Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Dynamische Risikobewertung mittels stochastischer Optimierung

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:
PD Dr. Volkert Paulsen

Eingereicht von:
Andre Christopher Kirsch

Münster, den 29. März 2016

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Andre Christopher Kirsch*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht.

Münster, den 29. März 2016

Vorname Nachname

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Dr. Volkert Paulsen für die Vergabe dieses Themas und die ausgezeichnete Betreuung bei der Erstellung meiner Masterarbeit sowie des gesamten Masterstudiums herzlich danken. Weiterer Dank gilt meiner gesamten Familie, die mich während meines Studiums stets unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Portfoliooptimierung stellt in der Finanzmathematik ein zentrales Themengebiet dar. Es existieren zahlreiche Ausarbeitungen, die sich mit der Suche nach optimalen Handlungsstrategien auf einem Finanzmarkt beschäftigen. Die individuelle Modellierung des Finanzmarktes, das heißt Einschränkungen oder Annahmen, die an das Verhalten des Investors bzw. der handelbaren Finanzgüter getroffen werden, bestimmen die Existenz und ggf. die Form solcher Strategien.
In einem standardmäßigen Modell modelliert man die Unsicherheit über zukünftige Kursentwicklungen von risikobehafteten Finanzanlagen mit Hilfe eines Wiener-Prozesses. Dieser erfüllt bestimmte Voraussetzungen, die es ermöglichen, Aussagen bezüglich optimaler Anlagestrategien treffen zu können. Allerdings bedeutet eine Finanzanlage, die auf Wahrscheinlichkeiten und somit dem Zufall beruht, auch immer ein Risiko für den Investor. Handeln am Finanzmarkt kann also zum einen vom Standpunkt der Portfoliooptimierung und zum anderen von der Seite des Risikomanagements aus betrachtet werden. Wir beschäftigen uns in dieser Ausarbeitung mit Letzterem, genauer gesagt, mit einer Minimierung des zugrundeliegenden Risikos für den Investor; insofern stellt dies ebenfalls eine Optimierung seines Handelns am Finanzmarkt dar.
Um Risikomanagement betreiben zu können, muss man in der Lage sein, das Konzept 'Risiko' mathematisch bewerten zu können. Dem waren sich bereits *Artzner, Delbaen, Eber* und *Heath* [ADEH96, S.2] bewusst. Sie haben definierende Eigenschaften für ein „kohärentes Risikomaß“ aufgestellt (siehe [ADEH99, Definition 2.4]) und damit bestehende Konzepte wie zum Beispiel das *Value at Risk* zusammenfassen können. *Cvitanić* und *Karatzas* bringen auf dieser Grundlage die beiden Ansätze 'Portfoliooptimierung' und 'Risikomanagement' zusammen: Sie setzen eine zukünftige Verbindlichkeit des Investors voraus und betrachten den minimalen erwarteten diskontierten Verlust, den er durch optimales Handeln am Finanzmarkt erreichen kann. Ihre Definition des Risikos stellt somit ein stochastisches Optimierungsproblem dar, das mit Hilfe bekannter Methoden gelöst werden kann; andererseits erfüllt sie die Eigenschaften eines kohärenten Risikomaßes in [ADEH99] (vgl. auch [FS08]). Ihre Arbeit in [CK99] dient zusammen mit [SC99] als maßgebliche Literaturquelle dieser Ausarbeitung und speziell der

Kapitel 3, 4 und 6.
Dementsprechend untersuchen wir für gegebenes Anfangskapital x des Investors das Risikomaß

$$V(x) := \inf_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)} \right)^+ \right],$$

wobei π die Handlungsstrategie, $\mathcal{A}(x)$ die Menge der zugelassenen Strategien, C die Verbindlichkeit, $X^{x,\pi}(T)$ das Endvermögen des Investors sowie $S_0(T)$ den Diskontfaktor beschreiben.
Der Aufbau ist dabei wie folgt:

In Kapitel zwei bilden wir den mathematischen Rahmen für das Thema dieser Ausarbeitung: Das zugrundeliegende Finanzmarktmodell wird definiert und entscheidende mathematische Hilfsmittel werden kurz erläutert.
Im dritten Kapitel formulieren wir zunächst die Risikobewertung als stochastisches Optimierungsproblem, welches wir anschließend mittels der Martingalmethode lösen, indem wir es in ein konvexes Dualitätsproblem überführen und gemäß eines Lagrange-Ansatzes vorgehen.
Die nachfolgenden Kapitel stellen Anwendungsbeispiele dar. Während wir in Kapitel vier mit deterministischen Koeffizienten arbeiten, behandeln wir im fünften Kapitel eine stochastische Zinsrate im Kontext eines Short-Rate-Modells. Zur Modellierung der Zinsrate benutzen wir ein Vasicek-Modell, welches wir kompakt erörtern und notwendige mathematische Überlegungen durchführen.
In Kapitel sechs erweitern wir dann das gegebene Finanzmarktmodell um eine äußerliche Modell-Unsicherheit: Im ersten Ansatz soll diese in Form einer Beeinflussung der Einschätzungen des Investors auftreten, was zusätzlich sein Risiko erhöht. Im zweiten Teil unterstellen wir in einem Bayes-Ansatz eine gemeinsame a priori Verteilung der Aktienrenditen und gelangen in beiden Fällen durch analoge Vorgehensweisen zu Lösungen für das stochastische Optimierungsproblem.
Den Abschluss dieser Ausarbeitung bildet Kapitel sieben, in dem wir die gewonnen Erkenntnisse zusammenfassen und weitere mögliche Untersuchungspunkte der Thematik in Aussicht stellen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wird der zugrundeliegende Finanzmarkt modelliert sowie einige grundlegende Begriffe und notwendige Instrumente kurz vorgestellt und erläutert. Die nachfolgende Zusammenstellung kann dabei jedoch nicht als Einführung in die finanzmathematische Modellierung und Optimierung verstanden werden, sondern setzt finanzmathematische Grundkenntnisse voraus und soll als Basis für die vorliegende Ausarbeitung dienen. Für eine umfangreiche Darstellung und Erläuterung der benötigten Zusammenhänge sei an dieser Stelle auf die Werke von *Ioannis Karatzas* und *Steven E. Shreve* [KS01], [KS91] verwiesen. Wir orientieren uns in diesem Kapitel an [Pau14].

2.1 Modellierung des Finanzmarktes

Wir setzen einen endlichen Planungshorizont $[0, T]$ für $T > 0$ voraus und betrachten einen Finanzmarkt $\mathcal{M}$, in dem $n+1$ Basisfinanzgüter zur Verfügung stehen: Eine lokal risikolose Anlage -im Folgenden als Geldmarktkonto bezeichnet- und n risikobehaftete Anlagen -im Folgenden als risky assets bezeichnet. Diese Finanzgüter sind stetig über die Zeit handelbar.
Sei

$$W(t) = (W_1(t), \ldots, W_m(t))',^1 \; t \in [0, T],$$

ein m-dimensionaler Wiener-Prozess auf einem filtrierten
Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F})$. Dabei seien $\mathbf{P}$ das zugrundeliegende „reale“ Wahrscheinlichkeitsmaß und $\mathbf{F} = (\mathcal{F}(t))_{t \in [0,T]}$ die vom Wiener-Prozess erzeugte Filtration.[2] $W(\cdot)$ stellt im Modell die treibende Quelle des Zufalls dar. Der Informationsverlauf, der durch die Filtration verkörpert wird, beschränkt sich dabei ausschließlich

[1]Mit $(\cdot)'$ bezeichnen wir die Transponierte eines Vektors.
[2]Dies ist die kleinste Filtration bezüglich der $W(\cdot)$ ein Wiener-Prozess ist, vgl. [KS91, Abschnitt 2.7].

auf den Verlauf von $W(\cdot)$.
Wir setzen in unserem Modell die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes (siehe Abschnitt 2.2) voraus, wodurch die Möglichkeit von Arbitragen (vgl. [Pau14, Definition 3.1]) ausgeschlossen wird. Wir nehmen zusätzlich an, dass der Finanzmarkt vollständig ist. Das heißt, jeder beschränkte *Claim* ist *hedgebar*. Ein Claim ist dabei als eine $\mathcal{F}(T)$-messbare Abbildung definiert und hedgebar, falls dessen zufällige Auszahlung in T durch ein Portfolio aus Basisfinanzgütern repliziert werden kann; vgl. [Pau14, Abschnitt 1.8]. Die Vollständigkeit des Finanzmarktes impliziert außerdem, dass die Dimension des Zufalls der Anzahl der unabhängigen risky assets entspricht; siehe Abschnitt 2.2. Das heißt, es gilt $m = n$.
Sei $r(\cdot)$ die Zinsrate des Geldmarktkontos. Der Prozess erfülle die Integritätsbedingung

$$\int\limits_0^t |r(s)|ds < \infty \text{ für alle } t \in [0,T].$$

Dann erfüllt der Prozess

$$S_0(t) := \exp\left(\int\limits_0^t r(s)ds\right)$$

die stochastische Differentialgleichung

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt,\ S_0(0) = 1,$$

welche die Dynamik des Preisprozesses S_0 des Geldmarktkontos verkörpert.
Seien weiter $\mu(\cdot) = (\mu_1(\cdot), \dots, \mu_n(\cdot))'$ die Drift, sowie $\sigma(\cdot) = \{\sigma_{ij}(\cdot)\}_{1\le i,j\le n}$ die Matrix der Volatilitäten der risky assets. $\mu(t)$ und $\sigma(t)$ seien für alle $t \in [0,T]$ progressiv messbar bezüglich $\mathcal{F}(t)$ und erfüllen die Integritätsbedingungen

$$\int\limits_0^T \|\mu(s)\|^2 ds < \infty,$$

$$\int\limits_0^T \|\sigma(s)\|^2 ds = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int\limits_0^T \sigma_{ij}^2(s) < \infty, \tag{2.1}$$

wobei $\|x\| := (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zusätzlich sei $\sigma(\cdot)$ invertierbar.

Bemerkung:
Die Abbildungen $r(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ und $\sigma(\cdot)$ heißen Koeffizienten des Modells. Grundsätzlich lassen wir mit dieser Modellierung stochastische Koeffizienten zu, das heißt insbesondere eine vom Zufall beeinflusste Zinsrate $r(\cdot)$. Für die Anwendungen in Kapitel 4 verwenden wir jedoch lediglich deterministische bzw. konstante Koeffizienten, um explizite Lösungen erhalten zu können. In Kapitel 5 erweitern wir die Anwendung dann auf das Vasicek-Modell, in dem eine stochastische Zinsrate modelliert wird.

Die Preisprozesse $S_i,\ i = 1, \ldots, n$, der risky assets seien positive stetige Semimartingale (siehe [KS91, Abschnitt 3.3, Definition 3.1]) bezüglich $(\mathcal{F}(t))_{t\in[0,T]}$ mit konstanten Anfangswerten $S_i(0) = s_i > 0$ und entwickeln sich gemäß der folgenden Dynamiken:

$$dS_i(t) = S_i(t)\Big(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\Big),\ S_i(0) = s_i > 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$S_i(t) = s_i \exp\left(\int_0^t \mu_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2(s)ds + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j(s)\right),\ i = 1, \ldots, n.$$

2.2 Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß

In der Finanzmathematik benutzt man zur Bewertung von Claims und Derivaten das sogenannte *risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbf{P}^*$. Dies ist ein -zu dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$- äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die diskontierten Preisprozesse der risky assets Martingale sind; $\mathbf{P}^*$ wird daher auch äquivalentes Martingalmaß genannt.
Durch die Existenz eines solchen risikoneutralen Maßes folgt, dass der Prozess

$$Z(t) := \exp\left(-\int_0^t \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 \, ds\right) \tag{2.3}$$

ein $\mathbf{P}$-Martingal ist.

$$(\theta(t))_{t\in[0,T]} := \left(\sigma^{-1}(t)(\mu(t) - r(t)\tilde{\mathbf{1}})\right)_{t\in[0,T]}{}^{3}$$

ist dabei ein previsibler n-dimensionaler Prozess mit

$$\int_0^T \|\theta(s)\|^2 \, ds < \infty \tag{2.4}$$

und wird Risikoprämie bzw. *risk premium* genannt.
Der *Satz von Girsanov* (siehe [KS91, Abschnitt 3.5 A]) impliziert dann, dass mit

$$W^*(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds, \tag{2.5}$$

unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}^*$ mit der Dichte $Z(T)$ bezüglich $\mathbf{P}$, ein n-dimensionaler Wiener-Prozess gegeben ist.
Da wir zusätzlich einen vollständigen Finanzmarkt voraussetzen, liefert der *2. Fundamentalsatz der Preistheorie* (vgl. [Pau14, Satz 3.12]) die Eindeutigkeit von $\mathbf{P}^*$ und somit von $\theta(\cdot)$.[4]
Unter dem risikoneutralen Maß erhalten wir so mittels (2.5) folgende Dynamik für die risky assets:

$$\begin{aligned}
S_i(t) &= s_i \exp\left(\int_0^t \mu_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j(s)\right) \\
&= s_i \exp\left(\int_0^t \mu_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j^*(s) - \left(\int_0^t \theta(s)ds\right)_j\right) \\
&= s_i \exp\left(\int_0^t r(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j^*(s)\right), \ i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

[3] $\tilde{\mathbf{1}} := (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet den n-dimensionalen Einheitsvektor.
[4] Wäre die Anzahl risky assets ungleich der Dimension von $W(\cdot)$, also $n \neq m$, so wäre die Eindeutigkeit von $\mathbf{P}^*$ nicht gegeben; vgl. [Pau14, Abschnitt 2.3].

3 Lösung des stochastischen Optimierungsproblems

Mit den Grundlagen aus Kapitel 2 haben wir einen adäquaten Finanzmarkt für unser Vorhaben modelliert. Das Ziel dieses Kapitels ist es, das Risikomaß wohldefiniert zu formulieren. Anschließend zeigen wir mittels einer Martingalmethode die Existenz einer Lösung und leiten implizit die Form der Optimierer her.

3.1 Formulierung des Problems

Wir betrachten einen Investor mit Anfangskapital $x > 0$ und Planungshorizont $[0, T]$. Zu jeder Zeit $t \in [0, T]$ entscheidet der Investor, welche absolute Menge $\pi(t) = (\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))'$ er in jedes der n risky assets investiert. $\pi(\cdot)$ wird Handlungsstrategie des Investors genannt und wie folgt definiert:

Definition 3.1.1 (Handlungsstrategie)**:**
Ein Prozess $\pi : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Handlungsstrategie, falls er progressiv messbar bezüglich $\boldsymbol{F}$ ist und

$$\int_0^T \left\| \pi(t)^2 \right\| dt < \infty$$

fast sicher erfüllt.

Wir gehen davon aus, dass ausschließlich *selbstfinanzierende* Handlungsstrategien verwendet werden, das heißt der Investor darf während des Planungshorizonts $[0, T]$ weder Kapital zuschießen noch entnehmen; vgl. [Pau14, Abschnitt 1.3]. Darüber hinaus soll

kein Konsum stattfinden.
Sei $X(t)$ sein Investitionsvolumen zur Zeit $t \in [0,T]$, das heißt sein Vermögen welches am Finanzmarkt gehandelt wird. Dann beschreibt

$$X(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)$$

die Menge an Geld, die er zur Zeit t in das Geldmarktkonto investiert.
Damit kann der Vermögensprozess durch folgende Dynamik beschrieben werden:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(X(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \right) r(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \left(\pi_i(t) \left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{i,j}(t)dW_j(t) \right) \right) \\ &\overset{(2.5)}{=} X(t)r(t)dt + \pi'(t)\sigma(t)dW^*(t), \ X(0) = x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Mit der Itô-Formel folgt:

$$d\left(\frac{1}{S_0(t)}\right) = -\frac{1}{S_0(t)} r(t)dt$$

und somit durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X(t)}{S_0(t)}\right) &= \frac{1}{S_0(t)} dX(t) - \frac{X(t)}{S_0(t)} r(t)dt \\ &\overset{(3.1)}{=} \frac{\pi'(t)}{S_0(t)} \sigma(t)dW^*(t), \ \frac{X(0)}{S_0(0)} = X(0) = x. \end{aligned}$$

Das heißt:

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = x + \int_0^t \frac{\pi(u)}{S_0(u)} \sigma(u)dW^*(u). \tag{3.2}$$

Der Prozess $\left(\frac{X(t)}{S_0(t)}\right)_{0 \le t \le T}$ ist demzufolge ein lokales Martingal bezüglich $\mathbf{P}^*$.
Wir werden im Folgenden den Vermögensprozess $X(\cdot)$ durch $X^{x,\pi}(\cdot)$ darstellen, da $X(t)$ das Vermögen zur Zeit t zum Anfangswert x beschreibt, welches durch den Prozess $\pi(\cdot)$ kontrolliert wird.
Einem Investor steht grundsätzlich natürlich frei, wie er sein angelegtes Vermögen verteilt, also welche Handlungsstrategie er verfolgt. Um jedoch die Finanzierbarkeit einer optimalen Strategie zu gewährleisten, setzen wir eine Art externen Regulator ein, der eine Kapitalanforderung an den Investor stellt und somit die Menge der zulässigen Handlungsstrategien eingrenzt; entsprechend darf der Vermögenswert, der durch die

Handlungsstrategie erreicht wird, nie unter eine gewisse (zufällige) Grenze fallen. Diesen Zusammenhang definieren wir folgendermaßen:

Definition 3.1.2 (Zulässigkeit)**:**
Für ein $\epsilon > 0$ und eine gegebene Zufallsvariable A, mit $\frac{A}{S_0(T)} \in \boldsymbol{L}^{1+\epsilon}(\Omega, \mathcal{F}(T), \boldsymbol{P}^*)$ heißt eine Handlungsstrategie $\pi(\cdot)$ zulässig zum Anfangskapital x, falls

$$A(t) := \mathbb{E}^* \left[\frac{A}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] S_0(t) \leq X^{x,\pi}(t)$$

für alle $t \in [0,T]$ fast sicher gilt, wobei der Erwartungswert zum risikoneutralen Maß $\boldsymbol{P}^*$ genommen wird.
In diesem Fall schreiben wir $\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$.

Bemerkung:
Der Wert $A(\cdot)$ wird mit Hilfe des Erwartungswertes bezüglich des risikoneutralen Bewertungsmaßes $\boldsymbol{P}^*$ gebildet und entspricht somit dem Preis des Claims A zum Zeitpunkt t. In dem Kontext ist $A_0 := A(0) = \mathbb{E}^* \left[\frac{A}{S_0(T)} \right] \leq x$ der Anfangspreis des Claims A, oder anders ausgedrückt, der kleinste Wert $\bar{x}$ für den eine geeignete Hedging-Strategie $\bar{\pi}$ existiert, sodass $X^{\bar{x},\bar{\pi}}(T) \geq A(T) = A$, fast sicher gilt.
Da wir einen vollständigen Finanzmarkt betrachten, ist jeder Claim hedgebar; das heißt zu jedem A, wie oben definiert, existiert eine Hedging-Startegie $\pi_A(\cdot)$ zum Anfangswert A_0, so dass $A(\cdot) = X^{A_0,\pi_A}(\cdot)$.

Mit Hilfe von (3.2) können wir folgende Gleichheit festhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \left[\frac{A}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] &= \frac{A(t)}{S_0(t)} \\
&= \frac{X^{A_0,\pi_A}(t)}{S_0(t)} \\
&= A_0 + \int_0^t \frac{\pi'_A(u)}{S_0(u)} \sigma(u) dW^*(u), \quad t \in [0,T]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Aus den Darstellungen (3.2) und (3.3) folgt, dass der Prozess

$$\left(\frac{X^{x,\pi}(t)-A(t)}{S_0(t)}\right)_{0\le t\le T} = \left((x-A_0)+\int\limits_0^t \frac{(\pi(s)-\pi_A(s))'}{S_0(s)}dW^*(s)\right)_{0\le t\le T}$$

ein lokales Martingal bezüglich $\mathbf{P}^*$ ist, das im Falle der Zulässigkeit von $\pi(\cdot)$ nichtnegativ und somit ein $\mathbf{P}^*$-Supermartingal ist.[1]
Nach Definition ist der Prozess $\left(\frac{A(t)}{S_0(t)}\right)_{0\le t\le T}$ selbst ein $\mathbf{P}^*$-Martingal. Deswegen muss $\left(\frac{X^{x,\pi}(t)}{S_0(t)}\right)_{0\le t\le T}$ ein $\mathbf{P}^*$-Supermartingal sein, das heißt es gilt:

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{X^{x,\pi}(t)}{S_0(t)}\right] \le x,\ \text{für alle } t\in[0,T],\ \pi(\cdot)\in\mathcal{A}(x). \tag{3.4}$$

Definition 3.1.3:
Falls in (3.4) *sogar Gleichheit gilt, nennen wir* $\pi(\cdot)$ *eine Martingal-erzeugende Handlungsstrategie.*

Betrachten wir nun die Verbindlichkeit C, die ein Investor in $t=T$ zu leisten hat. Dafür sei C analog zu A für ein $\epsilon>0$ eine Zufallsvariable mit $\frac{C}{S_0(T)}\in\mathbf{L}^{1+\epsilon}(\Omega,\mathcal{F}(T),\mathbf{P}^*)$ und

$$\begin{aligned} C(t) :&= \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}(t)\right]S_0(t) \qquad (3.5)\\ &= C_0+\int\limits_0^t \frac{\pi_C'(u)}{S_0(u)}\sigma(u)dW^*(u),\quad t\in[0,T], \end{aligned}$$

wobei $C_0 := C(0)$. Außerdem sei

$$\mathbf{P}^*(C\ge A)=1 \text{ und } \mathbf{P}^*(C>A)>0.$$

[1]Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Fatou, siehe [KK13, Satz 17].

Damit sind die formalen Vorbereitungen abgeschlossen und wir können unsere dynamische Risikobewertung und das damit verbundene stochastische Optimierungsproblem formulieren:

$$V(x) = \inf_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right]. \tag{3.6}$$

Für ein gegebenes Anfangskapital $x \geq A_0$ und unter Verwendung zulässiger Handlungsstrategien $\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$ versucht der Investor also, die diskontierte Differenz auf Verbindlichkeit und Vermögen im Erwartungswert zu minimieren. Klar ist, dass für ein hinreichend großes Anfangskapital, nämlich $\bar{x} \geq C_0$, aufgrund der Vollständigkeit des Finanzmarktes ein Superhedge $\bar{\pi}(\cdot) \in \mathcal{A}(\bar{x})$ zu dem Claim C existiert, das heißt

$$X^{\bar{x},\bar{\pi}}(T) \geq C, \quad \text{fast sicher.}$$

In solchen Fällen wäre unsere Risikobewertung $V(\bar{x}) \equiv 0$. Wir untersuchen daher nur die Fälle in denen gilt:

$$x \in [A_0, C_0)\,.$$

Bemerkung 3.1.4:
Wie in der Einleitung bereits erwähnt, stehen Portfoliooptimierung und Risikobewertung in einem unmittelbaren Verhältnis zueinander. Bei der klassischen Portfoliooptimierung ohne Konsum versucht man, den erwarteten diskontierten Nutzen des Investors über alle möglichen Handlungsstrategien zu maximieren; der Nutzen wird dabei durch eine konkave Nutzenfunktion vom Endvermögen modelliert. Bei unserer Risikobewertung versuchen wir hingegen, die diskontierte Differenz aus Verbindlichkeit und Endvermögen im Erwartungswert über alle möglichen Handlungsstrategien zu minimieren. Das Innere vom Erwartungswert in (3.6) *können wir als eine konvexe Funktion ansehen; mit dem Negativen von $V(x)$ würden wir also gerade das erwartete Maximum einer konkaven Funktion bilden. Unter diesem Gesichtspunkt ist unsere Definition der Risikobewertung als spezielle Form der klassischen Portfoliooptimierung anzusehen.*

3.2 Die Martingalmethode

Wir suchen nun für gegebenes $x \in [A_0, C_0)$ die Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$, die optimal für (3.6) ist, sodass

$$V(x) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\hat{\pi}}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right]$$

gilt.
Ziel dieses Abschnitts wird sein, zum einen die Existenz einer Lösung für das Problem zu gewährleisten; zum anderen werden wir vereinfachte Darstellungen für die Form der Lösung sowie der Optimierer erhalten. Unter gewissen Voraussetzungen können wir im anschließenden Kapitel sogar explizite Werte berechnen.
Zunächst stellen wir jedoch das hier angewandte Verfahren zur Lösung stochastischer Optimierungsprobleme bzw. dessen Grundidee vor und übertragen diese anschließend auf unser Modell.

Bei der Lösung von stochastischen Optimierungsproblemen geht man grundsätzlich auf zwei verschiedene Weisen vor: Einerseits kann man mit Hilfe **stochastischer Kontrolltheorie** eine partielle Differentialgleichung für die sogenannte Wertfunktion des Problems herleiten. Dazu unterstellt man zunächst die Existenz einer Lösung und stellt den Optimierer in Abhängigkeit dieser dar. Setzt man anschließend diese Funktion in die *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung ein, gelangt man zu der angesprochenen partiellen Differentialgleichung, die es im zweiten Schritt zu lösen gilt. Hierzu verwendet man das *Bellman-Prinzip*. *Robert C. Merton* gilt als erster, der in [Mer69] Hilfsmittel der dynamischen Programmierung verwendet, um stochastische Optimierungsprobleme zu lösen.
An dieser Stelle sei ausdrücklich erwähnt, dass dies eine sehr kurz gefasste und vereinfachte Beschreibung stochastischer Kontrolltheorie ist; der interessierte Leser sei für einen umfassenden Überblick der Technik an [Kor97, Kapitel 3]verwiesen.
Die andere Art wie man stochastische Optimierungsprobleme löst, ist durch die - zum Beispiel in [Pli86], [KLS87] oder [CH89] dargestellte- **Martingalmethode** gegeben. Dieser Ansatz spaltet das Problem in zwei Komponenten auf: Zunächst wird das dynamische zu einem statischen Optimierungsproblem reduziert, das heißt man sucht das optimale statische Argument -in unserem Fall den optimalen Endwert des Vermögens und erhält so den optimalen Wert des Problems. Dazu werden Hilfsmittel der konvexen Analysis verwendet. Die Existenz sowie die Herleitung der optimalen dynamischen Handlungsstrategie, durch die der optimale Vermögensendwert erreicht wird,

stellt dann das *Repräsentationsproblem* dar. In den meisten Fällen kann man dieses durch Koeffizientenvergleich der stochastischen Differentialgleichungen lösen, wofür der Martingaldarstellungssatz sowie die Itô-Formel als wichtigste Hilfsmittel benötigt werden.
Die Martingalmethode ist letztlich ein Begriff für das Trennen des dynamischen Optimierungsproblems in ein statisches Optimierungsproblem und ein Repräsentationsproblem. Notwendig für diesen Ansatz ist jedoch die relativ starke Bedingung eines vollständigen Finanzmarktes.

Wir werden in dieser Ausarbeitung die Martingalmethode verwenden; wir spalten unser Problem also in die folgenden zwei Komponenten auf:

Statisches Optimierungsproblem:
Wir suchen den Wert

$$\inf_{X \in \mathcal{S}(x)} \mathbb{E}\left[\left(\frac{C-X}{S_0(T)}\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{C-X^*}{S_0(T)}\right)^+\right].$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{S}(x)$ die Menge aller nicht-negativen $\mathcal{F}(T)$-messbaren Claims X, deren Anfangspreis das gegebene Startvermögen $x \in [A_0, C_0)$ des Investors nicht übersteigt -das heißt $\mathbb{E}^*\left[\frac{X}{S_0(T)}\right] \leq x$- und welche nur Auszahlungen in $[A, C)$ generieren.

Repräsentationsproblem:
Gesucht ist die Handlungsstrategie $\pi^*(\cdot)$ mit $\pi^*(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$ und $X^{x,\pi^*}(T) = X^*$.

3.2.1 Der Lagrange-Ansatz

Um das statische Optimierungsproblem zu lösen, bedienen wir uns der Hilfsmittel konvexer Analysis, indem wir die Vorgehensweise eines *Lagrange-Ansatzes* geeignet auf unser Problem transferieren. Zu diesem Zweck erläutern wir den allgemeinen Lagrange-Ansatz kurz, hierfür dient [BV04] als Literaturquelle:

Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1;\ldots,n$, stetig differenzierbare Funktionen.
Betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } f(x) \\ &\text{unter der Nebenbedingung } g_i(x) \leq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ i = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{p}$$

sowie die *Lagrangefunktion*

$$L(x,\lambda) := f(x) + \lambda' g(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^m_+,$$

wobei λ *Lagrange-Multiplikator* genannt wird.
Sei $\tilde{x}$ eine Lösung für (p), das heißt

$$f(\tilde{x}) = p^* := \inf \{f(x)|g_i(x) \leq 0 \text{ für alle } i = 1,\ldots,n\}.$$

Dann folgt offensichtlich

$$D(\lambda) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\lambda) \leq L(\tilde{x},\lambda) \leq p^* \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^m_+.$$

$D(\lambda)$ ist die *duale Lagrangefunktion* und stellt somit eine untere Schranke für den optimalen Wert in (p) dar. Die Frage nach einer bestmöglichen Schranke für p^* wird dann durch das duale Optimierungsproblem

$$\sup_{\lambda > 0} D(\lambda)$$

geklärt, dessen Lösung wir als d^* bezeichnen.
Man spricht von *starker Dualität,* wenn $d^* = p^*$ gilt. Dies ist der Fall, wenn die Funktionen $f(\cdot)$ sowie $g_i(\cdot),\ i = 1,\ldots,n$ konvex sind.

Die Idee des Lagrange-Ansatzes ist also, das Ursprungsproblem gegen eine untere Schranke abzuschätzen, die vom Langrange-Multiplikator abhängt. Durch die Maximierung der unteren Schranke gelangt man dann zum optimalen Wert für das Ursprungsproblem.

Dieses Vorgehen werden wir im Folgenden geeignet auf unser Problem übertragen. Dazu machen wir zunächst einige Vorüberlegungen:
Wir betrachten die konvexe Funktion

$$R(z) := z^+$$

sowie für $\xi > 0$ die *Fenchel-Legendre-Transformierte*

$$\tilde{R}(\xi,\omega) := \min_{z \le C(\omega)-A(\omega)} \{R(z) - \xi z\} = \min_{z \le C(\omega)-A(\omega)} \left\{ z(\mathbf{1}_{\{z>0\}} - \xi) \right\}.$$

In Abhängigkeit von ξ wird dieses Minimum angenommen durch die Zufallsvariable

$$\begin{aligned}\arg\min_{z \le C(\omega)-A(\omega)} \{R(z) - \xi z\} =: \mathcal{I}(\xi,\omega) &= \begin{cases} C(\omega) - A(\omega) & \text{falls } \xi > 1 \\ 0 & \text{falls } \xi \in (0,1) \\ U(\omega) & \text{falls } \xi = 1 \end{cases} \\ &= (C(\omega) - A(\omega))\mathbf{1}_{\{\xi>1\}} + U(\omega)\mathbf{1}_{\{\xi=1\}}\end{aligned}$$

für eine $\mathcal{F}(T)-$messbare Zufallsvariable U mit $U \in [0, C - A]$ fast sicher.
Das heißt:

$$\tilde{R}(\xi,\omega) = R(\mathcal{I}(\xi,\omega)) - \xi\mathcal{I}(\xi,\omega) = (1-\xi)C(\omega) - A(\omega)\mathbf{1}_{\{\xi\ge 1\}}. \tag{3.7}$$

Bemerkung:
Die Fenchel-Legendre-Transformierte $\tilde{R}(\cdot,\omega)$ ähnelt der dualen Lagrangefunktion $D(\cdot)$; für die geeigneten Argumente stimmen sie tatsächlich überein. Diese Tatsache motiviert die Orientierung am skizzierten Langrange-Ansatz.

Sei $x \in [A_0, C_0)$ gegeben. Wir identifizieren die Funktion $f(X)$ im Lagrange-Ansatz als $R(C - X)$ sowie $g(X) := X - C < 0$ als Nebenbedingung. Wir betrachten für alle $\xi Z(T) > 0$ die zugehörige Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}L\big(X, \xi Z(T)\big) &= (C - X)^+ + \xi Z(T)(X - C) \\ &= (C - X)^+ - \xi Z(T)(C - X)\end{aligned}$$

Nach Definition von $\tilde{R}(\cdot,\omega)$ gilt

$$L\big(X,\xi Z(T)\big) \geq \tilde{R}\big(\xi Z(T)\big) \text{ für alle } C-X \leq C-A, \text{ fast sicher.} \tag{3.8}$$

Beachte, dass $C-X \leq C-A$ äquivalent zu $A \leq X$ ist; damit sind die Aussagen, wie im statischen Optimierungsproblem gefordert, auf Claims mit $X \in [A, C)$ eingeschränkt. Wegen (3.7) gilt genau dann Gleichheit in (3.8), wenn

$$C - X^{x,\pi}(T) = \mathcal{I}(\xi Z(T)) = (C-A)\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)>1\}} + U\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)=1\}}, \text{ fast sicher.} \tag{3.9}$$

Die Aussage bleibt gültig, wenn wir auf beiden Seiten von (3.8) diskontieren, den Erwartungswert bilden und umstellen:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{C-X}{S_0(T)}\right)^+\right] \geq \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{R}(\xi Z(T))}{S_0(T)}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{\xi Z(T)(C-X)}{S_0(T)}\right].$$

An dieser Stelle wird deutlich, warum wir $\xi Z(T)$ als Lagrange-Multiplikator gewählt haben: Wir können nun (2.3) anwenden und einen Maßwechsel auf der rechten Seite durchführen. Mit Hilfe von (3.5) und wegen der Einschränkung $\mathbb{E}^*\left[\frac{X}{S_0(T)}\right] \leq x$ im statischen Optimierungsproblem folgt dann weiter:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{C-X}{S_0(T)}\right)^+\right] &\geq \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{R}(\xi Z(T))}{S_0(T)}\right] + \xi(C_0 - x) \qquad (3.10)\\
&\overset{(3.7)}{=} \mathbb{E}\left[\frac{(C-A)(1-\xi Z(T))}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right] + \xi(C_0 - x)\\
&= G(\xi) + \xi\left(C_0 - x - H(\xi)\right)\\
&=: F(\xi) \text{ für alle } X \in \mathcal{S}(x), \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

wobei

$$G(\xi) := \mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right], \ \xi > 0 \tag{3.12}$$

$$H(\xi) := \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right], \ \xi > 0. \tag{3.13}$$

Wir haben also eine Abschätzung von $\mathbb{E}\left[\left(\frac{C-X}{S_0(T)}\right)^+\right]$ gegen eine Funktion $F(\cdot)$, die nicht von X, sondern lediglich von der Variablen ξ abhängt. Zusätzlich wissen wir, welche Bedingungen für Gleichheit gelten müssen; diese werden wir in Proposition 3.2.1.2 zusammenfassen.
Wie im Lagrange-Ansatz benötigen wir den optimalen Lagrange-Multiplikator $\xi^* > 0$ welcher $F(\cdot)$ maximiert, sodass $F(\xi^*)$ die Lösung des statischen Optimierungsproblems darstellt. Dazu benötigen wir folgende Struktur-Aussagen.

Bemerkung 3.2.1.1:
Die Funktionen $G(\cdot)$, $H(\cdot)$ und $F(\cdot)$ besitzen folgende Eigenschaften:

(i) Die Funktionen $G(\cdot)$ und $H(\cdot)$ sind offensichtlich steigend und rechtsseitig-stetig mit

$$\lim_{\xi\downarrow 0} G(\xi) = \lim_{\xi\downarrow 0} H(\xi) = 0,$$

$$\lim_{\xi\uparrow\infty} G(\xi) = \mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\right], \ \lim_{\xi\uparrow\infty} H(\xi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\right] = C_0 - A_0.$$

(ii) Mit dem Satz von Fubini gilt folgender Zusammenhang:

$$\int_0^\xi H(u)du = \int_0^\xi \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\boldsymbol{1}_{\{1/Z(T)<u<\infty\}}\right]du$$

$$= \mathbb{E}^*\left[\int_0^\xi \frac{C-A}{S_0(T)}\boldsymbol{1}_{\{1/Z(T)<u<\infty\}}du\right]$$

$$= \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\left(\xi - \frac{1}{Z(T)}\right)\boldsymbol{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right]$$

$$= \xi H(\xi) - G(\xi).$$

(iii) Gemäß der Darstellung (3.7) ist $\tilde{R}(\cdot)$ konkav. Damit folgt ebenso die Konkavität für die Funktion $F(\cdot)$, denn für alle $t \in (0,1)$ und $\xi,\ \bar{\xi} > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
F(t\xi + (1-t)\bar{\xi}) &= \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{R}((t\xi + (1-t)\bar{\xi})Z(T))}{S_0(T)}\right] + (t\xi + (1-t)\bar{\xi})(C_0 - x) \\
&\geq \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{R}(t\xi Z(T))}{S_0(T)}\right] + t\xi(C_0 - x) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{R}((1-t)\bar{\xi}Z(T))}{S_0(T)}\right] + (1-t)\bar{\xi}(C_0 - x) \\
&= F(t\xi) + F((1-t)\bar{\xi}).
\end{aligned}$$

Wegen Teil (ii) lässt sich die Funktion $F(\cdot)$ auch als

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} C_0 - x - H(u)du$$

schreiben. Aufgrund der Konkavität nimmt $F(\cdot)$ dementsprechend sein Maximum in

$$\hat{\xi}(x) := \inf\left\{\xi > 0 | C_0 - x \leq H(\xi)\right\} \tag{3.14}$$

an. Zu beachten ist dabei, dass wir nicht $C_0 - x = H(\xi)$ fordern können, da $H(\cdot)$ lediglich rechtsseitig-stetig ist.
Somit gilt zusammengefasst:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X}{S_0(T)}\right)^+\right] \geq F(\hat{\xi}(x)) \text{ für alle } X \in \mathcal{S}(x). \tag{3.15}$$

Die folgende Proposition fasst die obigen Aussagen zusammen und liefert die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass in (3.15) Gleichheit herrscht, sodass $F(\hat{\xi}(x))$ die Lösung des statischen Optimierungsproblems darstellt.

Proposition 3.2.1.2:
Sei $x \in [A_0, C_0)$. In (3.15) gilt genau dann Gleichheit für $\xi \equiv \hat{\xi}(x) > 0$, wenn

(i) $x \in [A_0, C_0)$ gerade der arbitragefreie Anfangspreis für den Claim X ist, das heißt wenn

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{X}{S_0(T)} \right] = x \tag{3.16}$$

gilt;

(ii) eine $\mathcal{F}(T)-$messbare Zufallsvariable U mit $U \in [0, C - A]$ fast sicher existiert, sodass

$$X = C \boldsymbol{1}_{\left\{\hat{\xi}(x)Z(T) \leq 1\right\}} + A \boldsymbol{1}_{\left\{\hat{\xi}(x)Z(T) > 1\right\}} - U \boldsymbol{1}_{\left\{\hat{\xi}(x)Z(T) = 1\right\}}, \text{ fast sicher.} \tag{3.17}$$

Der Claim X^* welcher diese Bedingungen erfüllt, ist optimal für das statische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \inf_{X \in \mathcal{S}(x)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{C - X}{S_0(T)} \right)^+ \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{C - X^*}{S_0(T)} \right)^+ \right] \\ &= \max_{\xi > 0} F(\xi) = F(\hat{\xi}(x)). \end{aligned}$$

Beweis: Wie bereits erwähnt, nimmt $F(\cdot)$ sein Maximum in $\hat{\xi}(x)$ an.
Gleichheit in (3.15) ist äquivalent zur Gleichheit in (3.8) und (3.10). Letzteres ist äquivalent zu (i).
Die Gleichheit in (3.8) ist äquivalent zu (3.9), das ist äquivalent zu (ii).
Die restliche Aussage folgt dann aus den Vorüberlegungen des Lagrange-Ansatzes.

□

Wir haben nun also eine Lösung für das statische Optimierungsproblem gefunden. Dabei haben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an den optimalen Claim X^* aufstellen können. Zu klären ist jedoch noch die Frage nach der Existenz eines optimalen Claims X^* für jedes beliebige $x \in [A_0, C_0)$.

Proposition 3.2.1.3:
Für jedes $x \in [A_0, C_0)$ und $\hat{\xi}(x) > 0$ wie in (3.14) definiert, existiert eine $\mathcal{F}(T)-$messbare Zufallsvariable U mit $U \in [0, C - A]$, fast sicher, sodass

$$\hat{X}(T) := C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T) \leq 1\}} + A\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T) > 1\}} - U\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T) = 1\}} \tag{3.18}$$

folgendes erfüllt:

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{\hat{X}(T)}{S_0(T)}\right] = x.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage, indem wir

(a) $x \geq \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)<1\}} + A\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\geq 1\}}\right)\right] =: D$

(b) $x \leq \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\leq 1\}} + A\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}}\right)\right] =: E$

zeigen, denn E und D unterscheiden sich um

$$E - D = \mathbb{E}^*\left[\frac{C - A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)=1\}}\right].$$

Nun lässt sich zu jeder Zahl $y \in [0, E - D]$ eine $\mathcal{F}(T)-$messbare Zufallsvariable U finden, sodass

$$y = \mathbb{E}^*\left[\frac{U}{S_0(T)}\right].$$

Daraus folgt mit (a) und (b) die Behauptung.

Zu (a):
Nach Definition von $\hat{\xi}(x)$ gilt $H(\hat{\xi}(x)) \geq C_0 - x$. Demnach folgt:

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C - (C - A)\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\geq 1\}}\right)\right] \\ &= C_0 - H(\hat{\xi}(x)) \leq x. \end{aligned}$$

Zu (b):
Da $F(\xi) = \mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\left(1-\xi Z(T)\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right)\right]$ auf $[0,\hat{\xi}(x)]$ monoton steigend ist, folgt für ein $\epsilon > 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{F(\hat{\xi}(x)) - F(\hat{\xi}(x)-\epsilon)}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\Bigg(\mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}(1-\hat{\xi}(x)Z(T))\mathbf{1}_{\left\{\hat{\xi}(x)Z(T)\geq 1\right\}}\right] \\
&\qquad -\mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}(1-(\hat{\xi}(x)-\epsilon)Z(T))\mathbf{1}_{\left\{(\hat{\xi}(x)-\epsilon)Z(T)\geq 1\right\}}\right] + \epsilon(C_0 - x)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\Bigg(\mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}(1-\hat{\xi}(x)Z(T))\left(\mathbf{1}_{\left\{\hat{\xi}(x)Z(T)\geq 1\right\}} - \mathbf{1}_{\left\{(\hat{\xi}(x)-\epsilon)Z(T)\geq 1\right\}}\right)\right] \\
&\qquad -\epsilon\mathbb{E}\left[Z(T)\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\left\{(\hat{\xi}(x)-\epsilon)Z(T)\geq 1\right\}}\right]\Bigg) + C_0 - x \\
&= \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}(1-\hat{\xi}(x)Z(T))\mathbf{1}_{\left\{\frac{1}{\hat{\xi}(x)}\leq Z(T)\leq \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\}}\right] - \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\left\{Z(T)\geq \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\}}\right] + C_0 - x
\end{aligned}
$$

Der erste Erwartungswert ist nicht-positiv, also gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq C_0 - x - \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\left\{Z(T)\geq \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C\mathbf{1}_{\left\{Z(T)< \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\}} + A\mathbf{1}_{\left\{Z(T)\geq \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\}}\right)\right] - x \\
&\leq \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C\mathbf{1}_{\left\{Z(T)< \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\}} + A\mathbf{1}_{\left\{Z(T)> \frac{1}{\hat{\xi}(x)}\right\}}\right)\right] - x,
\end{aligned}
$$

wobei bei der letzten Ungleichung benutzt wurde, dass

$$
\left\{Z(T) \geq \frac{1}{\hat{\xi}(x)-\epsilon}\right\} \subseteq \left\{Z(T) > \frac{1}{\hat{\xi}(x)}\right\}.
$$

Lassen wir nun $\epsilon \longrightarrow 0$ laufen, so folgt (b).

$\square$

3.2.2 Das Repräsentationsproblem

Wir haben bereits gezeigt, dass für jedes Anfangskapital $x \in [A_0, C_0)$ eine Lösung $X^* \equiv \hat{X}(T)$ für das statische Optimierungsproblem existiert und dass das Problem den optimalen Wert $F(\hat{\xi}(x))$ annimmt. Im Repräsentationsproblem verbleibt zu zeigen, dass für jede Lösung $\hat{X}(T)$ eine zulässige Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot)$ zu gegebenem Anfangskapital x existiert, mit der dieser Wert erreicht wird.

Theorem 3.2.2.1:
Für jedes $x \in [A_0, C_0)$, $\hat{\xi}(x) > 0$ wie in (3.14) definiert, existiert eine Handlungsstrategie $\hat{\pi} \in \mathcal{A}(x)$, sodass die Bedingungen (3.16) und (3.17) aus Proposition 3.2.1.2 für $X^{x,\hat{\pi}}(T)$ erfüllt sind und welches optimal für das dynamische Optimierungsproblem (3.6) ist; das heißt es gilt:

$$V(x) = \inf_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\hat{\pi}}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right] = F(\hat{\xi}(x)). \quad (3.19)$$

Beweis: Seien $x \in [A_0, C_0)$ beliebig und $\hat{\xi}(x) > 0$ wie in (3.14) definiert. Betrachte $\hat{X}(T)$ aus (3.18). Da $\frac{\hat{X}(T)}{S_0(T)}$ integrierbar ist, ist

$$\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)} := \mathbb{E}^*\left[\left.\frac{\hat{X}(T)}{S_0(T)}\right| \mathcal{F}(t)\right] \quad (3.20)$$

wohldefiniert und aufgrund der *Turmeigenschaft für bedingte Erwartungswerte*[2] folgt für alle $s \le t \le T$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\left[\left.\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right|\mathcal{F}(s)\right] &= \mathbb{E}^*\left[\left.\mathbb{E}^*\left[\left.\frac{\hat{X}(T)}{S_0(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right]\right|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= \mathbb{E}^*\left[\left.\frac{\hat{X}(T)}{S_0(T)}\right|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= \frac{\hat{X}(s)}{S_0(s)}.\end{aligned}$$

[2] Für Teil-σ-Algebren $B_1 \subset B_2 \subset \mathcal{F}(T)$ gilt: $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|B_2]|B_1\right] = \mathbb{E}[X|B_1]$, siehe [Kle06, Satz 18.14].

Somit ist $\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right)_{t\in[0,T]}$ ein $\mathbf{P}^*$-Martingal mit Anfangswert

$$\frac{\hat{X}(0)}{S_0(0)} = \mathbb{E}^*\left[\frac{\hat{X}(T)}{S_0(T)}\right] = x$$

gemäß Proposition 3.2.1.3.
Mit dem Martingaldarstellungssatz (siehe [KS91, Theorem 4.2]) folgt für einen passenden Prozess $\hat{\pi}(\cdot)$:

$$\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)} = x + \int_0^t \frac{\hat{\pi}'(u)}{S_0(u)}\sigma(u)dW^*(u),\ t \in [0,T]. \tag{3.21}$$

Nach der Darstellung (3.2) gilt somit:

$$\hat{X}(t) = X^{x,\hat{\pi}}(t)$$

für alle $t \in [0,T]$, also insbesondere

$$\hat{X}(T) = X^{x,\hat{\pi}}(T)$$

womit wir (3.16) sowie (3.17) erhalten.
Dementsprechend ist $\hat{\pi}(\cdot)$ eine Martingal-erzeugende Handlungsstrategie, das heißt insbesondere $\hat{\pi}(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$. Die Optimalität von $\hat{\pi}(\cdot)$ und (3.19) folgen nun aus Proposition 3.2.1.2.

□

Bemerkung 3.2.2.2:

(i) Um das Risiko $V(x)$ berechnen zu können, benötigen wir $\hat{\xi}(x)$. Zu beachten ist dabei, dass nach Definition $F(\hat{\xi}(x)) \le G(\hat{\xi}(x))$ gilt; jedoch Gleichheit, falls

$$H(\hat{\xi}(x)) = C_0 - x.$$

Dies ist insbesondere bei stetigem $H(\cdot)$ gegeben.
In diesem Fall gilt insbesondere $U = C - A$, fast sicher,
oder $\boldsymbol{P}^*\left(\hat{\xi}(x)Z(T) = 1\right) = 0$, was aus der Beziehung

$$H(\hat{\xi}(x)) - (C_0 - x) = \mathbb{E}^*\left[\frac{(C - A) - U}{S_0(T)}\boldsymbol{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)=1\}}\right] \tag{3.22}$$

hervorgeht.

(ii) *Gemäß der Darstellung* (3.21) *entspricht die optimale Handlungsstrategie für das stochastische Kontrollproblem gerade der Hedging-Strategie für den Claim $\hat{X}(T)$ aus* (3.18).

(iii) *Sei $x = A_0$. Dann ist* (3.16) *wegen $A(\cdot) = X^{A_0,\pi_A}(\cdot)$ gerade für $\hat{\pi} = \pi_A$ erfüllt und wegen der Monotonie von $H(\cdot)$ sowie*

$$\lim_{\xi\uparrow\infty} H(\xi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{C - A}{S_0(T)}\right] = C_0 - A_0$$

ist (3.14) *für $\hat{\xi}(x) = \infty$ gegeben. Das heißt*

$$V(A_0) = \lim_{\xi\uparrow\infty} G(\xi) = \mathbb{E}\left[\frac{C - A}{S_0(T)}\right].$$

Wir haben in diesem Kapitel schließlich die Existenz einer Lösung für das dynamische stochastische Optimierungsproblem $V(x)$ zu jedem Anfangskapital $x \in [A_0, C_0)$ gezeigt. Bei den folgenden Anwendungen werden wir sehen, dass die Form der Lösungen von dem risk premium $\theta(\cdot)$ abhängt. Daher klären wir zunächst den Fall $\theta(\cdot) = \tilde{0}$.

Korollar 3.2.2.3:
Sei $\theta = \sigma^{-1}(t)(\mu(t) - r(t)\tilde{\boldsymbol{1}}) = \tilde{0}$. Dann gilt für jedes $x \in [A_0, C_0)$ und jede Martingal-erzeugende Handlungsstrategie $\bar{\pi} \in \mathcal{A}(x)$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\bar{\pi}}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right] = C_0 - x.$$

Das heißt insbesondere $V(x) = C_0 - x$.

Beweis: Sei $x \in [A_0, C_0)$. Mit $\theta = \tilde{0}$ folgt $Z(T) = 1$ und somit $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}$, sowie insbesondere $G(\cdot) \equiv H(\cdot)$.
Offensichtlich gilt: $G(\xi) = H(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (0,1)$ und $H(\xi) = G(\xi) = C_0 - A_0 \geq C_0 - x$ für alle $\xi \geq 1$. Also folgt $\hat{\xi}(x) = 1$.
Aus (3.11) erhalten wir für alle $\pi \in \mathcal{A}(x)$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right] \geq F(1) = C_0 - x.$$

Andererseits gilt für jede Martingal-erzeugende Handlungsstrategie $\bar{\pi} \in \mathcal{A}(x)$, die $A \leq X^{x,\bar{\pi}}(T) \leq C$ fast sicher erfüllt:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{C - X^{x,\bar{\pi}}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right] = \mathbb{E}^*\left[\left(\frac{C - X^{x,\bar{\pi}}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S_0(T)}\right] - \mathbb{E}^*\left[\frac{X^{x,\bar{\pi}}(T)}{S_0(T)}\right] = C_0 - x.$$

Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

4 Anwendungen

Wir werden in diesem Kapitel Anwendungsbeispiele zu den gewonnen Erkenntnissen erörtern. Dabei gehen wir gemäß den Ausführungen aus Kapitel 3 auf folgende Weise vor:

1. Bestimme die Funktionen $G(\xi)$ und $H(\xi)$ aus (3.12) und (3.13).

2. Ermittle den Wert $\hat{\xi}(x)$ aus (3.20). Falls $H(\cdot)$ stetig ist, gilt $H(\hat{\xi}(x)) = C_0 - x$.

3. Berechne das Risiko $V(x) = F(\hat{\xi}(x))$; falls $H(\cdot)$ stetig ist, gilt $V(x) = G(\hat{\xi}(x))$.

4. Bestimme den optimalen Vermögenswert

$$\begin{aligned} X^{x,\hat{\pi}}(t) &= \hat{X}(t) \\ &= \mathbb{E}^* \left[\frac{S_0(t)}{S_0(T)} \left(C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\leq 1\}} + A\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}} - U\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)=1\}} \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

   (vergleiche (3.18) und (3.20)).

5. Ermittle die Dynamik von $\hat{X}(t)$ unter $\mathbf{P}^*$ und erhalte die optimale Handlungsstrategie durch einen Koeffizientenvergleich mit

$$d\left(\frac{X^{\hat{\pi},x}(t)}{S_0(t)}\right) \overset{(3.2)}{=} \frac{\hat{\pi}(t)}{S_0(t)}\sigma(t)dW^*(t). \tag{4.2}$$

Das Modell aus Kapitel 2 sowie die Aussagen aus Kapitel 3 lassen allgemeine stochastische Koeffizienten zu; um zunächst auf höhere Komplexität zu verzichten und explizite Lösungen ermöglichen zu können, betrachten wir in diesem Abschnitt einen Finanzmarkt mit lediglich deterministischen Koeffizienten, das heißt die Prozesse $r(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ seien grundsätzlich zeitabhängig. Damit ist insbesondere das

Geldmarktkonto $S_0(\cdot)$ deterministisch und kann stets aus dem Erwartungswert gezogen werden. Zusätzlich gelte $\|\theta(t)\|^2 \neq 0$ für alle $t \in [0,T]$, für das risk premium

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(\mu(t) - r(t)\tilde{\mathbf{1}}).$$

Weitere Einschränkungen werden im jeweiligen Beispiel angegeben.

Erinnerung:

$$Z(T) = \exp\left(-\int_0^T \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right) \text{ und}$$

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \theta(s)ds, \;\; t \in [0,T]$$

ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbf{P}^*$.
Zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0,T]$ ist der i-te Aktienprozess, $i = 1, \ldots, n$, gegeben durch:

$$S_i(T) = S_i(t)\exp\left(\int_t^T \mu_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_t^T \sigma_{ij}(s)dW_j(s)\right) \tag{4.3}$$

$$= S_i(t)\exp\left(\int_t^T r(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_t^T \sigma_{ij}(s)dW_j^*(s)\right). \tag{4.4}$$

Für folgende Berechnungen halten wir fest:

$$\{\xi Z(T) \geq 1\} = \left\{-\int_0^T \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds \geq log(\xi^{-1})\right\}$$

$$= \left\{\int_0^T \theta'(s)dW(s) \leq log(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right\} \tag{4.5}$$

$$= \left\{\int_0^T \theta'(s)dW^*(s) \leq log(\xi) + \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right\}. \tag{4.6}$$

Beginnen wir mit einem speziellen Beispiel, in dem uns die Kapitalanforderung des Regulators die Berechnungen stark vereinfacht.

Beispiel 4.1 (Kapitalanfordung in Abhängikeit der Verbindlichkeit)**:**
Die Verbindlichkeit C sei eine beliebige Zufallsvariable mit $\frac{C}{S_0(T)} \in \mathbf{L}^{1+\epsilon}(\Omega, \mathcal{F}(T), \mathbf{P}^*)$, die Kapitalanforderung sei gerade so, dass das Vermögen des Investors zu keinem Zeitpunkt um mehr als ein Vielfaches des Geldmarktkontos von C abweicht, also: $A := C - kS_0(T),\ k > 0$.
Diese besondere Struktur liefert für $\xi > 0$:

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right] \\ &= k\mathbf{P}(\xi Z(T) \geq 1) \\ &\overset{(4.5)}{=} k\mathbf{P}\left(\int\limits_0^T \theta'(s)dW(s) \leq log(\xi) - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.2:
Sei $(f(t))_{t\in[0,T]}$ *ein deterministischer Prozess und* $W(\cdot)$ *ein Wiener-Prozess bezüglich* $\boldsymbol{P}$*. Dann ist* $\left(\int\limits_0^t f(s)dW(s)\right)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{N}\left(0, \int\limits_0^t f(s)^2 ds\right)$*-verteilt; das bedeutet normalverteilt mit Erwartungswert* 0 *und Varianz* $\int\limits_0^t f(s)^2 ds$*.*

Beweis:
Wir beweisen die Aussage mittels Fouriertransformation (siehe [Als07, Abschnitt 40]). Wir zeigen, dass die Fouriertransformierte $\Psi_{M(t)}(s) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-sM(t)\right)\right],\ s \in \mathbb{R}$, von $M(t) := \int\limits_0^t f(s)dW(s)$ der Fouriertransforierten einer $\mathcal{N}\left(0, \int\limits_0^t f(s)^2 ds\right)$-verteilten

Zufallsvariable[1] entspricht.
Nach der Itô-Formel gilt für $s \in \mathbb{R}$:

$$d\exp\left(-sM(t)\right) = \exp(-sM(t))\left(-sf(t)dW(t) + \frac{s^2}{2}f(t)^2dt\right).$$

Da $\exp\left(-sM(0)\right) = 1$ und $f(\cdot)$ deterministisch ist, folgt weiter:

$$\Psi_{M(t)}(s) = \frac{s^2}{2}\int_0^t f(u)^2\Psi_{M(u)}(s)du$$

und somit

$$\frac{\partial\Psi_{M(t)}(s)}{\partial t} = \frac{s^2}{2}f(t)^2\Psi_{M(t)}(s).$$

Schließlich ergibt sich

$$\Psi_{M(t)}(s) = \exp\left(\frac{s^2}{2}\int_0^t f(s)^2ds\right),\ s \in \mathbb{R}.$$

Mit dem *Eindeutigkeitssatz für Fouriertransformierte* [Als07, Satz 41.10] folgt die Behauptung.

□

Da $(\theta(t))_{t\in[0,T]}$ deterministisch ist, ist

$$\left(\int_0^T \theta'(s)dW(s)\right)\left(\int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds\right)^{-1/2}$$

[1] Die Fouriertransformierte einer $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable X ist gegeben durch: $\Psi_X(s) := \mathbb{E}\left[\exp(-sX)\right] = \exp\left(-s\mu + \frac{s^2}{2}\sigma^2\right),\ s \in \mathbb{R}$, was man durch direktes Nachrechnen mit der Substitution $\bar{x} := \frac{x-\mu}{\sigma} + t\sigma$ sieht.

nach dem vorherigen Lemma unter $\mathbf{P}$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Analoges gilt für W^*.
Mit dieser Eigenschaft können wir (4.7) weiter vereinfachen:

$$G(\xi) = k\Phi\left(\left(log(\xi) - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)\left(\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{-1/2}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist.
Analog erhalten wir für $H(\cdot)$ mit Hilfe von (4.6):

$$H(\xi) = k\Phi\left(\left(log(\xi) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)\left(\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{-1/2}\right).$$

Da Φ stetig und wachsend ist, bestimmen wir $\hat{\xi}(x)$ durch die Gleichung

$$H(\hat{\xi}(x)) = C_0 - x. \tag{4.8}$$

Auflösen nach $\hat{\xi}(x)$ liefert uns:

$$\hat{\xi}(x) = \exp\left(\Phi^{-1}\left(\frac{C_0 - x}{k}\right)\left(\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right), \tag{4.9}$$

wobei Φ^{-1} die Umkehrfunktion von Φ bezeichnet.
Theorem 3.2.2.1 liefert uns dann:

$$V(x) = F(\hat{\xi}(x)) \overset{(4.8)}{=} G(\hat{\xi}(x)) = k\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{C_0 - x}{k}\right) - \left(\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2}\right) \tag{4.10}$$

für das Risiko des Investors.
Berechnen wir nun -gemäß der beschriebenen Vorgehensweise am Anfang des Kapitels-

die optimale Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot)$ sowie den korrespondierenden Vermögenswert $X^{x,\hat{\pi}}(t) = \hat{X}(t)$, die den Wert $V(x)$ herbei führen:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t) &\overset{(4.1)}{=} S_0(t)\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\leq 1\}} + A\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}} - U\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)=1\}}\right)\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] \\
&= S_0(t)\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\,C - k\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] \\
&\overset{(3.5)}{=} C(t) - S_0(t)k\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right], \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt Bemerkung 3.2.2.2 (i) verwendet haben.
Um den bedingten Erwartungswert zu berechnen, benutzen wir, dass

$$\frac{Z(T)}{Z(t)} = \exp\left(-\int_t^T \theta(s)'dW(s) - \frac{1}{2}\int_t^T \|\theta(s)\|^2\,ds\right)$$

unabhängig von $\mathcal{F}(t)$ sowie $Z(t)$ messbar bezüglich $\mathcal{F}(t)$ sind, sodass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] &= \mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)/Z(t)>1/Z(t)\}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] \\
&= f(Z(t))
\end{aligned}$$

mit $f(z) := \mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)/Z(t)>1/z\}}\right]$ gilt.

Mit Lemma 4.2 folgt dann weiter:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \mathbf{P}^* \left(\int_t^T \theta(s)' dW(s) < \log(\hat{\xi}(x)) - \frac{1}{2} \int_t^T \|\theta(s)\|^2 \, ds + \log(z) \right) \\
&= \mathbf{P}^* \left(\int_t^T \theta(s)' dW^*(s) < \log(\hat{\xi}(x)) + \frac{1}{2} \int_t^T \|\theta(s)\|^2 \, ds + \log(z) \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\log(\hat{\xi}(x)) + \frac{1}{2} \int_t^T \|\theta(s)\|^2 \, ds + \log(z)}{\left(\int_t^T \|\theta(s)\|^2 \, ds \right)^{1/2}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{C_0 - x}{k}\right) \left(\int_0^T \|\theta(s)\|^2 \, ds \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(s)\|^2 \, ds + \log(z)}{\left(\int_t^T \|\theta(s)\|^2 \, ds \right)^{1/2}} \right).
\end{aligned}
$$

Mit

$$
f\big(t, \int_0^t \theta(s)' dW^*(s)\big) \equiv f(Z(t)),
$$

$$
f(u, w) := \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{C_0 - x}{k}\right) \left(\int_0^T \|\theta(s)\|^2 \, ds \right)^{1/2} - w}{\left(\int_u^T \|\theta(s)\|^2 \, ds \right)^{1/2}} \right)
$$

erhalten wir insgesamt für den optimalen Vermögenswert in (4.11):

$$
\hat{X}(t) = C(t) - S_0(t) k f\big(t, \int_0^t \theta(s)' dW^*(s)\big), \; t \in [0, T), \tag{4.12}
$$

$$
\hat{X}(T) = \lim_{t \longrightarrow T} \hat{X}(t) = C - S_0(T) k,
$$

wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit der Normalverteilung sowie $\Phi(\infty) = 1$ verwendet haben.

Die optimale Handlungsstrategie, mit der dieser Vermögenswert erreicht wird, berechnen wir mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs:
Einerseits gilt nach (4.12):

$$\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)} = \frac{C(t)}{S_0(t)} - kf\big(t, \int_0^t \theta(s)' dW^*(s)\big).$$

Da der Prozess auf der linken Seite ein $\mathbf{P}^*$-Martingal ist, fällt bei Anwendung der Itô-Formel der Drift-Term weg. Außerdem gilt nach (3.5):

$$d\left(\frac{C(t)}{S_0(t)}\right) = \sigma(t)\frac{\pi_C(t)}{S_0(t)} dW^*(t), \tag{4.13}$$

wobei $\pi_C(t),\ t \in [0,T]$ die Hedging-Strategie zu dem Claim C zum Zeitpunkt t ist. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right) &= \sigma(t)\frac{\pi_C(t)}{S_0(t)} dW^*(t) - k\frac{\partial f\big(t, \int_0^t \theta(s)' dW^*(s)\big)}{\partial w} dw\Big|_{w=\int_0^t \theta(s)' dW^*(s)} \\ &= \Bigg(\sigma(t)\frac{\pi_C(t)}{S_0(t)} + k\frac{\theta(t)}{\left(\int_t^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2}} \\ &\qquad \varphi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{C_0 - x}{k}\right)\left(\int_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2} - \int_0^t \theta(s)' dW^*(s)}{\left(\int_u^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2}}\right)\Bigg) dW^*(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Andererseits wissen wir aus der Darstellung (4.2):

$$d\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right) = \sigma(t)\frac{\hat{\pi}(t)}{S_0(t)} dW^*(t),$$

wobei $\hat{\pi}(t)$ die gesuchte Handlungsstrategie zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ ist.
Ein Koeffizientenvergleich mit (4.14) impliziert schließlich:

$$\hat{\pi}(t) = \pi_C(t) + S_0(t)\sigma^{-1}(t)k \frac{\theta(t)}{\left(\int\limits_t^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2}}$$

$$\varphi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{C_0-x}{k}\right)\left(\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2} - \int\limits_0^t \theta(s)' dW^*(s)}{\left(\int\limits_u^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2}}\right).$$

Bemerkung:
An dieser Stelle kann man nun der Frage nachgehen, welches minimale Anfangskapital gegeben sein muss, damit ein bestimmtes Risiko nicht überschritten wird. Formal bedeutet dies: Gegeben ein $\epsilon \in (0,1)$ *suchen wir*

$$\tilde{x}(\epsilon) := \inf\left\{x \in [C_0-k, C_0) | V(x) \le \epsilon k\right\}.$$

Erwartungsgemäß sehen wir in (4.10), *dass das Risiko* $V(x)$ *mit wachsendem Anfangskapital* x *fällt. Daher wird* $\tilde{x}(\epsilon)$ *durch die Gleichung*

$$V(\tilde{x}(\epsilon)) = \epsilon k$$

bestimmt. Dies ist äquivalent zu

$$\tilde{x}(\epsilon) = C_0 - k\Phi\left(\Phi^{-1}(\epsilon) - \left(\int\limits_0^T \|\theta(s)\|^2\, ds\right)^{1/2}\right) \in (C_0-k, C_0).$$

Ein weiterer Indikator in diesem Zusammenhang wäre das exposure to risk, die Einwirkung des Risikos sozusagen, definiert durch $\frac{V(x)}{x+V(x)}$. *Wir suchen nun*

$$\hat{x}(\epsilon) := \inf\left\{x \in [C_0-k, C_0) \,\middle|\, \frac{V(x)}{x+V(x)} \le \epsilon\right\}.$$

Beachte dass auch $\frac{V(x)}{x+V(x)}$ *fallend in* x *ist. Dementsprechend ist* $\hat{x}(\epsilon)$ *die Lösung der Gleichung*

$$\Phi^{-1}\left(\frac{C_0-\hat{x}(\epsilon)}{k}\right)-\left(\int_0^T \|\theta(s)\|^2\,ds\right)^{1/2}=\Phi^{-1}\left(\frac{\epsilon\hat{x}(\epsilon)}{(1-\epsilon)k}\right).$$

Beispiel 4.3 (Abhängigkeit der Verbindlichkeit vom risky asset)**:**
Wir betrachten in diesem Beispiel ein eindimensionales Finanzmarktmodell. Die Verbindlichkeit C sei durch eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $g:(0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ vom Endwert der Aktie gegeben; also

$$C:=g(S(T)).$$

Sei $A:=0$, das heißt

$$\mathcal{A}(x)=\left\{\pi:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}|\,X^{x,\pi}(t)\geq 0\text{ für alle }t\in[0,T]\right\}.$$

Für die Funktionen $G(\cdot)$ und $H(\cdot)$ erhalten wir dann für $\xi>0:$

$$\begin{aligned}
G(\xi)\ &=\mathbb{E}\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right]\\
&\overset{(4.3)}{=}\frac{1}{S_0(T)}\mathbb{E}\left[g\Big(s\exp\left(\int_0^T\mu(s)-\sigma(s)^2/2ds+\int_0^T\sigma(s)dW(s)\right)\Big)\mathbf{1}_{\{\xi Z(T)\geq 1\}}\right]\\
&\overset{(4.5)}{=}\frac{1}{S_0(T)}\mathbb{E}\left[g\Big(s\exp\left(\int_0^T\mu(s)-\sigma(s)^2/2ds+\int_0^T\sigma(s)dW(s)\right)\Big)\right.\\
&\qquad\left.\mathbf{1}_{\left\{\int_0^T\theta(s)dW(s)\leq log(\xi)-\frac{1}{2}\int_0^T\theta(t)^2dt\right\}}\right]
\end{aligned}$$

und analog mit (4.4) und (4.6):

$$H(\xi) \;= \frac{1}{S_0(T)} \mathbb{E}^* \left[g\Big(s \exp\left(\int_0^T r(s) - \sigma(s)^2/2 ds + \int_0^T \sigma(s) dW^*(s) \right) \Big) \right.$$

$$\left. \mathbf{1}_{\left\{ \int_0^T \theta(s) dW^*(s) \leq log(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^T \theta(s)^2 ds \right\}} \right].$$

An diesem Punkt stellen wir fest, dass weitere Berechnungen stark verkompliziert werden durch die Tatsache, dass die Prozesse

$$\int_0^T \sigma(s) dW(s) \text{ und } \int_0^T \theta(s) dW(s) \text{ in der Darstellung von } G(\cdot)$$

sowie

$$\int_0^T \sigma(s) dW^*(s) \text{ und } \int_0^T \theta(s) dW^*(s) \text{ in der Darstellung von } H(\cdot)$$

nach Lemma 4.2 jeweils zwei verschiedene normalverteilte Zufallsvariablen beschreiben. Im Fall eines nicht-konstanten $\theta(\cdot)$ hängen $G(\cdot)$ und $H(\cdot)$ also von je zwei Zufallsvariablen ab. Um die Vorgehensweise im Beispiel zu veranschaulichen, beschränken uns an dieser Stelle auf konstante Koeffizienten und somit insbesondere auf ein konstantes risk premiums $\theta \neq 0$.

Im nachfolgenden Kapitel werden wir dieses Anwendungsbeispiel im Kontext eines Vasicek-Modells nochmals aufgreifen und können uns im komplexeren Fall an dieser Vorgehensweise orientieren.

Seien nun$r, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$. Damit gilt für das Geldmarktkonto:

$$S_0(t) = \exp(rt).$$

Mit $b := \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ erhalten wir in (4.3) bzw. (4.4):

$$S(T) = S(t) \exp\big(\sigma((T-t)(b+\theta) + W(T) - W(t))\big)$$

bzw.

$$S(T) = S(t) \exp\big(\sigma((T-t)b + W^*(T) - W^*(t))\big).$$

Mit $Y(t) := \frac{W(t)}{\sqrt{t}}$, $Y^*(t) := \frac{W^*(t)}{\sqrt{t}}$ vereinfachen sich (4.5) und (4.6) zu

$$\begin{aligned}\{\xi Z(T) \geq 1\} &= \left\{ Y(T) \leq \frac{log(\xi) - T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}} \right\} \\ &= \left\{ Y^*(T) \leq \frac{log(\xi) + T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}} \right\}.\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\theta > 0$. Dann folgt unter Beachtung der Normalverteilungseigenschaft von $Y(T)$ bzw. $Y^*(T)$:

$$\begin{aligned}G(\xi) &= \frac{1}{S_0(T)}\mathbb{E}\left[g\left(s\exp\left(\sigma(T(b+\theta) + Y(T)\sqrt{T}) \right)\right) \mathbf{1}_{\left\{ Y(T) \leq \frac{log(\xi) - T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}} \right\}} \right] \\ &= Q_+\left(\frac{log(\xi) - T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}}, T, s, b+\theta \right).\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$Q_+\left(u, \tau, s, b\right) := \frac{1}{S_0(\tau)} \int\limits_{-\infty}^{u} g\left[s\exp\left(\sigma(\tau b + y\sqrt{\tau}) \right)\right] \varphi(y)dy \tag{4.15}$$

gesetzt, wobei $\varphi(y) := \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$ die Dichte der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist. Analog folgt:

$$H(\xi) = Q_+\left(\frac{log(\xi) + T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}}, T, s, b \right).$$

Offensichtlich ist die Abbildung $u \longmapsto Q_+(u, T, s, b)$ absolut-stetig und monoton steigend mit

$$Q_+(-\infty, T, s, b) = 0 \text{ und } Q_+(\infty, T, s, b) = \frac{1}{S_0(T)}\mathbb{E}^*\left[g(S(T))\right] = C_0 > C_0 - x.$$

Damit können wir ihre Umkehrfunktion $Q_+^{-1}(\cdot)$ definieren. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\hat{u} \in \mathbb{R}$ mit $Q_+(\hat{u}, T, s, b) = C_0 - x$, also $Q_+^{-1}(C_0 - x) = \hat{u}$.
Durch die Stetigkeit von $Q_+(\cdot, T, s, b)$ erhalten wir Stetigkeit für $H(\cdot)$, folglich gilt die Gleichung

$$H(\hat{\xi}(x)) = Q_+\left(\frac{log(\hat{\xi}(x)) + T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}}, T, s, b \right) = C(0) - x.$$

Daraus ergibt sich dann

$$Q_{+}^{-1}\left(C(0)-x\right)=\frac{log(\hat{\xi}(x))+T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}},$$

was schließlich

$$\begin{aligned}
V(x)=G(\hat{\xi}(x))&=Q_{+}\left(\frac{log(\hat{\xi}(x))-T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}},T,s,b+\theta\right)\\
&=Q_{+}\left(Q_{+}^{-1}(C(0))-\theta\sqrt{T},T,s,b+\theta\right) \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

impliziert.
Für den Fall $\theta<0$ ändert sich für $G(\cdot)$ und $H(\cdot)$ aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung jeweils in der Indikatorfunktion das Zeichen der Ungleichung von $\leq$ zu $\geq$ und somit erhalten wir

$$G(\xi)=Q_{-}\left(\frac{log(\xi)-T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}},T,s,b+\theta\right)$$

sowie

$$H(\xi)=Q_{-}\left(\frac{log(\xi)+T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}},T,s,b\right),$$

wobei

$$\begin{aligned}
Q_{-}\left(u,\tau,s,b\right):&=\frac{1}{S_0(\tau)}\int_u^{\infty} g\left(s\exp\left(\sigma(\tau(b+\theta)+y\sqrt{\tau})\right)\right)\varphi(y)dy\\
&=Q_{+}\left(\infty,\tau,s,b\right)-Q_{+}\left(u,\tau,s,b\right).
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten wie oben ergibt sich letztlich

$$\begin{aligned}
V(x)=G(\hat{\xi}(x))&=Q_{-}\left(\frac{log(\hat{\xi}(x))-T\theta^2/2}{\theta\sqrt{T}},T,s,b+\theta\right)\\
&=Q_{-}\left(Q_{-}^{-1}(C(0)-x)-\theta\sqrt{T},T,s,b+\theta\right). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Lassen wir in (4.16) $\theta \downarrow 0$ *bzw. in* (4.17) $\theta \uparrow 0$ *laufen, so erhalten wir konsistent zu Korollar 3.2.2.3:*

$$V(x) = Q_\pm\left(Q_\pm^{-1}(C(0)-x), T, s, b\right) = C(0) - x.$$

Bestimmen wir nun die optimale Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot)$ und den optimalen Vermögensprozess $X^{x,\hat{\pi}}(t) = \hat{X}(t)$. Wir gehen analog zum vorherigen Beispiel vor und betrachten:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)} &= \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{S_0(T)}\left(C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\le 1\}} + A\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)>1\}} - U\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)=1\}}\right)\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] \\ &= \frac{1}{S_0(T)}\mathbb{E}^*\left[C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\le 1\}}\middle|\, \mathcal{F}(t)\right];\end{aligned}$$

vgl. Bemerkung 3.2.2.2 (i).
Wie im vorherigen Beispiel benötigen wir für den bedingten Erwartungswert einen Ausdruck, der unabhängig von $\mathcal{F}(t)$ ist. Wie oben bereits herausgestellt wurde, gilt dies für

$$\frac{Z(T)}{Z(t)} = \exp\left(-\theta(W(T)-W(t)) - \frac{\theta^2}{2}(T-t)\right)$$

und ebenso für

$$\frac{S(T)}{S(t)} = \exp\left(\sigma((T-t)b + W^*(T) - W^*(t))\right)$$

nach Definition eines Wiener-Prozesses. Die Messbarkeit von $S(t)$ und $Z(t)$ bezüglich $\mathcal{F}(t)$ ist klar, sodass wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\left[C\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\le 1\}}\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] &= \mathbb{E}^*\left[g\left(\frac{S(T)}{S(t)}S(t)\right)\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)/Z(t)\le 1/Z(t)\}}\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] \\ &= f\big(S(t), Z(t)\big)\end{aligned}$$

mit

$$f(\varsigma, z) := \mathbb{E}^* \left[g\left(\frac{S(T)}{S(t)} \varsigma \right) \mathbf{1}_{\left\{\hat{\xi}(x) Z(T)/Z(t) \leq 1/z\right\}} \right]$$

$$= \mathbb{E}^* \Bigg[g\left(\varsigma \exp\left(\sigma (b(T-t) + \sqrt{T-t} \frac{W^*(T) - W^*(t)}{\sqrt{T-t}})) \right) \right.$$

$$\left. \mathbf{1}_{\left\{ \theta \left(W^*(T) - W^*(t) \right) \geq \log(\hat{\xi}(x)) + (T-t)\sigma^2/2 + \log(z) \right\}} \Bigg]$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\left\{ y \geq \left(\log(\hat{\xi}(x)) + (T-t)\sigma^2/2 + \log(z) \right) / (\theta \sqrt{T-t}) \right\}} \\ \qquad g\left(\varsigma \exp\left(\sigma (b(T-t) + \sqrt{T-t} y) \right) \right) \varphi(y) dy, & \text{falls } \theta > 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\left\{ y \leq \left(\log(\hat{\xi}(x)) + (T-t)\sigma^2/2 + \log(z) \right) / (\theta \sqrt{T-t}) \right\}} \\ \qquad g\left(\varsigma \exp\left(\sigma (b(T-t) + \sqrt{T-t} y) \right) \right) \varphi(y) dy, & \text{falls } \theta < 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

erhalten. Dabei haben wir in (4.18) ausgenutzt, dass $\left(\frac{W^*(T) - W^*(t)}{\sqrt{T-t}} \right)$ per Definition unter $\mathbf{P}^*$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist.
Für $z = Z(t)$ ergibt sich in der Indikatorfunktion des Integrals:

$$y \geq \frac{\left(\log(\hat{\xi}(x)) + T\sigma^2/2 - \theta W^*(t) \right)}{\theta \sqrt{T-t}} = \frac{\left(Q_+^{-1}(C_0 - x) \sqrt{T} - W^*(t) \right)}{\sqrt{T-t}} =: U_+(t), \text{ falls } \theta > 0$$

$$y \leq \frac{\left(\log(\hat{\xi}(x)) + T\sigma^2/2 - \theta W^*(t) \right)}{\theta \sqrt{T-t}} = \frac{\left(Q_-^{-1}(C_0 - x) \sqrt{T} - W^*(t) \right)}{\sqrt{T-t}} =: U_-(t), \text{ falls } \theta < 0.$$

Mit $\frac{S_0(t)}{S_0(T)} = \frac{1}{S_0(T-t)}$ folgt letztlich:

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{S_0(T-t)} f\big(S(t), Z(t)\big) = \begin{cases} Q_-\left(U_+(t), T-t, S(t), b \right), & \text{falls } \theta > 0 \\ Q_+\left(U_-(t), T-t, S(t), b \right), & \text{falls } \theta < 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Wir benötigen nun die Dynamik von $\hat{X}(t)$ unter $\mathbf{P}^*$, das heißt insbesondere die von $U_\pm(t) \equiv U_\pm(t, W^*(t))$. Mit Hilfe der totalen Ableitung bestimmen wir die stochastische Differentialgleichung für $U_\pm(\cdot)$:

$$\begin{aligned} dU_\pm(t) &= (-\frac{1}{2})\frac{1}{T-t}(-1)U_\pm(t)dt - \frac{1}{\sqrt{T-t}}dW^*(t) \\ &= \frac{U_\pm(t)}{2(T-t)}dt - \frac{1}{\sqrt{T-t}}dW^*(t). \end{aligned}$$

Damit können wir die stochastische Differentialgleichung für

$$\hat{X}(t) = Q_\mp\left(U_\pm(t), T-t, S(t), b\right)$$

bestimmen. Dazu wenden wir die Itô-Formel an und vernachlässigen zur besseren Übersichtlichkeit die Indizes $\mp$ sowie das Argument $(U_\pm(t), T-t, S(t), b)$ für Q, sodass

$$\begin{aligned} d\hat{X}(t) &= \frac{\partial Q}{\partial u}dU(t) + \frac{\partial Q}{\partial \tau}d(T-t) + \frac{\partial Q}{\partial s}d(S(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 u}d\left\langle U\right\rangle_t + \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 s}d\left\langle S\right\rangle_t + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial s}d\left\langle U, S\right\rangle_t\right) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial s}S(t)\sigma - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)dW^*(t) \\ &\quad + \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{U(t)}{2(T-t)} + \frac{\partial Q}{\partial s}S(t)r - \frac{\partial Q}{\partial \tau}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 u}\frac{1}{T-t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 s}S(t)^2\sigma^2 - 2\frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial s}\frac{S(t)\sigma}{\sqrt{T-t}}\right)\right]dt.^2 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Drift-Term mit $M(t)$, so erhalten wir mittles partieller Integration:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right) &= \mathrm{e}^{-rt}\, d\hat{X}(t) - r\,\mathrm{e}^{-rt}\,\hat{X}(t)dt \\ &= \mathrm{e}^{-rt}\left(\left(M(t) - r\hat{X}(t)\right)dt + \left(\frac{\partial Q}{\partial s}S(t)\sigma - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)dW^*(t)\right). \end{aligned}$$

[2] Wir bezeichnen mit $\langle\cdot\rangle$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die quadratische Variation bzw. Kovariation eines bzw. zweier Prozesse; vgl. [KS91, Definition 5.3 bzw. Definition 5.5].

Da $\frac{\hat{X}(\cdot)}{S_0(\cdot)}$ ein $\mathbf{P}^*$-Martingal ist, verschwindet der Driftterm, sodass

$$d\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right) = \mathrm{e}^{-rt}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}S(t)\sigma - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)dW^*(t).$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (4.2) liefert uns somit:

$$\hat{\pi}(t) = S(t)\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{\partial Q}{\partial u}. \tag{4.20}$$

Verbleibt abschließend noch, die partiellen Ableitungen von $Q_{\mp}(u,s,\tau,b)$ nach u bzw. s zu bestimmen:

$$\frac{\partial Q_{\mp}}{\partial u} = \mp\,\mathrm{e}^{-r\tau}\, g\left(s\exp\left(\sigma(u\sqrt{\tau}+b\tau)\right)\right)\varphi(u),$$

$$\frac{\partial Q_{-}}{\partial s} = \mathrm{e}^{-r\tau}\int_{-\infty}^{u}\frac{\partial g}{\partial s}\left(s\exp\left(\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)\right)\right)\exp\left(\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)\right)\varphi(y)dy$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-r\tau}}{s}\int_{-\infty}^{u} f\left(s\exp\left(\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)\right)\right)\varphi(y)dy$$

$$\frac{\partial Q_{+}}{\partial s} = \frac{\mathrm{e}^{-r\tau}}{s}\int_{u}^{\infty} f\left(s\exp\left(\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)\right)\right)\varphi(y)dy,$$

wobei zur einfacheren Darstellung $f(x) := xg'(x)$ definiert wurde.
Setzen wir dies nun in (4.20) ein, so erhalten wir für $t \in [0,T]$:

$$\hat{\pi}(t) = \left\{\begin{array}{ll} \Pi_{+}(U_{+}(t), T-t, S(t), b), & \text{falls } \theta > 0 \\ \Pi_{-}(U_{-}(t), T-t, S(t), b), & \text{falls } \theta > 0 \end{array}\right\} \tag{4.21}$$

mit

$$\Pi_{+}(u,\tau,s,b) := \mathrm{e}^{-r\tau}\left[\int_{u}^{\infty} f\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\varphi(y)dy + \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}g\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(u\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\right],$$

$$\Pi_{-}(u,\tau,s,b) := \mathrm{e}^{-r\tau}\left[\int_{-\infty}^{u} f\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\varphi(y)dy - \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}g\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(u\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\right].$$

Beispiel 4.4 (Call-Option)**:**
Ausgehend vom vorherigen Beispiel wollen wir nun die Verbindlichkeit als eine Call-Option zu einem Strike $k > 0$ identifizieren, das heißt mit den bekannten Notationen gilt:

$$C = g(S(T)) := (S(T) - k)^+,\ f(x) = xg'(x) = x\mathbf{1}_{\{x \geq k\}}.$$

Definieren wir zusätzlich

$$\alpha(\tau, s, b) := \frac{\log(s/k)}{\sigma\sqrt{\tau}} + b\sqrt{\tau},$$

so gilt in $t = 0$:

$$\begin{aligned}\{S(T) \geq k\} &= \{s \exp\left(\sigma(Tb + W^*(T))\right) \geq k\} \\ &= \{Y^*(T) \geq -\alpha(T, s, b)\}\,.\end{aligned}$$

Damit folgt in Gleichung (4.15):

$$\begin{aligned}Q_+(u, \tau, s, b) &= \mathrm{e}^{-r\tau} \int\limits_{-\infty}^{u} g\left(s \exp\left(\sigma(\tau b + \sqrt{\tau} y)\right)\right) \varphi(y) dy \\ &= \mathrm{e}^{-r\tau} \int\limits_{-\infty}^{u} (s \exp\left(\sigma(\tau b + \sqrt{\tau} y)\right) - k)\varphi(y)\mathbf{1}_{\{y \geq -\alpha(\tau,s,b)\}} dy \\ &= \mathbf{1}_{\{-\alpha(\tau,s,b) \leq u\}} \int\limits_{-\alpha(\tau,s,b)}^{u} (s \exp\left(\sigma(\tau b + \sqrt{\tau} y) - r\tau\right) - k\,\mathrm{e}^{-r\tau})\varphi(y) dy \\ &= \mathbf{1}_{\{-\alpha(\tau,s,b) \leq u\}} \Bigg(\int\limits_{-\alpha(\tau,s,b)}^{u} s \exp\left(\sigma\sqrt{\tau} y - \tau\sigma^2/2\right) \varphi(y) dy \\ &\qquad - k\,\mathrm{e}^{-r\tau} \left[\Phi(u) - \Phi(-\alpha(\tau, s, b))\right] \Bigg). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Da die Novikov-Bedingung (siehe [KS91, Abschnitt 3.5 D]) wegen $T\sigma^2 < \infty$ erfüllt ist, definiert

$$M(t) := \exp\left(\sigma W^*(t) - t\sigma^2/2\right),\ t \in [0, T],$$

ein Martingal bezüglich $\mathbf{P}^*$. Der Satz von Girsanov impliziert dann, dass $\left(\tilde{W}(t)\right)_{t\in[0,T]}$ definiert durch

$$\tilde{W}(\tau) := W^*(\tau) - \sigma\tau$$

ein Wiener-Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbf{P}}$ mit der Dichte $M(T)$ bezüglich $\mathbf{P}^*$ ist. Dementsprechend ist

$$\tilde{Y}(\tau) := \frac{\tilde{W}(\tau)}{\sqrt{\tau}} = \frac{W^*(\tau) - \sigma\tau}{\sqrt{\tau}}$$

unter $\tilde{\mathbf{P}}$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
Nutzen wir dies aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\alpha(\tau,s,b)}^{u} \exp\left(\sigma y\sqrt{\tau} - \tau\sigma^2/2\right)\varphi(y)dy &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbf{1}_{\{-\alpha(\tau,s,b)\le Y^*(\tau)\le u\}}\right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbf{1}_{\left\{-\alpha(\tau,s,b)-\sigma\sqrt{\tau}\le \tilde{Y}(\tau)\le u-\sigma\sqrt{\tau}\right\}}\right] \\
&= \Phi\left(u - \sigma\sqrt{\tau}\right) - \Phi\Big(\underbrace{-\alpha(\tau,s,b) - \sigma\sqrt{\tau}}_{=-\alpha(\tau,s,b+\sigma)}\Big)
\end{aligned}$$

und somit in (4.22):

$$\begin{aligned}
Q_+(u,\tau,s,b) &= \mathbf{1}_{\{-\alpha(\tau,s,b)\le u\}}\Big(s\left[\Phi(u-\sigma\sqrt{\tau}) - \Phi\left(-\alpha(\tau,s,b+\sigma)\right)\right] \\
&\qquad - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\left[\Phi(u) - \Phi(-\alpha(\tau,s,b))\right]\Big) \\
&= s\left[\Phi(u-\sigma\sqrt{\tau}) - \Phi(-\alpha(\tau,s,b+\sigma))\right]^+ - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\left[\Phi(u) - \Phi(-\alpha(\tau,s,b))\right]^+,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Monotonie der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilungsfunktion benutzt haben.

Analog berechnen wir $Q_-(u,\tau,s,b)$ indem wir

$$\mathbf{1}_{\{y\geq u\}}\mathbf{1}_{\{y\geq -\alpha(\tau,s,b)\}} = \mathbf{1}_{\{y\geq \max\{u,-\alpha(\tau,s,b)\}\}}$$

verwenden:

$$\begin{aligned}
Q_-(u,\tau,s,b) &= \mathrm{e}^{-r\tau}\int\limits_u^\infty g\left(s\exp\left(\sigma(\tau b + y\sqrt{\tau})\right)\right)\varphi(y)dy \\
&= \int\limits_{\max\{u,-\alpha(\tau,s,b)\}}^\infty \left(s\exp\left(\sigma y\sqrt{\tau} - \tau\sigma^2/2\right) - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\right)\varphi(y)dy \\
&= s\tilde{\mathbf{P}}\Big(\tilde{y} \geq \max\left\{u - \sigma\sqrt{\tau}, -\alpha(\tau,s,b+\sigma)\right\}\Big) \\
&\qquad - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\,\mathbf{P}^*\Big(Y^*(T) \geq \max\{u, -\alpha(\tau,s,b)\}\Big) \\
&= s\Phi\Big(\min\left\{\sigma\sqrt{\tau} - u, \alpha(\tau,s,b+\sigma)\right\}\Big) - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\,\Phi\Big(\min\{-u,\alpha(\tau,s,b)\}\Big),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie der Normalverteilung und die Gleichheit

$$\max\{a,b\} = -\min\{-a,-b\}$$

benutzt haben.
Letztlich berechnen wir mit Hilfe von $f(s) = s\mathbf{1}_{\{s\geq k\}}$ auf analoge Weise die Funktionen der optimalen Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot)$ in (4.21):

$$\begin{aligned}
\Pi_+(u,\tau,s,b) &= \mathrm{e}^{-r\tau}\left[\int\limits_u^\infty f\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\varphi(y)dy + \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}g\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(u\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\right] \\
&= \int\limits_{\max\{u,-\alpha(\tau,s,b)\}}^\infty s\,\mathrm{e}^{(\sigma y\sqrt{\tau}-\tau\sigma^2/2)}\,\varphi(y)dy + \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[s\,\mathrm{e}^{(\sigma u\sqrt{\tau}-\tau\sigma^2/2)} - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\right]^+ \\
&= s\Phi\Big(\max\left\{\sqrt{\tau}\sigma - u, \alpha(\tau,s,b+\sigma)\right\}\Big) + \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[s\,\mathrm{e}^{(\sigma u\sqrt{\tau}-\tau\sigma^2/2)} - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\right]^+
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Pi_-(u,\tau,s,b) &= \mathrm{e}^{-r\tau}\left[\int\limits_{-\infty}^{u} f\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(y\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\varphi(y)dy - \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}} g\left(s\,\mathrm{e}^{\sigma(u\sqrt{\tau}+b\tau)}\right)\right] \\
&= \int\limits_{-\alpha(\tau,s,b)}^{u} s\,\mathrm{e}^{(\sigma y\sqrt{\tau}-\tau\sigma^2/2)}\,\varphi(y)dy - \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[s\,\mathrm{e}^{(\sigma u\sqrt{\tau}-\tau\sigma^2/2)} - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\right]^+ \\
&= s\left[\Phi\left(u-\sigma\sqrt{\tau}\right) - \Phi\left(-\alpha(\tau,s,b+\sigma)\right)\right]^+ - \frac{\varphi(u)}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[s\,\mathrm{e}^{(\sigma z\sqrt{\tau}-\tau\sigma^2/2)} - k\,\mathrm{e}^{-r\tau}\right]^+ .
\end{aligned}$$

5 Risikobewertung im Short-Rate-Modell

Wir wollen in diesem Kapitel das bisherige Modell sowie die Aussagen aus Kapitel 3 auf ein Short-Rate-Modell, das heißt explizit auf ein *Vasicek-Modell*, übertragen. In einem Bondmarkt stehen keine klassischen Aktien wie bisher zur Verfügung, sondern sogenannte *Bonds* übernehmen die Rolle der risky assets. Der entscheidende Unterschied zu den Anwendungen in Kapitel 4 ist die Modellierung einer stochastischen Zinsrate.
Bondmarkt- bzw. *Short-Rate-* Modelle bilden in der Finanzmathematik eines der wichtigsten Gebiete, da Zinsmärkte in der Realität gerade im Bankensektor eine entscheidende Rolle spielen. Eine detaillierte Herleitung eines Bondmarktmodells ist für unsere Zwecke jedoch nicht von besonderer Bedeutung und würde den Rahmen dieser Ausarbeitung übersteigen; sie kann in [Fil09] nachgelesen werden. Wir motivieren das Modell im Folgenden verkürzt und beschränken uns auf die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften. Dazu orientieren wir uns zusätzlich an [Sch10].
Anschließend zeigen wir die Konsistenz des Modells mit unseren Annahmen und Ausführungen aus Kapitel 3, sodass optimale Strategien und Lösungen für das Problem (3.6) auch hier existieren. Wir beenden dieses Kapitel mit einer Anwendung analog zu Beispiel 4.3, wobei wir keine weiteren Einschränkungen an die Koeffizienten vornehmen; die Verwendung des *Forwardmartingalmaßes* ist dabei das entscheidende Hilfsmittel.

5.1 Aufbau eines Bondmarktes

Der Handlungszeitraum eines Investors sei weiterhin $[0, T]$. Wir beschränken uns auf ein eindimensionales Modell, das heißt als Finanzgüter stehen dem Investor wie gehabt das

Geldmarktkonto und ein risky asset zur Verfügung. Die Dynamik des Geldmarktkontos sei für $t \in [0, T]$ weiterhin durch

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt, \;\; S_0(0) = 1,$$

mit der Lösung

$$S_0(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

gegeben.
Das Modell basiert auf sogenannten *Zero-Coupon-Bonds,* die wir zunächst definieren und anschließend näher erläutern wollen.

Definition 5.1 (Zero-Coupon-Bond)**:**
Sei $\tilde{T} \in [0, T]$. Ein Zero-Coupon-Bond oder auch kurz Zero-Bond ist ein festverzinsliches Wertpapier, das dem Inhaber eine feste Auszahlung in Höhe von einer Geldeinheit zum Fälligkeitszeitpunkt $\tilde{T}$ garantiert. Während der Laufzeit werden dem Inhaber dabei keine Dividenden bzw. Kuponzahlungen ausgegeben. Ein Zero-Bond mit Laufzeit $\tilde{T}$ bezeichnen wir kurz mit $\tilde{T}$-Bond. Der Preis eines $\tilde{T}$-Bonds zur Zeit $t \in [0, \tilde{T}]$ wird im Folgenden durch $p_{\tilde{T}}(t)$ dargestellt.
Ein Zero-Bond entspricht im weiteren Verlauf einer risikolosen Anlage, das heißt das Ausfallrisiko soll gleich Null sein; mathematisch bedeutet das:

$$p_{\tilde{T}}(\tilde{T}) = 1 \textit{ für alle } \tilde{T} \in [0, T].$$

Außerdem ist der Wert eines Zero-Bonds immer positiv, also

$$p_{\tilde{T}}(t) > 0 \textit{ für alle } 0 \leq t \leq \tilde{T} \leq T.$$

Wir gehen nun entsprechend eines *„Martingale-Modelling“* Ansatzes vor, bei dem wir die Existenz eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}^*$ voraussetzen und die Preise der risky assets nicht bezüglich des realen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$, sondern bezüglich $\mathbf{P}^*$ modellieren. Wir wissen, dass unter $\mathbf{P}^*$ die diskontierten Preise der Zero-Bonds Martingale sein müssen, das heißt:

$$\frac{p_{\tilde{T}}(t)}{S_0(t)} = \mathbb{E}^* \left[\left. \frac{p_{\tilde{T}}(\tilde{T})}{S_0(T)} \right| \mathcal{F}(t) \right] = \mathbb{E}^* \left[\left. \frac{1}{S_0(T)} \right| \mathcal{F}(t) \right].$$

Da $S_0(t)$ bezüglich $\mathcal{F}(t)$ messbar ist, folgt:

$$p_{\tilde{T}}(t) = \mathbb{E}^* \left[\left. \exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \right| \mathcal{F}(t) \right]. \tag{5.1}$$

Wie oben bereits erwähnt, sollen Zero-Bonds die Rolle der risky assets einnehmen. Dieser Sachverhalt erscheint zunächst widersprüchlich zur Annahme einer risikolosen Anlage; entscheidend ist dabei jedoch der betrachte Fälligkeitszeitpunkt des Zero-Bonds sowie die stochastische Zinsrate:
Der Endwert $p_{\tilde{T}}(\tilde{T}) = 1$ eines $\tilde{T}$-Bonds ist für jedes $\tilde{T} \in [0, T]$ bekannt und konstant. Betrachten wir allerdings für ein $T^* > T$ den Wert $p_{T^*}(\cdot)$ eines T^*-Bonds, dann ist dieser für alle $t \in [0, T]$ und somit insbesondere zum Ende des Handlungszeitraums unsicher und kann demgemäß die Rolle des risky assets übernehmen. Dazu setzen wir voraus, dass ein Markt für Zero-Bonds mit beliebigen Fälligkeiten $\tilde{T} \in [0, T]$ und $T^* > T$ existiert.
Dem Investor stehen dann zwei Finanzgüter zur Verfügen: Das Geldmarktkonto und ein T^*-Bond.

Beginnen wir nun mit der Modellierung der stochastischen Zinsrate $r(\cdot)$. Dazu greifen wir auf das 1977 von *Oldrich Vasicek* in [Vas77] veröffentlichte Modell zurück.

5.1.1 Das Vasicek-Modell

Im eindimensionalen Vasicek-Modell folgt die Zinsrate $r(\cdot)$ folgender Dynamik:

$$dr(t) = \alpha \left(\beta - r(t) \right) dt + \sigma dW^*(t), \ r(0) = r_0. \tag{5.2}$$

Dabei ist $W^*(\cdot)$ wie gewohnt ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbf{P}^*$. Die Parameter $\alpha, \ \beta, \ \sigma$ seien strikt positive Konstanten.

Bemerkung:
Ein Prozess, der obiger Dynamik genügt, wird Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (vgl. [UO30]) genannt; das Besondere dabei ist die sogenannte Mean-Reversion-Eigenschaft, die besagt, dass der Prozess von seinem Mean-Reversion-Level β immer wieder angezogen wird, und zwar mit der Geschwindigkeit der Mean-Reversion-Rate α.

Um die stochastische Differentialgleichung zu lösen, betrachten wir den Prozess $(\exp(\alpha t)r(t))_{t\in[0,T]}$. Mit Hilfe partieller Integration erhalten wir dann

$$\begin{aligned} d(\exp(\alpha t)r(t)) &= \alpha r(t)\exp(\alpha t)dt + \exp(\alpha t)dr(t) \\ &= \exp(\alpha t)\alpha\beta dt + \exp(\alpha t)\sigma dW^*(t) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} r(t) &= \exp(-\alpha t)\left(r_0\alpha\beta\int_0^t \exp(\alpha s)ds + \sigma\int_0^t \exp(\alpha s)dW^*(s)\right) \\ &= \exp(-\alpha t)r_0 + (1-\exp(-\alpha t))\beta + \sigma\exp(-\alpha t)\int_0^t \exp(\alpha s)dW^*(s). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Da $(\exp(\alpha t))_{t\in[0,T]}$ ein deterministischer Prozess ist, folgt mit

$$\langle r(\cdot)\rangle_t = \sigma^2\int_0^t exp(2\alpha(s-t))ds = \sigma^2\frac{1-\exp(-2\alpha t)}{2\alpha}$$

dann, dass $r(t)$ unter $\mathbf{P}^*$ normalverteilt ist mit Erwartungswert

$$\mathbb{E}^*\left[r(t)\right] = \exp(-\alpha t)r_0 + (1-\exp(-\alpha t))\beta$$

und Varianz

$$\mathbb{V}^*(r(t)) = \sigma^2\frac{1-\exp(-2\alpha t)}{2\alpha}.$$

Bemerkung:
Wir sehen, dass die Fouriertransformierte (vgl. Lemma 4.2) von $r(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ gegen die Fouriertransformierte einer $\mathcal{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$-verteilten Zufallsvariable konvergiert. Nach dem Stetigkeitssatz von Lévy (vgl. [Als07, Abschnitt 45]) gilt dies auch für die Verteilung von $r(t)$. Hier sehen wir die Mean-Reversion-Eigenschaft der Short-Rate auf lange Sicht.
Die Verteilungseigenschaft von $r(\cdot)$ erleichtert zwar die folgende Bewertung von Zero-Bonds, deckt aber gleichzeitig den Schwachpunkt des Vasicek-Modells auf: Die Zinsrate $r(\cdot)$ nimmt mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte an, was natürlich nicht der Realität entsprechen kann, da bei einer risikolosen Anlage implizit eine positive Zinsrate vorausgesetzt wird.

Um nun (5.1) berechnen zu können, müssen wir die Verteilung von $\left(\int_t^T r(s)ds\right)_{t\in[0,T]}$ bestimmen. Beachte dass (5.3) die Darstellung der Zinsrate in t ausgehend vom Zeitpunkt 0 ist; für jeden beliebigen Zeitpunkt s und Ausgangszeitpunkt $t < s$ gilt

$$r(s) = \exp(-\alpha(s-t))r(t) + (1-\exp(-\alpha(s-t)))\beta + \sigma \int_t^s \exp(\alpha(u-s))dW^*(u).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_t^T r(s)ds &= \int_t^T \exp(-\alpha(s-t))r(t) + (1-\exp(-\alpha(s-t)))\beta \\
&\quad + \sigma \int_t^s exp(\alpha(u-s))dW^*(u)ds \\
&= \int_t^T \exp(-\alpha(s-t))r(t)ds + \int_t^T (1-\exp(-\alpha(s-t)))\beta ds \\
&\quad + \sigma \int_t^T \int_t^s exp(\alpha(u-s))dW^*(u)ds \\
&= r(t)\frac{1-\exp(\alpha(t-T))}{\alpha} + \beta\left((T-t) - \frac{1-\exp(\alpha(t-T))}{\alpha}\right) \\
&\quad + \sigma \int_t^T \int_t^s exp(\alpha(u-s))dW^*(u)ds.
\end{aligned}$$

Das Doppelintegral können wir mit Hilfe des *Satzes von Fubini für stochastische Integrale* (siehe [Fil09, Theorem 6.2]) umformen:

$$\begin{aligned}
\int_t^T \int_t^s exp(\alpha(u-s))dW^*(u)ds &= \int_t^T \int_u^T exp(\alpha(u-s))dsdW^*(u) \\
&= \int_t^T \frac{1-\exp(\alpha(u-T))}{\alpha} W^*(u)
\end{aligned}$$

Analog zu $r(t)$ ist damit der Prozess $\left(\int_t^T r(s)ds\right)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}(t)}$ normalverteilt mit Erwartungswert

$$r(t)\frac{1-\exp(\alpha(t-T))}{\alpha} + \beta\left((T-t) - \frac{1-\exp(\alpha(t-T))}{\alpha}\right) \tag{5.4}$$

und Varianz

$$\left\langle \int\limits_{\cdot}^{T} r(s)ds \right\rangle_t = \left\langle \sigma \int\limits_{\cdot}^{T} \frac{1-\exp(\alpha(u-T))}{\alpha} dW^*(u) \right\rangle_t$$

$$= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \int\limits_t^T 1 - 2\exp(\alpha(u-T)) + \exp(2\alpha(u-T))du$$

$$= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \left((T-t) - 2\frac{1-\exp(\alpha(t-T))}{\alpha} + \frac{1-\exp(2\alpha(t-T))}{2\alpha} \right). \quad (5.5)$$

Nun gilt für eine normalverteilte Zufallsvariable X wegen ihrer Fouriertransformierten (vgl. Lemma 4.2) mit $t = 1$:

$$\mathbb{E}\left[\exp(-X)\right] = \exp\left(-\mathbb{E}[X] + \mathbb{V}(X)/2\right).$$

Mit (5.4) und (5.5) erhalten wir in (5.1) mit $\tilde{T} \equiv T^*$ demzufolge

$$p_{T^*}(t) = \mathbb{E}^* \left[\exp\left(- \int\limits_t^{T^*} r(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right]$$

$$= \exp\left(A_{T^*}(t) - r(t)B_{T^*}(t)\right),$$

wobei

$$A_{T^*}(t) := \left(\beta - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)\left[B_{T^*}(t) - (T^* - t)\right] - \frac{\sigma^2}{4\alpha} B_{T^*}(t)^2,$$

$$B_{T^*}(t) := \frac{1-\exp(\alpha(t-T^*))}{\alpha}, \; t \in [0, T].$$

Wir haben also jetzt eine explizite Darstellung für den Priesprozess des risky assets. Davon ausgehend zeigen wir, dass $p_{T^*}(t)$ unter $\mathbf{P}^*$ der Dynamik

$$dp_{T^*}(t) = p_{T^*}(t)\Big(r(t)dt + \delta_{T^*}(t)dW^*(t)\Big)$$

folgt und somit den Voraussetzungen aus Kapitel 3 genügt.
Dazu definieren wir $f(t, r(t)) := p_{T^*}(t)$ und wenden die Itô-Formel an:

$$\begin{aligned}
dp_T(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial r(t)}dr(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 r(t)}d\left\langle r(\cdot)\right\rangle_t \\
&= f(t, r(t))\left[\left(\frac{\partial A_{T^*}(t)}{\partial t} - r(t)\frac{\partial B_{T^*}(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}B_{T^*}(t)^2\sigma^2\right)dt - B_T(t)dr(t)\right]
\end{aligned}$$

Setzen wir nun (5.2) sowie die Formeln

$$\frac{\partial B_{T^*}(t)}{\partial t} = \exp(\alpha(t - T^*)) = \alpha B_{T^*}(t) - 1 \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial A_{T^*}(t)}{\partial t} = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)\alpha B_{T^*}(t) - \frac{\sigma^2}{2\alpha}B_{T^*}(t)(\alpha B_{T^*}(t) - 1) \tag{5.7}$$

ein, so erhalten wir mit $\delta_{T^*}(t) := -\sigma B_{T^*}(t)$ wie behauptet:

$$dp_{T^*}(t) = p_{T^*}(t)\left(r(t)dt + \delta_{T^*}(t)dW^*(t)\right),\ p(0, T^*) > 0. \tag{5.8}$$

Rückwirkend können wir infolgedessen die Dynamik eines Zero-Bonds unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß **P** angeben:

$$dp_{T^*}(t) = p_{T^*}(t)\left(\mu_{T^*}(t)dt + \delta_{T^*}(t)dW(t)\right),\ p(0, T^*) > 0.$$

Dabei ist $\mu_{T^*}(t)$ wie in Kapitel 2 ein progressiv messbarer Prozess, der

$$\int_t^T \left|\mu_{T^*}(s)\right|^2 ds < \infty \text{ für alle } t \in [0, T]$$

fast sicher erfüllt.

Bemerkung:
*Wir sprechen hier explizit von einem subjektiven statt realen Wahrscheinlichkeitsmaß, da wir anders als bisher einen Martingale-Modelling Ansatz verwenden. Wir gelangen also rückwirkend zu **P**, indem wir eine subjektive Einschätzung der Renditen in Form der Abbildung $\mu_{T^*}(\cdot)$ einfügen.*

Die Gleichung für den Dichtequotientenprozess $Z(t) = \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}\Big|_{\mathcal{F}(t)}$ aus Abschnitt 2.2 bleibt dann konsistent mit dem risk premium

$$\theta_{T^*}(t) := \delta_{T^*}^{-1}(t)(\mu_{T^*}(t) - r(t)), \ t \in [0, T], \tag{5.9}$$

wobei $\delta_{T^*}^{-1}(t)$ die Inverse von $\delta_{T^*}(t)$ bezeichnet.

5.1.2 Das Forwardmartingalmaß

Mit den gewonnen Erkenntnissen über die Dynamik und Verteilung der Zero-Bonds ist gewährleistet, dass die Voraussetzungen aus Kapitel 2 erfüllt sind und die Ausführungen in Kapitel 3 ebenso im Vasicek-Modell gelten. Dabei ist zu beachten, dass die Abbildung $\delta_{T^*}(t) = -\sigma B_{T^*}(t)$ die Volatilität $\sigma(t)$ in Kapitel 3 ersetzt, sodass

$$d\left(\frac{X^{x,\pi}(t)}{S_0(t)}\right) = \frac{\pi(t)}{S_0(t)}\delta_{T^*}(t)dW^*(t) \tag{5.10}$$

gilt.
Da wir im anschließenden Abschnitt eine Anwendung im Kontext des Vasicek-Modells behandeln wollen und dementsprechend mit einer stochastischen Zinsrate arbeiten, benötigen wir ein spezielles mathematisches Konstrukt, das erstmals von *Farshid Jamshidian* verwendet wurde; vgl. [Jam89]. Das sogenannte *Forwardmartingalmaß* ist das zu $\mathbf{P}^*$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}^T$, unter dem die -mit T-Bonds diskontierten- Preisprozesse der risky assets Martingale sind, das heißt:

$$\begin{aligned} p_{T^*}(t) &= \mathbb{E}^T\left[p_T(t)\frac{p_{T^*}(T)}{p_T(T)} \middle| \mathcal{F}(t)\right] \\ &= \mathbb{E}^T\left[p_T(t)p_{T^*}(T) \middle| \mathcal{F}(t)\right] \text{ für alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dabei bezeichnen wir mit $\mathbb{E}^T$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes $\mathbf{P}^T$.
Bestimmen wir zunächst den Dichtequotientenprozess von $\mathbf{P}^T$ bezüglich $\mathbf{P}^*$:
Einerseits wissen wir, dass unter $\mathbf{P}^*$ die -mit dem Geldmarktkonto diskontierten- Preisprozesse der risky assets Martingale sind, das heißt:

$$p_{T^*}(t) = \mathbb{E}^*\left[\frac{S_0(t)}{S_0(T)}p_{T^*}(T) \middle| \mathcal{F}(t)\right] \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Andererseits soll eben (5.11) gelten, was äquivalent umgeschrieben werden kann zu:

$$p_{T^*}(t) = \mathbb{E}^* \left[\frac{d\mathbf{P}^T}{d\mathbf{P}^*} p_T(t) p_{T^*}(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Das motiviert die Definition von

$$\left. \frac{d\mathbf{P}^T}{d\mathbf{P}^*} \right|_{\mathcal{F}(t)} := \frac{S_0(t)}{S_0(T) p_T(t)}. \tag{5.12}$$

Damit können wir bei der späteren Berechnung von $\mathbb{E}^* \left[\frac{p_{T^*}(T)}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]$ übergehen zu

$$\mathbb{E}^T \left[\frac{S_0(T) p_T(t)}{S_0(t) S_0(T)} p_{T^*}(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{p_T(t)}{S_0(t)} \mathbb{E}^T \left[p_{T^*}(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right].$$

Diese Darstellung erleichtert uns die Berechnung enorm, sofern wir die Verteilung von $p_{T^*}(t)$ unter $\mathbf{P}^T$ kennen.
Betrachten wir dazu für festgehaltene $T^* > T > 0$ den Prozess

$$\tilde{p}(t) := \frac{p_{T^*}(t)}{p_T(t)} = \exp\Big(A_{T^*}(t) - A_T(t) - r(t) \left(B_{T^*}(t) - B_T(t) \right) \Big).$$

Wenden wir nun analog zu $p_T(t)$ die Itô-Formel auf $\tilde{p}(t)$ an und verwenden die Werte aus (5.6) und (5.7), so erhalten wir:

$$d\tilde{p}(t) = \tilde{p}(t) \Big(\delta_T(t) \tilde{\delta}(t) dt + \tilde{\delta}(t) dW^*(t) \Big),$$

wobei wir $\tilde{\delta}(t) := \delta_T(t) - \delta_{T^*}(t)$ abkürzen. Da $\tilde{p}(t)$ nach Definition ein Martingal bezüglich $\mathbf{P}^T$ ist, folgt mit Girsanov, dass

$$W^T(t) := W^*(t) + \int_0^t \delta_T(s) ds, \ t \in [0, T], \tag{5.13}$$

ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbf{P}^T$ ist, sodass sich

$$d\tilde{p}(t) = \tilde{p}(t) \tilde{\delta}(t) dW^T(t) \tag{5.14}$$

mit der Lösung

$$\tilde{p}(t) = \tilde{p}(0) \exp\left(\int_0^t \tilde{\delta}(s) dW^T(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\delta}(s)^2 ds \right) \tag{5.15}$$

ergibt.

5.2 Anwendung im Vasicek-Modell

Mit den obigen Vorarbeiten können wir nun ein Anwendungsbeispiel durchführen, in dem eine stochastische Zinsrate vorliegt, die gemäß des Vasicek-Modells einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess folgt.
Seien $[0, T]$ der Handlungszeitraum des Investors und $p_{T^*}(t)$ für $T^* > T$ der Wert eines Zero-Bonds mit Fälligkeit T^* zur Zeit t.
Prinzipiell können wir wie in den bisherigen Beispielen vorgehen; entscheidend ist dabei, dass das risky asset $p_{T^*}(t)$ wie zuvor $S(t)$ ein Semimartingal ist. Wir müssen jedoch wiederum eine spezielle Einschränkung machen: Das risk premium $\theta_{T^*}(\cdot)$ aus (5.9) muss deterministisch sein; das bedeutet eine Einschränkung an das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ insofern, dass wir nur derartige $\mu_{T^*}(\cdot)$ zulassen, die ein determistisches $\theta_{T^*}(\cdot)$ gewährleisten.
Wir werden uns an Beispiel 4.3 orientieren, das heißt die Verbindlichkeit sei in Form einer stetig differenzierbaren Funktion g vom Endwert des risky assets $p_{T^*}(T)$ dargestellt und die regulierende Zufallsvariable A sei gleich 0.
Zur besseren Übersicht definieren wir vorab für $t \in [0, T)$ die Abbildungen

$$Y_1(t) := \int_t^T \theta_{T^*}(s) dW^T(s) \left(\int_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds \right)^{-1/2},$$

$$Y_2(t) := \int_t^T \tilde{\delta}(s) dW^T(s) \left(\int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds \right)^{-1/2},$$

$$U\big(\xi, t, \int_0^t \theta_{T^*}(s) dW^T(s)\big) := \frac{\left(\log(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^T \theta_{T^*}(s)^2 + 2\theta_{T^*}(s)\delta_T(s) ds - \int_0^t \theta_{T^*}(s) dW^T(s) \right)}{\left(\int_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds \right)^{1/2}}.$$

Da $\theta_{T^*}(t)$ bzw. $\tilde{\delta}(t)$ für alle $t \in [0, T]$ deterministisch sind, sind $Y_1(t)$ bzw. $Y_2(t)$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
Sei $\rho(t)$ in Abhängigkeit von t die Kovarianz von $Y_1(t)$ und $Y_2(t)$. Dann haben $Y_1(t)$ und $Y_2(t)$ die gemeinsame Dichte:

$$\phi_t(y_1, y_2) := \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho(t)^2}} \exp\left(-\frac{y_1^2 - 2\rho(t)y_1y_2 + y_2^2}{2(1-\rho(t)^2)}\right).$$

Wir definieren zusätzlich die Abbildung

$$Q(u,t,p) := p_T(t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{u} \phi_t(y_1, y_2)$$

$$g\left[p \exp\left(\left(\int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds\right)^{1/2} y_2 - \frac{1}{2}\int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds\right)\right] d(y_1, y_2).$$

Nun können wir mit der Berechnung der notwendigen Funktionen beginnen.
Sei $\hat{\xi}(x)$ wie in (3.14) der kleinste Wert $\xi > 0$, für den $H(\xi) \geq C_0 - x$ gilt. Dann erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} H(\hat{\xi}(x)) &= \mathbb{E}^* \left[\frac{g(p_{T^*}(T))}{S_0(T)} \mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\geq 1\}}\right] \\ &\overset{(5.12)}{=} \mathbb{E}^T \left[p_T(0) g(p_{T^*}(T)) \mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x)Z(T)\geq 1\}}\right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

mit (5.13) erhalten wir

$$\begin{aligned} Z(T) &= \exp\left(-\int_0^T \theta_{T^*}(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^T \theta_{T^*}(s) dW^*(s) + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^T \theta_{T^*}(s) dW^T(s) + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_{T^*}(s)^2 + 2\theta_{T^*}(s)\delta_T(s) ds\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

und folglich

$$\left\{\hat{\xi}(x)Z(T) \geq 1\right\} = \left\{Y_1(0) \leq U(\hat{\xi}(x), 0, 0)\right\}. \tag{5.18}$$

Wegen $p_T(T) = 1$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} p_{T^*}(T) &= \tilde{p}(T) \\ &\overset{(5.15)}{=} \tilde{p}(0) \exp\left(\int_0^T \tilde{\delta}(s) dW^T(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \tilde{\delta}(s)^2 ds\right) \\ &= \tilde{p}(0) \exp\left(\left(\int_0^T \tilde{\delta}(s)^2 ds\right)^{1/2} Y_2(0) - \frac{1}{2}\int_0^T \tilde{\delta}(s)^2 ds\right). \end{aligned}$$

Nutzen wir nun die Verteilungseigenschaften von $Y_1(0)$ und $Y_2(0)$, so bekommen wir in (5.16)

$$\begin{aligned} H(\hat{\xi}(x)) = p_T(0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{U(\hat{\xi}(x),0)} & \phi_0(y_1, y_2) \\ & g\left[\tilde{p}(0) \exp\left(\left(\int_0^T \tilde{\delta}(s)^2 ds\right)^{1/2} y_2 - \frac{1}{2}\int_0^T \tilde{\delta}(s)^2 \, ds\right)\right] d(y_1, y_2) \\ = Q\big(U(\hat{\xi}(x), 0), 0, \tilde{p}(0)\big). \end{aligned}$$

Die Abbildung $u \longmapsto Q(u, 0, \tilde{p}(0))$ ist absolutstetig mit $Q(-\infty, 0, \tilde{p}(0)) = 0$ und $Q(\infty, 0, \tilde{p}(0)) = C_0 > C_0 - x$. Damit ist auch $H(\cdot)$ stetig und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\hat{u}$ mit $Q(\hat{u}, 0, \tilde{p}(0)) = C_0 - x = H(\hat{\xi}(x))$, das heißt

$$\hat{u} = U(\hat{\xi}(x), 0, 0).$$

Wegen der Absolutstetigkeit von $Q(\cdot, 0, \tilde{p}(0))$ existiert die Umkehrfunktion $Q^{-1}(\cdot)$, sodass

$$Q^{-1}(C_0 - x) = \hat{u} = U(\hat{\xi}(x), 0, 0)$$

gelten muss. Infolgedessen erhalten wir

$$U(\hat{\xi}(x), t, \int_0^t \theta_{T^*}(s) dW^T(s)) = \frac{\left(Q^{-1}(C_0 - x) \left(\int_0^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right)^{1/2} - \int_0^t \theta_{T^*}(s) dW^T(s)\right)}{\left(\int_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right)^{-1/2}}. \tag{5.19}$$

Betrachten wir nun den optimalen Vermögenswert

$$\hat{X}(t) \overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}^* \left[\frac{S_0(t)}{S_0(T)} g(p_{T^*}(T)) \mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x) Z(T) \leq 1\}} \middle| \mathcal{F}(t) \right].$$

Wie in den Beispielen des vorherigen Kapitels benötigen wir -von $\mathcal{F}(t)$ unabhängige-Zufallsvariablen, um den bedingten Erwartungswert berechnen zu können. In t gilt:

$$\tilde{p}(T) = \tilde{p}(t) \exp\left(\int_t^T \tilde{\delta}(s) dW^T(s) - \frac{1}{2} \int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds \right).$$

Somit ist $\frac{\tilde{p}(T)}{p(t)}$ ebenso wie

$$\frac{Z(T)}{Z(t)} \overset{(5.17)}{=} \exp\left(- \int_t^T \theta_{T^*}(s) dW^T(s) + \frac{1}{2} \int_t^T \theta_{T^*}(s)^2 + 2\theta_{T^*}(s)\delta_T(s) ds \right)$$

unabhängig von $\mathcal{F}(t)$.
Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t) &= \mathbb{E}^* \left[\frac{S_0(t)}{S_0(T)} g(p_{T^*}(T)) \mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x) Z(T) \leq 1\}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= \mathbb{E}^T \left[p_T(t) g(\tilde{p}(T)) \mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x) Z(T) \leq 1\}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= p_T(t) \mathbb{E}^T \left[g\left(\frac{\tilde{p}(T)}{\tilde{p}(t)} \tilde{p}(t) \right) \mathbf{1}_{\{\hat{\xi}(x) Z(T)/Z(t) \leq 1/Z(t)\}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= f\big(\tilde{p(t)}, Z(t)\big)
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
f(p,z) :&= p_T(t)\mathbb{E}^T\left[g\left(\frac{\tilde{p}(T)}{\tilde{p}(t)}p\right)\mathbf{1}_{\left\{\hat{\xi}(x)Z(T)/Z(t)\leq 1/z\right\}}\right]\\
&= p_T(t)\mathbb{E}^T\left[g\left(p\exp\big(\int_t^T\tilde{\delta}(s)dW^T(s)-\frac{1}{2}\int_t^T\tilde{\delta}(s)^2ds\big)\right)\right.\\
&\qquad\left.\mathbf{1}_{\left\{\int_t^T\theta_{T^*}(s)dW^T\geq\log(\hat{\xi}(x))+1/2\int_t^T\theta_{T^*}(s)^2+2\theta_{T^*}(s)\delta_T(s)ds+\log(z)\right\}}\right]\\
&= p_T(t)\mathbb{E}^T\left[g\left(p\exp\Big(\big(\int_t^T\tilde{\delta}(s)^2ds\big)^{1/2}Y_2(t)-\frac{1}{2}\int_t^T\tilde{\delta}(s)^2ds\Big)\right)\right.\\
&\qquad\left.\mathbf{1}_{\left\{Y_1(t)\geq\Big(\log(\hat{\xi}(x))+1/2\int_t^T\theta_{T^*}(s)^2+2\theta_{T^*}(s)\delta_T(s)ds+\log(z)\Big)\Big(\int_t^T\theta_{T^*}(s)^2ds\Big)^{-1/2}\right\}}\right].
\end{aligned}
$$

Für $z = Z(t)$ erhalten wir in der Indikatorfunktion

$$
Y_1(t)\geq U\big(\hat{\xi}(x),t,\int_0^t\theta_{T^*}(s)dW^T(s)\big)
$$

und aufgrund der Normalverteilungseigenschaft von $Y_1(t)$ bzw. $Y_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
\hat{X}(t) &= f\big(\tilde{p}(t),Z(t)\big)\\
&= p_T(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{U(\hat{\xi}(x),t)}^{\infty}\phi_t(y_1,y_2)\\
&\qquad g\left[\tilde{p}(t)\exp\left(\left(\int_t^T\tilde{\delta}(s)^2ds\right)^{1/2}y_2-\frac{1}{2}\int_t^T\tilde{\delta}(s)^2ds\right)\right]d(y_1,y_2)\\
&= \tilde{Q}\left(U\big(\hat{\xi}(x),t,\int_0^t\theta_{T^*}(s)dW^T(s)\big),t,\tilde{p}(t)\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir

$$\tilde{Q}\,(u,t,p) = Q(\infty,t,p) - Q(u,t,p)$$

gesetzt haben. Um letztlich die optimale Handlungsstrategie mittels eines Koeffizientenvergleichs mit (5.10) abzuleiten, benötigen wir die Dynamik von $\frac{\hat{X}(\cdot)}{S_0(\cdot)}$. Dazu brauchen wir insbesondere die Dynamik von $U\big(\hat{\xi}(x), t, \int\limits_0^t \theta_{T^*}(s)dW^T(s)\big)$. Mit Hilfe der Itô-Formel ergibt sich (wir vernachlässigen zur besseren Übersicht das Argument von U):

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial w}dw\bigg|_{w=\int\limits_0^t \theta_{T^*}(s)dW^T(s)} \\ &\overset{(5.19)}{=} \frac{\theta_{T^*}(t)^2}{2\int\limits_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds}U dt - \frac{\theta_{T^*}(t)}{\left(\int\limits_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right)^{1/2}} dW^T(t). \end{aligned}$$

Die Ableitung nach der quadratischen Variation ist gegeben durch

$$d\left\langle U\right\rangle_t = \frac{\theta_{T^*}(t)^2}{\int\limits_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds}dt.$$

Die Dynamik von $\tilde{p}(\cdot)$ kennen wir bereits, vergleiche (5.14). Als Ableitung nach der quadratischen Variation ergibt sich

$$d\left\langle \tilde{p}\right\rangle_t = \tilde{p}(t)^2\tilde{\delta}(t)^2 dt$$

und schließlich erhalten wir für die Ableitung nach der quadratischen Kovariation von $U\big(\hat{\xi}(x), t, \int\limits_0^t \theta_{T^*}(s)dW^T(s)\big)$ und $\tilde{p}(t)$:

$$d\left\langle U, \tilde{p}\right\rangle_t = -\frac{\theta_{T^*}(t)\tilde{p}(t)\tilde{\delta}(t)}{\left(\int\limits_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right)^{1/2}}dt.$$

Damit haben wir die Vorarbeit für die Itô-Formel abgeschlossen und erhalten:

$$
\begin{aligned}
d\hat{X}(t) &= d\tilde{Q}\left(U\big(\hat{\xi}(x), t, \int_0^t \theta_{T^*}(s)dW^T(s)\big), t, \tilde{p}(t)\right) \\
&= \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} dU\big(\hat{\xi}(x), t, \int_0^t \theta_{T^*}(s)dW^T(s)\big) + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t}dt + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial p}d\tilde{p}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial^2 u} d\langle U\rangle_t + \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial^2 p} d\langle \tilde{p}\rangle_t + 2\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial u \partial p} d\langle U, \tilde{p}\rangle_t\right).
\end{aligned}
$$

Die Drift-Terme lassen wir an dieser Stelle außer Acht und fassen sie als $M(t)$ zusammen. Dann ist

$$d\hat{X}(t) = M(t)dt + N(t)dW^T(t)$$

wobei

$$N(t) := \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial p}\tilde{p}(t)\tilde{\delta}(t) - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u}\frac{\theta_{T^*}(t)}{\left(\int_t^T \theta_{T^*}(s)^2 ds\right)^{1/2}}$$

definiert wurde.
Mit partieller Integration ergibt sich weiter

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right) &= \frac{1}{S_0(t)}d\hat{X}(t) + \hat{X}(t)d\left(\frac{1}{S_0(t)}\right) \\
&= \frac{1}{S_0(t)}\left[\Big(M(t) - \hat{X}(t)r(t)\Big)dt + N(t)dW^T(t)\right] \\
&\overset{(5.13)}{=} \frac{1}{S_0(t)}\left[\Big(M(t) - \hat{X}(t)r(t) + N(t)\delta_T(t)\Big)dt + N(t)dW^*(t)\right] \\
&= \frac{N(t)}{S_0(t)}dW^*(t), \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

wobei wir in der letzten Gleichung ausgenutzt haben, dass $\left(\frac{\hat{X}(t)}{S_0(t)}\right)_t$ ein $\mathbf{P}^*$-Martingal ist.

Der angekündigte Koeffizientenvergleich von (5.20) und (5.10) liefert schlussendlich die Gleichung für die optimale Handlungsstrategie des Investors:

$$\hat{\pi}(t) = \delta_T(t)^{-1} N(t).$$

Der Vollständigkeit wegen seien noch die partiellen Ableitungen von $\tilde{Q}$ nach u bzw. p angegeben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{Q}(u,t,p)}{\partial u} &= -\frac{\partial Q(u,t,p)}{\partial u} \\
&= -p_T(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(y_1,u) g \left[p \exp\left(\left(\int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds \right)^{-1/2} u - \frac{1}{2} \int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds \right) \right] dy_1, \\
\frac{\partial \tilde{Q}(u,t,p)}{\partial p} &= \frac{p_T(t)}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_u^{\infty} \phi_t(y_1,y_2) \\
&\qquad f \left[p \exp\left(\left(\int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds \right)^{-1/2} u - \frac{1}{2} \int_t^T \tilde{\delta}(s)^2 ds \right) \right] d(y_1,y_2),
\end{aligned}$$

wobei wir $f(x) := x g'(x)$ gesetzt haben.

6 Modell-Unsicherheit

In den letzten beiden Kapitel haben wir diverse Anwendungen für die Theorie in Kapitel 2 und 3 beispielhaft bearbeitet. Im abschließenden Kapitel dieser Ausarbeitung wollen wir das bisherige Modell hinsichtlich der Markt-Unsicherheit anpassen: Diese Unsicherheit betrifft die Bewertung der Renditen der Aktien und kann somit als Fehler der subjektiven Einschätzung des Investors angesehen werden. Die Beobachtungen des Investors werden dabei durch bestimmte Gegebenheiten beeinflusst, die wir im Folgenden auf zwei unterschiedliche Weisen modellieren werden.

6.1 Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Im ersten Fall werden wir die Unsicherheit über die Verteilung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$ berücksichtigen, indem wir unser Modell auf eine Familie Λ von realen Wahrscheinlichkeitsmaßen erweitern. Der Investor weiß nicht, welches das *echte* reale Maß $\mathbf{P}$ ist. In unserem Kontext bedeutet dies, dass seine Bewertung der erwarteten Rendite der i-ten Aktie durch eine zufällige Störung $\nu_i(\cdot)$ beeinflusst wird. Wir unterstellen, dass diese Störung eine bekannte maximale Abweichung N_i von der tatsächlich zu erwartenden Aktien-Rendite bewirkt. Das heißt $\nu_i(\cdot)$ ist zwar zufällig, aber beschränkt mit Werten in $[-N_i, N_i]$.

6.1.1 Setting

Die oben angesprochenen Störungen $\nu(\cdot) = (\nu_1(\cdot), \ldots, \nu_n(\cdot))'$ seien $\mathcal{F}$-messbar und beschränkt mit Werten in $\times_{i=1}^{n} [-N_i, N_i]$, das heißt

$$|\nu_i(\cdot)| \leq N_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Sei λ die Menge dieser Störungen.
Für jedes $\nu(\cdot) \in \lambda$ sei $M_\nu(t) := -\int_0^t (\sigma(s)^{-1}\nu(s))' dW(s)$. Dann gilt aufgrund der Integritätsbedingung (2.1) sowie (6.1):

$$\langle M_\nu \rangle_t = \int_0^t \left\| \sigma(s)^{-1}\nu(s) \right\|^2 ds < \infty$$

und folglich impliziert die Novikov-Bedingung, dass

$$\begin{aligned} L_\nu(t) &:= \exp\left(M_\nu(t) - \frac{1}{2} \langle M_\nu \rangle_t \right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t (\sigma(s)^{-1}\nu(s))' dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \sigma(s)^{-1}\nu(s)) \right\|^2 ds \right) \end{aligned}$$

ein $\mathbf{P}$-Martingal ist.
Definieren wir nun durch

$$\left. \frac{d\mathbf{P}_\nu}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}(T)} = L_\nu(T)$$

das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_\nu$ auf $\mathbf{F}$, so liefert der Satz von Girsanov einen Wiener-Prozess

$$W_\nu(t) := W(t) + \int_0^t (\sigma(s)^{-1}\nu(s))' ds, \;\; t \in [0, T]$$

unter $\mathbf{P}_\nu$.
Die Dynamik der risky assets verändert sich unter $\mathbf{P}_\nu$ demgemäß zu:

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t) \left[\mu_i(t)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(t) dW^j(t) \right] \\ &= S_i(t) \left[(\mu_i(t) - \nu_i(t))dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(t) dW_\nu^j(t) \right], \qquad (6.2) \\ S_i(0) &= s_i \in (0, \infty), i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Die Dynamik des Geldmarktkontos bleibt unverändert.
Das Finanzmarktmodell $\mathcal{M}$ aus Kapitel 2 kann somit analog in das neue Modell $\mathcal{M}_\nu$ überführt werden, in welchem nun W_ν anstelle von W die Quelle des Zufalls unter

$\mathbf{P}_\nu$ für die risky assets übernimmt. Die erwarteten Renditenraten $\mu(\cdot)$ der risky assets werden dabei jetzt durch die Störungen $\nu(\cdot)$ beeinflusst bzw. verschoben.

Bei der weiteren Modellierung halten wir uns an das Vorgehen aus Kapitel 3:
Für $\nu \in \lambda$ sei

$$\theta_\nu(t) := \sigma^{-1}(t)\left(\mu(t) - \nu(t) - r(t)\tilde{\mathbf{1}}\right) \tag{6.3}$$

das angepasste risk premium.
Somit können wir für jedes $\nu \in \lambda$ einen Maßwechsel zu einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}^*_\nu$ via

$$Z_\nu(T) := \left.\frac{d\mathbf{P}^*_\nu}{d\mathbf{P}_\nu}\right|_{\mathcal{F}(T)} = \exp\left(-\int_0^T \theta'_\nu(s)dW_\nu(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta_\nu(s)\|^2\, ds\right)$$

durchführen, sodass

$$W^*(t) := W_\nu(t) + \int_0^t \theta_\nu(s)ds,\ t \in [0,T]$$

ein Wiener-Prozess unter $\mathbf{P}^*_\nu$ ist.

6.1.2 Übertragung der Ergebnissse

Wir haben den Finanzmarkt $\mathcal{M}$ aus Kapitel 2 konsistent in den Finanzmarkt $\mathcal{M}_\nu$ überführen können, indem wir das Maß $\mathbf{P}$ -für festgehaltenes $\nu \in \lambda$- durch $\mathbf{P}_\nu$ ersetzt und letztlich einen analogen Maßwechsel zu einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}^*_\nu$ durchgeführt haben. Die Definitionen von C und A werden entsprechend mit dem Erwartungswert zum neuen risikoneutralen Maß $\mathbf{P}^*_\nu$ gegeben, sodass wir letztlich das stochastische Kontrollproblem aus (3.6) analog formulieren können:

$$V_\nu(x) = \inf_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}_\nu\left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right], x \in [A_0, \infty), \tag{6.4}$$

wobei der Erwartungswert zum realen Maß $\mathbf{P}_\nu \in \Lambda$ genommen wird. Die Ausführungen bezüglich dualer Konvexität aus Kapitel 3 behalten somit ihre Gültigkeit, woraufhin wir die zu (3.12) und (3.13) analogen Abbildungen

$$G_\nu(\xi) := \mathbb{E}_\nu\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z_\nu(T)\geq 1\}}\right],\ \xi \in (0,\infty]$$

$$H_\nu(\xi) := \mathbb{E}^*\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\mathbf{1}_{\{\xi Z_\nu(T)\geq 1\}}\right],\ \xi \in (0,\infty]$$

sowie

$$F_\nu(\xi) = G_\nu(\xi) - (C_0 - x - H_\nu(\xi))$$

erhalten.

Entsprechend implizieren Theorem 3.2.2.1 sowie Bemerkung 3.2.2.2(i):

$$V_\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \geq C_0 \\ G_\nu(\infty) = \mathbb{E}_\nu\left[\frac{C-A}{S_0(T)}\right], & \text{falls } x = A_0 \\ F_\nu(\hat{\xi}_\nu(x)), & \text{falls } x \in (A_0, C_0), \end{cases}$$

wobei $\hat{\xi}_\nu(x) := \inf\left\{\xi \in (0,\infty)\,|\,H_\nu(\xi) \geq C_0 - x\right\}$.

Korollar 6.1.2.1:
Sei

$$|\mu_i(t) - r(t)| \leq N_i \textit{ für alle } t \in [0,T],\ i = 1,\ldots,n. \tag{6.5}$$

Mit

$$\tilde{\nu}(\cdot) := \mu(\cdot) - r(\cdot)\tilde{\mathbf{1}}$$

folgt dann:

$$V_{\tilde{\nu}}(x) = (C_0 - x)^+.$$

Beweis: Falls (6.5) gilt, so folgt offensichtlich $\tilde{\nu}(\cdot) \in \lambda$. Zusätzlich gilt $\theta_{\tilde{\nu}}(t) \overset{(6.3)}{\equiv} \tilde{0}$ und somit $Z_{\tilde{\nu}}(t) \equiv 1$. Die Aussage erhalten wir dann aus Korollar 3.2.2.3.

□

Bisher haben wir in diesem Kapitel lediglich die Einwirkung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes untersucht, das die eigentlichen Beurteilungen der Renditen um einen stochastischen aber beschränkten Wert verschiebt. Wir wollen nun die Nicht-Eindeutigkeit dieses Maßes berücksichtigen. Für unsere Risikobewertung interessiert uns gerade das *worst case Szenario:* Während der Investor eine optimale Strategie verfolgt, spielt die Unsicherheit des Marktes genau dagegen und erhöht folglich sein Risiko.[1]
Wir beziehen dies in die Risikobewertung aus (6.4) ein, indem wir das Supremum über alle möglichen Maße $\mathbf{P}_\nu \in \Lambda$ bilden. Nach den obigen Erkenntnissen heißt das gerade, wir bilden das Supremum über alle möglichen Störungen $\nu \in \lambda$. Das können wir auf zwei Weisen machen:

$$(1)\ \underline{V}(x) := \sup_{\nu\in\lambda} \inf_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}_\nu \left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}}{S_0(T)} \right)^+ \right]$$

oder

$$(2)\ \overline{V}(x) := \inf_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(x)} \sup_{\nu\in\lambda} \mathbb{E}_\nu \left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}}{S_0(T)} \right)^+ \right].$$

In diesem Zusammenhang ist folgende Eigenschaft in der Literatur unter der *Max-Min-Ungleichung* (vgl. [BV04, Abschnitt 5.4.1]) bekannt:

Lemma 6.1.2.2:
Für jede beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup_x \inf_y f(x,y) \leq \inf_y \sup_x f(x,y).$$

[1] Dieses Gegeneinander der beiden Parteien 'Investor' und 'Markt' wird in der Literatur unter dem Begriff *Stochastic Game* (z.B. [BV04, Abschnitt 5.4.3] untersucht.

Beweis: Sei $g(x) := \inf_y f(x,y)$. Dann gilt:

$$g(x) \leq f(x,y) \qquad \text{für alle } x, y$$

$$\Rightarrow \sup_x g(x) \leq \sup_x f(x,y) \text{ für alle } y$$

$$\Rightarrow \sup_x \inf_y f(x,y) \leq \sup_x f(x,y) \text{ für alle } y.$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Damit wissen wir bereits, dass $\underline{V}(x) \leq \overline{V}(x)$ gilt. Die entscheidende Frage ist, wann wir Gleichheit haben.[2] Unter der Bedingung (6.5) können wir diese ohne größeren Aufwand beantworten:

Theorem 6.1.2.3:
Unter der Bedingung (6.5) *gilt mit* $\tilde{\nu}(\cdot) = \mu(\cdot) - r(\cdot)$:

$$\underline{V}(x) = \overline{V}(x) = V_{\tilde{\nu}}(x) = (C_0 - x)^+.$$

Beweis: Für $x \geq C_0$ ist die Aussage trivial. Sei $x \in [A_0, C_0)$. Es gilt

$$\underline{V}(x) \geq \inf_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}_{\tilde{\nu}} \left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}}{S_0(T)} \right)^+ \right] = V_{\tilde{\nu}}(x) \overset{\text{Kor. 6.1.2.1}}{=} C_0 - x. \tag{6.6}$$

Definieren wir nun $\tilde{C} := C - (C_0 - x)S_0(T)$. Dann gilt $\tilde{C}_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{\tilde{C}}{S_0(T)} \right] = x$. Außerdem existiert eine Hedging-Strategie $\tilde{\pi}$ für $\tilde{C}$, das heißt es gilt

$$\tilde{C} = X^{\tilde{C}_0, \tilde{\pi}}(T) = X^{x,\tilde{\pi}}(T), \text{ fast sicher}$$

und somit

$$\left(\frac{C - X^{x,\tilde{\pi}}(T)}{S_0(T)} \right)^+ = C_0 - x, \text{ fast sicher.}$$

[2] Dieses Problem gilt als eine grundlegende Fragestellung der Spieltheorie, siehe [Neu28].

Demgemäß erhalten wir

$$\sup_{\nu\in\lambda} \mathbb{E}_\nu \left[\left(\frac{C - X^{x,\tilde{\pi}}(T)}{S_0(T)} \right)^+ \right] = C_0 - x,$$

woraus wir schließlich

$$\overline{V}(x) = \inf_{\pi\in\mathcal{A}(x)} \sup_{\nu\in\lambda} \mathbb{E}_\nu \left[\left(\frac{C - X^{x,\tilde{\pi}}(T)}{S_0(T)} \right)^+ \right] \leq C_0 - x \tag{6.7}$$

folgern können. Das heißt nach (6.6) und (6.7) gilt:

$$\overline{V}(x) \leq C_0 - x \leq \underline{V}(x).$$

Zusammen mit Lemma 6.1.2.2 folgt die Behauptung.

□

Bemerkung:
Aus dem Beweis folgt, dass $(\tilde{\nu}, \tilde{\pi})$ ein Sattelpunkt ist (vgl. Kapitel 5.4.2 in [BV04]), das heißt es gilt:

$$\mathbb{E}_\nu \left[\left(\frac{C - X^{x,\tilde{\pi}}}{S_0(T)} \right)^+ \right] \leq (C_0 - x)^+ \leq \mathbb{E}_{\tilde{\nu}} \left[\left(\frac{C - X^{x,\pi}}{S_0(T)} \right)^+ \right]$$

für alle $\nu(\cdot) \in \lambda,\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$.

Beispiel 6.1.2.4:
Betrachten wir Beispiel 4.1 mit $n = 1$, deterministischen Koeffizienten und $A = C - kS_0(T),\ k > 0$. Es kann hier komplett analog vorgegangen werden, sodass wir die gleiche Risikobewertung wie in (4.10) erhalten; wir müssen dabei lediglich $\theta(\cdot)$ durch $\theta_\nu(\cdot)$ ersetzen:

$$V_\nu(x) = k\Phi \left(\Phi^{-1} \left(\frac{C_0 - x}{k} \right) - \left(\int_0^T \theta_\nu(s)^2 ds \right)^{1/2} \right).$$

Im Fall von (6.5) können wir mit Theorem 6.1.2.3 folgern, dass

$$\underline{V}(x) = \overline{V}(x) = V_{\tilde{\nu}}(x) = (C_0 - x)^+$$

gilt. Im Allgemeinen sehen wir aber auch auf direktem Wege, dass $V_\nu(x)$ für minimales

$$\left| \left(\int_0^T \theta_\nu(s)^2 ds \right)^{1/2} \right|$$

maximal wird. Für konstante Koeffizienten μ, r, σ sowie eine konstante Störung $\nu \in [-N, N]$ ist der Maximierer von $V_\nu(x)$ gegeben durch:

$$\nu^* = \begin{cases} \mu - r, & \text{falls } |\mu - r| \leq N \\ -N, & \text{falls } \mu - r < -N \\ N, & \text{falls } \mu - r > N. \end{cases}$$

6.2 Die Bayes-Methode

Im ersten Teil haben wir die Unsicherheit bezüglich der Renditen der Aktien durch Störungen im Modell dargestellt. Diese Störungen wurden durch die Präsenz einer Familie von zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßen modelliert.
In diesem Abschnitt werden wir die Unsicherheit über die Aktienrenditen mit Hilfe eines anderen Ansatzes berücksichtigen: Die Renditen $\mu(\cdot)$ seien unbeobachtbare Zufallsvariablen $B_1, \ldots, B_n$, welche unabhängig von der treibenden Zufallskraft, dem Wiener-Prozess, sind. Allerdings besitzen diese Zufallsvariablen eine gemeinsame sogenannte *a priori Verteilung* λ. Diese Verteilung muss mit fortlaufenden Beobachtungen der Aktienrenditen durch den Investor ständig angepasst werden.
Solche Modelle bzw. Ansätze, die sich auf eine gemeinsame a priori Verteilung stützen, sind auf *Thomas Bayes* zurückzuführen und werden in der Literatur entsprechend betitelt. Dem interessierten Leser sei für nähere Erläuterungen [Koc13] vorgeschlagen.

6.2.1 Das Modell

Durch die zusätzliche Betrachtung einer Zufallsgröße, die von der treibenden Kraft unabhängig ist, müssen wir den bisherigen Modellaufbau anpassen:

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_0)$ mit einem Wiener-Prozess $W_0(t) = (W_0^1(t), \ldots, W_0^n(t))',\ t \in [0,T]$, sowie einem von W_0 unabhängigen Zufallsvektor $B = (B_1, \ldots, B_n)'$ mit bekannter Verteilung $\lambda(E) = \mathbf{P}_0(E),\ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, welche die Bedingungen

$$\lambda(\tilde{0}) < 1, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|b\| \, \lambda(db) < \infty \tag{6.8}$$

fast sicher erfüllt.
Seien

$$\mathbf{F} = (\mathcal{F}(t))_{t\in[0,T]} := (\sigma\left(W_0(s)|0 \leq s \leq t\right))_{t\in[0,T]}$$

die vom Wiener-Prozess W_0 erzeugte Filtration und

$$\mathbf{G} = (\mathcal{G}(t))_{t\in[0,T]} := (\sigma\left(B, W_0(s)|0 \leq s \leq t\right))_{t\in[0,T]}$$

die von B und W_0 erzeugte Filtration.

Da wir letztlich wieder einen Maßwechsel zum risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß durchführen wollen, müssen wir zunächst etwas Vorarbeit leisten, dafür verwenden wir zusätzlich [Zha98, Kapitel 2] als Literaturquelle:

Da

$$\bar{W}^k(\cdot) := W_0^k(\cdot) - W_0^k(0)$$

für alle $k = 1, \ldots, n$ offensichtlich ein stetiges lokales Martingal bezüglich $(\mathbf{G}, \mathbf{P}_0)$ ist und

$$\left\langle \bar{W}^i, \bar{W}^j \right\rangle_t = t\mathbf{1}_{\{i=j\}}$$

erfüllt, folgt mit dem *Satz von Lévy* ([KS91, Theorem 3.16]), dass $W_0(\cdot)$ ein Wiener-Prozess bezüglich $(\mathbf{G}, \mathbf{P}_0)$ ist.

Lemma 6.2.1.1:

$$M(t) := \exp\left(B'W_0(t) - \frac{\|B\|^2}{2}t\right)$$

ist ein $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{P}_0)$ *-Martingal.*

Beweis: Adaptiertheit ist klar, Integrierbarkeit mit Hilfe von (6.8) ebenso. Die Martingaleigenschaft folgt aus der Gleichung

$$\mathbb{E}_0\left[\exp\left(BW_0(t)\right)\middle|\,\mathcal{G}(s)\right] = \mathbb{E}_0\left[\exp\left(bW_0(t)\right)\right]\big|_{b=B} = \exp\left(\frac{\|B\|^2}{2}t\right),$$

wobei in der letzten Gleichung die Fouriertransformierte der Normalverteilung (vgl. Lemma 4.2) eingesetzt wurde, da $W_0(t)$ unter $\mathbf{P}_0$ $\mathcal{N}(0,t)$-verteilt ist.

□

Definieren wir nun via

$$M(T) =: \left.\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_0}\right|_{\mathcal{G}(T)}$$

das zu $\mathbf{P}_0$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$, so erhalten wir mit dem Satz von Girsanov einen Wiener-Prozess

$$W(t) := W_0(t) - Bt,\ t \in [0,T],$$

unter $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{G}(t)$.
Nach Definition eines Wiener-Prozesses ist $W(\cdot)$ unabhängig von $\mathcal{G}(0)$ und somit von B. Folglich gilt:

$$\mathbf{P}(B \in E) = \mathbf{P}_0(B \in E) = \lambda(E)$$

für alle $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F})$ erfüllen wir somit die oben beschriebenen Voraussetzungen.
Um die Vorgehensweise des spezialisierten Modells hervorzuheben, verzichten wir auf etwas Komplexität, indem wir

$$r(s) \equiv 0 \quad \text{und } \sigma(\cdot) = I_n$$

wählen, wobei I_n die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.
Für die Basisfinanzgüter erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned} S_0(\cdot) &\equiv 1 \\ dS_i(t) &= S_i(t)\left(B_i dt + dW_i(t)\right) \\ &= S_i(t) dW_0^i,\ S_i(0) = s_i > 0 \\ S_i(t) &= s_i \exp\left(W_0^i(t) - \frac{t^2}{2}\right),\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Die restliche Modellierung des Finanzmarktes aus Abschnitt 3.1 bleibt dann konsistent, insbesondere gilt:

$$dX^{x,\pi}(t) = \pi'(t) dW_0(t),\ X^{x,\pi}(0) = x > 0. \tag{6.10}$$

Die beiden Filtrationen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ unterscheiden sich hinsichtlich der Informationen, die sie beinhalten: Wir bezeichnen $\mathbf{F}$ als *Beobachtungsfiltration*, da die Aktienwerte direkt am Markt beobachtet werden können; während $\mathbf{G}$ zusätzliche, nicht-beobachtbare, Informationen bezüglich der Aktienrenditen B enthält und daher *erweiterte Filtration* genannt wird.
Der Investor verfügt allerdings nur über die Informationen in $\mathcal{F}$, das heißt die zulässige Handlungsstrategie $\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$ des Investors ist ein $\mathbf{F}$-adaptierter Prozess. Es sei ausdrücklich erwähnt, dass dies weder auf B noch auf die treibende Kraft des Zufalls, $W(\cdot)$, zutrifft.
Das Risikomaß bzw. das stochastische Kontrollproblem ist schließlich weiterhin durch

$$V(x) = \inf_{\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}\left[(C - X^{x,\pi}(T))^+\right] \tag{6.11}$$

gegeben.

6.2.2 Lösung des Problems

Wir können die Erkenntnisse aus Kapitel 3 analog umsetzen; dazu müssen wir jedoch zunächst das zu $\mathbf{P}$ äquivalente Martingalmaß bestimmen. Gleichung (6.10) zeigt, dass dies gerade $\mathbf{P}_0$ ist, das heißt wir müssen das $(\mathbf{F}, \mathbf{P})$-Martingal

$$Z(t) := \left.\frac{d\mathbf{P}_0}{d\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}(t)}$$

bestimmen.

Lemma 6.2.2.1 (Die Bayes-Regel)**:**
Sei $Z(t)$ wie oben definiert der Dichtequotientenprozess von $\boldsymbol{P}_0$ bezüglich $\boldsymbol{P}$ auf $\boldsymbol{F}$. Dann gilt für alle $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$:

$$\mathbb{E}\left[YZ(T)|\, \mathcal{F}(t)\right] = \mathbb{E}_0\left[Y|\, \mathcal{F}(t)\right] Z(t)$$

$\boldsymbol{P}$- und $\boldsymbol{P}_0$ -fast sicher.

Beweis: Für alle $E \in \mathcal{F}(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_E YZ(T)d\mathbf{P} &= \int_E Y d\mathbf{P}_0 \\
&= \int_E \mathbb{E}_0\left[Y|\, \mathcal{F}(t)\right] d\mathbf{P}_0 \\
&= \int_E \mathbb{E}_0\left[Y|\, \mathcal{F}(t)\right] \left.\frac{d\mathbf{P}_0}{d\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}(t)} d\mathbf{P} \\
&= \int_E \mathbb{E}_0\left[Y|\, \mathcal{F}(t)\right] Z(t)d\mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Betrachten wir nun für das Y im Lemma den Prozess $M(T) = \left.\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_0}\right|_{\mathcal{G}(T)}$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{E}_0\left[M(T)\right|\mathcal{F}(t)]\, Z(t) = \mathbb{E}\left[M(T)Z(T)\right|\mathcal{F}(t)] = 1.$$

Also $Z(t) = \tilde{M}(t)^{-1}$ mit $\tilde{M}(t) = \mathbb{E}_0\left[M(T)\right|\mathcal{F}(t)]$.
Da $M(t)$ nach Lemma 6.2.1.1 ein $(\mathbf{G}, \mathbf{P}_0)$-Martingal ist, folgt mit Hilfe der Turmeigenschaft für den bedingten Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\tilde{M}(t) &= \mathbb{E}_0\left[M(T)\right|\mathcal{F}(t)] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{E}_0\left[M(T)\right|\mathcal{G}(t)]\right|\mathcal{F}(t)] \\
&= \mathbb{E}_0\left[M(t)\right|\mathcal{F}(t)] \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(B'W_0(t) - \frac{\|B\|^2}{2}t\right) d\mathbf{P}_0|_{\mathcal{F}(t)} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad t = 0 \\ \mathcal{L}(t, W_0(t)), & \text{falls} \quad t \in (0, T]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$\mathcal{L}(s, w) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(b'w - \frac{\|b\|^2}{2}s\right) \lambda(db)$$

gesetzt und die Unabhängigkeit von B und $W_0(\cdot)$ unter $\mathbf{P}_0$ sowie die Messbarkeit von $W_0(t)$ bezüglich $\mathcal{F}(t)$ im letzten Schritt ausgenutzt.
Das heißt

$$Z(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad t = 0 \\ \mathcal{L}(t, W_0(t))^{-1}, & \text{falls} \quad t \in (0, T]. \end{cases}$$

Folglich erhalten wir die Funktionen aus (3.12) und (3.13) für $\xi > 0$:

$$G(\xi) = \mathbb{E}\left[(C - A)\mathbf{1}_{\{\mathcal{L}(T, W_0(T)) \leq \xi\}}\right] \tag{6.12}$$

$$H(\xi) = \mathbb{E}_0\left[(C - A)\mathbf{1}_{\{\mathcal{L}(T, W_0(T)) \leq \xi\}}\right], \tag{6.13}$$

Desgleichen ist (6.11) nach Theorem 3.2.2.1 für $x \in [A_0, C_0)$ bestimmt durch

$$V(x) = G(\hat{\xi}(x)) - \hat{\xi}(x)\left((C_0 - x) - H(\hat{\xi}(x))\right). \tag{6.14}$$

Dabei existiert eine zulässige Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot) \in \mathcal{A}(x)$, durch welche das Infimum in (6.11) angenommen wird und das korrespondierende optimale Vermögen

$$\hat{X}(\cdot) \equiv X^{x,\hat{\pi}}(\cdot) = x + \int_0^{\cdot} \hat{\pi}'(s) dW_0(s)$$

herbeiführt. Weiter folgt analog zu (4.1)

$$\hat{X}(\cdot) = \mathbb{E}_0\left[C\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,W_0(T)\geq\hat{\xi}(x)\right\}} + A\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,W_0(T)<\hat{\xi}(x)\right\}} - U\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,W_0(T)=\hat{\xi}(x)\right\}}\middle|\mathcal{F}(\cdot)\right]. \tag{6.15}$$

Dabei ist U wie gehabt eine $\mathcal{F}(T)$-messbare Zufallsvariable, die $U \in [0, C - A]$ fast sicher erfüllt und durch

$$\mathbb{E}_0\left[\left((C - A) - U\right)\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,W_0(T)=\hat{\xi}(x)\right\}}\right] = H(\hat{\xi}(x)) - (C_0 - x)$$

gegeben ist.

6.2.3 Beispiele

Abschließend wollen wir erneut die gewonnenen Erkenntnisse des modifizierten Modells auf die bekannten Anwendungsbeispiele dieser Ausarbeitung anwenden. Dabei greifen wir wie gewohnt auf die Verteilungseigenschaften des Wiener-Prozesses zurück, benötigen an einzelnen Stellen aber auch spezielle Struktur-Aussagen bezüglich der auftretenden Abbildungen bzw. können diese durch die Gegebenheiten des Modells vereinfachen.

Beispiel 6.2.3.1:
Seien wie in Beispiel 4.3 $A = 0$ und $C = g(S(T))$ für eine stetige Funktion

$$g : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow [0, \infty).$$

Da wegen (6.9) $S(T)$ nur von $W_0(T)$ abhängt, können wir auch $C = u(W_0(T))$ für eine passende Funktion $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ schreiben. Dann werden die Funktionen in (6.12) und (6.13) für $\xi > 0$ zu:

$$
\begin{aligned}
G(\xi) &= \mathbb{E}\left[u(W_0(T))\mathbf{1}_{\{\mathcal{L}(T,W_0(T))\leq\xi\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathcal{L}(T,W_0(T))u(W_0(T))\mathbf{1}_{\{\mathcal{L}(T,W_0(T))\leq\xi\}}\right] \\
&= \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)\leq\xi\}} \mathcal{L}(T,z)u(z)\varphi_T(z)dz \\
H(\xi) &= \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)\leq\xi\}} u(z)\varphi_T(z)dz.
\end{aligned}
$$

Dabei ist für $s > 0$ und $w \in \mathbb{R}^n$

$$
\varphi_s(w) := (2\pi s)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|w\|^2}{2s}\right)
$$

die Dichtefunktion der n-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert $\tilde{0}$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = sI_n$ (kurz: $\mathcal{N}_n\left(\tilde{0}, sI_n\right)$-Verteilung), eben die Dichte von $W_0(s)$. Da $W_0(T) - W_0(t) =: \tilde{W}_0(t)$ unabhängig von $\mathcal{F}(t)$ ist, können wir $\hat{X}(t)$ folgendermaßen berechnen:

$$
\begin{aligned}
\hat{X}(t) &= \mathbb{E}_0\left[C\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,W_0(T))>\hat{\xi}(x)\right\}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[u\big(\tilde{W}_0(t)+W_0(t)\big)\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,\tilde{W}_0(t)+W_0(t))>\hat{\xi}(x)\right\}}\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[u\big(\tilde{W}_0(t)+W_0(t)\big)\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,\tilde{W}_0(t)+W_0(t))>\hat{\xi}(x)\right\}}\right] && (6.16) \\
&= \begin{cases} \mathcal{K}(T-t, W_0(t)), & \text{falls } 0 \leq t < T \\ u(W_0(T))\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,W_0(T))>\hat{\xi}(x)\right\}}, & \text{falls } t = T, \end{cases} && (6.17)
\end{aligned}
$$

wobei wir

$$\mathcal{K}(s,w) := \int\limits_{\left\{\tilde{z}+w\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,\tilde{z}+w)>\hat{\xi}(x)\right\}} u(\tilde{z}+w)\varphi_s(\tilde{z})d\tilde{z}$$

$$= \int\limits_{\left\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)>\hat{\xi}(x)\right\}} u(z)\varphi_s(z-w)dz$$

definiert haben.
Für die weiteren Berechnungen benötigen wir folgende Aussage:

Proposition 6.2.3.2:
Die Funktionen $\mathcal{L}(s,w)$ bzw. $\mathcal{K}(s,w)$ erfüllen die Wärmeleitungsgleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}(s,w)}{\partial s} + \frac{1}{2}\Delta\mathcal{L}(s,w) = 0 \ \textit{bzw.}$$

$$\frac{\partial\mathcal{K}(s,w)}{\partial s} - \frac{1}{2}\Delta\mathcal{K}(s,w) = 0, \ (s,w)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,$$

wobei wir mit ΔQ den Laplace-Operator von Q bezeichnen, sodass

$$\Delta Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y_i}$$

gilt.

Beweis: Wir rechnen direkt nach:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(s,w)}{\partial s} = -\frac{1}{2}\left\|b\right\|^2\mathcal{L}(s,w)$$

$$\Delta\mathcal{L}(s,w) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2\mathcal{L}(s,w)$$

$$= \left\|b\right\|^2\mathcal{L}(s,w).$$

Damit erhalten wir die Behauptung für $\mathcal{L}(s,w)$. Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_s(z-w)}{\partial s} &= \varphi_s(z-w)\left(\|z-w\|^2 \frac{2}{(2s)^2} - \frac{n\pi}{2\pi s}\right) \\
&= \varphi_s(z-w)\left(\frac{\|z-w\|^2}{2s^2} - \frac{n}{2s}\right) \\
\frac{\partial \varphi_s(z-w)}{\partial w_i} &= \frac{z_i - w_i}{s}\varphi_s(z-w) \\
\Delta\varphi_s(z-w) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_s(z-w)}{\partial^2 w_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_s(z-w)\left(\frac{(z_i-w_i)^2}{s^2} - \frac{1}{s}\right) \\
&= \varphi_s(z-w)\left(\frac{\|z-w\|^2}{s^2} - \frac{n}{s}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für $\mathcal{K}(s,w)$.

$\square$

Die optimale Handlungsstrategie $\hat{\pi}(\cdot)$ erhalten wir wiederum durch einen Koeffizientenvergleich. Dazu bezeichnen wir mit ∇Q den *Gradienten* von Q und wenden die Itô-Formel auf (6.16) an; wir erhalten für $t \in [0,T)$:

$$\begin{aligned}
d\hat{X}(t) &= d\mathcal{K}(T-t, W_0(t)) \\
&= \left(-\frac{\partial \mathcal{K}(s,w)}{\partial s}dt + \nabla\mathcal{K}(s,w)dW_0(t) + \frac{1}{2}\Delta\mathcal{K}(s,w)dt\right)\Bigg|_{\substack{s=T-t \\ w=W_0(t)}} \\
&= \nabla\mathcal{K}(T-t, W_0(t))dW_0(t),
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung Proposition 6.2.3.2 verwendet haben.
Aus (6.10) folgt aber $d\hat{X}(t) = \hat{\pi}'(t)dW_0(t)$ und somit

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}'(t) &= \nabla\mathcal{K}(T-t, W_0(t)) \\
&= \int\limits_{\left\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)>\hat{\xi}(x)\right\}} u(z)\nabla\varphi_s(z-w)dz\Big|_{\substack{s=T-t\\ w=W_0(t)}} \\
&= \int\limits_{\left\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)>\hat{\xi}(x)\right\}} u(z)\left(\frac{z-w}{s}\right)\varphi_s(w-z)dz\Big|_{\substack{s=T-t\\ w=W_0(t)}} .
\end{aligned}$$

Beispiel 6.2.3.3:
Wie in Beispiel 4.1 setzen wir $A := C - k$ für ein beliebiges $C,\ k > 0$. Die Funktionen aus (6.12) und (6.13) werden damit zu

$$\begin{aligned}
G(\xi) &= k \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)\leq\xi\}} \mathcal{L}(T,z)\varphi_T(z)dz \\
&= k\left(1 - \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)>\xi\}} \mathcal{L}(T,z)\varphi_T(z)dz,\right) \\
H(\xi) &= k \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)\leq\xi\}} \varphi_T(z)dz \\
&= k\left(1 - \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)>\xi\}} \varphi_T(z)dz\right), \qquad (6.18)
\end{aligned}$$

wobei wir benutz haben, dass $\varphi_T(z)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und somit einerseits

$$\int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n\}} \varphi_T(z)dz = 1$$

und andererseits

$$\int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n\}} \mathcal{L}(T,z)\varphi_T(z)dz = \mathbb{E}_0\left[\mathcal{L}(T,W_0(T))\right] = \mathbb{E}_0\left[\tilde{M}(T)\right] = \tilde{M}(0) = 1$$

gilt.
Um die Gleichung $H(\hat{\xi}(x)) = C_0 - x$ zu verifizieren, greifen wir auf die nachfolgende Aussage aus dem Beweis von [Kar97, Satz 5.1] zurück.

Hilfslemma:
Mit den gleichen Notationen wie oben ist die Funktion

$$h(\xi) := \int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)\geq\xi\}} \varphi_T(z)dz,\ \xi > 0,$$

stetig und streng monoton fallend mit $\lim\limits_{\xi\downarrow 0} h(\xi) = 1$ *und* $\lim\limits_{\xi\uparrow\infty} h(\xi) = 0$.
Folglich gilt nach dem Zwischenwertsatz:
Für alle $x \in (0,1)$ *existiert ein eindeutiges* $\xi^*(x) > 0$ *mit* $h(\xi^*(x)) = x$,
sowie äquivalent formuliert:
Für alle $x \in (0,k)$ *existiert ein eindeutiges* $\xi^*(x) > 0$ *mit* $h(\xi^*(x)) = \frac{x}{k}$.

Seien nun $x \in (A_0, C_0) = (C_0 - k, C_0)$ fest und $\bar{x} := x + k - C_0 \in (0,k)$. Dann existiert nach dem Hilfslemma ein eindeutiges $\xi^*(\bar{x}) > 0$, sodass

$$\int\limits_{\{z\in\mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z)\geq\xi^*(\bar{x})\}} \varphi_T(z)dz = \frac{\bar{x}}{k}.$$

Mit (6.18) ist dies äquivalent zu

$$H(\xi^*(\bar{x})) = C_0 - x. \tag{6.19}$$

Das bedeutet

$$\xi^*(\bar{x}) \equiv \hat{\xi}(x)$$

und es gilt:

$$V(x) \overset{(6.14)}{=} G(\xi^*(\bar{x})) = k \left(1 - \int\limits_{\{z \in \mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z) > \xi^*(\bar{x})\}} \mathcal{L}(T,z)\varphi_T(z)dz \right).$$

Wegen (6.19) können wir $U = C - A = k$ setzen (vergleiche Bemerkung 3.2.2.2).
Unter Beachtung der -im obigen Beispiel behandelten- Unabhängigkeit von $\tilde{W}_0(t) := W_0(T) - W_0(t)$ bezüglich $\mathcal{F}(t)$ ergibt sich für $t \in [0,T)$:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t) &\overset{(6.15)}{=} \mathbb{E}_0 \left[C - k\mathbf{1}_{\{\mathcal{L}(T,W_0(T)) \le \xi^*(\bar{x})\}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= \mathbb{E}_0 \left[C - k\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{L}(T,\tilde{W_0}(t)+W_0(t)) \le \xi^*(\bar{x})\right\}} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
&= C(t) - k \int\limits_{\{\tilde{z}+W_0(t) \in \mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,\tilde{z}+W_0(t)) \le \xi^*(\bar{x})\}} \varphi_{T-t}(\tilde{z})d\tilde{z} \\
&= C(t) - k \int\limits_{\{z \in \mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z) \le \xi^*(\bar{x})\}} \varphi_{T-t}(z - W_0(t))dz.
\end{aligned}$$

Der rechte Teil erfüllt offensichtlich ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung, sodass analog zum obigen Beispiel

$$\hat{\pi}(t) = \pi_C(t) - k \int\limits_{\{z \in \mathbb{R}^n;\ \mathcal{L}(T,z) \le \xi^*(\bar{x})\}} \left(\frac{W_0(t) - z}{T - t} \right) \varphi_{T-t}(z - W_0(t))dz$$

für alle $t \in [0,T)$ folgt.

7 Fazit und Ausblick

Wir haben in dieser Ausarbeitung einen wichtigen Zweig der finanzmathematischen Optimierung untersucht. Die Risikobewertung eines Investors ist im Allgemeinen als Gegenpol zur Portfoliooptimierung anzusehen. Unsere Definition der Risikobewertung kann jedoch ebenso als eine spezielle Form der Portfoliooptimierung ohne Konsum angesehen werden, wie in Bemerkung 3.1.4 veranschaulicht wurde.
Wir konnten in einem vollständigen Finanzmarktmodell eine dynamische Risikobewertung mittels eines stochastischen Optimierungsproblems formulieren und für allgemeine Koeffizienten die Existenz von Lösungen für das Problem gewährleisten. Auf dieser Grundlage haben wir diverse Anwendungsbeispiele mit deterministischen bzw. konstanten Koeffizienten durchführen können. Der Einsatz eines externen Regulators als Anforderung an das verfügbare Kapital des Investors erwies sich dabei nicht nur als realitätsnah sondern auch als hilfreich, um die Verbindlichkeit des Investors möglichst allgemein halten zu können.
Darüber hinaus konnten wir die Anwendung auf eine stochastische Zinsrate ausweiten. Dazu haben wir ein Vasicek-Modell verwendet, was jedoch gewisse Schwächen beinhaltet: Die Zinsrate ist normalverteilt und nimmt dementsprechend mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte an. Außerdem ist die Modellierung der Zinsrate durch die Verwendung konstanter Parameter nicht an gegebene Marktdaten kalibrierbar, wodurch das Vasicek-Modell im Allgemeinen als nicht praxistauglich angesehen wird. Allerdings dient es als eine beispielhafte Einführung in Short-Rate-Modelle. So gesehen lässt sich auf der Vorgehensweise aufbauen, wenn man ein realitätsnäheres Modell behandeln möchte. Zum Beispiel könnte man in einem *Extended Vasicek-Modell* zeitabhängige Parameter betrachten, wodurch das Modell kalibrierbar wäre. Um die Normalverteilungseigenschaft zu beheben, bietet sich das *Cox-Ingersoll-Ross Modell* an, in dem die Zinsrate einem Wurzelprozess folgt. Eine geschlossene Bewertungsformel für Zero-Bonds ist in diesem Modell jedoch nicht möglich; entsprechend wäre eine Risikobewertung zunehmend kompliziert und nur annähernd berechenbar.
Zum Abschluss haben wir eine äußere Modell-Unsicherheit hinzugezogen, indem wir zunächst das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß durch eine Familie von Wahr-

scheinlichkeitsmaßen ersetzt haben. Das denkbar schlechteste Szenario für den Investor haben wir dann durch das Supremum über alle diese Maße ermittelt. Anschließend haben wir die Unsicherheit des Modells durch ein Bayes-Modell modelliert, in dem die geschätzten Renditenraten der risky assets unbeobachtbare Zufallsvariablen sind. In beiden Fällen konnten wir die allgemeine Vorgehensweise und Erkenntnisse der ersten Kapitel auf die modifizierten Modelle übertragen und die Existenz von Lösungen gewährleisten. Ebenso konnten wir die vorherigen Beispiele in den Modellen mit Unsicherheit anwenden und explizite Lösungen berechnen.

Im nächsten Schritt könnte man versuchen, Anwendungsbeispiele für stochastische Koeffizienten zu analysieren; insbesondere eine zufällige Volatilität ist für eine Übertragung der Thematik auf die Realität wünschenswert. Dazu müsste man zwangsläufig auf explizite Lösungen verzichten und auf numerische Verfahren zurückgreifen.
Ein weiterer Ansatz ist die Betrachtung einer anderen Risikobewertung: In Bemerkung 3.1.4 haben wir den Vergleich zur Portfoliooptimierung gezogen, indem wir das Innere des Erwartungswertes von unserer Risikobewertung $V(x)$ als Funktion vom Vermögen betrachten, das heißt:

$$K(X(T)) := \left(\frac{C_X(T)}{S_0(T)} \right)^+ .$$

Hier könnte man ggf. weitere Funktionen definieren, welche die Thematik widerspiegeln und gleichzeitig durch den modifizierten Lagrange-Ansatz lösbar sind.
Insgesamt haben wir relativ schwache Voraussetzungen an das Finanzmarktmodell stellen müssen -abgesehen von der Vollständigkeit. Verzichtet man auf diese Annahme, wäre die Martingalmethode zur Lösung des Problems nicht anwendbar; das heißt man müsste mit dynamischer Programmierung arbeiten. Dieser Ansatz wäre ebenfalls ein interessanter nächster Schritt.

Literaturverzeichnis

[ADEH96] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. A characterization of measures of risk. Technical report, Cornell University, 1996. 1

[ADEH99] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999. 1

[Als07] Gerold Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie, Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30.* 2007. 28, 29, 51

[BV04] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. 13, 69, 71

[CH89] John C Cox and Chi-fu Huang. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of economic theory*, 49(1):33–83, 1989. 12

[CK99] Jakša Cvitanić and Ioannis Karatzas. On dynamic measures of risk. *Finance and Stochastics*, 3(4):451–482, 1999. 1

[Fil09] Damir Filipovic. *Term-Structure Models: A Graduate Course.* Springer Finance. Springer Berlin Heidelberg, 2009. 47, 52

[FS08] Hans Föllmer and Alexander Schied. Convex and coherent risk measures, 2008. 1

[Jam89] Farshid Jamshidian. An exact bond option formula. *The Journal of Finance*, 44(1):205–209, 1989. 55

[Kar97] Ioannis Karatzas. Adaptive control of a diffusion to a goal and a parabolic monge-ampere-type equation. *Asian Journal of Mathematics*, 1:295–313, 1997. 83

[KK13] Ralf Korn and Elke Korn. *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: Moderne Methoden der Finanzmathematik*. Springer, 2013. 10

[Kle06] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, volume 1. Springer, 2006. 22

[KLS87] Ioannis Karatzas, John P Lehoczky, and Steven E Shreve. Optimal portfolio and consumption decisions for a ßmall investorön a finite horizon. *SIAM journal on control and optimization*, 25(6):1557–1586, 1987. 12

[Koc13] Karl-Rudolf Koch. *Einführung in die Bayes-Statistik*. Springer, 2013. 72

[Kor97] Ralf Korn. *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment in Continuous Time*. World Scientific, Singapore, 1997. 12

[KS91] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus (Graduate Texts in Mathematics), Second Edition*, volume 113. Springer, 1991. 3, 5, 6, 23, 41, 43, 73

[KS01] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Methods of Mathematical Finance (Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability)*, volume 39. Springer, 2001. 3

[Mer69] Robert C Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics*, pages 247–257, 1969. 12

[Neu28] John von Neumann. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100(1):295–320, 1928. 70

[Pau13] Volkert Paulsen. Handschriftliches skript zur vorlesung stochastische analysis. 2013.

[Pau14] Volkert Paulsen. Handschriftliches skript zur vorlesung höhere finanzmathematik. 2014. 3, 4, 6, 7

[Pli86] Stanley R Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 11(2):371–382, 1986. 12

[SC99] Gennady Spivak and Jakša Cvitanić. Maximizing the probability of a perfect hedge. *Annals of Applied Probability*, pages 1303–1328, 1999. 1

[Sch10] Daniel Schlotmann. Das vasicek-modell, ein short-rate-modell zur beschreibung von rentenmärkten. 2010. 47

[UO30] George E Uhlenbeck and Leonard S Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Physical review*, 36(5):823, 1930. 50

[Vas77] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188, 1977. 49

[Zha98] Xiaoliang Zhao. *Bayesian Adaptive Portfolio Optimization*. PhD thesis, Columbia University, 1998. 73