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k) + kp^{arb})} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)] \\ &= \sup_{Y_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k) + kp^{arb})} \mathbb{E}[U(Y_T)] \\ &= V(x - p^b(k) + kp^{arb}, 0). \end{aligned}$$

Neben dieser Gleichung erfüllt der nutzen-neutrale Kaufpreis laut Definition auch  $V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$ . Die Kombination der beiden Gleichungen ergibt insgesamt

$$V(x, 0) = V(x - p^b(k), k) = V(x - p^b(k) + kp^{arb}, 0),$$

welches  $x = x - p^b(k) + kp^{arb}$ , also  $p^b(k) = kp^{arb}$  liefert. □

Bei dem Kauf eines replizierbaren Claims geht der Investor kein Risiko ein, da er mit Hilfe des Hedges die Risikoposition des Claims aus seinem Portfolio eliminieren kann. Insbesondere muss der Investor keine Reduktion des Stückpreises beim Kauf von größeren Mengen fordern, da er durch das Handeln am Basisgütermarkt sein präferiertes Risikoprofil unabhängig von der Anzahl an Claims erreichen kann. Indirekt liefert die Aussage auch, dass für replizierbare Claims die Theorie der nutzen-neutralen Bepreisung konsistent ist mit dem No-Arbitrage Gedanken. Im nächsten Schritt zeigen wir diese Konsistenz auch für beliebige Claims.

### Theorem 2.6

Seien  $C_1$  und  $C_2$  europäische Claims mit Maturity  $T$  und  $C_1(T) \leq C_2(T)$ . Bezeichne  $p_i^b$  den nutzen-neutralen Kaufpreis für den Claim  $C_i$ , dann gilt die Ungleichung  $p_1^b \leq p_2^b$ . Gilt  $\mathbb{P}(C_1(T) < C_2(T)) > 0$ , so ist diese strikt.

*Beweis.* Die Nutzenfunktion des Investors ist monoton wachsend und dies liefert für

$k \in \mathbb{R}$  beliebig

$$V_2(z, k) := \sup_{X_T \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}[U(X_T + kC_2(T))] \geq \sup_{X_T \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}[U(X_T + kC_1(T))] =: V_1(z, k)$$

Mit der Setzung  $z = x - p_1^b(k)$  ergibt die Ungleichung

$$V_2(x - p_1^b(k), k) \geq V_1(x - p_1^b(k), k) \stackrel{n.V.}{=} V_1(x, 0) = V_2(x, 0) \stackrel{n.V.}{=} V_2(x - p_2^b(k), k),$$

welches  $x - p_1^b(k) \geq x - p_2^b(k)$  impliziert. Für  $P(C_1(T) < C_2(T)) > 0$  kann die Rechnung analog mit einer echten Ungleichung geführt werden.  $\square$

### Korollar 2.7

Für jeden europäischen Claim  $C$  gilt

$$p_{sub}^b(k) \leq p^b(k) \leq p_{sup}^b(k)$$

wobei  $p_{sup}^b(k), p_{sub}^b(k)$  die nutzen-neutralen Kaufpreise der Super- bzw. Sub-Replikation für  $k$  Einheiten des Claims bezeichnen.

*Beweis.* Folgt direkt aus Theorem 2.6.  $\square$

Für nicht-replizierbare Claims ergibt sich folglich

$$p_{sub}^b(k) < p^b(k) < p_{sup}^b(k),$$

also kommt auch in diesem Fall der nutzen-neutrale Preis aus der Menge der arbitragefreien Preise. In nächsten Teil des Abschnitts wollen wir uns mit der Krümmung der Funktion  $p^b$  beschäftigen. Für einen replizierbaren Claim wurde bereits mit Theorem 2.5 gezeigt, dass die Funktion  $p^b$  linear ist. Hierfür benötigen wir einzig die Monotonie der Nutzenfunktion. Andererseits haben wir in unserem Beispiel 2.2 für den europäischen Call eine konkave Funktion  $p^b$  erhalten. Zum einen impliziert dies, dass der europäische Call nicht-hedgebar ist, zum anderen stellt sich die Frage, welchen Einfluss die Nutzenfunktion auf den Krümmungsverlauf der Funktion  $p^b$  hat. Die im Beispiel verwendete Nutzenfunktion  $U(z) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma z)$  ist strikt konkav, daher liegt die Vermutung

$$\text{„U konkav} \Rightarrow p^b \text{ konkav“}$$

nahe. Diese werden wir nun beweisen, und bemerken, dass analoge Beziehungen für konvexe Nutzenfunktionen gefolgert werden können. Ab jetzt besitze die Nutzenfunk-

tion  $U$  neben der strikten Monotonie auch die Eigenschaft der Konkavität.

### Theorem 2.8

Seien  $C_1$  und  $C_2$  europäische Claims mit Maturity  $T$  und sei  $\lambda \in [0, 1]$ . Bezeichne  $p_i^b$  den nutzen-neutralen Kaufpreis für den Claim  $C_i$  und  $p_\lambda^b$  den nutzen-neutralen Kaufpreis für den kombinierten Claim  $C_\lambda := \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2$ . Dann gilt

$$p_\lambda^b \geq \lambda p_1^b + (1 - \lambda)p_2^b. \quad (2.2)$$

*Beweis.* Für  $i = 1, 2, \lambda$  und  $k \in \mathbb{R}$  bezeichne  $X_T^i(k)$  das optimale Endvermögen des Handels am Basisfinanzgütermarkt in dem Sinne, dass

$$V_i(x - p_i^b(k), k) := \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p_i^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC_i(T))] = \mathbb{E}[U(X_T^i(k) + kC_i(T))]$$

gilt. Dann folgt

$$\lambda \cdot X_T^1(k) + (1 - \lambda) \cdot X_T^2(k) \in \widehat{\mathcal{A}} := \mathcal{A}(x - \lambda p_1^b(k) - (1 - \lambda)p_2^b(k))$$

sowie mit der Konkavität von  $U$  (verwendet in  $(\star)$ ) und der Definition von  $X_T^i(k)$  (verwendet in  $(\circ)$ )

$$\begin{aligned} & V_\lambda(x - \lambda p_1^b(k) - (1 - \lambda)p_2^b(k), k) \\ &:= \sup_{X_T \in \widehat{\mathcal{A}}} \mathbb{E}[U(X_T + k(\lambda \cdot C_1(T) + (1 - \lambda) \cdot C_2(T)))] \\ &\geq \mathbb{E}[U(\lambda \cdot X_T^1(k) + (1 - \lambda) \cdot X_T^2(k) + k(\lambda \cdot C_1(T) + (1 - \lambda) \cdot C_2(T)))] \\ &= \mathbb{E}[U(\lambda \cdot (X_T^1(k) + kC_1(T)) + (1 - \lambda) \cdot (X_T^2(k) + kC_2(T)))] \\ &\stackrel{(\star)}{\geq} \mathbb{E}[\lambda \cdot U(X_T^1(k) + kC_1(T)) + (1 - \lambda) \cdot U(X_T^2(k) + kC_2(T))] \\ &= \lambda \cdot \mathbb{E}[U(X_T^1(k) + kC_1(T))] + (1 - \lambda) \cdot \mathbb{E}[U(X_T^2(k) + kC_2(T))] \\ &\stackrel{(\circ)}{=} \lambda \cdot \underbrace{V_1(x - p_1^b(k), k)}_{=V_1(x,0)} + (1 - \lambda) \cdot \underbrace{V_2(x - p_2^b(k), k)}_{=V_2(x,0)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mit der Gleichheit  $V_1(x, 0) = V_2(x, 0) = V_\lambda(x, 0)$  ergibt (2.3)

$$V_\lambda(x - \lambda p_1^b(k) - (1 - \lambda)p_2^b(k), k) \geq V_\lambda(x, 0) \stackrel{n.V.}{=} V_\lambda(x - p_\lambda^b(k), k)$$

und schlussendlich erhalten wir  $x - \lambda p_1^b(k) - (1 - \lambda)p_2^b(k) \geq x - p_\lambda^b(k)$ , welches die Behauptung liefert.  $\square$

**Korollar 2.9**

Sei  $C$  ein nicht-replizierbarer, europäischer Claim. Dann ist  $p^b$  eine in  $k$  strikt konkave Funktion. Genauer gilt für  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  mit  $k_1 \neq k_2$  und  $\lambda \in (0, 1)$

$$p^b(\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2) > \lambda p^b(k_1) + (1 - \lambda)p^b(k_2).$$

*Beweis.* Der Beweis basiert im Wesentlichen auf Theorem 2.8. Mit der Setzung von  $C_1 = k_1 \cdot C$  und  $C_2 = k_2 \cdot C$  folgt  $C_\lambda := \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2 = (\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2)C$  und die Ungleichung

$$p_\lambda^b \geq \lambda p_1^b + (1 - \lambda)p_2^b$$

aus (2.2) wird für  $k = 1$  zu

$$p^b(\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2) \geq \lambda p^b(k_1) + (1 - \lambda)p^b(k_2).$$

Die Striktheit ergibt sich aus der Annahme eines nicht-replizierbaren Claims, denn diese impliziert  $X_T^1(1) + C_1(T) \neq X_T^2(1) + C_2(T)$ , da ansonsten

$$X_T^1(1) - X_T^2(1) = C_2(T) - C_1(T) = (k_2 - k_1)C$$

gelten würde und  $C$  hedgebar wäre. Somit liefert in den Umformungen (2.3) die strikte Konkavität der Nutzenfunktion  $U$  bei  $(\star)$  eine strikte Ungleichung.  $\square$

Kombinieren wir das vorige Korollar mit dem Theorem 2.5, so folgt, dass in beiden Aussagen auch die Rückrichtung gilt. Einerseits haben wir also für konkave Nutzenfunktionen gezeigt, dass der nutzen-neutrale Kaufpreis für replizierbare Claims linear und für nicht-replizierbare Claims strikt konkav ist. Andererseits kann aus dem Form des nutzen-neutralen Kaufpreises aber auch eine Aussage über die Hedgebarkeit des Claims abgeleitet werden. Eine zusätzliche Erkenntnis ist, dass im Falle eines nicht-replizierbaren Claims der Investor für den Kauf von zwei Stück nicht gewillt ist den doppelten Preis zu zahlen. Dieses Phänomen begründet sich in der Risikoaversion des Investors, welche durch die Nutzenfunktion modelliert wird. Eine konkave Nutzenfunktion steht für einen risikoscheuen Investor und der Kauf eines zweiten Claims bedeutet für ihn ein zusätzlich eingegangenes Risiko, für welches er im Form einer Reduktion des Stückpreises entschädigt werden möchte. Abschließend beschäftigen wir uns mit der Frage, was der Investor vom Angebot eines Claimsbündels hält, in welchem sowohl replizierbare als auch nicht-replizierbare Claims zu finden sind.

**Theorem 2.10**

Seien  $C_1$  und  $C_2$  europäische Claims mit Maturity  $T$ , wobei  $C_1$  replizierbar sei. Sei  $C$  das Angebot, welches aus einer Kombination der Claims  $C_1$  und  $C_2$  besteht. Bezeichne  $p_i^b$  den nutzen-neutralen Kaufpreis für den Claim  $C_i$  und  $p^b$  den nutzen-neutralen Kaufpreis für den Claim  $C = C_1 + C_2$ . Dann gilt

$$p^b(k) = p_1^b(k) + p_2^b(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R},$$

das heißt, der Preis für die Kombination entspricht genau der Summe der beiden einzelnen Preise.

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass  $p_1^b(k) = k \cdot p_1^{arb}$  gilt, da der Claim  $C_1$  replizierbar ist. Insbesondere kann die Auszahlung  $kC_1(T)$  durch Handel am Basisgüterfinanzmarkt mit Startkapital  $p_1^b(k)$  generiert werden und damit folgt

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= V_C(x - p^b(k), k) \\ &= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC(T))] \\ &= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC_1(T) + kC_2(T))] \\ &= \sup_{Y_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k) + p_1^b(k))} \mathbb{E}[U(Y_T + kC_2(T))] \\ &= V_{C_2}(x - p^b(k) + p_1^b(k), k). \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber nach Definition auch

$$V(x, 0) = V_{C_2}(x - p_2^b(k), k)$$

und die Eindeutigkeit des nutzen-neutralen Kaufpreises liefert  $p^b(k) = p_1^b(k) + p_2^b(k)$ .  $\square$

Natürlich kann die Aussage auch für Kombinationen  $C$ , die eine beliebige Anzahl  $k_1$  von Claims  $C_1$  und  $k_2$  von Claims  $C_2$  enthalten, gezeigt werden. Aber für die Aussage ist das Vorhandensein eines hedgebaren Claims unerlässlich. Die Begründung aus Investorensicht liegt an der Tatsache, dass er indifferent ist zwischen dem Kauf von  $C$  und dem Kauf von  $C_2$  verbunden mit der Anlage in den Hedge von  $C_1$ . Für zwei nicht-hedgebare Claims gilt dies aber gerade nicht, denn die Kombination  $C$  würde ein höheres Risiko für den Investor bedeuten. Dafür möchte er entschädigt werden, das heißt, in diesem Fall gilt

$$p^b(k) \leq p_1^b(k) + p_2^b(k).$$



## 3. Modellrahmen

Nach der Einführung in die nutzen-neutrale Bepreisung kommen wir zum Hauptteil dieser Masterarbeit. Unsere Ziel ist die exakte Berechnung von nutzen-neutralen Preisen in stetigen Modellen, wobei wir einige Einschränkungen vornehmen. Zum einen wurde im Abschnitt über die Eigenschaften der nutzen-neutralen Preise die Gültigkeit der Gleichung

$$p^b(k) = -p^s(-k)$$

für jeden Claim und jedes  $k \in \mathbb{R}$  nachgewiesen (siehe Theorem 2.4). Somit können die Verkaufspreise bei Kenntnis der Kaufpreise leicht berechnet werden und aus diesem Grund begnügen wir uns mit der Analyse von Letzterem. Zum anderen ist in vollständigen Märkten der arbitragefreie Preis eines Claims eindeutig festgelegt und mit Kenntnis des äquivalenten Martingalmaßes bzw. des Hedges einfach zu berechnen. Insbesondere muss der nutzen-neutrale Kaufpreis diesem eindeutigen arbitragefreien Preis entsprechen (siehe Theorem 2.5). Deshalb verzichten wir auf die Betrachtung von vollständigen Märkten. Im Speziellen studieren wir in dieser Masterarbeit

### 1. HARA-Nutzenfunktionen

- Exponentielle Nutzenfunktion
- Potenznutzenfunktion

### 2. Stetige unvollständige Märkte

- Märkte mit nicht handelbarem Gut (*non-traded assets problem, NTAM*)
- Märkte mit stochastischer Volatilität (*stochastic volatility model, SVM*).

## 3.1. Nutzenfunktionen

In der Literatur existieren verschiedene Varianten für die Definition einer Nutzenfunktion. Für unsere Zwecke verzichten auf die Forderung, dass eine Nutzenfunktion nur auf

der positiven reellen Achse definiert sein soll und die Ableitung die Inada-Bedingungen erfüllt.

**Definition 3.1** (Nutzenfunktion)

Eine Funktion  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$  wird als Nutzenfunktion bezeichnet, wenn sie monoton wachsend, strikt konkav sowie zweimal stetig differenzierbar ist.

Eine Nutzenfunktion besitzt folglich einen abnehmenden Grenznutzen, dies bedeutet, je höher das jetzige Level des Investors ist, desto geringer ist sein Nutzenzuwachs, welcher durch eine zusätzliche Einheit, zum Beispiel 1 € mehr, entsteht (erstes Gossensches Gesetz). Bei diesem Kurvenverlauf wird von einem risikoaversen (*risk-averse*) Investor gesprochen. Die Berechtigung dieser Definitionswahl liegt in der Tatsache, dass von einem rationalen Investor ausgegangen wird und bei linearen (*risk-neutral*) oder sogar konvexen (*risk-seeking*) Nutzenfunktionen irrationales Verhalten auftreten kann. Ein bekanntes Beispiel ist das Sankt-Petersburg-Paradoxon mit der Identität als lineare Nutzenfunktion.

### 3.1.1. Arrow-Pratt-Maße

Die Krümmung der Nutzenfunktion spiegelt den Grad der Risikoaversion des Investors wider und zur Untersuchung dieses Grades empfiehlt sich die Einführung der Arrow-Pratt-Maße.

**Definition 3.2** (Arrow-Pratt-Maße)

Sei  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Nutzenfunktion. Das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion ist definiert durch

$$ARA(z) := -\frac{U''(z)}{U'(z)}$$

und das Arrow-Pratt-Maß der relativen Risikoaversion durch

$$RRA(z) := z \cdot ARA(z) = -z \cdot \frac{U''(z)}{U'(z)}.$$

Die Arrow-Pratt-Maße besitzen zwei nützliche Eigenschaften, die wir kurz erläutern wollen.

- (1) Bei monoton wachsenden Nutzenfunktionen ist die erste Ableitung stets positiv, deswegen bestimmt das Vorzeichen der zweiten Ableitung das Vorzeichen der abso-

luten Risikoaversion. Insbesondere erhalten wir ein geeignetes Kriterium, anhand dessen eine Aussage über die Risikoneigung des Investors getätigt werden kann. Die Bezüge sind in der Tabelle 3.1 dargestellt.

| $U''(z)$     | $ARA(z)$     | Krümmung der Nutzenfunktion | Risikoneigung des Investors |
|--------------|--------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $U''(z) < 0$ | $ARA(z) > 0$ | konkav                      | risikoavers                 |
| $U''(z) = 0$ | $ARA(z) = 0$ | linear                      | risikoneutral               |
| $U''(z) > 0$ | $ARA(z) < 0$ | konvex                      | risikofreudig               |

Tabelle 3.1.: Eigenschaften der absoluten Risikoaversion

Im Falle unseres risikoaversen Investors ist die absolute Risikoaversion positiv und je größer dieser Wert ist, desto risikoaverser ist er.

- (2) Von besonderer Nützlichkeit erweisen sich die Arrow-Pratt-Maße zur Analyse der Veränderung des Anlageverhaltens eines Investors bei Variation des Startkapitals. Gegeben sei ein Investor mit Nutzenfunktion  $U$  und Startvermögen  $x$ , welcher in einem Basisfinanzgütermarkt, bestehend aus einer Aktie und einem risikolosen Geldmarktkonto, agieren kann. Die Arrow-Pratt-Maße geben in diesem Modell an, wie sich die Investitionsentscheidung verändert, wenn das Startvermögen  $x$  des Investors erhöht wird, veranschaulicht in der Tabelle 3.2.

|                       | the <i>amount</i> of money invested in the risky asset | the <i>percentage</i> of wealth invested in the risky asset |
|-----------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| increasing ARA (IARA) | decreases                                              |                                                             |
| constant ARA (CARA)   | is constant                                            |                                                             |
| decreasing ARA (DARA) | increases                                              |                                                             |
| increasing RRA (IRRA) |                                                        | decreases                                                   |
| constant RRA (CRRA)   |                                                        | is constant                                                 |
| decreasing RRA (DRRA) |                                                        | increases                                                   |

Tabelle 3.2.: Veränderung der Anlageentscheidung [Quelle: Branger [3]]

Für die Veränderung der Anlageentscheidung bei variierendem Startkapital  $x$  sind also nicht die Größe oder die Vorzeichen der Arrow-Pratt-Maße relevant, sondern ihr Verlauf in Abhängigkeit von  $x$ . Diese Eigenschaft des Anlageverhaltens kann genutzt werden, um in den Optimierungsproblemen die Dimension der Variablen zu reduzieren. Zum Beispiel ist für die Optimierung des Endvermögens bei einer CARA- oder CRRA-Nutzenfunktion der Kursverlauf der risikobehafteten Aktie irrelevant, denn die Kenntnis des heutigen Aktienkurses bestimmt den absoluten

Anteil (bei CARA) bzw. den relativen Anteil (bei CRRA) des Aktienvermögens am gesamten Portfolio für jeden Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ .

### 3.1.2. HARA-Nutzenfunktionen

Wir werden ausschließlich Nutzenfunktionen mit hyperbolischer absoluter Risikoaversion (HARA) betrachten. Eine Nutzenfunktion  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  zählt zur Klasse der HARA-Funktionen, wenn die absolute Risikoaversion von der Form

$$\begin{aligned} ARA : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \frac{1}{A + Bz} \end{aligned}$$

mit  $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $A \in \mathbb{R}$  ist. In dieser Masterarbeit studieren wir zwei bekannte Nutzenfunktionen, wobei die erste bereits im einführenden Beispiel Verwendung gefunden hat.

#### Beispiel 3.3 (Exponentielle Nutzenfunktion)

Die exponentielle Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma z) \end{aligned}$$

mit  $\gamma > 0$ . Für die Arrow-Pratt-Maße ergibt sich

$$ARA(z) = \gamma \text{ und } RRA(z) = z \cdot \gamma.$$

#### Beispiel 3.4 (Potenznutzenfunktion)

Die Potenznutzenfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} U : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \frac{z^{1-R}}{1-R} \end{aligned}$$

mit  $R > 0, R \neq 1$ . Für die Arrow-Pratt-Maße ergibt sich

$$ARA(z) = \frac{R}{z} \text{ und } RRA(z) = R.$$

#### Bemerkung 3.5

Die exponentielle Nutzenfunktion ist ein Beispiel für eine CARA-Funktion, wohingegen der Potenznutzen eine CRRA-Funktion darstellt. Ein weiterer wesentlicher Unterschied ist der Definitionsbereich, während zum einen bei der exponentiellen Funktion die komplette reelle Achse zur Verfügung steht, ist zum anderen die Potenznutzenfunktion nur für positive reelle Zahlen definiert. Im Hinblick auf die Anwendbarkeit beider Funktionen bedeutet dies, dass wir die Theorie hauptsächlich für positives Startkapital  $x > 0$  herleiten werden. Außerdem werden wir Restriktionen an die Claims stellen, gehen darauf aber später genauer ein.

## 3.2. Stetige unvollständige Märkte

In dieser Arbeit werden mit dem *non-traded assets model* (NTAM) und dem *stochastic volatility model* (SVM) zwei Modelle betrachtet, deren gemeinsames Fundament durch das folgende Grundmodell beschrieben werden kann.

### Modell 3.6 (Basismodell)

Der Basisgüterfinanzmarkt sei gegeben durch einen filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ , ein Geldmarktkonto mit stochastischer Zinsrate  $r$  und zwei Prozessen  $P$  und  $Y$  mit stochastischen Differentialgleichungen (kurz SDE)

$$\begin{aligned} dP_t &= P_t [\mu_t dt + \sigma_t dB_t] \\ &= P_t [r_t dt + \sigma_t (dB_t + \lambda_t dt)] \quad \text{mit } \lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

sowie

$$dY_t = b_t dt + a_t dW_t. \quad (3.2)$$

Hierbei seien  $r, \mu, \sigma, b$  und  $a$  progressiv messbare Prozesse, welche alle Integrabilitätsbedingungen erfüllen, die die Existenz einer eindeutigen Lösung für (3.1) und (3.2) garantieren. Zudem seien  $B$  und  $W$  Brownsche Bewegungen mit Korrelationsprozess  $\rho$ , welche die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  erzeugen. Es ist komfortabel mit dem Satz von Lévy die Brownsche Bewegung  $W$  umzuschreiben in  $dW_t = \rho_t dB_t + \rho_t^\perp dB_t^\perp$  mit unabhängigen Brownschen Bewegungen  $B$  und  $B^\perp$  sowie  $\rho_t^\perp = \sqrt{1 - \rho_t^2}$ . Die SDE für  $Y$  lässt sich dann umformulieren zu

$$dY_t = b_t dt + a_t (\rho_t dB_t + \rho_t^\perp dB_t^\perp).$$

Eine zentrale Rolle zur Bewertung von Optionen und Aktien kommt den äquivalenten Martingalmaßen zu. Die Menge dieser Maße im obigen Modell sei mit  $\mathcal{Q}$  bezeichnet. Im Hinblick auf die beiden Modelle NTAM sowie SVM<sup>1</sup>, in denen  $Y$  jeweils keine handelbare Aktie darstellt, genügt es, wenn der Prozess  $P$  die Martingaleigenschaft erfüllt. Jedes Maß  $Q^\chi \in \mathcal{Q}$  wird charakterisiert durch den Dichtequotientenprozess

$$\left( \frac{dQ^\chi}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^\chi \right)_{0 \leq t \leq T}$$

mit

$$\begin{aligned} Z_t^\chi &= \mathcal{E} \left( - \int_0^t \lambda_u dB_u - \int_0^t \chi_u B_u^\perp \right)_t \\ &= \exp \left( - \int_0^t \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_u^2 du - \int_0^t \chi_u dB_u^\perp - \frac{1}{2} \int_0^t \chi_u^2 du \right) \end{aligned}$$

und einem previsiblen Prozess  $\chi$ , der  $\mathbb{E}[Z_T^\chi] = 1$  garantiert. Insbesondere ist jedes Martingalmaß durch den Prozess  $\chi$  eindeutig definiert, und wir nutzen die Schreibweise  $Q^\chi$  um diese Abhängigkeit zu simulieren. Die Wahl des Prozesses  $\chi$  ist insofern beliebig, dass nur die Restriktionen  $\int_0^T \chi_u^2 du < \infty$  und  $\mathbb{E}[Z_T^\chi] = 1$  erfüllt sein müssen. Insbesondere existieren für alle Fälle, in denen der Korrelationsprozess  $\rho$  nicht konstant gleich 1 (bzw.  $-1$ ) ist, unendliche viele äquivalente Martingalmaße und das Modell ist unvollständig. Für  $\chi \equiv 0$  erhalten wir das minimale Martingalmaß von Föllmer und Schweizer<sup>2</sup> [7,8], und um dessen Zulässigkeit zu garantieren, fordern wir  $\mathbb{E}[Z_T^0] = 1$ . Eine äquivalente Darstellung der Menge  $\mathcal{Q}$  kann mittels den Dichten der Zustandspreise („state-price densities“) vorgenommen werden. Zu jedem äquivalenten Martingalmaß  $Q^\chi$  definieren wir die zugehörige Dichte mittels

$$\zeta_t^\chi = \frac{1}{N_t} \frac{dQ^\chi}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( - \int_0^t r_u du \right) \cdot Z_t^\chi,$$

wobei  $N$  das gewählte Numéraire, in unserem Modell das Geldmarktkonto, bezeichnet. Insbesondere gilt für den arbitragefreien Preis eines europäischen Claims  $C$  bei Wahl des Martingalmaßes  $Q^\chi$  zur Bewertung

$$p^\chi(C) = \mathbb{E}^{Q^\chi} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_u du \right) \cdot C_T \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_u du \right) \cdot Z_T^\chi \cdot C_T \right] = \mathbb{E}[\zeta_T^\chi C_T].$$

Unter Verwendung der Dichten der Zustandspreise können die arbitragefreien Preise des

<sup>1</sup>Die Berechnung von  $\mathcal{Q}$  im SVM kann zum Beispiel in [9, Proposition 6.1] nachvollzogen werden.

<sup>2</sup>Eine kurze Einführung in diese Thematik befindet sich im Anhang (A.2).

Claims folglich als Erwartungswert unter dem subjektiven Maß  $\mathbb{P}$  kalkuliert werden, und demzufolge stellen die Dichten der Zustandspreise das stetige Analogon zu den Arrow-Debreu-Preisen bei diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen dar. Nachdem die Einführung aller relevanten Faktoren des Basismodells vollendet ist, kommen wir zur Vorstellung der zwei wesentlichen unvollständigen Märkte.

### 3.2.1. Non-traded assets model

Die Besonderheit dieses Modells liegt in der Tatsache, dass es dem Investor entweder nicht gestattet oder unmöglich ist, ein bestimmtes Underlying zu handeln. Wir nehmen an, dass dieses Underlying durch den Prozess  $Y$  repräsentiert wird, und dessen Wert beobachtbar ist. Ein Investor, der eine europäische Option mit Underlying  $Y$  angeboten bekommt, kann diese nicht durch Investitionen in das Underlying hedgen. Insbesondere stellt sich das Problem, wie mit dem Risiko dieser Option am besten zu verfahren ist. Ein geeigneter Ansatz könnte sein, Ausschau nach einer mit  $Y$  stark korrelierten handelbaren Aktie  $P$  zu halten, um anhand deren Entwicklung das Risiko der Option abschätzen und managen zu können. Ein erstes Beispiel sind Preise von verschiedenen Rohölmarken. Hierbei könnte  $P$  den Preisprozess des global führenden Benchmark „*Brent Crude*“ modellieren und  $Y$  den eines „*Atlantic basin crude oils*“. Als zweites Beispiel wäre ein Claims in Form einer Basket-Option denkbar, denn in diesem Fall können (aufgrund von Transaktionskosten) unmöglich alle Komponenten des Underlyings gehandelt werden. Der Prozess  $P$  könnte hierbei einen Index symbolisieren, dessen Wertentwicklung mit der des Underlyings  $Y$  stark korreliert. Eine dritte Möglichkeit sind Optionen auf Belegschaftsaktien, die den Arbeitnehmern als zusätzliche Vergütung gewährt werden. Diese Optionen sind europäischer Art, sofern sie mit einer Sperrfrist, innerhalb derer eine Veräußerung untersagt ist, versehen sind. Außerdem wird den Arbeitnehmern aufgrund von Insider Informationen der Handel der Unternehmensaktie, welche für die Konstruktion eines Hedges benötigt wird, verboten. Aufgrund dieser Tatsache besitzt die Unternehmensaktie für den Arbeitnehmer den Status eines nicht handelbaren Gutes.

#### Modell 3.7 (Non-traded assets model)

Betrachten wir das Basismodell (3.6), so erhalten wir das NTAM durch Wahl von  $a_t = \eta_t Y_t$  und  $b_t = (r_t + \eta_t \xi_t) Y_t$ , wobei  $\xi$  die Sharpe-Ratio des nicht handelbaren Gutes  $Y$  sei. Für die SDEs ergibt sich

$$dP_t = P_t [\mu_t dt + \sigma_t dB_t] = P_t [r_t dt + \sigma_t (dB_t + \lambda_t dt)],$$

$$dY_t = Y_t [(r_t + \eta_t \xi_t)dt + \eta_t dW_t] = Y_t [(r_t + \eta_t \xi_t)dt + \eta_t(\rho_t dB_t + \rho_t^\perp dB_t^\perp)] ,$$

wobei die progressiv messbaren Prozesse  $r, \sigma$  und  $\lambda$  keine Abhängigkeit von  $Y$  besitzen.

Demnach sind im NTAM  $P$  und  $Y$  Diffusionsprozesse. In den Anwendungen wird der Spezialfall mit konstanten Parametern von besonderer Relevanz sein, denn dieses Modell ist eines der wenigen, wo explizite Kalkulationen der nutzen-neutralen Preisen möglich sind.

**Modell 3.8** (Non-traded asset model, konstante Parameter)

Sind im obigen Markt die Prozesse  $r, \sigma, \lambda, \eta, \xi$  und  $\rho$  konstant mit  $\rho \in [-1, 1]$ , so ergibt sich das stochastische System

$$\begin{aligned} dP_t &= P_t [\mu dt + \sigma dB_t] &= P_t [r dt + \sigma(dB_t + \lambda dt)] , \\ dY_t &= Y_t [(r + \eta \xi)dt + \eta dW_t] = Y_t [(r + \eta \xi)dt + \eta(\rho dB_t + \rho^\perp dB_t^\perp)] , \end{aligned}$$

und deren Lösungen sind gegeben durch die Exponentialmartingale

$$P_t = P_0 \exp \left( (r + \sigma \lambda)t + \sigma B_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right)$$

sowie

$$Y_t = Y_0 \exp \left( (r + \eta \xi)t + \eta(\rho B_t + \rho^\perp B_t^\perp) - \frac{1}{2} \eta^2 t \right) .$$

### 3.2.2. Stochastic volatility model

Bei diesem Modell nehmen wir an, dass  $P$  den Kursverlauf einer Aktie repräsentiert, deren Volatilität vom Prozess  $Y$  abhängt. Der Prozess  $Y$  modelliert demzufolge die exogene Unsicherheit. In diesem Markt ist die Bepreisung von Claims  $C = C(P)$  interessant, aber auch Claims der Art  $C = C(Y)$  können betrachtet werden.

**Modell 3.9** (Stochastic volatility model)

Die Prozesse  $\sigma, \mu, a$  und  $b$  im Basismodell (3.6) seien gegeben durch die Abhängigkeit  $\sigma_t = \sigma(Y_t), \mu_t = \mu(Y_t), a_t = a(Y_t)$  sowie  $b_t = b(Y_t)$ . Zudem sei die Zinsrate  $r$  deterministisch, infolgedessen erhalten wir das SVM

$$\begin{aligned} dP_t &= P_t [\mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t] = P_t [r_t dt + \sigma(Y_t)(dB_t + \lambda(Y_t)dt)] \\ dY_t &= b(Y_t)dt + a(Y_t)dW_t &= b(Y_t)dt + a(Y_t)(\rho_t dB_t + \rho_t^\perp dB_t^\perp). \end{aligned}$$



Bekannte Beispiele für Modelle dieser Art sind das SVM von Heston [17] und das Stein-Stein-Modell [34], wobei wir in beiden Fällen von der Betrachtung diskontinuierlicher Prozesse ausgehen. Dies entspricht einer Setzung von  $r = 0$ .

**Beispiel 3.10** (Heston Modell)

Das SVM

$$\begin{aligned} dP_t &= P_t \left[ \mu(Y_t)dt + \sqrt{Y_t}dB_t \right] = P_t \sqrt{Y_t} [\lambda(Y_t)dt + dB_t] \\ dY_t &= \kappa(m - Y_t)dt + \delta\sqrt{Y_t}dW_t = \kappa(m - Y_t)dt + \delta\sqrt{Y_t}(\rho dB_t + \rho^\perp dB_t^\perp) \end{aligned}$$

mit  $\kappa, m, \delta > 0$  und  $\rho \in [-1, 1]$  heißt Heston Modell. In diesem Modell ist die stochastische Volatilität gegeben durch  $\sqrt{Y}$ , wobei  $Y$  ein Cox-Ingersoll-Ross-Prozess (CIR-Prozess) ist. Dieser CIR-Prozess ist strikt positiv, wenn die Ungleichung  $2\kappa m > \delta^2$  erfüllt ist. Der Parameter  $\kappa$  wird als Rückkehrrate zum Mittelwert („rate of mean-reversion“) bezeichnet,  $m$  ist der Langzeitmittelwert („long-run average“) und  $\delta$  die Volatilität der Volatilität („vol of vol“).

**Beispiel 3.11** (Version des Heston Modells)

Wird im Heston Modell  $\mu(Y_t) = \mu \cdot Y_t$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  gewählt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} dP_t &= P_t \left[ \mu Y_t dt + \sqrt{Y_t} dB_t \right] = P_t \sqrt{Y_t} \left[ \mu \sqrt{Y_t} dt + dB_t \right] \\ dY_t &= \kappa(m - Y_t)dt + \delta\sqrt{Y_t}dW_t = \kappa(m - Y_t)dt + \delta\sqrt{Y_t}(\rho dB_t + \rho^\perp dB_t^\perp). \end{aligned}$$

Setzen wir  $\tilde{m} = m - \frac{\delta^2}{4\kappa}$ , so liefert die Itô-Formel, dass  $\sqrt{Y}$  die SDE

$$d\sqrt{Y_t} = \frac{\kappa}{2} \left( \tilde{m} \frac{1}{\sqrt{Y_t}} - \sqrt{Y_t} \right) dt + \frac{\delta}{2} dW_t$$

erfüllt.

**Beispiel 3.12** (Stein-Stein Modell)

Das SVM

$$\begin{aligned} dP_t &= P_t [\mu(Y_t)dt + Y_t dB_t] = P_t Y_t [\lambda(Y_t)dt + dB_t] \\ dY_t &= \kappa(m - Y_t)dt + \delta dW_t = \kappa(m - Y_t)dt + \delta(\rho dB_t + \rho^\perp dB_t^\perp) \end{aligned}$$

mit  $\kappa, m, \delta > 0$  und  $\rho \in [-1, 1]$  heißt Stein-Stein Modell. In diesem Modell ist die stochastische Volatilität gegeben durch den Prozess  $Y$ , welcher einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess darstellt.

### 3.3. Problemstellung

In den vorigen Abschnitten wurden die Nutzenfunktionen und die unvollständigen Märkte vorgestellt, welche in dieser Masterarbeit betrachtet werden. Im Bezug auf das Auszahlungsprofil des angebotenen Claims haben wir bisher keine Restriktionen eingeführt. Nun soll aber gewährleistet sein, dass die Kalkulation der nutzen-neutralen Preisen endliche Ergebnisse liefert. Dies garantieren die Forderungen von Henderson in [12, Assumption 2.1.].

#### Annahme 3.13

Sei  $C_T$  die Endauszahlung des angebotenen Claims  $C$  und  $k$  deren Anzahl. Alle in dieser Arbeit betrachteten Paare  $(C, k)$  können einer der beiden folgenden Gruppen zugeordnet werden:

- (i) Ist  $a \leq C_T \leq b$  für  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ , dann kann  $k \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt werden.
- (ii) Ist  $a \leq C_T$  für  $a \in \mathbb{R}$  und  $C_T$  nach oben unbeschränkt, dann muss  $k$  positiv sein.

Mit dieser Annahme ist sichergestellt, dass die optimalen Endvermögen  $V(x, 0)$  und  $V(x - p^b(k), k)$  und somit die nutzen-neutralen Kaufpreise endlich sind. Des Weiteren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a = 0$  setzen. Die Begründung liefert das Theorem 2.10, welches besagt, dass der nutzen-neutrale Kaufpreis eines Claims, der eine Linearkombination eines hedgebaren Claims und eines beliebigen Claims ist, durch die Linearkombination der Preise der beiden Claims gegeben ist. Deshalb können wir für einen Claim mit  $C_T \geq a$  die nutzen-neutralen Preise für  $\tilde{C} := C - a$  berechnen und erhalten darüber die für  $C$ . Ein Beispiel für einen Claim, der die obigen Annahmen nicht erfüllt, ist die short Position in einem Call mit Underlying  $Y$  ( $C = (Y_T - K)^+, k = -1$ ). Aufgrund des Aktienpreisesrisikos, dessen der Halter der short Position uneingeschränkt ausgesetzt ist, gilt  $\mathbb{P}(X_T - (Y_T - K)^+ < 0) > 0$  für jede Strategie  $X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(-1))$ . Bei der Potenznutzenfunktion, welche wir nur für die positive reelle Achse definiert haben, impliziert die kanonische Fortsetzung

$$U(z) = \begin{cases} \frac{z^{1-R}}{1-R} & z \geq 0 \\ -\infty & z < 0 \end{cases}$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  direkt

$$V(x - p^b(-1), -1) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(-1))} \mathbb{E}[U(X_T - (Y_T - K)^+)] = -\infty.$$

Dieses Problem tritt aber für viele Nutzenfunktionen auf, insbesondere ist auch für den Fall einer exponentiellen Nutzenfunktion der nutzen-neutrale Kaufpreis des short Calls nicht endlich, wie wir später sehen werden.

Neben der Endlichkeit der nutzen-neutralen Kaufpreise hat die obige Annahme einen weiteren Vorteil, denn bei positivem Startkapital  $x > 0$  kann von einem fast sicher positiven Endvermögen ausgegangen werden. Insbesondere ist die Potenznutzenfunktion, welche wir nur für die positive reelle Achse definiert haben, nutzbar. Die Zusammenführung aller Modellteile und Restriktionen liefert die zentrale Problemstellung dieser Arbeit.

### Problemstellung

*Ein Investor mit Anfangsvermögen  $x > 0$  möchte in einem stetigen unvollständigen Markt (NTAM oder SVM) mit Zeithorizont  $[0, T]$  interagieren. Seine Präferenzen (seine Risikoaversion) werden durch eine HARA-Nutzenfunktion modelliert. Zudem wird dem Investor das Angebot gemacht, im heutigen Zeitpunkt  $k$  Stück eines europäischen Claims  $C$  mit Maturity  $T$  zu kaufen. Für die Endauszahlung gilt  $C_T \geq 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Hierbei können für die Abhängigkeit des Claims drei verschiedene Fälle auftreten:*

1.  $C = C(P)$ ,
2.  $C = C(Y)$ ,
3.  $C = C(P, Y)$ .

*Wir interessieren uns für die nutzen-neutralen Kaufpreise des Claims  $C$ , das heißt, für jedes  $k \in \mathbb{R}$  ist die Lösung  $p^b(k)$  der Gleichung*

$$V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$$

*gesucht. Die Berechnung erfolgt in drei Schritten.*

#### 1. Schritt (Mertons Portfolioprobblem)

Gegeben ein Anfangskapital  $x > 0$  und eine Nutzenfunktion  $U$  besteht für einen Investor das Problem, eine zulässige Portfoliostrategie zu finden, die den erwarteten Nutzen seines Endvermögens nach einer Zeit  $T$  maximiert. Das Optimierungsproblem, welches zu lösen ist, stellt sich dar als

$$V(x, 0) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(X_T)].$$

Der Name dieses Problem geht zurück auf Robert C. Merton. Im Jahre 1969 hat er

die nutzenbasierte Optimierung mit Konsum in dem Paper „*Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case*“ [26] formuliert und gelöst. Eine weitere Analyse veröffentlichte er zwei Jahre später mit „*Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*“ [27].

## 2. Schritt (Portfoliooptimierung mit Claim)

Gegeben ein Anfangskapital  $x > 0$  und eine Nutzenfunktion  $U$  besteht für einen Investor beim Kauf von  $k$  Stück des Claims  $C$  zum Gesamtpreis von  $p^b(k)$  das Problem, eine zulässige Portfoliostrategie zu finden, die den erwarteten Nutzen seines Endvermögens nach einer Zeit  $T$  maximiert. Das Optimierungsproblem, welches zu lösen ist, stellt sich dar als

$$V(x - p^b(k), k) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)].$$

## 3. Schritt (Berechnung des nutzen-neutralen Kaufpreises)

Durch Auflösen der Gleichung

$$V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$$

nach  $p^b(k)$  erhalten wir schließlich den nutzen-neutralen Kaufpreis.

## 4. Der grundlegende Ansatz

Im ersten Abschnitt, dem Theoriepart dieses Kapitels, behandeln wir in Anlehnung an das Skript „*Optimierungsprobleme in der Finanzmathematik*“ von Sören Christensen [4] die stochastische Kontrolltheorie und das Bellman-Prinzip. Mit den Resultaten leiten wir im zweiten Abschnitt die optimalen Endwerte in Mertons Portfolioprobem und der Portfoliooptimierung mit Claim für das NTAM sowie das SVM her.

### Idee des Ansatzes

Dieser Ansatz nutzt die Mittel der stochastischen Kontrolltheorie und benötigt das Vorliegen eines Markovischen Setting. Bezeichne  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  die Vermögensentwicklung einer Anlagestrategie am Basisfinanzgütermarkt. Angenommen, die Lösungen der SDEs von  $Y, P$  und  $X$  wären Diffusionsprozesse, dann besäßen diese die Markoveigenschaft. Dieses Charakteristikum kann mittels der dynamischen Programmierung gewinnbringend eingesetzt werden, indem das Optimierungsproblem in das Lösen einer Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (kurz HJB-Gleichung) überführt wird. Abschließend liefert dann die Berechnung der Lösung die Werte für  $V(x, 0)$  und  $V(x - p^b(k), k)$ .

### 4.1. Stochastische Kontrolltheorie und das Bellman-Prinzip

#### 4.1.1. Setting

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , die die usual conditions erfülle. Sei  $(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}$  eine  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung und sei  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$  die sogenannte Kontrollmenge.

**Definition 4.1** (Kontrollstrategie)

*Eine adaptierte Abbildung*

$$\pi : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathcal{U}$$

Zu einer Kontrollstrategie  $\pi$  wird das stochastische System

$$\begin{array}{ll} dS_t^{1,\pi} = b_1(t, S_t^\pi, \pi_t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{1,j}(t, S_t^\pi, \pi_t)dW_t^j & S_0^{1,\pi} = s_1 \\ \vdots & \vdots \\ dS_t^{n,\pi} = b_n(t, S_t^\pi, \pi_t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{n,j}(t, S_t^\pi, \pi_t)dW_t^j & S_0^{n,\pi} = s_n \end{array}$$

$$\begin{aligned} b &: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma &: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}. \end{aligned}$$

Mit der Notation  $S_t^\pi = (S_t^{1,\pi}, \dots, S_t^{n,\pi})$  sowie  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  ergibt sich die Dynamik

$$dS_t^\pi = b(t, S_t^\pi, \pi_t)dt + \sigma(t, S_t^\pi, \pi_t)dW_t \quad S_0^\pi = s \quad (4.1)$$

**Definition 4.3** (Markov-Strategien)

Eine zulässige Kontrollstrategie  $\pi$  mit stochastischem System (4.1) wird als Markov-Strategie bezeichnet, falls eine messbare Abbildung  $\alpha : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{U}$  mit

$$\pi_t = \alpha(t, S_t)$$

Unter einer Markov-Strategie vereinfacht sich die Dynamik des stochastischen Systems zu

$$dS_t^\pi = b(t, S_t^\pi)dt + \sigma(t, S_t^\pi)dW_t \quad S_0^\pi = s,$$

wobei die Abbildungen  $b$  und  $\sigma$  über die entsprechende Abbildung  $\alpha$  abgeändert werden können. Der entscheidende Vorteil ist, dass die Lösung ein Diffusionsprozess ist und daher die Markoveigenschaft besitzt. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels gehen wir immer von Markov-Strategien aus.

### 4.1.2. Zielfunktion und Wertfunktion

Im Sinne der allgemeinen Theorie verwenden wir Nutzenfunktionen  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $T$  bezeichne den Zeithorizont. Wir definieren für  $t \in [0, T]$  die Zielfunktion

$$J(t, S_t^\pi, \pi) := \mathbb{E}[U(S_T^\pi) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{(t, S_t^\pi)}[U(S_T^\pi)],$$

wobei in der letzten Gleichheit die Markoveigenschaft des Diffusionsprozesses verwendet wurde. Dementsprechend gilt

$$J(t, s, \pi) = \mathbb{E}[U(S_T^\pi) | S_t^\pi = s],$$

wobei  $s = (s_1, \dots, s_n)$  den Wert des stochastischen Systems von  $\pi$  im Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Insbesondere erhalten wir die Randbedingung

$$J(T, s, \pi) = \mathbb{E}[U(S_T^\pi) | S_T^\pi = s] = U(s).$$

Wir nehmen ferner an, dass eine optimale zulässige Markov-Strategie  $\pi^*$  existiert, das heißt, die Zielfunktion erfüllt

$$J(t, s, \pi^*) \geq J(t, s, \pi) \quad \text{für alle } t, s, \pi.$$

Im Allgemeinen muss die Existenz einer solchen Strategie  $\pi^*$  nicht gegeben sein, aber wir nutzen diese Annahme nur, um eine Idee für einen Kandidaten zu bekommen. Unter dieser Voraussetzung führt die Optimierung über alle Markov-Strategien zur Wertfunktion

$$v(t, s) := \sup_{\pi} J(t, s, \pi) = J(t, s, \pi^*).$$

### 4.1.3. Bellman-Prinzip

Die Idee der dynamischen Programmierung kommt treffend in dem folgenden Zitat zur Geltung:

*„An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.“*

Bellman, 1957.

Die Kernidee ist, dass eine Optimierung über den gesamten Zeitraum auch immer eine Optimierung über Teilintervalle des Zeitraums darstellt. Insbesondere kann die Optimierung auf Probleme auf den Teilintervallen zurückgeführt werden. Die mathematische Formulierung dieser Aussage ist das Bellman-Prinzip.

**Theorem 4.4** (Bellman-Prinzip)

Für  $0 \leq r \leq t \leq T$  und alle Markov-Strategien gilt

$$v(r, S_r^{\pi'}) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_r(\pi')} \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} [v(t, S_t^{\pi})], \quad (4.2)$$

wobei  $\mathcal{A}_r(\pi')$  die Menge aller Markov-Strategien darstellt, die bis zum Zeitpunkt  $r$  mit  $\pi'$  übereinstimmen.

*Beweis.* Zuerst möchten wir erläutern was die Gleichung (4.2) besagt:

Wir haben im Zeitraum  $[0, r]$  die Strategie  $\pi'$  verfolgt und wollen im restlichen Zeitraum  $[r, T]$  optimal handeln (linke Seite). Dann genügt es auf den Teilintervall  $[r, t]$  optimal zu handeln und sich den optimalen Wert in  $t$  auszahlen zu lassen (rechte Seite). Insbesondere liefert das Theorem eine Identität für die Wertfunktion, die das Problem auf Teilintervalle reduziert.

Für einen vollständigen Beweis unter einigen Zusatzannahmen sei auf Nizar Touzi [36, Kapitel 2] verwiesen. Wir begründen hier nur, dass die Gleichung (4.2) bei Existenz einer optimalen Markov-Strategie  $\pi^*$  erfüllt ist. Die Idee ist, zuerst nur die Ungleichung zu zeigen und dann mit Hilfe von  $\pi^*$  einen konkreten Maximierer anzugeben. Für die Zielfunktion ergibt sich unter Anwendung der Turmeigenschaft

$$\begin{aligned} J(r, S_r^{\pi}, \pi) &= \mathbb{E} [U(S_T^{\pi}) | \mathcal{F}_r] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [U(S_T^{\pi}) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_r] \\ &= \mathbb{E} [J(t, S_t^{\pi}, \pi) | \mathcal{F}_r]. \end{aligned}$$

Laut Definition gilt

$$v(r, s) \geq J(r, s, \pi) \quad \text{für alle } r, s, \pi,$$

und dies liefert für eine Strategie  $\pi \in \mathcal{A}_r(\pi')$ , die auf  $[t, T]$  mit der optimalen Markov-Strategie  $\pi^*$  übereinstimmt

$$v(r, S_r^{\pi'}) \geq J(r, S_r^{\pi}, \pi) = \underbrace{\mathbb{E} [J(t, S_t^{\pi}, \pi) | \mathcal{F}_r]}_{=v(t, S_t^{\pi})} = \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi})} [v(t, S_t^{\pi})].$$



Insbesondere folgt

$$v(r, S_r^{\pi'}) \geq \sup_{\pi \in \mathcal{A}_r(\pi')} \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi})} [v(t, S_t^{\pi})]. \quad (4.3)$$

Die Existenz der optimalen Markov-Strategie  $\pi^*$  impliziert nun, dass das Supremum bei der Strategie  $\pi \in \mathcal{A}_r(\pi')$  mit

$$\pi = \begin{cases} \pi' & \text{für } t \in [0, r] \\ \pi^* & \text{für } t \in (r, T] \end{cases}$$

angenommen wird, und daraus resultiert Gleichheit in (4.3).  $\square$

#### Bemerkung 4.5

Die Aussage des Bellman-Prinzips lautet, dass für jede Markov-Strategie der Wertprozess  $v(r, S_r^{\pi})_{r \in [0, T]}$  ein Supermartingal bildet und genau dann ein Martingal ist, wenn  $\pi = \pi^*$  gilt. Also je länger der Investor eine Markov-Strategie  $\pi \neq \pi^*$  verfolgt, desto mehr verliert er vom optimalen Wert. Bei Verwendung von  $\pi^*$  wird dieser Verlust gerade verhindert.

### 4.1.4. Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Mit Hilfe des Bellman-Prinzips kann eine HJB-Gleichung für den Wertprozess hergeleitet werden. Die Idee ist, die Länge der Teilintervalle gegen 0 gehen zu lassen, also die Itô-Formel anzuwenden.

#### Satz 4.6 (Itô-Formel)

Sei  $S = (S^1, \dots, S^m)$  ein  $\mathbb{R}^m$ -wertiges Semimartingal. Für eine Funktion  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$  gilt

$$f(S_t) = f(S_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(S_u) dS_u^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(S_u) d[S^i, S^j]_u$$

und  $(f(S_t))_{t \geq 0}$  ist selbst ein Semimartingal. Hierbei bezeichnet  $[\cdot, \cdot]$  die Kovariation.

Nehmen wir an, dass  $v \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  ist, wobei diese Schreibweise bedeutet, dass die Funktion einmal nach der ersten Variable und zweimal nach allen anderen Variablen differenzierbar ist, so können wir die Itô-Formel auf  $(v(r+u, S_{r+u}))_{u \geq 0}$  anwenden und

erhalten für eine zulässige Markovstrategie  $\pi$  folgende Identität<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 v(t, S_t) &= v(r, S_r) + \int_0^{t-r} \frac{\partial}{\partial u} v(r+u, S_{r+u}) d(r+u) + \sum_{i=1}^n \int_0^{t-r} \frac{\partial}{\partial x_i} v(r+u, S_{r+u}) dS_{r+u}^i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t-r} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(r+u, S_{r+u}) d[S^j, S^i]_{r+u} \\
 &= v(r, S_r) + \int_r^t \frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) du + \sum_{i=1}^n \int_r^t \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) dS_u^i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_r^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(u, S_u) d[S^j, S^i]_u.
 \end{aligned}$$

Mit der Dynamik

$$dS_t^i = b_i(t, S_t, \pi_t)dt + \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}(t, S_t, \pi_t)dW_t^k \quad S_0^i = x_i$$

für  $i = 1, \dots, n$  können wir die Kovariation  $[S^j, S^i]$  zu

$$\begin{aligned}
 [S^j, S^i]_t &= \left[ \sum_{l=1}^d \int_0^t \sigma_{j,l}(u, S_u, \pi_u) dW_u^l, \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_{i,k}(u, S_u, \pi_u) dW_u^k \right]_t \\
 &= \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_{j,k}(u, S_u, \pi_u) \cdot \sigma_{i,k}(u, S_u, \pi_u) du \\
 &= \int_0^t \sum_{k=1}^d \sigma_{j,k}(u, S_u, \pi_u) \cdot \sigma_{i,k}(u, S_u, \pi_u) du
 \end{aligned}$$

berechnen, welches die Dynamik

$$d[S^i, S^j]_t = \underbrace{\sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}(t, S_t, \pi_t) \cdot \sigma_{j,k}(t, S_t, \pi_t)}_{:=D_{i,j}(t, S_t, \pi_t)} dt = D_{i,j}(t, S_t, \pi_t) dt.$$

<sup>3</sup>Es sei bemerkt, dass es korrekterweise immer  $S^\pi$  heißen müsste, um auf den Einfluss der Markov-Strategie  $\pi$  hinzuweisen. Wir verwenden aber die Kurzform  $S$ , sofern die Abhängigkeit klar ist.

für den Kovariationsprozess zur Konsequenz hat. Dies liefert

$$\begin{aligned}
v(t, S_t) &= v(r, S_r) + \int_r^t \frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) \, ds + \sum_{i=1}^n \int_r^t \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) \, dS_u^i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_r^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(u, S_u) \, d[S^j, S^i]_u \\
&= v(r, S_r) + \int_r^t \frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) \, du \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left( \int_r^t b_i(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) \, du + \sum_{k=1}^d \int_r^t \sigma_{i,k}(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) \, dW_u^k \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_r^t D_{i,j}(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(u, S_u) \, du \\
&= v(r, S_r) + \int_r^t \frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) \, du \\
&\quad + \underbrace{\int_r^t \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_{i,j}(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(u, S_u) + \sum_{i=1}^n b_i(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) \right) du}_{:= A(u, S_u, \pi_u)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d \int_r^t \sigma_{i,k}(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) \, dW_u^k.
\end{aligned}$$

Der Term  $A(u, S_u, \pi_u)$  entspricht dem (infinitesimalen) Generator  $\mathcal{L}$  des Diffusions-Prozesses  $S$  angewendet auf den Wertprozess, das heißt  $A(u, S_u, \pi_u) = \mathcal{L}(v(u, S_u))$ . Wenn nun das lokale Martingal

$$M_{r,t} := \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d \int_r^t \sigma_{i,k}(u, S_u, \pi_u) \frac{\partial}{\partial x_i} v(u, S_u) \, dW_u^k$$

ein echtes Martingal bildet, gilt  $\mathbb{E}[M_{r,t} | \mathcal{F}_r] = M_{r,r} = 0$  für  $r \leq t$ . Dadurch erhalten wir mittels Umstellen und Bedingen auf  $\mathcal{F}_r$  die Gleichung

$$v(r, S_r) = \mathbb{E} \left[ \int_r^t \left( -\frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) - A(u, S_u, \pi_u) \right) du + v(t, S_t) \, \middle| \, \mathcal{F}_r \right]$$

$$= \mathbb{E}_{(r, S_r)} \left[ \int_r^t \left( -\frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) - A(u, S_u, \pi_u) \right) du + v(t, S_t) \right],$$

wobei im letzten Schritt die Markov-Eigenschaft benutzt wurde. Kombinieren wir das Bellman-Prinzip mit der aus der Itô-Formel resultierenden Gleichung, so können wir für  $r \leq t$  und jede Markov-Strategie  $\pi'$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left( \sup_{\pi \in \mathcal{A}_r(\pi')} \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} [v(t, S_t^{\pi})] \right) - \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} [v(t, S_t^{\pi'})] \\ &= v(r, S_r^{\pi'}) - \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} [v(t, S_t^{\pi'})] \\ &= \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} \left[ \int_r^t \left( -\frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u^{\pi'}) - A(u, S_u^{\pi'}, \pi'_u) \right) du + v(t, S_t^{\pi'}) \right] - \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} [v(t, S_t^{\pi'})] \\ &= \mathbb{E}_{(r, S_r^{\pi'})} \left[ \int_r^t \left( -\frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u^{\pi'}) - A(u, S_u^{\pi'}, \pi'_u) \right) du \right] \end{aligned}$$

herleiten. Bemerkenswert ist, dass sich der Term  $v(t, S_t^{\pi'})$  eliminiert und deswegen eine Optimierung auf dem Teilintervall  $[r, t]$  durchgeführt werden kann. Als Funktion von  $t$  ist der Erwartungswert also größer gleich 0 und für  $t = r$  startend in 0. Lässt sich der Erwartungswert nun in  $t = r$  nach  $t$  differenzieren, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, S_t^{\pi'}) + A(t, S_t^{\pi'}, \pi'_t) \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt für alle Markov-Strategien und wir wissen, dass ein  $\pi'$  existiert (unser  $\pi^*$ ), wofür Gleichheit gilt. Wir haben also eine partielle Differentialgleichung (*partial differential equation*, kurz *PDE*) hergeleitet, deren Lösung den Wertprozess liefert.

**Satz 4.7** (HJB-Gleichung)

Der Wertprozess  $v(t, s)$  zu einer Nutzenfunktion  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt

$$\sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, s) + A(t, s, \pi_t) = 0 \quad \text{und} \quad v(T, s) = U(s).$$

Dies ist die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung.

**Bemerkung 4.8**

Alle vorigen Überlegungen waren heuristischer Natur und wir wollen nicht unbemerkt lassen, dass für eine Lösung der HJB-Gleichung nachzuweisen ist, dass sie tatsächlich

dem optimalen Wertprozess entspricht. Diese Prüfung kann durch einen Verifikationsatz, wie in [4, Satz 3.3.], geschehen. Sind aber die sehr restriktiven Annahmen, wie  $v \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  für die Anwendung der Itô-Formel, nicht erfüllt, muss die Theorie der Viskositätslösungen zu Rate gezogen werden. Für eine kurze Einführung sei auf [4, 3.6 Erweiterter Lösungsbegriff: Viskositätslösungen] sowie [36, 6. DPE in the viscosity sense] verwiesen. Zudem befindet sich in [37, Appendix] eine Aufzählung weiterer Quellen. Wir werden in dieser Arbeit davon ausgehen, dass die Lösung der HJB-Gleichung den optimalen Wertprozess darstellt und die nötigen technischen Überlegungen nicht ausführen, zumal sie häufig in den zitierten Papern zu finden sind.

## 4.2. Anwendung

### 4.2.1. Übersetzung der Theorie auf die Modelle

Allgemein stellt sich in dem ersten beiden Schritten der Problemstellung (3.3) die Aufgabe, zu einem gegebenen Startkapital eine optimale selbst-finanzierende Handlungsstrategie zu finden. Nun symbolisiert im ersten Modell  $Y$  ein nicht handelbares Gut und im zweiten die Volatilität von  $P$ , daher sei bemerkt, dass in beiden Märkten nur die Aktie  $P$  gehandelt wird. Dies bedeutet, dass das Portfolio des Investors (neben dem Halten von  $k$  Claims) allein aus Aktien  $P$  und dem Geldmarktkonto besteht. Jede Handlungsstrategie kann durch ihren induzierten Vermögensprozess  $(X_t^\theta)_{0 \leq t \leq T}$  repräsentiert werden. Hierbei bezeichnet  $\theta_t$  die Anzahl von Aktien  $P$ , welche bei Verfolgung der Strategie zum Zeitpunkt  $t$  gehalten werden, und  $X_0^\theta = z$  sei das Startvermögen der Strategie. Aufgrund der Selbstfinanzierungsannahme gilt die SDE

$$\begin{aligned} dX_t^\theta &= \theta_t dP_t + r_t(X_t^\theta - \theta_t P_t) dt \\ &= \theta_t P_t [r_t dt + \sigma_t (dB_t + \lambda_t dt)] + r_t(X_t^\theta - \theta_t P_t) dt \\ &= r_t \theta_t P_t dt + \sigma_t \theta_t P_t dB_t + \sigma_t \theta_t P_t \lambda_t dt + r_t X_t^\theta dt - r_t \theta_t P_t dt \\ &= \sigma_t \theta_t P_t dB_t + (\sigma_t \theta_t P_t \lambda_t + r_t X_t^\theta) dt \end{aligned}$$

und mit dem relativen Anteil  $\pi_t^\theta := \frac{\theta_t P_t}{X_t^\theta}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} dX_t^\theta &= \sigma_t X_t^\theta \pi_t^\theta dB_t + (\sigma_t X_t^\theta \pi_t^\theta \lambda_t + r_t X_t^\theta) dt & X_0^\theta &= z \\ &= X_t^\theta \sigma_t \pi_t^\theta dB_t + X_t^\theta (\sigma_t \pi_t^\theta \lambda_t + r_t) dt & & (4.4) \end{aligned}$$

Wir verwenden die Konvention, von der Handelsstrategie  $\pi^\theta$  mit Startkapital  $z$  zu sprechen, wenn der Vermögensprozess durch  $(X_t^\theta)_{0 \leq t \leq T}$  gegeben ist<sup>4</sup>. In unserem Basismodell entsteht für eine (Kontroll-)Strategie  $\pi$  das stochastische System

$$\begin{aligned} dS_t^1 &:= dX_t = X_t \sigma_t \pi_t dB_t + X_t (\sigma_t \pi_t \lambda_t + r_t) dt & X_0 &= z, \\ dS_t^2 &:= dP_t = P_t [r_t dt + \sigma_t (dB_t + \lambda_t dt)] & P_0 &= p, \\ dS_t^3 &:= dY_t = b_t dt + a_t (\rho_t dB_t + \rho_t^\perp dB_t^\perp) & Y_0 &= y. \end{aligned}$$

#### Annahme 4.9

Jede Handelsstrategie  $\pi$  mit obigen stochastischen System ist eine Markov-Strategie im Sinne der Definition 4.3.

Unter dieser Annahme können wir die stochastische Kontrolltheorie auf das System  $S = (X, P, Y)$  anwenden. Sei  $T$  der Zeithorizont und  $U_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Nutzenfunktion, so wird analog zum Theoriepart für  $t \in [0, T]$  die Zielfunktion

$$\begin{aligned} J(t, S_t, \pi) &:= \mathbb{E}[U_0(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ J(t, z, p, y, \pi) &:= \mathbb{E}[U_0(S_T) | X_t = z, P_t = p, Y_t = y], \end{aligned}$$

und die Wertfunktion

$$v(t, z, p, y) := \sup_{\pi} J(t, z, p, y, \pi).$$

definiert. Für  $D_{i,j}(t, S_t, \pi_t) = \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}(t, S_t, \pi_t) \cdot \sigma_{j,k}(t, S_t, \pi_t)$  ergibt sich mit  $\pi_t X_t = \theta_t P_t$

$$\begin{aligned} D_{X,X}(t, z, p, y, \pi_t) &= \sigma_t^2 p^2 \theta_t^2 & D_{X,Y}(t, z, p, y, \pi_t) &= \sigma_t a_t \rho_t \theta_t p \\ D_{Y,Y}(t, z, p, y, \pi_t) &= a_t^2 & D_{X,P}(t, z, p, y, \pi_t) &= \sigma_t^2 \theta_t p^2 \\ D_{P,P}(t, z, p, y, \pi_t) &= \sigma_t^2 p^2 & D_{P,Y}(t, z, p, y, \pi_t) &= \sigma_t p a_t \rho_t \end{aligned}$$

und dies kann genutzt werden, um die HJB-Gleichung anzugeben.

#### Proposition 4.10

Die HJB-Gleichung für das Basismodell ist gegeben durch

$$0 = \sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t)$$

<sup>4</sup>Aus Gründen der Lesbarkeit schreiben wir im Weiteren nur  $X$  anstelle von  $X^\theta$ , sofern die Abhängigkeit klar ist. Insbesondere verwenden wir auch  $\pi$  anstelle von  $\pi^\theta$ .

mit

$$\begin{aligned} A(t, z, p, y, \pi_t) = & \frac{1}{2}\sigma_t^2 p^2 \theta_t^2 v_{zz} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 p^2 v_{pp} + \frac{1}{2}a_t^2 v_{yy} \\ & + \sigma_t^2 \theta_t p^2 v_{zp} + \sigma_t a_t \rho_t \theta_t p v_{zy} + \sigma_t p a_t \rho_t v_{py} \\ & + (\sigma_t \lambda_t \theta_t p + r_t z) v_z + (r_t p + \sigma_t \lambda_t p) v_p + b_t v_y \end{aligned}$$

Hierbei steht der Index  $t$  für einen adaptierten Prozess, während die anderen Indizes die Ableitung nach der jeweiligen Stelle symbolisieren.

Die zentrale Idee der Anwendbarkeit der HJB-Gleichung zum Lösen unserer Problemstellung liefert die nächste Beobachtung.

#### Beobachtung 4.11

Gegeben seien das Anfangskapital  $x$  und die Nutzenfunktion  $U : I \rightarrow \mathbb{R}$  eines Investors. Außerdem bezeichne  $C$  den angebotenen europäischen Claim. Dann gilt

$$\begin{aligned} V(x, 0) &:= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(X_T)] \\ &= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U_1(S_T) | X_0 = x, P_0 = p, Y_0 = y] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &:= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)] \\ &= \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U_2(S_T) | X_0 = x - p^b(k), P_0 = p, Y_0 = y]. \end{aligned}$$

Hierbei charakterisieren  $U_1, U_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  die an  $U$  angepassten Nutzenfunktionen.<sup>5</sup> Man erhält die optimalen Endwerte also durch

1.  $V(x, 0) = v(0, x, p, y)$  mit  $v(t, z, p, y)$  löst die HJB-Gleichung

$$0 = \sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t) \text{ und } v(T, z, p, y) = U(z)$$

---

<sup>5</sup>In der Theorie wurden Funktionen der Form  $U_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  verwendet, daher die Einführung von  $U_1, U_2$ . Deren genaue Form (in Abhängigkeit von  $U$ ) ist für unsere Belange irrelevant, daher schreiben wir ab jetzt einfach  $U$ .

2.  $V(x - p^b(k), k) = v(0, x - p^b(k), p, y)$  mit  $v(t, z, p, y)$  löst die HJB-Gleichung

$$0 = \sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t) \text{ und } v(T, z, p, y) = U(z + kc),$$

wobei  $c$  den Wert des Claims in  $T$  darstellt.

Die vorige Beobachtung erläutert, wie in den Optimierungsproblemen die Werte für  $V(x, 0)$  und  $V(x - p^b(k), k)$  berechnet werden können, nämlich durch das Lösen einer HJB-Gleichung. Für diese nicht-lineare PDE ist aber keine geschlossene Lösungsform vorhanden. Um trotzdem explizite Kalkulationen durchführen zu können, verwenden wir einen Produktansatz, dies bedeutet, dass Funktionen  $u$  und  $g$  mit

$$v(t, z, p, y) = u(t, z) g(t, z, p, y)$$

gesucht werden. Die Funktion  $u$  wird derart gewählt, dass  $u(T, z) = U(z)$  gilt, die Randbedingung des Wertprozesses also  $g(T, z, p, y) = 1$  für alle  $z, p, y$  fordert. Die Hauptaufgabe besteht nun darin, durch geschickte Wahl von  $u$  und Einsetzen der Produktform in die HJB-Gleichung eine explizit lösbare PDE für  $g$  (oder, falls dies nicht möglich ist, für eine Transformation  $G$  von  $g$ ) herzuleiten. Die Chance auf den Erhalt einer lösbaren PDE erhöht sich natürlich, wenn die Funktion  $g$  (bzw.  $G$ ) von wenigen Variablen abhängt. Und genau an diesem Punkt wird die CARA- bzw. CRRA-Eigenschaft unserer Nutzenfunktionen zum Tragen kommen, welche vor allem für Mertons Portfolioprobem explizite Kalkulationen in beiden Modellen möglich macht.

#### 4.2.2. Non-traded assets model

Federführende Autoren bei der Analyse des NTAM mittels des grundlegenden Ansatzes sind Henderson & Hobson mit mehreren Papern [12–14, 19]. Des Weiteren analysierten Musiela & Zariphopoulou die Optimierungsprobleme unter exponentiellen Präferenzen [30], wobei letztere eine wichtige Hopf-Cole-Transformation namens „*distortion*“ einführt [37]. Wir betrachten das NTAM mit konstanten Parametern und erhalten das stochastische System

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t [\sigma \pi_t dB_t + (\sigma \pi_t \lambda + r) dt] & X_0 &= z, \\ dP_t &= P_t [r dt + \sigma (dB_t + \lambda dt)] & P_0 &= p, \\ dY_t &= Y_t [(r + \eta \xi) dt + \eta (\rho dB_t + \rho^\perp dB_t^\perp)] & Y_0 &= y. \end{aligned}$$



Dementsprechend wird die HJB-Gleichung des Wertprozesses zu

$$0 = \sup_{\pi^\theta} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t^\theta)$$

mit

$$\begin{aligned} A(t, z, p, y, \pi_t^\theta) = & \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 \theta_t^2 v_{zz} + \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 v_{pp} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 v_{yy} \\ & + \sigma^2 \theta_t p^2 v_{zp} + \sigma \eta y \rho \theta_t p v_{zy} + \sigma p \eta y \rho v_{py} \\ & + (\sigma \lambda \theta_t p + rz) v_z + (rp + \sigma \lambda p) v_p + (r + \eta \xi) y v_y. \end{aligned}$$

## 1. Schritt (Mertons Portfolioproblem)

Gesucht ist die optimale Strategie  $\pi$ , welche den Wert

$$V(x, 0) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(X_T)]$$

liefert. Der zugehörige Wertprozess

$$v(t, z, p, y) = \sup_{\pi} J(t, z, p, y, \pi) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(X_T) | X_t = z, P_t = p, Y_t = y]$$

ist unabhängig von  $P$  und  $Y$  in dem Sinne, dass

$$v(t, z, p, y) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(X_T) | X_t = z]$$

gilt. Dies begründet sich in der Tatsache, dass zum einen die nicht handelbare Aktie  $Y$  für den Investor nur von Relevanz ist, wenn sie die Auszahlung des Claims  $C$  beeinflusst und er auch Claims in seinem Portfolio hält. Zum anderen besitzt die exponentielle Nutzenfunktion eine konstante absolute und die Potenznutzenfunktion eine konstante relative Risikoaversion, somit liefert die zweite Eigenschaft der Arrow-Pratt-Maße (siehe 3.1.1), dass der Kursverlauf von  $P$  aus dem Problem eliminiert werden kann. Insbesondere folgt  $v_p = v_y = 0$  und dies vereinfacht die HJB-Gleichung zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t) \\ &= \sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 \theta_t^2 v_{zz} + (\sigma \lambda \theta_t p + rz) v_z \end{aligned} \quad (4.5)$$

**Bemerkung 4.12**

Die Optimierung über alle Handlungsstrategien ist äquivalent zur Lösung der Gleichung (4.5). Wir definieren den absoluten Anteil des Vermögens, welcher in die Aktie  $P$  investiert wird, durch  $\theta^p := \theta \cdot p$ . Nach (4.5) ergibt sich für das Merton-Problem, dass eine Optimierung über diesen Anteil stattfindet. Insbesondere ist (wie bereits bemerkt) der Kursverlauf der Aktie  $P$  nur indirekt relevant und der Wertprozess  $v(t, z, p, y)$  neben dem Zeitparameter einzig vom Verlauf des Vermögensprozesses  $(X_t^\theta)_{0 \leq t \leq T}$  abhängig.

Die Bestimmung des Optimums in Abhängigkeit von  $\theta^p$  ergibt

$$0 \stackrel{!}{=} \sigma^2 \theta_t^p v_{zz} + \sigma \lambda v_z \quad \Leftrightarrow \quad \theta_t^p = -\frac{\lambda v_z}{\sigma v_{zz}}, \quad (4.6)$$

welches für  $v(t, z, p, y) = v(t, z)$  die PDE

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \left( rz - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 v_z^2}{v_{zz}} \right) v_z \quad (4.7)$$

mit Endbedingung  $v(T, z) = U(z)$  impliziert. Mit diesem Wissen können wir für beide Nutzenfunktionen das Merton-Problem explizit lösen, wobei vor allem die Erkenntnis der Abhängigkeit des Wertprozesses von nur zwei Variablen hilfreich ist.

#### a) Exponentielle Nutzenfunktion

Als Ansatz für die exponentielle Nutzenfunktion  $U(x) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x}$  mit  $\gamma > 0$  empfiehlt sich (siehe Henderson & Hobson [14])

$$v(t, z) = u(t, z) \quad g(t) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t)$$

mit einer Funktion  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(T) = 1$ . Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g'(t) - r z e^{r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t) \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= e^{r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z} &= -\gamma e^{2r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t). \end{aligned}$$

Somit impliziert die PDE (4.7)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, z) + \left( rz - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 v_z^2}{v_{zz}} \right) v_z \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g'(t) - r z e^{r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( rz - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 e^{r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t)}{\gamma e^{2r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t)} \right) e^{r(T-t)} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t) \\
& = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g'(t) + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t) \\
& = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \left( g'(t) - \frac{1}{2} \lambda^2 g(t) \right),
\end{aligned}$$

das heißt,  $g$  erfüllt die lineare PDE

$$g'(t) = \frac{1}{2} \lambda^2 g(t) \quad \text{mit} \quad g(T) = 1.$$

Deren Lösung ist  $g(t) = e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 (T-t)}$  und die Wertfunktion  $v(t, z)$  lautet

$$v(t, z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(t) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 (T-t)},$$

welches schlussendlich den optimalen Wert liefert.

#### Beispiel 4.13

*Bei Mertons Portfolioproblem im NTAM besitzt der optimale erwartete Endnutzen unter exponentiellen Präferenzen den Wert*

$$V(x, 0) = v(0, x) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{rT}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 T}.$$

#### b) Potenznutzenfunktion

Für die Nutzenfunktion  $U(x) = \frac{x^{1-R}}{1-R}$  mit  $R > 0, R \neq 1$ , wählen wir einen Separationsansatz, das heißt, wir schreiben den Wertprozess als Produkt  $v(t, z) = u(z) g(t)$ . Die Randbedingung

$$u(z) g(T) = v(T, z) \stackrel{!}{=} U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}$$

impliziert direkt  $u(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}$  und  $g(T) = 1$ . Die Funktion  $u$  entspricht also der Potenznutzenfunktion und für die partiellen Ableitungen des Wertprozesses ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g'(t) \frac{z^{1-R}}{1-R}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = g(t) z^{-R}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = g(t) (-R) z^{-R-1}.$$

Dementsprechend transformiert sich die PDE (4.7) zu

$$0 = g'(t) \frac{z^{1-R}}{1-R} + \left( rz - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{g(t) z^{-R}}{-g(t) R z^{-R-1}} \right) g(t) z^{-R}$$

$$\begin{aligned}
&= g'(t) \frac{z^{1-R}}{1-R} + g(t) r z^{1-R} + \frac{1}{2} \lambda^2 g(t) \frac{z^{1-R}}{R} \\
&= \frac{z^{1-R}}{1-R} \left( g'(t) + \underbrace{\left( (1-R)r + \frac{1-R}{2R} \lambda^2 \right)}_{:=a_1} g(t) \right)
\end{aligned}$$

und daher erfüllt  $g$  die lineare PDE

$$g'(t) = -a_1 g(t) \quad \text{mit} \quad g(T) = 1.$$

Durch Einsetzen der Lösung  $g(t) = e^{a_1(T-t)}$  ergibt sich

$$v(t, z) = u(z) g(t) = \frac{z^{1-R}}{1-R} e^{(1-R)r(T-t)} e^{\frac{1-R}{2R} \lambda^2 (T-t)}.$$

#### Beispiel 4.14

Bei Mertons Portfolioprobblem im NTAM besitzt der optimale erwartete Endnutzen bei Potenznutzen den Wert

$$V(x, 0) = v(0, x) = \frac{x^{1-R}}{1-R} e^{(1-R)rT} e^{\frac{1-R}{2R} \lambda^2 T}.$$

#### Bemerkung 4.15

Mit Kenntnis der Lösung der Wertprozesse kann auch der Wertanteil des Vermögens im risky asset  $P$  explizit angegeben werden, denn nach (4.6) gilt

$$\begin{aligned}
\theta_t^p &= -\frac{\lambda v_z}{\sigma v_{zz}} = \frac{\lambda}{\sigma \gamma} e^{-r(T-t)} \quad (\text{Exponentialnutzen}), \\
\theta_t^p &= -\frac{\lambda v_z}{\sigma v_{zz}} = \frac{\lambda z}{\sigma R} \quad (\text{Potenznutzen}).
\end{aligned}$$

Bei der exponentiellen Nutzenfunktion wird im Zeitpunkt  $t$  in die Aktie  $P$  der Wert eines Forward-Kontrakts mit Underlying  $\frac{\lambda}{\sigma \gamma}$  investiert, im Bezug auf Forwards ist dieser Wert also konstant. Insbesondere ist  $\theta_t^p$  beim Exponentialnutzen unabhängig von aktuellen Wert  $X_t = z$  des Vermögens. Dieses spiegelt gerade die CARA-Eigenschaft des exponentiellen Nutzens wider. Andererseits ist für den Potenznutzen der relative Anteil  $\pi_t = \frac{\theta_t^p}{X_t} = \frac{\lambda}{\sigma R}$  des in die Aktie  $P$  investierten Vermögens konstant, welches an der CRRA-Eigenschaft des Potenznutzens liegt (siehe Tabelle 3.2: Veränderung der Anlageentscheidung).

## 2. Schritt (Portfoliooptimierung mit Claim)

Wir analysieren hier den Fall eines Claims  $C$ , dessen Auszahlung  $C_T = C(Y_T)$  allein von der nicht handelbaren Aktie  $Y$  abhängt. Der Investor entscheidet sich für den Kauf von  $k \in \mathbb{R}$  Claims zum Preis von  $p^b(k)$  und sucht die Strategie  $\pi$ , welche den Wert

$$V(x - p^b(k), k) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x - p^b(k))} \mathbb{E}[U(X_T + kC(Y_T))]$$

liefert. In diesem Szenario ist der zugehörige Wertprozess

$$v(t, z, p, y) = \sup_{\pi} J(t, z, p, y, \pi) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(X_T + kC(Y_T)) | X_t = z, P_t = p, Y_t = y]$$

unabhängig von  $P$ , aber nicht von  $Y$ . Somit folgt  $v_p = 0$  und infolgedessen vereinfacht sich die HJB-Gleichung zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t) \right) \\ &= \sup_{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 \theta_t^2 v_{zz} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 v_{yy} \right. \\ &\quad \left. + \sigma \eta y \rho \theta_t p v_{zy} + (\sigma \lambda \theta_t p + rz) v_z + (r + \eta \xi) y v_y \right) \end{aligned}$$

### Bemerkung 4.16

Analog zu der Bemerkung 4.12 im Merton-Problem kann auch bei der Optimierung mit Claim

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\theta^p} \left( \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + \frac{1}{2} \sigma^2 (\theta_t^p)^2 v_{zz} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 v_{yy} \right. \\ &\quad \left. + \sigma \eta y \rho \theta_t^p v_{zy} + (\sigma \lambda \theta_t^p + rz) v_z + (r + \eta \xi) y v_y \right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit  $\theta^p := \theta \cdot p$  betrachtet werden. Das Maximum wird bei

$$\theta_t^p = - \frac{\eta y \rho v_{zy} + \lambda v_z}{\sigma v_{zz}} \tag{4.9}$$

angenommen.

**a) Exponentielle Nutzenfunktion**

Wir wählen den Ansatz

$$v(t, z, p, y) = u(T - t, z) g(T - t, \log(y)) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(T - t, \log(y))$$

mit Endbedingung

$$v(T, z, p, y) = U(z + kC(y)) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(z+kC(y))},$$

welcher bei Henderson & Hobson in [13, 14] sowie Musiela & Zariphopoulou in [30] verwendet wird. Durch Berechnung der partiellen Ableitungen von  $v(t, x, p, y)$  und Einsetzen in die HJB-Gleichung erhalten wir für  $g = g(x_1, x_2)$  die PDE

$$0 = -g_{x_1} + \frac{1}{2} \eta^2 (-g_{x_2} + g_{x_2, x_2}) - \frac{1}{2} \frac{(\eta \rho \cdot g_{x_2} + \lambda \cdot g)^2}{g} + (r + \eta \xi) \cdot g_{x_2} \quad (4.10)$$

mit der Randbedingung  $g(0, y) = e^{-\gamma k C(e^y)}$ . Diese resultiert direkt aus der Randbedingung des Wertprozesses. Für die exakte Herleitung sei auf den Anhang verwiesen (A.3.1.1).

**Bemerkung 4.17**

Für den Fall  $C \equiv 0$  ist die Wertfunktion  $v(t, x, y, p)$  nicht abhängig von  $Y$ . Dies impliziert, dass auch  $g$  unabhängig von  $Y$  ist, also  $g_{x_2} = 0$  gilt. Wir erhalten die bekannte PDE

$$0 = -g_{x_1} - \frac{1}{2} \lambda^2 g,$$

deren Lösung  $g(T - t) = e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 (T-t)}$  ist und  $V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{rT}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 T}$  impliziert.

Um für die allgemeine PDE in (4.10) eine Lösung zu berechnen, greifen wir auf einen Trick von Zariphopoulou [37] zurück. Das Ziel dieser unter den Namen „*distortion*“ eingeführten Transformation ist, die ursprüngliche PDE für  $g$  in eine Wärmeleitungsgleichung zu überführen. Hierzu wird die Transformation  $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$g(x_1, x_2) = e^{\alpha x_1} G \left( x_1, x_2 + \left( \delta - \frac{\eta^2}{2} \right) x_1 \right)^b$$

mit  $\alpha, b, \delta \in \mathbb{R}$  betrachtet. Mit Hilfe der geschickten Wahl von

$$\alpha = -\frac{1}{2} \lambda^2, \quad b = \frac{1}{1 - \rho^2}, \quad \delta = r + \eta (\xi - \rho \lambda)$$

führt (4.10) zu der Wärmeleitungsgleichung

$$G_{v_1}(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\eta^2 G_{v_2, v_2}(v_1, v_2) \quad (4.11)$$

mit Randbedingung  $G(0, y) = e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(e^y)}$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Für die ausführlichen Rechnungen verweisen wir erneut auf den Anhang (A.3.1.2). Deren Lösung kann nach der Feynman-Kac-Formel für Diffusionsprozesse dargestellt werden durch

$$G(v_1, v_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ G\left(0, v_2 + \eta W_{v_1}^{\mathbb{Q}^{(0)}}\right) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \exp \left( -\gamma k(1-\rho^2)C(e^{v_2 + \eta W_{v_1}^{\mathbb{Q}^{(0)}}}) \right) \right]$$

mit einer Brownschen Bewegung  $W^{\mathbb{Q}^{(0)}}$  bezüglich dem minimalen Martingalmaß  $\mathbb{Q}^{(0)}$  von Föllmer und Schweizer. Für die Funktion  $g : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folgt

$$g(T-t, \log(y)) = e^{\alpha(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \middle| Y_t = y \right]^b.$$

Schlussendlich erhalten wir für den Wertprozess

$$\begin{aligned} v(t, X_t, P_t, Y_t) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma X_t e^{r(T-t)}} g(T-t, \log(Y_t)) \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma X_t e^{r(T-t)} - \frac{1}{2}\lambda^2(T-t)} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \middle| Y_t = \cdot \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}. \end{aligned}$$

#### Beispiel 4.18

Die Lösung für unser Optimierungsproblem im NTAM beim Kauf von  $k$  Claims und exponentieller Nutzenfunktion lautet

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &= v(0, X_0 = x - p^b(k), P_0 = p, Y_0 = y) \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(x - p^b(k))e^{rT} - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### Bemerkung 4.19

Für den short Call ( $k = -1$ ,  $C(Y_T) = (Y_T - K)^+$ ) ist das obige Optimum nicht endlich und folglich kann sowohl bei der Potenznutzenfunktion (wie wir bereits auf Seite 23 erläutert haben) als auch bei exponentieller Nutzenfunktion keine nutzen-neutrale Bewertung dieses Claims vollführt werden. Dieses Problem verschwindet aber zum Beispiel bei der Betrachtung der Non-HARA-Nutzenfunktion

$$U(z) = \frac{1}{\kappa} \left( 1 + \kappa z - \sqrt{1 + \kappa^2 z^2} \right) \quad \kappa > 0.$$

### b) Potenznutzenfunktion

In den bisherigen Rechnungen konnte die Lösung der HJB-Gleichung mittels eines clever gewählten Ansatzes hergeleitet werden. Im Optimierungsproblem mit Claim und Potenznutzen empfiehlt sich für  $S = (X, P, Y)$  die Wahl des Ansatzes

$$\begin{aligned}
 v(t, X_t, P_t, Y_t) &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} [U(X_T + kC(Y_T))] \\
 &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{1}{1-R} (X_T + kC(Y_T))^{1-R} \right] \\
 &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{X_t^{1-R}}{1-R} \left( \frac{X_T}{X_t} + k \frac{C(Y_T)}{X_t} \right)^{1-R} \right] \\
 &= \frac{X_t^{1-R}}{1-R} g(T-t, X_t, Y_t)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

mit Endbedingung

$$v(T, z, p, y) = U(z + kC(y)) = \frac{1}{1-R} (z + kC(y))^{1-R}.$$

Leider ergibt sich in diesem Szenario aus der HJB-Gleichung (4.8) für den Wertprozess  $v(t, z, p, y)$  die nicht-lineare PDE

$$\begin{aligned}
 0 = & -g_{x_1} + (r + \eta\xi) y g_{x_3} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 g_{x_3, x_3} + rz \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\left( \eta \rho \left( \frac{(1-R)y}{z} g_{x_3} + y g_{x_2, x_3} \right) + \lambda \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \right)^2}{\left( g_{x_2, x_2} + \frac{2(1-R)}{z} g_{x_2} - \frac{R(1-R)}{z^2} g \right)}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

mit Randbedingung

$$g(0, z, y) = \left( 1 + \frac{kC(y)}{z} \right)^{1-R}.$$

Die Funktion  $g = g(x_1, x_2, x_3)$  erfüllt demzufolge eine nicht-lineare PDE in drei Variablen und eine explizite Lösung mittels einer geeigneten Transformation ist nicht direkt ersichtlich. Eine numerische Berechnung ist denkbar, aber wir werden uns mit einer theoretischen Approximation der Funktion  $g$  beschäftigen. Die Grundlage der weiteren Ausführungen bildet der Artikel „*Real options with constant relative risk aversion*“ von Henderson & Hobson [13]. Die Idee der beiden Autoren ist die Herleitung einer Abschätzung für den Wert  $v(t, z, p, y)$  mit Fehlertoleranz  $o(k^2)$ . Hierzu wird in einem ersten Schritt durch die Wahl von  $C(Y) = Y$  eine Reduzierung der PDE von  $g$  um



eine Dimension erlangt, denn im Optimierungsproblem mit diesem Claim kann für den Wertprozess  $v(t, z, p, y)$  der Ansatz

$$\begin{aligned}
 v(t, X_t, P_t, Y_t) &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} [U(X_T + kC(Y_T))] \\
 &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{1}{1-R} (X_T + kY_T)^{1-R} \right] \\
 &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{X_t^{1-R}}{1-R} \left( \frac{X_T}{X_t} + k \frac{Y_T}{X_t} \right)^{1-R} \right] \\
 &= \frac{X_t^{1-R}}{1-R} g(T-t, \frac{Y_t}{X_t}) \\
 &=: \frac{X_t^{1-R}}{1-R} g(\tau, U_t)
 \end{aligned}$$

gewählt werden. Die Einschränkung auf den Claim  $C(Y) = Y$  ist eine sehr restriktive Annahme, da nur Wertprozesse für Claims, welche ein Vielfaches der nicht handelbaren Aktie darstellen, hergeleitet werden können. Für die Betrachtung von allgemeinen europäischen Claims verweisen wir auf Henderson [12]. Da das Vorgehen in den beiden Artikeln aber bis auf technische Details übereinstimmt, wird hier der Fall  $C(Y) = Y$  analysiert und analog zu den Papern  $r \equiv 0$  gesetzt. Wir bemerken, dass in unserem NTAM dieser Claim einer geometrischen Brownschen Bewegung entspricht, welche keine obere Schranke besitzt. Entsprechend den Forderungen von Henderson [12] muss  $k$  positiv sein. Im zweiten Schritt wird eine Approximation für die Funktion  $g$  hergeleitet, in der Hoffnung, darüber eine gute Approximation für den Wertprozess zu erhalten. Im Hinblick auf die Randbedingung  $g(0, u) = (1 + ku)^{1-R}$  bietet sich die Betrachtung von  $h$  mit  $g(\tau, u) = h(\tau, u)^{1-R}$  an. Die PDE aus (4.14) transformiert sich unter dem neuen Ansatz zu

$$0 = -h_{\tau} + \eta \xi u h_u + \frac{1}{2} \eta^2 u^2 \left( h_{uu} - R \frac{h_u^2}{h} \right) - \frac{1}{2} \frac{E(h, h_u, h_{uu})^2}{D(h, h_u, h_{uu})}$$

mit

$$\begin{aligned}
 E(h, h_u, h_{uu}) &= \left( \eta \rho \left( -R u h_u - u^2 h_{uu} + R u^2 \frac{h_u^2}{h} \right) + \lambda (-u h_u + h) \right) \\
 D(h, h_u, h_{uu}) &= \left( u^2 \left( h_{uu} - R \frac{h_u^2}{h} \right) + 2 R u h_u - R h \right).
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Umformungen befinden sich im Anhang (A.3.2.2). Wir interessieren uns für die Optimierungsprobleme mit geringem Anteil in dem Claim im Vergleich zum aktuellen Vermögen, das heißt, der Wert  $\frac{kC(Y_t)}{X_t} = \frac{kY_t}{X_t} = kU_t$  soll klein sein, und

betrachten Lösungen der Form

$$h(\tau, u) = A(\tau) + kuB(\tau) + k^2u^2C(\tau) + \dots$$

**Proposition 4.20**

Die Funktionen  $A, B$  und  $C$  der obigen Entwicklung sind

$$\begin{aligned} A(\tau) &= e^{\frac{1}{2R}\lambda^2\tau} \\ B(\tau) &= A(\tau)e^{\eta(\xi-\rho\lambda)\tau} \\ C(\tau) &= -\frac{1}{2}R\left(\frac{\eta^2(1-\rho)^2}{\Gamma}\right)A(\tau)e^{2\eta(\xi-\rho\lambda)\tau}[e^{\Gamma\tau} - 1] \end{aligned}$$

mit  $\Gamma = \eta^2 - 2\eta\rho\lambda\frac{1}{R} + \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2$ .

*Beweis.* Wir verweisen auf [13, Proposition 1]. □

Die Idee von Henderson & Hobson ist die Approximation von  $h(\tau, u)$  durch die Funktion  $\tilde{h}(\tau, u) = A(\tau) + kuB(\tau) + k^2u^2C(\tau)$ , welche den Wertprozess

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, z, p, y) &= \frac{z^{1-R}}{1-R} \tilde{h}\left(T-t, \frac{y}{z}\right)^{1-R} \\ &= \frac{z^{1-R}}{1-R} \left( A(T-t) + k\frac{y}{z}B(T-t) + k^2\frac{y^2}{z^2}C(T-t) \right)^{1-R} \\ &= \frac{z^{1-R}}{1-R} e^{\frac{1}{2}\frac{(1-R)}{R}\lambda^2(T-t)} \\ &\quad \times \left( 1 + k\frac{y}{z}e^{\eta(\xi-\rho\lambda)(T-t)} - \frac{k^2}{2}\frac{y^2}{z^2}R\left(\frac{\eta^2(1-\rho)^2}{\Gamma}\right)e^{2\eta(\xi-\rho\lambda)(T-t)}[e^{\Gamma(T-t)} - 1] \right)^{1-R} \end{aligned} \tag{4.15}$$

liefert.

Der dritte und schwierigste Part ist zu beweisen, dass  $\tilde{v}(t, z, p, y)$  tatsächlich eine gute Approximation von  $v(t, z, p, y)$  darstellt.

**Satz 4.21**

Für  $k > 0$  gilt

$$v(t, z, p, y) = \tilde{v}(t, z, p, y) + o(k^2).$$

*Beweis.* Die Ungleichung  $v(t, z, p, y) \geq \tilde{v}(t, z, p, y) + o(k^2)$  wird durch die Wahl eines cleveren, aber suboptimalen Vermögensprozesses  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  gezeigt. Die Abschätzung für die obere Schranke von  $v(t, z, p, y)$  nutzt die Ideen des dualen Ansatzes. Für den vollständigen Beweis sei auf [13, Theorem 3] verwiesen. □

Abschließend erhalten wir mit den vorigen Satz eine Approximation für  $V(x - p^b(k), k)$  im Falle  $r = 0$  und  $C(Y) = Y$ .

### Beispiel 4.22

Im Falle der Potenznutzenfunktion kann die Lösung für unser Optimierungsproblem im NTAM beim Kauf von  $k$  Claims approximativ berechnet werden. Es gilt

$$V(x - p^b(k), k) = v(0, x - p^b(k), p, y) = \tilde{v}(0, x - p^b(k), p, y) + o(k^2)$$

mit  $\tilde{v}(t, x - p^b(k), p, y)$  gegeben durch (4.15)

Wie bereits erwähnt wurde die Erweiterung auf allgemeine europäische Claims von Henderson [12, Theorem 4.1.] analysiert. Sein Resultat für die Approximation ist

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, z, y, p) &= \frac{z^{1-R}}{1-R} e^{\frac{(1-R)}{2R} \lambda^2 (T-t)} \left( 1 + k \frac{C_t}{z} - \frac{k^2}{2} R \eta^2 (1 - \rho^2) \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \int_t^T \frac{Y_u^2 (C_u^Y)^2}{(X_u^{0*})^2} du \right)^{1-R} \\ &= \frac{z^{1-R}}{1-R} e^{\frac{(1-R)}{2R} \lambda^2 (T-t)} \left( 1 + k \frac{C_t}{z} - \frac{k^2}{2x} R \eta^2 (1 - \rho^2) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \int_t^T \frac{Y_u^2 (C_u^Y)^2}{X_u^{0,*}} du \right)^{1-R} \end{aligned}$$

mit den optimalen Vermögensprozess  $X^{0,*}$  des Merton-Problems sowie  $C_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)]$  und  $C_t^Y = \frac{\partial}{\partial Y} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)]$ . Hierbei bezeichnet  $\mathbb{Q}^{(0)}$  das minimale Martingalmaß von Föllmer & Schweizer und das Maß  $\hat{\mathbb{P}}$  ist gegeben durch

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp \left( \frac{1-R}{R} \lambda B_T - \frac{1}{2} \left( \frac{(1-R)}{R} \right)^2 \lambda^2 T \right).$$

Im Falle von  $C(Y) = Y$  stimmen die beiden Approximationen natürlich überein. Damit haben wir für die exponentielle und die Potenznutzenfunktion den erwarteten Nutzen des Endvermögens bei optimaler Handlungsstrategie in den Fällen (No Claim) und (Buy Claim) ermittelt. Wir fassen die Resultate der Beispiele hier einmal zusammen.

### Resultat 4.23

Im Falle von konstanten Parametern im NTAM und einem Claim der Form  $C = C(Y)$  ergeben sich für die Optimierungsprobleme

(1) bei der exponentiellen Nutzenfunktion  $U(z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}$

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{rT}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 T}$$

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(x - p^b(k))e^{rT} - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}$$

(2) und bei der Potenznutzenfunktion  $U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}$

$$V(x, 0) = \frac{x^{1-R}}{1-R} e^{(1-R)rT} e^{\frac{1-R}{2R}\lambda^2 T}$$

bzw. mit  $C(Y) = Y$  und  $r = 0$

$$V(x - p^b(k), k) = \tilde{v}(0, x - p^b(k), p, y) + o(k^2)$$

mit  $\tilde{v}(t, x - p^b(k), p, y)$  gegeben durch (4.15).

### 4.2.3. Stochastic volatility model

Die Anwendung des grundlegenden Ansatzes auf stochastische Volatilitätsmodelle wurde unter anderem von Zariphopoulou [37], Grasselli & Hurd [11] sowie Monoyios [29] untersucht. Erstere betrachtet das Merton-Problem für die Potenznutzenfunktion und nutzt die bisher gezeigte Methodik des grundlegenden Ansatzes, ebenso wie Grasselli & Hurd bei ihrer Analyse mit exponentiellen Präferenzen. In dem Paper von Monoyios hingegen werden auch Ideen des dualen Ansatzes, welchen wir im nächsten Kapitel betrachten, verwendet. Im SVM ergibt sich das stochastische System

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t [\sigma(Y_t)\pi_t dB_t + (\sigma(Y_t)\pi_t\lambda(Y_t) + r_t)dt] & X_0 &= z, \\ dP_t &= P_t [\mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t] & P_0 &= p, \\ dY_t &= b(Y_t)dt + a(Y_t)dW_t & Y_0 &= y. \end{aligned}$$

## 1. Schritt (Mertons Portfolioproblem)

Im NTAM haben wir bereits begründet, dass aufgrund der CARA- bzw. CRRA-Eigenschaft der Nutzenfunktionen im Merton-Problem der aktuelle Kurs von  $P$  keine Relevanz besitzt und daher  $v_p = 0$  gilt. Im Unterschied zum vorigen Beispiel können wir aber im SVM den Prozess  $Y$  nicht ignorieren. Die HJB-Gleichung aus Proposition 4.10 vereinfacht sich aus diesem Grunde unter Verwendung der bekannten Setzung

$\theta^p = \theta \cdot p$  zu

$$0 = \sup_{\pi} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + A(t, z, p, y, \pi_t)$$

mit

$$\begin{aligned} A(t, z, p, y, \pi_t) = & \frac{1}{2} \sigma^2(y) (\theta_t^p)^2 v_{zz} + \frac{1}{2} a^2(y) v_{yy} + \sigma(y) a(y) \rho_t \theta_t^p v_{zy} \\ & + (\sigma(y) \lambda(y) \theta_t^p + r_t z) v_z + b(y) v_y. \end{aligned}$$

#### Annahme 4.24

Entsprechend der Quelle [29] gehen wir im weiteren Verlauf davon aus, dass die Zinsrate  $r = 0$  und die Korrelation  $\rho \in (-1, 1)$  konstant ist. Die erste Annahme entspricht einer Betrachtung von diskontierten Prozessen, welche im Fall von deterministischen Zinsraten (wie in [11, 37]) keinen Verlust der Generalität zur Folge hat. Allerdings können die Resultate nur unter bestimmten Voraussetzungen auf stochastische Zinsraten übertragen werden [37, Remark 2.1]. Die zweite Annahme ist sehr restriktiv, aber bringt uns in die komfortable Situation, explizite Kalkulationen durchführen zu können.

Für den optimalen absoluten Wert investiert in die Aktie  $P$  erhalten wir

$$\theta_t^p = - \frac{\lambda(y) v_z + \rho a(y) v_{zy}}{\sigma(y) v_{zz}}$$

und damit transformiert sich die HJB-Gleichung zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + \frac{1}{2} a^2(y) v_{yy} + b(y) v_y - \frac{1}{2} \frac{(\lambda(y) v_z + \rho a(y) v_{zy})^2}{v_{zz}}. \quad (4.16)$$

Im Gegensatz zum NTAM, wo wir eine separate Betrachtung der beiden Nutzenfunktionen vorgenommen haben, wollen wir die Resultate des Merton-Problems im SVM zusammenfassen. Hierbei handelt sich um eine modifizierte Version der „*Distortion Power Solution*“ von Monoyios [29, Proposition 1], wobei die Existenz einer Konstante  $C$  derart, dass die Funktionen  $\lambda$  und  $b$

$$\begin{aligned} |b(y)| &\leq C|y| \quad \text{und} \quad |b'(y)| \leq C \\ \text{sowie} \quad |\lambda(y)| &\leq C|y| \quad \text{und} \quad |\lambda'(y)| \leq C \end{aligned} \quad (4.17)$$

für alle  $y \in \mathbb{R}$  erfüllen, vorausgesetzt sei. Analoge Resultate sind für den Fall der exponentiellen Nutzenfunktion in [33, Proposition 2.4.] sowie für den Potenznutzen in [37, Theorem 3.2] zu finden. Hierbei sei bemerkt, dass letztere stärkere Restriktionen

an die Prozesse stellt [37, Bedingungen (3.20)-(3.22)], welche weder auf das Stein-Stein-Modell noch auf das Heston-Modell zutreffen. Im Gegensatz hierzu können wir die weiteren Ausführungen auf Varianten dieser Modelle anwenden, denn einerseits erfüllt das Stein-Stein-Modell mit  $\lambda(Y_t) = \mu \cdot Y_t, \mu \neq 0$ , die Bedingungen in (4.17). Andererseits zeigten Benth & Karlsen [1] sowie Kraft [25] die Gültigkeit des folgenden Satzes auch für die Version des Heston-Modells in Beispiel 3.11, obwohl dort die Sharpe-Ratio  $\lambda(Y_t) = \mu \cdot \sqrt{Y_t}, \mu \neq 0$  (4.17) nicht erfüllt. Hierbei beschäftigen sich Erstere mit der Optimierung unter exponentiellen Präferenzen, während Letzterer die nötige Erweiterung für den Potenznutzen vollführt.

**Satz 4.25** (Distortion Power Solution)

Sei der Parameter  $q$  definiert als

$$q := \begin{cases} 1 & \text{für } U(z) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma z}, \\ 1 - \frac{1}{R} & \text{für } U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}, \end{cases}$$

dann ist der Wertprozess  $v(t, z, p, y)$  gegeben durch

$$v(t, z, p, y) = U(z) (G(t, y))^{1/\Lambda}$$

mit  $\Lambda := 1 - qp^2$ . Der Prozess  $G(t, y)$  hat die stochastische Darstellung

$$G(t, y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_t^T \lambda^2(Y_u) du \right) \middle| Y_t = y \right],$$

wobei das Maß  $\mathbb{P}^M$  die Dichte

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-q\rho(\lambda \cdot W))_T \quad (4.18)$$

bezüglich  $\mathbb{P}$  besitzt. Insbesondere folgt für den Wert  $V(x, 0)$  demnach

$$V(x, 0) = U(x) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_0^T \lambda^2(Y_u) du \right) \right]^{1/\Lambda}.$$

*Beweis.* Mit dem Ansatz  $v(t, z, p, y) = U(z) (G(t, y))^{1/\Lambda}$  kann aus der HJB-Gleichung (4.16) eine lineare PDE für die Funktion  $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  hergeleitet werden. Hierbei ergibt sich

$$\frac{q}{2} \Lambda \lambda^2(y) G(t, y) = G_t(t, y) + (b(y) - qpa(y)\lambda(y)) G_y(t, y) + \frac{1}{2} a^2(y) G_{yy}(t, y) \quad (4.19)$$

mit der Randbedingung  $G(T, y) = 1$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Die Herleitung in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion befindet sich im Anhang (A.3.3 und A.3.4). Gelten die Restriktionen (4.17), so konnten Benth und Karlsen [1, Theorem 4.3.] für den Fall der exponentiellen Nutzenfunktion beweisen, dass eine eindeutige Lösung für die Funktion  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t, y) := -\frac{1}{\Lambda} \log G(t, y)$$

existiert. Für die Potenznutzenfunktion, das heißt  $q = 1 - \frac{1}{R}$ , kann der Beweis analog geführt werden. Die resultierende Lösung für  $G$  ist nach der Feynman-Kac-Formel gegeben durch die Darstellung

$$G(t, y) = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_t^T \lambda^2(\widehat{Y}_u) du \right) \middle| \widehat{Y}_t = y \right],$$

wobei der Prozess  $\widehat{Y}$  die SDE

$$d\widehat{Y}_t = \left( b(\widehat{Y}_t) - q\rho a(\widehat{Y}_t) \lambda(\widehat{Y}_t) \right) dt + a(\widehat{Y}_t) d\widehat{W}_t \quad (4.20)$$

mit einer  $\widehat{\mathbb{P}}$ -Brownschen Bewegung  $\widehat{W}$  erfüllt. In Anlehnung an Monoyios [29, Kapitel 2] definieren wir das Maß  $\mathbb{P}^M$  durch

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-q\rho(\lambda \cdot W))_T,$$

welches der Autor als „*minimal distortion measure*“ bezeichnet. Die Anwendung von Girsanov liefert, dass  $W_t^M := W_t + q\rho \int_0^t \lambda(Y_u) du$  eine Brownsche Bewegung bzgl.  $\mathbb{P}^M$  ist, und die SDE von  $Y$  transformiert sich zu

$$\begin{aligned} dY_t &= b(Y_t)dt + a(Y_t)dW_t \\ &= b(Y_t)dt + a(Y_t) (dW_t^M - q\rho \lambda(Y_t)dt) \\ &= (b(Y_t) - q\rho a(Y_t) \lambda(Y_t)) dt + a(Y_t) dW_t^M. \end{aligned}$$

Der Prozess  $Y$  erfüllt also eine SDE der Form (4.20) bzgl.  $\mathbb{P}^M$  und dies impliziert

$$G(t, y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_t^T \lambda^2(Y_u) du \right) \middle| Y_t = y \right]. \quad \square$$

## 2. Schritt (Portfoliooptimierung mit Claim)

Bei der Portfoliooptimierung mit Claim kann im Falle einer exponentiellen Nutzenfunktion auf das Vorgehen im Merton-Problem zurückgegriffen werden [29, Proposition 5].

### Satz 4.26

Der Wertprozess  $v(t, z, p, y)$  für den Kauf von  $k$  europäischen Claims mit Auszahlung  $C_T = C(Y_T)$  ist gegeben durch

$$v(t, z, p, y) = U(z) (G(t, y))^{1/\Lambda}$$

mit  $\Lambda := 1 - \rho^2$ , wobei der Prozess  $G(t, y)$  die stochastische Darstellung

$$G(t, y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \Lambda \int_t^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma \Lambda k C(Y_T) \right) \middle| Y_t = y \right]$$

besitzt. Das Maß  $\mathbb{P}^M$  ist definiert durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-\rho(\lambda \cdot W))_T.$$

*Beweis.* Folgt mit den selben Argumenten wie im Beweis von Satz 4.25, wobei sich die veränderte Form von  $G$  aus der neuen Endbedingung ergibt.  $\square$

Auch für das SVM fassen wir die Ergebnisse der Beispiele zusammen.

### Resultat 4.27

Im SVM ergibt sich für die Optimierungsprobleme

$$V(z, k) = U(z) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_0^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma \Lambda k C \right) \right]^{1/\Lambda}$$

mit  $\Lambda = 1 - q\rho^2$  und dem Maß  $\mathbb{P}^M$  definiert durch die Dichte in (4.18). Hierbei gilt

$$q = \begin{cases} 1 & \text{für } U(z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}, \\ 1 - \frac{1}{R} & \text{für } U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}, \end{cases}$$

sowie

$$C = \begin{cases} 0 & \text{für Mertons Portfoliooptimierung,} \\ C(Y_T) & \text{für die Optimierung mit Claim bei } U(z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}. \end{cases}$$



## 5. Der duale Ansatz

### Erinnerung

Für die Anwendbarkeit des grundlegenden Ansatzes wird das Vorliegen eines markovischen Settings benötigt.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, können wir bisher keine nutzen-neutralen Preise berechnen, dementsprechend wird für deren Berechnung ein neuer Ansatz, der sogenannte duale Ansatz, benötigt. Der Aufbau dieses Kapitels folgt dem Vorigen, das heißt, wir beginnen im ersten Teil, dem Theorieteil, mit der dualen Überführung der Optimierungsprobleme, welche in der fundamentalen Darstellungsgleichung („*fundamental representation equation*“ [20, Remark 1.2], kurz *FRE*) münden wird. Im zweiten Abschnitt folgt die Anwendung der Methode auf die bekannten Modelle.

### Idee des Ansatzes

Beim dualen Ansatz wird das Problem der Optimierung über Handelsstrategien

$$V(z, k) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)]$$

mit Hilfe eines Lagrange-Ansatzes überführt in eine Minimierung über die Dichten der Zustandspreise („*state-price densities*“). Deren Menge ist charakterisiert durch

$$\Theta = \left\{ \zeta = \left( \frac{1}{N_t} \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} \right)_{0 \leq t \leq T} \mid Q \in \mathcal{Q} \right\},$$

wobei  $N$  das Numeraire und  $\mathcal{Q}$  die Menge der äquivalenten Martingalmaße darstellt. Die Grundidee ist, dass eine zufällige Auszahlung  $X_T$  genau dann in  $\mathcal{A}(z)$  liegt, wenn  $\mathbb{E}[\zeta_T X_T] \leq z$  für alle  $\zeta \in \Theta$  gilt. Dementsprechend erfüllt jeder Prozess  $X_T \in \mathcal{A}(z)$  für alle  $\zeta \in \Theta$  und alle nicht-negativen Lagrange-Multiplikatoren  $\nu$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(X_T + kC_T)] &\leq \mathbb{E}[U(X_T + kC_T) - \nu(\zeta_T X_T - z)] \\ &= \mathbb{E}[U(X_T + kC_T) - \nu\zeta_T(X_T + kC_T) + \nu(z + k\zeta_T C_T)] \\ &\leq \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu\zeta_T)] + \nu z + \nu k \mathbb{E}[\zeta_T C_T], \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei  $\tilde{U}(y) = (-U)^*(-y)$  die Legendre-Transformation von  $-U$  an der Stelle  $-y$  bezeichnet. Eine kurze Einführung zu dieser Transformation ist im Anhang (A.4) vorzufinden. Mit dieser Abschätzung erhalten wir für den Wertprozess die obere Schranke

$$V(z, k) \leq \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu z + \nu k \mathbb{E}[\zeta_T C_T] \right\}. \quad (5.2)$$

Andererseits schlägt die Anwendung des Lagrange-Ansatzes als Kandidaten für den optimalen Vermögensprozess denjenigen Prozess  $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  vor, für welchen  $\zeta^* \in \Theta$  und  $\nu^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  existieren derart, dass  $U'(X_T^* + kC_T) = \nu^* \zeta_T^*$  gilt. Da der Investor das komplette Startkapital ausnutzen wird, erfüllen diese optimalen Prozesse außerdem  $\mathbb{E}[\zeta_T^* X_T^*] = z$ . Insgesamt erhalten wir unter der Voraussetzung der Existenz solcher optimalen Prozesse in (5.1) und folglich in (5.2) Gleichheit.

## 5.1. $q$ -optimale Maße und die fundamentale Darstellungsgleichung

### Konzept 5.1

*Das duale Problem zur Berechnung von  $V(z, k)$  ist gegeben durch die Optimierungsaufgabe*

$$\inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu z + \nu k \mathbb{E}[\zeta_T C_T] \right\}. \quad (5.3)$$

*Wir müssen also eine simultane Minimierung über die Dichten der Zustandspreise und die nicht-negativen Lagrange-Multiplikatoren durchführen. Die Grundidee zur Lösung dieses Problems besteht darin, die Existenz eines optimalen Vermögensprozesses  $X^*$  anzunehmen, das heißt, es gilt  $X_T^* + kC_T = I(\nu^* \zeta_T^*)$ , wobei  $I = (U')^{-1}$  die inverse Funktion von  $U'$  bezeichnet. Aus dieser Gleichung können wir in unserem Basismodell (3.6) in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion die FRE herleiten. Mit deren Hilfe kann in (5.3) die Minimierung separat, das heißt, zuerst über die Dichten der Zustandspreise und dann über die Lagrange-Multiplikatoren, durchgeführt werden. Hierbei ergibt sich, dass die Dichte  $\zeta^*$  zu einem  $q$ -optimalen Maß („ $q$ -optimal pricing measure“) gehört, wobei  $q$  von der Nutzenfunktion abhängt. Für weitere Informationen sowie eine genaue Definition der  $q$ -optimalen Maße sei auf Henderson et al. [16, Kapitel 3] verwiesen. Schlussendlich erhalten wir für den Wertprozess  $V(z, k)$  eine Darstellung in Abhängigkeit einer Variablen, die durch die FRE eindeutig festgelegt ist.*

### 5.1.1. Mertons Portfolioproblem

Im Fall des Merton-Problems lautet das duale Optimierungsproblem

$$\inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu x \right\}. \quad (5.4)$$

Wir werden diesen Term in Sinne des oben beschriebenen Vorgehens berechnen, möchten aber bemerken, dass in speziellen Fällen ein schnellerer Weg möglich ist.

#### Bemerkung 5.2

*Betrachten wir das NTAM, so kann beim Merton-Problem die Präsenz des Kurses  $Y$  ignoriert, und das Modell auf den Fall eines vollständigen Marktes reduziert werden. In diesem Szenario ist das äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt, welches hier dem minimalen Martingalmaß von Föllmer & Schweizer entspricht. Damit vereinfacht sich die Minimierung in (5.4) zu einer Minimierung über eine reell-wertige Menge. Im Gegensatz zum Aufstellen und Lösen einer HJB-Gleichung ist der duale Ansatz demzufolge in einigen Modellen eine starke Vereinfachung.*

Unser Ansatz besteht beim Merton-Problem aus der Gleichung

$$X_T^* = I(\nu^* \zeta_T^*) \quad (5.5)$$

mit  $X_T^* \in \mathcal{A}(x)$ ,  $\zeta^* \in \Theta$  und  $\nu^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Für unser weiteres Vorgehen benötigen wir zunächst die Darstellung der Dichten der Zustandspreise, welche kurz in Erinnerung gerufen wird.

#### Erinnerung

*Im Basismodell (3.6) sind die Dichten der Zustandspreise gegeben durch*

$$\zeta_t^x = \frac{1}{N_t} \frac{dQ^x}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( - \int_0^t r_u du \right) \cdot Z_t^x,$$

*mit  $Q^x \in \mathcal{Q}$ , das heißt, der Prozess  $Z^x$  besitzt die Darstellung*

$$Z_t^x = \exp \left( - \int_0^t \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_u^2 du - \int_0^t \chi_u dB_u^\perp - \frac{1}{2} \int_0^t \chi_u^2 du \right)$$

*und erfüllt*

$$\mathbb{E}[Z_T^x] = 1.$$

Wir identifizieren die optimale Dichte  $\zeta^*$  mit ihrem zugehörigen Prozess  $\chi^*$ . Kennen wir außerdem die stochastische Darstellung des optimalen Vermögensprozesses, so können wir die Gleichung (5.5) umformulieren. Für die beiden Nutzenfunktionen bietet sich aufgrund der Form von  $I$  eine unterschiedliche Darstellung des Prozesses  $X^*$  an und zudem wird eine deterministische Zinsrate benötigt. Wir beginnen mit dem exponentiellen Nutzen.

### a) Exponentielle Nutzenfunktion

Der optimale Vermögensprozess  $X^*$  erfüllt die SDE

$$dX_t^* = X_t^* \sigma_t^* \pi_t^* dB_t + X_t^* (\sigma_t^* \pi_t^* \lambda_t + r_t) dt, \quad X_0^* = x.$$

In diesem Fall bietet sich nicht die Verwendung der Exponentialmartingaldarstellung an, sondern wir interpretieren  $X^*$  als Hull-White-Prozess und schreiben

$$\begin{aligned} X_t^* &= e^{\int_0^t r_s ds} \left( x + \int_0^t e^{-\int_0^u r_s ds} X_u^* \sigma_u^* \pi_u^* (dB_u + \lambda_u du) \right) \\ &= x e^{\int_0^t r_s ds} + \int_0^t e^{\int_u^t r_s ds} X_u^* \sigma_u^* \pi_u^* (dB_u + \lambda_u du), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit dank der Determiniertheit der Zinsrate gilt.

### Satz 5.3 (Fundamentale Darstellungsgleichung bei Exponentialnutzen)

Beim exponentiellen Nutzen ergibt sich aus der Gleichung  $X_T^* = I(\nu^* \zeta_T^*)$ ,  $X_T^* \in \mathcal{A}(x)$ , die FRE

$$\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du = \alpha + M_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T \quad (5.6)$$

mit  $[\cdot]$  als Symbol für die quadratische Variation und

$$\begin{aligned} M_T &= \int_0^T \phi_u^* (dB_u + \lambda_u du), & \phi_t^* &= \lambda_t - \gamma X_t^* \pi_t^* \sigma_t^* e^{\int_t^T r_s ds}, \\ M_T^\perp &= \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp, & \alpha &= \int_0^T r_u du - \ln \nu^* - \gamma x e^{\int_0^T r_s ds}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Inverse der Ableitung von  $U$  ist  $I(y) = -\frac{1}{\gamma} \ln(y)$ , somit kann aus der Voraussetzung  $X_T^* = I(\nu^* \zeta_T^*) = -\frac{1}{\gamma} (\ln(\nu^*) + \ln(\zeta_T^*))$  die Gleichung

$$-\gamma x e^{\int_0^T r_s ds} - \gamma \int_0^T e^{\int_u^T r_s ds} X_u^* \sigma_u^* \pi_u^* (dB_u + \lambda_u du)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(\nu^*) - \int_0^T r_u du - \int_0^T \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du - \int_0^T \chi_u dB_u^\perp - \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^*)^2 du \\
&= \ln(\nu^*) - \int_0^T r_u du - \int_0^T \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du - M_T^\perp - \frac{1}{2} [M^\perp]_T
\end{aligned}$$

mit  $M_T^\perp := \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp$  hergeleitet werden. Durch Umordnung der Terme ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du - \int_0^T r_u du + \ln(\nu^*) + \gamma x e^{\int_0^T r_s ds} \\
&= M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T + \int_0^T \underbrace{\left( \lambda_u - \gamma e^{\int_u^T r_s ds} X_u^* \sigma_u \pi_u^* \right)}_{:= \phi_u^*} (dB_u + \lambda_u du) \\
&= M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T + \int_0^T \phi_u^* (dB_u + \lambda_u du).
\end{aligned}$$

Aus der Setzung  $\alpha = \int_0^T r_u du - \ln \nu^* - \gamma x e^{\int_0^T r_s ds}$  sowie  $M_T := \int_0^T \phi_u^* (dB_u + \lambda_u du)$  resultiert schlussendlich die FRE

$$\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du = \alpha + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T + M_T. \quad \square$$

Es sei bemerkt, dass die FRE keine Identität für stochastische Prozesse ist, sondern eine Gleichung von  $\mathcal{F}_T$ -messbaren Zufallsvariablen mit den drei relevanten Variablen  $\phi^*$ ,  $\chi^*$  und  $\alpha$  liefert. Durch sie ist die optimale Lösung eindeutig festgelegt, das heißt, bei deren Kenntnis können wir die Minimierer  $\nu^*$  und  $\zeta^*$  in (5.4) angeben. Hierüber kennen wir dann den optimalen Prozess  $X^*$  und die Berechnung des optimalen Wertes  $V(x, 0)$  ist leicht möglich. Wir werden nun zeigen, dass dieses Optimum

$$V(x, 0) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(X_T)] = \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E} \left[ \tilde{U}(\nu \zeta_T) \right] + \nu x \right\}$$

eine direkte Abhängigkeit vom Wert  $\alpha$  besitzt und folglich bei dessen Kenntnis sofort angegeben werden kann. Bei der exponentiellen Nutzenfunktion lautet die Legendre-

Transformierte  $\tilde{U}(y) = \frac{1}{\gamma} [y \ln(y) - y]$  und dies impliziert für  $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\zeta^\chi \in \Theta$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tilde{U}(\nu \zeta_T^\chi)] &= \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} [\nu \zeta_T^\chi \ln(\nu \zeta_T^\chi) - \nu \zeta_T^\chi] \\ &= \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} [\nu \zeta_T^\chi (\ln(\nu) + \ln(\zeta_T^\chi) - 1)] \\ &= \frac{\nu}{\gamma} \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^T r_u du} Z_T^\chi \left( \ln(\nu) - \int_0^T r_u du + \ln(Z_T^\chi) - 1 \right) \right] \\ &= \frac{\nu}{\gamma} e^{-\int_0^T r_u du} \left[ \ln(\nu) - \int_0^T r_u du - 1 + \mathbb{E} [Z_T^\chi \ln(Z_T^\chi)] \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

#### Bemerkung 5.4

Der Term  $H(Q, \mathbb{P}) := \mathbb{E} \left[ \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \ln \left( \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right) \right]$  heißt *relative Entropie* von  $Q$  bezüglich  $\mathbb{P}$ . Dessen Minimierung führt zu dem  $q$ -optimalen Maß  $\mathbb{Q}^{(q)}$  mit  $q = 1$ , bekannt als „minimal entropy martingal measure“ (MEMM). Zwar gilt laut Definition

$$H(\mathbb{Q}^{(1)}, \mathbb{P}) = \inf_{Q \in \mathcal{M}} H(Q, \mathbb{P}),$$

wobei  $\mathcal{M}$  die Menge der bezüglich  $\mathbb{P}$  absolut-stetigen Martingalmaße bezeichnet, aber Frittelli [10, Theorem 2.2] hat bewiesen, dass bei Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes mit endlicher Entropie das MEMM auch äquivalent zu  $\mathbb{P}$  ist. Aufgrund unserer Annahmen besitzt das minimale Martingalmaß von Föllmer & Schweizer eine endliche Entropie und dies impliziert, dass wir zur Kalkulation von

$$\inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu x \right\}$$

in der Menge der äquivalenten Martingalmaße das MEMM finden müssen. Aber für unsere Belange wird die genaue Form von  $\mathbb{Q}^{(1)}$  nicht relevant sein, sondern der Wert seiner relativen Entropie. Das entscheidende Resultat lautet

$$H(\mathbb{Q}^{(1)}, \mathbb{P}) = \mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{Q}^{(1)}}{d\mathbb{P}} \ln \left( \frac{d\mathbb{Q}^{(1)}}{d\mathbb{P}} \right) \right] = \alpha \quad (5.8)$$

mit  $\mathbb{Q}^{(1)} = Q^{\chi^*}$ , vergleiche Hobson [20, Theorem 1.1].

Um diese Aussage zu zeigen, beginnen wir mit der Transformation der Dichte

$$\frac{dQ^\chi}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = Z_T^\chi = \mathcal{E} \left( - \int_0^\cdot \lambda_u B_u - \int_0^\cdot \chi_u B_u^\perp \right)_T.$$

Da  $(B, B^\perp)$  eine zweidimensionale Brownsche Bewegung bezüglich  $\mathbb{P}$  ist, liefert Girs-

nov, dass  $(B^{Q^x}, B^{\perp Q^x})$  mit

$$B_t^{Q^x} = B_t + \int_0^t \lambda_u du, \quad B_t^{\perp Q^x} = B_t^\perp + \int_0^t \chi_u du \quad (5.9)$$

eine zweidimensionale Brownsche Bewegung bezüglich  $Q^x$  darstellt. Einsetzen in die Dichte ergibt

$$Z_T^x = \exp \left( - \int_0^T \lambda_u dB_u^{Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du - \int_0^T \chi_u dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \chi_u^2 du \right)$$

für alle  $0 \leq t \leq T$  und unter Anwendung der FRE (5.6) kann

$$\begin{aligned} \ln(Z_T^x) &= - \int_0^T \lambda_u dB_u^{Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du - \int_0^T \chi_u dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \chi_u^2 du \\ &= - \int_0^T \lambda_u dB_u^{Q^x} + \alpha + M_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T - \int_0^T \chi_u dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \chi_u^2 du \\ &= \alpha + \int_0^T (\phi_u^* - \lambda_u) dB_u^{Q^x} + \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u) dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u)^2 du \end{aligned}$$

hergeleitet werden. Vorausgesetzt, das lokale Martingal  $\left( \int_0^t (\phi_u^* - \lambda_u) dB_u^{Q^x} \right)_{0 \leq t \leq T}$  ist ein echtes Martingal bezüglich  $Q^x$ , ergibt die Erwartungswertbildung

$$\mathbb{E} [Z_T^x \ln(Z_T^x)] = \alpha + \mathbb{E}^{Q^x} \left[ \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u) dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u)^2 du \right].$$

Ein hinreichendes Kriterium für die Erfüllung dieser Annahme ist die Endlichkeit des Erwartungswertes der quadratischen Variation für den Zeitpunkt  $T$ , das heißt  $\mathbb{E}^{Q^x} \left[ \int_0^T (\phi_u^* - \lambda_u)^2 du \right] < \infty$ , vergleiche [20, Proposition 3.5]. Mit dem folgenden Lemma erhalten wir schlussendlich  $H(\mathbb{Q}^{(1)}, \mathbb{P}) = \inf_{\zeta \in \Theta} \mathbb{E} [Z_T \ln(Z_T)]$ .

### Lemma 5.5

Es gilt für jedes  $\zeta^x \in \Theta$

$$\mathbb{E}^{Q^x} \left[ \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u) dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u)^2 du \right] \geq 0.$$

*Beweis.* Wir verweisen auf das Paper von Hobson [20, Lemma 3.4]. □

Die relative Entropie wird nach dem vorigen Lemma minimal für die Wahl  $\chi = \chi^*$ , welches keine Überraschung darstellt, schließlich sind aufgrund des Ansatzes  $\chi^*$  und  $\nu^*$  die optimale Wahlen in unserem Minimierungsproblem. Die wichtigere Folgerung des

Lemmas ist die Gültigkeit von (5.8), das heißt, es gilt

$$\mathbb{E} \left[ \frac{dQ^{(1)}}{d\mathbb{P}} \ln \left( \frac{dQ^{(1)}}{d\mathbb{P}} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{dQ^{\chi^*}}{d\mathbb{P}} \ln \left( \frac{dQ^{\chi^*}}{d\mathbb{P}} \right) \right] = \alpha$$

und dies impliziert

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu x \right\} \\ &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \frac{\nu}{\gamma} e^{-\int_0^T r_u du} \left[ \ln(\nu) - \int_0^T r_u du - 1 + \mathbb{E}[Z_T \ln(Z_T)] \right] + \nu x \right\} \\ &= \inf_{\nu \geq 0} \left\{ \frac{\nu}{\gamma} e^{-\int_0^T r_u du} \left[ \ln(\nu) - \int_0^T r_u du - 1 + \alpha \right] + \nu x \right\}. \end{aligned}$$

Dieser Term wird minimiert durch die Wahl von  $\nu = \exp \left( \int_0^T r_u du - \alpha - x\gamma e^{\int_0^T r_u du} \right)$ , welches dem  $\nu^*$  aus (5.5) entspricht. Insgesamt besitzt der optimale erwartete Endnutzen den Wert

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} \exp \left( -\alpha - x\gamma e^{\int_0^T r_u du} \right) \quad (5.10)$$

mit  $\alpha$  eindeutig festgelegt durch (5.6). Dies bedeutet, dass bei Kenntnis von  $\alpha$  das Optimum mittels (5.10) direkt angegeben werden. Folglich besteht die verbliebene Aufgabe darin, eine Lösung der FRE zu bestimmen. Dies entspricht der Suche nach Prozessen  $\phi^*$  und  $\chi^*$  und einem Wert  $\alpha$ , sodass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du &= \alpha + M_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T \\ &= \alpha + \int_0^T \phi_u^* (dB_u + \lambda_u du) + \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^*)^2 du \end{aligned} \quad (5.11)$$

erfüllt ist und zusätzlich  $\alpha$ ,  $\int_0^T \lambda_u^2 du$ ,  $\int_0^T (\phi_u^*)^2 du$  sowie  $\int_0^T (\chi_u^*)^2 du$  endlich sind.

## b) Potenznutzenfunktion

Als nächstes kommen wir zur zweiten Nutzenfunktion, bei der sich ebenfalls die Nutzung der SDE

$$dX_t^* = X_t^* \sigma_t \pi_t^* dB_t + X_t^* (\sigma_t \pi_t^* \lambda_t + r_t) dt, \quad X_0^* = x$$



anbietet, aber jetzt in Form der Exponentialmartingaldarstellung

$$X_t^* = x \exp \left\{ \int_0^t \pi_u^* \sigma_u (dB_u + \lambda_u du) + \int_0^t \left( r_u - \frac{1}{2} (\pi_u^*)^2 \sigma_u^2 \right) du \right\}.$$

**Satz 5.6** (Fundamentale Darstellungsgleichung bei Potenznutzen)

Beim Potenznutzen ergibt sich aus der Gleichung  $X_T^* = I(\nu^* \zeta_T^*)$  die FRED

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \int_0^T \lambda_u^2 du = \alpha + M_T + \frac{1}{2R} [M]_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T \quad (5.12)$$

mit

$$\begin{aligned} M_T &= \int_0^T \phi_u^* \left( dB_u + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \lambda_u du \right), \quad \phi_t^* = \lambda_t - R \pi_t^* \sigma_t, \\ M_T^\perp &= \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp, \quad \alpha = (1 - R) \int_0^T r_u du - \ln(\nu^*) - R \ln(x). \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Funktion  $I(y) = (U')^{-1}(y) = y^{-1/R}$  empfiehlt die Anwendung des Logarithmus. Die Gleichung  $\ln(X_T^*) = \ln(I(\nu^* \zeta_T^*)) = -\frac{1}{R} \ln(\nu^* \zeta_T^*)$  transformiert sich durch Einsetzen der Darstellungen von  $X^*$  und  $\zeta^*$  zu

$$\begin{aligned} \ln(x) + \int_0^T \pi_u^* \sigma_u (dB_u + \lambda_u du) + \int_0^T \left( r_u - \frac{1}{2} (\pi_u^*)^2 \sigma_u^2 \right) du \\ = -\frac{1}{R} \ln(\nu^*) + \frac{1}{R} \int_0^T r_u du + \frac{1}{R} \int_0^T \lambda_u dB_u + \frac{1}{2R} \int_0^T \lambda_u^2 du + \frac{1}{R} \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp \\ + \frac{1}{2R} \int_0^T (\chi_u^*)^2 du \\ = -\frac{1}{R} \ln(\nu^*) + \frac{1}{R} \int_0^T r_u du + \frac{1}{R} \int_0^T \lambda_u dB_u + \frac{1}{2R} \int_0^T \lambda_u^2 du + \frac{1}{R} M_T^\perp + \frac{1}{2R} [M^\perp]_T, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt  $M_T^\perp := \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp$  gesetzt wird. Mit  $\phi_t^* := \lambda_t - R \pi_t^* \sigma_t$  folgt

$$\begin{aligned} \ln(x) + \int_0^T \frac{\lambda_u - \phi_u^*}{R} (dB_u + \lambda_u du) + \int_0^T \left( r_u - \frac{1}{2} \frac{(\lambda_u - \phi_u^*)^2}{R^2} \right) du \\ = -\frac{1}{R} \ln(\nu^*) + \frac{1}{R} \int_0^T r_u du + \frac{1}{R} \int_0^T \lambda_u dB_u + \frac{1}{2R} \int_0^T \lambda_u^2 du + \frac{1}{R} M_T^\perp + \frac{1}{2R} [M^\perp]_T. \end{aligned}$$

Nun kürzt sich der Term  $\frac{1}{R} \int_0^T \lambda_u dB_u$  und durch Multiplizieren mit  $R$  sowie Sortieren ergibt sich

$$\begin{aligned} & -\ln(\nu^*) - \ln(x)R + \int_0^T r_u du + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du + M_T^\perp + \frac{1}{2}[M^\perp]_T \\ &= -\int_0^T \phi_u^* dB_u + \int_0^T (\lambda_u^2 - \lambda_u \phi_u^*) du + \int_0^T \left( Rr_u - \frac{1}{2} \frac{(\lambda_u^2 - 2\lambda_u \phi_u^* + (\phi_u^*)^2)}{R} \right) du \\ &= -\int_0^T \phi_u^* \left( dB_u + \left(1 - \frac{1}{R}\right) \lambda_u du \right) + \int_0^T \left( \lambda_u^2 + Rr_u - \frac{\lambda_u^2 + (\phi_u^*)^2}{2R} \right) du. \end{aligned}$$

Mit der Setzung  $M_T := \int_0^T \phi_u^* (dB_u + (1 - \frac{1}{R})\lambda_u du)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\ln(\nu^*) - \ln(x)R + \int_0^T r_u du + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du + M_T^\perp + \frac{1}{2}[M^\perp]_T \\ &= -M_T - \frac{1}{2R}[M]_T + \int_0^T \left( Rr_u + \left(1 - \frac{1}{2R}\right) \lambda_u^2 \right) du \end{aligned}$$

und schlussendlich liefert  $\alpha := (1 - R) \int_0^T r_u du - \ln(\nu^*) - \ln(x)R$  die behauptete FRE

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \int_0^T \lambda_u^2 du = \alpha + M_T + \frac{1}{2R}[M]_T + M_T^\perp + \frac{1}{2}[M^\perp]_T. \quad \square$$

Für den gewinnbringenden Einsatz der FRE beginnen wir analog zum Vorgehen bei exponentiellen Präferenzen mit der Umformung des Optimierungsproblem. Aufgrund der Legendre-Transformierten  $\tilde{U}(y) = \frac{R}{1-R} y^{1-\frac{1}{R}}$  der Potenznutzenfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \nu x + \mathbb{E} \left[ \tilde{U}(\nu \zeta_T) \right] \right\} \\ &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \nu x + \mathbb{E} \left[ \frac{R}{1-R} (\nu \zeta_T)^{1-\frac{1}{R}} \right] \right\} \\ &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \nu x + \frac{R}{1-R} \nu^{1-\frac{1}{R}} \exp \left( - \left(1 - \frac{1}{R}\right) \int_0^T r_u du \right) \mathbb{E} \left[ (\zeta_T)^{1-\frac{1}{R}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

### Bemerkung 5.7

Die Umformung (5.13) liefert, dass der Term  $\mathbb{E} \left[ \left( \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right)^{1-\frac{1}{R}} \right]$  für die Minimierung über  $\Theta$  von Relevanz ist. Bemerkenswert ist, dass der Wert  $R$  darüber entscheidet, ob dieser Term maximal ( $R > 1$ ) oder minimal ( $R < 1$ ) werden soll. Schlussendlich wird sich aber ergeben, dass unabhängig von  $R$  die Wahl  $\chi = \chi^*$  optimal ist. Dies begründet sich in der Tatsache, dass wir indirekt in der Menge der äquivalenten Martingalmaße das

$q$ -optimale Bewertungsmaß  $\mathbb{Q}^{(q)}$  mit  $q = 1 - \frac{1}{R}$  suchen. In diesem Fall wird das Ergebnis

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{d\mathbb{Q}^{(q)}}{d\mathbb{P}} \right)^q \right] = e^{(q-1)\alpha} \quad (5.14)$$

sein, vergleiche Hobson [20, Theorem 1.1].

### Bemerkung 5.8

Die Bestimmung des optimalen Endwertes  $V(x, 0)$  bei gegebener Nutzenfunktion steht in direktem Bezug zur Bestimmung eines  $q$ -optimalen Maßes  $\mathbb{Q}^{(q)}$ , wobei der Parameter  $q$  bereits in der Anwendung des grundlegenden Ansatzes auftaucht, vergleiche Resultat 4.27. Für unsere Belange steht die Gestalt des optimalen Maßes nicht im Vordergrund, daher sei an dieser Stelle auf Quellen verwiesen, die sich einer expliziten Angabe widmen. Eine allgemeine Analyse von  $\mathbb{Q}^{(q)}$  befindet sich in [29, Theorem 1] und die Angabe des MEMM (im Heston Modell) kann in [20, Kapitel 5] oder [1, Proposition 5.2] nachgeschlagen werden.

Um das behauptete Resultat (5.14) einzusehen, beginnen wir analog zum Fall der exponentiellen Nutzenfunktion mit der Betrachtung der Dichte  $Z^x$ . Mit den dort definierten Brownschen Bewegungen  $B^{Q^x}$  und  $B^{\perp Q^x}$  sowie der FRE (5.12) gilt

$$\begin{aligned} Z_T^x &= \exp \left( - \int_0^T \lambda_u dB_u^{Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du - \int_0^T \chi_u dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \chi_u^2 du \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^T \lambda_u dB_u^{Q^x} + \alpha + \int_0^T \phi_u^* \left( dB_u + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \lambda_u du \right) + \frac{1}{2R} \int_0^T (\phi_u^*)^2 du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \chi_u^* dB_u^{\perp} + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^*)^2 du + \frac{1}{2R} \int_0^T \lambda_u^2 du - \int_0^T \chi_u dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \chi_u^2 du \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^T \lambda_u dB_u^{Q^x} + \alpha + \int_0^T \phi_u^* dB_u^{Q^x} + \frac{1}{R} \int_0^T \left( \phi_u^* \left( \frac{1}{2} \phi_u^* - \lambda_u \right) + \frac{1}{2} \lambda_u^2 \right) du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \chi_u^* dB_u^{\perp Q^x} - \int_0^T \chi_u^* \chi_u du + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^*)^2 du - \int_0^T \chi_u dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T \chi_u^2 du \right) \\ &= \exp \left( \alpha + \int_0^T (\phi_u^* - \lambda_u) dB_u^{Q^x} + \frac{1}{R} \int_0^T \left( \phi_u^* \left( \frac{1}{2} \phi_u^* - \lambda_u \right) + \frac{1}{2} \lambda_u^2 \right) du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u) dB_u^{\perp Q^x} + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u)^2 du \right). \end{aligned}$$

Setzen wir die Definition  $\phi_u^* = \lambda_u - R\pi_u^* \sigma_u$  ein, so ergibt sich

$$Z_T^x = \exp \left( \alpha - R \int_0^T \pi_u^* \sigma_u dB_u^{Q^x} + \frac{R}{2} \int_0^T (\pi_u^*)^2 \sigma_u^2 du + \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u) dB_u^{\perp Q^x} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^* - \chi_u)^2 du \Big).$$

und Potenzieren sowie Erwartungswertbildung liefert insgesamt

$$\mathbb{E} \left[ (Z_T^\chi)^{1-\frac{1}{R}} \right] = e^{-\alpha/R} \mathbb{E}^{Q^\chi} \left[ \mathcal{E} \left( \int_0^\cdot \pi_u^* \sigma_u dB_u^{Q^\chi} \right)_T \mathcal{E} \left( \int_0^\cdot (\chi_u - \chi_u^*) dB_u^{\perp Q^\chi} \right)_T^{\frac{1}{R}} \right].$$

Angenommen, die beiden lokalen Exponentialmartingale  $(\mathcal{E}(\int_0^\cdot \pi_u^* \sigma_u dB_u^{Q^\chi}))_{0 \leq t \leq T}$  und  $(\mathcal{E}(\int_0^\cdot (\chi_u - \chi_u^*) dB_u^{\perp Q^\chi}))_{0 \leq t \leq T}$  sind echte Martingale bezüglich  $Q^\chi$ , ein hinreichendes Kriterium hierfür ist die Erfüllung der Novikov-Bedingung, dann entspricht deren Erwartungswert dem Wert 1. Es folgt mit der Unabhängigkeit der Brownschen Bewegungen

$$\mathbb{E} \left[ (Z_T^\chi)^{1-\frac{1}{R}} \right] = e^{-\alpha/R} \mathbb{E}^{Q^\chi} \left[ \mathcal{E} \left( \int_0^\cdot (\chi_u - \chi_u^*) dB_u^{\perp Q^\chi} \right)_T^{\frac{1}{R}} \right]$$

Nun können wir uns der Fallunterscheidung ( $R < 1, R > 1$ ) widmen. Betrachtet wird die Funktion  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $h(y) = y^{1/R}$ . Für  $R < 1$  ist  $h$  konvex und die Jensensche Ungleichung impliziert für jedes  $\zeta^\chi \in \Theta$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (Z_T^\chi)^{1-\frac{1}{R}} \right] &= e^{-\alpha/R} \mathbb{E}^{Q^\chi} \left[ \mathcal{E} \left( \int_0^\cdot (\chi_u - \chi_u^*) dB_u^{\perp Q^\chi} \right)_T^{\frac{1}{R}} \right] \\ &\geq e^{-\alpha/R} \mathbb{E}^{Q^\chi} \left[ \mathcal{E} \left( \int_0^\cdot (\chi_u - \chi_u^*) dB_u^{\perp Q^\chi} \right)_T \right]^{\frac{1}{R}} = e^{-\alpha/R}. \end{aligned}$$

Insbesondere wird der Term  $\mathbb{E} \left[ (Z_T^\chi)^{1-\frac{1}{R}} \right]$  im Fall  $R < 1$  durch die Wahl von  $\chi = \chi^*$  minimal. Analog erhalten wir im Fall einer konkaven Funktion  $h$ , das heißt  $R > 1$ ,

$$\mathbb{E} \left[ (Z_T^\chi)^{1-\frac{1}{R}} \right] \leq e^{-\alpha/R}$$

für alle  $\zeta^\chi \in \Theta$  und das Maximum wird bei  $\chi = \chi^*$  erreicht. Somit ist gezeigt, dass sich im Optimierungsproblem unabhängig vom Wert  $R$  die Wahl der Zustandsdichte  $\zeta^{\chi^*}$  ergibt und die Gleichung (5.14) mit  $Q^{(1-\frac{1}{R})} = Q^{\chi^*}$  gilt. Dies impliziert

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \nu x + \frac{R}{1-R} \nu^{1-\frac{1}{R}} \exp \left( - \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \int_0^T r_u du \right) \mathbb{E} \left[ (Z_T)^{1-\frac{1}{R}} \right] \right\} \\ &= \inf_{\nu \geq 0} \left\{ \nu x + \frac{R}{1-R} \nu^{1-\frac{1}{R}} \exp \left( - \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \int_0^T r_u du \right) e^{-\alpha/R} \right\}. \end{aligned}$$

Die verbliebene Minimierung über die Menge  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ergibt für den Wert des Lagrange-Operators  $\nu = x^{-R} e^{(1-R) \int_0^T r_u du - \alpha}$  und liefert

$$V(x, 0) = \frac{x^{1-R}}{1-R} e^{(1-R) \int_0^T r_u du - \alpha}$$

mit  $\alpha$  eindeutig festgelegt durch die FRE (5.12).

### 5.1.2. Portfoliooptimierung mit Claim

Kommen wir zur Berechnung des Wertes  $V(x - p^b(k), k)$  für einen beliebigen europäischen Claim  $C$ . In diesem Fall lautet das duale Optimierungsproblem

$$\inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu (x - p^b(k)) + \nu k \mathbb{E}[\zeta_T C_T] \right\},$$

wobei die Existenz eines optimalen Vermögensprozesses  $X^*$  mit  $X_T^* + kC_T = I(\nu^* \zeta_T^*)$  angenommen wird. Analog zum Vorgehen in Mertons Portfolioproblem wollen wir eine FRE herleiten, leider ist dieses im Falle der Potenznutzenfunktion nicht ohne Weiteres möglich. Dies liegt daran, dass wir dort  $\ln(X_T^*)$  verwendet haben, welches nun zu  $\ln(X_T^* + kC_T)$  wird, und eine sinnvolle Transformation dieses Ausdrucks für allgemeine Claims bereitet Schwierigkeiten. Für die exponentielle Nutzenfunktion hingegen kann das Vorgehen repliziert werden. In Analogie zu Satz 5.3 gilt

**Satz 5.9** (Fundamentale Darstellungsgleichung bei Exponentialnutzen)

Beim exponentiellen Nutzen ergibt sich aus der Gleichung  $X_T^* + kC_T = I(\nu^* \zeta_T^*)$  mit  $X_T^* \in \mathcal{A}(x - p^b(k))$  die Darstellung

$$\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du + \gamma k C_T = \alpha + M_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T \quad (5.15)$$

mit

$$\begin{aligned} M_T &= \int_0^T \phi_u^* (dB_u + \lambda_u du), & \phi_t^* &= \lambda_t - \gamma X_t^* \pi_t^* \sigma_t e^{\int_t^T r_s ds}, \\ M_T^\perp &= \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp, & \alpha &= \int_0^T r_u du - \ln \nu^* - \gamma x e^{\int_0^T r_s ds}, \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Umformungen können analog zum Beweis von Satz 5.3 vorgenommen werden. □

Ebenfalls können die selben Argumente wie im Merton-Problem für den Beweis von

$$\inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[Z_T \ln(Z_T)] + \gamma k \mathbb{E}[Z_T C_T] \right\} = \mathbb{E}[Z_T^{\chi^*} \ln(Z_T^{\chi^*})] + \gamma k \mathbb{E}[Z_T^{\chi^*} C_T] = \alpha \quad (5.16)$$

genutzt werden. Unter Verwendung von (5.7) und (5.16) folgt

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &= \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\tilde{U}(\nu \zeta_T)] + \nu k \mathbb{E}[\zeta_T C_T] + \nu (x - p^b(k)) \right\} \\ &= \inf_{\nu \geq 0} \left\{ \frac{\nu}{\gamma} e^{-\int_0^T r_u du} \left[ \ln(\nu) - \int_0^T r_u du - 1 + \alpha \right] + \nu (x - p^b(k)) \right\} \end{aligned}$$

Abschließend liefert die Optimierung über den Lagrange-Parameter

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} \exp \left( -\alpha - (x - p^b(k)) \gamma e^{\int_0^T r_u du} \right) \quad (5.17)$$

mit  $\alpha$  eindeutig festgelegt durch (5.15).

## 5.2. Anwendung

Für die Anwendung nutzen wir, dass in Mertons Portfolioproblem die FREs (Sätze 5.3 und 5.6) zusammengefasst werden können, siehe auch [20, Theorem 1.1].

### Beobachtung 5.10

Bei deterministischer Zinsrate ist die FRE im Merton-Problem gegeben durch

$$\frac{q}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du = \alpha + M_T + \frac{1-q}{2} [M]_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T \quad (5.18)$$

mit

$$q = \begin{cases} 1 & \text{für } U(z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}, \\ 1 - \frac{1}{R} & \text{für } U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}, \end{cases}$$

und

$$M_T = \int_0^T \phi_u^* (dB_u + q \lambda_u du), \quad M_T^\perp = \int_0^T \chi_u^* dB_u^\perp.$$

Existieren Prozesse  $\phi^*, \chi^*$  sowie eine Konstante  $\alpha$  derart, dass die Gleichung (5.18)

mit endlichen Werten erfüllt ist, so kann das Optimum explizit durch

$$V(x, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma} \exp\left(-x\gamma \int_0^T r_u du - \alpha\right) & \text{für } U(z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}, \\ \frac{x^{1-R}}{1-R} \exp\left((1-R) \int_0^T r_u du - \alpha\right) & \text{für } U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}, \end{cases} \quad (5.19)$$

angegeben werden.

### 5.2.1. Non-traded assets model

Wir wollen uns zuerst mit dem NTAM im Falle konstanter Parameter befassen und beginnen mit der Kalkulation des optimalen Wertes im Merton-Problem.

#### Beispiel 5.11

Im NTAM mit konstanten Parametern besitzt die FRE (5.18) eine einfache Lösung, nämlich die Wahl  $\phi^* \equiv 0$ ,  $\chi^* \equiv 0$  und  $\alpha = \frac{q}{2}\lambda^2 T$ . Der optimale erwartete Endnutzen ist in diesem Fall für die exponentielle Nutzenfunktion

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} e^{-x\gamma e^{rT} - \alpha} = -\frac{1}{\gamma} e^{-x\gamma e^{rT} - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \quad (5.20)$$

und für die Potenznutzenfunktion

$$V(x, 0) = \frac{x^{1-R}}{1-R} e^{(1-R)rT - \alpha} = \frac{x^{1-R}}{1-R} e^{(1-R)rT - \frac{1}{2}(1-\frac{1}{R})\lambda^2 T}, \quad (5.21)$$

welches den berechneten Werten im grundlegenden Ansatz entspricht. Außerdem erhalten wir auch beim dualen Ansatz eine Aussage über die Anlagestrategie des Investors, denn aus  $\phi^* \equiv 0$  folgt für den absoluten Anteil im risky asset  $P$

$$\theta_t^* P_t = X_t^* \pi_t^* = \begin{cases} \frac{\lambda}{\gamma\sigma} e^{-r(T-t)} & \text{für } U(z) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z}, \\ \frac{\lambda X_t^*}{R\sigma} & \text{für } U(z) = \frac{z^{1-R}}{1-R}, \end{cases}$$

vergleiche Bemerkung 4.15.

#### Bemerkung 5.12

Das vorige Beispiel ist ein Spezialfall einer größeren Menge von Modellen, für die der Wert  $V(x, 0)$  mit Hilfe des dualen Ansatzes einfach angegeben werden kann. Generell gilt für alle Basismodelle (Modell 3.6), in denen der Prozess  $\lambda$  deterministisch ist, dass die FRE (5.18) eine triviale Lösung besitzt, nämlich  $\phi^* \equiv 0$ ,  $\chi^* \equiv 0$  und  $\alpha = \frac{1}{2}q \int_0^T \lambda_u^2 du$ . Insbesondere stimmt dann das  $q$ -optimale Maß  $\mathbb{Q}^{(q)} = \mathbb{Q}^{\chi^*}$  mit dem minimalen Mar-

tingalmaß von Föllmer & Schweizer überein, und ist gegeben durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}^{(q)}}{d\mathbb{P}} = \exp \left( - \int_0^T \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du \right).$$

Kommen wir nun zum Optimierungsproblem beim Kauf von  $k$  Claims. Nach (5.15) und (5.17) gilt bei exponentieller Nutzenfunktion

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(x - p^b(k))e^{rT} - \alpha)$$

mit  $\alpha$  eindeutig festgelegt durch

$$\frac{1}{2}\lambda T + \gamma k C_T = \alpha + M_T + M_T^\perp + \frac{1}{2}[M^\perp]_T.$$

Wir betrachten neben dem bekannten Fall  $C = C(Y)$  auch das Beispiel eines beliebigen hedgebaren Claims. Zwar kennen wir für replizierbare Claims bereits die nutzen-neutralen Preise nach Theorem 2.5, aber wir möchten die Gelegenheit nutzen, um zu zeigen, dass der duale Ansatz auch diesen eindeutigen arbitragefreien Preis liefert.

### Beispiel 5.13

Der Claim  $C$  sei hedgebar mit eindeutigen arbitragefreien Preis  $p^{arb}$ . Dann gilt

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} \exp \left( -\gamma(x - p^b(k) + kp^{arb})e^{rT} - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right). \quad (5.22)$$

Dies ergibt sich aus der Gestalt des Vermögensprozesses  $X^\pi$  der Hedgestrategie, welche gegeben ist durch die SDE

$$dX_t^\pi = \theta_t dP_t + r(X_t^\pi - \theta_t P_t)dt = X_t^\pi \left( rdt + \pi_t \left( \frac{dP_t}{P_t} - rdt \right) \right) \quad X_0^\pi = p^{arb}.$$

Aus dieser Darstellung folgt für die Auszahlung des Claims

$$C_T = p^{arb} e^{rT} + \int_0^T \pi_u \left( \frac{dP_u}{P_u} - rdu \right) = p^{arb} e^{rT} + \int_0^T \pi_u \sigma (dB_u + \lambda du)$$

und die Wahl von  $\chi^* \equiv 0$ ,  $\phi_t^* = k\gamma\sigma\pi_t$  sowie  $\alpha = \gamma k e^{rT} p^{arb} + \frac{1}{2}\lambda^2 T$  löst die FRE. Das Einsetzen des Wertes  $\alpha$  in (5.19) mündet schließlich in (5.22). Vergleichen wir dieses Ergebnis mit (5.20), so ist  $V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$  genau dann erfüllt, wenn  $p^b(k) = kp^{arb}$  gilt, wir erhalten als nutzen-neutralen Kaufpreis den eindeutigen arbitragefreien Preis.



**Beispiel 5.14**

Die Auszahlung des Claims  $C$  werde nur von der nicht handelbaren Aktie  $Y$  beeinflusst. Dann kann die aus dem grundlegenden Ansatz bekannte Formel

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(x - p^b(k))e^{rT} - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}$$

herleitet werden.

Die Lösung für den Wert  $V(x - p^b(k), k)$  soll das minimale Martingalmaß  $\mathbb{Q}^{(0)}$  beinhalten. Um zu dieser Abhängigkeit zu gelangen, verwenden wir in der FRE (5.15) die Brownschen Bewegungen

$$B_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} = B_t + \lambda t, \quad B_t^{\perp \mathbb{Q}^{(0)}} = B_t^{\perp} \quad \text{und} \quad W_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} = \rho B_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} + \rho^{\perp} B_t^{\perp \mathbb{Q}^{(0)}}.$$

Dadurch erhalten wir

$$\frac{1}{2}\lambda^2 T + \gamma k C(Y_T) = \alpha + \int_0^T \phi_u^* B_u^{\mathbb{Q}^{(0)}} + \int_0^T \chi_u^* dB_u^{\perp \mathbb{Q}^{(0)}} + \frac{1}{2} \int_0^T (\chi_u^*)^2 du$$

und mit dem Ansatz  $\phi_t^* = \rho \psi_t$ ,  $\chi_t^* = \rho^{\perp} \psi_t$  für einen previsiblen Prozess  $\psi$  ergibt sich

$$\frac{1}{2}\lambda^2 T + \gamma k C(Y_T) = \alpha + \int_0^T \psi_u dW_u^{\mathbb{Q}^{(0)}} + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \int_0^T \psi_u^2 du. \quad (5.23)$$

Diese Gleichung besitzt eine Gestalt, welche auch in der Anwendung für das SVM auftauchen wird, und das Vorgehen in [20, Kapitel 4] kann genutzt werden. Wir erwarten eine Lösung der Form  $\psi_t = \psi(t, Y_t)$  und verwenden im Weiteren die Notation

$$dY_t = Y_t [(r + \eta\xi)dt + \eta dW_t] = b(Y_t)dt + a(Y_t)dW_t.$$

Für eine Funktion  $f = f(t, y) \in C^{1,2}$  mit  $f(T, y) = 0$  für alle  $y$  lautet die aus der Itô-Formel hervorgehende Darstellung

$$\begin{aligned} -f(0, Y_0) &= \int_0^T f_y(u, Y_u) (b(Y_u)du + a(Y_u)dW_u) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{yy}(u, Y_u) a^2(Y_u)du \\ &\quad + \int_0^T f_t(u, Y_u)du \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Idee ist durch geschickte Wahl von  $\psi(t, Y_t) = f_y(t, Y_t)a(Y_t)$  einen Bezug zu (5.23) herzustellen, um dann mit Hilfe der Funktion  $f$  den Wert  $\alpha$  berechnen zu können. Wir

erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^T \psi(u, Y_u) dW_u^{\mathbb{Q}^{(0)}} - \rho\lambda \int_0^T \psi(u, Y_u) du \\ &= -f(0, Y_0) - \int_0^T \left( f_y(u, Y_u) b(Y_u) du + \frac{1}{2} f_{yy}(u, Y_u) a^2(Y_u) du + f_t(u, Y_u) du \right) \end{aligned}$$

und durch die Kombination mit (5.23) liefert

$$\begin{aligned} & \alpha - \frac{1}{2} \lambda^2 T - f(0, Y_0) \\ &= \int_0^T \left[ \frac{\gamma k}{T} C(Y_T) - q\rho\lambda a(Y_u) f_y(u, Y_u) - \frac{(1-\rho^2)}{2} a^2(Y_u) f_y^2(u, Y_u) + b(Y_u) f_y(u, Y_u) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} a^2(Y_u) f_{yy}(u, Y_u) + f_t(u, Y_u) \right] du \end{aligned}$$

Folglich ist das Integral unabhängig von  $Y$  (gegeben den Wert  $Y_0$ ) und wir können den Integrand als Funktion  $H : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  interpretieren, welche oBdA konstant 0 gesetzt wird. Wir suchen daher eine Lösung der PDE

$$\frac{\gamma k}{T} C(Y_T) + (b(y) - q\rho\lambda a(y)) f_y - \frac{(1-\rho^2)}{2} a^2(y) f_y^2 + \frac{1}{2} a^2(y) f_{yy} + f_t = 0$$

mit Endwert  $f(T, y) = 0$  für alle  $y$ . Durch die Transformation

$$f(t, y) := -\frac{1}{(1-\rho^2)} \ln G(t, y)$$

ergibt sich für  $G$  die PDE

$$\frac{\gamma k}{T} (1-\rho^2) C(Y_T) G(t, y) = G_t(t, y) + (b(y) - q\rho\lambda a(y)) G_y(t, y) + \frac{1}{2} a^2(y) G_{yy}(t, y)$$

und die Anwendung der Feynman-Kac-Formel liefert schließlich

$$G(t, y) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \exp \left( - (1-\rho^2) \frac{\gamma k}{T} \int_t^T C(Y_u) du \right) \middle| Y_t = y \right]$$

Aufgrund der Setzung von  $H = 0$  muss  $\alpha = \frac{1}{2} \lambda^2 T + f(Y_0, 0)$  gelten, das heißt

$$\alpha = \frac{1}{2} \lambda^2 T - \frac{1}{(1-\rho^2)} \ln \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-(1-\rho^2) \gamma k C(Y_T)} \right]$$

Schlussendlich folgt aus (5.17)

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\alpha - \gamma(x - p^b(k))e^{rT}} \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T - \gamma(x - p^b(k))e^{rT}} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-(1-\rho^2)\gamma k C(Y_T)} \right] \right)^{(1-\rho^2)^{-1}}. \end{aligned}$$

### 5.2.2. Stochastic volatility model

Bei der Betrachtung des SVM sei analog zum grundlegenden Ansatz  $r = 0$  und die Korrelation  $\rho \in (-1, 1)$  konstant. Wir beginnen mit dem Szenario der Ablehnung des Claims-Angebots.

#### Beispiel 5.15

Beim Merton-Problem beträgt der optimale erwartete Endnutzen

$$V(x, 0) = U(x) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_0^T \lambda^2(Y_u) du \right) \right]^{1/\Lambda}$$

mit  $\Lambda = 1 - q\rho^2$ ,  $q$  abhängig von der Nutzenfunktion sowie  $\mathbb{P}^M$  definiert durch

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-q\rho(\lambda \cdot W))_T. \quad (5.25)$$

Die FRE besitzt die Form

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du &= \alpha + M_T + \frac{1-q}{2} [M]_T + M_T^\perp + \frac{1}{2} [M^\perp]_T \\ &= \alpha + \int_0^T \psi(u, Y_u) dW_u + \int_0^T \left( q\rho\psi(u, Y_u)\lambda(Y_u) + \frac{\Lambda}{2}\psi^2(u, Y_u) \right) du \\ &= \alpha + \int_0^T \psi(u, Y_u) dW_u^M + \int_0^T \frac{\Lambda}{2}\psi^2(u, Y_u) du \end{aligned}$$

mit der bekannten Transformation  $\phi_t^* = \rho\psi_t$ ,  $\chi_t^* = \rho^\perp\psi_t$  und der Brownschen Bewegung  $W_t^M = W_t + q\rho \int_0^t \lambda(Y_u) du$ . Die Form der obigen Gleichung erinnert an die Gestalt von (5.23) aus der Portfoliooptimierung mit Claim im NTAM. Daher reproduzieren wir das dortige Vorgehen, machen also von dem Beweis in [20, Kapitel 4] bzw. [29, Proposition 3] Gebrauch. Ausgangspunkt ist die Itô-Darstellung (5.24) für eine Funktion  $f = f(t, y) \in C^{1,2}$  mit  $f(T, y) = 0$  für alle  $y$ . Erneut liefert der Ansatz  $\psi(t, Y_t) = f_y(t, Y_t) a(Y_t)$ , dass diese Itô-Darstellung genau dann die Form der FRE

besitzt, wenn der Wert  $\alpha - f(0, Y_0)$  dem Integral

$$\int_0^T \left[ \frac{q}{2} \lambda^2(Y_u) - q\rho a(Y_u) \lambda(Y_u) f_y - \frac{\Lambda}{2} a^2(Y_u) f_y^2 + b(Y_u) f_y + \frac{1}{2} a^2(Y_u) f_{yy} + f_t \right] du$$

entspricht. Folglich ist das Integral unabhängig von  $Y$  (gegeben den Wert  $Y_0$ ) und wir können erneut den Integrand konstant 0 setzen. Deshalb ist eine Lösung der PDE

$$\frac{q}{2} \lambda^2(y) + (b(y) - q\rho a(y) \lambda(y)) f_y - \frac{\Lambda}{2} a^2(y) f_y^2 + \frac{1}{2} a^2(y) f_{yy} + f_t = 0$$

mit Endwert  $f(T, y) = 0$  für alle  $y$  gesucht, welches aber gerade (2.10) und (2.11) in [1] entspricht. Dementsprechend erhalten wir analog zum Satz 4.25 im grundlegenden Ansatz, dass mit den Forderungen von Benth & Karlsen, siehe (4.17),  $f$  eindeutig lösbar ist. Mit der Transformation

$$G(t, y) = \exp(-\Lambda f(t, y))$$

folgt dann ebenfalls

$$G(t, y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_t^T \lambda^2(Y_u) du \right) \middle| Y_t = y \right]$$

mit dem W'Maß  $\mathbb{P}^M$  gegeben durch (5.25). Die Setzung von  $H = 0$  impliziert diesmal, dass  $\alpha = f(0, Y_0)$  für die Äquivalenz der beiden obigen Gleichungen gelten muss, also folgt

$$\alpha = -\frac{1}{\Lambda} \ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_0^T \lambda^2(Y_u) du \right) \right]$$

und in beiden Modellen liefert (5.19) die Form

$$V(x, 0) = U(x) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{q}{2} \Lambda \int_0^T \lambda^2(Y_u) du \right) \right]^{1/\Lambda}.$$

### Beispiel 5.16

Bei der Optimierung mit einem Claim  $C = C(Y)$  beträgt der optimale erwartete Endnutzen unter exponentiellen Präferenzen

$$V(x - p^b(k), k) = U(x - p^b(k)) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma k \Lambda C(Y_T) \right) \right]^{1/\Lambda}$$

mit  $\Lambda = 1 - \rho^2$  sowie  $\mathbb{P}^M$  definiert durch

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-\rho(\lambda \cdot W))_T.$$

Die Herleitung kann analog zum Vorgehen im vorigen Beispiel 5.14 vorgenommen werden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass noch der Term  $k\gamma C(Y_T)$  auftaucht. Wir erhalten für  $f = f(t, y) \in C^{1,2}$ , dass der Wert  $\alpha - f(0, Y_0)$  dem Integral

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \frac{\gamma k}{T} C(Y_T) + \frac{1}{2} \lambda^2(Y_u) + (b(Y_u) - \rho \lambda(Y_u) a(Y_u)) f_y(u, Y_u) - \frac{(1 - \rho^2)}{2} a^2(Y_u) f_y^2(u, Y_u) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a^2(Y_u) f_{yy}(Y_u, u) + f_t(u, Y_u) \right] du \end{aligned}$$

entsprechen muss. Die bekannte Verfahrensweise liefert

$$\alpha = f(0, y) = -\frac{1}{\Lambda} \ln G(0, y) = -\frac{1}{\Lambda} \ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma k \Lambda C(Y_T) \right) \right]$$

und mit (5.17)

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &= -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(x - p^b(k)) - \alpha) \\ &= U(x - p^b(k)) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma k \Lambda C(Y_T) \right) \right]^{1/\Lambda}. \end{aligned}$$

### 5.3. Der Ansatz von Tehranchi

Im diesem Abschnitt möchten wir eine knappe Vorstellung des Ansatzes von Tehranchi [35] liefern, welcher aus der Kenntnis der Resultate für die Optimierungsprobleme entsprungen ist.

#### Idee des Ansatzes

Sowohl bei Mertons Portfolioproblem wie auch bei der Optimierung mit Claim taucht in den Ergebnissen der Term

$$\left( \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\Psi^\Lambda] \right)^{1/\Lambda}$$

mit einer (konstanten) Zufallsvariable  $\Psi$ , die nur von der Brownschen Bewegung  $W$  abhängt, und  $\Lambda = 1 - \rho^2$  auf. Hierbei ist die Korrelation  $\rho \in (-1, 1)$  konstant und das Maß variiert in Abhängigkeit vom Modell, vergleiche Resultate 4.23 und 4.27. Diese Gestalt der Lösung brachte Tehranchi auf die Idee, einen neuen Ansatz unter

Verwendung einer Hölder-Ungleichung zu konzipieren. Seien  $\bar{B}$  bzw.  $\bar{W}$  die Brownschen Bewegungen bzgl.  $\bar{\mathbb{P}}$ , welche sich aus dem Satz von Girsanov als Transformation von  $B$  bzw.  $W$  ergeben. Dann definiert der Autor für einen progressiv messbaren Prozess  $\phi$  mit  $\int_0^T \phi_u^2 du < +\infty$  fast sicher und  $\epsilon \in \mathbb{R}$

$$\eta_t^{(\phi, \epsilon)} := \exp \left( \frac{\epsilon \rho^2 - 1}{2} \int_0^t \phi_u^2 du + \int_0^t \phi_u d\bar{B}_u \right).$$

Für  $\eta^{(\phi, \epsilon)} := \lim_{t \rightarrow T} \eta_t^{(\phi, \epsilon)}$  und  $\Lambda + 1/\epsilon = 1$  zeigt er unter Verwendung der Hölder-Ungleichung, dass für alle Prozesse  $\phi$  entweder

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} [\Psi \eta^{(\phi, \epsilon)}] \geq \left( \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} [\Psi^\Lambda] \right)^{1/\Lambda} \quad \text{oder} \quad \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} [\Psi \eta^{(\phi, \epsilon)}] \leq \left( \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} [\Psi^\Lambda] \right)^{1/\Lambda}$$

gilt. In den Optimierungsproblemen ist dann genau der Prozess  $\phi$  relevant, welcher Gleichheit liefert. Auch dessen Darstellung gibt Tehranchi explizit an, und zwar lautet sie

$$\phi_t = \frac{1}{(1 - \epsilon)\rho} \cdot \frac{\varphi_t}{\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} [\Psi^\Lambda | \mathcal{F}_t]}$$

mit  $\varphi$  derart, dass

$$\Psi^\Lambda = \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}} [\Psi^\Lambda] + \int_0^T \varphi_u d\bar{W}_u$$

gilt [35, Theorem 2.1]. Mit diesen technischen Vorbereitungen ist die Herleitung des Optimums eine simple Rechnung, welche er sowohl für die in dieser Arbeit betrachteten Nutzenfunktionen als auch für die Logarithmische vollführt [35, Propositionen 3.3-3.5].

### Bemerkung 5.17

*Im Unterschied zu dem bisherigen Vorgehen betrachtet Tehranchi Nutzenfunktionen der Form*

$$\widehat{U}(X_T, Y_T) = u_1(X_T) \cdot u_2(kC(Y_T))$$

*mit  $u_1$  monoton wachsend und konkav. Die Übersetzung auf das Merton Problem erfolgt mit  $u_1 = U$ ,  $u_2 = 1$  und  $k = 0$ , bei der Optimierung mit Claim ist dies aber nur im Falle der exponentiellen Nutzenfunktion problemlos möglich ( $u_1 = -\frac{1}{\gamma}u_2 = U$ ). Trotzdem ist sein Ansatz eine Erweiterung, da zum einen keine Markovsche Struktur vorliegen muss und zum anderen nicht nur europäische Claims sondern zum Beispiel auch kontinuierliche stochastische Einkommensströme bewertet werden können [35, Remarks 3*

and 6].

Wir möchten beispielhaft anhand des NTAM mit konstanten Parametern und exponentieller Nutzenfunktion die Berechnung des Optimum vorführen, das heißt, wir setzen

$$\widehat{U}(X_T, Y_T) = u_1(X_T) \cdot u_2(kC(Y_T)) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma X_T} e^{-\gamma kC(Y_T)}.$$

Die bekannte Darstellung

$$X_t = X_0 e^{rt} + \int_0^t e^{r(t-u)} \sigma X_u^* \pi_u^* (dB_u + \lambda du)$$

des Vermögensprozesses  $X$  impliziert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(X_T, Y_T)] &= \mathbb{E}\left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(X_T + kC(Y_T))}\right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma X_0 e^{rT}} \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T -\gamma e^{r(T-u)} \sigma X_u^* \pi_u^* (dB_u + \lambda du) - \gamma kC(Y_T)\right)\right] \end{aligned}$$

Unter Verwendung des minimalen Martingalmaßes  $\mathbb{Q}^{(0)}$  gegeben durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^{(0)}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\right) = \exp\left(-\lambda B_T^{\mathbb{Q}^{(0)}} + \frac{1}{2}\lambda^2 T\right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T -\gamma e^{r(T-u)} \sigma X_u^* \pi_u^* (dB_u + \lambda du) - \gamma kC(Y_T)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}\left[\exp\left(\int_0^T (\lambda - \gamma e^{r(T-u)} \sigma X_u^* \pi_u^*) dB^{\mathbb{Q}^{(0)}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 T - \gamma kC(Y_T)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}\left[\exp\left(\int_0^T \phi_u dB^{\mathbb{Q}^{(0)}}\right) \Psi\right], \end{aligned}$$

wobei die Setzung  $\Psi = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 T - \gamma kC(Y_T)\right)$  und  $\phi_t = \lambda - \gamma e^{r(T-t)} \sigma X_t^* \pi_t^*$  genutzt wird. Für  $\epsilon = 1/\rho^2$  erhalten wir

$$\eta_t^{(\phi, \epsilon)} = \exp\left(\int_0^t \phi_u d\overline{B}_u\right) \quad \text{und} \quad \Lambda = 1 - \rho^2.$$

Die Hölder-Ungleichung von Tehranchi [35, Theorem 2.1(2)] liefert

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[\Psi \eta^{(\phi, \epsilon)}] \geq \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[\Psi^\Lambda]\right)^{1/\Lambda}$$

und folglich gilt

$$\mathbb{E} [U (X_T, Y_T)] = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma X_0 e^{rt}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [\Psi \eta^{(\phi, \epsilon)}] \leq -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma X_0 e^{rt}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [\Psi^\Lambda]^{1/\Lambda}$$

mit Gleichheit für den optimalen Prozess  $\phi$ . Dies impliziert schlussendlich für das Optimum beim Kauf von  $k$  Claims

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(x - p^b(k))e^{rT} - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}.$$

### Bemerkung 5.18

Die obigen Kalkulationen können analog für das SVM unter deterministischen Zinsen vollführt werden. Um schlussendlich auf das uns bekannte Resultat

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(x - p^b(k))} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_0^T \lambda^2(Y_u) du} e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \right] \right)^{\frac{1}{1-\rho^2}}$$

für  $r = 0$  zu kommen, muss noch eine Maßtransformation vorgenommen werden, siehe Beweis von [35, Proposition 3.3].



## 6. Resultate für die nutzen-neutralen Preise

Kommen wir nun zum letzten Schritt unserer Berechnung des nutzen-neutralen Kaufpreises, welcher nach der Vorarbeit in den bisherigen Kapiteln keinen großen Aufwand benötigt. Schließlich genügt die Auflösung der Gleichung

$$V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$$

nach  $p^b(k)$ . Vorher geben wir aber eine kurze Einführung in die Theorie der marginalen Preise, um interessante Übereinstimmungen zwischen den Ergebnissen bei unterschiedlichen Nutzenfunktionen erläutern zu können.

### 6.1. Marginale Preise

Mit der Analyse dieser Thematik haben sich unter anderem Davis [5], Karatzas & Kou [24] sowie Hobson [21] beschäftigt, wobei letzterer auch die Berechnung im NTAM vornimmt. Definitionsgemäß bezeichnet der marginale Preis den nutzen-neutralen Preis für eine infinitesimale Menge eines Claims. Mit anderen Worten, es handelt sich beim marginalen Preis um den Preis, bei welchem das Umlagern einer minimalen Geldmenge in den Claim keinen Einfluss auf den optimalen erwarteten Endnutzen hat. Wir betrachten nur die Theorie für den Kaufpreis und beginnen mit der originalen Definition von Davis [5, Definition 1].

**Definition 6.1** (marginaler Kaufpreis)

*Der marginale Kaufpreis eines Claims entspricht dem Preis  $\hat{p}$ , welcher*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} V \left( x - \delta, \frac{\delta}{\hat{p}} \right) \right|_{\delta=0+} = 0$$

*erfüllt, vorausgesetzt die Funktion  $V$  besitzt ausreichend Glattheit. Hierbei steht  $\delta = 0+$*

für den Limes  $\delta \downarrow 0$ . Wir verwenden die alternative, an unsere Notation angepasste Definition

$$\widehat{p} = \lim_{k \downarrow 0} \frac{p^b(k)}{k},$$

welches für differenzierbare Preisfunktionen  $\widehat{p} = p'(k)|_{k=0+}$  entspricht.

### Bemerkung 6.2

Nach den Forderungen von Henderson (siehe Annahme 3.13) betrachten wir nur nicht-negative Claims. Bezeichnen  $\nu^{0,*}$  und  $\zeta_T^{0,*}$  die optimalen dualen Variablen im Merton-Problem, so gilt für einen solchen Claim und  $k > 0$  nach Ungleichung (5.2)

$$\begin{aligned} V(x - k\mathbb{E}[\zeta_T^{0,*}C_T], k) &\leq \inf_{\nu \geq 0} \inf_{\zeta \in \Theta} \left\{ \mathbb{E}[\widetilde{U}(\nu\zeta_T)] + \nu(x - k\mathbb{E}[\zeta_T^{0,*}C_T]) + \nu k\mathbb{E}[\zeta_T C_T] \right\} \\ &\leq \mathbb{E}[\widetilde{U}(\nu^{0,*}\zeta_T^{0,*})] + \nu^{0,*}(x - k\mathbb{E}[\zeta_T^{0,*}C_T]) + \nu^{0,*}k\mathbb{E}[\zeta_T^{0,*}C_T] \\ &= \mathbb{E}[\widetilde{U}(\nu^{0,*}\zeta_T^{0,*})] + \nu^{0,*}x \\ &= V(x, 0) \\ &= V(x - p^b(k), k) \end{aligned}$$

Dies impliziert direkt  $p^b(k) \leq k\mathbb{E}[\zeta_T^{0,*}C_T]$  und der marginale Kaufpreis ist nach oben beschränkt und existiert. Dies muss für den marginalen Verkaufspreis, definiert durch  $\lim_{k \uparrow 0} \frac{p^b(k)}{k}$  nicht zwingend zutreffen. Für beschränkte Claims existiert dieser aber auch und entspricht dem marginalen Kaufpreis.

Unser Ziel ist die Herleitung einer expliziten Darstellung für den marginalen Kaufpreis, wobei wir als Ansatz die Gleichung  $V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$  verwenden. Angenommen die Funktion  $V(z, k)$  sei in  $k$  differenzierbar, dann folgt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial k} V(x, 0) \Big|_{k=0+} &= \frac{\partial}{\partial k} V(x - p^b(k), k) \Big|_{k=0+} \\ &= \left( -\frac{\partial}{\partial z} V(z, k) p'(k) + \frac{\partial}{\partial k} V(z, k) \right) \Big|_{\substack{k=0+ \\ z=x-p^b(k)}} \\ &= -\widehat{p} \frac{\partial}{\partial z} V(z, k) \Big|_{\substack{k=0+ \\ z=x-p^b(k)}} + \frac{\partial}{\partial k} V(z, k) \Big|_{\substack{k=0+ \\ z=x-p^b(k)}} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Bezeichne  $X_T^{k,*}$  den optimalen Vermögensprozess bei Kauf von  $k \in \mathbb{R}$  Claims, so existiert eine Darstellung der Form  $U'(X_T^{k,*} + kC_T) = \nu^{k,*}\zeta_T^{k,*}$  mit einem Lagrange-Operator

$\nu^{k,*}$  sowie einer Zustandsdichte  $\zeta^{k,*}$ . Unter Verwendung dieser Darstellung kann

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} V(z, k) \right|_{\substack{k=0+ \\ z=x-p^b(k)}} = \nu^{0,*} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial}{\partial k} V(z, k) \right|_{\substack{k=0+ \\ z=x-p^b(k)}} = \nu^{0,*} \mathbb{E} [\zeta_T^{0,*} C_T]$$

hergeleitet werden, siehe [24, Theorem 7.3 & 7.4]. Einsetzen in (6.1) liefert, dass der marginale Kaufpreis

$$\hat{p} = \mathbb{E} [\zeta_T^{0,*} C_T]$$

beträgt, die nicht-lineare Preisfunktion reduziert sich also in eine Lineare, wenn die Anzahl der Claims gegen Null tendiert. Einerseits bedeutet dieses Resultat, dass bei Kenntnis der optimalen Zustandsdichte des Merton-Problems der Preis explizit angegeben werden kann. Andererseits haben wir im dualen Ansatz gesehen, dass  $\zeta^{0,*}$  zu einem  $q$ -optimalen Maß gehört, das heißt, es gibt einen direkten Bezug zwischen den marginalen nutzen-neutralen Preisen und den minimalen Martingalmaßen. Wir kommen nun zur Berechnung der (marginalen) nutzen-neutralen Preise und dem Aufbau der vorigen Kapitel Folge leistend, beginnen wir mit dem NTAM im Falle konstanter Parameter.

### 6.1.1. Non-traded assets model

In diesem Modell befinden wir uns der komfortablen Situation unabhängig von der Nutzenfunktion alle Optimalwerte (approximativ) berechnen zu können, wobei wir unter Potenznutzen einige Einschränkungen vorgenommen haben. Insgesamt konnten wir für einen Claim der Form  $C = C(Y)$  zeigen, dass bei exponentiellen Präferenzen

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x e^{rT}} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 T} \\ V(x - p^b(k), k) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma (x - p^b(k)) e^{rT} - \frac{1}{2} \lambda^2 T} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k (1 - \rho^2) C(Y_T)} \right] \right)^{\frac{1}{1 - \rho^2}} \end{aligned}$$

sowie bei einer Potenznutzenfunktion mit  $C(Y) = Y$  und  $r = 0$

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \frac{x^{1-R}}{1-R} e^{\frac{1-R}{2R} \lambda^2 T} \\ V(x - p^b(k), k) &= \tilde{v}(0, x - p^b(k), p, y) + o(k^2) \end{aligned}$$

mit  $\tilde{v}(t, x - p^b(k), p, y)$  gegeben durch (4.15) gilt.

**Beispiel 6.3** (Exponentielle Nutzenfunktion)

Der exakte nutzen-neutralen Kaufpreis eines Claims  $C = C(Y)$  lautet

$$p^b(k) = -\frac{e^{-rT}}{\gamma(1-\rho^2)} \ln \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \right]. \quad (6.2)$$

Approximativ kann dieser durch die Maclaurinsche Reihe dargestellt werden als

$$\begin{aligned} p^b(k) &= e^{-rT} \left( k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)] - \frac{k^2}{2} \gamma (1-\rho^2) \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)^2] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)]^2 \right) \right) + o(k^2) \\ &= e^{-rT} \left( k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)] - \frac{k^2}{2} \gamma (1-\rho^2) \mathbb{V}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)] \right) + o(k^2) \end{aligned}$$

Unter Potenznutzen konnte, wie bereits erwähnt, Henderson in [12, Theorem 4.1] die Optimierung auf beliebige Claims verallgemeinern. Verwenden wir sein Ergebnis, so ergibt sich

#### Beispiel 6.4 (Potenznutzenfunktion)

Sei  $r = 0$ , dann gilt für den nutzen-neutralen Kaufpreis eines Claims  $C = C(Y)$

$$p^b(k) = k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)] - \frac{k^2}{2} R \eta^2 (1-\rho^2) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \int_0^T \frac{Y_u^2 (C_u^Y)^2}{X_u^{0,*}} du \right] + o(k^2) \quad (6.3)$$

mit  $C_t^Y = \frac{\partial}{\partial Y} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)]$ , vergleiche [12, Theorem 4.2].

#### Analyse der nutzen-neutralen Kaufpreise

Lasst uns die Preisfunktionen genauer betrachten. In beiden Fällen ist  $p^b$  eine konkave Funktion, welches nach dem Abschnitt über die Eigenschaften der nutzen-neutralen Preise aber keine neue Erkenntnis ist, schließlich sind die Nutzenfunktionen strikt konkav. Erwähnenswerter scheint das Merkmal, dass beim exponentiellen Nutzen das Startvermögen des Investors für den Preis irrelevant ist. Aber auch die Begründung dieses Phänomens haben wir bereits geliefert, denn die CARA-Eigenschaft besagt, dass der absolute Investitionswert in das risky asset von einer Veränderung des Startvermögens unberührt bleibt. Im Gegensatz hierzu besitzt die Potenznutzenfunktion die DARA-Eigenschaft. Aus diesem Grund impliziert eine Erhöhung des Startvermögens eine Erhöhung des absoluten Wertes in den risikoreichen Positionen, folglich ist der Investor bereit einen höheren Preis für den Kauf des Claims zu zahlen. In der obigen Preisformel kann diese Eigenschaft durch

$$p^b(k) = k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [C(Y_T)] - \frac{k^2}{2x} R \eta^2 (1-\rho^2) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \int_0^T \frac{Y_u^2 (C_u^Y)^2}{X_u^{0,*}/x} du \right] + o(k^2)$$

verdeutlicht werden. In dieser Darstellung ist das Integral unabhängig vom Startkapital und  $p^b(k)$  folglich monoton wachsend in  $x$ . Abschließend sei noch auf die Abhängigkeit des nutzen-neutralen Preises vom Parameter der Risikoaversion hingewiesen. Je größer das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion ist, desto risikoaverser ist der Investor. Da die Erhöhung des Parameters  $\gamma$  bzw.  $R$  eine Erhöhung der absoluten Risikoaversion bedingt, müsste der nutzen-neutrale Kaufpreis folglich in diesen Parametern fallen. Für die exponentielle Nutzenfunktion besitzt diese Aussage auch universelle Gültigkeit, aber beim Potenznutzen zeigen Henderson & Hobson in [13, 6. Discussion], dass für  $R \downarrow 0$  ab einer bestimmten Schwelle die gegenteilige Reaktion eintreten kann. Einen Anhaltspunkt für dieses unerwartete Phänomen liefern die beiden Autoren auch, nämlich die verschiedenen Definitionsmengen der beiden Nutzenfunktionen. Während die exponentielle Nutzenfunktion auch negatives Vermögen erlaubt, ist die Potenznutzenfunktion nur für Positives definiert. Daher existiert kein triftiger Grund bei einer gegen Null tendierenden Risikoaversion und einem nahe bei Null liegendem Vermögen identisches Verhalten zu erwarten, siehe auch [12, 6. Conclusion].

### Marginaler Preis

Der marginale Kaufpreis ist unabhängig von der Nutzenfunktion gegeben durch

$$\hat{p} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [e^{-rT} C(Y_T)] = \mathbb{E} [\zeta_T^{(0)} C(Y_T)] . \quad (6.4)$$

Für die Potenznutzenfunktion ergibt sich die Gültigkeit direkt aus (6.3), wohingegen für die exponentielle Nutzenfunktion bei Wahl der exakten Lösung die Anwendung der Regel von de L'Hôpital das Ergebnis liefert. Die interessante Beobachtung ist, dass der marginale Kaufpreis unabhängig von der gewählten Nutzenfunktion und dem Parameter der Risikoaversion ist. Insbesondere ergibt sich das Ergebnis (6.4) für jede wachsende, strikt konkave Nutzenfunktion [18, Theorem 1].

### Explizite Kalkulationen

Im NTAM mit konstanten Koeffizienten ist der Prozess  $Y$  eine geometrische Brownsche Bewegung mit

$$\begin{aligned} Y_t &= y \exp \left( (r + \eta\xi)t + \eta W_t - \frac{1}{2}\eta^2 t \right) \\ &= y \exp \left( (r + \eta\xi - \eta\rho\lambda)t + \eta W_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} - \frac{1}{2}\eta^2 t \right) \end{aligned}$$

und die Berechnung der Erwartungswerte unter dem Maß  $\mathbb{Q}^{(0)}$  ist trivial. Die Resultate

lauten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T] &= ye^{(r+\eta(\xi-\rho\lambda))T} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T^2] &= y^2 e^{2(r+\eta(\xi-\rho\lambda))T+2\eta^2 T} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T^4] &= y^4 e^{4(r+\eta(\xi-\rho\lambda))T+6\eta^2 T}\end{aligned}$$

und damit können approximative Preise für verschiedene Claims berechnet werden, wobei als Quelle für die meisten der folgenden Beispiele das Paper von Henderson [12] dient. Hierbei setzen wir die Zinsrate  $r = 0$ , um beide Nutzenfunktionen zeitgleich betrachten zu können. Außerdem möchten wir die Annahme 3.13 in Erinnerung rufen, welche die Gültigkeit der Resultate in den kommenden Beispielen nur für  $k > 0$  zusichert.

### Beispiel 6.5

Entspricht der Claim der nicht handelbaren Aktie, das heißt  $C(Y) = Y$ , so folgt

$$\begin{aligned}p^b(k) &= k\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T] - \frac{k^2}{2}\gamma(1-\rho^2)\mathbb{V}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T] + o(k^2) \\ &= kye^{\eta(\xi-\rho\lambda)T} - \frac{k^2}{2}\gamma(1-\rho^2)y^2 e^{2\eta(\xi-\rho\lambda)T} [e^{\eta^2 T} - 1] + o(k^2)\end{aligned}$$

für die exponentielle Nutzenfunktion sowie

$$\begin{aligned}p^b(k) &= k\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T] - \frac{k^2}{2}R\eta^2(1-\rho^2)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}\left[\int_0^T \frac{Y_u^2(C_u^Y)^2}{X_u^{0,*}} du\right] + o(k^2) \\ &= kye^{\eta(\xi-\rho\lambda)T} - \frac{k^2}{2} \frac{y^2}{x} R \left(\frac{\eta^2(1-\rho^2)}{\Gamma}\right) e^{2\eta(\xi-\rho\lambda)T} [e^{\Gamma T} - 1] + o(k^2)\end{aligned}$$

mit  $\Gamma = \eta^2 - 2\eta\rho\lambda\frac{1}{R} + \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2$  für den Potenznutzen, vergleiche [13, Theorem 3]. Dementsprechend beträgt der marginale Kaufpreis

$$\hat{p} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T] = ye^{\eta(\xi-\rho\lambda)T}.$$

### Beispiel 6.6

Für den quadratischen Claim  $C(Y) = Y^2$  lauten die Ergebnisse für die nutzen-neutralen Kaufpreise bei exponentieller bzw. Potenznutzenfunktion

$$\begin{aligned}p^b(k) &= k\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T^2] - \frac{k^2}{2}\gamma(1-\rho^2)\mathbb{V}^{\mathbb{Q}^{(0)}}[Y_T^2] + o(k^2) \\ &= ky^2 e^{2\eta(\xi-\rho\lambda)T+2\eta^2 T} - \frac{k^2}{2}\gamma(1-\rho^2)y^4 e^{4\eta(\xi-\rho\lambda)T+2\eta^2 T} (e^{4\eta^2 T} - 1) + o(k^2)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} p^b(k) &= k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [Y_T^2] - \frac{k^2}{2} R \eta^2 (1 - \rho^2) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \int_0^T \frac{Y_u^4 (C_u^Y)^2}{X_u^{0,*}} du \right] + o(k^2) \\ &= k y^2 e^{2\eta(\xi - \rho\lambda)T + \eta^2 T} - 2k^2 R \frac{y^4}{x} \left( \frac{\eta^2 (1 - \rho^2)}{\Gamma} \right) [e^{\Gamma T} - 1] + o(k^2) \end{aligned}$$

mit  $\Gamma = 3\eta^2 + 6\eta(\xi - \rho\lambda) + \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2$ . Der Wert für den marginalen Kaufpreis beträgt

$$\hat{p} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [Y_T^2] = y^2 e^{2\eta(\xi - \rho\lambda)T + \eta^2 T}.$$

Diese Beispielaufzählung wollen wir mit den bekanntesten europäischen Optionen abschließen, wobei allein der Call betrachtet wird. Eine genaue Analyse des Puts hat Monoyios in [28] durchgeführt. Dort sind für exponentielle Präferenzen zusätzlich zur theoretischen Approximation auch numerische Berechnungen der nutzen-neutralen Preise vorzufinden.

### Beispiel 6.7

Sei  $K > 0$  und der Claim gegeben durch  $C(Y_T) = (Y_T - K)^+$ . Dann kann unter exponentiellen Präferenzen der nutzen-neutrale Kaufpreis approximativ bestimmt werden, und zwar gilt

$$p^b(k) = k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [(Y_T - K) \mathbf{1}_{\{Y_T > K\}}] - \frac{k^2}{2} \gamma (1 - \rho^2) \mathbb{V}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [(Y_T - K) \mathbf{1}_{\{Y_T > K\}}] + o(k^2)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [(Y_T - K) \mathbf{1}_{\{Y_T > K\}}] &= y e^{\eta(\xi - \rho\lambda)T} \Phi(d_+) - K \Phi(d_-) \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [(Y_T - K)^2 \mathbf{1}_{\{Y_T > K\}}] &= y^2 e^{2\eta(\xi - \rho\lambda)T + \eta^2 T} \Phi(d_+ + \eta\sqrt{T}) + K^2 \Phi(d_-) \\ &\quad - 2Ky e^{\eta(\xi - \rho\lambda)T} \Phi(d_+) \end{aligned}$$

und  $\Phi$  bezeichnet die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable sowie

$$d_+ = \frac{\frac{y}{K} + \eta(\xi - \rho\lambda)T + \frac{1}{2}\eta^2 T}{\eta\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_- = \frac{\frac{y}{K} + \eta(\xi - \rho\lambda)T - \frac{1}{2}\eta^2 T}{\eta\sqrt{T}}.$$

Für den Potenznutzen hingegen ist der zweite Term in

$$p^b(k) = k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [(Y_T - K)^+] - \frac{k^2}{2} R \eta^2 (1 - \rho^2) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \int_0^T \frac{Y_u^2 (C_u^Y)^2}{X_u^{0,*}} du \right] + o(k^2)$$

aufwendiger zu berechnen. Für ein Simulationsbeispiel sei daher auf [12, Example 4.1 continued] verwiesen. Abschließend kommen wir zum marginalen Kaufpreis der Call-Option, welcher

$$\hat{p} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} [(Y_T - K) \mathbf{1}_{\{Y_T > K\}}] = ye^{\eta(\xi - \rho\lambda)T} \Phi(d_+) - K\Phi(d_-)$$

lautet.

### 6.1.2. Stochastic volatility model

In diesem Modell können wir nur unter exponentiellen Präferenzen beide Optimierungsprobleme lösen, insbesondere ist im Fall der Potenznutzenfunktion keine Berechnung des nutzen-neutralen Kaufpreises möglich. Für  $r = 0$  und eine konstante Korrelation  $\rho \in (-1, 1)$  lauten die Optima des Claim  $C = C(Y)$

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du \right) \right]^{1/\Lambda}$$

$$V(x - p^b(k), k) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(x - p^b(k))} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma \Lambda k C(Y_T) \right) \right]^{1/\Lambda}$$

mit  $\Lambda = 1 - \rho^2$  und dem Maß  $\mathbb{P}^M$  definiert durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-\rho(\lambda \cdot W))_T.$$

Aus der Gleichung  $V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$  berechnen wir den nutzen-neutrale Kaufpreis. Analoge Resultate befinden sich in [29, Theorem 6] sowie [11, Corollary 4.3], wobei jeweils der nutzen-neutrale Verkaufspreis für  $k = 1$ , das heißt  $p^s(1) = -p^b(-1)$ , angegeben wurde.

#### Beispiel 6.8 (Exponentielle Nutzenfunktion)

Der exakte nutzen-neutrale Kaufpreis eines Claims  $C = C(Y)$  lautet

$$p^b(k) = -\frac{1}{\gamma \Lambda} \ln \left( \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du - \gamma \Lambda k C(Y_T) \right) \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} \left[ \exp \left( -\frac{\Lambda}{2} \int_0^T \lambda^2(Y_u) du \right) \right]} \right). \quad (6.5)$$

#### Explizite Kalkulationen

Zwar haben wir eine theoretische Formel für den nutzen-neutralen Kaufpreis herleiten können, doch die Berechnung des vorkommenden Bruches gestaltet sich schwierig. Eine



signifikante Vereinfachung würde ein deterministischer Prozess  $\lambda$  herbeiführen, welcher im Heston Modell (Beispiel 3.10) durch die Wahl  $\mu(Y_t) = \mu \cdot \sqrt{Y_t}$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  erreicht wird, wohingegen das Stein-Stein-Modell (Beispiel 3.12) dazu die Setzung  $\mu(Y_t) = \mu \cdot Y_t$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  benötigt. In diesem Fall lautet der nutzen-neutrale Kaufpreis

$$p^b(k) = -\frac{1}{\gamma\Lambda} \ln \left( \mathbb{E}^{\mathbb{P}^M} [\exp(-\gamma\Lambda k C(Y_T))] \right).$$

Eine Chance auf die explizite Berechenbarkeit dieses Ausdrucks besteht, aber es sei bemerkt, dass  $Y$  in diesen Beispielen einen CIR-Prozess bzw. einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, welches keine einfachen Kalkulationen bedeutet. Für die allgemeineren Modelle mit von  $Y$  abhängigen Prozessen  $\lambda$  stellt sich das Problem noch schwieriger da. Vor allem der durch die Optimierung mit Claim entstandene Zähler in der Preisformel bereitet Schwierigkeiten und wir können deshalb keine Beispiele mit Lösungen für  $p^b(k)$  bzw.  $V(x - p^b(k), k)$  angeben. Im Gegensatz dazu können in vereinzelt Modellen explizite Kalkulationen des Optimums im Merton-Problem durchgeführt werden. Schauen wir auf das Vorgehen im dualen Ansatz (siehe Seite 72), so können wir die Darstellung

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma x) \exp(-\Lambda f(t, y))^{1/\Lambda}$$

erkennen. Hierbei löst  $f$  die PDE

$$\frac{1}{2}\lambda^2(y) + (b(y) - \rho a(y)\lambda(y)) f_y - \frac{\Lambda}{2}a^2(y)f_y^2 + \frac{1}{2}a^2(y)f_{yy} + f_t = 0$$

mit Endwert  $f(T, y) = 0$  für alle  $y$ . Die Lösung dieser PDE für das abgewandelte Heston Modell (Beispiel 3.11) haben sowohl Hobson [20, Chapter 5] als auch Benth & Karlsen [1, Lemma 5.1] angegeben. Zudem führten Letztere die Kalkulationen für das Stein-Stein-Modell mit  $\mu(Y_t) = \mu \cdot Y_t^2$  durch [1, Lemma 4.7]. Zwar lohnte in diesem Abschnitt die Betrachtung der Potenznutzenfunktion nicht, da bisher die Angabe einer Formel für  $V(x - p^b(k), k)$  fehlt, in der Aufzählung expliziter Werte für  $V(x, 0)$  wollen wir sie aber nicht unterschlagen. Den optimalen Nutzen des Endvermögens für das abgewandelte Heston Modell liefert Kraft in [25, Proposition 5.2].

## 7. Fazit und Ausblick

# Literaturverzeichnis

- [1] Benth, Fred E. und Karlsen, Kenneth H.: A PDE Representation of the density of the Minimal Entropy Martingale Measure in Stochastic Volatility Markets. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 77:109–137, 2005.
- [2] Black, Fischer und Scholes, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [3] Branger, Nicole: Introduction to Finance, WS2013/2014. Vorlesung vom Lehrstuhl für Derivate und Financial Engineering, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- [4] Christensen, Sören: Skript: Optimierungsprobleme in der Finanzmathematik, WS 2012/2013. Vorlesung der Fachgruppe Stochastik, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Online erhältlich unter [http://www.math.uni-kiel.de/stochastik/WinterSemester2012-13/optimization/control\\_christensen.pdf](http://www.math.uni-kiel.de/stochastik/WinterSemester2012-13/optimization/control_christensen.pdf).
- [5] Davis, Mark H.A.: Option Pricing in Incomplete Markets. In: Dempster, Michael und Pliska, Stanley (Herausgeber): Mathematics of Derivative Securities, Kapitel II. Option Pricing and Hedging, Seiten 216–226. Cambridge University Press, Oktober 1997.
- [6] Dereich, Steffen: Skript: Finanzmathematik, WS2012/2013. Vorlesung des Instituts für Mathematische Statistik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- [7] Föllmer, Hans und Schweizer, Martin: Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information. In: Davis, M.H.A. und Elliott, R.J. (Herausgeber): Applied Stochastic Analysis, Band 5, Kapitel Financial Models, Seiten 389–414. Gordon and Breach, London/New York, 1991.
- [8] Föllmer, Hans und Schweizer, Martin: Minimal Martingale Measure. In: Cont, Rama (Herausgeber): Encyclopedia of Quantitative Finance, Seiten 1200–1204. Wiley, New York, April 2010.
- [9] Frey, Rüdiger: Derivative Asset Analysis in Models with Level-dependent and Stochastic Volatility. *CWI Quarterly*, 10:1–34, 1996.
- [10] Frittelli, Marco: The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets. *Mathematical Finance*, 10(1):39–52, Januar 2000.
- [11] Grasselli, Matheus und Hurd, Tom: Indifference Pricing and Hedging for Volatility Derivatives. In: Applied Mathematical Finance, Band 14, Seiten 303–317. Taylor & Francis, 2007.
- [12] Henderson, Vicky: Valuation of Claims on Nontraded Assets using Utility Maximization. *Mathematical Finance*, 12(4):351–373, Oktober 2002.

- [13] Henderson, Vicky und Hobson, David: Real Options with Constant Relative Risk Aversion. Journal of Economic Dynamics & Control, 27:329–355, 2002.
- [14] Henderson, Vicky und Hobson, David: Substitute Hedging. In: RISK, Band 15, Seiten 71–75. Risk Magazine, Limited, Mai 2002.
- [15] Henderson, Vicky und Hobson, David: Utility Indifference Pricing - An Overview. In: Carmona, Rene (Herausgeber): Indifference Pricing - Theory and Applications, Kapitel 2, Seiten 44–74. Princeton University Press, Kassel, 2009.
- [16] Henderson, Vicky et al.: A Comparison of Option Prices under Different Pricing Measures in a Stochastic Volatility Model with Correlation. Review of Derivatives Research, 8:5–25, 2005.
- [17] Heston, Steven L.: A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies, 6(2):327–343, 1993.
- [18] Hobson, David: Option Pricing in Incomplete Markets, 1994. Online erhältlich unter <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.28.9841>.
- [19] Hobson, David: Real Options, Non-traded Assets and Utility Indifference Prices, 2003. Online erhältlich unter [http://www.researchgate.net/publication/2841489\\_Real\\_Options\\_Non-traded\\_Assets\\_and\\_Utility\\_Indifference\\_Prices](http://www.researchgate.net/publication/2841489_Real_Options_Non-traded_Assets_and_Utility_Indifference_Prices).
- [20] Hobson, David: Stochastic Volatility Models, Correlation, and the  $q$ -optimal Measure. Mathematical Finance, 14(4):537–556, Oktober 2004.
- [21] Hobson, David: Bounds for the Utility-Indifference Prices of Non-traded Assets in Incomplete Markets. Decisions in Economics and Finance, 28:33–52, Juni 2005.
- [22] Hodges, Steward D. und Neuberger, Anthony: Optimal Replication of Contingent Claims under Transactions Costs. The Review of Financial Studies, 8(2):222–239, 1989.
- [23] Hubalek, Friedrich und Schachermayer, Walther: The Limitations of No-Arbitrage Arguments for Real Options. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 4(2):361–373, 2001.
- [24] Karatzas, Ioannis und Kou, Steven: On the Pricing of Contingent Claims under Constraints. Annals of Applied Probability, 6(2):321–369, 1996.
- [25] Kraft, Holger: Optimal Portfolios and Heston's Stochastic Volatility Model: An explicit Solution for Power Utility. Quantitative Finance, 5(3):303–313, 2005.
- [26] Merton, Robert C.: Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. The Review of Economics and Statistics, 51(3):247–257, August 1969.
- [27] Merton, Robert C.: Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. Journal of Economic Theory, 3(4):373–413, Dezember 1971.
- [28] Monoyios, Michael: Performance of Utility-based Strategies for Hedging Basis Risk. Quantitative Finance, 4:245–255, 2004.
- [29] Monoyios, Michael: Characterization of Optimal Dual Measures via Distortion. Decisions in Economics and Finance, 29:95–119, November 2006.

- [30] Musiela, Marek und Zariphopoulou, Thaleia: An Example of Indifference Prices under Exponential Preferences. Finance and Stochastics, 8(2):229–239, 2004.
- [31] Musiela, Marek und Zariphopoulou, Thaleia: A Valuation Algorithm for Indifference Prices in Incomplete Markets. Finance and Stochastics, 8(3):399–414, 2004.
- [32] Musiela, Marek und Zariphopoulou, Thaleia: The Single Period Binomial Model. In: Carmona, Rene (Herausgeber): Indifference Pricing - Theory and Applications, Kapitel 1, Seiten 3–43. Princeton University Press, Kassel, 2009.
- [33] Sircar, Ronnie und Zariphopoulou, Thaleia: Bounds & Asymptotic Approximations for Utility Prices when Volatility is random. SIAM Journal on Control and Optimization, 43(4):1328–1353, 2004.
- [34] Stein, Elias M. und Stein, Jeremy C.: Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. The Review of Financial Studies, 4(4):727–752, 1991.
- [35] Tehranchi, Michael: Explicit Solutions of some Utility Maximization Problems in Incomplete Markets. Stochastic Processes and their Applications, 114:109–125, November 2004.
- [36] Touzi, Nizar: Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE. Springer Science & Business Media, Berlin Heidelberg, 2012.
- [37] Zariphopoulou, Thaleia: A Solution Approach to Valuation with Unhedgeable Risks. Finance and Stochastics, 5:61–82, 2001.

# A. Anhang

## A.1. Nutzen-neutrale Bewertung im Trinomialmodell - Kalkulationen

### A.1.1. Berechnung von $V(x, 0)$

Wir berechnen den maximalen erwarteten Nutzen bei optimalem Handlungsverhalten des Investors ohne Kauf des Calls. Gesucht ist

$$V(x, 0) = \sup_{X_T \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(X_T)] = \sup_{\alpha B_0 + \beta S_0 = x} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (110\alpha + \beta S_T)) \right]$$

Die Kenntnis der Anfangskurse  $B_0 = S_0 = 100$  liefert

$$\alpha B_0 + \beta S_0 = 100(\alpha + \beta) = x,$$

welches mit  $B_T = 110$

$$110\alpha + \beta S_T = 1.1x + \beta(S_T - 110)$$

impliziert. Folglich vereinfacht sich das Supremum zu

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \sup_{\alpha B_0 + \beta S_0 = x} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (110\alpha + \beta S_T)) \right] \\ &= \sup_{\beta} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (1.1x + \beta(S_T - 110))) \right] \\ &= \sup_{\beta} \left[ -\frac{1}{3\gamma} \exp(-1.1\gamma x) \cdot [\exp(20\gamma\beta) + 1 + \exp(-20\gamma\beta)] \right]. \end{aligned}$$

Die Maximalstelle von  $V(x, 0)$  entspricht damit der Minimalstelle von

$$f(\beta) := \exp(20\gamma\beta) + 1 + \exp(-20\gamma\beta),$$

daher genügt die Analyse von  $f$ . Für die erste Ableitung gilt

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = 20\gamma \exp(20\gamma\beta) - 20\gamma \exp(-20\gamma\beta)$$

also ist der Kandidat für die Minimalstelle  $\beta = 0$ . Die Überprüfung der zweiten Ableitung liefert, dass dort tatsächlich ein Minimum vorliegt und wir erhalten

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \sup_{\beta} \left[ -\frac{1}{3\gamma} \exp(-1.1\gamma x) \cdot [\exp(20\gamma\beta) + 1 + \exp(-20\gamma\beta)] \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} \exp(-1.1\gamma x). \end{aligned}$$

### A.1.2. Berechnung von $V(x - p^b(k), k)$

Im zweiten Schritt steht die Kalkulation

$$V(x - p^b(k), k) = \sup_{\alpha B_0 + \beta S_0 = x - p^b(k)} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (\alpha B_T + \beta S_T + k(S_T - 110)^+)) \right].$$

für  $k \in \mathbb{R}$  an. In diesem Fall gilt

$$\alpha B_0 + \beta S_0 = 100(\alpha + \beta) = x - p^b(k),$$

welches mit  $B_T = 110$

$$\alpha B_T + \beta S_T + k(S_T - 110)^+ = 1.1(x - p^b(k)) + \beta(S_T - 110) + k(S_T - 110)^+$$

liefert. Das Optimierungsproblem lautet folglich

$$\begin{aligned} &V(x - p^b(k), k) \\ &= \sup_{\alpha B_0 + \beta S_0 = x - p^b(k)} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (\alpha B_T + \beta S_T + k(S_T - 110)^+)) \right] \\ &= \sup_{\beta} \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma \cdot (1.1(x - p^b(k)) + \beta(S_T - 110) + k(S_T - 110)^+)) \right] \\ &= \sup_{\beta} \left[ -\frac{1}{3\gamma} \exp(-\gamma \cdot 1.1(x - p^b(k))) \cdot [\exp(20\gamma\beta) + 1 + \exp(-20\gamma\beta - 20\gamma k)] \right]. \end{aligned}$$

Wir ermitteln in diesem Fall  $\min_{\beta} f(\beta)$  mit

$$f(\beta) = \exp(20\gamma\beta) + 1 + \exp(-20\gamma\beta - 20\gamma k).$$

Die erste Ableitung lautet

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = 20\gamma \cdot \exp(20\gamma\beta) - 20\gamma \cdot \exp(-20\gamma\beta - 20\gamma k)$$

und dies liefert als Kandidaten  $\beta = -\frac{k}{2}$ . Für die zweite Ableitung gilt

$$\frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta^2} = 20^2 \gamma^2 \cdot \exp(20\gamma\beta) + 20^2 \gamma^2 \cdot \exp(-20\gamma\beta - 20\gamma k) > 0$$

also ist bei  $\beta = -\frac{k}{2}$  eine Minimalstelle und der Wert des optimalen erwarteten Endnutzens beträgt

$$\begin{aligned} V(x - p^b(k), k) &= \sup_{\beta} \left[ -\frac{1}{3\gamma} \exp(-1.1\gamma \cdot (x - v^b(k))) [\exp(20\gamma\beta) + 1 + \exp(-20\gamma\beta - 20\gamma k)] \right] \\ &= -\frac{1}{3\gamma} \exp(-1.1\gamma \cdot (x - v^b(k))) \left[ \exp(-20\gamma \frac{k}{2}) + 1 + \exp(-20\gamma \frac{k}{2}) \right] \\ &= -\frac{1}{3\gamma} \exp(-1.1\gamma \cdot (x - v^b(k))) [2 \exp(-10\gamma k) + 1]. \end{aligned}$$

### A.1.3. Berechnung von $p^b(k)$

Um den nutzen-neutralen Kaufpreis  $p^b(k)$  für  $k$  Call-Optionen mit Strike  $K = 110$  zu berechnen, kann die Gleichung  $V(x, 0) = V(x - p^b(k), k)$  genutzt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \exp(-1.1\gamma x) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{3} \exp(-1.1\gamma \cdot (x - p^b(k))) [2 \exp(-10\gamma k) + 1] \\ \Leftrightarrow \exp(1.1\gamma p^b(k)) &= \frac{3}{2 \exp(-10\gamma k) + 1} \\ \Leftrightarrow p^b(k) &= \frac{1}{1.1\gamma} \ln \left( \frac{3}{2 \exp(-10\gamma k) + 1} \right) \end{aligned}$$

Insbesondere ist die resultierende Funktion  $p^b$  für den Call konkav.



## A.2. Martingalmaße minimalen Abstands

Ein bekannter Ansatz zur Bewertung von zufälligen Auszahlungsprofilen in arbitrage-freien Märkten ist die Fixierung eines äquivalenten Martingalmaßes. In unvollständigen Märkten existieren aber unendlich viele Martingalmaße, und somit stellt sich Frage, welches die geeignete Wahl ist. Wir wollen eine Idee aufzeigen, nämlich das minimale Martingalmaß nach Föllmer & Schweizer [7, 8].

### Setting

Gegeben sei ein Semimartingalmodell, modelliert durch den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$  und einen stetigen stochastischen Prozess  $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ , welcher den Preisverlauf einer Aktie darstellen soll. Die Filtration sei rechts-stetig und das Geldmarktkonto habe die Form

$$dB_t = B_t r_t dt.$$

Der diskontierte Prozess  $S^*$  besitzt eine Doob-Meyer Zerlegung der Form

$$S^* = S_0 + M + A$$

mit einem bezüglich  $\mathbb{P}$  lokalen Martingal  $M$  und einen Prozess  $A$  mit beschränkter Variation.

Wir nehmen an, dass der Aktienpreisprozess  $S$  reellwertig ist, wobei die Theorie für den mehrdimensionalen Fall analog durchgeführt werden kann. Sei  $\mathcal{Q}$  die Menge der äquivalenten Martingalmaße, das heißt  $Q \in \mathcal{Q}$  genau dann, wenn

- (i)  $Q \sim \mathbb{P}$  auf  $\mathcal{F}$  und
- (ii) der diskontierte Prozess  $S^*$  ist ein Martingal unter  $Q$ .

### Definition A.1 (Föllmer & Schweizer)

Ein Martingalmaß  $\mathbb{Q}^{(0)} \in \mathcal{Q}$  heißt minimal, wenn

- (1)  $\mathbb{Q}^{(0)} = \mathbb{P}$  auf  $\mathcal{F}_0$  gilt und
- (2) jedes quadrat-integrierbare  $\mathbb{P}$ -Martingal, welches unter  $\mathbb{P}$  orthogonal zu  $M$  ist, auch unter  $\mathbb{Q}^{(0)}$  die Martingaleigenschaft besitzt.

$$L \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P}) \text{ und } \langle L, M \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad L \text{ ist ein Martingal unter } \mathbb{Q}^{(0)}$$

Da jedes Martingalmaß  $Q$  durch den Dichtequotientenprozess  $\left(Z_t^Q = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}\right)_{0 \leq t \leq T}$  eindeutig festgelegt wird und der Prozess  $A$  eine Darstellung der Form

$$A_t = \int_0^t \alpha_u d\langle S \rangle_u$$

für einen vorhersehbaren Prozess  $\alpha = (\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$  besitzt, kann das minimale Martingalmaß mittels seiner Dichte bezüglich  $\mathbb{P}$  explizit angegeben werden.

### Satz A.2

*Es gilt*

1. *Das minimale Martingalmaß ist eindeutig.*
2. *Das minimale Martingalmaß existiert genau dann, wenn*

$$Z_t = \exp \left( - \int_0^t \alpha_u dM_u - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_u^2 d\langle S \rangle_u \right) \quad (0 \leq t \leq T)$$

*ein quadrat-integrierbares Martingal unter  $\mathbb{P}$  ist. In diesem Fall ist das minimale Martingalmaß definiert durch*

$$\frac{dQ^{(0)}}{d\mathbb{P}} = Z_T.$$

3. *Das minimale Martingalmaß erhält die Orthogonalität, das heißt, für jeden Prozess  $L \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P})$  mit  $\langle L, M \rangle = 0$  unter  $\mathbb{P}$  gilt  $\langle L, S \rangle = 0$  unter  $Q^{(0)}$ .*

*Beweis.* Wir verweisen auf Föllmer & Schweizer [7, Theorem 3.5]. □

#### A.2.1. Berechnung des minimalen Martingalmaßes

Wir wollen nun für unsere Zwecke das minimale Martingalmaß nach Föllmer & Schweizer berechnen. In unserem Basismodell modelliert nur der Prozess  $P$  eine (handelbare) Aktie, daher geben wir hier das modifizierte Modell (3.6) noch einmal an.

**Erinnerung** (modifizierte Basismodell)

*Der Basisgüterfinanzmarkt sei gegeben durch einen filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ , wobei die Brownschen Bewegungen  $B$  und  $W$  mit Korrelationsprozess  $\rho$  die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  erzeugen. Neben einem Geldmarktkonto mit stochas-*

tischer Zinsrate  $r$  existiert ein Prozess  $P$  mit SDE

$$dP_t = P_t [\mu_t dt + \sigma_t dB_t + 0dW_t] = P_t [r_t dt + \sigma_t (dB_t + \lambda_t dt)] \quad \text{mit } \lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$$

Hierbei seien  $\mu$  und  $\sigma$  progressiv messbare Prozesse, welche alle Integrabilitätsbedingungen, die die Existenz einer eindeutigen Lösung für  $P$  garantieren, erfüllen (und von einem weiteren Prozess  $Y$  abhängen können).

Sind die Brownschen Bewegungen nicht perfekt korreliert, dann besitzt der Markt zwei Quellen des Zufalls und nur eine Aktie, folglich ist er unvollständig. Für den diskontierten Preisprozess  $P^*$  gilt

$$dP_t^* = P_t^* [(\mu_t - r_t)dt + \sigma_t dB_t] = P_t^* [\sigma_t (dB_t + \lambda_t dt)],$$

das heißt,  $P^*$  besitzt die stochastische Darstellung

$$P_t^* = P_0^* + \underbrace{\int_0^t P_u^* \sigma_u dB_u}_{=M_t} + \underbrace{\int_0^t P_u^* (\mu_u - r_u) du}_{=A_t}.$$

Für den Prozess  $A_t$  ergibt sich also

$$A_t = \int_0^t P_u^* (\mu_u - r_u) du = \int_0^t P_u^* (\mu_u - r_u) \frac{P_u^{*2} \sigma_u^2}{P_u^{*2} \sigma_u^2} du = \int_0^t \underbrace{\frac{\lambda_u}{P_u^* \sigma_u}}_{=\alpha_u} d\langle P^* \rangle_u$$

Der Satz A.2 liefert nun, dass das potenzielle minimale Martingalmaße gegeben ist durch die Dichte

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp \left( - \int_0^t \alpha_u dM_u - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_u^2 d\langle P^* \rangle_u \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda_u}{P_u^* \sigma_u} dM_u - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\lambda_u^2}{P_u^{*2} \sigma_u^2} d\langle P^* \rangle_u \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^t \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\lambda_u^2}{P_u^{*2} \sigma_u^2} P_u^{*2} \sigma_u^2 du \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^t \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_u^2 du \right) \end{aligned}$$

### Resultat A.3

Das minimale Martingalmaß  $\mathbb{Q}^{(0)}$  von Föllmer und Schweizer ist charakterisiert durch

die Wahl von  $\chi \equiv 0$ , das heißt

$$\frac{d\mathbb{Q}^{(0)}}{d\mathbb{P}} = \exp \left( - \int_0^T \lambda_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_u^2 du \right).$$

## A.3. Herleitung der PDEs im grundlegenden Ansatz

### A.3.1. NTAM: Exponentieller Nutzen

#### A.3.1.1. Herleitung der PDE für $g$

Gegeben sei der Ansatz

$$v(t, z, p, y) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} g(T-t, \ln(y))$$

mit Endbedingung

$$v(T, z, p, y) = U(z + kC(y)) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(z+kC(y))} = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z} g(T-T, \ln(y)).$$

Mit der Notation  $g_{x_i} = g_{x_i}(x_1, x_2) := \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, x_2)$  für  $i = 1, 2$  ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) &= -\gamma z e^{r(T-t)} \cdot (-r) \cdot v(t, z, p, y) - \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot (-1) \cdot g_{x_1} \\ &= \gamma r z e^{r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y) + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot g_{x_1} \\ v_z(t, z, p, y) &= -\gamma e^{r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y) \\ v_{zz}(t, z, p, y) &= \gamma^2 e^{2r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y) \\ v_y(t, z, p, y) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y} \cdot g_{x_2} \\ v_{yy}(t, z, p, y) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \cdot g_{x_2} + \frac{1}{y^2} g_{x_2, x_2} \right) \\ &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot (-g_{x_2} + g_{x_2, x_2}) \\ v_{z,y}(t, z, p, y) &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y} \cdot g_{x_2} \cdot (-\gamma e^{r(T-t)}) \\ &= e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y} \cdot g_{x_2} \cdot e^{r(T-t)} \end{aligned}$$

Dies liefert für  $\theta^p$  nach (4.9)

$$\begin{aligned}
\theta_t^p &= -\frac{\eta y \rho v_{zy} + \lambda v_z}{\sigma v_{zz}} \\
&= -\frac{\eta y \rho e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y} \cdot g_{x_2} \cdot e^{r(T-t)}}{\sigma \gamma^2 e^{2r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y)} - \frac{\lambda(-\gamma) e^{r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y)}{\sigma \gamma^2 e^{2r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y)} \\
&= \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{\sigma \gamma \cdot g \cdot e^{r(T-t)}} + \frac{\lambda}{\sigma \gamma e^{r(T-t)}} \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \gamma} \cdot \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right)
\end{aligned}$$

Für die HJB-Gleichung (4.8) bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \sup_{\theta^p} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + \frac{1}{2} \sigma^2 (\theta_t^p)^2 v_{zz} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 v_{yy} \\
&\quad + \sigma \eta y \rho \theta_t^p v_{zy} + (\sigma \lambda \theta_t^p + rz) v_z + (r + \eta \xi) y v_y \\
&= \gamma r z e^{r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y) + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot g_{x_1} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{e^{-2r(T-t)}}{\sigma^2 \gamma^2} \cdot \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right)^2 \cdot \gamma^2 e^{2r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y) \\
&\quad - \frac{1}{2} \eta^2 y^2 \cdot \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot (-g_{x_2} + g_{x_2, x_2}) \\
&\quad + \sigma \eta y \rho \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \gamma} \cdot \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right) \cdot e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \frac{1}{y} g_{x_2} \cdot e^{r(T-t)} \\
&\quad - \left( \sigma \lambda \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \gamma} \cdot \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right) + rz \right) \gamma e^{r(T-t)} \cdot v(t, z, p, y) \\
&\quad - (r + \eta \xi) y \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}} \cdot \frac{1}{y} \cdot g_{x_2}
\end{aligned}$$

erfüllt sein muss. Durch Dividieren von  $-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma z e^{r(T-t)}}$  kann diese Gleichung umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma r z e^{r(T-t)} \cdot g - g_{x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right)^2 \cdot g + \frac{1}{2} \eta^2 (-g_{x_2} + g_{x_2, x_2}) \\
&\quad - \eta \rho \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right) g_{x_2} - \lambda \left( \frac{\eta \rho \cdot g_{x_2}}{g} + \lambda \right) \cdot g - r z \gamma e^{r(T-t)} \cdot g + (r + \eta \xi) \cdot g_{x_2} \\
&= -g_{x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2 \rho^2 \cdot g_{x_2}^2}{g} + 2 \eta \rho \lambda \cdot g_{x_2} + \frac{\lambda^2}{g} \right) + \frac{1}{2} \eta^2 (-g_{x_2} + g_{x_2, x_2}) - \frac{\eta^2 \rho^2 \cdot g_{x_2}^2}{g} \\
&\quad - \eta \rho \lambda \cdot g_{x_2} - \lambda \eta \rho \cdot g_{x_2} - \lambda^2 \cdot g + (r + \eta \xi) \cdot g_{x_2} \\
&= -g_{x_1} + \frac{1}{2} \eta^2 (-g_{x_2} + g_{x_2, x_2}) - \frac{1}{2} \frac{\eta^2 \rho^2 \cdot g_{x_2}^2}{g} - \eta \rho \lambda \cdot g_{x_2} - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot g + (r + \eta \xi) \cdot g_{x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g_{x_1} + \frac{1}{2}\eta^2(-g_{x_2} + g_{x_2,x_2}) - \frac{1}{2} \frac{\eta^2 \rho^2 \cdot g_{x_2}^2 + \eta \rho \lambda \cdot g_{x_2} \cdot g + \lambda^2 \cdot g^2}{g} + (r + \eta\xi) \cdot g_{x_2} \\
&= -g_{x_1} + \frac{1}{2}\eta^2(-g_{x_2} + g_{x_2,x_2}) - \frac{1}{2} \frac{(\eta \rho \cdot g_{x_2} + \lambda \cdot g)^2}{g} + (r + \eta\xi) \cdot g_{x_2}
\end{aligned}$$

### Folgerung

Die Funktion  $g$  erfüllt die PDE

$$0 = -g_{x_1} + \frac{1}{2}\eta^2(-g_{x_2} + g_{x_2,x_2}) - \frac{1}{2} \frac{(\eta \rho \cdot g_{x_2} + \lambda \cdot g)^2}{g} + (r + \eta\xi) \cdot g_{x_2}$$

mit Randbedingung  $g(0, x_2) = e^{-\gamma k C(e^{x_2})}$ .

#### A.3.1.2. Herleitung der PDE für $G$

Definiere für  $\alpha, b, \delta \in \mathbb{R}$  die Funktion  $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(x_1, x_2) = e^{\alpha x_1} G \left( x_1, x_2 + \left( \delta - \frac{1}{2}\eta^2 \right) x_1 \right)^b,$$

wobei  $g$  die Funktion mit der PDE (4.10) ist (siehe auch Folgerung in A.3.1.1). Unter Verwendung der Kurznotation  $G_{v_i} = G_{v_i}(v_1, v_2) := \frac{\partial}{\partial v_i} G(v_1, v_2)$  ergeben sich die partiellen Ableitungen von  $g$  zu

$$\begin{aligned}
g_{x_1} &= \alpha e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b + b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot \left( G_{v_1} + \left( \delta - \frac{1}{2}\eta^2 \right) G_{v_2} \right) \\
g_{x_2} &= b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
g_{x_2,x_2} &= b e^{\alpha x_1} \left[ (b-1) G(v_1, v_2)^{b-2} \cdot G_{v_2}^2 + G(v_1, v_2)^{b-1} G_{v_2,v_2} \right]
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (4.10) kann eine PDE für  $G$  hergeleitet, und zwar folgt

$$\begin{aligned}
0 &= -g_{x_1} + \frac{1}{2}\eta^2(-g_{x_2} + g_{x_2,x_2}) - \frac{1}{2} \frac{(\eta \rho \cdot g_{x_2} + \lambda \cdot g)^2}{g} + (r + \eta\xi) \cdot g_{x_2} \\
&= -\alpha e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b - b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot \left( G_{v_1} + \left( \delta - \frac{1}{2}\eta^2 \right) G_{v_2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} \left[ (b-1) G(v_1, v_2)^{b-2} \cdot G_{v_2}^2 + G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2,v_2} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \eta \rho b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} + \lambda e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b \right)^2 \frac{1}{e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b} \\
&\quad + (r + \eta\xi) b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b - b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_1} \\
&\quad - b\left(\delta - \frac{1}{2}\eta^2\right) e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} - \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta^2 b(b-1) e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-2} \cdot G_{v_2}^2 + \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} \cdot G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2, v_2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta^2 \rho^2 b^2 e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-2} \cdot G_{v_2}^2 - \eta \rho b \lambda e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\lambda^2 e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b + (r + \eta\xi) b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
&= -b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_1} \\
&\quad + \left(-\alpha - \frac{1}{2}\lambda^2\right) e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b \\
&\quad + \left(-\delta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - \eta\lambda\rho + r + \eta\xi\right) b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
&\quad + (b-1-\rho^2 b) \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-2} \cdot G_{v_2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} \cdot G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2, v_2} \\
&= \left(-G_{v_1} + \frac{1}{2}\eta^2 G_{v_2, v_2}\right) \cdot b e^{\alpha x_1} \cdot G(v_1, v_2)^{b-1} - \left(\alpha + \frac{1}{2}\lambda^2\right) e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^b \\
&\quad - (\delta + \eta(\lambda\rho - \xi) - r) b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-1} \cdot G_{v_2} \\
&\quad + (b(1-\rho^2) - 1) \frac{1}{2}\eta^2 b e^{\alpha x_1} G(v_1, v_2)^{b-2} \cdot G_{v_2}
\end{aligned}$$

Nun kommt der Trick von Zariphopoulou [37], denn durch die geschickte Wahl von

$$\alpha = -\frac{1}{2}\lambda^2, \quad b = \frac{1}{1-\rho^2}, \quad \delta = r + \eta(\xi - \rho\lambda)$$

verschwinden die letzten drei Summanden der PDE und wir erhalten die Wärmeleitungsgleichung

$$0 = -G_{v_1} + \frac{1}{2}\eta^2 G_{v_2, v_2} \tag{A.1}$$

mit Randbedingung

$$G(0, v_2) = e^{\alpha_0} g \left( 0, v_2 - \left( \delta - \frac{1}{2}\eta^2 \right) 0 \right)^{\frac{1}{b}} = e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(e^{x_2})}.$$

**Folgerung**

Die Funktion  $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die PDE

$$G_{v_1} = \frac{1}{2}\eta^2 G_{v_2, v_2}$$

mit Randbedingung  $G(0, v_2) = e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(e^{v_2})}$ . Deren Lösung kann nach der Feynman-Kac-Formel dargestellt werden durch

$$G(v_1, v_2) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[ G \left( 0, v_2 + \hat{Y}_{v_1} \right) \right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( -\gamma k(1-\rho^2)C \left( e^{v_2 + \hat{Y}_{v_1}} \right) \right) \right]$$

mit einem Prozess  $\hat{Y}$  und einem Maß  $\hat{\mathbb{P}}$  derart, dass  $\hat{Y}$  die SDE

$$d\hat{Y}_t = \eta d\hat{W}_t \quad \hat{Y}_0 = 0$$

bezüglich einer  $\hat{\mathbb{P}}$ -Brownschen Bewegung  $\hat{W}$  erfüllt. Wird eine Brownsche Bewegung  $W^{\mathbb{Q}^{(0)}}$  bezüglich des minimalen Martingalmaßes  $\mathbb{Q}^{(0)}$  von Föllmer und Schweizer gewählt, so ergibt  $\hat{Y}_t = \eta W_t^{\mathbb{Q}^{(0)}}$  für die Funktion  $g : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= e^{\alpha x_1} G \left( x_1, x_2 + \left( \delta - \frac{1}{2}\eta^2 \right) x_1 \right)^b \\ &= e^{\alpha x_1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ G \left( 0, x_2 + \left( \delta - \frac{1}{2}\eta^2 \right) x_1 + \eta W_{x_1}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \right) \right]^b \\ &= e^{\alpha x_1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \exp \left( -\gamma k(1-\rho^2)C \left( e^{x_2 + (\delta - \frac{1}{2}\eta^2)x_1 + \eta W_{x_1}^{\mathbb{Q}^{(0)}}} \right) \right) \right]^b. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$g(T-t, \ln(Y_t)) = e^{\alpha(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ \exp \left( -\gamma k(1-\rho^2)C \left( Y_t e^{(\delta - \frac{1}{2}\eta^2)(T-t) + \eta W_{T-t}^{\mathbb{Q}^{(0)}}} \right) \right) \right]^b \quad (\text{A.2})$$

mit

$$\alpha = -\frac{1}{2}\lambda^2, \quad b = \frac{1}{1-\rho^2}, \quad \delta = r + \eta(\xi - \rho\lambda).$$

Nun ist  $(B_t^{\mathbb{Q}^{(0)}}, B_t^{\perp \mathbb{Q}^{(0)}})$  mit

$$B_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} = B_t + \int_0^t \lambda_u du, \quad B_t^{\perp \mathbb{Q}^{(0)}} = B_t^{\perp}$$

eine zweidimensionale Brownsche Bewegung bezüglich des minimalen Martingalmaßes



$\mathbb{Q}^{(0)}$ . Daher folgt für die SDE von  $Y$

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t [(r + \eta\xi)dt + \eta(\rho dB_t + \rho^\perp dB_t^\perp)] \\ &= Y_t \left[ (r + \eta\xi - \eta\rho\lambda)dt + \eta(\rho dB_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} + \rho^\perp dB_t^{\perp\mathbb{Q}^{(0)}}) \right] \\ &= Y_t [\delta dt + \eta dW_t^{\mathbb{Q}^{(0)}}]. \end{aligned}$$

mit der Brownschen Bewegung  $W^{\mathbb{Q}^{(0)}} = \rho dB_t^{\mathbb{Q}^{(0)}} + \rho^\perp dB_t^{\perp\mathbb{Q}^{(0)}}$ . Somit besitzt  $Y_T$  die Darstellung

$$Y_T = Y_t e^{(\delta - \frac{1}{2}\eta^2)(T-t) + \eta(W_T^{\mathbb{Q}^{(0)}} - W_t^{\mathbb{Q}^{(0)}})}$$

und wir können (A.2) darstellen als

$$g(T - t, \ln(y)) = e^{\alpha(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(0)}} \left[ e^{-\gamma k(1-\rho^2)C(Y_T)} \middle| Y_t = y \right]^b.$$

### A.3.2. NTAM: Potenznutzen

#### A.3.2.1. Herleitung der PDE für $g$ (allgemeiner Claim)

Für  $S = (X, P, Y)$  sei der Ansatz

$$\begin{aligned} v(t, X_t, P_t, Y_t) &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} [U(X_T + kC(Y_T))] \\ &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{1}{1-R} (X_T + kC(Y_T))^{1-R} \right] \\ &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{X_t^{1-R}}{1-R} \left( \frac{X_T}{X_t} + k \frac{C(Y_T)}{X_t} \right)^{1-R} \right] \\ &= \frac{X_t^{1-R}}{1-R} g(T - t, X_t, Y_t) \end{aligned}$$

mit Endbedingung

$$v(T, z, p, y) = U(z + kC(y)) = \frac{1}{1-R} (z + kC(y))^{1-R}$$

gewählt. Mit der Notation  $g_{x_i} = g_{x_i}(x_1, x_2, x_3) := \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, x_2, x_3)$  für  $i = 1, 2, 3$  ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) &= -\frac{z^{1-R}}{1-R} g_{x_1}, & v_z(t, z, p, y) &= \frac{z^{1-R}}{1-R} g_{x_2} + z^{-R} g, \\ v_y(t, z, p, y) &= \frac{z^{1-R}}{1-R} g_{x_3}, & v_{zz}(t, z, p, y) &= \frac{z^{1-R}}{1-R} g_{x_2, x_2} + 2z^{-R} g_{x_2} - R z^{-R-1} g, \\ v_{yy}(t, z, p, y) &= \frac{z^{1-R}}{1-R} g_{x_3, x_3}, & v_{z, y}(t, z, p, y) &= z^{-R} g_{x_3} + \frac{z^{1-R}}{1-R} g_{x_2, x_3}.\end{aligned}$$

Dies liefert für  $\theta^p$  nach (4.9)

$$\begin{aligned}\theta_t^p &= -\frac{\eta y \rho v_{zy} + \lambda v_z}{\sigma v_{zz}} \\ &= \left( -\eta y \rho \left( g_{x_3} + \frac{z}{1-R} g_{x_2, x_3} \right) - \lambda \left( \frac{z}{1-R} g_{x_2} + g \right) \right) \left( \frac{z}{1-R} g_{x_2, x_2} + 2g_{x_2} - \frac{R}{z} g \right)^{-1} \frac{1}{\sigma} \\ &= - \left( \eta \rho \left( \frac{(1-R)y}{z} g_{x_3} + y g_{x_2, x_3} \right) + \lambda \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \right) \frac{1}{a}\end{aligned}$$

mit

$$a = \sigma \left( g_{x_2, x_2} + \frac{2(1-R)}{z} g_{x_2} - \frac{R(1-R)}{z^2} g \right).$$

Für die HJB-Gleichung (4.8) bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned}0 &= \sup_{\theta^p} \frac{\partial}{\partial t} v(t, z, p, y) + \frac{1}{2} \sigma^2 (\theta_t^p)^2 v_{zz} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 v_{yy} \\ &\quad + \sigma \eta y \rho \theta_t^p v_{zy} + (\sigma \lambda \theta_t^p + r z) v_z + (r + \eta \xi) y v_y \\ \Leftrightarrow 0 &= \sup_{\theta^p} -g_{x_1} + \frac{1}{2} \sigma^2 (\theta_t^p)^2 \left( g_{x_2, x_2} + \frac{2(1-R)}{z} g_{x_2} - \frac{R(1-R)}{z^2} g \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 g_{x_3, x_3} + \sigma \eta y \rho \theta_t^p \left( \frac{(1-R)}{z} g_{x_3} + g_{x_2, x_3} \right) \\ &\quad + (\sigma \lambda \theta_t^p + r z) \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) + (r + \eta \xi) y g_{x_3} \\ &= -g_{x_1} + (r + \eta \xi) y g_{x_3} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 g_{x_3, x_3} + r z \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \\ &\quad + \sup_{\theta^p} \theta_t^p \left( \frac{1}{2} \sigma \theta_t^p a + \sigma \eta y \rho \left( \frac{(1-R)}{z} g_{x_3} + g_{x_2, x_3} \right) + \sigma \lambda \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \right) \\ &= -g_{x_1} + (r + \eta \xi) y g_{x_3} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 g_{x_3, x_3} + r z \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right)\end{aligned}$$

$$+ \sup_{\theta^p} \sigma \theta_t^p \left( \frac{1}{2} \theta_t^p a + \underbrace{\eta \rho \left( \frac{(1-R)y}{z} g_{x_3} + y g_{x_2, x_3} \right) + \lambda \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right)}_{= -\theta_t^p a \text{ bei optimaler Strategiewahl}} \right)$$

erfüllt sein muss. Durch Einsetzen der optimalen Strategie vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$0 = -g_{x_1} + (r + \eta \xi) y g_{x_3} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 g_{x_3, x_3} + r z \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) - \frac{1}{2} \sigma (\theta_t^p)^2 a$$

### Folgerung

Die Funktion  $g$  erfüllt die PDE

$$\begin{aligned} 0 = & -g_{x_1} + (r + \eta \xi) y g_{x_3} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 g_{x_3, x_3} + r z \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\left( \eta \rho \left( \frac{(1-R)y}{z} g_{x_3} + y g_{x_2, x_3} \right) + \lambda \left( g_{x_2} + \frac{(1-R)}{z} g \right) \right)^2}{\left( g_{x_2, x_2} + \frac{2(1-R)}{z} g_{x_2} - \frac{R(1-R)}{z^2} g \right)} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit Randbedingung

$$g(0, z, y) = \frac{1-R}{z^{1-R}} v(T, z, p, y) = \frac{1-R}{z^{1-R}} \frac{1}{1-R} (z + kC(y))^{1-R} = \left( 1 + \frac{kC(y)}{z} \right)^{1-R}.$$

#### A.3.2.2. Herleitung der PDE für $g$ (Claim $C(Y) = Y$ )

Im dem Fall  $C(Y) = Y$  vereinfacht sich das Optimierungsproblem derart, dass für  $S = (X, P, Y)$  der Ansatz

$$\begin{aligned} v(t, X_t, P_t, Y_t) &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} [U(X_T + kC(Y_T))] \\ &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{1}{1-R} (X_T + kY_T)^{1-R} \right] \\ &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{(t, S_t)} \left[ \frac{X_t^{1-R}}{1-R} \left( \frac{X_T}{X_t} + k \frac{Y_t}{X_t} \frac{Y_T}{Y_t} \right)^{1-R} \right] \\ &= \frac{X_t^{1-R}}{1-R} g(\tau, U_t) \end{aligned}$$

mit  $\tau = T - t$ ,  $U_t = \frac{Y_t}{X_t}$  und Endbedingung

$$v(T, z, p, y) = U(z + kC(y)) = \frac{1}{1-R} (z + ky)^{1-R} = \frac{z^{1-R}}{1-R} (1 + ku)^{1-R}$$

gewählt werden kann. Wir könnten das Vorgehen wie bei der Herleitung der PDE für den allgemeinen Claim (siehe A.3.2.1) wählen, aber sinnvoller ist deren Verwendung. Bezeichne  $\tilde{g}$  die Lösung der PDE (A.3), dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{x_1} &= g_\tau & \tilde{g}_{x_3} &= \frac{1}{X_t} g_u & \tilde{g}_{x_2} &= -\frac{U_t}{X_t} g_u \\ \tilde{g}_{x_2, x_2} &= 2 \frac{U_t}{X_t^2} g_u + \frac{U_t^2}{X_t^2} g_{uu} & \tilde{g}_{x_3, x_3} &= \frac{1}{X_t^2} g_{uu} & \tilde{g}_{x_2, x_3} &= -\frac{1}{X_t^2} g_u - \frac{U_t}{X_t^2} g_{uu}\end{aligned}$$

### Folgerung

Aus der PDE (A.3) ergibt sich für  $g$  bei einer Zinsrate  $r = 0$

$$\begin{aligned}0 &= -g_\tau + \eta \xi u g_u + \frac{1}{2} \eta^2 u^2 g_{uu} - \frac{\left( \eta \rho \left( \frac{(1-R)u}{z} g_u - \frac{u}{z} g_u - \frac{u^2}{z} g_{uu} \right) + \lambda \left( -\frac{u}{z} g_u + \frac{(1-R)}{z} g \right) \right)^2}{2 \left( 2 \frac{u}{z^2} g_u + \frac{u^2}{z^2} g_{uu} - \frac{2(1-R)u}{z^2} g_u - \frac{R(1-R)}{z^2} g \right)} \\ &= -g_\tau + \eta \xi u g_u + \frac{1}{2} \eta^2 u^2 g_{uu} - \frac{(\eta \rho (-R u g_u - u^2 g_{uu}) + \lambda (-u g_u + (1-R) g))^2}{2 (u^2 g_{uu} + 2 R u g_u - R (1-R) g)}\end{aligned}$$

mit Randbedingung  $g(0, u) = (1 + ku)^{1-R}$ . Daher empfiehlt sich die Betrachtung der Funktion  $h$  mit  $g(\tau, u) = h(\tau, u)^{1-R}$  und die partiellen Ableitungen

$$g_\tau = (1-R) \frac{h_\tau}{h^R}, \quad g_u = (1-R) \frac{h_u}{h^R}, \quad g_{uu} = (1-R) \left( \frac{h_{uu}}{h^R} - R \frac{h_u^2}{h^{R+1}} \right)$$

liefern

$$0 = -h_\tau + \eta \xi u h_u + \frac{1}{2} \eta^2 u^2 \left( h_{uu} - R \frac{h_u^2}{h} \right) - \frac{1}{2} \frac{E(h, h_u, h_{uu})^2}{D(h, h_u, h_{uu})}$$

mit

$$\begin{aligned}E(h, h_u, h_{uu}) &= \left( \eta \rho \left( -R u h_u - u^2 h_{uu} + R u^2 \frac{h_u^2}{h} \right) + \lambda (-u h_u + h) \right), \\ D(h, h_u, h_{uu}) &= \left( u^2 \left( h_{uu} - R \frac{h_u^2}{h} \right) + 2 R u h_u - R h \right).\end{aligned}$$

### A.3.3. SVM: Exponentieller Nutzen

Wir wollen mit dem Ansatz

$$v(t, z, p, y) = U(z) (G(t, y))^{1/\Lambda}, \quad \Lambda = 1 - q\rho^2 = 1 - \rho^2$$

von Satz 4.25 eine PDE für die Funktion  $G$  herleiten. Deren Randbedingung folgt direkt aus

$$v(T, z, p, y) = U(z) (G(T, y))^{1/\Lambda} \stackrel{!}{=} U(z).$$

Wir verzichten im Folgenden auf den Index  $y$  (bzw.  $t$ ) bei den Prozessen und nutzen ihn stattdessen als Symbol für die Ableitung nach seiner Stelle. Zudem kürzen wir  $G(t, y)$  mit  $G$  ab. Die HJB-Gleichung für den Wertprozess.

$$0 = v_t + \frac{1}{2}a^2v_{yy} + bv_y - \frac{1}{2} \frac{(\lambda v_z + \rho a v_{zy})^2}{v_{zz}}$$

transformiert sich zu

$$\begin{aligned} 0 &= U(z) \frac{1}{\Lambda} G_t G^{\frac{1}{\Lambda}-1} + U(z) \frac{a^2}{2\Lambda} \left( \left( \frac{1}{\Lambda} - 1 \right) G_y^2 G^{\frac{1}{\Lambda}-2} + G_{yy} G^{\frac{1}{\Lambda}-1} \right) + U(z) \frac{b}{\Lambda} G_y G^{\frac{1}{\Lambda}-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\left( U'(z) \lambda G^{\frac{1}{\Lambda}} + U'(z) \frac{\rho a}{\Lambda} G_y G^{\frac{1}{\Lambda}-1} \right)^2}{U''(z) G^{\frac{1}{\Lambda}}} \\ &= U(z) G^{\frac{1}{\Lambda}-1} \frac{1}{\Lambda} \left( G_t + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1-\Lambda}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} + G_{yy} \right) + b G_y \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(U'(z))^2}{U''(z)} \left( \lambda^2 G^{\frac{1}{\Lambda}} + 2\lambda \frac{\rho a}{\Lambda} G_y G^{\frac{1}{\Lambda}-1} + \frac{\rho^2 a^2}{\Lambda^2} G_y^2 G^{\frac{1}{\Lambda}-2} \right) \\ &= U(z) G^{\frac{1}{\Lambda}-1} \frac{1}{\Lambda} \left( G_t + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1-\Lambda}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} + G_{yy} \right) + b G_y \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(U'(z))^2}{U''(z)} G^{\frac{1}{\Lambda}-1} \frac{1}{\Lambda} \left( \lambda^2 \Lambda G + 2\lambda \rho a G_y + \frac{\rho^2 a^2}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} \right) \end{aligned}$$

Im Falle der exponentiellen Nutzenfunktion gilt

$$\frac{(U'(z))^2}{U''(z)} = -\frac{U'(z)}{ARA(z)} = U(z)$$

und dies führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= G_t + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1-\Lambda}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} + G_{yy} \right) + b G_y - \frac{\lambda^2}{2} \Lambda G - \lambda \rho a G_y - \frac{\rho^2 a^2}{2\Lambda} G_y^2 G^{-1} \\ &= G_t + G_y (b - \lambda a \rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy} - \frac{\lambda^2}{2} \Lambda G + \frac{a^2}{2\Lambda} G_y^2 G^{-1} \underbrace{(1 - \Lambda - \rho^2)}_{=0} \\ &= G_t + G_y (b - \lambda a \rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy} - \frac{\lambda^2}{2} \Lambda G \\ &= G_t + G_y (b - q \lambda a \rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy} - \frac{\lambda^2}{2} q \Lambda G \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist nur vollführt worden, um die PDE für  $G$  für beiden Nutzenfunktionen auf eine einheitliche Form zu bringen.

### Folgerung

Die Funktion  $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  erfüllt die PDE

$$\frac{1}{2}\lambda^2 q \Lambda G = G_t + G_y (b - q\lambda a \rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy}$$

mit  $G(T, y) = 1$  für alle  $y$ .

### A.3.4. SVM: Potenznutzen

Analog zu der exponentiellen Nutzenfunktion wollen wir mit dem Ansatz

$$v(t, z, p, y) = U(z) (G(t, y))^{1/\Lambda}, \quad \Lambda = 1 - q\rho^2 = 1 + \frac{1-R}{R}\rho^2$$

von Satz 4.25 eine PDE für die Funktion  $G$  herleiten. Erneut sei auf den Index  $y$  (bzw.  $t$ ) bei den Prozessen verzichtet und dieser stattdessen als Symbol für die Ableitung nach seiner Stelle genutzt, sowie  $G(t, y)$  mit  $G$  abgekürzt. Die HJB-Gleichung für den Wertprozess.

$$0 = v_t + \frac{1}{2}a^2 v_{yy} + b v_y - \frac{1}{2} \frac{(\lambda v_z + \rho a v_{zy})^2}{v_{zz}}$$

transformiert sich analog zum exponentiellen Nutzen zu

$$\begin{aligned} 0 = U(z) & \left( G_t + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1-\Lambda}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} + G_{yy} \right) + b G_y \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{(U'(z))^2}{U''(z)} \left( \lambda^2 \Lambda G + 2\lambda \rho a G_y + \frac{\rho^2 a^2}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} \right) \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\frac{(U'(z))^2}{U''(z)} = -\frac{U'(z)}{A R A(z)} = -\frac{1}{R} z^{1-R} = q U(z)$$

und dies führt zu

$$\begin{aligned} 0 = G_t + \frac{a^2}{2} & \left( \frac{1-\Lambda}{\Lambda} G_y^2 G^{-1} + G_{yy} \right) + b G_y - \frac{1}{2} q \lambda^2 \Lambda G - q \lambda \rho a G_y - \frac{\rho^2 a^2}{2\Lambda} q G_y^2 G^{-1} \\ = G_t + G_y & (b - q\lambda a \rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy} - \frac{1}{2} q \lambda^2 \Lambda G + \frac{a^2}{2\Lambda} G_y^2 G^{-1} \underbrace{(1 - \Lambda + \rho^2 q)}_{=0} \end{aligned}$$

$$= G_t + G_y (b - q\lambda a\rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy} - \frac{1}{2} q\lambda^2 \Lambda G$$

### Folgerung

Auch beim Potenznutzen erfüllt die Funktion  $G : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  die PDE

$$\frac{1}{2} \lambda^2 q \Lambda G = G_t + G_y (b - q\lambda a\rho) + \frac{a^2}{2} G_{yy}$$

mit  $G(T, y) = 1$  für alle  $y$ .

## A.4. Die Legendre-Transformierte

Für den dualen Ansatz wird die Legendre-Transformierte benötigt. Aus diesem Grund wird eine kurze Einführung gegeben, die sich an der konvexen Analysis aus der Vorlesung von Dereich [6] orientiert.

### Definition A.4

Sei für  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  die Funktion  $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Deren Legendre-Transformierte  $\Lambda^* : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$\Lambda^*(y) = \sup_{z \in \mathcal{D}} [zy - \Lambda(z)]$$

mit Domäne  $\mathcal{D}^* = \{y : \sup_{z \in \mathcal{D}} [zy - \Lambda(z)] < \infty\}$ .

### Satz A.5

Sei für  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  die Funktion  $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  strikt konvex und differenzierbar. Dann ist die Legendre-Transformierte  $\Lambda^* : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\Lambda^*(y) = yI(y) - \Lambda(I(y))$$

mit  $I = (\Lambda')^{-1}$ .

Sowohl die exponentielle als auch die Potenznutzenfunktion sind strikt konkav, folglich ist  $-U$  strikt konvex. Daher können wir mit Hilfe des obigen Satzes die Legendre-Transformierte  $(-U)^*$  berechnen. Aufgrund der Monotonie der Nutzenfunktion gilt

$$(-U)^*(y) = \sup_{z \in \mathcal{D}} [yz - (-U)(z)] = \begin{cases} \infty & \text{für } y > 0, \\ \sup_{z \in \mathcal{D}} [U(z) + yz] & \text{für } y \leq 0, \end{cases}$$

das heißt  $\mathcal{D}^* \subseteq (-\infty, 0]$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir die Notation  $\tilde{U}(y) := (-U)^*(-y)$  ein und erhalten

(i) für die exponentielle Nutzenfunktion

$$\tilde{U}(y) = -yI(-y) + U(I(-y)) = y \frac{1}{\gamma} \ln(y) - \frac{1}{\gamma} e^{\ln(y)} = \frac{1}{\gamma} [y \ln(y) - y]$$

(ii) sowie im Falle der Potenznutzenfunktion

$$\tilde{U}(y) = -yI(-y) + U(I(-y)) = yy^{-\frac{1}{R}} - \frac{y^{-\frac{1}{R}(1-R)}}{1-R} = \frac{R}{1-R} y^{1-\frac{1}{R}}.$$



# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Jörn Borrink, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Münster, den 31. März 2015

---

Jörn Borrink