Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Dynamische Risikomaße

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Erstprüfer:
PD. Dr. Volkert Paulsen
Zweitprüfer:
Prof. Dr. Matthias Löwe

Eingereicht von:
Timm Manuel Joisten

Münster, 5. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In den vergangenen Jahren hat das Management von Risiken in der Finanzbranche und Politik an Aufmerksamkeit gewonnen und die Bewertung des Risikos von Investitionen und insbesondere unternehmerischen Handelns rückt mehr und mehr in den Vordergrund. Hinzukommt, dass in Form von Direktiven wie Basel III oder Solvency 2 diverse regulatorische Anforderungen an Banken und Versicherungsunternehmen gestellt werden. Betroffene Unternehmen müssen beispielsweise gewisse Eigenkapitalquoten erfüllen.

Um diese Aufgabe zu erfüllen, werden Risikomaße benötigt, die das Risiko von Finanzpositionen derart quantifizieren, dass sie einem gegebenen Portfolio genau den Geldbetrag zuweisen, der zur Absicherung benötigt wird. Ein bewährtes Mittel ist die Verwendung von kohärenten und etwas allgemeineren konvexen Risikomaßen. Dabei handelt es sich um einen wichtigen Teil des Risikomanagements, der nach Abschluss der Modellfindung erfolgt. In unserer Situation seien Finanzpostionen durch Zufallsvariablen und stochastische Prozesse beschrieben und wir nehmen an, dass die Modellfindung bereits abgeschlossen und insbesondere die Verteilung der untersuchten Zufallsvariablen beispielsweise anhand historischer Daten bereits bestimmt wurde.

Als eine der ersten Arbeiten auf diesem Gebiet wurden in [1] erstmals statische kohärente Risikomaße axiomatisch als Kapitalanforderung formuliert. In [2] wurden diese auf konvexe Risikomaße verallgemeinert. Dabei unterliegen die dort eingeführten Risikomaße der Einschränkung, dass die Risikobewertung lediglich am Anfang des Investitionszeitraums erfolgt und die danach gewonnenen Informationen nicht berücksichtigt werden. Allerdings ist es naheliegend, auch die Informationen, die während des Investments gewonnen werden, in die Bewertung mit einfließend zu lassen und das Risiko nach und nach neu zu berechnen. Damit können diese Informationen dazu beitragen, die Risikobewertung zu verbessern sowie die dadurch errechneten Rücklagen zu optimieren. Dynamische konvexe und kohärente Risikomaße berücksichtigen die zusätzlichen Informationen und verallgemeinern die Theorie der klassischen statischen Risikomaße. Die Theorie zu dynamischen konvexen und kohärenten Risikomaßen von Zufallsvariablen wurde unter anderem in [3–6] präsentiert. Die Verallgemeinerung auf stochastische Prozesse erfolgte in [7, 8].

Diese Arbeit bietet zum einen eine Einführung in die Theorie zu dynamischen konvexen und kohärenten Risikomaßen für Zufallsvariablen und stochastische Prozesse über ein diskretes Zeitintervall. Zusätzlich stellen wir einen in [9, 10] vorgeschlagenen Ansatz zur Risikobewertung vor. Das darin beschriebene Risikomaß quantifiziert das Risiko nicht im Sinne von Kapitalrücklagen sondern als Wert von Informationen. Es gehört zur Klasse der Abweichungs Risikomaße, die eine Verallgemeinerung der Standardabweichung als Risikomaß darstellen. Diese werden unter anderem in [11, 12] behandelt.

Die Gliederung der Arbeit sieht wie folgt aus: In Kapitel 2 konstruieren wir für jeden Zeitpunkt t bedingte konvexe und kohärente Risikomaße ρ_t axiomatisch als $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariablen, wenn die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\ldots}$ die über den Zeithorizont hinweg veröffentlichten Informationen beschreibt. Ein wichtiges Ergebnis ist die Darstellung von oben stetiger Risikomaße als schlimmsten erwarteten Verlust über eine Klasse an individuell gewichteten Risikomodellen. Die im Anschluss daran als $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\ldots}$-adaptierte Folge $(\rho_t)_{t=0,1,\ldots}$ von bedingten Risikomaßen eingeführten dynamischen Risikomaße untersuchen wir hinsichtlich Zeitkonsistenz und liefern eine Charakterisierung dieser Eigenschaft über gewisse Supermartingal-Eigenschaften. Dazu dienen hauptsächlich [4–6, 13] als Grundlage.

Die Verallgemeinerung der zuvor konstruierten dynamischen konvexen und kohärenten Risikomaße auf die Bewertung von beschränkten stochastischen Prozessen erfolgt in Kapitel 3. Dabei gehen wir analog zum vorherigen Kapitel vor und machen uns unter anderem dessen Ergebnisse zu Nutze, indem wir eine passende Produkraumstruktur verwenden. Wichtige Ergebnisse sind erneut die Darstellung als schlimmsten erwarteten Verlust und eine Charakterisierung der Zeitkonsistenz.

Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem zuvor beschriebenen Ansatz zur Risikobewertung als Wert von Information. Wir beginnen mit der Einführung des Value-of-Information Risikomaßes und dessen Konkretisierung anhand eines einfachen Konsumproblems. Dabei gehen wir auf den Zusammenhang mit statischen kohärenten Risikomaßen ein und führen zusätzlich den Begriff des Abweichungs-Risikomaßes ein. Im zweiten Teil verallgemeinern wir die vorherigen Ergebnisse auf Auszahlungsströme und betrachten wiederum ein mehrstufiges Konsumproblem. Im dritten Teil konstruieren wir auf Basis des zuvor betrachteten Konsumproblems ein bedingtes Risikomaß im Sinne von Kapitel 2 sowie 3 und werden versuchen, die darin formulierten Eigenschaften dynamischer konvexer und kohärenter Risikomaße nachzuweisen.

2 Dynamische Risikomaße für Zufallsvariablen

In diesem Kapitel führen wir die Theorie der dynamischen Risikobewertung von Finanzpositionen mit einmaliger Auszahlung, die wir als Zufallsvariablen modellieren, ein. Dabei verstehen wir Risikomaße als Kapitalanforderung zur Absicherung des Investments, die beispielsweise von einer Aufsichtsbehörde an den Investor gestellt wird. Somit gibt das Risikomaß den kleinsten risikolosen Betrag an, der dem Investment hinzugefügt werden muss, um es akzeptabel zu machen. Die genaue Definition von akzeptabel ist dabei meist eine subjektive Entscheidung des Investors oder der Aufsichtsbehörde. Im Gegensatz zur klassischen Theorie statischer Risikomaße, wie sie in [1] eingeführt wurde, wird hier die Risikobewertung als stochastischer Prozess betrachtet, indem über ein diskretes Zeitintervall zu jedem beliebigen Zeitpunkt das Risiko quantifiziert wird.

Wir beginnen die Einführung in die Theorie mit der Definition von bedingten konvexen und kohärenten Risikomaßen. Diese Maße weisen zu einem festen Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots$ einer Zufallsvariable ein Risiko zu. Es handelt sich dabei um klassische statische Risikomaße, da das Risiko nur zu einem Zeitpunkt bestimmt wird, mit dem Unterschied, dass die Informationen, die zum Bewertungszeitpunkt bekannt sind, berücksichtigt werden. Die zentrale Aussage in diesem Abschnitt des Kapitels wird die Herleitung einer robusten Darstellung für von oben stetige Risikomaße sein.

Im zweiten Abschnitt erfolgt die Definition von dynamischen Risikomaßen, als Familie von bedingten Risikomaßen. Dabei klären wir die Frage, inwiefern die Risikobewertung an konsekutiven Zeitpunkten zusammenhängt. Dazu führen wir den Begriff Zeitkonsistenz ein und leiten im Anschluss eine Charakterisierung zeitkonsistenter dynamischer Risikomaße her.

Als Literaturgrundlage dienen in diesem Kapitel hauptsächlich die Arbeiten [4, 5] und [6] wird ergänzend verwendet.

2.1 Bedingte konvexe und kohärente Risikomaße

Wir führen in diesem Abschnitt bedingte konvexe und kohärente Risikomaße auf zwei verschiedene Arten ein. Wir wählen zunächst einen axiomatischen Ansatz. Dazu definieren wir diese für jeden Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots$ als $\mathcal{F}_t$-messbare Abbildung, die bestimmte ökonomisch motivierte Eigenschaften erfüllt. Unter anderem fordern wir Cash-Invarianz, Konvexität und Monotonie sowie Homogenität. Letztere Eigenschaft erfüllen lediglich kohärente Risikomaße, die damit eine Teilmenge der konvexen Risikomaße bilden.

Alternativ lassen sich bedingte Risikomaße aus Akzeptanzmengen ableiten. Diese Mengen enthalten zum untersuchten Zeitpunkt genau diejenigen Finanzpositionen, die vom Investor als akzeptabel eingestuft werden. Werden dabei gewissen Axiome erfüllt, lassen sich sowohl bedingte konvexe als auch kohärente Risikomaße herleiten. Umgekehrt bilden genau die Finanzpositionen, denen das Risikomaß ein Risiko kleiner oder gleich Null zuweist, eine Akzeptanzmenge.

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir einsehen, dass sich konvexe Risikomaße unter leichten Stetigkeitsannahmen in eine allgemeine Form als größten erwarteten Verlust über eine gewichtete Menge an Wahrscheinlichkeitsmaßen bringen lassen. Diese bezeichnen wir als robuste Darstellung.

Wir betrachten im Folgenden einen diskreten Zeithorizont mit Endzeitpunkt $T \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Die Risikobewertung erfolgt auf dem Zeitintervall

- $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$, falls $T < \infty$,
- $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, falls $T = \infty$.

Der zugrunde liegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum ist gegeben durch $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$, wobei $\mathcal{F}_t$ die zur Zeit $t \in \mathbb{T}$ verfügbaren Informationen modelliert und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ gilt. Wir definieren $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ für $T < \infty$ und $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t\right)$ für $T = \infty$.

Wir betrachten Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $X(\omega)$ den diskontierten Wert einer Finanzposition am Ende des Investitionszeitraums bei Eintritt von $\omega \in \Omega$ bezeichne. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf die Risikobewertung von $\mathbb{P}$-fast sicher beschränkten Zufallsvariablen aus $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und wir bezeichnen mit $L_t^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ die Menge aller $\mathcal{F}_t$-messbaren und $\mathbb{P}$-fast sicher beschränkten Zufallsvariablen. Die Erweiterung der Theorie auf beschränkte stochastische Prozesse erfolgt in Kapitel 3.

2.1.1 Axiomatische Konstruktion und Akzeptanzmengen

Wir definieren zunächst bedingte konvexe Risikomaße anhand einiger Axiome, die ein Risikomaß aus ökonomischer Sicht sinnvollerweise erfüllen sollte. Im Anschluss werden wir besagte Axiome kurz erläutern und ihre Relevanz bei der Risikobewertung aufzeigen.

Heuristisch formuliert weist ein bedingtes Risikomaß ρ_t einer Auszahlung X einen $\mathcal{F}_t$-messbaren Wert $\rho_t(X)$ zu, der das Risiko dieser Position unter Berücksichtigung der verfügbaren Informationen $\mathcal{F}_t$ quantifiziert.

Definition 2.1 Für ein $t \in \mathbb{T}$ heißt eine Abbildung $\rho_t : L^\infty \to L_t^\infty$ bedingtes konvexes Risikomaß, falls es für alle $X, Y \in L^\infty$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Bedingte Cash-Invarianz: Für alle $m \in L_t^\infty$ gilt

$$\rho_t(X + m) = \rho_t(X) - m.$$

(ii) Monotonie: Aus $X \leq Y$ folgt $\rho_t(X) \geq \rho_t(Y)$.

(iii) Bedingte Konvexität: Für alle $\lambda \in L_t^\infty$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y).$$

(iv) Normalisierung: $\rho_t(0) = 0$.

Ein bedingtes konvexes Risikomaß heißt bedingtes kohärentes Risikomaß, falls zusätzlich folgende Eigenschaft gilt:

(v) Bedingte positive Homogenität: Für alle $\lambda \in L_t^\infty$, $\lambda > 0$ gilt

$$\rho_t(\lambda X) = \lambda\rho_t(X).$$

Anschaulich kann der Wert $\rho_t(X)$ als Kapitalreserve verstanden werden, die zur Absicherung einer Option oder eines Portfolios benötigt wird. Somit besagt Cash-Invarianz, dass das Hinzufügen einer risikolosen Option $m \in L_t^\infty$, den zur Absicherung von X benötigten Betrag um m verringert. Monotonie bedeutet indes, dass Finanzpostionen mit größerer Auszahlung ein geringeres Risiko zugeordnet wird. Zum Verständnis der dritten Eigenschaft nehme man an, dass einem Investor zu Beginn eine bestimmte Menge an Kapital zur Verfügung stehe. Diversifiziert er sein Investment, d.h. er investiert einen Anteil λ in X und den Rest in Y, so übersteigt sein Risiko nicht die Summe der Einzelrisiken. Damit ist die Feststellung, dass Diversifizierung das Risiko nicht erhöhen sollte, in die Definition des Risikomaßes mit eingeflossen.

Nachdem wir bedingte Risikomaße als Abbildung nach L_t^∞ eingeführt haben, widmen wir uns nun der Definition von Akzeptanzmengen. Diese enthalten alle Finanzpositionen beziehungsweise Zufallsvariablen aus L^∞, für die kein weiteres Kapital zur Absicherung benötigt wird und die somit vom Investor akzeptiert werden. Wir beginnen mit der Konstruktion als Menge von Zufallsvariablen $X \in L^\infty$, für die $\rho_t(X) \leq 0$ gilt. Allerdings kann auch umgekehrt eine Menge von akzeptablen Zufallsvariablen gewählt werden und damit ein Risikomaß konstruiert werden. Wir werden im Folgenden auf beide Ansätze eingehen.

Definition 2.2 Für $t \in \mathbb{T}$ und ein Risikomaß ρ_t definieren wir die zugehörige Akzeptanzmenge durch

$$\mathcal{A}_t = \{X \in L^\infty \mid \rho_t(X) \leq 0\}.$$

Die nachfolgende Proposition liefert einige nützliche Eigenschaften von Akzeptanzmengen und wir zeigen zudem, wie ein bedingtes konvexes beziehungsweise kohärentes Risikomaß mithilfe einer zuvor gewählten Akzeptanzmenge konstruiert werden kann.

Proposition 2.3 *Falls ρ_t ein bedingtes konvexes Risikomaß ist, so ist die damit assoziierte Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_t$*

1. *bedingt konvex, d.h. für alle $X, Y \in \mathcal{A}_t$ und $\lambda \in L_t^\infty$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt*

$$\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{A}_t,$$

2. *monoton, d.h. aus $Y \in \mathcal{A}_t$ und $X \geq Y$ folgt $X \in \mathcal{A}_t$,*
3. *und erfüllt* $\operatorname{ess\,inf} \{X \in L_t^\infty \mid X \in \mathcal{A}_t\} = 0$ *sowie* $0 \in \mathcal{A}_t$.

Ist ρ_t ein bedingtes kohärentes Risikomaß, so ist $\mathcal{A}_t$ zusätzlich ein

4. *bedingter positiver Kegel, d.h. für alle $X \in \mathcal{A}_t$ und $\lambda \in L_t^\infty$, $\lambda \geq 0$ gilt*

$$\lambda X \in \mathcal{A}_t.$$

Erfüllt umgekehrt eine Menge $\mathcal{A} \subset L^\infty$ die Eigenschaften 1-3, beziehungsweise 1-4, so wird durch

$$\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf}\{Y \in L_t^\infty \mid X + Y \in \mathcal{A}\}, \quad X \in L^\infty \tag{2.1}$$

ein bedingtes konvexes, beziehungsweise kohärentes, Risikomaß definiert.

Beweis. (Siehe Proposition 3 in [6] und Propositionen 2.26 und 2.27 in [12]) Es sei zunächst ρ_t ein bedingtes konvexes Risikomaß und wir weisen nach, dass $\mathcal{A}_t$ die Eigenschaften 1. − 3. erfüllt. Für $X, Y \in \mathcal{A}_t$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt wegen der bedingten Konvexität $\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y) \leq 0$ und somit die 1. Eigenschaft. Die 2. folgt ebenso sofort aus der Monotonie. Wegen der Cash-Invarianz gilt $\operatorname{ess\,inf}\{X \in L_t^\infty \mid X \in \mathcal{A}_t\} = 0$ und die Normalisierung $\rho_t(0) = 0$ liefert $0 \in \mathcal{A}_t$. Ist ρ_t zusätzlich positiv homogen, d.h. ein bedingtes kohärentes Risikomaß, so ist $\rho_t(\lambda X) = \lambda\rho_t(X) \leq 0$ für $X \in \mathcal{A}_t$ und $\lambda > 0$. Damit gilt auch die 4. Eigenschaft.

Nun sei umgekehrt $\mathcal{A} \subset L^\infty$ eine gewählte Menge, die Eigenschaft 1.-3. erfüllt. Dann gilt für $m \in L_t^\infty$

$$\begin{aligned}
\rho_t(X+m) &= \operatorname{ess\,inf}\{Y \in L_t^\infty \mid X + m + Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \operatorname{ess\,inf}\{Y - m \in L_t^\infty \mid X + Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \rho_t(X) - m.
\end{aligned}$$

Montonie folgt ebenso sofort. Weiterhin ist $\rho_t(0) = \operatorname{ess\,inf}\{Y \in L_t^\infty \mid Y \in \mathcal{A}\} = 0$ gemäß der 3. Eigenschaft. Bevor wir die bedingte Konvexität zeigen können, halten wir die folgenden Aussage fest (siehe Lemma 4 in [6]): Falls $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset L^\infty$ und $\lambda, \tilde{\lambda} \in L_t^\infty$, $\lambda, \tilde{\lambda} \geq 0$, so gilt

$$\operatorname{ess\,sup}\{\lambda X + \tilde{\lambda} Y \mid X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\} = \lambda \operatorname{ess\,sup}\mathcal{X} + \tilde{\lambda}\operatorname{ess\,sup}\mathcal{Y},$$

wobei hier $0 \cdot (+\infty) = 0$ als Konvention gilt. Damit können wir nun die bedingte Konvexität folgern. Seien nun $X, \tilde{X} \in L^\infty$ und $\lambda \in L_t^\infty,\ 0 \leq \lambda \leq 1$. Da $\mathcal{A}$ bedingt konvex ist, ist $\lambda X + (1-\lambda)\tilde{X} + \lambda Y + (1-\lambda)\tilde{Y} \in \mathcal{A}$ für $Y, \tilde{Y} \in L_t^\infty$ mit $X + Y, \tilde{X} + \tilde{Y} \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)\tilde{X}) = &\ \operatorname{ess\,inf}\{Y \in L_t^\infty \mid Y + \lambda X + (1-\lambda)\tilde{X} \in \mathcal{A}\} \\
\leq &\ \operatorname{ess\,inf}\{\lambda Z + (1-\lambda)\tilde{Z} \mid Z, \tilde{Z} \in L_t^\infty, Z + X, \tilde{Z} + \tilde{X} \in \mathcal{A}\} \\
= &\ \lambda \operatorname{ess\,inf}\{Z \in L_t^\infty \mid Z + X \in \mathcal{A}\} \\
&\ + (1-\lambda)\operatorname{ess\,inf}\{\tilde{Z} \in L_t^\infty \mid \tilde{Z} + \tilde{X} \in \mathcal{A}\}
\end{aligned}$$

$$= \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(\tilde{X}).$$

Damit ist ρ_t ein bedingtes konvexes Risikomaß. Erfüllt $\mathcal{A}$ zusätzlich die 4. Eigenschaft, so ist

$$\begin{aligned}\rho_t(\lambda X) &= \operatorname{ess\,inf}\{Y \in L_t^\infty \mid Y + \lambda X \in \mathcal{A}\}\\ &= \operatorname{ess\,inf}\{\lambda Y \in L_t^\infty \mid \lambda(Y + X) \in \mathcal{A}\}\\ &= \lambda\rho_t(X)\end{aligned}$$

für $X \in L^\infty$ und $\lambda \in L_t^\infty,\ \lambda > 0$. □

Die Darstellung von ρ_t mittels Akzeptanzmenge in Gleichung (2.1) motiviert die bereits zuvor erwähnte Interpretation des Risikomaßes als Kapitalreserve zur Absicherung von Finanzpositionen.

2.1.2 Ausgewählte Beispiele

In diesem Abschnitt liefern wir zwei Beispiele für die zuvor eingeführten konvexen und kohärenten Risikomaße. Zunächst wählen wir als einfaches Beispiel eines kohärenten Risikomaßes den bedingten Erwartungswert von $X \in L^\infty$. Hierbei lassen sich die geforderten Eigenschaften von bedingten kohärenten Risikomaßen leicht einsehen.

Das zweite Beispiel betrachtet das Investitionsverhalten eines Marktteilnehmers anhand seiner Nutzenfunktion und wir definieren das Risikomaß als bedingten erwarteten Nutzen. Hier steht zunächst der Nachweis der in der Definition von konvexen Risikomaßen geforderten Eigenschaften im Vordergrund. Wir werden am Ende des Kapitels dieses Beispiel erneut aufgreifen und genauer untersuchen. Insbesondere wird dann die übliche Bezeichnung als entropisches Risikomaß deutlich.

Beispiel 2.4 (Die bedingte Erwartung als Risikomaß) Sei $X \in L^\infty$ gegeben. Dann definieren wir das Risikomaß durch

$$\rho_t(X) = \mathbb{E}[-X \mid \mathcal{F}_t], \quad t \in T.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass ρ_t für jedes $t \in \mathbb{T}$ ein bedingtes konvexes und insbesondere auch ein kohärentes Risikomaß ist.

Beispiel 2.5 (Das entropische Risikomaß) Wir nehmen nun an, dass der Investor seine Entscheidungen zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ anhand einer exponentiellen Nutzenfunktion

$$u_t(x) = 1 - e^{-\gamma_t x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

trifft. Hierbei ist γ_t für alle $t \in \mathbb{T}$ eine beschränkte und $\mathcal{F}_t$-messbare Funktion, die

$$\gamma_t > 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s. und } \frac{1}{-\gamma_t} \in L_t^\infty$$

erfüllt. Um die zur Verfügung stehenden Informationen zu berücksichtigen, betrachten wir die bedingte erwartete Nutzenfunktion

$$U_t(X) = \mathbb{E}\left[1 - e^{-\gamma_t X} | \mathcal{F}_t\right], \quad X \in L^\infty, \ t \in \mathbb{T}.$$

Wie bereits zuvor erwähnt, sollen diese Funktionen das Entscheidungsverhalten eines Investors beschreiben. Die Idee ist, anhand der oben definierten Funktion eine Menge an akzeptablen Zufallsvariablen zu konstruieren und mithilfe von Proposition 2.3 das zugehörige bedingte Risikomaß abzuleiten. Aus Sicht des Investors sind genau diejenigen Finanzpositionen akzeptabel, deren Nutzen zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ größer ist als nicht zu investieren. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= \{X \in L^\infty \mid U_t(X) \geq U_t(0)\} \\ &= \{X \in L^\infty \mid \mathbb{E}\left[e^{-\gamma_t X} | \mathcal{F}_t\right] \leq 1\}. \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht nachvollziehen, dass die auf diese Weise definierte Akzeptanzmenge die Eigenschaften 1-3 aus Proposition 2.3 erfüllt. Somit ist für alle $t \in \mathbb{T}$ ein bedingtes konvexes Risikomaß durch

$$\begin{aligned} \rho_t^{ent}(X) &= \operatorname{ess\,inf} \{Y \in L_t^\infty \mid X + Y \in \mathcal{A}_t\} \\ &= \operatorname{ess\,inf} \{Y \in L_t^\infty \mid \mathbb{E}\left[e^{-\gamma_t X} \mid \mathcal{F}_t\right] \leq e^{\gamma_t Y}\} \\ &= \frac{1}{\gamma_t} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma_t X} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad X \in L^\infty \end{aligned} \tag{2.2}$$

definiert. Üblicherweise wird dieses Risikomaß als bedingtes entropisches Risikomaß bezeichnet und wir werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels erneut darauf zurückkommen.

2.1.3 Darstellungssatz für bedingte Risikomaße

Ziel dieses Abschnitts soll sein eine robuste Darstellung für bedingte konvexe und kohärente Risikomaße zu finden. Bedingte kohärente Risikomaße lassen sich unter einer schwachen Stetigkeitsannahme als schlimmsten bedingten erwarteten Verlust über eine Menge an Wahrscheinlichkeitsmaßen darstellen. Im Fall von konvexen Risikomaßen wird dieser Wert zusätzlich durch einen vom Modell beziehungsweise Wahrscheinlichkeitsmaß abhängenden Strafterm korrigiert. Dabei orientieren wir uns an analogen Erkenntnissen für Risikomaße im statischen Setting.

Bevor wir uns der Charakterisierung der robusten Darstellung widmen, werden wir einige hilfreiche Notationen einführen:

1. $\mathcal{M}(\mathbb{P}) = \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) : Q \ll \mathbb{P}\}$.
2. $\mathcal{M}^e(\mathbb{P}) = \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) : Q \sim \mathbb{P}\}$.
3. $\mathcal{Q}_t = \{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P}) : Q = \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{F}_t\}, \quad t \in \mathbb{T}$.
4. $\mathcal{P}_t = \{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P}) : Q \sim \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{F}_t\}, \quad t \in \mathbb{T}$.

Den bereits erwähnten Strafterm definieren wir wie folgt:

Definition 2.6 Sei $t \in \mathbb{T}$. Eine Abbildung $\alpha_t : \mathcal{M}(\mathbb{P}) \to L_t^\infty$, die

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})} (-\alpha_t(Q)) = 0 \tag{2.3}$$

erfüllt, heißt Penalty-Funktion. Weiterhin bezeichnen wir die Penalty-Funktion, die durch

$$\alpha_t^{\min}(Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t], \quad Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P}), t \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

gegeben ist, als minimale Penalty-Funktion.

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass eine Abbildung $f : L^\infty \to L_t^\infty$, definiert durch

$$f(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(Q)\right), \quad X \in L^\infty$$

für eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}(\mathbb{P})$ und eine beliebige Penalty-Funktion, ein bedingtes konvexes Risikomaß ist. Cash-Invarianz, Monotonie und Konvexität folgen durch Einsetzen und die Normalisierung mit Gleichung (2.3). Insbesondere lässt sich jedes von oben stetige bedingte konvexe Risikomaß auf diese Weise darstellen.

Die Idee ist, eine Menge $\mathcal{P}$ an Wahrscheinlichkeitsmaßen zu wählen, die die Realität hinreichend genau beschreibt und die Unsicherheit eines Investors über die genaue Verteilung der Zustände widerspiegelt (S. 4, [**?**]). Wir verstehen die Elemente aus $\mathcal{P}$ als mögliche Wahrscheinlichkeitsmodelle, die mehr oder weniger stark berücksichtigt werden, abhängig von dem Wert von $\alpha_t(Q)$.

Bevor wir dies beweisen können, halten wir eine Erkenntnis fest, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Nutzen sein wird und insbesondere im Beweis des Hauptresultats dieses Abschnitts zum Einsatz kommt.

Lemma 2.7 *Für $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ und $0 \leq u \leq t$ gilt*

$$\mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)|\mathcal{F}_u] = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_u]$$

und insbesondere

$$\mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] = \sup_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q[-X]$$

Beweis. Siehe Lemma 1.3 in [4]. □

Nach diesen Vorarbeiten kann nun das Hauptresultat dieses Abschnitts formuliert werden:

Theorem 2.8 *Sei $t \in \mathbb{T}$. Für ein bedingtes konvexes Risikomaß ρ_t sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) Es existiert eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_t$ und eine Penalty-Funktion α_t, sodass sich ρ_t durch

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(Q)\right), \quad X \in L^\infty$$

darstellen lässt.

(ii) ρ_t lässt sich mit minimaler Penalty-Funktion auf $\mathcal{Q}_t$ darstellen:

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right), \quad X \in L^\infty. \tag{2.5}$$

(iii) ρ_t lässt sich mit minimaler Penalty-Funktion auf $\mathcal{P}_t$ darstellen:

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right), \quad X \in L^\infty.$$

(iv) ρ_t *erfüllt die Fatou-Eigenschaft, d.h. für eine beschränkte Folge* (X_n)*, die* $\mathbb{P}$*-fast sicher gegen* X *konvergiert, gilt*

$$\rho_t(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho_t(X_n), \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

(v) ρ_t *ist stetig von oben, d.h. für jede Folge* $(X_n) \subseteq L^\infty$ *und jedes* $X \in L^\infty$ *gilt*

$$X_n \searrow X \ \mathbb{P}\text{-fast sicher} \implies \rho_t(X_n) \nearrow \rho_t(X) \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis. (Siehe Theorem 2.3 in [5], Theorem 1.4 in [4] und Lemma 4.20 aus [2])

(ii)⇒(iii): Aus der Cash-Invarianz von ρ_t folgt, dass

$$\tilde{X} = \rho_t(X) + X \in \mathcal{A}_t, \quad t \in \mathbb{T}$$

gilt, falls $X \in \mathcal{A}_t$ ist. Dann können wir aus der Definition von $\alpha_t^{\min}$ in Gleichung (2.4) für $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ folgern:

$$\alpha_t^{\min}(Q) \geq \mathbb{E}^Q\left[-\tilde{X} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \rho_t(X).$$

Diese Erkenntnis und $\mathcal{Q}_t \subset \mathcal{P}_t$ für alle $t \in \mathbb{T}$ liefern

$$\rho_t(X) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{P}_t} \left(\mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_t^{\min}(Q)\right) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_t^{\min}(Q)\right).$$

Dann folgt wegen der Gleichheit in (2.5) die Behauptung.

(iii)⇒(i): Diese Aussage folgt sofort.

(i)⇒(iv): Es sei eine beschränkte Folge (X_n) gegeben, die $\mathbb{P}$-fast sicher gegen X konvergiert. Damit konvergiert sie auch Q-fast sicher für $Q \in \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_t$ und wegen der Beschränktheit kann mittels des Satzes der majorisierten Konvergenz gefolgert werden, dass

$$\mathbb{E}^Q[X_n|\mathcal{F}_t] \to \mathbb{E}^Q[X|\mathcal{F}_t], \quad Q \in \mathcal{P}$$

gilt. Damit kann die folgende Ungleichung gezeigt werden:

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{P}} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(Q)\right)\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{P}} \left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^Q[-X_n|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(Q)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{P}} \left(\mathbb{E}^Q[-X_n|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(Q)\right)$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \rho_t(X_n) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

(iv)⇒(v): Aus der Monotonie von ρ_t folgt sofort für eine Folge $(X_n) \subseteq L^\infty$ mit $X_n \searrow X$ $\mathbb{P}$-fast sicher die Ungleichung $\limsup_{n\to\infty} \rho_t(X_n) \leq \rho_t(X)$. Auf der anderen Seite folgt aus der Fatou-Eigenschaft, dass $\rho_t(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho_t(X_n)$ gilt. Zusammen liefern beide Ungleichungen die Existenz des Limes $\lim_{n\to\infty} \rho_t(X_n) = \rho_t(X)$ und wegen der Monotonie folgt die Behauptung.

(v)⇒(ii): Im nachfolgenden Beweisabschnitt nutzen wir Ergebnisse über die Darstellbarkeit von statischen Risikomaßen. Die Theorie im statischen Fall ist sehr umfänglich und soll nicht Bestandteil dieser Arbeit sein. Eine Einführung in statische Risikomaße kann beispielsweise in [2] gefunden werden.

Wir werden nun zunächst zeigen, dass die Ungleichung " $\geq$ " gilt. Dazu haben wir in Beweisschritt (ii)⇒(iii) bereits gezeigt, dass für $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$

$$\alpha_t^{\min}(Q) \geq \mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \rho_t(X)$$

gilt. Dies liefert insbesondere die gesuchte Ungleichung

$$\rho_t(X) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right).$$

Im zweiten Schritt folgern wir die Ungleichung

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\rho_t(X)\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right)\right]$$

und können damit die Behauptung folgern. Um dies zu erreichen betrachten wir eine Abbildung $\rho^{\mathbb{P}} : L^\infty \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\rho^{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\rho_t(X)]$$

für $X \in L^\infty$ und festes $t \in \mathbb{T}$. Hierbei handelt es sich um ein von oben stetiges statisches konvexes Risikomaß und Theorem 4.31 in [2] liefert uns eine analoge robuste

Darstellung

$$\rho^{\mathbb{P}}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})} \left(\mathbb{E}^Q[-X] - \alpha(Q) \right), \quad X \in L^\infty \tag{2.6}$$

mit Penalty-Funktion

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in L^\infty,\, \rho^{\mathbb{P}}(X) \le 0} \mathbb{E}^Q[-X].$$

Bevor wir abschließend die Ungleichung folgern können, müssen wir einige kurze Folgerungen festhalten. Zunächst einmal gilt für $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$: $Q \in \mathcal{Q}_t$, falls $\alpha(Q) < \infty$. Dies lässt sich zeigen, indem wir ein $A \in \mathcal{F}_t$ und ein $\lambda \neq 0$ betrachten und folgern:

$$-\lambda\, \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\rho_t(\lambda \mathbb{1}_A)] = \rho^{\mathbb{P}}(\lambda \mathbb{1}_A) \overset{(2.6)}{\ge} \mathbb{E}^Q[-\lambda \mathbb{1}_A] - \alpha(Q).$$

Daraus folgt , falls $\alpha(Q) < \infty$ ist,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\le Q(A), \quad \text{für alle } \lambda > 0, \\ \mathbb{P}(A) &\ge Q(A), \quad \text{für alle } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir $\mathbb{P} = Q$ auf $\mathcal{F}_t$ gezeigt, falls $\alpha(Q) < \infty$ gilt. Mit Lemma 2.7 und der Erkenntnis, dass $\rho^{\mathbb{P}}(Y) \le 0$ für $Y \in \mathcal{A}_t$ gilt, folgt aus der Definition von $\alpha(Q)$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\alpha_t^{\min}(Q)\right] = \sup_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[-Y] \le \alpha(Q), \quad Q \in \mathcal{Q}_t. \tag{2.7}$$

Nun kann die gesuchte Ungleichung gefolgert werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\rho_t(X)] &\overset{(2.6)}{=} \sup_{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P}),\, \alpha(Q) < \infty} \left(\mathbb{E}^Q[-X] - \alpha(Q) \right) \\ &\le \sup_{Q \in \mathcal{Q}_t,\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\alpha_t^{\min}(Q)] < \infty} \left(\mathbb{E}^Q[-X] - \alpha(Q) \right) \\ &\overset{(2.7)}{\le} \sup_{Q \in \mathcal{Q}_t,\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\alpha_t^{\min}(Q)] < \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^Q[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q) \right] \\ &\le \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t,\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\alpha_t^{\min}(Q)] < \infty} \left(\mathbb{E}^Q[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q) \right) \right] \\ &\le \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q) \right) \right]. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

In der folgenden Proposition legen wir dar, dass $\alpha_t^{\min}$ tatsächlich die kleinste Penalty-Funktion ist, und geben zudem eine weitere Berechnungsmöglichkeit für diese an. Auf einen Beweis dieser Aussage verzichten wir an dieser Stelle.

Proposition 2.9 *Existiert eine robuste Darstellung von ρ_t im Sinne von Theorem 2.8, so gilt*

$$\alpha_t^{\min}(Q) \le \alpha_t(Q), \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

für jede andere Penalty-Funktion α_t und alle $Q \in \mathcal{P}_t$. Außerdem gilt die Schreibweise

$$\alpha_t^{\min}(Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty} \left(\mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \rho_t(X)\right), \quad \text{für alle } Q \in \mathcal{P}_t. \tag{2.8}$$

Beweis. (Siehe Theorem 4.15 und Remark 4.16 in [2]) □

Das nachfolgende Korollar liefert eine robuste Darstellung im Fall bedingter kohärenter Risikomaße.

Korollar 2.10 *Die Penalty-Funktion eines bedingten kohärenten Risikomaßes ρ_t nimmt ausschließlich die Werte 0 und $+\infty$ an. Insbesondere ist ρ_t genau dann stetig von oben, falls es durch*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t^0} \mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right], \quad X \in L^\infty$$

mit

$$\mathcal{Q}_t^0 = \left\{Q \in \mathcal{Q}_t \mid \alpha_t^{\min}(Q) = 0 \ Q\text{-fast sicher}\right\}$$

darstellbar ist.

Beweis. In Proposition 2.3 haben wir gezeigt, dass die durch ein kohärentes Risikomaß definierte Akzeptanzmenge ein positiver Kegel ist, d.h. für $X \in \mathcal{A}_t$ und $\lambda \in L_t^\infty$, $\lambda > 0$ gilt $\lambda X \in \mathcal{A}_t$. Damit folgt aus der Definition von $\alpha_t^{\min}$

$$\alpha_t^{\min}(Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q[-\lambda X|\mathcal{F}_t] = \lambda\alpha_t^{\min}(Q), \quad Q \in \mathcal{Q}_t.$$

Somit kann $\alpha_t^{\min}$ Q-fast sicher nur die Werte 0 oder $+\infty$ annehmen. □

2.2 Zeitkonsistente Risikomaße

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir den Risikobewertungsprozess über das Zeitintervall $0, \dots, T$ als Familie von bedingten Risikomaßen. Diese bezeichnen wir als dynamisches Risikomaß. Dabei stellt sich die Frage, inwiefern die Risikobewertung zu verschiedenen Zeitpunkten zusammenhängt. Beispielsweise erscheint es sinnvoll, dass wir heute Finanzposition 1 ein höheres Risiko als Finanzpostion 2 zuweisen, falls wir dies zu einem zukünftigen Zeitpunkt ebenfalls tun würden. Diese Eigenschaft nennen wir Zeitkonsistenz und die Charakterisierung zeitkonsistenter Risikomaße wird von vornehmlichem Interesse sein.

Wir schließen diesen Abschnitt und insbesondere dieses Kapitel über konvexe und kohärente Risikomaße für Zufallsvariablen mit der erneuten Betrachtung des in Beispiel 2.5 eingeführten entropischen Risikomaßes ab. Dabei liegt der Schwerpunkt auf einer konkreten Berechnung der Penalty-Funktion in der robusten Darstellung und dem Nachweis von Zeitkonsistenz.

2.2.1 Relevanz und Zeitkonsistenz

Wir beginnen mit der Definition dynamischer Risikomaße und führen im Anschluss neben Zeitkonsistenz einige weitere interessante Eigenschaften ein.

Definition 2.11 Eine Folge $\rho = (\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt dynamisches konvexes (kohärentes) Risikomaß, falls ρ_t für alle $t \in \mathbb{T}$ ein bedingtes konvexes (kohärentes) Risikomaß ist.

Definition 2.12 Ein bedingtes konvexes Risikomaß ρ_t heißt relevant, falls für alle $\epsilon > 0$ und für beliebiges $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(\rho_t(-\epsilon \mathbb{1}_A) > 0) > 0.$$

Definition 2.13 Ein dynamisches Risikomaß, beziehungsweise eine Folge von bedingten Risikomaßen $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$, heißt zeitkonsistent, falls für $X, Y \in L^\infty$ und alle $t \in \mathbb{T}$ mit $t < T$ gilt:

$$\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(Y) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_t(X) = \rho_t(Y) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ .$$

Die nachfolgende Proposition liefert eine äquivalente Eigenschaft von dynamischen Risikomaßen:

Proposition 2.14 *Zeitkonsistenz ist äquivalent zur Rekursivität eines dynamischen*

Risikomaßes, d.h. für alle Zeiten $t, s \in \mathbb{T}$ mit $t+s \in \mathbb{T}$ gilt

$$\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s}) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.\ .$$

Beweis. (Siehe Proposition 4.2 in [5]) Wir starten mit dem Beweis der Zeitkonsistenz, falls Rekursivität gilt. Es gelte nun $\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(Y)$ für $X, Y \in L^\infty$ und $t \in \mathbb{T}$. Dann liefert uns die Rekursivität

$$\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) = \rho_t(-\rho_{t+1}(Y)) = \rho_t(Y).$$

Die umgekehrte Aussage zeigen wir per Induktion über s. Sei zunächst $s = 1$, so können wir mittels Cash-Invarianz $\rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X)) = \rho_{t+1}(X)$ festhalten. Dann folgt sofort aus der Zeitkonsistenz $\rho_t(-\rho_{t+1}(X)) = \rho_t(X)$. Die Behauptung gelte nun für ein beliebiges $s \geq 1$ und wir zeigen die Aussage für $s+1$:

$$\begin{aligned}\rho_t(-\rho_{t+s+1}(X)) &= \rho_t(-\rho_{t+s}(-\rho_{t+s+1}(X))) \\ &= \rho_t(-\rho_{t+s}(X)) \\ &= \rho_t(X).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.15 *Sei $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein zeitkonsistentes dynamisches konvexes Risikomaß und sei ρ_0 relevant. Dann ist ρ_t relevant für alle $t \in \mathbb{T}$.*

Beweis. Siehe Proposition 4.4 in [5]. □

Die nachfolgende Proposition liefert eine alternative Charakterisierung für Zeitkonsistenz. Diese wird in späteren Beweisen von Nutzen sein.

Proposition 2.16 *Ein dynamisches Risikomaß ist genau dann zeitkonsistent, falls für beliebige $X, Y \in L^\infty$ und alle $t \in \mathbb{T}$ mit $t < T$ gilt:*

$$\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \quad \Longrightarrow \quad \rho_t(X) \leq \rho_t(Y) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.\ .$$

Beweis. Wir führen hier lediglich aus, dass aus Zeitkonsistenz

$$\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \quad \Longrightarrow \quad \rho_t(X) \leq \rho_t(Y) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ .$$

für beliebige $X, Y \in L^\infty$ und alle $t \in \mathbb{T}$ mit $t < T$ folgt. Die Umkehrung ergibt sich sofort. Wir nutzen im Folgenden die Aussage von Proposition 2.14. Es gelte $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y)$. Dann liefert uns die Rekursivität und im Anschluss die Monotonie

$$\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(Y)) = \rho_t(Y). \tag{2.9}$$

□

2.2.2 Charakterisierung zeitkonsistenter Risikomaße

Nachdem die beiden Begriffe Relevanz und Zeitkonsistenz eingeführt wurden, werden wir nun einige Notationen und nötige Voraussetzungen einführen, die später bei der Charakterisierung zeitkonsistenter dynamischer konvexer Risikomaße von Nutzen sein werden. Wir betrachten im Folgenden die Mengen

$$\mathcal{A}_{t,t+s} = \{X \in L^\infty_{t+s} : \rho_t(X) \leq 0\},$$

d.h. wir beschränken die Risikobewertung auf den Zeitraum zwischen t und $t+s$ mit $t, t+s \in \mathbb{T}$. Hierbei gilt außerdem $\mathcal{A}_{t,t} = L^\infty_{t,+}$ wegen der Cash-Invarianz von ρ_t. Analog zu der zuvor hergeleiteten Darstellung ist ρ_t auf L^∞_{t+s} robust darstellbar mittels minimaler Penalty-Funktion

$$\alpha^{min}_{t,t+s}(Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t], \quad Q \in \mathcal{P}_t, \tag{2.10}$$

falls ρ_t auf L^∞_{t+s} von oben stetig ist. Dies gilt, wenn ρ_t auf L^∞ von oben stetig ist.

Im folgenden Lemma wollen wir einige nützliche Eigenschaften der zuvor definierten Akzeptanzmenge festhalten, die im Beweis der Hauptaussage dieses Abschnitts von Nutzen sein werden.

Dazu sei festgehalten, dass wir $X \in \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$ für $t, s \in \mathbb{T}$ mit $t+s \in \mathbb{T}$ derart verstehen wollen, dass $X = X_{t,t+s} + X_{t+s}$ mit $X_{t,t+s} \in \mathcal{A}_{t,t+s}$ und $X_{t+s} \in \mathcal{A}_{t+s}$ gilt.

Lemma 2.17 *Sei $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein dynamisches konvexes Risikomaß. Dann gelten die folgenden Aussagen für alle $t, s \in \mathbb{T}$ mit $t+s \in \mathbb{T}$ und alle $X \in L^\infty$:*

(i) $X \in \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s} \iff -\rho_t(X) \in \mathcal{A}_{t,t+s}$,

(ii) $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s} \iff \rho_t(-\rho_{t+s}) \leq \rho_t$ $\mathbb{P}$-*f.s.* ,

(iii) $\mathcal{A}_t \supset \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s} \iff \rho_t(-\rho_{t+s}) \geq \rho_t$ $\mathbb{P}$-*f.s.* .

Beweis. Siehe Lemma 4.6 in [5]. □

Lemma 2.18 *Sei $(Q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{Q}_t$ und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse in $\mathcal{F}_t$ mit $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \Omega$. Dann ist durch*

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \frac{dQ_n}{d\mathbb{P}}$$

eine Dichte für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_t$ definiert und es gilt

$$\alpha_t^{\min}(\tilde{Q}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \alpha_t^{\min}(Q).$$

Hierbei sei $\mathbb{1}_{A_n} = 0$, falls $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

Beweis. siehe Lemma 3.3 in [5] □

Das nachfolgende Lemma zeigt, dass sich ρ_t auch mittels äquivalenter Wahrscheinlichkeitsmaße darstellen lässt, falls $\alpha_t^{\min}$ für eines dieser äquivalenten Maße $\mathbb{P}$-fast sicher endlich ist.

Lemma 2.19 *Sei ρ_t, $t \in \mathbb{T}$ ein bedingtes konvexes Risikomaß, das stetig von oben ist. Des Weiteren sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ gegeben, für das $\alpha_t^{\min}(\mathbb{P}^*) < \infty \quad \mathbb{P}$-f.s. gilt. Dann ist ρ_t darstellbar durch*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{M}^e(\mathbb{P})} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right), \quad X \in L^\infty \tag{2.11}$$

und falls $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbb{P}^*)] < \infty$ gegeben ist, gilt

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P}^*)} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right), \quad X \in L^\infty. \tag{2.12}$$

Hierbei sei

$$\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P}^*) = \{Q \in \mathcal{M}^e(\mathbb{P}) : Q = \mathbb{P}^* \text{ auf } \mathcal{F}_t,\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\alpha_t^{\min}(Q)] < \infty\}.$$

Beweis. Siehe Lemma 3.5 in [5]. □

Theorem 2.20 *Sei $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein dynamisches konvexes Risikomaß mit ρ_t von oben stetig* *für alle $t \in \mathbb{T}$. Des Weiteren setzen wir voraus, dass die Menge*

$$\mathcal{Q}^* = \{Q \in \mathcal{M}^e(\mathbb{P}) : \alpha_0^{min}(Q) < \infty\}$$

nicht leer sei. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist zeitkonsistent.*

(ii) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$ *für alle* $t, s \in \mathbb{T}$ *mit* $t + s \in \mathbb{T}$.

(iii) $\alpha_t^{\min}(Q) = \alpha_{t,t+s}^{\min}(Q) + \mathbb{E}^Q[\alpha_{t+s}^{\min}(Q)|\mathcal{F}_t]$ *für alle* $t, s \in \mathbb{T}$ *mit* $t + s \in \mathbb{T}$ *und alle* $Q \in \mathcal{M}^e(\mathbb{P})$.

(iv) Für alle $Q \in \mathcal{Q}^*,\ X \in L^\infty$ *und alle* $t \in \mathbb{T}$ *gilt*

$$\mathbb{E}^Q\left[\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q) \mid \mathcal{F}_t\right] \le \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(Q),$$

d.h. $(\rho_t(X)+\alpha_t^{\min}(Q))_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein Q-Supermartingal. Diese Aussage gilt zudem für* $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

In allen oben genannten Fällen ist ρ_t *durch*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}^*} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right) \tag{2.13}$$

für alle $X \in L^\infty$ *und alle* $t \in \mathbb{T}$ *darstellbar.*

Beweis. (Siehe Theorem 4.5 in [5] und Theorem 1.20 in [4]) Wir nehmen an, dass $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}^*$ gilt. Ansonsten wird $\mathbb{P}$ durch ein Maß $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}^*$ ersetzt.

(i) ⇒ (ii): Gemäß Proposition 2.14 ist die Zeitkonsistenz von $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ äquivalent zur Rekursivität $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$ für alle $t, s \in \mathbb{T}$. Dann folgt die Behauptung sofort mit Lemma 2.17.

(ii) ⇒ (iii): Seien $Q \in \mathcal{M}^e(\mathbb{P})$ und $t, s \in \mathbb{T}$ mit $t + s \in \mathbb{T}$ beliebig gewählt. Dann folgt aus der Definition von $\alpha_t^{\min}$ in Gleichung (2.4) und der Darstellung von $X \in \mathcal{A}_t$ durch $X = X_{t,t+s} + X_{t+s}$ mit $X_{t,t+s} \in \mathcal{A}_{t,t+s},\ X_{t+s} \in \mathcal{A}_{t+s}$, dass

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{\min}(Q) &= \operatorname*{ess\,sup}_{X\in\mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{X_{t,t+s}\in\mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbb{E}^Q[-X_{t,t+s}|\mathcal{F}_t] + \operatorname*{ess\,sup}_{X_{t+s}\in\mathcal{A}_{t+s}} \mathbb{E}^Q[-X_{t+s}|\mathcal{F}_t] \\
&= \alpha_{t,t+s}^{\min}(Q) + \mathbb{E}^Q[\alpha_{t+s}^{\min}(Q)|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

gilt. Den zweiten Summand in der letzten Gleichung liefert Lemma 2.7.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Wir folgern die Aussage lediglich für $Q \in \mathcal{Q}^*$. Die Variante $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ wurde in Theorem 1.20 in [4] gewählt und bewiesen.

a) Wir werden zunächst zeigen, dass die Gleichungen (2.11) und (2.12) gelten und daraus die Darstellung (2.13) folgern. Sei $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}^*$. Dann kann wegen (iii)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbb{P}^*)] = \alpha_0^{\min}(\mathbb{P}^*) - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbb{P}^*)] < \infty$$

gefolgert werden. $\alpha_0^{\min}(\mathbb{P}^*) < \infty$ gilt nach Definition von $\mathcal{Q}^*$ und $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbb{P}^*)] < \infty$ nach Definition von $\alpha_{0,t}^{\min}$ und von $\mathcal{A}_{0,t}$. Damit gelten die Gleichungen (2.11) und (2.12) für alle $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}^*$.

Um die robuste Darstellung auch über die Menge $\mathcal{Q}^*$ zu erhalten, muss zunächst gefolgert werden, dass $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P}) \subset \mathcal{Q}^*$ für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt. Hierbei ist $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P})$ wie in Lemma 2.19 definiert. Sei nun $Q \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P})$ beliebig gewählt, d.h. $Q \in \mathcal{M}^e(\mathbb{P})$ mit $Q = \mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$ und mit $\mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{\min}(Q) &\overset{(iii)}{=} \mathbb{E}^Q[\alpha_{0,t}^{\min}(Q)] + \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\alpha_t^{\min}(\mathbb{P})] + \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] \\
&\leq \alpha_0^{\min}(\mathbb{P}) + \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] < \infty
\end{aligned}$$

und es folgt $Q \in \mathcal{Q}^*$. Wegen $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P}) \subset \mathcal{Q}^*$ folgt aus Gleichung (2.12) die Ungleichung

$$\rho_t(X) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}^*} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right)$$

und wegen $\mathcal{Q}^* \subset \mathcal{M}^e(\mathbb{P})$ die umgekehrte Ungleichung "$\geq$". Zusammen liefert dies die Darstellung (2.13).

b) Wir werden nun zeigen, dass ein aus $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$, $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}^*$, zusammengesetztes Maß wieder ein Element aus $\mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$ ist.

Halten wir nun ein $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}^*$ fest und wählen zwei Maße $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$ und eine Menge $B \in \mathcal{F}_{t+1}$. Nach Lemma 2.18 wird durch

$$\hat{Z} = \mathbb{1}_B \frac{dQ_2}{d\tilde{Q}} + \mathbb{1}_{B^c} \frac{dQ_1}{d\tilde{Q}}$$

eine Dichte definiert. Hiermit kann ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{Q}$ durch

$$\frac{d\hat{Q}}{d\tilde{Q}} = \hat{Z}$$

konstruiert werden. Für dieses gilt gemäß Lemma 2.18 $\hat{Q} = \tilde{Q}$ auf $\mathcal{F}_{t+1}$ und

$$\alpha_{t+1}^{\min}(\hat{Q}) = \alpha_{t+1}^{\min}(Q_1)\mathbb{1}_{B^c} + \alpha_{t+1}^{\min}(Q_2)\mathbb{1}_B.$$

Folglich ist $\hat{Q} \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$.

c) Wir betrachten im Folgenden die Menge

$$\left\{\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})\right\}, \quad \tilde{Q} \in \mathcal{Q}^*$$

und werden zeigen, dass diese Menge aufwärts gerichtet ist für alle $X \in L^\infty$, um mit monotoner Konvergenz

$$\mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[\rho_{t+1}(X) \mid \mathcal{F}_t\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{E}^{Q_n}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}^{Q_n}\left[\alpha_{t+1}^{\min}(Q_n) \mid \mathcal{F}_t\right]\right)$$

zu folgern.

Wir wählen dazu zwei Maße $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$ und eine Menge

$$B = \left\{\mathbb{E}^{Q_1}[-X|\mathcal{F}_{t+1}] \geq \mathbb{E}^{Q_2}[-X|\mathcal{F}_{t+1}]\right\} \in \mathcal{F}_{t+1}.$$

In b) haben wir gezeigt, dass $\hat{Q} \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$ gilt, wenn $\hat{Q}$ wie in b) definiert ist. Dann können wir leicht einsehen, dass

$$\mathbb{E}^{\hat{Q}}[-X|\mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(\hat{Q}) = \max\left(\mathbb{E}^{Q_1}[-X|\mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(Q_1), \mathbb{E}^{Q_2}[-X|\mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(Q_2)\right)$$

gilt. Damit habe wir gezeigt, dass die oben definierte Menge aufwärts gerichtet ist. In a) haben wir gezeigt, dass ρ_{t+1} sich als essentielles Supremum über die Menge $\mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$ darstellen lässt. Deshalb existiert eine Folge $(Q_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$, für die

$$\mathbb{E}^{Q_n}[-X|\mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(Q_n) \nearrow \rho_{t+1}(X) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für } n \to \infty$$

gilt. Damit sind die Voraussetzungen für den Satz der monotonen Konvergenz gegeben und wir können

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[\rho_{t+1}(X) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[\mathbb{E}^{Q_n}\left[-X \mid \mathcal{F}_{t+1}\right] - \alpha_{t+1}^{\min}(Q_n) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}^{Q_n}\left[-X \mid \mathcal{F}_{t+1}\right] - \mathbb{E}^{Q_n}\left[\alpha_{t+1}^{\min}(Q_n) \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \qquad (2.14)\end{aligned}$$

folgern. Die zweite Gleichung folgt, da $Q_n = \tilde{Q}$ auf $\mathcal{F}_{t+1}$ gilt.

Bevor wir zum letzten Schritt des Beweises kommen müssen wir eine nützliche Gleichung herleiten. Wir haben in a) gezeigt, dass $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\tilde{Q}) \subset \mathcal{Q}^*$ gilt. Dies kann ebenso für $\mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\tilde{Q})$ gefolgert werden. Somit können wir nun (iii) nutzen und den folgenden Zusammenhang herleiten:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{Q_n}\left[\alpha_{t+1}^{\min}(Q_n) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \alpha_t^{\min}(Q_n) - \alpha_{t,t+1}^{\min}(Q_n) \\ &= \alpha_t^{\min}(Q_n) - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\tilde{Q}) \quad \text{für alle } n \geq 1. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

d) Sei $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}^*$ und $X \in L^\infty$. Es verbleibt nun noch zu zeigen, dass $\left(\mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\tilde{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right]\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein $\tilde{Q}$-Supermartingal ist. Adaptiertheit und Integrierbarkeit sind klar. Es verbleibt die Martingal-Eigenschaft zu zeigen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(\tilde{Q}) \mid \mathcal{F}_t\right] &\overset{(2.15)}{=} \mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[\rho_{t+1}(X) \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\tilde{Q}) + \alpha_t^{\min}(\tilde{Q}) \\ &\overset{(2.14)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}^{Q_n}\left[-X \mid \mathcal{F}_{t+1}\right] - \mathbb{E}^{Q_n}\left[\alpha_{t+1}^{\min}(Q_n) \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \\ &\qquad - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\tilde{Q}) + \alpha_t^{\min}(\tilde{Q}) \\ &\overset{(2.15)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}^{Q_n}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_t^{\min}(Q_n)\right) + \alpha_t^{\min}(\tilde{Q}) \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}^*} \left(\mathbb{E}^{Q}\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_t^{\min}(Q)\right) + \alpha_t^{\min}(\tilde{Q}) \\ &= \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\tilde{Q})\end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$ und $t \geq 0$.

(iv) ⇒ (i): a) Wir werden nun erneut die Darstellung (2.13) für $t \in \mathbb{T}$ herleiten und dabei analog zum Abschnitt a) des vorherigen Beweisabschnitts vorgehen. Anschließend folgern wir daraus die Zeitkonsistenz.

Da $\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbb{P}^*)$ für alle $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}^*$ nach Voraussetzung integrierbar ist und $\rho_t(X) \in L_t^\infty$ für alle $X \in L^\infty$ und alle $t \in \mathbb{T}$ gilt, ist $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbb{P}^*)] < \infty$ und wir können erneut die Darstellung (2.12) aus Lemma 2.19 nutzen.

Als nächstes zeigen wir, dass $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P}) \subset \mathcal{Q}^*$ gilt. Wir wählen dazu ein $Q \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbb{P})$ und $X \in \mathcal{A}_0$ und folgern:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q[-X] &\leq \mathbb{E}^Q[-X - \rho_t(X)] + \mathbb{E}^Q[\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbb{P})] \\
&\leq \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbb{P})] \\
&\leq \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] + \rho_0(X) + \alpha_0^{\min}(\mathbb{P}) \\
&\leq \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] + \alpha_0^{\min}(\mathbb{P}).
\end{aligned}$$

Mit der obigen Ungleichung kann

$$\alpha_0^{\min}(Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E}^Q[-X] \leq \mathbb{E}^Q[\alpha_t^{\min}(Q)] + \alpha_0^{\min}(\mathbb{P}) < \infty$$

gefolgert werden. Damit ist $Q \in \mathcal{Q}^*$ gezeigt und wir können wie in Abschnitt a) im vorherigen Beweisabschnitt folgern, dass die Darstellung (2.13) gilt.

b) Nun kann die Zeitkonsistenz gefolgert werden. Dazu betrachten wir zunächst zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L^\infty$ mit $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \quad \mathbb{P}$-f.s. und wir werden im Folgenden zeigen, dass diese Ungleichung auch zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ gilt. Mithilfe der Super-Martingaleigenschaft und der zuvor hergeleiteten robusten Darstellung aus Gleichung (2.13) kann eingesehen werden, dass für $Q \in \mathcal{Q}^*$

$$\begin{aligned}
\rho_t(Y) - \alpha_t^{\min}(Q) &\geq \mathbb{E}^Q\left[\rho_{t+1}(Y) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&\geq \mathbb{E}^Q\left[\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&\geq \mathbb{E}^Q\left[\mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_{t+1}^{\min}(Q) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

gilt. Offensichtlich liefert uns dies sofort die Ungleichung

$$\rho_t(Y) \geq \mathbb{E}^Q\left[-X \mid \mathcal{F}_t\right] - \alpha_t^{\min}(Q)\mathbb{P} \text{ fast sicher.}$$

für alle $Q \in \mathcal{Q}^*$. Da diese Aussage für alle $Q \in \mathcal{Q}^*$ gilt, folgern wir $\rho_t(Y) \geq \rho_t(Y)$ $\mathbb{P}$ -fast sicher und die Zeitkonsistenz ist somit gezeigt. □

2.2.3 Beispiel: Das dynamische entropische Risikomaß

In diesem Abschnitt widmen wir uns erneut dem in Beispiel 2.5 eingeführten entropischen Risikomaß. Wir haben bereits gefolgert, dass

$$\rho_t^{ent}(X) = \frac{1}{\gamma_t} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma_t X} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad X \in L^\infty$$

ein bedingtes konvexes Risikomaß ist. Nun werden wir zunächst zeigen, dass eine robuste Darstellung für dieses Risikomaß existiert und dass die Penalty-Funktion durch die relative Entropie definiert ist. Im Anschluss werden wir Zeitkonsistenz bei konstanter Risikoaversion γ folgern. Dabei orientieren wir uns weitestgehend an [6].

Definition 2.21 Das durch Gleichung (2.2) und die Voraussetzungen an $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ definierte konvexe Risikomaß $(\rho_t^{ent})_{t\in\mathbb{T}}$ nennen wir dynamisches entropisches Risikomaß mit Risikoaversion $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Mittels monotoner Konvergenz können wir für eine Folge $(X_n) \subseteq L^\infty$ und $X \in L^\infty$ mit $X_n \searrow X$ $\mathbb{P}$-fast sicher zeigen, dass

$$\rho_t^{ent}(X_n) = \frac{1}{\gamma_t} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma_t X_n} \mid \mathcal{F}_t\right] \nearrow \frac{1}{\gamma_t} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma_t X} \mid \mathcal{F}_t\right] = \rho_t^{ent}(X) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

gilt und dass gemäß Theorem 2.8 ρ_t^{ent} der robusten Darstellung

$$\rho_t^{ent}(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q)\right)$$

genügt. Im Folgenden werden wir eine Darstellung der zugehörigen minimalen Penalty-Funktion herleiten:

Definition 2.22 Die bedingte relative Entropie von $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ bezügliche $\mathbb{P}$ auf der Filtration $\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{T}$, ist gegeben durch

$$H_t(Q \mid \mathbb{P}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Bemerkung 2.23 Es gilt unter anderem

$$H_t(Q \mid \mathbb{P}) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right]} = \mathbb{E}^Q\left[\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right] = 1$ die Dichte von Q bezüglich $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$

ist.

Lemma 2.24 *Für $Q \in \mathcal{Q}_t$ und alle $t \in \mathbb{T}$ gilt:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Y \in L^\infty} \left(\mathbb{E}^Q \left[-Y \mid \mathcal{F}_t \right] - \log \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^Y \mid \mathcal{F}_t \right] \right) = H_t(Q \mid \mathbb{P}). \tag{2.16}$$

Beweis. Siehe Lemma 2 in [6]. □

Lemma 2.25 *Für alle $t \in \mathbb{T}$ ist ρ_t^{ent} durch Gleichung* (2.5) *mit minimaler Penalty-Funktion*

$$\alpha_t^{\min}(Q) = \frac{1}{\gamma_t} H_t(Q \mid \mathbb{P}), \quad Q \in \mathcal{Q}_t$$

darstellbar.

Beweis. (Siehe Lemma 4.1.2 in [13]). Mit Gleichung (2.8) folgt die Darstellung.

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{\min}(Q) &= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty} \left(\mathbb{E}^Q \left[-X \mid \mathcal{F}_t \right] - \rho_t^{ent} \right) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty} \left(\mathbb{E}^Q \left[-X \mid \mathcal{F}_t \right] - \frac{1}{\gamma_t} \log \mathbb{E} \left[e^{-\gamma_t X} \mid \mathcal{F}_t \right] \right) \\
&= \frac{1}{\gamma_t} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in L^\infty} \left(\mathbb{E}^Q \left[-Y \mid \mathcal{F}_t \right] - \log \mathbb{E}[e^Y \mid \mathcal{F}_t] \right) \\
&\overset{(2.16)}{=} \frac{1}{\gamma_t} H_t(Q \mid \mathbb{P}), \quad Q \in \mathcal{Q}_t,\, t \in \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

□

Indem wir die obigen Erkenntnisse zusammenfassen, erhalten wir die robuste Darstellung des bedingten entropischen Risikomaßes:

$$\begin{aligned}
\rho_t^{ent}(X) &= \frac{1}{\gamma_t} \log \mathbb{E} \left[e^{-\gamma_t X} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(Q) \right) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t} \left(\mathbb{E}^Q[-X|\mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma_t} H_t(Q \mid \mathbb{P}) \right), \quad X \in L^\infty,\ t \in \mathbb{T}
\end{aligned}$$

mit $\mathcal{Q}_t = \{Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P}) : Q = \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{F}_t\}$.

Proposition 2.26 *Das dynamische entropische Risikomaß $(\rho_t^{ent})_{t \in \mathbb{T}}$ mit konstanter Risikoaversion γ ist zeitkonsistent.*

Beweis. (Siehe Proposition 6 in [6]) Indem wir Rekursivität zeigen und Proposition 2.14 nutzen folgt die Behauptung. Für $t \in \mathbb{T}$ und $X \in L^\infty$ gilt:

$$\begin{aligned}\rho_t^{ent}(X) &= \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma X} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\gamma\left(-\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma X} \mid \mathcal{F}_{t+1}\right]\right)\right\} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \rho_t^{ent}\left(-\rho_{t+1}^{ent}(X)\right).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.27 *Das dynamische entropische Risikomaß* $(\rho_t^{ent})_{t\in\mathbb{T}}$ *mit konstanter Risikoaversion* γ *ist ein* $\mathbb{P}$*-Supermartingal.*

Beweis. (Siehe Proposition 6 in [6]) Es lässt sich leicht einsehen, dass $\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X} \mid \mathcal{F}_t\right]\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal ist. Da ρ_t^{ent} eine konkave Funktion von $\mathbb{E}\left[e^{-\gamma} X \mid \mathcal{F}_t\right]$ ist, folgt die Behauptung. □

3 Risikomaße für beschränkte stochastische Prozesse

In diesem Kapitel sind stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Gegenstand der Risikobewertung. Damit beschränken wir uns nicht mehr auf Auszahlungen, die nur zum finalen Investitionszeitpunkt erfolgen, sondern erlauben Zahlungsströme über das gesamte untersuchte Zeitintervall und widmen uns insbesondere der Bewertung von kumulierten Zahlungsströmen.

Wir gehen dabei analog zum vorherigen Kapitel vor. An die Definition von konvexen und kohärenten Risikomaßen für Prozesse und die Untersuchung einiger interessanter Merkmale schließen wir die Herleitung einer allgemeinen Form als schlimmsten erwarteten Verlust über eine Menge an individuell gewichteten Wahrscheinlichkeitsmaßen an. Diese bezeichnen wir erneut als robuste Darstellung. Im Anschluss gehen wir auf Zeitkonsistenz und ihre Charakterisierung über gewisse Martingal-Eigenschaften ein.

Die Idee dabei ist, sich die Ergebnisse für Risikomaße für Zufallsvariablen zu Nutze zu machen, indem wir die zu bewertenden Prozesse mit Zufallsvariablen auf einem dafür geeignet gewählten Produktraum identifizieren. Die Einführung des besagten Produktraums wird den Einstieg in dieses Kapitel bilden. Die Arbeiten [7] und [8] dienen als Literaturgrundlage.

3.1 Grundlagen

Wie bereits zuvor erwähnt, werden wir in diesem Abschnitt die nötigen Voraussetzungen schaffen, um im späteren Verlauf die Theorie zu dynamischen Risikomaßen für stochastische Prozesse zu entwickeln. Wir betrachten im Folgenden einen diskreten Zeithorizont mit Endzeitpunkt $T \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Die Risikobewertung erfolgt auf dem Zeitintervall

- $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$, falls $T < \infty$ gilt, oder auf
- $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, falls $T = \infty$ gilt,

und wir verwenden zudem die Notation

$$\mathbb{T}_t = \{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Anders als in [7] beschränken wir uns hier im Fall $T = \infty$ auf das Zeitintervall $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, um konsistent mit Kapitel 2 zu bleiben. Ebenso ist ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ gegeben. Es gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ für $T < \infty$ und $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t\right)$ für $T = \infty$. Die zu bewertenden Auszahlungsströme verstehen wir als stochastische Prozesse aus dem Raum

$$\mathcal{R}^\infty = \{X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}} \mid X \text{ ist ein adaptierter stochastischer Prozess mit } \|X\|_\infty < \infty\},$$

wobei

$$\|X\|_\infty = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{t \in \mathbb{T}} |X_t| \leq x\right\}$$

definiert sei. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Elemente aus $\mathcal{R}^\infty$ zu interpretieren:

- $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}} \in \mathcal{R}^\infty$ ist ein adaptierter Auszahlungsstrom, der zu jedem Zeitpunkt t eine zufällige Auszahlung $Y_t \in L_t^\infty$ liefert.
- $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist ein kumulierter Auszahlungsstrom, der durch

  $$X_t = \sum_{s=0}^{t} Y_s, \quad t \in \mathbb{T}$$

  definiert ist. Es gilt $X \in \mathcal{R}^\infty$ für $T < \infty$ und im Fall $T = \infty$ muss zusätzlich $\sum_{t \in \mathbb{T}} \|Y_t\|_\infty < \infty$ erfüllt sein. Bei der Norm handelt es sich um die essentielle Supremumsnorm für Zufallsvariablen. Umgekehrt wird durch $Y_t = X_t - X_{t-1} \in L_t^\infty$, $t \in \mathbb{T}$ ein Auszahlungsstrom definiert. Dabei gilt hier und im Folgenden $X_{-1} = 0$.
- $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{T}}$ beschreibt die Entwicklung eines Portfolios, wobei beispielsweise $Z_t = V_t$ zum Zeitpunkt t den Wert des Portfolios beschreiben kann.

Wir werden die grundlegenden Definitionen und Aussagen für kumulierte Auszahlungsströme angeben und nur vereinzelt auf Auszahlungsströme eingehen. Um im Folgenden die Entwicklung von Finanzpositionen auf Intervallen $[t, s] \cap \mathbb{N}_0$, $0 \leq t \leq s \leq T$, zu untersuchen, führen wir Projektionen $\pi_{t,s} : \mathcal{R}^\infty \to \mathcal{R}^\infty$ mit

$$\pi_{t,s}(X)_r = \mathbb{1}_{\{t \le r\}} X_{r \wedge s}, \quad r \in \mathbb{T},$$

ein und definieren damit die Unterräume

$$\mathcal{R}^\infty_{t,s} = \pi_{t,s}(\mathcal{R}^\infty) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}^\infty_t = \pi_{t,T}(\mathcal{R}^\infty).$$

Auf diese Weise erhält man kumulierte Auszahlungsströme $(0, \dots, X_t, \dots, X_s, X_s, \dots) \in \mathcal{R}^\infty_{t,s}$, die von Auszahlungsströmen der Form $(0, \dots, Y_t, \dots, Y_s, 0, \dots) \in \mathcal{R}^\infty$ auf dem Zeitintervall $[t, s] \cap \mathbb{N}_0$ erzeugt werden.

Als nächstes führen wir die im weiteren Verlauf dieses Kapitel verwendete Produktraumstruktur ein.

Definition 3.1 Für einen gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definieren wir den Produktraum $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ durch

- $\bar{\Omega} = \Omega \times \mathbb{T}$,
- $\bar{\mathcal{F}} = \sigma(\{A_t \times \{t\} \mid A_t \in \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\})$,
- $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mu$, wobei $\mu = (\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein adaptierter Referenzprozess ist mit $\sum_{t \in \mathbb{T}} \mu_t = 1$ und $\mu_t > 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Außerdem gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mu}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\sum_{t \in \mathbb{T}} X_t \mu_t \right]$$

für beschränkte messbare Funktionen auf $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$.

Die nachfolgende Definition soll den Begriff der Filtration und Messbarkeit auf den gewählten Produktraum übertragen:

Definition 3.2 $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ heißt optionale Filtration auf $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$, falls für alle $t \in \mathbb{T}$

$$\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(\{A_j \times \{t\}, A_t \times \mathbb{T}_t \mid A_j \in \mathcal{F}_j,\ j < t,\ A_t \in \mathcal{F}_t\}\right)$$

gilt. Eine Zufallsvariable $X = (X_s)_{s \in \mathbb{T}}$ auf $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ ist genau dann $\bar{\mathcal{F}}_t$-messbar, wenn

- X_s $\mathcal{F}_s$-messbar ist für alle $s = 0, \dots, t$ und
- $X_s = X_t$ für alle $s > t$.

Bemerkung 3.3 Wir können jeden adaptierten Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit einer Zufallsvariablen auf $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ identifizieren, d.h.

$$\mathcal{R}^\infty = \bar{L}^\infty = L^\infty(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}),$$
$$\mathcal{R}^\infty_{0,t} = \bar{L}^\infty_t = L^\infty(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}_t, \bar{\mathbb{P}}),$$

und wir werden uns diese Eigenschaft später bei der Herleitung der robusten Darstellung zu Nutze machen.

Wie zuvor bezeichnen wir die Mengen der absolut stetigen Maße bezüglich $\mathbb{P}$ mit

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}) = \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) : Q \ll \mathbb{P}\}$$

und insbesondere die lokal absolut stetigen Maße mit $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$. Wir bezeichnen ein Maß Q als lokal absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$, falls $Q \ll \mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt. Gleiches gelte zudem auf dem Produktraum bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$.

In der nachfolgenden Definition führen wir vorhersehbare Diskontierungsprozesse und damit im Zusammenhang stehende optionale Zufallsmaße ein. Mithilfe dieser lässt sich eine Dekomposition von Maßen auf dem Produktraum $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ in Maße $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ und eben diese Prozesse beweisen.

Definition 3.4 1. Für $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ nennen wir ein Element $c = (c_t)_{t\in\mathbb{T}}$ vorhersehbaren Diskontierungsprozess, falls c ein vorhersehbarer nicht-wachsender Prozess mit $c_0 = 1$ und $c_\infty = \lim_{t\to\infty} c_t$ Q-fast sicher für $T = \infty$ ist, wobei

$$c_\infty = 0 \quad Q\text{-fast sicher für } T = \mathbb{N}_0$$

gilt. Außerdem definieren wir $c_{T+1} = 0$, falls $T < \infty$ gilt. Die Menge der vorhersehbaren Diskontierungsprozesse bezüglich $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}(Q)$.

2. Für $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ nennen wir ein Element $\gamma = (\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ optionales Zufallsmaß, falls γ ein nicht-negativer adaptierter Prozess mit

$$\sum_{t\in\mathbb{T}} \gamma_t = 1 \quad Q\text{-fast sicher}$$

ist. Die Menge der optionalen Zufallsmaße bezüglich $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ bezeichnen wir mit $\Gamma(Q)$.

Eine typische Wahl für den Diskontierungsprozess ist $c_t = (1+r)^{-t}$ für eine fixe Zinsrate

$r > -1$. Das nachfolgende Lemma beschreibt den Zusammenhang von optionalem Zufallsmaß und Diskontierungsprozess:

Lemma 3.5 *Für jedes $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ können die Mengen $\Gamma(Q)$ und $\mathfrak{C}(Q)$ miteinander identifiziert werden. Jedem $\gamma \in \Gamma(Q)$ können wir einen Prozess $c \in \mathfrak{C}(Q)$ zuweisen, wobei*

$$c_t = 1 - \sum_{s=0}^{t-1} \gamma_s, \quad t \in \mathbb{T}$$

und insbesondere

$$c_t = \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \gamma_s \quad Q\text{-fast sicher für alle } t \in \mathbb{T}$$

gilt. Umgekehrt ist jeder Prozess $\gamma \in \Gamma(Q)$ durch einen Prozess $c \in \mathfrak{C}(Q)$ auf folgende Art definiert:

$$\gamma_t = c_t - c_{t+1}, \quad t \in \mathbb{T}. \tag{3.1}$$

Außerdem gilt für jedes $X \in \mathcal{R}_t^\infty$ und jedes Paar c und γ, das auf die oben eingeführte Weise zusammenhängt:

$$\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \gamma_s X_s = \sum_{s \in \mathbb{T}_t} c_s (X_s - X_{s-1}) \quad Q\text{-fast sicher}\ , \ t \in \mathbb{T}. \tag{3.2}$$

Hierbei und im Folgenden sei $X_{-1} = 0$.

Beweis. (Siehe Lemma 3.2 in [7]) Es lässt sich leicht einsehen, dass ein durch

$$c_t = 1 - \sum_{s=0}^{t-1} \gamma_s$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ definierter Prozess ein Element aus $\mathfrak{C}(Q)$ ist, da γ_t für alle $t \in \mathbb{T}$ nicht-negativ und $\sum_{t \in \mathbb{T}} \gamma_t = 1$ ist. Die letzte Gleichung impliziert zudem die Aussage

$$c_t = \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \gamma_s.$$

Umgekehrt wird durch $\gamma_t = c_t - c_{t+1}$ ein nicht-negativer Prozess definiert, da $(c_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein nicht-wachsender Prozess ist. Außerdem gilt

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} \gamma_s = \sum_{t \in \mathbb{T}} c_s - c_{t+1} = c_0 = 1,$$

da $c_\infty = 0$ für $T = \infty$, $c_{T+1} = 0$ für $T < \infty$ und $c_0 = 1$ ist. Damit ist $\gamma = (\gamma_t)_{t \in \mathbb{T}} \in \Gamma(Q)$.

Es verbleibt Gleichung (3.2) zu zeigen: Es gilt wegen (3.1)

$$\sum_{s=0}^{t} \gamma_s X_s = \sum_{s=0}^{t} (c_s - c_{s+1}) X_s = \sum_{s=0}^{t} c_s (X_s - X_{s-1}) - c_{t+1} X_s$$

für beliebiges $t \in \mathbb{T}$. Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Ist $T < \infty$, so folgt die Behauptung sofort, da $X \in \mathcal{R}_t^\infty$, d.h $X = (0, \dots, 0, X_t, X_{t+1,\dots})$, ist und $c_{T+1} = 0$. Im Fall $T = \infty$ gilt die Aussage, da X beschränkt ist und $c_t \searrow 0$ konvergiert. □

Theorem 3.6 *Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ und ein $\gamma \in \Gamma(Q)$, beziehungsweise ein $c \in \mathfrak{C}(Q)$, sodass*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\bar{Q}}[X] =& \mathbb{E}^{Q}\left[\sum_{t \in \mathbb{T}} \gamma_t X_t\right] & (3.3) \\ =& \mathbb{E}^{Q}\left[\sum_{t=0}^{T} c_t (X_t - X_{t-1})\right] & (3.4) \end{aligned}$$

für $X \in \mathcal{R}^\infty$ gilt.

Umgekehrt definiert jedes $Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ zusammen mit einem $\gamma \in \Gamma(Q)$, beziehungsweise einem $c \in \mathfrak{C}(Q)$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$, sodass die Gleichungen (3.3) und (3.4) gelten.
Schreibweise: Zur Darstellung der obigen Dekomposition von $\bar{Q}$ schreiben wir

$$\bar{Q} = Q \otimes \gamma = Q \otimes c.$$

Beweis. Siehe Theorem 3.4 sowie Appendix B in [7].

Der Beweis basiert auf der Annahme, dass im Fall $T = \infty$ für alle $t \in \mathbb{T}$ die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ σ-isomorph zu der Borel-σ-Algebra auf einem vollständig separablen Raum ist und dass $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$ für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Atomen A_n auf $\mathcal{F}_n$ gilt. □

Schreiben wir im Folgenden $Q \otimes \gamma$ beziehungsweise $Q \otimes c$, so nehmen wir immer implizit an, dass γ und c auf obige Weise zusammenhängen.

Diese Dekomposition macht deutlich, dass der Investor sowohl mit Modellunsicherheit als auch mit Diskontierungsunsicherheit umgehen muss und dass beides bei der robusten Darstellung, die wir im Folgenden herleiten werden, eine explizite Rolle spielt. Mithilfe des nachfolgenden Korollars können wir zudem den bedingten Erwartungswert bezüglich des Produktmaßes $\bar{Q}$ bestimmen:

Korollar 3.7 *Für ein Maß $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ mit $\bar{Q} = Q \otimes \gamma = Q \otimes c$ und für alle $X \in \mathcal{R}^\infty$ gilt*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\bar{Q}}\left[X \mid \bar{\mathcal{F}}_t\right] &= X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \cdots + X_{t-1}\mathbb{1}_{\{t-1\}} + \mathbb{E}^Q\left[\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \\ &= X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \cdots + X_{t-1}\mathbb{1}_{\{t-1\}} + \mathbb{E}^Q\left[\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{c_s}{c_t}(X_s - X_{s-1}) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist Q-fast sicher wohldefiniert auf $\{c_t > 0\}$.

Beweis. Siehe Korollar B.3 in [7]. □

3.2 Dynamische konvexe und kohärente Risikomaße

3.2.1 Darstellungssatz für bedingte Risikomaße

Wir erweitern nun die Definitionen und die zugehörige Theorie dynamischer Risikomaße für Zufallsvariablen aus dem vorherigen Kapitel auf Risikomaße für Prozesse. Dazu formulieren wir zunächst die Definition bedingter konvexer und kohärenter Risikomaße für stochastische Prozesse und definieren daraufhin Stetigkeit von oben und Zeitkonsistenz.

Definition 3.8 Eine Abbildung $\rho_t : \mathcal{R}_t^\infty \to L_t^\infty$ heißt bedingtes konvexes Risikomaß für Prozesse, falls es für alle $X, Y \in \mathcal{R}_t^\infty$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Bedingte Cash-Invarianz: Für alle $m \in L_t^\infty$ gilt

$$\rho_t(X + m\mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}) = \rho_t(X) - m.$$

(ii) Monotonie: Aus $X \leq Y$ (komponentenweise) folgt $\rho_t(X) \geq \rho_t(Y)$.

(iii) Bedingte Konvexität: Für alle $\lambda \in L_t^\infty$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y).$$

(iv) Normalisierung: $\rho_t(0) = 0$.

Ein bedingtes konvexes Risikomaß für Prozesse heißt bedingtes kohärentes Risikomaß für Prozesse, falls zusätzlich folgende Eigenschaft gilt:

(v) Bedingte positive Homogenität: Für alle $\lambda \in L_t^\infty$, $\lambda \geq 0$ gilt

$$\rho_t(\lambda X) = \lambda \rho_t(X).$$

Außerdem nennen wir die Folge $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ dynamisches konvexes (kohärentes) Risikomaß für Prozesse, falls ρ_t für alle $t \in \mathbb{T}$ ein bedingtes konvexes (kohärentes) Risikomaß für Prozesse ist.

Definition 3.9 Ein bedingtes konvexes Risikomaß für Prozesse $\rho_t : \mathcal{R}^\infty \to L_t^\infty$ heißt stetig von oben, falls für eine beliebige Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^\infty$ mit $X_s^{(n)} \searrow X_s$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $s \in \mathbb{T}_t$

$$\rho_t(X^{(n)}) \nearrow \rho_t(X) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher für } n \to \infty$$

gilt.

Definition 3.10 Ein dynamisches Risikomaß für Prozesse $(\rho_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt zeitkonsistent, falls für alle $t \in \mathbb{T}$ mit $t < T$ und alle $X, Y \in \mathcal{R}^\infty$ mit $X_t = Y_t$ gilt

$$\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \quad \Longrightarrow \quad \rho_t(X) \leq \rho_t(Y).$$

Der nachfolgende Satz ist elementar bei der Herleitung einer robusten Darstellung für bedingte konvexe und kohärente Risikomaße für Prozesse und allen nachfolgenden Aussagen. Wir identifizieren Risikomaße für Prozesse $\rho_t : \mathcal{R}_t^\infty \to L_t^\infty$ auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Risikomaßen für Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t : \bar{L}^\infty \to \bar{L}_t^\infty$ auf $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ und können deshalb die Ergebnisse aus Kapitel 2 nutzen.

Proposition 3.11 *Jedes bedingte konvexe (kohärente) Risikomaß für Prozesse $\rho_t : \mathcal{R}_t^\infty \to L_t^\infty$ definiert ein bedingtes konvexes (kohärentes) Risikomaß für Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t : \bar{L}^\infty \to \bar{L}_t^\infty$ durch*

$$\bar{\rho}_t(X) = -X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} - \cdots - X_{t-1}\mathbb{1}_{\{t-1\}} + \rho_t(X)\mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}, \quad X \in \mathcal{R}^\infty. \tag{3.5}$$

Hierbei definieren wir $\rho_t(X) = \rho_t \circ \pi_{t,T}(X)$ für $X \in \mathcal{R}^\infty$.

Umgekehrt ist jedes bedingte konvexe (kohärente) Risikomaß für Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t$ von der Form (3.5) *mit einem bedingten konvexen (kohärenten) Risikomaß für Prozesse ρ_t.*

Alternativ verwenden wir im Folgenden die Notation

$$\bar{\rho}_t(X) = (-X_0, \dots, -X_{t-1}, \rho_t(X), \rho_t(X), \dots,).$$

Beweis. (Siehe Proposition 3.6 in [7])
(a) Es lässt sich leicht einsehen, dass durch Gleichung (3.5) ein bedingtes konvexes beziehungsweise kohärentes Risikomaß für Zufallsvariablen definiert wird. Wir zeigen lediglich bedingte Cash-Invarianz und bedingte Konvexität aus Definition 2.1. Sei also $\rho_t : \mathcal{R}_t^\infty \to L_t^\infty$, $t \in \mathbb{T}$, ein bedingtes konvexes (kohärentes) Risikomaß.

Sei $m \in \bar{L}_t^\infty = \mathcal{R}_{0,t}^\infty$. Dann ist m von der Form $m = (m_0, \dots, m_{t-1}, m_t, m_t, \dots)$ mit $m_i \in L_i^\infty$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_t(X+m) &= (-X_0 - m_0, \dots, -X_{t-1} - m_{t-1}, \rho_t(X+m), \rho_t(X+m), \dots,) \\
&= (-X_0 - m_0, \dots, -X_{t-1} - m_{t-1}, \rho_t(X) - m_t, \rho_t(X) - m_t, \dots,) \\
&= \bar{\rho}_t(X) - m
\end{aligned}$$

mit der Cash-Invarianz von ρ_t. Damit ist die Cash-Invarianz von $\bar{\rho}_t$ gezeigt. Die bedingte Konvexität folgt, indem wir $\lambda \in L_t^\infty,\ 0 \leq \lambda \leq 1$, wählen und mit der Konvexität von ρ_t folgern:

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) &\leq (-(\lambda X_0 + (1-\lambda)Y_0), \dots, -(\lambda X_{t-1} + (1-\lambda)Y_{t-1}), \\
&\qquad \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y), \dots) \\
&= (-\lambda X_0, \dots, -\lambda X_{t-1}, \lambda\rho_t(X), \dots) \\
&\quad + (-(1-\lambda)Y_0, \dots, -(1-\lambda)Y_{t-1}, (1-\lambda)\rho_t(Y), \dots) \\
&= \lambda\bar{\rho}_t(X) + (1-\lambda)\bar{\rho}_t(Y).
\end{aligned}$$

Monotonie, Normalisierung und bedingte positive Homogenität folgen leicht auf ähnliche Weise.

(b) Um die zweite Aussage zu beweisen, müssen wir zunächst folgende Gleichheit festhalten (Siehe Proposition 2 in [6]):

$$\bar{\rho}_t(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{1}_A \bar{\rho}_t(X), \tag{3.6}$$

für $X \in \bar{L}^\infty,\ A \in \bar{\mathcal{F}}_t$ und ein bedingtes Risikomaß für Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t$.

Damit können wir die eigentliche Aussage beweisen. Sei $A_t = \Omega \times \{0, \dots, t-1\}$. Wir können leicht einsehen, dass $A_t \in \bar{\mathcal{F}}_t$ ist. Für ein bedingtes konvexes Risikomaß für

Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t$ gilt dann mit der obigen Gleichung und bedingter Cash-Invarianz sowie Normalisierung

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_t(X) &= \bar{\rho}_t(\mathbb{1}_A X + \mathbb{1}_{A^c} X)\\ &= \mathbb{1}_A \bar{\rho}_t(\mathbb{1}_A X + \mathbb{1}_{A^c} X) + \mathbb{1}_{A^c} \bar{\rho}_t(\mathbb{1}_A X + \mathbb{1}_{A^c} X)\\ &\overset{(3.6)}{=} \mathbb{1}_A \bar{\rho}_t(\mathbb{1}_A X) + \mathbb{1}_{A^c} \bar{\rho}_t(\mathbb{1}_{A^c} X)\\ &= -X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} - \cdots - X_{t-1} \mathbb{1}_{\{t-1\}} + \bar{\rho}_t(\mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} X) \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}.\end{aligned}$$

Offensichtlich definiert $\rho_t(X) = (\bar{\rho}_t(X))_t$ ein bedingtes konvexes Risikomaß für Prozesse $\rho_t : \mathcal{R}_t^\infty \to L_t^\infty$. □

Lemma 3.12 *Das Risikomaß $\rho_t : \mathcal{R}^\infty \to L_t^\infty$ ist genau dann stetig von oben, wenn das in Gleichung* (3.5) *definierte Risikomaß $\bar{\rho}_t : \bar{L}^\infty \to \bar{L}_t^\infty$ stetig von oben ist.*

Beweis. Folgt sofort mit Proposition 3.11. □

Als nächstes formulieren wir analog zu Kapitel 2 Akzeptanzmengen für stochastische Prozesse. Insbesondere ermöglichen uns diese, die minimale Penalty-Funktion für konvexe Risikomaße herzuleiten. Im Anschluss werden wir außerdem auf den Zusammenhang von Akzeptanzmengen für Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Akzeptanzmengen für Zufallsvariablen auf $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ eingehen. Offensichtlich ist die Akzeptanzmenge für bedingte Risikomaße für Prozesse ρ_t von der Form

$$\mathcal{A}_t = \{X \in \mathcal{R}_t^\infty \mid \rho_t(X) \leq 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}.$$

Dann ist die Akzeptanzmenge von $\bar{\rho}_t$, gegeben durch Gleichung (3.5), auf folgende Art und Weise darstellbar

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}_t &= \{X \in \bar{L}^\infty \mid \bar{\rho}_t(X) \leq 0 \ \bar{\mathbb{P}}\text{-fast sicher}\}\\ &= \{X \in \mathcal{R}^\infty \mid X_s \geq 0 \text{ für alle } s = 0, \ldots, t-1, \ \rho_t(X) \leq 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}\\ &= \mathcal{A}_t + \left(L_{0,+}^\infty \times \cdots \times L_{t-1,+}^\infty \times \{0\} \times \cdots\right). \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Nun können wir die bereits erwähnten Penalty-Funktionen einführen.

Definition 3.13 Eine Penalty-Funktion auf $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ ist für jedes $t \in \mathbb{T}$ durch

$$\alpha_t : \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}}) \to L^\infty_{t,+},$$
$$\operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})} (-\alpha_t(\bar{Q})) = 0$$

definiert.

Es lässt sich leicht einsehen, dass durch

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q \otimes \gamma \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}^Q \left[- \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t(Q \otimes \gamma) \right)$$

für eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ ein bedingtes konvexes Risikomaß für Prozesse definiert ist. Die Eigenschaften (i)-(iii) aus Definition 3.8 folgen sofort durch Einsetzen und die Normalisierung (iv) mit $\operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})} (-\alpha_t(\bar{Q})) = 0$. Tatsächlich werden wir einsehen, dass sich jedes bedingte konvexe Risikomaß für Prozesse, das von oben stetig ist, in dieser Form mit spezieller minimaler Penalty-Funktion darstellen lässt. Diese Darstellung werden wir im Folgenden herleiten und zudem die Menge $\mathcal{P}$ präzisieren.

Definition 3.14 Für jedes bedingte konvexe Risikomaß ρ_t und jedes $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ ist die minimale Penalty-Funktion definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha_t^{\min}(\bar{Q}) &= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q \left[- \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{R}^\infty} \left(\mathbb{E}^Q \left[- \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \rho_t(X) \right). \end{aligned}$$

Theorem 3.6 liefert die Dekomposition $\bar{Q} = Q \otimes c = Q \otimes \gamma$.

Das nachfolgende Lemma setzt die minimale Penalty-Funktion eines Risikomaßes für Prozesse ρ_t mit der minimalen Penalty-Funktion eines Risikomaßes für Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t$ auf dem Produktraum in Zusammenhang.

Lemma 3.15 *Für jedes $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ ist die minimale Penalty-Funktion von $\bar{\rho}_t$ gegeben durch*

$$\bar{\alpha}_t^{\min}(\bar{Q}) = \alpha_t^{\min}(\bar{Q}) \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q \left[- \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}.$$

Hierbei ist $\alpha_t^{\min}(\bar{Q})$ die minimale Penalty-Funktion von ρ_t und $\bar{Q}$ ist von der Form

$\bar{Q} = Q \otimes c = Q \otimes \gamma$ gemäß Theorem 3.6 mit $\gamma \in \Gamma(Q)$ und $c \in \mathfrak{C}(Q)$. $\alpha_t^{\min}(Q \otimes c)$ ist Q-fast sicher wohldefiniert auf $\{c_t > 0\}$.

Beweis. (Siehe Abschnitt 3.2 in [7]) Es gilt gemäß Kapitel 2

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_t^{\min}(\bar{Q}) &\overset{(2.4)}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \bar{\mathcal{A}}_t} \mathbb{E}^{\bar{Q}}[-X \mid \bar{\mathcal{F}}_t] \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \bar{\mathcal{A}}_t} \left(-X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} - \cdots - X_{t-1} \mathbb{1}_{\{t-1\}} + \mathbb{E}^Q \left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \right) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q \left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \\
&= \alpha_t^{\min}(\bar{Q}) \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t},
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt Korollar 3.7 und im dritten Schritt Gleichung (3.7) verwendet wurde. □

Wir können nun als Hauptresultat dieses Abschnitts eine robuste Darstellung für von oben stetige bedingte konvexe Risikomaße für Prozesse herleiten. Es handelt sich dabei also um eine zu Theorem 2.5 aus Kapitel 2 analoge Aussage. Insbesondere werden wir uns mithilfe von Proposition 2 die Ergbnisse aus diesem Theorem zu Nutze machen.

Theorem 3.16 *Ein bedingtes konvexes Risikomaß für Prozesse $\rho_t : \mathcal{R}^\infty \to L_t^\infty$ ist genau dann stetig von oben, falls es der robusten Darstellung*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t^{loc}} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma \in \Gamma(Q)} \left(\mathbb{E}^Q \left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(Q \otimes \gamma) \right), \quad X \in \mathcal{R}^\infty$$

genügt. Analog gilt für den zugrunde liegenden Auszahlungsprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$, der den kumulierten Auszahlungsprozess $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ durch $X_t = \sum_{s=0}^t Y_s$ erzeugt,

$$\rho_t(Y) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t^{loc}} \operatorname*{ess\,sup}_{c \in \mathfrak{C}(Q)} \left(\mathbb{E}^Q \left[-\sum_{s=t}^{T} \frac{c_s}{c_t} Y_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(Q \otimes c) \right), \quad Y \in \mathcal{R}^\infty.$$

Hierbei ist

$$\mathcal{Q}_t^{loc} = \{Q \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}) \mid Q = \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{F}_t\}.$$

Lemma 3.17 *Es sei $\bar{\mathcal{Q}}_t = \{\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}}) \mid \bar{Q} = \bar{\mathbb{P}} \text{ auf } \bar{\mathcal{F}}_t\}$. Für $\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ mit Zerlegung*

$\bar{Q} = Q \otimes \gamma = Q \otimes c$ und $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mu$ gilt für alle $t \in \mathbb{T}$

$$\bar{Q} \in \bar{\mathcal{Q}}_t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} Q &= \mathbb{P} \quad &&\textit{auf } \mathcal{F}_t \cap \{c_t > 0\} \\ \gamma_s &= \mu_s \quad &&Q\textit{-fast sicher für alle } s < t. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe Lemma B.5 in [7] □

Beweis von Theorem 3.16. (Siehe Theorem 3.8 in [7]) Wir zeigen die Aussage lediglich für den Prozess γ. Die analoge Aussage über den Diskontierungsprozess c folgt mittels Theorem 3.6. Wie bereits erwähnt, nutzen wir Theorem 2.5 aus Kapitel 2 um die Aussage herzuleiten. Dazu halten wir zunächst fest, dass gemäß Lemma 3.12 die Stetigkeit von oben von ρ_t äquivalent zu der selben Eigenschaft für $\bar{\rho}_t$ ist und uns deshalb Theorem 2.5 die Darstellung

$$\bar{\rho}_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q} \in \bar{\mathcal{Q}}_t} \left(\mathbb{E}^{\bar{Q}} \left[-X \mid \bar{\mathcal{F}}_t \right] - \bar{\alpha}_t^{\min}(\bar{Q}) \right)$$

für $\bar{\mathcal{Q}}_t = \{\bar{Q} \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}}) \mid \bar{Q} = \bar{\mathbb{P}} \text{ auf } \bar{\mathcal{F}}_t\}$ und $X \in \bar{L}^\infty$ liefert. Nun folgt mit Korollar 3.7

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q} \in \bar{\mathcal{Q}}_t} (\mathbb{E}^{\bar{Q}}[-X \mid \bar{\mathcal{F}}_t] - \bar{\alpha}_t^{\min}(\bar{Q})) \\ &= -X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} - \dots - X_{t-1} \mathbb{1}_{\{t-1\}} \\ &\quad + \operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q} = Q \otimes \gamma \in \bar{\mathcal{Q}}_t} \left(\mathbb{E}^Q \left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(\bar{Q}) \right) \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}. \end{aligned}$$

Es gilt also gemäß Proposition 3.11

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q} = Q \otimes \gamma \in \bar{\mathcal{Q}}_t} \left(\mathbb{E}^Q \left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(\bar{Q}) \right).$$

Wir untersuchen nun die Dekomposition $\bar{Q} = Q \otimes \gamma \in \bar{\mathcal{Q}}_t$ näher. Dazu verwenden wir Lemma 3.17 und können zunächst festhalten, dass nach Konstruktion von c

$$c_t = \sum_{s \in \mathbb{T}_t} \mu_s > 0$$

gilt. Demnach ist $Q \in \mathcal{Q}_t^{loc}$. Außerdem gilt $\frac{\gamma_s}{c_t} = \frac{\gamma_s}{\sum_{k \in \mathbb{T}_t} \mu_k}$ für $s \in \mathbb{T}_t$ und wir können das essentielle Supremum über $\Gamma(Q)$ anstatt über $\left\{ \left(\frac{\gamma_s}{c_t} \right)_{s \in \mathbb{T}_t} \mid Q \otimes \gamma \in \bar{\mathcal{Q}}_t \right\}$ laufen lassen.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\bar{Q}=Q\otimes\gamma\in\bar{\mathcal{Q}}_t} \left(\mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s\in\mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(\bar{Q}) \right) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t^{loc},\ \gamma\in\Gamma(Q)} \left(\mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s\in\mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(Q\otimes\gamma) \right) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t^{loc}} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma\in\Gamma(Q)} \left(\mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s\in\mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right] - \alpha_t^{\min}(Q\otimes\gamma) \right).
\end{aligned}$$

□

Analog zu Kapitel 2 lässt sich zudem folgende Darstellung für kohärente Risikomaße folgern:

Korollar 3.18 *Ein bedingtes kohärentes Risikomaß für Prozesse $\rho_t : \mathcal{R}^\infty \to L_t^\infty$ ist genau dann stetig von oben, falls*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t^{loc}} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma\in\Gamma^0(Q)} \mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s\in\mathbb{T}_t} \frac{\gamma_s}{c_t} X_s \mid \mathcal{F}_t \right], \quad X\in\mathcal{R}^\infty$$

für $\Gamma^0(Q) = \{\gamma\in\Gamma(Q) \mid \alpha_t^{\min}(Q\otimes\gamma) = 0$ Q-fast sicher$\}$ gilt.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu Theorem 3.16, wobei hier Korollar 2.10 verwendet wird. □

3.2.2 Charakterisierung der Zeitkonsistenz

In Theorem 2.20 haben wir gezeigt, dass Zeitkonsistenz in Zusammenhang zu einer Supermartingal-Eigenschaft der Penalty-Funktion und des dynamischen konvexen Risikomaßes für Zufallsvariablen steht. Diese Aussage lässt sich ebenso für konvexe Risikomaße für Prozesse treffen. Wir benötigen einige Vorarbeiten, bevor wir die Aussage beweisen können.

Zunächst beweisen wir eine Dekomposition von Akzeptanzmengen. Dazu wählen wir eine analoge Herangehensweise wie in Kapitel 2 und definieren Akzeptanzmengen für die Risikobewertung auf Intervallen $[t, t+1]$ mit $t\in\mathbb{T}, t<T$, durch

$$\mathcal{A}_{t,t+1} = \{X\in\mathcal{R}_{t,t+1}^\infty \mid \rho_t(X)\le 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}.$$

Obige Akzeptanzmengen stehen auf folgende Weise mit Akzeptanzmengen von bedingten Risikomaßen für Zufallsvariablen auf dem Produktraum in Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}_{t,t+1} &= \{X \in \bar{L}^\infty_{t+1} \mid \bar{\rho}_t(X) \leq 0 \quad \bar{\mathbb{P}}\text{-fast sicher}\} \\ &= \mathcal{A}_{t,t+1} + (L^\infty_{0,+} \times \cdots \times L^\infty_{t-1,+} \times \{0\} \times \cdots).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Weiterhin gilt für die minimale Penalty-Funktion auf $[t, t+1]$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^{\min}_{t,t+1}(\bar{Q}) &\overset{(2.10)}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \bar{\mathcal{A}}_{t,t+1}} \mathbb{E}^{\bar{Q}}\left[-X \mid \bar{\mathcal{F}}_t\right] \\ &= \frac{1}{c_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} \gamma_s X_s \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \\ &\overset{(3.2)}{=} \frac{1}{c_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} c_s(X_s - X_{s-1}) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{c_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q\left[-\sum_{s \in \mathbb{T}_t} c_t X_t + c_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \\ &\overset{(3.1)}{=} \frac{1}{c_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q\left[-\gamma_t X_t - c_{t+1} X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}.\end{aligned}$$

mit $\bar{Q} = Q \otimes c = Q \otimes \gamma \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$. Dabei haben wir zunächst Korollar 3.7 mit der Dekomposition von $\bar{A}_t$ verwendet. Die Gleichung $(*)$ folgt, da Elemente $Y \in \mathcal{A}_{t,t+1}$ aus $\mathcal{R}^\infty_{t,t+1}$ und somit von der Form $Y = (0, \ldots, 0, Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+1}, \ldots)$ sind. Die minimale Penalty-Funktion des bedingten Risikomaßes für Prozesse auf $[t, t+1]$ ist also durch

$$\alpha^{\min}_{t,t+1}(\bar{Q}) = \frac{1}{c_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q\left[-\gamma_t X_t - c_{t+1} X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

gegeben. Diese Gleichung ist ausschließlich auf $\{c_t > 0\}$ Q-fast sicher wohldefiniert.

Damit lässt sich abschließend das Theorem zur Charakterisierung der Zeitkonsistenz formulieren:

Theorem 3.19 *Sei $(\rho_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein dynamisches konvexes Risikomaß für Prozesse auf $\mathcal{R}^\infty$ und sei ρ_t für alle $t \in \mathbb{T}$ stetig von oben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(\rho_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *ist zeitkonsistent.*

(ii) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+1} + \mathcal{A}_{t+1}$ *für alle* $t \in \mathbb{T},\ t < T$.

(iii) Für alle $t \in \mathbb{T}$, $t < T$ und $\bar{Q} = Q \otimes c \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ gilt

$$c_t \ \alpha_t^{\min}(Q \otimes c) = c_t \ \alpha_{t,t+1}^{\min}(Q \otimes c) + \mathbb{E}^Q \left[c_{t+1} \ \alpha_{t+1}^{\min}(Q \otimes c) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad Q\text{-fast sicher.}$$

(iv) Für alle $X \in \mathcal{R}^\infty$, $t \in \mathbb{T}$, $t < T$ und $\bar{Q} = Q \otimes c \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$ gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q \left[c_{t+1} \ (X_t + \rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q \otimes c)) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\leq c_t \ (X_t + \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(Q \otimes c)) \quad Q\text{-fast sicher.} \end{aligned}$$

Beweis. Wir werden uns in diesem Beweis hauptsächlich die Aussagen aus Theorem 2.20 zu Nutze machen. Dabei ist zu beachten, dass dort Teile der Aussagen für Zeitpunkte $t + s$ mit beliebigem $s \in \mathbb{T}$ bewiesen wurden. Mit leichten Anpassungen des Beweises lässt sich nachweisen, dass die getroffenen Aussagen auch für festes $s = 1$ gelten.

<u>*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*:</u> Wir werden hier nutzen, dass Zeitkonsistenz von ρ_t die Zeitkonsistenz von $\bar{\rho}_t$ impliziert und dass somit die Aufteilung der Akzeptanzmengen von Zufallsvariablen gilt. Um daraus die gesuchte Aussage zu folgern, halten wir zunächst eine kurze Erkenntnis fest und beweisen diese: Es gilt

$$\mathcal{A}_{t,t+1} = \mathcal{A}_{t,t+1} + (\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times L_{t,+}^\infty \times \{0\} \times \cdots)$$

Für den Beweis sei zunächst $X \in \mathcal{A}_{t,t+1}$ und $m \in (\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times L_{t,+}^\infty \times \{0\} \times \cdots)$, d.h. $m = (0, \ldots, 0, \hat{m}, 0, \ldots,)$ mit $\hat{m} \in L_{t,+}^\infty$. Offensichtlich ist $X + m \in \mathcal{R}_{t,t+1}^\infty$ und $X + m \in \mathcal{A}_{t,t+1}$, da $\rho_t(X + m) = \rho_t(X) - m \leq 0$ aus der Cash-Invarianz folgt. Umgekehrt gilt für $X \in \mathcal{A}_{t,t+1}$

$$X \in \mathcal{A}_{t,t+1} + (\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times L_{t,+}^\infty \times \{0\} \times \cdots)$$

und damit folgt die Gleichheit.

Nun kommen wir zum Beweis der eigentlichen Aussage. Es lässt sich leicht einsehen, dass die Zeitkonsistenz von ρ_t die Zeitkonsistenz des Risikomaßes für Zufallsvariablen $\bar{\rho}_t$ und umgekehrt impliziert. Wir nutzen daher Theorem 2.20 und folgern.

$$\bar{\mathcal{A}}_t = \bar{\mathcal{A}}_{t+1} + \bar{\mathcal{A}}_{t,t+1} \tag{3.9}$$

für Akzeptanzmengen von Risikomaßen für Zufallsvariablen. Zusammen mit den Gleichungen (3.7) und (3.8) liefert uns dies

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_t + (L^\infty_{0,+} \times \cdots \times L^\infty_{t-1,+} \times \{0\} \times \cdots) \\ &= \mathcal{A}_{t+1} + (L^\infty_{0,+} \times \cdots \times L^\infty_{t,+} \times \{0\} \times \cdots) \\ &\quad + \mathcal{A}_{t,t+1} + (L^\infty_{0,+} \times \cdots \times L^\infty_{t-1,+} \times \{0\} \times \cdots). \end{aligned}$$

Mithilfe der oben hergeleiteten Gleichheit folgt daraus die Behauptung

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t+1} + \mathcal{A}_{t,t+1}. \tag{3.10}$$

<u>$(ii) \Rightarrow (iii)$:</u> Es gilt für alle $t \in \mathbb{T}$, $t < T$ und $\bar{Q} = Q \otimes D \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{P}})$

$$\begin{aligned} c_t\ \alpha_t^{\min}(Q \otimes c) &= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}^Q \left[\sum_{s \in \mathbb{T}_t} -\gamma_s X_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t+1}} \mathbb{E}^Q \left[\sum_{s \in \mathbb{T}_t} -\gamma_s X_s \mid \mathcal{F}_t \right] + \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q \left[\sum_{s \in \mathbb{T}_t} -\gamma_s X_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\overset{(3.2)}{=} \mathbb{E}^Q \left[c_{t+1} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t+1}} \mathbb{E}^Q \left[- \sum_{s \in \mathbb{T}_{t+1}} \frac{\gamma_s}{c_{t+1}} X_s \mid \mathcal{F}_{t+1} \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q \left[- \sum_{s=t}^{T} c_s (X_s - X_{s-1}) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}^Q \left[c_{t+1}\ \alpha_{t+1}^{\min}(Q \otimes c) \mid \mathcal{F}_t \right] + \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}^Q \left[-\gamma_t X_t - c_{t+1} X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir uns die Struktur der Elemente aus A_{t+1} sowie $A_{t,t+1}$ zu Nutze gemacht und die Identität $\sum_{s=t}^T c_s(X_s - X_{s-1}) = -X_t(c_t - c_{t+1}) - c_{t+1}X_{t+1} = -\gamma_t X_t - c_{t+1} X_{t+1}$ in $(*)$ folgt aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) sowie wegen $\mathcal{A}_{t,t+1} \subset \mathcal{R}^\infty_{t,t+1}$.

<u>$(iii) \Rightarrow (iv)$:</u> Es lässt sich leicht nachrechnen, dass (iii) Aussage (iii) in Theorem 2.20 für Risikomaße für Zufallsvariablen impliziert. Dann liefert uns (iv) aus dem selben Theorem

$$\mathbb{E}^{\bar{Q}}[\bar{\rho}_{t+1}(X) + \bar{\alpha}_{t+1}^{\min}(\bar{Q}) \mid \bar{\mathcal{F}}_t] \leq \bar{\rho}_t(X) + \bar{\alpha}_t^{\min}(\bar{Q}), \quad X \in \mathcal{R}^\infty.$$

Nun wollen wir diese Aussage auf Risikomaße für Prozesse übertragen. Dazu betrachten wir zunächst die linke Seite der Ungleichung. Korollar 3.7 liefert

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\bar{Q}}[\bar{\rho}_{t+1}(X) + \bar{\alpha}_{t+1}^{\min}(\bar{Q}) \mid \bar{\mathcal{F}}_t] \\
&= -X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} - \cdots - X_{t-1}\mathbb{1}_{\{t-1\}} + \mathbb{E}^Q\left[-\frac{\gamma_t}{c_t}X_t + \sum_{s\in\mathbb{T}_{t+1}} \frac{\gamma_s}{c_t}(\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q)) \mid \mathcal{F}_t\right]\mathbb{1}_{\mathbb{T}_t} \\
&= -X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} - \cdots - X_{t-1}\mathbb{1}_{\{t-1\}} + \left(\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t}X_t + \mathbb{E}^Q\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}(\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q)) \mid \mathcal{F}_t\right]\right)\mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}.
\end{aligned}$$

Umgekehrt folgern wir mit Proposition 3.11 und 3.15 für die rechte Seite:

$$\bar{\rho}_t(X) + \bar{\alpha}_t^{\min}(\bar{Q}) = -X_0\mathbb{1}_{\{0\}} - \cdots - X_{t-1}\mathbb{1}_{\{t-1\}} + (\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(Q))\mathbb{1}_{\mathbb{T}_t}.$$

Zusammen ergibt dies

$$\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t}X_t + \mathbb{E}^Q\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}(\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(Q)) \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(Q).$$

Multiplikation mit c_t und Umstellen liefert dann die Behauptung.

<u>*(iv)* $\Rightarrow$ *(i)*:</u> Indem wir den vorherigen Beweisschritt umgekehrt angehen, können wir folgern, dass Punkt *(iv)* aus Theorem 2.20 ebenso gilt. Dieser liefert die Zeitkonsistenz von $\bar{\rho}_t$ und hieraus folgt auch die Zeitkonsistenz von ρ_t. □

4 Der Value-of-Information-Ansatz

In diesem Kapitel werden wir eine weitere Herangehensweise an die Risikobewertung vorstellen. Anders als in den vorherigen Kapiteln verstehen wir hier Risiko nicht als Betrag, der zur Absicherung des Investments vorgehalten werden muss, sondern als Wert von Informationen. In unserem Fall steht ein Investor vor einem Konsum-Entscheidungsproblem und das Risikomaß beschreibt den Betrag, den der Investor für den Erhalt der vollständigen Informationen über die ihm zur Verfügung stehenden Mittel, zu zahlen bereit wäre. Die Idee, den Mangel an Informationen zu quantifizieren und zur Risikobewertung zu nutzen, wurde erstmals in [9] und [10] präsentiert und bilden die Grundlage dieses Kapitels. Beide Arbeiten bilden die Grundlage dieses Kapitels. Es wird möglich sein sowohl einmalige Auszahlungen als auch Zahlungsströme über ein Zeitintervall $1, \dots, T$ zu bewerten. Wir werden das resultierende Maß in die bestehende Theorie einordnen und dabei feststellen, dass es sich nicht um ein kohärentes Risikomaß im Sinne von Teil 1 dieser Arbeit handelt. Es handelt sich um ein Abweichungs-Risikomaß, wie es in [11] eingeführt wurde.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels widmet sich der allgemeinen Konstruktion des Value-of-Information Risikomaßes für einmalige Auszahlungen. Dazu halten wir zunächst die Gewinnfunktion des Investors allgemein und folgern einige Eigenschaften. Um zu zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Abweichungs-Risikomaß handelt, betrachten wir im Anschluss ein konkretes Entscheidungsmodell mit fester Gewinnfunktion. Insbesondere lässt sich dafür eine Darstellung über den Value-at-Risk folgern.

Im zweiten Teil verallgemeinern wir die Erkenntnisse aus dem ersten Abschnitt auf die Bewertung von Zahlungsströmen. Wir konstruieren das Risikomaß zunächst für beliebige Nutzen- beziehungsweise Gewinnfunktionen und betrachten im Anschluss ein konkretes mehrstufiges Entscheidungsproblem mit gegebener Gewinnfunktion.

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit stellen wir eine Idee, die in [14] präsentiert wurde, vor: Wir definieren ein bedingtes Risikomaß als den maximierten erwarteten Gewinn eines klassischen Investors bedingt die zur Verfügung stehenden Informationen und erhalten dadurch zu jedem Zeitpunkt im Investitionszeitraum die Möglichkeit, das Risiko zu charakterisieren. Bei zugrunde liegendem Markov Entscheidungsmodell werden wir untersuchen, ob es sich unter kleinen Anpassungen um ein bedingtes kohärentes Risikomaß im Sinne von Kapitel 3 dieser Arbeit handelt.

4.1 Value-of-Information Risikomaß für einmalige Zahlungen

Wie bereits erwähnt, ist das Ziel dieses Abschnitt das Value-of-Information Risikomaß für einmalige Auszahlungen zu formulieren. Die allgemeine Konstruktion im ersten Unterabschnitt orientiert sich weitestgehend an der Ausarbeitung [10]. Um das entstandene Risikomaß in die bestehende Literatur einzuordnen, führen wir sowohl kohärente Abweichungs-Risikomaße als auch statische kohärente Risikomaße ein. Da Letztere die Risikobewertung nur zu einem fest gewählten Zeitpunkt ohne Berücksichtigung gewonnener Informationen ermöglichen, sind sie eine Vereinfachung der in Kapitel 2 vorgestellten bedingten kohärenten Risikomaße. Im Anschluss befassen wir uns mit den Zusammenhängen von besagten Abweichungs-risikomaßen und statischen Risikomaßen.

Da das Value-of-Information Risikomaß maßgeblich durch die gewählte Gewinnfunktion determiniert ist, können wir nicht alle Eigenschaften eines Abweichungs-Risikomaßes ohne Einschränkung beweisen. Das im Anschluss gewählte Beispiel, in dem wir ein konkretes Entscheidungsproblem wählen und somit eine konkrete Darstellung für die Gewinnfunktion erhalten, erfüllt jedoch die nötigen Eigenschaften. Insbesondere lässt sich nachweisen, dass der maximierte erwartete Nutzen in diesem Fall ein statisches kohärentes Risikomaß darstellt.

4.1.1 Konstruktion

Wir führen zunächst die erforderlichen mathematischen Grundlagen ein. Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben und als Gegenstand der Risikobewertung betrachten wir eine reell-wertige Zufallsvariable $Y \in L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei soll Y zum Beispiel eine zufällige Auszahlung zu einem beliebigen aber festen zukünftigen Zeitpunkt beschreiben. Wir nehmen an, dass der betrachtete Investor eine Konsum-Entscheidung a trifft, ohne Kenntnisse über den genauen Wert von Y zu haben. Wir verstehen a also als Funktion von den Informationen. Stellt man sich vor, dass dem Investor eine Informationsvariable M vor der Entscheidungsfindung zur Verfügung steht, so gilt $a = a(M)$. Dem klassischen Investor stellen wir den vollständig informierten Investor gegenüber, für den $M = Y$ gilt.

Anstatt mit Informationsvariablen zu arbeiten modellieren wir die dem Investor zur Verfügung stehenden Informationen mittels einer Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, d.h. wir nehmen an, dass a $\mathcal{G}$-messbar ist. Den Raum der möglichen Entscheidungen auf Basis von $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit $A_\mathcal{G} = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist } \mathcal{G}\text{-messbar}\}$. Für den vollständig informierten Investor gilt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Des Weiteren sollen in unserem Modell das Verhalten beziehungsweise die Präferenzen eines Investors durch eine Gewinn- beziehungsweise Nutzenfunktion $H : A_\mathcal{G} \times L^1 \to L^1$ beschrieben werden. Sowohl der klassische als auch der vollständig informierte Investor strebt dabei die Maximierung des erwarteten Gewinns beziehungsweise Nutzens an. Dies führt zu folgendem Entscheidungsproblem des klassisch informierten Investors:

$$\sup_{a \in A_\mathcal{G}} \mathbb{E}[H(a, Y)], \quad Y \in L^1.$$

Als direkte Folgerung daraus können wir nun das Value-of-Information Risikomaß formulieren.

Definition 4.1 Das Value-of-Information Risikomaß bei gegebener Information $\mathcal{G}$ sei gegeben durch

$$\phi_\mathcal{G}(Y) = \sup_{a \in A_\mathcal{F}} \mathbb{E}[H(a, Y)] - \sup_{a \in A_\mathcal{G}} \mathbb{E}[H(a, Y)], \quad Y \in L^1. \tag{4.1}$$

Weiterhin sei

$$\tilde{H}(a, Y) = \sup_{\tilde{a} \in A_\mathcal{F}} \mathbb{E}[H(\tilde{a}, Y)] - H(a, Y), \quad Y \in L^1,\ a \in A_\mathcal{G}$$

definiert. Dann kann das obige Risikomaß umgeschrieben werden zu

$$\phi_\mathcal{G}(Y) = \inf_{a \in A_\mathcal{G}} \mathbb{E}[\tilde{H}(a, Y)], \quad Y \in L^1.$$

Wir haben bereits erwähnt, dass wir dieses Maß als Geldbetrag interpretieren, den ein klassischer Investor dem vollständig informierten Investor für die Bereitstellung der vollständigen Informationen zu zahlen bereit wäre. Es stellt sich nun die Frage, welche Eigenschaften dieses Maß erfüllt.

Beim Value-of-Information Risikomaß handelt es sich nicht um ein statisches konvexes oder kohärentes Risikomaß, wie es in [1] definiert wurde und das die Grundlage für die in Kapitel 2 und 3 untersuchten Maße bildet. Wir werden aber im späteren Verlauf bei spezieller Nutzenfunktion zeigen können, dass es sich um ein Abweichungs-Risikomaß handelt. Diese wurden in [11] erstmals vorgestellt. Die Idee dabei ist, ein kohärentes Risikomaß nicht auf eine Zufallsvariable X anzuwenden, sondern auf $X - \mathbb{E}[X]$.

Wir werden zunächst kohärente Abweichungs-Risikomaße einführen und untersuchen, ob deren Eigenschaften vom allgemein gehalten Value-of-Information Risikomaß erfüllt werden. Im Anschluss definieren wir statische kohärente Risikomaße und zeigen, wie die beiden Herangehensweisen an die Risikobewertung zusammenhängen.

Definition 4.2 (Siehe S.35 in [12]) Eine Abbildung $\phi : L^1 \to \mathbb{R}$ heißt kohärentes Abweichungs-Risikomaß, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) ϕ ist nicht-negativ und strikt, d.h. für nicht konstantes $Y \in L^1$ gilt

$$\phi(Y) > 0$$

und $\phi(Y) = 0$ für konstantes Y.

(ii) ϕ ist translations-invariant, d.h. für $Y \in L^1$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi(Y + b) = \phi(Y).$$

(iii) ϕ ist positiv homogen, d.h. für $Y \in L^1$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$\phi(\lambda Y) = \lambda\phi(Y).$$

(iv) ϕ ist sub-additiv, d.h. für $Y, Z \in L^1$ gilt

$$\phi(Y + Z) \leq \phi(Y) + \phi(Z).$$

(v) ϕ ist monoton, d.h. für $Y, Z \in L^1$ mit $Y \leq Z$ gilt

$$\mathbb{E}[Y] - \phi(Y) \leq \mathbb{E}[Z] - \phi(Z).$$

Da das Value-of-Information Risikomaß maßgeblich durch die Struktur der Nutzen- beziehungsweise Gewinnfunktion des Investors determiniert ist, lässt sich nicht allgemein beweisen, dass es ein kohärentes Abweichungs-Risikomaß ist. Wir können hier lediglich Nicht-Negativität und Informations-Monotonie nachweisen. Letztere Eigenschaft besagt, dass das Risiko im Sinne des Value-of-Information Risikomaßes sinkt, wenn dem Investor mehr Informationen zur Verfügung stehen.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden wir zeigen, dass das Value-of-Information Risikomaß für das gewählte konkrete Konsumproblem tatsächlich ein kohärentes Abweichungs-Risikomaß ist.

Korollar 4.3 *Das Value-of-Information Risikomaß $\phi_{\mathcal{G}}$ ist nicht-negativ und informations-monoton, d.h. für $Y \in L^1$ und zwei σ-Algebren $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ gilt*

$$\phi_{\mathcal{G}_1}(Y) \geq \phi_{\mathcal{G}_2}(Y).$$

Beweis. Es lässt sich leicht einsehen, dass mehr Informationen, beschrieben durch $\mathcal{G}_2$, zu einem größeren maximierten erwarteten Gewinn beziehungsweise Nutzen führen. D.h. es gilt die Ungleichung

$$\sup_{a \in A_{\mathcal{G}_2}} \mathbb{E}[H(a, Y)] \geq \sup_{a \in A_{\mathcal{G}_1}} \mathbb{E}[H(a, Y)].$$

Mit Gleichung (4.1) folgen sofort die beiden Behauptungen. □

Als nächstes gehen wir auf den bereits erwähnten Zusammenhang von statischen kohärenten Risikomaßen und kohärenten Abweichungs-Risikomaßen ein. Dazu stellen wir zunächst eine Definition vor, die erstmals in [1] formuliert wurden.

Definition 4.4 Eine Abbildung $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ heißt statisches kohärentes Risikomaß, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) ρ ist Cash-invariant, d.h. für $Y \in L^1$ und $m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\rho(Y + m) = \rho(Y) - m.$$

(ii) ρ ist positiv homogen, d.h. für $Y \in L^1$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\rho(\lambda Y) = \lambda \rho(Y).$$

(iii) ρ ist sub-additiv, d.h. für $Y, Z \in L^1$ gilt

$$\rho(Y+Z) \leq \rho(Y) + \rho(Z).$$

(iv) ρ ist monoton, d.h. für $Y, Z \in L^1$ mit $Y \leq Z$ gilt

$$\rho(Y) \geq \rho(Z).$$

Die hier vorgestellten Risikomaße entsprechen den bedingten kohärenten Risikomaßen aus Definition 2.1 zum Zeitpunkt $t = 0$.

Theorem 4.5 *Sei ρ ein statisches kohärentes Risikomaß und es gelte*

$$\rho(Y) > \mathbb{E}[-Y], \quad \textit{für nicht-konstantes } Y \in L^1$$

und $\rho(Y) = \mathbb{E}[-Y]$ für konstantes Y. Dann ist die Abbildung $\phi : L^1 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\phi(Y) = \mathbb{E}[Y] + \rho(Y), \quad Y \in L^1,$$

ein kohärentes Abweichungs-Risikomaß.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus den Definitionen 4.2 und 4.4. □

4.1.2 Zweistufiges Konsumproblem

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Value-of-Information Risikomaß für ein konkretes zweistufiges Konsumproblem, welches ausführlich in [9] behandelt wurde. Das Konsumproblem ist auf folgende Weise definiert: Der betrachtete Marktteilnehmer geht zu Beginn eine Verpflichtung über zukünftigen Konsum in Höhe von $a \in \mathbb{R}$ ein. Dabei kann es sich beispielsweise um den Kauf eines Hauses oder Autos handeln. Im nächsten Schritt erhält er eine zufällige Auszahlung $Y \in L^1$. Der Marktteilnehmer verpflichtet sich somit zu Konsum, wobei ihm die Höhe der ihm zur Verfügung stehenden Mittel nicht bekannt ist.

Sollte der Konsum in der Höhe nicht der erhaltenen Auszahlung entsprechen, können zwei verschiedene Situationen auftreten. Falls $Y > a$ gilt, wird der überschüssige Betrag mit einem Faktor $d < 1$ diskontiert und der Investor behält $d(Y-a)^+$. Um sich gegen den Fall, dass der Konsum die Höhe der Auszahlung übersteigt, d.h. $Y < a$, abzusichern, muss der Investor eine Prämie in Höhe von $q(Y-a)^-$ mit Faktor $q>1$ entrichten. Die Entscheidung über die Höhe des Konsums trifft der Entscheider auf Grundlage der ihm zur Verfügung stehenden Informationen $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Aus diesem Grund nehmen wir an, dass die Entscheidungsfindung $\mathcal{G}$-messbar ist. $A_\mathcal{G}$ bezeichnet erneut die Menge der $\mathcal{G}$-messbaren Konsumentscheidungen.

Damit ergibt sich als Gewinnfunktion des Investors

$$H(a,Y) = a + d(Y-a)^+ - q(Y-a)^-, \quad Y \in L^1,\ a \in A_\mathcal{G}.$$

Zur Vereinfachung späterer Beweise geben wir hier eine Umformung der obigen Gewinnfunktion an:

$$\begin{aligned} H(a,Y) &= a + d(Y-a)^+ - q(Y-a)^- \\ &= a + d(Y-a) + d(Y-a)^- - q(Y-a)^- \\ &= dY + (1-d)a - (q-d)(Y-a)^-. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Da der Investor die Maximierung seines erwarteten Gewinns anstrebt, erhalten wir folgendes Maximierungsproblem:

$$\begin{aligned} U_\mathcal{G}(Y) &= \sup_{a \in A_\mathcal{G}} \mathbb{E}[H(a,Y)] \qquad (4.3) \\ &= \sup_{a \in A_\mathcal{G}} \mathbb{E}[a + d(Y-a)^+ - q(Y-a)^-], \quad Y \in L^1. \end{aligned}$$

Korollar 4.6 *$U_\mathcal{G}(Y)$ ist informations-monoton in $\mathcal{G}$ und es gilt*

$$U_\mathcal{F}(Y) = \mathbb{E}[Y]$$

und

$$U_\mathcal{G}(Y) \leq \mathbb{E}[Y].$$

Beweis. Aufgrund der Wahl der Konstanten, $d<1$ und $q>1$, lässt sich zunächst festhalten, dass

$$H(a,Y) = a + d(Y-a)^+ - q(Y-a)^- \leq Y$$

für $Y \in L^1$ und $a \in A_\mathcal{G}$ gilt. Für $a^* = Y$ wird das Maximum angenommen, d.h. $H(a^*,Y) = Y$. Da Y $\mathcal{F}$-messbar ist, folgt somit für das Optimierungsproblem des vollständig informierten Investors:

$$U_{\mathcal{F}}(Y) = \mathbb{E}[Y].$$

Wegen der Informations-Monotonie, die in Korollar 4.3 gezeigt wurde, ergibt sich für $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$$U_{\mathcal{G}}(Y) \leq U_{\mathcal{F}}(Y) = \mathbb{E}[Y].$$

□

Gemäß Definition 4.1 ist dann das Value-of-Information Risikomaß gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{G}}(Y) &= U_{\mathcal{F}}(Y) - U_{\mathcal{G}}(Y)\\ &= \mathbb{E}[Y] - U_{\mathcal{G}}(Y).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Korollar 4.7 *Die Abbildung $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$\rho(Y) = -U_{\mathcal{G}}(Y), \quad Y \in L^1,$$

ist ein statisches kohärentes Risikomaß. Insbesondere ist $\phi_{\mathcal{G}}$ ein kohärentes Abweichungs-Risikomaß.

Beweis. Im Folgenden zeigen wir die Axiome aus Definition 4.4 und nutzen im Anschluss Theorem 4.5.

(i): Die Cash-Invarianz lässt sich wie folgt beweisen: Sei $Y \in L^1$ und $m \in \mathbb{R}$. Wir fixieren eine Strategie $a \in A_{\mathcal{G}}$ und konstruieren durch $\tilde{a} = a - m \in A_{\mathcal{G}}$ eine weitere Strategie. Dann gilt

$$\begin{aligned}\rho(Y+m) &= -\sup_{a \in A_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[a + d(Y+m-a)^+ - q(Y+m-a)^-]\\ &= -\sup_{\tilde{a} \in A_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[\tilde{a} + m + d(Y-\tilde{a})^+ - q(Y-\tilde{a})^-]\\ &= \rho(Y) - m.\end{aligned}$$

(ii): Wir folgern die Homogenität mit einem ähnlichen Ansatz wie im Beweis von (i). Sei $Y \in L^1$ und $\lambda > 0$. Fixiere erneut eine Strategie $a \in A_{\mathcal{G}}$ und definiere durch

$\tilde{a} = \frac{a}{\lambda} \in A_{\mathcal{G}}$ eine weitere. Es folgt

$$\begin{aligned}\rho(\lambda Y) &= -\sup_{a \in A_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[a + d(\lambda Y - a)^+ - q(\lambda Y - a)^-] \\ &= -\sup_{\tilde{a} \in A_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[\lambda \tilde{a} + \lambda d(Y - \tilde{a})^+ - \lambda q(Y - \tilde{a})^-] \\ &= \lambda \rho(Y).\end{aligned}$$

(iii): Um die Sub-Additivität zu zeigen, seien nun a_Y^* und a_Z^* optimale Strategien, sodass

$$\begin{aligned}\rho(Y) &= -\mathbb{E}[a_Y^* + d(Y - a_Y^*)^+ - q(Y - a_Y^*)^-] \\ \rho(Z) &= -\mathbb{E}[a_Z^* + d(Z - a_Z^*)^+ - q(Z - a_Z^*)^-]\end{aligned}$$

gilt. Dann können wir folgern:

$$\begin{aligned}\rho(Y + Z) &= -\sup_{a \in A_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[a + d(Y + Z - a)^+ - q(Y + Z - a)^-] \\ &\leq -\mathbb{E}[a_Y^* + a_Z^* + d(Y + Z - a_Y^* - a_Z^*)^+ - q(Y + Z - a_Y^* - a_Z^*)^-] \\ &\leq -\mathbb{E}[a_Y^* + d(Y - a_Y^*)^+ - q(Y - a_Y^*)^-] - \mathbb{E}[a_Z^* + d(Z - a_Z^*)^+ - q(Z - a_Z^*)^-] \\ &= \rho(Y) + \rho(Z).\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung lässt sich leicht einsehen, indem man Gleichung (4.2) betrachtet.

(iv): Sei $Y, Z \in L^1$, $Y \leq Z$. Um die Monotonie zu folgern, wählen wir für die Auszahlung Y die optimale Strategie $a^* \in A_{\mathcal{G}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\rho(Y) &= -\mathbb{E}[a^* + d(Y - a^*)^+ - q(Y - a^*)^-] \\ &\geq -\mathbb{E}[a^* + d(Z - a^*)^+ - q(Z - a^*)^-] \\ &\geq -\sup_{a \in A_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[a + d(Z - a)^+ - q(Z - a)^-] \\ &= \rho(Z).\end{aligned}$$

Die Ungleichung

$$\rho(Y) = -U_{\mathcal{G}}(Y) \geq \mathbb{E}[-Y], \quad Y \in L^1$$

wurde bereits in Korollar 4.6 gezeigt und wir können somit mit Theorem 4.5 die zweite Behauptung, dass $\phi_{\mathcal{G}}$ ein kohärentes Abweichungs-Risikomaß ist, folgern. $\square$

Eine sehr interessante Eigenschaft des obigen Risikomaßes ist, dass es sich über den Conditional-Value-at-Risk (CVaR) darstellen lässt. Sowohl der Value-at-Risk als auch der Conditional-Value-at-Risk sind sehr populäre Risikomaße, für die zudem Berechnungen relativ einfach durchzuführen sind. Wir geben hier lediglich die Definitionen und einige im späteren Verlauf dieser Ausarbeitung benötigte Eigenschaften an. Dabei dient weitestgehende [12] als Grundlage.

Definition 4.8 (Siehe Definition 2.33 und 2.41 in [12]) Sei $F(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ die Verteilungsfunktion und $F^{-1}(p) = \inf\{y : F(y) \geq p\}$ die Quantilfunktion von Y.

1. Sei $0 < \beta < 1$ ein festes Niveau. Der Value-at-Risk (VaR) ist definiert durch

$$\mathrm{VaR}_\beta(Y) = F^{-1}(\beta).$$

2. Sei $0 < \beta \leq 1$ ein festes Niveau. Der Conditional-Value-at-Risk (CVaR) ist definiert durch

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}_\beta(Y) &= \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(p)dp \\ &= \mathbb{E}[Y \mid Y \leq F^{-1}(\beta)] - \left(\frac{F(F^{-1}(\beta)) - \beta}{\beta}\right) F^{-1}(\beta).\end{aligned}$$

Proposition 4.9 *Für ein festes Niveau $0 < \beta \leq 1$ ist der Conditional-Value-at-Risk (CVaR) für ein $Y \in L^1$ gegeben durch*

$$CVaR_\beta(Y) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \left\{a - \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(Y-a)^-]\right\}. \tag{4.5}$$

Das Maximum wird für $a^* = VaR_\beta(Y)$ angenommen und es gilt somit

$$CVaR_\beta(Y) = VaR_\beta(Y) - \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(Y - VaR_\beta(Y))^-].$$

Beweis. Siehe Theorem 2.34 in [12]. □

Lemma 4.10 *VaR und CVaR sind Cash-invariant, d.h. für $Y \in L^1$ und $m \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}VaR_\beta(Y+m) &= VaR_\beta(Y) + m,\\ CVaR_\beta(Y+m) &= CVaR_\beta(Y) + m.\end{aligned}$$

Beweis. Siehe Proposition 2.35 und 2.42 in [12]. □

Bevor wir im nachfolgenden Lemma eine Darstellung des Value-of-Information Risikomaßes über den Conditional-Value-at-Risk herleiten können, müssen wir präzisieren, was wir unter $\mathrm{CVaR}_\beta(Y \mid \mathcal{G})$ für die bedingte Verteilung $Y \mid \mathcal{G}$ verstehen wollen. Dabei verwenden wir in angepasster Form eine Defintion, die in [14] gegeben wurde. Es sei

$$\mathrm{CVaR}_\beta(Y \mid \mathcal{G}) = \sup_{a\ \mathcal{G}\text{-messbar}} \left\{ a - \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(Y-a)^- \mid \mathcal{G}] \right\}.$$

Lemma 4.11 *Sei $Y|\mathcal{G}$ die bedingte Verteilung von Y gegeben $\mathcal{G}$. Dann gilt*

$$U_\mathcal{G}(Y) = d\mathbb{E}[Y] + (1-d)\mathbb{E}[CVaR_\beta(Y|\mathcal{G})]$$

und

$$\phi_\mathcal{G}(Y) = (1-d)\left(\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[CVaR_\beta(Y|\mathcal{G})]\right)$$

mit $\beta = \frac{1-d}{q-d}$.

Beweis. (Siehe Lemma 1 in [9]) Wir nutzen die Umformung (4.2) und beginnen mit dem Fall $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$.

$$\begin{aligned} U_{\{\emptyset,\Omega\}}(Y) &= \sup_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[H(a,Y)] \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[dY + (1-d)a - (q-d)(Y-a)^-] \\ &= d\mathbb{E}[Y] + (1-d)\sup_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[a - \frac{q-d}{1-d}(Y-a)^-\right] \\ &= d\mathbb{E}[Y] + (1-d)\,\mathrm{CVaR}_\beta(Y) \end{aligned}$$

mit $\beta = \frac{1-d}{q-d}$.
Es sei nun eine allgemeine Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ gegeben. Dann können wie die gesuchte Identität wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} U_\mathcal{G}(Y) &= \sup_{a\ \mathcal{G}\text{-messbar}} \{\mathbb{E}[H(a,Y)]\} \\ &= \sup_{a\ \mathcal{G}\text{-messbar}} \{\mathbb{E}[\mathbb{E}[H(a,Y) \mid \mathcal{G}]]\} \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}[\sup_{a\ \mathcal{G}\text{-messbar}} \{\mathbb{E}[H(a,Y) \mid \mathcal{G}]\}] \\ &= \mathbb{E}\left[d\mathbb{E}[Y] + (1-d)\,\mathrm{CVaR}_\beta(Y \mid \mathcal{G})\right] \\ &= d\mathbb{E}[Y] + (1-d)\mathbb{E}[\mathrm{CVaR}_\beta(Y|\mathcal{G})]. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}[H(a, Y) \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y]$ gilt, folgt $(*)$ mittels majorisierter Konvergenz. Die zweite Aussage des Lemmas folgt sofort mit der Definition von $\phi_{\mathcal{G}}$ in Gleichung (4.4). □

4.2 Value-of-Information Risikomaß für Zahlungsströme

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die bisherigen Erkenntnisse auf Zahlungsströme über ein diskretes Zeitintervall $1, \ldots, T$. Der Investor hat hierbei die Möglichkeit zu Beginn jeder Periode eine Investmententscheidung zu treffen und strebt damit die Maximierung seines erwarteten Gewinns über den gesamten Investitionszeitraum an.

Wir starten erneut mir einer Definitionen des Value-of-Information Risikomaßes bei allgemeiner Gewinnfunktion. Daran schließen wir als konkretes Beispiel die mehrperiodische Variante des zuvor betrachteten Konsumproblems an und werden einige interessante Eigenschaften folgern.

4.2.1 Konstruktion

Diesem Abschnitt liegt erneut ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zugrunde. Wie bereits erwähnt wurde, streben wir nun eine Risikobewertung über ein diskretes Zeitintervall $1, \ldots, T$ an. Dazu ist eine Filtration $\bar{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ gegeben, die die verfügbaren Informationen beschreibt. Hierbei sei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Analog zum eindimensionalen Fall soll nun ein stochastischer Prozess $Y = (Y_t)_{t=1,\ldots,T} \in \mathcal{R}^1$, wobei

$$\mathcal{R}^1 = \{X = (X_t)_{t=1,\ldots,T} : X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \text{ für alle } t = 1, \ldots, T\}$$

sei, den zufälligen Zahlungsstrom mit Auszahlungen zu den Zeitpunkten $1, \ldots, T$ modellieren. Offensichtlich ist Y $\bar{\mathcal{F}}$-adaptiert.

Die getroffenen Investmententscheidungen modellieren wir mithilfe eines vorhersehbaren Prozesses $a = (a_t)_{t=0,\ldots,T-1}$, d.h. für alle $t = 0, \ldots, T-1$ ist a_t $\mathcal{F}_t$-messbar. Dabei erfolgt die Entscheidungsfindung a_t über den Konsum in Periode $t+1$ nach Offenlegung der Informationen $\mathcal{F}_t$ und vor Erhalt von $\mathcal{F}_{t+1}$ beziehungsweise der Auszahlung Y_{t+1}. Wir bezeichnen den Raum der möglichen Entscheidungen zu den Zeitpunkten $t = 0, \ldots, T-1$ mit

$$A_t = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-messbar}\}$$

und $A = A_0 \times \cdots \times A_{T-1}$. Die Mengen A_t sind hier allgemein gehalten, können aber entsprechend der gewählten Anwendung präzisiert werden.

Analog zu Abschnitt 4.1.1 sei eine mehrdimensionale Gewinn- beziehungsweise Nutzenfunktion durch

$$H(a, Y) = H(a_0, \dots, a_{T-1}, Y_1, \dots, Y_T), \quad Y \in \mathcal{R}^1,\ a \in A$$

gegeben. Nehmen wir an, dass der Investor die Maximierung seines erwarteten Gewinns anstrebt, erhalten wir das dynamische Entscheidungsproblem:

$$\sup_{a \in A} \mathbb{E}[H(a, Y)], \quad Y \in \mathcal{R}^1.$$

Vergleichen wir dieses erneut mit dem des vollständig informierten Investors, für den a_t für alle $t = 0, \dots, T-1$ $\mathcal{F}_T$-messbar ist und dessen mögliche Entscheidungen die Menge

$$\bar{A} = \{(a_0, \dots, a_{T-1}) \in \mathbb{R}^T : a_t \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar für alle } t = 0, \dots, T-1\}$$

beschreibt, so erhalten wir dadurch das gesuchte Value-of-Information Risikomaß.

Definition 4.12 Das dynamische Value-of-Information Risikomaß bei zur Verfügung stehender Information $\bar{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ ist gegeben durch

$$\psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y) = \sup_{a \in \bar{A}} \mathbb{E}[H(a, Y)] - \sup_{a \in A} \mathbb{E}[H(a, Y)], \quad Y \in \mathcal{R}^1.$$

Weiterhin gelte

$$\tilde{H}(a, Y) = \sup_{\bar{a} \in \bar{A}} \mathbb{E}[H(\bar{a}, Y)] - H(a, Y), \quad Y \in \mathcal{R}^1,\ a \in A.$$

Dann kann das obige Risikomaß umgeschrieben werden zu

$$\psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y) = \inf_{a \in A} \mathbb{E}[\tilde{H}(a, Y)], \quad Y \in \mathcal{R}^1.$$

4.2.2 Mehrstufiges Konsumproblem

Wir formulieren das nachfolgende mehrstufige Konsumproblem analog zu dem in Abschnitt 4.1.2 eingeführten Problem mit dem Unterschied, dass wir Konsum über einen

Zeitraum $1, \ldots, T$ mit zufälligen Auszahlungen $Y = (Y_t)_{t=1,\ldots,T} \in \mathcal{R}^1$ betrachten. Dabei kann es sich beispielsweise um die regelmäßigen Auszahlungen eines Pensions-Fonds handeln. Im Anschluss an die Definition zeigen wir unter anderem Cash-Invarianz, Sub-Additivität und Informations-Monotonie des Value-of-Information Risikomaßes. Als Literaturgrundlage dient hier erneut [9].

Die Entscheidung über den Konsum wird durch einen reell-wertigen vorhersehbaren Prozess $a = (a_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ beschrieben und wir bezeichnen die Menge der zulässigen Entscheidungen zum Zeitpunkt t erneut mit A_t. Weiterhin seien Diskontierungsfaktoren $(c_t)_{t=1,\ldots,T+1}$ gegeben und analog zum einstufigen Beispiel muss sich der Investor mit Faktor q_t gegen einen Verlust zum Zeitpunkt t absichern. An die zuvor eingeführten Folgen $(c_t)_{t=1,\ldots,T+1}$ und $(q_t)_{t=1,\ldots,T}$ stellen wir folgende ökonomisch motivierte Anforderungen:

$$c_{t+1} \leq c_t \leq q_t, \quad \text{für alle } t = 1, \ldots, T.$$

Eine typische Wahl der Konstanten ist $c_t = (1+r)^{-t}$ für $t = 1, \ldots, T+1$ und $q_t = q_0(1+r)^{-t}$ für $t = 1, \ldots, T$, einen fest gewählten Zinssatz $r > 0$ und eine Konstante $q_0 > 1$. Das Vermögen des Investors beschreiben wir durch einen Prozess $(V_t)_{t=0,\ldots,T}$, wobei

$$\begin{aligned} &V_0 = 0, \\ &V_t = V_{t-1}^+ + Y_t - a_{t-1}, \quad \text{für } t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

gilt. Ein möglicher Verlust in der Periode t wird durch eine Versicherungszahlung von

$$q_t V_t^- = q_t (V_{t-1}^+ + Y_t - a_{t-1})^-, \quad t = 1, \ldots, T,$$

abgesichert und ein Überschuss am Ende der Investition V_T^+ mit Faktor c_{T+1} diskontiert. Dies führt zu der Gewinnfunktion

$$H(a,Y) = H(a_0, \ldots, a_{T-1}, Y_1, \ldots, Y_T) = \sum_{t=1}^{T} (c_t a_{t-1} - q_t V_t^-) + c_{T+1} V_T^+, \quad Y \in \mathcal{R}^1,\ a \in A,$$

und dem Optimierungsproblem des Investors

$$\bar{U}_{\mathcal{F}}(Y) = \sup_{a \in A} \mathbb{E}[H(a,Y)] = \sup_{a \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} (c_t a_{t-1} - q_t V_t^-) + c_{T+1} V_T^+\right]. \tag{4.6}$$

Aufgrund der Wahl der Konstanten präferiert der Investor heutigen Konsum gegenüber zukünftigen Konsum und ist zudem darin bestrebt einen Shortfall, d.h. $Y_t < a_t$, zu vermeiden. Diese Erkenntnis motiviert das nachfolgende Lemma, in dem wir das Optimierungsproblem des vollständig informierten Investors näher untersuchen. Offensichtlich gilt hier für alle $t = 0, \dots, T-1$, dass a_t $\mathcal{F}_T$-messbar ist.

Lemma 4.13 *Sei $a \in A$ und $Y \in \mathcal{R}^1$. Es gilt folgende Ungleichung:*

$$H(a, Y) = \sum_{t=1}^{T} (c_t a_{t-1} - q_t V_t^-) + c_{T+1} V_T^+ \leq \sum_{t=1}^{T} c_t Y_t.$$

Aus Sicht des vollständig informierten Investors ist die optimale Strategie durch $(a_0^*, \dots, a_{T-1}^*) = (Y_1, \dots, Y_T)$ gegeben und die obere Schranke wird angenommen, d.h. $H(a^*, Y) = \sum_{t=1}^{T} c_t Y_t$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Ungleichung. Wegen $q_t \geq c_t \geq c_{t+1}$ für $t = 1, \dots, T$, gilt für eine beliebige Strategie $(a_0, \dots, a_{T-1}) \in A$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T} (c_t a_{t-1} - q_t V_t^-) + c_{T+1} V_T^+ \\
&\leq \sum_{t=1}^{T} c_t (a_{t-1} - V_t^-) + c_{T+1} V_T^+ \\
&= \sum_{t=1}^{T} c_t (a_{t-1} + V_t - V_t^+) + c_{T+1} V_T^+ \\
&= \sum_{t=1}^{T} c_t (V_{t-1}^+ + Y_t - V_t^+) + c_{T+1} V_T^+ \\
&= \sum_{t=1}^{T} c_t Y_t + \sum_{t=1}^{T} c_t V_{t-1}^+ - \sum_{t=1}^{T} c_t V_t^+ + c_{T+1} V_T^+ \\
&= \sum_{t=1}^{T} c_t Y_t + \sum_{t=0}^{T} c_{t+1} V_t^+ - \sum_{t=1}^{T} c_t V_t^+ \\
&\leq \sum_{t=1}^{T} c_t Y_t + c_1 V_0^+ + \sum_{t=1}^{T} c_t V_t^+ - \sum_{t=1}^{T} c_t V_t^+ \\
&= \sum_{t=1}^{T} c_t Y_t,
\end{aligned}$$

wobei wir hier $V_t = V_{t-1}^+ + Y_t - a_{t-1}$ und $V_0 = 0$ genutzt haben.

Der zweite Teil der Aussage folgt, da bei gewählter Strategie $(a_0^*, \dots, a_{T-1}^*) = (Y_1, \dots, Y_T)$ für den Vermögensprozess

$$(V_0, \dots, V_T) = (0, \dots, 0)$$

gilt. In diesem Fall wird die hergeleitete obere Schranke angenommen. □

Indem wir Lemma 4.13 nutzen, können wir schließlich das dynamische Value-of-Information Risikomaß für dieses Entscheidungsproblem formulieren. Dazu setzen wir in $\psi_{\bar{\mathcal{F}}}$ aus Definition (4.12) die Gleichung (4.6) und das Ergebnis aus Lemma 4.13 ein.

$$\begin{aligned}
\psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y) &= \sum_{t=1}^{T} c_t \mathbb{E}[Y_t] - \bar{U}_{\bar{\mathcal{F}}}(Y) && (4.7)\\
&= \inf_{a \in A} \left\{ \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} c_t Y_t\right] - \mathbb{E}[H(a, Y)] \right\}\\
&= \inf_{a \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} (c_t(Y_t - a_{t-1}) + q_t V_t^-) - c_{T+1} V_T^+\right], \quad Y \in \mathcal{R}^1. && (4.8)
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Möglichkeit geschaffen, die Risikobewertung eines Prozesses vorzunehmen.

Theorem 4.14 *Das dynamische Value-of-Information Risikomaß $\psi_{\bar{\mathcal{F}}}$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\psi_{\bar{\mathcal{F}}}$ ist nicht-negativ beziehungsweise strikt, d.h. für $Y \in \mathcal{R}^1$ gilt

$$\psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y) \geq 0$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $(Y_1, \dots, Y_T)$ ein konstanter Vektor ist.

(ii) $\psi_{\bar{\mathcal{F}}}$ ist translations-invariant, d.h. für $Y \in \mathcal{R}^1$ und $b = (b_t)_{t=1,\dots,T} \in \mathbb{R}^T$ gilt

$$\psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y + b) = \psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y).$$

(iii) $\psi_{\bar{\mathcal{F}}}$ ist positiv homogen, d.h. für $Y \in \mathcal{R}^1$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\psi_{\bar{\mathcal{F}}}(\lambda Y) = \lambda \psi_{\bar{\mathcal{F}}}(Y).$$

(iv) $\psi_{\bar{\mathcal{F}}}$ ist informations-monoton, d.h. für Filtrationen $\bar{\mathcal{F}}^{(1)} = (\mathcal{F}_t^{(1)})_{t=0,\dots,T}$ und

$\bar{\mathcal{F}}^{(2)} = (\mathcal{F}_t^{(2)})_{t=0,\dots,T}$ *mit* $\mathcal{F}_t^{(1)} \subset \mathcal{F}_t^{(2)}$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$ *gilt:*

$$\psi_{\bar{\mathcal{F}}^{(1)}}(Y) \geq \psi_{\bar{\mathcal{F}}^{(2)}}(Y).$$

Monotonie und Sub-Additivität werden wir am Ende des Kapitels im Markov-Entscheidungsmodell beweisen.

Beweis. (i): Diese Aussage folgt sofort mit Lemma 4.13.

(ii): Sei $Y \in L^1$ und $b = (b_t)_{t=1,\dots,T} \in \mathbb{R}^T$. Wähle weiterhin eine feste Strategie $(a_0, \dots, a_{T-1}) \in A$. Damit definieren wir den Vermögensprozess von $Y + b$ durch

$$\begin{aligned} &V_{0,b} = 0, \\ &V_{t,b} = V_{t-1,b}^+ + Y_t + b_t - a_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Wir definieren eine weitere Strategie durch $(\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{T-1}) = (a_0 - b_1, \dots, a_{T-1} - b_T)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\bar{\mathcal{F}}}(Y + b) &= \sup_{(a_0,\dots,a_{T-1}) \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^T (c_t a_{t-1} - q_t V_{t,b}^-) + c_{T+1} V_{T,b}^+\right] \\ &= \sup_{(\tilde{a}_0,\dots,\tilde{a}_{T-1}) \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^T (c_t(\tilde{a}_{t-1} + b_t) - q_t \tilde{V}_t^-) + c_{T+1} \tilde{V}_T^+\right] \\ &= \sum_{t=1}^T c_t b_t + \bar{U}_{\bar{\mathcal{F}}}(Y), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{V}$ Vermögensprozess von Y bei Strategie $\tilde{a}$ ist. Indem man selbige Umformungen für das Optimierungsproblem des vollständig informierten Investors durchführt, erhält man die Behauptung.

(iii): Sei $\lambda > 0$. Wir halten eine beliebige Strategie $(a_0, \dots, a_{T-1}) \in A$ fest und definieren den Vermögensprozess für den Prozess λY durch

$$\begin{aligned} &V_{0,\lambda} = 0 \\ &V_{t,\lambda} = V_{t-1,\lambda}^+ + \lambda Y_k - a_{t-1} = \lambda \left(V_{t-1}^+ + Y_t - \frac{a_{t-1}}{\lambda}\right), \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Wir wählen eine weitere Strategie $(\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{T-1}) = \frac{1}{\lambda}(a_0, \dots, a_{T-1})$ und bezeichnen den zugehörigen Vermögensprozess mit $(\tilde{V}_t)_{t=0,\dots,T}$. Dann können wir die Aussage wie folgt einsehen:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{\bar{\mathcal{F}}}(\lambda Y) &= \sup_{a \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}(c_t a_{t-1} - q_t V_{t,\lambda}^-) + c_{T+1} V_{T,\lambda}^+\right] \\
&= \sup_{\tilde{a} \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\lambda(c_t \tilde{a}_{t-1} - q_t \tilde{V}_t^-) + c_{T+1}\lambda \tilde{V}_T^+\right] \\
&= \lambda \sup_{\tilde{a} \in A} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}(c_t \tilde{a}_{t-1} - q_t \tilde{V}_t^-) + c_{T+1} \tilde{V}_T^+\right] \\
&= \lambda \bar{U}_{\bar{\mathcal{F}}}(Y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.

(iv:) Die Informations-Monotonie ist eine elementare Eigenschaft des Value-of-Information Risikomaßes, die auf Grund der Konstruktion immer erfüllt ist. □

4.3 Das bedingte Value-of-Information Risikomaß im Markov Entscheidungsmodell

Im vorherigen Abschnitt haben wir uns der Frage gewidmet, wie das Risiko eines stochastischen Prozesses mit Hilfe des Value-of-Information Risikomaßes zum Beginn der Investmentperiode zu bewerten ist. In diesem Abschnitt werden wir eine Möglichkeit herausstellen, das Risiko zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb der Investmentperiode zu quantifizieren. Dazu betrachten wir zunächst die bedingte Variante des Entscheidungsproblems eines klassischen Investors. Das bedingte Risikomaß definieren wir als maximierten erwarteten Gewinn bedingt die zu dem Zeitpunkt gegebenen Informationen. Wir werden zeigen, dass dieses Maß positiv-homogen und in leicht abgewandelter Form cash-invariant im Sinne von Kapitel 3 ist.

Weitere Eigenschaften, wie Sub-Additivität und Monotonie zeigen wir im Anschluss bei zugrunde liegendem Markov Entscheidungsmodell. Dabei nehmen wir an, dass der zu bewertende stochastische Prozess von einer Markov-Kette determiniert wird. Die Einführung dieses Modells und die Berechnung einer Darstellung des Risikomaßes unter diesen Modellvoraussetzungen wird den Hauptteil des zweiten Unterabschnitts ausmachen. Den Abschluss bildet ein Beispiel, in dem wir das bedingte Risikomaß für einen zugrunde liegenden AR(1)-Prozess konkret berechnen.

Als Grundlage für das präsentierte Markov Entscheidungsmodell verwenden wir [15] und bei der Untersuchung des bedingten Risikomaßes im Markov Entscheidungsmodell orientieren wir uns an der Ausarbeitung [14].

4.3.1 Das Bedingte Value-of-Information Risikomaß

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition des bedingten Entscheidungsproblems des klassischen Investors. Danach beweisen wir eine kurze technische Anpassung und können damit das bedingte Entscheidungsproblem des vollständig informierten Investors folgern. Im Anschluss werden wir damit das dazugehörige Value-of-Information Risikomaß formulieren, welches in diesem Abschnitt jedoch von keinem größeren Interesse sein wird. Alle Gleichungen und Ungleichungen zwischen Zufallsvariablen und Mengen gelten in diesem Abschnitt erneut $\mathbb{P}$-fast.

Sei nun $t = 0, \ldots, T-1$ beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Menge der zulässigen Strategien ab dem Zeitpunkt t mit A^{T-t}. In diesem Fall ist der zukünftige Gewinn des Investors beschrieben durch

$$H(a_t, \ldots, a_{T-1}, Y_{t+1}, \ldots, Y_T) = \frac{1}{c_t}\left(\sum_{k=t+1}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+\right)$$

für $(a_t, \ldots, a_{T-1}) \in A^{T-t}$ und $Y \in \mathcal{R}^1$ und das Optimierungsproblem des Investors zum Zeitpunkt $t = 0, \ldots, T-1$ durch

$$\bar{U}_{t,\bar{\mathcal{F}}}(Y) = \operatorname*{ess\,sup}_{a \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right], \quad Y \in \mathcal{R}^1.$$

Um den Zusammenhang zum ersten Teil dieser Arbeit und damit zu bedingten Risikomaßen zu verdeutlichen, definieren wir im Folgenden

$$\rho_t(Y) = -\operatorname*{ess\,sup}_{a \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

für alle $Y \in \mathcal{R}^1$ und $t = 0, \ldots, T-1$.

Offensichtlich gilt $\rho_0(Y) = -\bar{U}_{0,\bar{\mathcal{F}}}(Y) = -\bar{U}_{\bar{\mathcal{F}}}(Y)$. Einige der nachfolgenden Aussagen erfordern, dass das Optimierungsproblem zum Zeitpunkt der Risikobewertung t in 0 startet. Da dies im Allgemeinen nicht gegeben ist, beweisen wir nun eine Verschiebung, die dies gewährleistet.

Korollar 4.15 *Es gilt*

$$\rho_t(Y) = -\frac{c_{t+1}}{c_t}V_t^+ - \operatorname*{ess\,sup}_{a\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

für $Y \in \mathcal{R}^1$ *und* $a \in A^{T-t}$*, wobei dem Optimierungsproblem der folgende, in* 0 *startende Vermögensprozess zugrunde liegt:*

$$\begin{aligned} V_{t+1} &= Y_{t+1} - a_t, \\ V_k &= V_{k-1}^+ + Y_k - a_{k-1}, \quad k = t+2,\dots,T. \end{aligned}$$

Beweis. (Siehe S.70 in [14]) Um die obige Aussage zu folgern, halten wir zunächst einen beliebigen Zeitpunkt $t = 0,\dots,T-1$ und eine Strategie $(a_t,\dots,a_{T-1}) \in A^{T-t}$ fest und $(V_k)_{k=t,\dots,T}$ sei der dadurch definierte Vermögensprozess. Für eine weitere Strategie $(\tilde{a}_t,\dots,\tilde{a}_{T-1}) \in A^{T-t}$ sei ein zweiter Vermögensprozess durch

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= 0, \\ \tilde{V}_k &= \tilde{V}_{k-1}^+ + Y_k - \tilde{a}_{k-1}, \quad k = t+1,\dots,T \end{aligned}$$

definiert. Indem wir $\tilde{a}_t = a_t - V_t^+$ und $\tilde{a}_k = a_k$ für $k = t+1,\dots,T-1$ definieren, ermöglichen wir den Zusammenhang $V_k = \tilde{V}_k$ für $k = t+1,\dots,T$. Dies folgt mit

$$V_{t+1} = V_t^+ + Y_{t+1} - a_t = \tilde{V}_{t+1}$$

induktiv. Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} &\rho_t(Y) \\ &= -\operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1})\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= -\operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1})\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[c_{t+1}a_t - q_{t+1}V_{t+1}^- + \sum_{k=t+2}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= -\operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1})\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[c_{t+1}(\tilde{a}_t + V_t^+) - q_{t+1}V_{t+1}^- + \sum_{k=t+2}^{T}(c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1}V_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= -\frac{c_{t+1}}{c_t}V_t^+ - \operatorname*{ess\,sup}_{(\tilde{a}_t,\dots,\tilde{a}_{T-1})\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T}(c_k \tilde{a}_{k-1} - q_k \tilde{V}_k^-) + c_{T+1}\tilde{V}_T^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

für $t = 0,\dots,T-1$ und $Y \in \mathcal{R}^1$. Betrachten wir nur das Entscheidungsproblem, also den zweiten Summanden, so erkennen wir, dass dieses in 0 startet. □

Indem wir diese Verschiebungseigenschaft nutzen, können wir nun drei wichtige Eigenschaften des Risikomaßes beweisen.

Proposition 4.16 *(i) Sei $Y \in \mathcal{R}^1$. Für den vollständig informierten Investor, für dessen Investmentstrategie $(a_t, \dots, a_{T-1})$ zu jedem Zeitpunkt $k = t, \dots, T-1$ a_k $\mathcal{F}_T$-messbar ist, ist die optimale Strategie durch*

$$(a_t^*, \dots, a_{T-1}^*) = (Y_{t+1}, \dots, Y_T)$$

gegeben und es gilt

$$\rho_t(Y) = -\frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ - \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} \mathbb{E}[Y_k \mid \mathcal{F}_t].$$

(ii) Sei $\lambda \in L_t^\infty$ mit $\lambda > 0$ und sei $V_t = 0$. Dann gilt

$$\rho_t(\lambda Y) = \lambda \rho_t(Y), \quad Y \in \mathcal{R}^1.$$

(iii) Sei $m = (0, \dots, 0, m_{t+1}, \dots, m_T)$ ein vorhersehbarer Prozess, d.h. $m_k \in L_{k-1}^1$ für alle $k = t+1, \dots, T$. Dann gilt

$$\rho_t(Y + m) = \rho_t(Y) - \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} m_k, \quad Y \in \mathcal{R}^1.$$

Beweis. (i): Wir halten zunächst fest, dass für das bedingte Risikomaß eine untere Schranke durch

$$\rho_t(Y) \geq -\frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ - \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} \mathbb{E}[Y_k \mid \mathcal{F}_t]$$

für alle $Y \in \mathcal{R}^1$ gegeben ist. Der Beweis dieser Aussage erfolgt analog zu dem Beweis von Lemma 4.13. Wählt man die Strategie $(a_t^*, \dots, a_{T-1}^*) = (Y_{t+1}, \dots, Y_T)$ so gilt für den Vermögensprozess $(V_{t+1}, \dots, V_T) = (0, \dots, 0)$ und die untere Schranke wird angenommen.

(ii): (Siehe Proposition 4.3 in [14]) Sei $\lambda \in L_t^\infty$ mit $\lambda > 0$. Weiterhin halten wir eine beliebige Strategie $(a_t, \dots, a_{T-1}) \in A^{T-t}$ fest. Wir definieren den Vermögensprozess für den Prozess λY durch

$$\begin{aligned} V_{t,\lambda} &= 0, \\ V_{k,\lambda} &= V_{k-1,\lambda}^+ + \lambda Y_k - a_{k-1} = \lambda \left(V_{k-1}^+ + Y_k - \frac{a_{k-1}}{\lambda} \right), \quad k = t+1, \dots, T. \end{aligned}$$

Wir wählen eine weitere Strategie $(\tilde{a}_t, \dots, \tilde{a}_{T-1}) = \frac{1}{\lambda}(a_t, \dots, a_{T-1}) \in A^{T-t}$ und bezeichnen den zugehörigen Vermögensprozess mit $(\tilde{V}_k)_{k=t+1,\dots,T}$. Dann können wir die Aussage wie folgt einsehen:

$$\begin{aligned} \rho_t(\lambda Y) &= - \operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k a_{k-1} - q_k V_{k,\lambda}^-) + c_{T+1} V_{T,\lambda}^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= - \operatorname*{ess\,sup}_{(\tilde{a}_t,\dots,\tilde{a}_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=t+1}^{T} \lambda (c_k \tilde{a}_{k-1} - q_k \tilde{V}_k^-) + c_{T+1} \lambda \tilde{V}_T^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\lambda \operatorname*{ess\,sup}_{(\tilde{a}_t,\dots,\tilde{a}_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k \tilde{a}_{k-1} - q_k \tilde{V}_k^-) + c_{T+1} \tilde{V}_T^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \lambda \rho_t(Y). \end{aligned}$$

<u>(iii):</u> (Siehe Proposition 4.3 in [14]) Sei erneut $(a_t, \dots, a_{T-1}) \in A^{T-t}$ eine beliebige Strategie. Wir erhalten als neuen Vermögensprozess für den Auszahlungsprozess $Y + m$

$$\begin{aligned} V_{t,m} &= V_t, \\ V_{t+1,m} &= Y_{t+1} + m_{t+1} - a_t, \\ V_{k,m} &= V_{k-1,m}^+ + Y_k + m_k - a_{k-1}, \quad k = t+2, \dots, T. \end{aligned}$$

Wir definieren eine weitere Strategie $(\tilde{a}_t, \dots, \tilde{a}_{T-1}) = (a_t - m_{t+1}, \dots, a_{T-1} - m_T) \in A^{T-t}$ und erhalten dadurch einen Vermögensprozess $(\tilde{V}_k)_{k=t+1,\dots,T}$. Indem wir Korollar 4.15 nutzen, können wir folgern

$$\begin{aligned} &\rho_t(Y + m) \\ &= -\frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ - \operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k a_{k-1} - q_k V_{k,m}^-) + c_{T+1} V_{k,m}^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ - \operatorname*{ess\,sup}_{(\tilde{a}_t,\dots,\tilde{a}_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k (\tilde{a}_{k-1} + m_k) - q_k \tilde{V}_k^-) + c_{T+1} \tilde{V}_k^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \rho_t(Y) - \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} m_k. \end{aligned}$$

□

Aussage (i) in der Proposition liefert eine analoge Aussage wie Lemma 4.13, jedoch für beliebige Zeitpunkte $t = 0, \dots, T-1$. Für $t = 0$ erhält man die Aussage des Lemmas. Punkt (ii) liefert uns positive Homogenität und Punkt (iii) eine Variation der Cash-Invarianz. Weitere Eigenschaften werden wir für stochastische Prozesse mit zugrundeliegendem Markov Entscheidungsmodell beweisen.

Aussage (i) ermöglicht uns nun die Definition des bedingten Value-of-Information Risikomaßes für $Y \in \mathcal{R}^1$ zu jedem Zeitpunkt t und jeweils zur Verfügung stehender Information $\mathcal{F}_t$ durch

$$\begin{aligned}
\psi_t(Y) =& \frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ + \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} \mathbb{E}[Y_k \mid \mathcal{F}_t] - \frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ \\
&- \operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1} V_T^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
=& \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} \mathbb{E}[Y_k \mid \mathcal{F}_t] - \operatorname*{ess\,sup}_{(a_t,\dots,a_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1} V_T^+ \mid \mathcal{F}_t \right].
\end{aligned}$$

Dieser Abschnitt soll jedoch vornehmlich der Untersuchung von ρ_t dienen und wir werden daher die nachfolgenden Aussagen nur für dieses Maß angeben. Selbstverständlich gelten diese auch für das Optimierungsproblem des vollständig informierten Investor und lassen sich somit in gewisser Weise auf das bedingte Value-of-Information Risikomaß anwenden.

4.3.2 Markov Entscheidungsmodell

Im nachfolgenden Abschnitt untersuchen wir das bedingte Risikomaß ρ_t genauer bei zugrunde liegendem Markov Entscheidungsmodell. Als Einstieg dazu führen wir das Markov Entscheidungsmodell allgemein ein. Dabei orientieren wir uns an [15] und [14]. Das Hauptziel dieses Abschnitts ist, ρ_t mittels statischer kohärenter Risikomaße dar zustellen. Insbesondere erhält man dadurch eine Darstellung über den Conditional-Value-at-Risk. Mithilfe dieser Erkenntnis lässt sich abschließend eine optimale Investmentstrategie bestimmen.

Zudem weisen wir im Anschluss nach, dass das Risikomaß sowohl sub-additiv, als auch monoton ist. Wir beenden das Kapitel mit einem konkreten Beispiel, in dem wir zunächst das Markov Entscheidungsmodell konkretisieren und bei optimaler Strategie eine Formel für das Risiko eines Auszahlungsstroms, der durch einen AR(1)-Prozess getrieben wird, herleiten.

Definition 4.17 (Siehe Definition 2.1.1 in [15]) Ein Markov Entscheidungsmodell mit Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$ ist durch ein Tupel $(S, A, D_t, Q_t, r_t, G_T),\ t = 0, \ldots, T-1$ definiert, wobei die Komponenten wie folgt definiert sind:

- S sei der Zustandsraum, versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{S}$,
- A sei der Aktions- beziehungsweise Entscheidungsraum, versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{A}$,
- $D_t \subset S \times A$ sei eine messbare Teilmenge von $S \times A$ und beschreibe die Menge der zulässigen Entscheidungen zum Zeitpunkt t. D_t enthalte den Graph einer messbaren Abbildung $f_t : S \to A$, d.h. $(x, f_t(x)) \in D_t$ für alle $x \in S$, und die Menge $D_t(x) = \{a \in A : (x, a) \in D_t\}$ bezeichne die Menge der zulässigen Entscheidungen im Zustand x zum Zeitpunkt t,
- $Q_t : D_t \times \mathcal{S} \to [0, 1]$ sei ein Übergangskern von D_t nach S, d.h. für ein festes Paar $(x, a) \in D_t$ ist
  - $B \mapsto Q_t(B \mid x, a)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{S}$ und
  - $(x, a) \mapsto Q_t(B \mid x, a)$ messbar für alle $B \in \mathcal{S}$,
- $r_t : D_t \to \mathbb{R}$ sei eine messbare Abbildung und $r_t(x, a)$ beschreibe den einstufigen Gewinn zum Zeitpunkt t im Zustand x und bei Entscheidung a,
- $G_T : S \to \mathbb{R}$ sei eine messbare Abbildung und $G_T(x)$ beschreibe den finalen Gewinn zum Zeitpunkt T.

Das nachfolgende Theorem liefert eine äquivalente Möglichkeit ein Markov Entscheidungsmodell zu definieren. Dabei wird das Modell mithilfe einer Übergangsfunktion konstruiert und die Anpassung an unser ursprüngliches Entscheidungsproblem wird vereinfacht. Es seien nun Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_T$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$ gegeben. Diese werden als Störungsvariablen bezeichnet, da X_{t+1} den Übergang vom Zustand des Systems zum Zeitpunkt t zu Zeitpunkt $t+1$ beeinflusst. Die Änderung des Systems wird dabei durch eine Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} T_t &: D_t \times E \to S, \\ s_{t+1} &= T_t(s_t, a_t, x_{t+1}) \end{aligned}$$

beschrieben. Q_t^X sei die Verteilung von X_{t+1} und somit ist $Q_t^X(\cdot \mid x, a)$ ein Übergangskern für $(x, a) \in D_t$.

Theorem 4.18 *Ist das Übergangs-Gesetz des Markov Entscheidungsmodells gegeben durch T_t und Q_t^X, $t = 0, \dots, T-1$, so kann es äquivalent durch das Tupel $(S, A, D_t, E, T_t, Q_t^X, r_t, G_T)$, $t = 0, \dots, T-1$ beschrieben werden.*

Beweis. Siehe Theorem 2.1.3 in [15]. □

Definition 4.19 (i) Eine messbare Abbildung $f_t : S \to A$ mit der Eigenschaft $f_t(x) \in D_t(x)$ für alle $x \in S$ heißt zulässige Markov Strategie zum Zeitpunkt $t = 0, \dots, T-1$.

(i) Für $t = 0, \dots, T-1$ bezeichne $\pi = (f_t, \dots, f_{T-1})$ eine $(T-t)$-stufige zulässige Markov Strategie und F^{T-t} bezeichne die Menge dieser Strategien.

Als nächstes formulieren wir ein konkretes Modell und passen unser ursprüngliches Optimierungsproblem beziehungsweise das bedingte Risikomaß an.

Wie in den vorherigen Abschnitten sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Filtration $(\mathcal{F})_{t=0,\dots,T}$ mit $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ gegeben. Wir nehmen weiterhin an, dass eine Folge stochastisch unabhängiger reell-wertiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_T$ existiert, sodass für alle $t = 1, \dots, T$

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$$

gilt. Der zu bewertende stochastische Prozess soll in diesem Modell durch eine Markov-Kette $(Z_t)_{t=0,\dots,T}$ mit

$$Z_0 = c \in \mathbb{R}, \quad Z_t = g_t(Z_{t-1}, X_t), \quad t = 1, \dots, T,$$

für eine $(\mathcal{B}^2, \mathcal{B})$-messbare Funktion $g_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beeinflusst werden.

Als Objekt der Risikobewertung betrachten wir nun stochastische Prozesse, die von der Markov-Kette $(Z_t)_{t=0,\dots,T}$ und den Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_T$ getrieben werden. Dazu nehmen wir an, dass $(\mathcal{B}^2, \mathcal{B})$-messbare Funktionen $h_t^Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$Y_t = h_t^Y(Z_{t-1}, X_t) \text{ für alle } t = 1, \dots, T$$

gilt, und wir bezeichnen die Menge dieser Prozesse mit $\mathcal{R}^M$.

Im Folgenden präzisieren wir die in Definition 4.17 eingeführten Komponenten des Markov Entscheidungsmodells:

- Für den Zustandsraum gelte $S \subset \mathbb{R}^2$ mit σ-Algebra $\mathcal{S} = \mathcal{B}_S^2$. Für ein Element $s = (w, z) \in S$ beschreibe dabei w eine Realisierung des Vermögensprozesses und z eine Realisierung der Markov-Kette.
- Für den Entscheidungsraum gelte $A \subset \mathbb{R}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{B}_A$.
- Wir stellen keine Bedingungen an die Menge der zulässigen Entscheidungen und unterscheiden insbesondere nicht zwischen verschiedenen Zeitpunkten. Somit gilt für alle Zeitpunkte sowie alle Zustände $s \in S$ $D(s) = A$ und die Menge der Einschränkungen sei $D = S \times A \subset \mathbb{R}^3$.
- Die Störungsvariablen haben Werte in $E \subset \mathbb{R}$ und die zugehörige σ-Algebra sei $\mathcal{E} = \mathcal{B}_E$.
- Die Übergangsfunktionen $T_t : D \times E \to S$ seien für alle $t = 1, \dots, T$ gegeben durch

$$T_t(s, a, x) = (w^+ + h_t^Y(z, x) - a, g_t(z, x)), \quad (s, a) = (w, z, a) \in D, \; x \in E.$$

- Die Übergangskerne $Q_t^X : D \times \mathcal{S} \to [0, 1]$ seien für $t = 1, \dots, T$ gegeben durch

$$Q_t^X(B \mid s, a) = \mathbb{P}(T_t(s, a, X_t) \in B), \quad B \in \mathcal{S}.$$

- Die einstufige Gewinnfunktion ist für $t = 0, \dots, T-1$ definiert durch

$$r_t(s, a) = -q_t w^- + c_{t+1} a, \quad (s, a) \in D.$$

  Wir setzen hier $q_0 = 0$.
- Die finale Gewinnfunktion ist gegeben durch

$$G_T(s) = c_{T+1} w^+ - q_T w^-, \quad s = (w, z) \in D.$$

Definition 4.20 Wir bezeichnen den Prozess $M_t, \dots, M_T$, gegeben durch

$$\begin{aligned} M_t &= (V_t, Z_t) \\ M_k &= T_k(M_{k-1}, f_{k-1}(M_{k-1}), X_k), \quad k = t+1, \dots, T, \end{aligned}$$

als Markov Entscheidungsprozess für den Zeitraum $t, \dots, T$. Hierbei ist V_t das Vermögen zum Zeitpunkt t und $(f_t, \dots, f_{T-1}) \in F^{T-t}$ eine $(T-t)$-stufige Strategie.

Mit diesen Vorarbeiten lässt sich nun das folgende wichtige Theorem formulieren, welches eine Darstellung des bedingten Risikomaßes ρ_t im Markov Entscheidungsmodell liefert:

Theorem 4.21 *Für* $t = 0, \dots, T-1$ *gilt*

$$\rho_t(Y) = -\frac{q_t}{c_t} V_t^- - \frac{1}{c_t} G_t(V_t, Z_t).$$

Hierbei sei

$$G_t(s) = \sup_{\pi \in F^{T-t}} G_{t,\pi}(s), \quad s \in S,$$

mit

$$G_{t,\pi}(s) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=t}^{T-1} r_k(M_k, f_k(M_k)) + G_T(M_T) \mid M_t = s\right], \quad s \in S,$$

für Strategien $\pi = (f_t, \dots, f_{T-1}) \in F^{T-t}$.

Beweis. (Siehe Kapitel 4.3 in [14]) Sei nun $x = (x_1, \dots, x_t) \in E^t$ eine Realisierung von $X_1, \dots, X_t$ und wir wählen ein $\omega \in \{(X_1, \dots, X_t) = x\}$. Weiterhin nehmen wir an, dass Funktionen $h_t^{V,Z} : E^t \to S$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} (V_t, Z_t) &= h_t^{V,Z}(X_1, \dots, X_t) \\ (V_t, Z_t)(\omega) &= h_t^{V,Z}(x) \end{aligned}$$

gilt. Damit lässt sich nun schreiben

$$\begin{aligned} \rho_t(Y)(\omega) &= - \sup_{(a_t, \dots, a_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T} (c_k a_{k-1} - q_k V_k^-) + c_{T+1} V_T^+ \mid (X_1, \dots, X_T) = x\right] \\ &= - \sup_{(a_t, \dots, a_{T-1}) \in A^{T-t}} \frac{1}{c_t} \mathbb{E}\left[c_{t+1} a_t + \sum_{k=t+1}^{T-1} (c_{k+1} a_k - q_k V_k^-) \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + c_{T+1}V_T^+ - q_T V_T^- \mid (V_t, Z_t) = h_t^{V,Z}(x)\Bigg] \\
&= - \sup_{(a_t,\dots,a_{T-1})\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\Bigg[q_t V_t^- + \sum_{k=t}^{T-1}(c_{k+1}a_k - q_k V_k^-) \\
&\quad + c_{T+1}V_T^+ - q_T V_T^- \mid (V_t, Z_t) = h_t^{V,Z}(x)\Bigg] \\
&= - \sup_{(a_t,\dots,a_{T-1})\in A^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\Bigg[q_t V_t^- + \sum_{k=t}^{T-1} r_k(M_k, a_k) + G_T(M_T) \mid M_t = h_t^{V,Z}(x)\Bigg] \\
&= - \frac{q_t}{c_t}V_t^- - \sup_{\pi\in F^{T-t}} \frac{1}{c_t}\mathbb{E}\Bigg[\sum_{k=t}^{T-1} r_k(M_k, f_k(M_k)) + G_T(M_T) \mid M_t = h_t^{V,Z}(x)\Bigg],
\end{aligned}
$$

wobei wir hier $r_k(M_k, a_k) = c_{k+1}a_k - q_k V_k^-$ und $G_T(M_T) = c_{T+1}V_T^+ - q_T V_T^-$ eingesetzt haben. Mit der Definition von G_t und $G_{t,\pi}$ für alle $t = 0, \dots, T-1$ folgt dann die Behauptung. □

Das Ziel ist nun, eine optimale Strategie $\pi^* = (f_t^*, \dots, f_{T-1}^*)$ zu finden. In [16] wurde mithilfe eines dynamischen Programmierungstheorem eine Möglichkeit geschaffen ein optimales π^* zu finden. Wir geben hier eine leicht abgewandelte Form des Theorems an, wie es in [14] formuliert wurde, und verweisen für einen Beweis auf Theorem 3.2.1 in [16].

Theorem 4.22 *Sei $s \in S$ ein fester Zustand und $t = 0, \dots, T-1$ eine feste Zeit. Wir definieren Funktionen*

$$
\begin{aligned}
J_T(\tilde{s}) &= G_T(\tilde{s}), \\
J_k(\tilde{s}) &= \sup_{a\in A}\{r_k(\tilde{s}, a) + \mathbb{E}[J_{k+1}(M_{k+1}) \mid M_k = \tilde{s}, a_k = a]\}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

für $k = t, \dots, T-1$, $\tilde{s} \in S$. Sind diese Funktionen für alle $k = t, \dots, T$ messbar und wird das Supremum in $a^* = f_k^*(\tilde{s})$ für eine $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_A)$-messbare Funktion $f_k^* : S \to A$ angenommen, so ist $\pi^* = (f_t^*, \dots, f_{T-1}^*)$ eine optimale Strategie, sodass

$$G_t(s) = G_{t,\pi^*}(s) = J_t(s).$$

Beweis. Siehe Theorem 3.2.1 in [16]. □

Das nachfolgende Theorem liefert die zentrale Aussage dieses Abschnitts. Es lässt sich zeigen, dass sich die Gewinnfunktionen G_t für $t = 1, \dots, T$ durch den Conditional-

Value-at-Risk darstellen lassen, beziehungsweise, dass die optimale Strategie maßgeblich durch den Value-at-Risk determiniert ist.

Theorem 4.23 *Für $t = 1, \ldots, T$ wählen wir Level*

$$\beta_k = \frac{c_k - c_{k+1}}{q_k - c_{k+1}} \in (0,1)$$

und Gewichte

$$\lambda_k = \frac{c_{k+1}}{c_k} \in (0,1).$$

Weiterhin seien statische kohärente Risikomaße

$$\rho^{(k)}(Y) = -\lambda_k \mathbb{E}[Y] - (1-\lambda_k)\, CVaR_{\beta_k}(Y), \quad Y \in L^1$$

gegeben. Dann gilt für $t = 0, \ldots, T$ und $(w, z) \in S$:

(i) Die Gewinnfunktionen sind gegeben durch

$$G_t(w,z) = c_{t+1}w^+ - q_t w^- - \sum_{k=t+1}^{T} c_k \mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t = z], \quad Y \in \mathcal{R}^M.$$

(ii) Die optimale Strategie $\pi^* = (f_t^*, \ldots, f_{T-1}^*)$ und der optimale Markov-Prozess $(M_t^*, \ldots, M_T^*)$ sind gegeben durch

$$f_k^*(\tilde{w}, \tilde{z}) = \tilde{w}^+ + VaR_{\beta_k}(Y_{k+1} \mid Z_k = \tilde{z}), \quad \tilde{s} = (\tilde{w}, \tilde{z}) \in S$$

für $k = t, \ldots, T-1$ und

$$\begin{aligned} M_t^* &= (w, z), \\ M_k^* &= (Y_k - VaR_{\beta_k}(Y_k \mid Z_{k-1} = M_{k-1,2}^*), g_k(M_{k-1,2}^*, X_k)) \end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, T$.

Beweis. (Siehe Theorem 4.2 in [14]) a): Die Risikomaße $\rho^{(k)}$, $k = 1, \ldots, T$ entsprechen der Darstellung von $U_{\mathcal{F}_0}$ in Lemma 4.11 und wir haben bereits gezeigt (siehe Korollar 4.7), dass es sich dabei um statische kohärente Risikomaße handelt.

b): Wir zeigen nun zunächst die Darstellung von G_t mittels Rückwärtsinduktion und verwenden dabei hauptsächlich Theorem 4.22. Der Fall T ist offensichtlich per Definition klar. Wir betrachten also zunächst den Fall $\underline{t = T-1}$:

$$
\begin{aligned}
G_{T-1}(w,z) &\overset{(4.9)}{=} \sup_{a\in A}\{r_{T-1}((w,z),a) + \mathbb{E}[G_T(M_T) \mid M_{T-1} = (w,z), a_{T-1} = a]\} \\
&= -\, q_{T-1}w^- + \sup_{a\in A}\{c_T a + \mathbb{E}[c_{T+1}M_{T,1}^+ \\
&\quad - q_T M_{T,1}^- \mid M_{T-1} = (w,z), a_{T-1} = a]\} \\
&= -\, q_{T-1}w^- + \sup_{a\in A}\{c_T a + \mathbb{E}[c_{T+1}(M_{T-1,1}^+ + h_T^Y(Z_{T-1},X_T) - a)^+ \\
&\quad - q_T(M_{T-1,1}^+ + h_T^Y(Z_{T-1},X_T) - a)^- \mid M_{T-1} = (w,z), a_{T-1} = a]\} \\
&= -\, q_{T-1}w^- + \sup_{a\in A}\{c_T a + \mathbb{E}[c_{T+1}(w^+ + h_T^Y(z,X_T) - a)^+ \\
&\quad - q_T(w^+ + h_T^Y(z,X_T) - a)^-]\} \\
&= -\, q_{T-1}w^- + c_T \sup_{a\in A}\Big\{a + \mathbb{E}\Big[\frac{c_{T+1}}{c_T}(w^+ + h_T^Y(z,X_T) - a)^+ \\
&\quad - \frac{q_T}{c_T}(w^+ + h_T^Y(z,X_T) - a)^-\Big]\Big\} \\
&\overset{(*)}{=} -\, q_{T-1}w^- + c_T w^+ + c_{T+1}\mathbb{E}[h_T^Y(z,X_T)] + (c_T - c_{T+1})\operatorname{CVaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z,X_T)) \\
&\overset{(**)}{=} -\, q_{T-1}w^- + c_T w^+ + c_{T+1}\mathbb{E}[Y_T \mid Z_{T-1} = z] \\
&\quad + (c_T - c_{T+1})\operatorname{CVaR}_{\beta_T}(Y_T \mid Z_{T-1} = z) \\
&= -\, q_{T-1}w^- + c_T w^+ - c_T\mathbb{E}[\rho^{(T)}(Y_T \mid Z_{T-1}) \mid Z_{T-1} = z]
\end{aligned}
$$

für $(w,z) \in S$ und mit $\beta_T = \frac{c_T - c_{T+1}}{q_T - c_{T+1}}$. Hierbei haben wir für Gleichung $(*)$ die Identität

$$
\begin{aligned}
&\frac{c_{T+1}}{c_T}\mathbb{E}[Y] + \left(1 - \frac{c_{T+1}}{c_T}\right)\operatorname{CVaR}_{\beta_T}(Y) \\
&= \sup_{a\in A}\left\{\mathbb{E}\left[a + \frac{c_{T+1}}{c_T}(Y-a)^+ - \frac{q_T}{c_T}(Y-a)^-\right]\right\}, \qquad Y \in L^1,
\end{aligned}
$$

die wir in Lemma 4.11 bewiesen haben, sowie die Cash-Invarianz von $\operatorname{CVaR}_{\beta_t}$ verwendet. Die Gleichung für β_T folgt aus demselben Lemma. Für Gleichung $(**)$ haben wir die Modellannahme $Y_t = h_t^Y(Z_{t-1}, X_t)$ eingesetzt. Wir weisen nun nach, dass das Supremum für $a^* = f_{T-1}^*(w,z) = w^+ + \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z,X_T)) = w^+ + \operatorname{VaR}_{\beta_T}(Y_T \mid Z_{T-1} = z)$, $(w,z) \in S$ angenommen wird. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&G_{T-1}(w,z) + q_{T-1}w^- \\
&= c_T a^* + \mathbb{E}[c_{T+1}(w^+ + h_T^Y(z,X_T) - a^*)^+ - q_T(w^+ + h_T^Y(z,X_T) - a^*)^-]\} \\
&= c_T w^+ + c_T \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z,X_T)) + \mathbb{E}[c_{T+1}(h_T^Y(z,X_T) - \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z,X_T)))^+ \\
&\quad - q_T(h_T^Y(z,X_T) - \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z,X_T)))^-]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_T w^+ + c_T \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z, X_T)) + c_{T+1}\mathbb{E}[h_T^Y(z, X_T) - \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z, X_T))] \\
&\quad + (c_{T+1} - q_T)\mathbb{E}[(h_T^Y(z, X_T) - \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z, X_T)))^-] \\
&= c_T w^+ + c_{T+1}\mathbb{E}[h_T^Y(z, X_T)] \\
&\quad + (c_T - c_{T+1})\left(\operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z, X_T)) - \frac{q_T - c_{T+1}}{c_T - c_{T+1}}\mathbb{E}[(h_T^Y(z, X_T) - \operatorname{VaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z, X_T)))^-]\right) \\
&= c_T w^+ + c_{T+1}\mathbb{E}[h_T^Y(z, X_T)] + (c_T - c_{T+1}) \operatorname{CVaR}_{\beta_T}(h_T^Y(z, X_T)),
\end{aligned}
$$

womit wir gezeigt haben, dass das zuvor hergeleitete Supremum angenommen wird. Im letzten Schritt haben wir die Identität

$$
\operatorname{CVaR}_\beta(W) = \operatorname{VaR}_\beta(W) - \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(W - \operatorname{VaR}_\beta(W))^-],\ W \in L^1,\ \beta \in (0,1)
$$

aus Proposition 4.9 genutzt. Damit folgt dann sofort

$$
\begin{aligned}
M_t^* &= (w^+ + h_T^Y(z, X_T) - f_{T-1}^*(w, z), g_T(z, X_T)) \\
&= (h_T^Y(z, X_T) - \operatorname{VaR}_{\beta_T}(Y_T \mid Z_{T-1} = z), g_T(z, X_T)), \quad (w, z) \in S.
\end{aligned}
$$

Da V_{T-1} wegen der Messbarkeit von $\operatorname{CVaR}_{\beta_T}$ (Siehe Lemma 1.1 in [14]) und f_{T-1} per Definition messbar ist, folgt mittels Theorem 4.22 der Induktionsanfang auch für Behauptung (ii) des Theorems.

Die Behauptung gelte nun für ein $t \leq T-1$ und wir beweisen die Aussage für $t-1$:

$$
\begin{aligned}
G_{t-1}(w, z) =& \sup_{a \in A}\{r_{t-1}((w, z), a) + \mathbb{E}[G_t(M_t) \mid M_{t-1} = (w, z), a_{t-1} = a]\} \\
=& \sup_{a \in A}\{-q_{t-1}w^- + c_t a + \mathbb{E}[c_{t+1}M_{t,1}^+ - q_t M_{t,1}^- \mid M_{t-1} = (w, z), a_{t-1} = a] \\
& - \sum_{k=t+1}^{T} c_k \mathbb{E}[\mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t] \mid M_{t-1} = (w, z), a_{t-1} = a]\} \\
=& \sup_{a \in A}\{-q_{t-1}w^- + c_t a + \mathbb{E}[c_{t+1}(w^+ + h_t^Y(z, X_t) - a)^+ - q_t(w^+ + h_t^Y(z, X_t) - a)^-]\} \\
& - \sum_{k=t+1}^{T} c_k \mathbb{E}[\mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t] \mid Z_{t-1} = z] \\
=& - q_{t-1}w^- + c_t w^+ + c_{t+1}\mathbb{E}[Y_t \mid Z_{t-1} = z] + (c_t - c_{t+1}) \operatorname{CVaR}_{\beta_t}(Y_t \mid Z_{t-1} = z) \\
& - \sum_{k=t+1}^{T} c_k \mathbb{E}[\mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t] \mid Z_{t-1} = z]
\end{aligned}
$$

für $(w, z) \in S$. Die Markov-Eigenschaft und die Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte liefern uns

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t] \mid Z_{t-1} = z] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t, Z_{t-1}] \mid Z_{t-1} = z] \\ &= \mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_{t-1} = z]\end{aligned}$$

für alle $t = 1, \dots, T$ und $k = t+1, \dots, T$. Dies liefert uns die Behauptung

$$\begin{aligned}G_{t-1}(w, z) =& - q_{t-1} w^- + c_t w^+ + c_{t+1} \mathbb{E}[Y_t \mid Z_{t-1} = z] \\ & + (c_t - c_{t+1}) \operatorname{CVaR}_{\beta_t}(Y_t \mid Z_{t-1} = z) \\ & - \sum_{k=t+1}^{T} c_k \mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_{t-1} = z] \\ =& - q_{t-1} w^- + c_t w^+ - \sum_{k=t}^{T} c_k \mathbb{E}[\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_{t-1} = z].\end{aligned}$$

Die Behauptungen

$$\begin{aligned}a^* &= f_{t-1}^*(w, z) = w^+ + \operatorname{VaR}_{\beta_t}(Y_t \mid Z_{t-1} = z), \\ M_t^* &= (h_t^Y(z, X_t) - \operatorname{VaR}_{\beta_t}(Y_t \mid Z_{k-1} = z), g_t(z, X_t))\end{aligned}$$

für $(w, z) \in S$ folgen analog zum Induktionsanfang. □

Theorem 4.24 *Das bedingte Risikomaß lässt sich für alle $t = 0, \dots, T-1$ durch*

$$\rho_t(Y) = -\frac{c_{t+1}}{c_t} V_t^+ + \mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t} \rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t\right], \quad Y \in \mathcal{R}^M,$$

darstellen.

Beweis. Die Aussage folgt sofort mit Theorem 4.21 und 4.23. □

Proposition 4.25 *Sei $t = 0, \dots, T-1$ und $V_t = 0$.*

(i) ρ_t ist sub-additiv, d.h. für alle $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{R}^M$ gilt

$$\rho_t(Y + \tilde{Y}) \le \rho_t(Y) + \rho_t(\tilde{Y}).$$

(ii) ρ_t ist monoton, d.h. für alle $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{R}^M$ mit $Y \le \tilde{Y}$ gilt

$$\rho_t(Y) \ge \rho_t(\tilde{Y}).$$

Beweis. In Korollar 4.7 haben wir gezeigt, dass die statischen Risikomaße $\rho^{(k)}$ für alle $k = 1, \dots, T$ kohärent sind. Mit der Darstellung aus Theorem 4.24 folgen dann sofort die Behauptungen. □

Damit haben wir bei zugrundeliegendem Markov Entscheidungsmodell die Eigenschaften (i)-(iii) und (v) bedingter kohärenter Risikomaße für Prozesse aus Definition 3.8 unter geringen Einschränkungen zeigen können. Punkt (ii) aus Proposition 4.16 liefert die Homogenität mit der Einschränkung, dass der Vermögensprozess zum Bewertungszeitpunkt Null ist. Anstatt die Cash-Invarianz für ein $m \in L_t^\infty$, also eine einzelne risikolose Zahlung, zu zeigen, haben wir in Proposition 4.16 die Aussage für einen risikolosen Zahlungsstrom $(0, \dots, 0, m_{t+1}, m_{t+2}, \dots)$, wobei m_k $\mathcal{F}_{k-1}$-messbar ist, nachgewiesen. Die beiden oben hergeleiteten Eigenschaften liefern die Monotonie und bedingte Konvexität aus Definition 3.8, wobei letztere eine Folgerung aus der positiven Homogenität und der Sub-Additivität ist.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem Beispiel, in dem wir das Risikomaß konkret berechnen.

Beispiel 4.26 Die zugrunde liegende Markov-Kette sei durch einen AR(1)-Prozess gegeben, d.h.

$$\begin{aligned} &Z_0 = 0, \\ &Z_t = \theta + \xi Z_{t-1} + X_t, \quad t = 1, \dots, T,\ \theta, \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei $X_1, \dots, X_T$ stochastisch unabhängige und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen seien. Weiterhin wählen wir als Auszahlungsprozess

$$Y_t = Z_t - Z_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Wir benötigen zunächst einige Vorarbeiten. Es gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[Z_{k-1} \mid Z_t] = Z_t, \quad k = t+1, \\ &\mathbb{E}[Z_{k-1} \mid Z_t] = \theta \left(1 + \sum_{i=1}^{k-2-t} \xi^i \right) + \xi^{k-t-1} Z_t, \quad k = t+2, \dots, T. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt leicht per Induktion. Weiterhin gilt für die Störungsvariablen

$X_t,\ t = 1, \dots, T$:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{\beta_t}(X_t) &= \Phi^{-1}(1-\beta_t)\sigma, \\ \mathrm{CVaR}_{\beta_t}(X_t) &= \frac{\sigma}{\beta_t}\varphi(\Phi^{-1}(1-\beta_t)), \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion und φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Mithilfe der Cash-Invarianz (siehe Korollar 4.7 und Lemma 4.10) folgt

$$\begin{aligned} \rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) &= -\theta - Z_{k-1}(\xi - 1) + \rho^{(k)}(X_k), \\ \mathrm{VaR}_{\beta_k}(Y_k \mid Z_{k-1}) &= \theta + Z_{k-1}(\xi - 1) + \mathrm{VaR}_{\beta_k}, \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, T$. Wir wählen nun den nach Theorem 4.23 optimalen Vermögensprozess:

$$\begin{aligned} &V_0 = 0, \\ &V_t = Y_t - \mathrm{VaR}_{\beta_t}(Y_t \mid Z_{t-1}), \quad t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorarbeiten können wir das bedingte Value-of-Information Risikomaß bestimmen:

$$\begin{aligned} \rho_t(Y) =& -\frac{c_{t+1}}{c_t}V_t^+ + \mathbb{E}\left[\sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{c_t}\rho^{(k)}(Y_k \mid Z_{k-1}) \mid Z_t\right] \\ =& -\frac{c_{t+1}}{c_t}(Y_t - \mathrm{VaR}_{\beta_t}(Y_t \mid Z_{t-1}))^+ \\ &+ \sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{c_t}\big(-\theta - (\xi-1)\mathbb{E}[Z_{k-1} \mid Z_t] + \rho^{(k)}(X_k)\big) \\ =& -\frac{c_{t+1}}{c_t}(X_t - \mathrm{VaR}_{\beta_t}(X_t))^+ + \sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{c_t}\rho^{(k)}(X_k) \\ &- \sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{c_t}\xi^{k-t-1}(\theta + (\xi-1)Z_t) \\ =& -\frac{c_{t+1}}{c_t}(X_t - \mathrm{VaR}_{\beta_t}(X_t))^+ - \sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{c_t}(1-\lambda_k)\,\mathrm{CVaR}_{\beta_k}(X_k) \\ &- \sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{c_t}\xi^{k-t-1}(\theta + (\xi-1)Z_t). \end{aligned}$$

Einsetzen der Formeln für VaR_{β_t} und CVaR_{β_t} liefert uns dann

$$\begin{aligned}\rho_t(Y) = &-\frac{c_{t+1}}{c_t}(X_t - \Phi^{-1}(1-\beta_t)\sigma)^+ - \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t}(1-\lambda_k)\frac{\sigma}{\beta_k}\varphi(\Phi^{-1}(1-\beta_t)) \\ &- \sum_{k=t+1}^{T} \frac{c_k}{c_t}\xi^{k-t-1}(\theta + (\xi - 1)Z_t)\end{aligned}$$

mit $\beta_t = \frac{c_t - c_{t+1}}{q_t - c_{t+1}}$ und $\lambda_k = \frac{c_{k+1}}{c_k}$.

Fazit und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit verschiedene Ansätze zur Risikobewertung kennengelernt. Zum einen den klassischen Ansatz als minimale Kapitalanforderung in Form von dynamischen konvexen und kohärenten Risikomaßen, zum anderen als Wert von Informationen in Form des Value-of-Information Risikomaßes.

In den ersten beiden Kapiteln haben wir Risikomaße für jeden Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots$ axiomatisch als $\mathcal{F}_t$-messbare Abbildung eingeführt und sie als minimale Kapitalanforderung, die zur Absicherung des Investments gefordert wird, interpretiert. Umgekehrt kann man auch eine Menge an akzeptablen Finanzpositionen wählen und daraus bedingte konvexe oder kohärente Risikomaße ableiten. Ein wichtiges Ergebnis war, dass wir sowohl bedingte konvexe und kohärente Risikomaße für Zufallsvariablen als auch für Prozesse, die von oben stetig sind, robust als schlimmsten erwarteten Verlust über eine Menge an Wahrscheinlichkeitsmaßen darstellen können. Diese Maße werden jeweils durch eine minimale Penalty-Funktion gewichtet. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist der Zusammenhang von Zeitkonsistenz und gewissen Super-Martingaleigenschaften des Risikomaßes und seiner Penalty-Funktion. Dieses Ergebnis konnten wir sowohl für die Bewertung von Zufallsvariablen also auch von Prozessen folgern.

Als Abschluss von Kapitel 2 haben wir beispielhaft anhand des entropischen Risikomaßes die gewonnenen Erkenntnisse untersucht. Wir haben gezeigt, dass es sich als bedingtes konvexes Risikomaß robust darstellen lässt und dass die minimale Penalty-Funktion durch die relative Entropie gegeben ist. Außerdem ist das dynamische entropische Risikomaß zeitkonsistent.

Im letzten Kapitel haben wir in Form des Value-of-Information Risikomaßes einen anderen Ansatz zur Risikobewertung kennengelernt. Hier wurde ein Optimierungsproblem eines klassischen uninformierten Investors mit dem eines vollständig informierten Investors verglichen und aus der Differenz beider das Value-of-Information Risikomaß konstruiert. Dieses Maß haben wir zunächst für allgemeine Gewinn- beziehungsweise Nutzenfunktionen konstruiert und im Anschluss für eine konkrete Gewinnfunktion genauer untersucht. Dabei ist sowohl die Bewertung von einmaligen Auszahlungen als auch von Auszahlungsströmen möglich. Interessanterweise ließ sich folgern, dass das Optimierungsproblem des uninformierten Investors bei der konkret gewählten Gewinnfunktion ein statisches kohärentes Risikomaß und dass das Value-of-Information Risikomaß ein kohärentes Abweichungs-Risikomaß ist. Beide lassen sich durch den VaR und CVaR darstellen.

Im Fall von Auszahlungsströmen haben wir das konkrete Optimierungsproblem des uninformierten Investors bei zugrunde liegendem Markov Entscheidungsmodell näher untersucht und konnten einige Eigenschaften bedingter kohärenter Risikomaße aus Kapitel 3 nachweisen. Insbesondere lässt sich dieses Maß als Summe statischer kohärenter Risikomaße und ebenso über den VaR und CVaR darstellen. Außerdem haben wir für dieses konkrete Modell und Risikomaß eine optimale Entscheidungsstrategie folgern können. Als Abschluss des Kapitels haben wir ein Beispiel betrachtet, in dem das Markov Modell durch einen AR(1)-Prozess getrieben wird. In diesem Fall konnten wir das Maß ausführlich berechnen.

Neben den vorgestellten Ergebnissen lassen sich viele weitere interessante Eigenschaften dynamischer Risikomaße untersuchen. Beispielsweise stellt sich die Frage nach dem Verhalten bedingter Risikomaße für $t \to \infty$. Dieser Frage wurde in [5] nachgegangen. Des Weiteren lassen sich die Ergebnisse auf dynamische Risikomaße in stetiger Zeit und auf die Bewertung von unbeschränkten Zufallsvariablen sowie stochastischen Prozessen übertragen. Dies wurde insbesondere in [17] durchgeführt.

In Kapitel 4 haben wir bei der Bewertung von Auszahlungsströmen den Schwerpunkt auf ein konkretes Optimierungsproblem gelegt. Alternativ kann das Value-of-Information Risikomaß für allgemeine Gewinnfunktionen genauer untersucht und interessante Eigenschaften nachgewiesen werden. Weiterhin stellt sich die Frage, wie bedingte Abweichungs-Risikomaße axiomatisch definiert werden könnten und ob das bedingte Value-of-Information Risikomaß aus Abschnitt 4.3.1 diese Axiome erfüllt. Im Markov Entscheidungsmodell wäre es zudem möglich auf Zeitkonsistenz zu prüfen und Martingal-Eigeschaften nachzuweisen. Auf letztere wurde in [14] eingegangen.

Literaturverzeichnis

[1] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance : an international journal of mathematics, statistics and financial theory*, 9(3):203–228, 1999. 1, 3, 49, 50

[2] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2004. 1, 12, 13, 15

[3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, and Hyejin Ku. Coherent multiperiod risk adjusted values and bellman's priciple. 2004. 2

[4] Beatrice Acciaio and Irina Penner. Dynamic risk measures. In Giulia Di Nunno and Bernt Øksendal, editors, *Advanced Mathematical Methods for Finance*, pages 1–34. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011. 2, 3, 11, 12, 20, 21

[5] Hans Föllmer and Irina Penner. Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions. *Statistics & Decisions*, 2006. 2, 3, 12, 17, 19, 20, 82

[6] Kai Detlefsen and Giacomo Scandolo. Conditional and dynamic convex risk measures. *Finance and Stochastics*, 9(4):539–561, 2005. 2, 3, 7, 25, 26, 27, 36

[7] Beatrice Acciaio, Hans Föllmer, and Irina Penner. Risk assessment for uncertain cash flows: Model ambiguity, discounting ambiguity, and the role of bubbles. *Finance and Stochastics*, 16(4):669–709, 2012. 2, 28, 29, 32, 33, 34, 36, 39, 40

[8] Patrick Cheridito, Freddy Delbaen, and Michael Kupper. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes. *Electronic Journal of Probability*, (11):57–106, 2006. 2, 28

[9] Georg Pflug and Andrzej Ruszczynski. Risk measure for income streams. 2, 46, 51, 56, 59

[10] Georg Ch. Pflug. A value-of-information approach to measuring risk in multi-

period economic activity. *Journal of banking & finance*, 30(2):695–715, 2006. 2, 46, 47

[11] R. Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev, and Michael Zabarankin. *Deviation measures in risk analysis and optimization*, volume 2002-7 of *Research report / Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida*. Dept. of Industrial & Systems Engineering, University of Florida, Gainesville, Fla., 2002. 2, 46, 49

[12] Georg Ch. Pflug and Werner Romisch. *Modeling, measuring and managing risk*. World Scientific, Hackensack, N.J, 2007. 2, 7, 49, 55

[13] Penner Irina. *Dynamic convex risk measures: time consistency, prudence, and sustainability*. Dissertation, Humbolt-Universität zu Berlin, Berlin, 2007. 2, 26

[14] André Philipp Mundt. *Dynamic risk management with Markov decision processes: Univ., Diss–Karlsruhe, 2007*. Univ.-Verl. Karlsruhe, Karlsruhe, 2008. 46, 56, 64, 65, 66, 67, 68, 72, 73, 74, 76, 82

[15] Nicole Bäuerle and Ulrich Rieder. *Markov decision processes with applications to finance*. Universitext. Springer, Berlin, 2011. 64, 68, 69, 70

[16] Onésimo Hernández-Lerma and Jean Bernard Lasserre. *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*, volume 30 of *Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, NY, 1996. 73

[17] Christian Burgert. *Darstellungssätze für statische und dynamische Risikomaße mit Anwendungen*. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg im Breisgau, 2005. 82

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Timm Manuel Joisten*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Münster, 25. Juni 2010

Timm Manuel Joisten