

Modellierung der Volatilitätsstruktur in LIBOR-Markt-Modellen

Masterarbeit

vorgelegt von

Katharina Hasow

Matrikelnummer: 347532

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Mathematisches Institut für Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Einleitung	1
1. Grundlagen	3
2. Einführung in das LIBOR-Markt-Modell	11
2.1. Aufbau und Annahmen des LIBOR-Markt-Modells	11
2.2. Dynamik bezüglich des Terminal-Measure	14
3. Deterministischer Ansatz	19
3.1. Bewertung von Caplets	20
3.1.1. Black's Formel	20
3.1.2. Skew Effekt	23
3.2. Bewertung von Swaptions	26
4. CEV-Ansatz	32
4.1. Eigenschaften des CEV-Modells	33
4.2. Bewertung von Caplets	39
4.3. Bewertung von Swaptions	45
4.4. Verbesserung durch das LCEV-Modell	48
5. LIBOR-Markt-Modell mit stochastischer Volatilität	52
5.1. Aufbau des Modells	52

5.2. Bewertung von Caplets	55
5.2.1. Dynamik bezüglich des Forwardmartingalmaßes	56
5.2.2. Berechnung der analytischen Transformaten	61
5.2.3. Preisbestimmung mithilfe der Fourierinversion	66
5.2.4. Preisbestimmung mithilfe der Schnellen Fourier Transforma- tion	70
5.3. Bewertung von Swaptions	75
6. Fazit	82
Literaturverzeichnis	84
A. Anhang	87
A.1. Das numerische Erzeugen der Kurvenverläufe in der Abbildung 4.1	87
A.2. Das numerische Erzeugen der Kurvenverläufe in der Abbildung 4.2	90
A.3. Daten-CD	91

Abbildungsverzeichnis

4.1. Implizite Volatilität eines Caplets mit dem Zinsanpassungstermin $T_j = 5$ in einem CEV-Modell mit dem Elastizitätsfaktor α	43
4.2. Implizite Volatilitätsfläche der Caplets in einem CEV-Modell mit $\alpha = 0,5$ und $\lambda_j = 0,05$, $1 \leq j \leq N - 1$	45
5.1. Eine Skizze der impliziten Volatilität eines Caplets in einem LIBOR-Markt-Modell mit stochastischer Volatilität in der Abhängigkeit von ρ	54

Einleitung

Das LIBOR-Markt-Modell erfreut sich vor allem im Bankensektor einer großen Beliebtheit. Dieses Zinsstrukturmodell wird zur Bewertung von Zinsderivaten, die ein wichtiges Instrument zur Absicherung gegen das Zinsänderungsrisiko darstellen, herangezogen. Unter Beachtung des großen Handelsvolumens der Zinsderivate ist die Marktkonsistenz der verwendeten Zinsstrukturmodelle von großer Relevanz. Die LIBOR-Markt-Modelle bauen auf der Modellierung der Forward-LIBOR-Raten auf, wobei die Dynamik einer LIBOR-Rate durch ihre Volatilitätsstruktur festgelegt wird. Es stellt sich also die Frage, wie die Volatilitätsstruktur der LIBOR-Raten zu wählen ist, damit das Modell mit den Marktdaten konforme Ergebnisse liefert.

In der vorliegenden Masterarbeit werden drei Ansätze für die Modellierung der Volatilitätsstruktur vorgestellt und im Hinblick auf die Problemstellung diskutiert. Dabei stellt die Fähigkeit den auf dem Markt beobachtbaren Verlauf der impliziten Volatilität der Caplets abzubilden einen wichtigen Indikator für die Güte eines Modellansatzes dar. Caplets gehören zu den meistgehandelten Zinsderivaten und es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen ihrer impliziten Volatilität und den Marktpreisen. So führt eine Fehleinschätzung der impliziten Volatilität zur Fehlbepreisung der Caplets. Daher werden bei jedem der drei Modellansätze die Modellierungsmöglichkeiten für die implizite Volatilität der Caplets analysiert.

Die Eignung eines Modellansatzes für die Anwendung in der Praxis ist stark von dessen Kalibrierungsmöglichkeiten abhängig. Dabei wird ein Modell meist an die Marktdaten der Caplets und Swaptions kalibriert. Somit ist neben der Marktkonsistenz die Existenz von gut handhabbaren Bewertungsmethoden für diese Zinsderivate essentiell. Aus diesem Grund bildet das Herleiten der entsprechenden Bewertungsmethoden für die jeweiligen Modellansätze einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit.

Die vorliegende Masterarbeit ist wie folgt gegliedert. Im **ersten Kapitel** werden die relevanten Zinssätze und Zinsderivate erläutert. Das **zweite Kapitel** stellt die Einleitung in das LIBOR-Markt-Modell dar und teilt sich in zwei Unterabschnitte auf. Im ersten wird die allgemeine Struktur des Modells dargelegt sowie die stochastischen Differentialgleichungen, die die Dynamik der LIBOR-Raten beschreiben, hergeleitet. Im zweiten Unterabschnitt wird die Dynamik der LIBOR-Raten unter einem einheitlichen Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben. Dadurch wird an dieser Stelle deutlich, dass ein LIBOR-Markt-Modell durch die Volatilität der LIBOR-Raten festgelegt wird.

Die Kapitel 3, 4 und 5 befassen sich mit den unterschiedlichen Volatilitätsstrukturen. Dabei wird im **dritten Kapitel** der triviale Modellansatz mit deterministischen Volatilitäten behandelt. An diesem Ansatz wird der Begriff der impliziten Volatilität sowie der Skew-Effekt erklärt. Im **vierten Kapitel** wird das Constant Elasticity of Variance(CEV)- beziehungsweise das Limited CEV(LCEV)-Modell analysiert. Das **fünfte Kapitel** enthält die Untersuchung des Modellansatzes mit stochastischer Volatilität.

Das Fazit in dem **Kapitel 6** und der Anhang komplettieren diese Masterarbeit.

An dieser Stelle möchte ich Privatdozent Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung dieses interessanten Themas und für die gute Betreuung bei der Erstellung dieser Masterarbeit herzlich danken. Ein weiterer Dank gilt meiner Familie, die mich während des gesamten Studiums stets unterstützt hat.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Unterschrift

1. Grundlagen

In diesem Kapitel werden für die vorliegende Masterarbeit relevante Zinssätze und Zinsderivate beschrieben und definiert. Hierfür dienen [BBA], [BM01], [Hul09] und [Pau11] als Literaturquellen. Zuerst wird der LIBOR erläutert.

Definition 1.1 (LIBOR) *Die British Bankers' Association erfragt an jedem Handelstag ausgewählte Banken des Londoner Bankengeldmarktes, zum welchen Zinssatz diese bereit sind einander Kredite zu gewähren. Der aus diesen Angaben errechnete durchschnittliche Interbankenzinssatz wird als LIBOR (London Interbank Offered Rate) bezeichnet. Der LIBOR wird in 10 Währungen und für 15 Laufzeiten (von einem Tag bis 12 Monate) veröffentlicht.*

Es ist anzumerken, dass die Kredite zum LIBOR-Satz nur an Banken mit einer sehr hohen Bonität¹ gewährt werden und somit ein zu vernachlässigendes Ausfallrisiko aufweisen. Aus diesem Grund kann der LIBOR als der risikolose Zinssatz verstanden werden. Der LIBOR dient als Benchmark für kurzfristige Darlehenszinsen und bildet den Basiszins für viele Zinsderivate.

Der LIBOR legt definitionsgemäß die Zinsstrukturkurve bis zu einer Laufzeit von 12 Monaten fest. Der Verlauf der LIBOR-Zinsstrukturkurve bis zu zwei Jahren wird über die Eurodollar-Futures und darüber hinaus über die Swap Raten ermittelt.

Für die folgenden Definitionen und Erläuterungen sowie für das mathematische Modell soll der Handelszeitraum als endlich vorausgesetzt werden. Das heißt für ein T^* mit $0 \leq T^* < \infty$ wird das Zeitintervall $[0, T^*]$ als der Handelszeitraum gesetzt. Als Erstes wird die Nullkuponanleihe definiert.

¹Die Banken müssen mindestens ein AA-Rating (zweitbeste Stufe) der Rating Agentur S&P vorweisen.

Definition 1.2 (Nullkuponanleihe) *Eine Nullkuponanleihe mit der Laufzeit $T \in [0, T^*]$ ist ein festverzinsliches Wertpapier, das seinem Inhaber zu einem zukünftigen Zeitpunkt T eine Auszahlung von einer Geldeinheit, ohne weitere Kuponzahlungen während der Laufzeit, garantiert.*

Die so definierte Nullkuponanleihe mit der Laufzeit T wird im weiteren Verlauf als ein T -Bond bezeichnet. Der Prozess $(B(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ beschreibt die Wertentwicklung des T -Bonds während der Laufzeit, wobei $B(t, T)$ dem Wert des T -Bonds zu einem Zeitpunkt $t \leq T$ entspricht.

Da das LIBOR-Markt-Modell auf den Nullkuponanleihen aufbaut, müssen einige Annahmen bezüglich der T -Bonds getroffen werden. Zum einen wird angenommen, dass ein T -Bond einer ausfallsicheren Anlage entspricht. Das heißt der Inhaber eines T -Bonds erhält eine sichere Auszahlung von $B(T, T) = 1$ zum Zeitpunkt T . Zum anderen wird $B(t, T) > 0$ für alle t, T mit $0 \leq t \leq T \leq T^*$ und $B(t, T_1) \geq B(t, T_2)$ für beliebige t, T_1, T_2 mit $0 \leq t \leq T_1 \leq T_2 \leq T^*$ vorausgesetzt. Auf diese Weise soll sichergestellt werden, dass eine sichere Auszahlung nicht ohne Einsatz von Kapital möglich ist.

Ausgehend von den T -Bonds können alle relevanten Zinssätze hergeleitet werden. Hierfür soll der Werteprozess eines T -Bonds $B(\cdot, T)$ einer weiteren Voraussetzung genügen und in T differenzierbar sein. Für die folgenden Betrachtungen sollen bei der Bemessung von Zeitintervallen die Feier- und die Wochenendtage vernachlässigt werden, das heißt $T_2 - T_1$ gibt die Länge des Zeitintervalls $[T_1, T_2]$ mit $T_1 < T_2$ an.

Der jährliche Zinssatz, mit dem sich das Kapital zwischen dem jetzigen Zeitpunkt t und einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt $T \leq T^*$ risikolos verzinst, wird als Spot Rate bezeichnet.¹ Angenommen es wird eine Geldeinheit in eine risikolose Anlage für den Zeitraum $[t, T]$ investiert, das heißt es werden $B(t, T)^{-1}$ T -Bonds erworben. Zum Zeitpunkt T bringt jeder T -Bond eine sichere Auszahlung von einer Geldeinheit. Folglich liefert eine Geldeinheit in t $B(t, T)^{-1}$ Geldeinheiten zum Zeitpunkt T . Somit erfüllt der jährliche Zinssatz $L(t, T)$ einer

¹Es wird zwischen der diskreten und der stetigen Spot Rate unterschieden. Da in dieser Arbeit nur die diskreten Zinssätze von Interesse sind, wird auf die Erläuterung der stetigen Zinssätze verzichtet. Für weitere Informationen zur stetigen Verzinsung sei an dieser Stelle auf [BM01] verwiesen.

risikolosen Anlage für das Zeitintervall $[t, T]$ folgende Gleichung

$$1 \cdot (1 + L(t, T)(T - t)) = \frac{1}{B(t, T)}.$$

Der Zinssatz $L(t, T)$ wird als die diskrete *Spot Rate* oder auch als *LIBOR-Spot Rate* bezeichnet.

Definition 1.3 (LIBOR-Spot Rate und die Short Rate) *Sei t der jetzige und T ein in der Zukunft liegender Zeitpunkt mit $0 \leq t < T \leq T^*$. Die LIBOR-Spot Rate $L(t, T)$ gibt den Zinssatz für eine risikolose Anlage für das Zeitintervall $[t, T]$ bei einer linearen Verzinsung an. Es gilt*

$$L(t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{B(t, T)} - 1 \right).$$

Betrachtet man die Spot Rate für ein infinitesimal kleines Zeitintervall, das heißt also $T \searrow t$, so erhält man die sogenannte Short Rate r_t

$$\begin{aligned} r_t := \lim_{T \searrow t} L(t, T) &= \lim_{T \searrow t} \frac{1}{B(t, T)} \frac{1 - B(t, T)}{T - t} \\ &\stackrel{B(t, t)=1}{=} - \lim_{T \searrow t} \frac{1}{B(t, T)} \frac{B(t, T) - B(t, t)}{T - t} \\ &= - \frac{\partial}{\partial T} \log(B(t, T)) \Big|_{T=t}. \end{aligned}$$

Da der Anlagezeitraum infinitesimal klein ist, kann r_t als die augenblickliche Zinsrate, mit der das Kapital zum Zeitpunkt t verzinst wird, verstanden werden.

Es sei nun $[T_1, T_2]$, aus dem jetzigen Zeitpunkt t betrachtet, ein in der Zukunft liegendes Zeitintervall mit $0 \leq t < T_1 < T_2 \leq T^*$. Es stellt sich die Frage welcher risikolose Zinssatz $F(t; T_1, T_2)$ in t für das Zeitintervall $[T_1, T_2]$ garantiert werden kann. Wobei $F(t; T_1, T_2)$ *Forward Rate* oder auch *LIBOR-Forward Rate* genannt wird.¹ Um diese Frage zu beantworten, wird das sogenannte Forward Rate Agreement (FRA) definiert.

¹Analog zu der Spot Rate wird auch hier nur die diskrete Forward Rate behandelt.

Forward Rate Agreement

Ein FRA ist ein Kontrakt, in dem zum aktuellen Zeitpunkt $t \geq 0$ ein fester Zinssatz für eine Kapitalanlage beziehungsweise -aufnahme zwischen den in der Zukunft liegenden Zeitpunkten T_1 und T_2 vereinbart wird. Unter der Annahme, dass die Kapitalanlagen und -aufnahmen zu dem LIBOR getätigt werden, wird somit bei einem Kredit statt dem variablen Zinssatz $L(T_1, T_2)$ der zum Zeitpunkt t vereinbarte feste Zinssatz K auf das Nominalkapital gezahlt. Daher führt ein FRA, mit einer Geldeinheit als Nominalkapital, zum Zeitpunkt T_2 zu der folgenden Auszahlung

$$(T_2 - T_1)(L(T_1, T_2) - K) \stackrel{1.3}{=} \frac{1}{B(T_1, T_2)} - 1 - K(T_2 - T_1). \quad (1.1)$$

Die Forward Rate stimmt definitionsgemäß mit dem Zinssatz K überein, für den ein entsprechender FRA in t den Wert 0 hat. Denn in diesem Fall entspricht K gerade dem fairen festen Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für das Zeitintervall $[T_1, T_2]$ festgelegt wird. Um den Wert der Forward Rate zu erhalten, muss also der Preis des FRA in t ermittelt werden. Es ist daher der Wert der Auszahlung (1.1) zum Zeitpunkt t zu bestimmen.

Die sichere Auszahlung von $K(T_2 - T_1) + 1 =: A$ Geldeinheiten in T_2 erhält man, wenn zum Zeitpunkt t A T_2 -Bonds erworben wurden. Aus Arbitragegründen entsprechen somit A Geldeinheiten in T_2 $A \cdot B(t, T_2)$ Geldeinheiten in t . Analog kann man sich überlegen, dass eine sichere Auszahlung von $B(T_1, T_2)^{-1}$ in T_2 einer Geldeinheit in T_1 und $B(t, T_1)$ Geldeinheiten in t entspricht. Folglich ist der arbitragefreie Preis eines FRA zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$FRA(t; T_1, T_2) = B(t, T_1) - (K(T_2 - T_1) + 1)B(t, T_2) \quad (1.2)$$

und ist genau dann gleich 0, wenn

$$K = \frac{B(t, T_1) - B(t, T_2)}{B(t, T_2)(T_2 - T_1)} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left(\frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right)$$

gilt.

Definition 1.4 (LIBOR-Forward Rate und die augenblickliche Forward Rate)
 Seien t, T_1 und T_2 Zeitpunkte in dem Handelszeitraum mit $t \leq T_1 < T_2$. Die LIBOR-Forward Rate $F(t; T_1, T_2)$ ist der risikolose Zinssatz für das Zeitintervall $[T_1, T_2]$, der zum Zeitpunkt t festgesetzt wird. $F(t; T_1, T_2)$ ist definiert durch

$$F(t; T_1, T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left(\frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right). \quad (1.3)$$

Lässt man nun T_2 gegen T_1 laufen, so erhält man aus der Sicht in t den augenblicklichen Zinssatz $f(t, T_1)$ zum Termin T_1 . $f(t, T_1)$ wird augenblickliche Forward Rate genannt und es gilt

$$\begin{aligned} f(t, T_1) &= \lim_{T_2 \searrow T_1} F(t; T_1, T_2) = - \lim_{T_2 \searrow T_1} \frac{1}{B(t, T_2)} \frac{B(t, T_2) - B(t, T_1)}{T_2 - T_1} \\ &= - \frac{\partial}{\partial T} \log(B(t, T)) \Big|_{T=T_1}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.5 Aus der Gleichung (1.2) und (1.3) folgt, dass ein FRA für das Zeitintervall $[T_1, T_2]$, $0 \leq t < T_1 < T_2 \leq T^*$, zum Zeitpunkt t folgenden arbitragefreien Preis besitzt

$$FRA(t; T_1, T_2) = B(t, T_2)(T_2 - T_1)(F(t; T_1, T_2) - K). \quad (1.4)$$

Im Folgenden werden die am weit verbreitetsten Zinsderivate definiert und erläutert. Zur Vereinfachung sollen alle Derivate auf der gleichen Tenorstruktur $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N \leq T^*$ definiert werden. Außerdem können die unten vorgestellten Derivate zu einem beliebigen Nennwert abgeschlossen werden. Zwecks Abkürzung werden aber nur normierte Fälle mit dem Nennwert von einer Geldeinheit betrachtet.

Zinscaplet und Zinscap

Ein Zinscaplet ist ein Derivat, das zur Absicherung gegen steigende variable Zinsen eingesetzt werden kann. Ein Caplet wird zum jetzigen Zeitpunkt t für ein in der Zukunft liegendes Intervall $[T_j, T_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N - 1$, abgeschlossen. Zum Zeitpunkt t wird ein Strike-Zins K festgelegt, der die obere Grenze für den variablen Zins für das Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$ darstellt. Der Zeitpunkt T_j wird

Zinsanpassungstermin genannt. An diesem Termin wird die für $[T_j, T_{j+1}]$ anfallende Spot Rate $L(T_j, T_{j+1})$ festgesetzt. Übersteigt nun die Spot Rate $L(T_j, T_{j+1})$ den Strike K , so wird die Differenz der Raten entsprechend der Länge des Anlageintervalls $[T_j, T_{j+1}]$ in T_{j+1} ausgezahlt. Somit stellt ein Caplet das Recht ein FRA auszuüben dar und liefert in T_{j+1} folgende Auszahlung

$$(T_{j+1} - T_j)(L(T_j, T_{j+1}) - K)^+.^1 \quad (1.5)$$

Auf diese Weise sichert ein Caplet gegen steigende variable Zinsen ab. Liegt zum Beispiel bei einem Händler ein Darlehen mit einer variablen Verzinsung vor, die in dem Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$ an die LIBOR-Spot Rate angepasst wird, so sorgt ein entsprechendes T_j -Caplet dafür, dass der für $[T_j, T_{j+1}]$ anfallende Zinssatz nicht den Zinssatz K übersteigen.

Normalerweise wird nicht nur ein Caplet, sondern eine Folge von aufeinander aufbauenden Caplets abgeschlossen. Seien T_n, T_m zwei Termine auf der Tenorstruktur mit $T_{n+1} < T_m$. Dann wird ein Portfolio aus Caplets, mit $T_n, T_{n+1}, \dots, T_{m-1}$ als Zinsanpassungstermine, ein Cap für das Zeitintervall $[T_n, T_m]$ genannt. Es ist anzumerken, dass alle in dem Cap enthaltenen Caplets zum gleichen Strike K , auch Cap Rate genannt, abgeschlossen werden. Daher führt ein Cap für das Zeitintervall $[T_n, T_m]$ zu jedem Zeitpunkt T_{j+1} mit $j \in \{n, \dots, m-1\}$ zu der Auszahlung (1.5).

Ist also $Cl(t; T_j, T_{j+1}, K)$ der Wert eines Caplets für das Intervall $[T_j, T_{j+1}]$, $j \in \{n, n+1, \dots, m-1\}$, mit Strike K zum Zeitpunkt t , dann ist der Wert des entsprechenden Caps gegeben durch

$$Cap(t; T_n, T_m) = \sum_{j=n}^{m-1} Cl(t; T_j, T_{j+1}, K).$$

Floorlet und Floor

Im Gegensatz zu einem Caplet sichert ein Floorlet gegen fallende variable Zinsen ab. Ein Floorlet für das Intervall $[T_j, T_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N-1$, mit Strike K führt zu einer Auszahlung in T_{j+1} , falls die zum Zeitpunkt T_j beobachtbare Spot Rate $L(T_j, T_{j+1})$ unter dem in t festgelegten Zinssatz K liegt. Daher liegt in T_{j+1} eine

¹Hierbei ist $x^+ := \max\{x, 0\}$.

Auszahlung von $(T_{j+1} - T_j)(K - L(T_j, T_{j+1}))^+$ vor.

Ein Floor für ein Intervall $[T_n, T_m]$ wird analog zu einem Cap als ein Portfolio von T_j -Floorlets mit $j \in \{n, n+1, \dots, m-1\}$ und dem gleichen Strike K definiert. Bezeichnet man mit $Fl(t; T_j, T_{j+1}, K)$, $j \in \{n, n+1, \dots, m-1\}$, den Wert eines Floorlets für das Intervall $[T_j, T_{j+1}]$ mit Strike K zum Zeitpunkt t , dann ist

$$Floor(t; T_n, T_m) = \sum_{j=n}^{m-1} Fl(t; T_j, T_{j+1}, K).$$

der Wert des Floors in t .

Zinsswap und Swaption

Seien T_n und T_m zwei Termine auf der Tenorstruktur mit $T_{n+1} < T_m$ und t der aktuelle Zeitpunkt mit $0 \leq t \leq T_n$. Ein Zinsswap ist eine Vereinbarung zwischen zwei Vertragspartnern zum Tausch von variablen gegen fixe Zinszahlungen, die in den Zeitintervallen $[T_j, T_{j+1}]$, $n \leq j \leq m-1$, auf ein Nominalkapital anfallen. Dabei wird der Zinssatz K für die fixen Zahlungen zum Zeitpunkt t festgelegt. Man spricht von einem Payer-Swap, wenn die festen Zinsen gezahlt und die variablen erhalten werden. Bei einem umgekehrten Zahlungsfluss spricht man von einem Receiver-Swap.

Ein Payer-Swap kann als eine rollierende Abfolge von den zum Zeitpunkt t abgeschlossenen FRA-Kontrakten für die Intervalle $[T_j, T_{j+1}]$, $n \leq j \leq m-1$, gesehen werden. Somit erhält man den Wert eines Payer-Swaps zum Zeitpunkt t mithilfe der Gleichung (1.4). Es gilt

$$\begin{aligned} Swap(t; T_n, T_m) &= \sum_{j=n}^{m-1} FRA(t; T_j, T_{j+1}) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}) (F(t; T_j, T_{j+1}) - K) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \sum_{j=n}^{m-1} B(t, T_j) - B(t, T_{j+1}) - K (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}) \\ &= B(t, T_n) - B(t, T_m) - K \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}). \quad (1.6) \end{aligned}$$

Genau wie bei einem FRA kann man sich die Frage stellen, wie der feste Zinssatz K in t zu wählen ist, damit die variablen und die festen Zinsen, die in dem Intervall $[T_n, T_m]$ anfallen, in t den gleichen Wert aufweisen. Für den so gewählten Zinssatz K hat der Swap zum Zeitpunkt t offensichtlich den Wert 0 und aus der Gleichung (1.6) folgt

$$K = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1})} =: R_{n,m}(t). \quad (1.7)$$

Der so definierte Zinssatz $R_{n,m}(t)$ wird als die *Forward-Swap-Rate* bezeichnet.

Der arbitragefreie Preis des Swaps zum Zeitpunkt t kann nun in Abhängigkeit von der Forward-Swap-Rate angegeben werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Swap}(t; T_n, T_m) &\stackrel{(1.6)}{=} B(t, T_n) - B(t, T_m) - K \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}) \\ &\stackrel{(1.7)}{=} R_{n,m}(t) \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}) - K \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}) \\ &= (R_{n,m}(t) - K) \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(t, T_{j+1}). \end{aligned}$$

Eine Swaption für das Zeitintervall $[T_n, T_m]$ stellt eine Option auf einen Swap für das gleiche Zeitintervall dar. Das heißt der Inhaber der Swaption besitzt das Recht den Swap in T_n auszuüben. Die Swaption wird genau dann ausgeübt, wenn der Swap in T_n einen positiven Wert aufweist, also wenn $\text{Swap}(T_n; T_n, T_m) > 0$ gilt. Die durch den Swap verursachten Zahlungsströme haben in T_n den Wert $\text{Swap}(T_n; T_n, T_m)$. Daher liefert die Swaption in T_n folgende Auszahlung

$$\text{Swap}(T_n; T_n, T_m)^+ = (R_{n,m}(T_n) - K)^+ \sum_{j=n}^{m-1} (T_{j+1} - T_j) B(T_n, T_{j+1}).$$

2. Einführung in das LIBOR-Markt-Modell

2.1. Aufbau und Annahmen des LIBOR-Markt-Modells

In diesem Abschnitt wird der allgemeine Aufbau des LIBOR-Markt-Modells sowie die Forderungen an das Modell dargestellt. Das Ziel ist es dann, ausgehend von den Grundannahmen eine stochastische Differentialgleichung aufzustellen, die die Dynamik der LIBOR-Raten beschreibt. Die folgenden Ausführungen basieren auf [BM01] und [Pau12].

Das Modell wird auf einer Tenorstruktur $0 = T_0 < T_1 < T_2 \dots < T_N \leq T^* < \infty$ mit den jeweiligen Intervalllängen $\delta_j := T_{j+1} - T_j$, $j = 1, \dots, N - 1$, definiert. T_0 beschreibt hierbei den aktuellen Zeitpunkt. Die in der Zukunft liegenden Zeitpunkte T_1, \dots, T_N werden in der Abhängigkeit von den zu betrachtenden LIBOR-Forward Raten gewählt. Die Nullkuponanleihen $(B(t, T_j))_{0 \leq t \leq T_j}$, $j = 1, \dots, N - 1$, bilden die Basisfinanzgüter des Modells. Der T_N -Bond $(B(t, T_N))_{0 \leq t \leq T_N}$ dient als Verrechnungseinheit, fungiert also als Numéraire.

Es wird angenommen, dass die Quelle des Zufalls von einem d -dimensionalen Wiener-Prozess $W = (W_1, \dots, W_d)$ getrieben wird. Das heißt es existiert ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, der den Informationsverlauf des Modells beschreibt, wobei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die von W erzeugte Wiener-Filtration ist.

Es wird außerdem gefordert, dass das LIBOR-Markt-Modell arbitragefrei ist. Mit dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie¹ folgt aus dieser Annahme die Existenz eines zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes P_N auf $(\Omega, \mathcal{F}_{T_N})$ bezüglich dem die Preisprozesse aller Basisfinanzgüter ausgedrückt in Numéraire-

¹Siehe Theorem 10.5 in [Bjö04].

Einheiten lokale Martingale sind. Es gilt also $P_N \sim P$ und

$$\left(\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_N)} \right)_{0 \leq t \leq T_j} \text{ ist ein lokales } P_N\text{-Martingal f\u00fcr alle } 1 \leq j \leq N - 1 .$$

P_N wird als ein \u00e4quivalentes Martingalma\u00df bezeichnet. Da P_N als ein Forward-martingalma\u00df zum letzten Termin auf der Tenorstruktur T_N gesehen werden kann, wird P_N auch *Terminal-Measure* genannt. F\u00fcr die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass W ein Wiener-Prozess bez\u00fcglich P_N ist.

Das LIBOR-Markt-Modell baut auf der Modellierung der LIBOR-Forward Raten auf. Der Wert einer LIBOR-Forward Rate f\u00fcr ein Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N - 1$, zum Zeitpunkt $t \in [0, T_j]$ ist gegeben durch (vgl. Definition 1.4)

$$F(t; T_j, T_{j+1}) = \frac{1}{\delta_j} \left(\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} - 1 \right).$$

Man schreibe zur Abk\u00fcrzung $L_j(t)$ f\u00fcr die LIBOR-Forward Rate $F(t; T_j, T_{j+1})$.

Im Folgenden soll nun die Dynamik von L_j f\u00fcr ein beliebiges $1 \leq j \leq N - 1$ unter dem \u00e4quivalenten Martingalma\u00df P_N beschrieben werden. Aufgrund der oben getroffenen Annahmen bez\u00fcglich der Bondpreise sind die LIBOR-Raten $(L_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$, $1 \leq j \leq N - 1$, strikt positive Prozesse mit

$$\begin{aligned} L_j(t) &= \frac{1}{\delta_j} \left(\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_j} \left(\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_N)} \cdot \frac{B(t, T_N)}{B(t, T_{j+1})} - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Daher ist L_j eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von zwei lokalen P_N -Martingalen. Somit ist nach der It\u00f4-Formel¹ der stochastische Prozess L_j f\u00fcr ein $1 \leq j \leq N - 1$ ein strikt positives Semimartingal bez\u00fcglich P_N .

Definiert man ein Prozess $(X_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$ durch

$$X_j(t) = \int_0^t \frac{1}{L_j(s)} dL_j(s), \text{ f\u00fcr ein } t \in [0, T_j],$$

so ist X_j ein strikt positives Semimartingal und die Dynamik von L_j kann durch

¹Siehe Kapitel IV Theorem 3.3 in [RY05].

die stochastische Differentialgleichung

$$dL_j(t) = L_j(t) dX_j(t)$$

beschrieben werden.

Das Semimartingal X_j besitzt eine eindeutige Zerlegung in einen lokalen Martingalanteil M_j und einen Anteil von beschränkter Variation A_j , das heißt

$$X_j(t) = M_j(t) + A_j(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j.$$

Es folgt

$$dL_j(t) = L_j(t) dM_j(t) + L_j(t) dA_j(t).$$

Es wird vorausgesetzt, dass A_j absolut stetige Pfade bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt, das heißt es existiert ein stochastischer Prozess $(\mu_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$ mit

$$A_j(t) = \int_0^t \mu_j(s) ds \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j.$$

Da außerdem eine Wiener-Filtration vorliegt, folgt mit dem Martingaldarstellungssatz¹, dass ein d -dimensionaler previsible Prozess $\sigma_j = (\sigma_j^{(1)}, \dots, \sigma_j^{(d)})$ mit $P_N \left(\int_0^\infty \|\sigma_j(s)\|^2 ds < \infty \right) = 1$ und

$$M_j(t) = \int_0^t \sigma_j(s) dW(s) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_j^{(i)}(s) dW_i(s) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j$$

existiert.

Insgesamt erhält man folgende Dynamik unter dem Terminal-Measure P_N

$$\begin{aligned} dL_j(t) &= L_j(t) (\mu_j(t) dt + \sigma_j(t) dW(t)) \\ &= L_j(t) \left(\mu_j(t) dt + \sum_{i=1}^d \sigma_j^{(i)}(t) dW_i(t) \right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei μ_j die Drift und σ_j die Volatilität der j -ten LIBOR-Rate darstellt.

¹Siehe Kapitel V Theorem 3.5 in [RY05].

Definitionsgemäß ist die LIBOR-Rate L_{N-1} ein stetiges lokales P_N -Martingal (vgl. Gleichung (2.1)). Das heißt, dass der Anteil von beschränkter Variation von L_{N-1} unter P_N gleich Null ist. Daher folgt $\mu_{N-1} \equiv 0$. Es stellt sich nun die Frage wie die Drift einer LIBOR-Rate L_j mit $1 \leq j < N - 1$ definiert ist. Diese Frage wird nun in dem folgenden Abschnitt beantwortet.

2.2. Dynamik bezüglich des Terminal-Measure

Das Ziel dieses Abschnittes ist es die Gestalt der Drift der LIBOR-Rate L_j für ein beliebiges $1 \leq j \leq N - 1$ unter dem Terminal-Measure P_N weiter zu spezifizieren. Man betrachte hierfür ein Forwardmartingalmaß P_{j+1} zum Termin T_{j+1} . Das Forwardmartingalmaß P_{j+1} ist ein zu P_N äquivalentes Maß unter dem die Forwardpreisprozesse der Basisfinanzgüter zum Termin T_{j+1} lokale Martingale bilden, das heißt

$$\frac{B(\cdot, T_k)}{B(\cdot, T_{j+1})} \text{ ist ein lokales } P_{j+1}\text{-Martingal für alle } 1 \leq k \leq N - 1 .$$

Die LIBOR-Rate L_j ist nach der Definition (vgl. (2.1)) ein lokales Martingal bezüglich P_{j+1} . Daher ist die Drift der LIBOR-Rate bezüglich P_{j+1} gleich Null. Führt man nun einen Maßwechsel von P_N nach P_{j+1} durch, so kann durch das Ausnutzen dieser Eigenschaft μ_j ermittelt werden.

Satz 2.1 *Es sei $W = (W_1, \dots, W_d)$ ein d -dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich P_N und P_{j+1} , $1 \leq j < N - 1$, ein Forwardmartingalmaß zum Termin T_{j+1} , dann wird durch*

$$W^{(j+1)}(t) = W(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \frac{\delta_k L_k(s)}{\delta_k L_k(s) + 1} \sigma_k(s) ds$$

ein d -dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich P_{j+1} definiert mit

$$W_i^{(j+1)}(t) = W_i(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \frac{\delta_k L_k(s)}{\delta_k L_k(s) + 1} \sigma_k^{(i)}(s) ds \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq d.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\mu_j(t) &= - \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sigma_j(t) \sigma_k(t) \\ &= - \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sum_{i=1}^d \sigma_j^{(i)}(t) \sigma_k^{(i)}(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j.\end{aligned}$$

Beweis: Die Behauptung wird induktiv von $j = N - 2$ nach $j = 1$ gezeigt. Sei also $j = N - 2$. Unter Verwendung der Numéraire-Technik¹ erhält man für den Forwardmartingalmaß P_{N-1} folgenden P_N -Dichteprozess

$$\left. \frac{dP_{N-1}}{dP_N} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T_{N-1})}{B(t, T_N)} \frac{B(0, T_N)}{B(0, T_{N-1})} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1} =: R_{N-1}(t).$$

Da L_{N-1} ein lokales Martingal bezüglich P_N ist, gilt

$$\begin{aligned}dR_{N-1}(t) &= \frac{\delta_{N-1} dL_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) \sigma_{N-1}(t) dW(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1} \\ &= R_{N-1}(t) \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-1}(t) dW(t) \\ &= R_{N-1}(t) X_{N-1}(t) dW(t) \quad \text{mit} \\ X_{N-1}(t) &= \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-1}(t).\end{aligned}$$

Somit erfüllt der Dichtequotientenprozess R_{N-1} eine lineare stochastische Differentialgleichung. Diese wird gelöst durch

$$R_{N-1}(t) = \exp \left(\int_0^t X_{N-1}(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_{N-1}(s)\|^2 ds \right).^2$$

¹Siehe Abschnitt 24.3 in [Bjö04].

²Siehe Satz 5.2 und die Bemerkung 11.3.3 in [Bjö04].

Mit dem Satz von Girsanov¹ folgt, dass

$$\begin{aligned} W^{(N-1)}(t) &:= W(t) - \left\langle W, \int X_{N-1} dW \right\rangle_t \\ &= W(t) - \int_0^t X_{N-1}(s) ds \\ &= W(t) - \int_0^t \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(s)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(s) + 1} \sigma_{N-1}(s) ds \end{aligned}$$

ein d -dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich P_{N-1} ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} dL_{N-2}(t) &= L_{N-2}(t) (\mu_{N-2}(t) dt + \sigma_{N-2}(t) dW(t)) \\ &= L_{N-2}(t) \left(\left(\mu_{N-2}(t) + \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-2}(t) \sigma_{N-1}(t) \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{N-2}(t) dW^{(N-1)}(t) \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft von L_{N-2} unter P_{N-1} folgt schließlich

$$\mu_{N-2}(t) = -\frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-2}(t) \sigma_{N-1}(t).$$

Somit ist die Behauptung für $j = N - 2$ gezeigt.

Nun gelte die Behauptung für ein beliebiges $1 < j < N - 1$. Das Forwardmartingalmaß P_j ist durch den folgenden Dichtequotientenprozess definiert

$$\frac{dP_j}{dP_{j+1}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} \frac{B(0, T_{j+1})}{B(0, T_j)} = \frac{\delta_j L_j(t) + 1}{\delta_j L_j(0) + 1} =: R_j(t).$$

Da L_j definitionsgemäß ein Martingal bezüglich P_{j+1} ist, erhält man analog zu oben eine lineare stochastische Differentialgleichung für R_j

$$\begin{aligned} dR_j(t) &= \frac{\delta_j dL_j(t)}{\delta_j L_j(0) + 1} = R_j(t) X_j(t) dW^{(j+1)}(t) \quad \text{mit} \\ X_j(t) &= \frac{\delta_j L_j(t)}{\delta_j L_j(t) + 1} \sigma_j(t) \\ \Rightarrow R_j(t) &= \exp \left(\int_0^t X_j(s) dW^{(j+1)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_j(s)\|^2 ds \right). \end{aligned}$$

¹Siehe Theorem 11.3 in [Bj04].

Mit der Anwendung von dem Satz von Girsanov und der Induktionsvoraussetzung folgt, dass

$$\begin{aligned}
 W^{(j)}(t) &= W^{(j+1)}(t) - \left\langle W^{(j+1)}, \int X_j dW^{(j+1)} \right\rangle_t \\
 &= W^{(j+1)}(t) - \int_0^t X_j(s) ds \\
 &\stackrel{IV}{=} W(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t X_k(s) ds - \int_0^t X_j(s) ds \\
 &= W(t) - \sum_{k=j}^{N-1} \int_0^t X_k(s) ds \\
 &= W(t) - \sum_{k=j}^{N-1} \int_0^t \frac{\delta_k L_k(s)}{\delta_k L_k(s) + 1} \sigma_k(s) ds
 \end{aligned}$$

ein d -dimensionaler P_j -Wiener-Prozess ist. Somit erhält man folgende Dynamik für L_{j-1} bezüglich P_j

$$\begin{aligned}
 dL_{j-1}(t) &= L_{j-1}(t) (\mu_{j-1}(t) dt + \sigma_{j-1}(t) dW(t)) \\
 &= L_{j-1}(t) \left(\left(\mu_{j-1}(t) + \sum_{k=j}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sigma_{j-1}(t) \sigma_k(t) \right) dt \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_{j-1}(t) dW^{(j)}(t) \right).
 \end{aligned}$$

Mit der Martingaleigenschaft von L_{j-1} bezüglich P_j folgt schließlich die Behauptung für $j - 1$.

□

Aus dem Satz 2.1 folgt, dass die Dynamik der LIBOR-Rate L_j , $1 \leq j \leq N - 1$, unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_N durch die folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben wird

$$dL_j(t) = L_j(t) \sigma_j(t) \left(- \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sigma_k(t) dt + dW(t) \right), \quad 0 \leq t \leq T_j.$$

Es fällt auf, dass die Dynamik von L_j allein von den σ_j , $1 \leq j \leq N - 1$, abhängt. Somit wird das LIBOR-Markt-Modell vollständig durch die Volatilität der LIBOR-Raten festgelegt.

Es stellt sich die Frage, wie die Volatilitätsstruktur zu wählen ist, damit die aus dem Modell resultierenden Preise möglichst gut die Marktdaten treffen. In dem weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit werden drei Ansätze für die Volatilitätsstruktur unter dieser Fragestellung analysiert. Außerdem werden für die unterschiedlichen Modellansätze die Bewertungsmethoden für die Caplets und Swaptions aufgezeigt. Denn die Eignung eines LIBOR-Markt-Modells für die Bewertung von Zinsderivaten in der Praxis ist nicht nur von dessen Marktkonsistenz, sondern auch von dessen Kalibrierungsmöglichkeiten abhängig. Über die Caplet- und Swaption-Modellpreise kann das Modell an die Marktdaten kalibriert werden.

Der erste mögliche Ansatz für die Volatilitätsstruktur wurde erstmals in den Arbeiten von Brace, Gatarek, Musiela (siehe [BGM97]), Jamshidian (siehe [Jam97]) sowie von Miltersen, Sandmann und Sondermann (siehe [MSS97]) vorgestellt. Hier werden die Volatilitäten als deterministische, beschränkte Funktionen der Zeit vorausgesetzt. In dem folgenden Kapitel wird dieser Ansatz diskutiert und es wird erläutert, wie die aus dem Modellansatz resultierende implizite Volatilität der Caplets über das Ausmaß der Marktkonsistenz des Modells bestimmt. [BM01] und [Pau12] dienen als Literaturquelle für das nächste Kapitel.

3. Deterministischer Ansatz

Der in diesem Kapitel vorgestellte Modellansatz basiert auf der Annahme, dass die Volatilität σ_j der j -ten LIBOR-Rate eine deterministische, beschränkte Funktion der Zeit ist. Das heißt für ein beliebiges $1 \leq j \leq N-1$ erfüllt die LIBOR-Rate L_j unter dem Forwardmartingalmaß P_{j+1} folgende stochastische Differentialgleichung

$$dL_j(t) = L_j(t)\sigma_j(t)dW^{(j+1)}(t). \quad (3.1)$$

Die eindeutige Lösung dieser linearen stochastischen Differentialgleichung ist

$$L_j(t) = L_j(0) \exp \left(\int_0^t \sigma_j(s) dW^{(j+1)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds \right). \quad (3.2)$$

Da σ_j eine deterministische und beschränkte Funktion ist, kann eine genaue Aussage über die Verteilung von $L_j(t)$ für ein $t \in [0, T_j]$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1} getroffen werden. Unter Verwendung der bekannten Verteilung können dann die Caplets und Swaptions bewertet werden, siehe Abschnitt 3.1.1 und 3.2.

Man setze für ein beliebiges $t \in [0, T_j]$ $X_t := \int_0^t \sigma_j(s) dW^{(j+1)}(s)$. X_t ist ein Wiener-Integral der deterministischen, beschränkten Funktion $\sigma_j : [0, T_j] \rightarrow \mathbb{R}$ und ist somit normalverteilt mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t &= 0 \quad \text{und} \\ \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma_j(s) dW^{(j+1)}(s) \right]^2 = \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad ^1$$

¹Siehe Satz 2.19 in [Dec06].

Daher gilt

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t \sigma_j(s) dW^{(j+1)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds \right) \\ & \sim \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds, \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (3.2) folgt dann, dass $\frac{L_j(t)}{L_j(0)}$ für ein $t \in [0, T_j]$ unter P_{j+1} lognormal-verteilt ist. Genauer gilt

$$\frac{L_j(t)}{L_j(0)} \sim \mathcal{LN} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds, \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds \right) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j. \quad (3.3)$$

Diese Eigenschaft ist vor allem bei der Bewertung der Caplets von großer Bedeutung.

3.1. Bewertung von Caplets

3.1.1. Black's Formel

Das Ziel ist es nun eine geschlossene Formel zur Bewertung von Caplets herzuleiten. Ein Caplet für das Intervall $[T_j, T_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N - 1$, mit Strike K ist das Recht die diskrete Spot Rate

$$F(T_j; T_j, T_{j+1}) = \frac{1}{\delta_j} \left(\frac{1}{B(T_j, T_{j+1})} - 1 \right)$$

gegen einen festen Zinssatz K in T_{j+1} einzutauschen (vgl. die Ausführungen zu den Caplets in Kapitel 1). Daher führt ein T_j -Caplet zu der Auszahlung

$$(F(T_j; T_j, T_{j+1}) - K)^+ \delta_j = (L_j(T_j) - K)^+ \delta_j \quad \text{in } T_{j+1} .$$

Die Höhe der Auszahlung des T_j -Caplets stimmt also mit der Höhe der Auszahlung einer Call-Option auf die LIBOR-Rate L_j mit dem Ausübungszeitpunkt T_j und Strike K überein. So kann bei der Preisbestimmung eines Caplets analog zur Bewertung einer Call-Option in einem Black-Scholes-Modell vorgegangen werden. In dem ersten Schritt wird der Forwardpreis des Caplets zum Termin T_{j+1}

bestimmt. Dieser ist gegeben durch

$$\mathbb{E}_{j+1} [\delta_j (L_j(T_j) - K)^+],$$

wobei mit $\mathbb{E}_{j+1}[\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich des Forwardmartingalmaßes P_{j+1} bezeichnet wird.

Den Spotpreis des Caplets erhält man durch das Abdiskontieren des Forwardpreises mit $B(0, T_{j+1})$. So lässt sich der Preis des T_j -Caplets mit Strike K in $t = 0$ berechnen durch

$$\begin{aligned} C_j(0) &:= Cl(0; T_j, T_{j+1}, K) = B(0, T_{j+1}) \delta_j \mathbb{E}_{j+1} [(L_j(T_j) - K)^+] \quad (3.4) \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \left(L_j(0) \tilde{P}_{j+1}(L_j(T_j) > K) - K P_{j+1}(L_j(T_j) > K) \right) \\ \text{mit } \frac{d\tilde{P}_{j+1}}{dP_{j+1}} \Big|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{L_j(t)}{L_j(0)} \text{ für alle } 0 \leq t \leq T_j. \end{aligned}$$

Nun kann die Verteilungseigenschaft der j -ten LIBOR-Rate ausgenutzt werden. Mit (3.3) folgt

$$\begin{aligned} P_{j+1}(L_j(T_j) > K) &= P_{j+1} \left(\log \left(\frac{L_j(T_j)}{L_j(0)} \right) > \log \left(\frac{K}{L_j(0)} \right) \right) \\ &= P_{j+1} \left(\underbrace{\frac{\log \left(\frac{L_j(T_j)}{L_j(0)} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \frac{\log \left(\frac{K}{L_j(0)} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{K}{L_j(0)} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{L_j(0)}{K} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}} \right), \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Um $\tilde{P}_{j+1}(L_j(T_j) > K)$ zu berechnen, muss zunächst die Dynamik von L_j unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \tilde{P}_{j+1} bestimmt werden. Aufgrund der speziellen

Gestalt des Dichtequotientenprozesses

$$\frac{d\tilde{P}_{j+1}}{dP_{j+1}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_j(t)}{L_j(0)} \stackrel{(3.2)}{=} \exp\left(\int_0^t \sigma_j(s) dW^{(j+1)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds\right), \quad 0 \leq t \leq T_j,$$

erhält man mit dem Satz von Girsanov den \tilde{P}_{j+1} -Wiener-Prozess $\tilde{W}^{(j+1)}$ durch

$$\tilde{W}^{(j+1)}(t) = W^{(j+1)}(t) - \int_0^t \sigma_j(s) ds \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j.$$

Es folgt also

$$dL_j(t) \stackrel{(3.1)}{=} L_j(t) \sigma_j(t) dW^{(j+1)}(t) = L_j(t) \left(\sigma_j(t) d\tilde{W}^{(j+1)}(t) + \|\sigma_j(t)\|^2 dt \right).$$

Die eindeutige Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} L_j(t) &= L_j(0) \exp\left(\int_0^t \sigma_j(s) d\tilde{W}^{(j+1)}(s) + \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 - \frac{1}{2} \|\sigma_j(s)\|^2 ds\right) \\ &= L_j(0) \exp\left(\int_0^t \sigma_j(s) d\tilde{W}^{(j+1)}(s) + \int_0^t \frac{1}{2} \|\sigma_j(s)\|^2 ds\right). \end{aligned}$$

In gleicher Weise, wie in der Einleitung zu diesem Kapitel, kann gezeigt werden, dass unter \tilde{P}_{j+1}

$$\frac{L_j(t)}{L_j(0)} \sim \mathcal{LN}\left(\frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds, \int_0^t \|\sigma_j(s)\|^2 ds\right) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j \text{ gilt.}$$

Somit folgt analog zu oben

$$\tilde{P}_{j+1}(L_j(T_j) > K) = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{L_j(0)}{K}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}}\right).$$

Insgesamt erhält man die sogenannte Black Formel für Caplets.

Satz 3.1 (Black's Formel für Caplets)

Der Preis eines Caplets für ein Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N - 1$, mit Strike K in $t = 0$ ist gegeben durch

$$C_j^{Black}(0) = B(0, T_{j+1}) \delta_j [L_j(0)\Phi(h_+(L_j(0))) - K\Phi(h_-(L_j(0)))] \quad \text{mit}$$

$$h_{\pm}(x) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) \pm \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}},$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Die in Satz 3.1 angegebene Preisformel für die Caplets ermöglicht eine schnelle Kalibrierung des Modells an die Marktdaten. Aus diesem Grund wird in der Praxis überwiegend der Ansatz der lognormal-verteilten LIBOR-Raten benutzt. Leider ist dieser Ansatz nicht zufriedenstellend, wenn es darum geht das Verhalten der impliziten Volatilität der Caplets abzubilden.

Die Fähigkeit eines Modellansatzes den Verlauf der impliziten Volatilität nachzubilden ist ein wesentlicher Indikator für die Marktkonsistenz des Modells. In dem nächsten Abschnitt wird dies näher erläutert. Außerdem wird gezeigt, dass der deterministische Modellansatz nicht über diese Fähigkeit verfügt.

3.1.2. Skew Effekt

Es wird nun untersucht, wie marktkonsistent der oben vorgestellte Modellansatz ist. Dabei steht der sogenannte Skew-Effekt der impliziten Volatilität der Caplets im Vordergrund. Zunächst werden die Begriffe der impliziten Volatilität und des Skew Effekts erklärt.

Neben den Capletpreisen ist die implizite Volatilität der Caplets auf dem Markt beobachtbar. Sie lässt sich mithilfe der Black-Scholes Formel für Caplets erklären. Man nehme an, dass die LIBOR-Rate L_j von genau einem eindimensionalen Wiener-Prozess beeinflusst wird und eine konstante Volatilität $\tilde{\sigma}_j$ besitzt. Dann kann die Bewertung des T_j -Caplets analog zum Abschnitt 3.1.1 erfolgen. Der Preis des Caplets in $t = 0$ in Abhängigkeit von der Volatilität $\tilde{\sigma}_j$ ist gegeben durch

$$C_j(0, \tilde{\sigma}_j) = B(0, T_{j+1}) \delta_j [L_j(0)\Phi(f_+(L_j(0), \tilde{\sigma}_j)) - K\Phi(f_-(L_j(0), \tilde{\sigma}_j))] \quad (3.5)$$

mit

$$f_{\pm}(x, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T_j}{\sigma\sqrt{T_j}}.$$

Die implizite Volatilität ist die Volatilität $\tilde{\sigma}_j$, für die $C_j(0, \tilde{\sigma}_j)$ mit dem Marktpreis des Caplets übereinstimmt. Genauer gilt

Definition 3.2 Sei C_j^M der Marktpreis des Caplets für das Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$ mit dem Strike K . Die implizite Volatilität des Caplets σ_j^{imp} ist diejenige Volatilität, für die $C_j^M = C_j(0, \sigma_j^{imp})$ erfüllt ist.

Nimmt man an, dass der im Abschnitt 3.1.1 vorgestellte deterministische Modellansatz die Marktpreise für die Caplets liefert, dann gilt für die implizite Volatilität $C_j(0, \sigma_j^{imp}) = C_j^{Black}(0)$. Aus dem Vergleich der Formel (3.5) mit der Black Formel für Caplets ergibt sich folgende Gleichheit für die implizite Volatilität

$$\sigma_j^{imp} = \sqrt{\frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds}. \quad (3.6)$$

Da σ_j^{imp} auf dem Markt quotiert ist, kann diese Gleichheit für die Kalibrierung des Modells verwendet werden. Es ist aber anzumerken, dass sich in der Praxis eine Abhängigkeit zwischen der impliziten Volatilität und dem Strike K beobachten lässt. Es tritt ein sogenannter *Skew Effekt* auf, das heißt, dass die implizite Volatilität σ_j^{imp} mit dem steigenden Strike K sinkt. Die Gleichung (3.6) weist aber keine Abhängigkeit der Volatilität von dem Strike auf. Das heißt, dass die aus dem Modell resultierende implizite Volatilität der Caplets für alle Strikes gleich ist. Wird nun das Modell mithilfe der Gleichung (3.6) an die implizite Volatilität der Caplets mit Strike K^* kalibriert, dann wird die tatsächliche implizite Volatilität aufgrund des Skew Effekts für $0 < K < K^*$ unterschätzt und für $K > K^*$ überschätzt.

Nach der Definition 3.2 liegt offensichtlich ein Zusammenhang zwischen der impliziten Volatilität und dem Marktpreis des Caplets vor. Der folgende Satz zeigt, dass die Funktion C_j monoton wachsend in σ ist.¹

¹Vergleiche Abschnitt 6.8 in [Pau10].

Satz 3.3 Die Funktion $C_j(0, \cdot)$, definiert durch

$$C_j(0, \sigma) = B(0, T_{j+1}) \delta_j [L_j(0) \Phi(f_+(L_j(0), \sigma)) - K \Phi(f_-(L_j(0), \sigma))], \sigma \in \mathbb{R},$$

mit

$$f_{\pm}(x, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T_j}{\sigma \sqrt{T_j}},$$

ist streng monoton steigend.

Beweis: Zu zeigen ist, dass $\frac{dC_j}{d\sigma} > 0$ gilt. Es ist zu beachten, dass

$$f_+(x, \sigma) = f_-(x, \sigma) + \sigma \sqrt{T_j} \Rightarrow \partial_{\sigma} f_+(x, \sigma) = \partial_{\sigma} f_-(x, \sigma) + \sqrt{T_j} \quad (3.7)$$

gilt. Zur Abkürzung wird im Folgenden f_{\pm} für $f_{\pm}(L_j(0), \sigma)$ geschrieben. Wird mit φ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung bezeichnet, dann folgt für ein beliebiges σ

$$\begin{aligned} \frac{dC_j(0, \sigma)}{d\sigma} &= B(0, T_{j+1}) \delta_j [L_j(0) \varphi(f_+) \partial_{\sigma} f_+ - K \varphi(f_-) \partial_{\sigma} f_-] \\ &\stackrel{(3.7)}{=} B(0, T_{j+1}) \delta_j \left[L_j(0) \varphi(f_+) \sqrt{T_j} + \partial_{\sigma} f_- [L_j(0) \varphi(f_+) - K \varphi(f_-)] \right]. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\varphi(f_+)}{\varphi(f_-)}\right) &= \log\left(\frac{\exp(-0,5f_+^2)}{\exp(-0,5f_-^2)}\right) = -\frac{1}{2}(f_+^2 - f_-^2) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} -\frac{1}{2}\left(f_-^2 + 2f_- \sigma \sqrt{T_j} + \sigma^2 T_j - f_-^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\log\left(\frac{L_j(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T_j}{\sigma \sqrt{T_j}}\right) \sigma \sqrt{T_j} + \sigma^2 T_j\right) = \log\left(\frac{K}{L_j(0)}\right). \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $L_j(0) \varphi(f_+) - K \varphi(f_-) = 0$. Somit folgt

$$\frac{dC_j(0, \sigma)}{d\sigma} = B(0, T_{j+1}) \delta_j L_j(0) \varphi(f_+) \sqrt{T_j} > 0.$$

□

Aus Definition 3.2 und Satz 3.3 folgt somit, dass mit hohen Capletpreisen eine hohe implizite Volatilität einhergeht und umgekehrt. Daher bringt die Fehleinschätzung der impliziten Volatilität die entsprechende Fehlbepreisung der Caplets mit sich. Hieraus folgt die Notwendigkeit von Modellansätzen, die den Skew Effekt nachbilden können.

Solche Modellansätze werden in Kapitel 4 und 5 vorgestellt. Vorher wird aber noch auf die Bewertung der Swaptions in dem deterministischen Modellansatz eingegangen.

3.2. Bewertung von Swaptions

In diesem Abschnitt werden die Möglichkeiten zur Bewertung von Swaptions in dem vorliegenden Modell erläutert. Man betrachte eine Swaption auf dem Zeitintervall $[T_n, T_m]$, $1 \leq n < m \leq N$, mit Strike K . Diese Swaption führt in T_n zur folgenden Auszahlung

$$(R_{n,m}(T_n) - K)^+ \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(T_n, T_{j+1}),$$

wobei $(R_{n,m}(t))_{0 \leq t \leq T_n}$ der Swapraten-Prozess mit

$$R_{n,m}(t) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1})} \quad (3.8)$$

ist.¹ Man setze

$$N_{n,m}(t) := \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1}) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_n.$$

Der arbitragefreie Preis der Swaption in $t = 0$ ist gegeben durch

$$PS_{n,m}(0) = B(0, T_n) \mathbb{E}_n [(R_{n,m}(T_n) - K)^+ N_{n,m}(T_n)],$$

wobei $\mathbb{E}_n [\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich des Forwardmartingalmaßes P_n zum Termin T_n ist.

¹Vergleiche die Erläuterungen zu den Swaps und Swaptions in Kapitel 1.

Die Grundidee bei der Berechnung von $PS_{n,m}(0)$ besteht nun darin einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^S durchzuführen, so dass $R_{n,m}$ ein lokales Martingal bezüglich P^S ist. P^S wird als *Forwardswapmaß* bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

Definition 3.4 Man setze $N_{n,m}(t) = \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1})$ für alle $0 \leq t \leq T_n$. Dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^S *Forwardswapmaß*, wenn

$$\left(\frac{B(t, T_j)}{N_{n,m}(t)} \right)_{0 \leq t \leq T_n}$$

für jedes $1 \leq j \leq N-1$ ein lokales Martingal bezüglich P^S ist.

Insbesondere ist dann $(R_{n,m})_{0 \leq t \leq T_n}$ mit

$$R_{n,m}(t) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{N_{n,m}(t)} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T_n$$

ein lokales Martingal bezüglich P^S .

Mithilfe der Numéraire Technik¹ erhält man die folgende Gestalt für den Dichtequotientenprozess

$$\frac{dP^S}{dP_n} \Big|_{\mathcal{F}_t} =: L^S(t) = \frac{B(0, T_n) N_{n,m}(t)}{N_{n,m}(0) B(t, T_n)}, \quad 0 \leq t \leq T_n.$$

Da $(R_{n,m}(T_n) - K)^+ N_{n,m}(T_n)$ eine \mathcal{F}_{T_n} -messbare Zufallsvariable ist, folgt mit dem Bayes-Theorem²

$$\begin{aligned} PS_{n,m}(0) &= B(0, T_n) \mathbb{E}_n [(R_{n,m}(T_n) - K)^+ N_{n,m}(T_n)] \\ &= B(0, T_n) \mathbb{E}^S \left[(R_{n,m}(T_n) - K)^+ N_{n,m}(T_n) \cdot \frac{1}{L^S(T_n)} \right] \\ &= B(0, T_n) \mathbb{E}^S \left[(R_{n,m}(T_n) - K)^+ N_{n,m}(T_n) \cdot \frac{B(T_n, T_n) N_{n,m}(0)}{B(0, T_n) N_{n,m}(T_n)} \right] \\ &\stackrel{B(T_n, T_n)=1}{=} N_{n,m}(0) \mathbb{E}^S [(R_{n,m}(T_n) - K)^+], \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei mit $\mathbb{E}^S[\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich P^S bezeichnet wird.

¹Siehe Abschnitt 24.3 in [Bjö04].

²Siehe Satz B.41 in [Bjö04].

Zur Berechnung von $PS_{n,m}(0)$ ist es nun notwendig die Dynamik von $R_{n,m}$ bezüglich P^S in dem vorliegenden LIBOR-Markt-Modell zu bestimmen.

Es sei zunächst angenommen, dass die Swaptionrate lognormal-verteilt ist. Das heißt man unterstellt die Existenz einer deterministischen, beschränkten Funktion $\sigma^S : [0, T_n] \rightarrow \mathbb{R}^d$, sodass $(R_{n,m}(t))_{0 \leq t \leq T_n}$ folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt

$$dR_{n,m}(t) = \sigma^S(t)R_{n,m}(t)dW^S(t), \quad (3.10)$$

wobei W^S ein Wiener-Prozess unter dem Forwardswapmaß P^S ist. In diesem Fall geht man dann, unter Beachtung der Formel (3.9), analog zur Bewertung von Caplets vor und erhält Black's Formel für Swaptions.¹

Satz 3.5 Black's Formel für Swaptions

Man betrachte eine Swaption für das Zeitintervall $[T_n, T_m]$, $1 \leq n < m \leq N$, mit Strike K . Sei $R_{n,m}$ die dazugehörige Swaprate definiert durch (3.8). Erfüllt der Swapraten-Prozess die stochastische Differentialgleichung (3.10), so weist die Swaption zum Zeitpunkt $t = 0$ folgenden Wert auf

$$PS_{n,m}(0) = N_{n,m}(0) (R_{n,m}(0)\Phi(d_+(R_{n,m}(0))) - K\Phi(d_-(R_{n,m}(0))))$$

mit

$$d_{\pm}(x) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) \pm \frac{1}{2} \int_0^{T_n} \|\sigma^S(t)\|^2 dt}{\sqrt{\int_0^{T_n} \|\sigma^S(t)\|^2 dt}},$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Die Annahme der deterministischen Swaptionvolatilität stimmt nicht mit dem vorliegenden Modell überein. Denn aus der Annahme der lognormal-verteilten LIBOR-Raten folgt, dass σ^S ein stochastischer Prozess ist. Im Folgenden soll nun die tatsächliche Gestalt von σ^S , ausgehend von der vorliegenden Dynamik der LIBOR-Raten (2.2), hergeleitet werden. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [HW99].

¹Für weitere Details siehe Kapitel 6.7 in [BM01].

Das Ziel ist es also die Volatilität der Swaprate $R_{n,m}$ zu bestimmen. Hierfür wird zunächst die Swaprate in Abhängigkeit von den LIBOR-Raten dargestellt. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{n,m}(t) &= \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1})} = \frac{\frac{B(t, T_n)}{B(t, T_m)} - 1}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_m)}} \\ &= \frac{\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1) - 1}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

dabei ist die letzte Gleichheit erfüllt, da aus der Definition der LIBOR-Rate

$$\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} = (\delta_j L_j(t) + 1)$$

für alle $1 \leq j \leq N - 1$ folgt und somit für jedes $1 \leq j < m$

$$\frac{B(t, T_j)}{B(t, T_m)} = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} \frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_{j+2})} \cdots \frac{B(t, T_{m-1})}{B(t, T_m)} = \prod_{i=j}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)$$

gilt. Es folgt, dass die Swaprate $R_{n,m}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der LIBOR-Raten L_n, \dots, L_{m-1} ist. Daher kann die Dynamik der Swaprate mithilfe der Itô-Formel ermittelt werden. Man betrachte die Dynamik der Swaprate unter dem Terminalmaß P_N . Da die Driftterme nicht von Interesse sind, werden diese bei der Anwendung der Itô-Formel nicht beachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} dR_{n,m}(t) &= \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_k(t)} dL_k(t) + (\dots) dt \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_k(t)} \sigma_k(t) L_k(t) dW(t) + (\dots) dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nun müssen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial R_{n,m}}{\partial L_k}$, $n \leq k \leq m - 1$, ermittelt werden. Mit der Gleichung (3.11) folgt

$$\log(R_{n,m}) = \log \left(\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1) - 1 \right) - \log \left(\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1) \right).$$

Nun gilt zum einen

$$\frac{\partial \log(R_{n,m}(t))}{\partial L_k(t)} = \frac{1}{R_{n,m}(t)} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_k(t)}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(R_{n,m}(t))}{\partial L_k(t)} &= \frac{\delta_k \prod_{j=n, j \neq k}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1)}{\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1) - 1} - \frac{\delta_k \sum_{j=n}^{k-1} \delta_j \prod_{i=j+1, i \neq k}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)} \\ &= \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \underbrace{\left(\frac{\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1)}{\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1) - 1} - \frac{\sum_{j=n}^{k-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)} \right)}_{=: \gamma_k(t)}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_k(t)} &= \frac{R_{n,m}(t) \delta_k \gamma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \\ \stackrel{(3.12)}{\Rightarrow} dR_{n,m}(t) &= R_{n,m}(t) \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_k(t) \gamma_k(t) \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dW(t) + (\dots) dt. \end{aligned}$$

Somit ist die Volatilität der Swaprate $R_{n,m}$ gegeben durch

$$\sigma^S(t) = \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_k(t) \gamma_k(t) \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1}.$$

Offensichtlich ist σ^S ein stochastischer Prozess. Folglich kann der Swaptionpreis nicht mithilfe der Black Formel genau berechnet werden. Grundsätzlich ist die Bewertung der Swaptions mithilfe der Monte-Carlo-Simulation möglich.¹ Diese Bewertungsmethode ist aber mit einem hohen numerischen Rechenaufwand verbunden. Aus diesem Grund ist man an Methoden interessiert, die mit einem geringeren Rechenaufwand eine vergleichsweise gute Näherung für die Swaptionpreise liefern.

Durch das sogenannte *Freezing* kann die Volatilität σ^S durch eine deterministische Funktion approximiert werden. Unter Freezing versteht man eine Abschätzung des Wertes einer LIBOR-Rate zu einem beliebigen Zeitpunkt t durch den

¹Für die Einzelheiten zu der Monte-Carlo-Simulation und zu der Anwendung der Bewertungsmethode bei den Swaptions siehe Abschnitt 6.10 in [BM01].

Wert der jeweiligen LIBOR-Rate zum Zeitpunkt 0. Das heißt, dass $L_k(t) \approx L_k(0)$ für alle $0 < t \leq T_k$ und $n \leq k \leq m - 1$ gilt. Es folgt

$$\sigma^S(t) \approx \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_k(t) \gamma_k(0) \frac{\delta_k L_k(0)}{\delta_k L_k(0) + 1} =: \tilde{\sigma}^S(t).$$

$\tilde{\sigma}^S$ ist eine Linearkombination der σ_k mit $n \leq k \leq m - 1$ und ist daher eine deterministische und beschränkte Funktion der Zeit. Somit führt Freezing zu der Annahme, dass die Swaptionrate näherungsweise lognormal-verteilt ist, falls dies für die LIBOR-Raten der Fall ist. Brace, Dun und Barton haben die Güte der Approximation der Swaptionvolatilität durch Freezing sowie der daraus resultierenden Annahme der lognormal-verteilter Swaptionrate untersucht (vgl. [BDB99]). Sie kamen zu dem Schluss, dass Freezing und die Annahme der lognormal-verteilter Swaptionrate sinnvolle Ergebnisse liefern. Es kann also eine gute Näherung für den Swaptionpreis berechnet werden, indem $\tilde{\sigma}^S$ in die Black Formel für Swaptions (Satz 3.5) eingesetzt wird.

4. CEV-Ansatz

Bei einem deterministischen Modellansatz ist keine Abhängigkeit der impliziten Volatilität der Caplets von dem Strike K gegeben (siehe Abschnitt 3.1.2). Das heißt die Modellierungsmöglichkeiten sind sehr stark eingeschränkt, da nur der Level der impliziten Volatilität beeinflussbar ist. Eine Modellierung des Skew Effektes ist dagegen nicht möglich.

In diesem Kapitel wird das CEV(Constant Elasticity of Variance)-Modell vorgestellt, das Paper [AA00] von Andersen und Andreasen sowie [BM01] dienen hierzu als Literaturquelle. Es gibt zwei wesentliche Vorteile dieses Modells. Zum einen bietet es die Möglichkeit einen streng monoton fallenden oder steigenden Verlauf der impliziten Volatilität zu modellieren. Zum anderen kann die Wahrscheinlichkeitsdichte einer LIBOR-Rate zu einem festen Zeitpunkt unter dem entsprechenden Forwardmartingalmaß bestimmt werden. Damit kann dann eine geschlossene Formel für die Capletpreise sowie für die Approximation an die Swaptionpreise hergeleitet werden (siehe Abschnitt 4.2 und 4.3). In dem folgenden Abschnitt wird die Struktur und die Eigenschaften des CEV-Modells erläutert, dabei werden nicht nur die Vorteile sondern auch die Grenzen des Modells aufgezeigt. Das Modell ist für die Bewertung komplexerer Zinsderivate ungeeignet, denn das Verhalten der LIBOR-Raten weist unerwünschte Eigenschaften auf. Diese kann man mithilfe einer Weiterentwicklung des CEV-Ansatzes, des sogenannten LCEV(Limited CEV)-Modells, umgehen (siehe Abschnitt 4.4). Unter diesem Modell ist es zwar nicht möglich eine geschlossene Preisformel für die Caplets und Swaptions anzugeben, die CEV-Preise liefern aber eine sehr gute Näherung, so dass das Modell schnell an die Marktdaten kalibriert werden kann.

4.1. Eigenschaften des CEV-Modells

Der CEV-Ansatz zählt zu den sogenannten Separationsansätzen, bei denen sich die Volatilität einer LIBOR-Rate aus einer deterministischen Funktion der Zeit und einer zeithomogenen Funktion der LIBOR-Rate zusammensetzt. Es wird angenommen, dass die Volatilität einer LIBOR-Rate L_j , $1 \leq j \leq N - 1$, folgende Gestalt aufweist

$$\sigma_j(t) = \lambda_j(t) \frac{\varphi(L_j(t))}{L_j(t)},$$

wobei $\lambda_j : [0, T_j] \rightarrow \mathbb{R}^d$ beschränkt und messbar ist und $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ als die lokale Volatilitätsfunktion bezeichnet wird. Folglich erfüllt L_j folgende stochastische Differentialgleichung unter dem Forwardmartingalmaß P_{j+1}

$$dL_j(t) = \lambda_j(t) \varphi(L_j(t)) dW^{(j+1)}(t). \quad (4.1)$$

Wird die lokale Volatilitätsfunktion $\varphi(x) = x^\alpha$ mit $\alpha > 0$ gesetzt, so wird das daraus resultierende Separationsmodell als das CEV-Modell mit dem Elastizitätsfaktor α bezeichnet.

Für $\varphi(L_j(t)) = L_j(t)$ beziehungsweise $\alpha = 1$ geht das deterministische LIBOR-Markt-Modell hervor, in dem die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (4.1) bekannt ist. Der folgende Satz gibt an unter welchen Voraussetzungen die Differentialgleichung (4.1) mit einer nicht-linearen Funktion φ eine eindeutige, positive Lösung besitzt.

Satz 4.1 *Sei $(L_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$ ein LIBOR-Raten-Prozess, für den die stochastische Differentialgleichung (4.1) erfüllt ist, mit $L_j(0) \geq 0$ und $\varphi(0) = 0$. Gelten für die lokale Volatilitätsfunktion φ folgende Voraussetzungen:*

1. *Lokale Lipschitz-Stetigkeit, d.h. für alle $a > 0$ existiert ein $C_a > 0$, so dass für alle $x, y \in [0, a)$ $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C_a |x - y|$ gilt.*
2. *Wachstumsbeschränkung, d.h. es existiert ein $C > 0$, so dass $\varphi(x)^2 \leq C(1 + x^2)$ für alle $x > 0$ gilt.*

so existiert eine eindeutige, fast-sicher stetige \mathbb{R} -wertige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (4.1). Ist $L_j(0) > 0$, so ist die Lösung strikt positiv.

Der Beweis basiert im Wesentlichen auf dem Existenz- und Eindeigkeitssatz von L. Arnold [Arn73]. Für weitere Details siehe außerdem [AA00].

Bemerkung 4.2 Sind die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllt, so ist die Aussage des Satzes auch für die Lösung der stochastischen Differentialgleichung bezüglich des Terminalmaßes P_N gültig. Denn zum einen übertragen sich die Lipschitz-Stetigkeit sowie die Wachstumsbeschränkung von der lokalen Volatilitätsfunktion φ auf die Drift μ_j^1 , was die Existenz und die Eindeigkeit einer \mathbb{R} -wertigen Lösung nach dem Satz von L. Arnold sichert. Zum anderen folgt aus der Äquivalenz der Maße P_{j+1} und P_N für alle $1 \leq j \leq N - 1$, dass die Lösung auch unter P_N im Fall $L_j(0) > 0$ positiv sein muss.

Ein CEV-Modell mit $\alpha \neq 1$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.1 nicht. Für $\alpha \in (0, 1)$ ist die Lipschitz-Stetigkeit nicht gegeben. Aus diesem Grund wird die Null mit einer positiven Wahrscheinlichkeit von L_j angenommen. Das heißt, dass für die $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Stopzeit

$$\tau_0 := \inf\{t \in [0, T_j) : L_j(t) = 0\} \wedge T_j \quad (4.2)$$

$P_{j+1}(\tau_0 < T_j) > 0$ gilt.²

In dem Fall $0 < \alpha < 1/2$ stellt die Null einen nichtsingulären Rand dar, so dass der Verlauf der Lösung nach dem Erreichen der Null nicht eindeutig und eine zusätzliche Randbedingung notwendig ist.³ Die Martingaleigenschaft des Prozesses L_j unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1} liefert die erforderliche Randbedingung: Für ein $t \in [0, T_j]$ bildet $t \vee \tau_0 := \max(t, \tau_0)$ eine beschränkte Stopzeit mit $\tau_0 \leq t \vee \tau_0$, da τ_0 nach der Definition (4.2) beschränkt ist. Wendet man nun das Optional Sampling Theorem für beschränkte Stopzeiten⁴ auf das P_{j+1} -Martingal L_j an, so folgt

$$\mathbb{E}_{j+1}(L_j(t \vee \tau_0) \mid \mathcal{F}_{\tau_0}) \stackrel{OS}{=} L_j(\tau_0) \stackrel{(4.2)}{=} 0 \cdot 1_{\{\tau_0 < T_j\}} + L_j(T_j)1_{\{\tau_0 = T_j\}}.$$

¹Siehe die Gestalt von μ_j in dem Satz 2.1.

²Hierbei ist $x \wedge y := \min(x, y)$ und $\inf\{\emptyset\} := \infty$.

³Siehe [BS02] Kapitel II.

⁴Siehe Kapitel II Theorem 3.2 in [RY05].

Da L_j ein nichtnegativer Prozess ist, gilt somit

$$L_j \equiv 0 \quad \text{auf} \quad (\tau_0, T_j] = \{(t, \omega) : \omega \in \Omega_0, \tau_0(\omega) < t \leq T_j\}.$$

Somit stellt die Null für $\alpha \in (0, 1)$ eine absorbierende Grenze für den LIBOR-Raten-Prozess L_j dar. Dies ist eine unerwünschte, mit der Realität nicht vereinbare Eigenschaft, die insbesondere das Bewerten von pfadabhängigen Zinsderivaten erschwert. Denn ist die Auszahlung eines Zinsderivates an den Verlauf der LIBOR-Raten gekoppelt, so sind bei der Bewertung, mithilfe der Monte-Carlo-Simulation, Pfade zu berücksichtigen, die in der Null enden.

Im Fall $\alpha > 1$ ist zu beachten, dass keine Wachstumsbeschränkung vorliegt. Dies überträgt sich auf die Drift von L_j unter dem Terminalmaß P_N , so dass die Werte von L_j gegen Unendlich laufen können.

Trotz der oben genannten Probleme ist das Betrachten des CEV-Modells durchaus nützlich. Die Verwendung des Modells wird in dem Abschnitt 4.4 genauer erläutert. Unter dem CEV-Ansatz ist es möglich eine geschlossene Preisformel für die Caplets herzuleiten. Im Gegensatz zu dem deterministischen Ansatz weist die aus den Modellpreisen resultierende implizite Volatilität der Caplets eine Abhängigkeit von dem Strike auf. Bestimmt durch die Wahl von dem Elastizitätsfaktor α lässt sich ein monoton fallender oder steigender Verlauf der impliziten Volatilität modellieren. Ein $\alpha \in (0, 1)$ führt zu einem streng monoton fallenden und ein $\alpha > 1$ zu einem streng monoton steigenden Verlauf der Volatilitätskurve. Da in der Praxis der Skew Effekt (siehe Abschnitt 3.1.2) zu beobachten ist, beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf den Fall $0 < \alpha < 1$.

Wie es schon oben dargestellt wurde, setzt sich die Volatilität der LIBOR-Rate aus einer zeitabhängigen und einer zeithomogenen Komponente zusammen. Für die Ermittlung der Verteilung der LIBOR-Rate wird die stochastische Differentialgleichung (4.1) so modifiziert, dass die Volatilität zeithomogen ist. Hierfür wird nun der Begriff der deterministischen Zeittransformation eines Wiener-Prozesses eingeführt.

Definiert man eine Funktion $\nu_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\nu_j(t) := \int_0^t \|\lambda_j(u)\|^2 du \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (4.3)$$

so ist ν_j stetig und streng monoton steigend mit $\nu(0) = 0$. Daher existiert für ein beliebiges $s \geq 0$ genau ein $t \geq 0$ mit $s = \nu_j(t)$. Aufgrund der Bijektivität von ν_j ist außerdem die Umkehrfunktion ν_j^{-1} wohldefiniert und zu jedem $t \geq 0$ existiert genau ein $s \geq 0$ mit $t = \nu_j^{-1}(s)$. Die Funktion ν_j kann als eine deterministische Transformation der Zeit angesehen werden. Das nächste Korollar gibt an, wie man aus dem Wiener-Prozess $W^{(j+1)}$ den Wiener-Prozess unter dem neuen Zeitparameter erhält.

Korollar 4.3 *Es sei $s := \nu_j(t)$, $t \geq 0$, der neue Zeitparameter, wobei die Funktion ν_j wie in (4.3) definiert ist. Dann ist der stochastische Prozess $\tilde{W}^{(j+1)}$ mit*

$$\tilde{W}^{(j+1)}(s) := \int_0^{\nu_j^{-1}(s)} \|\lambda_j(u)\| dW^{(j+1)}(u), \quad s \geq 0,$$

ein d -dimensionaler P_{j+1} -Wiener-Prozess unter dem deterministischen Zeitwechsel ν_j .

Beweis: Nach dem Korollar 8.5.3 in [Oks03] ist $\tilde{W}_i^{(j+1)}$ mit

$$\tilde{W}_i^{(j+1)}(s) = \int_0^{\nu_j^{-1}(s)} \|\lambda_j(u)\| dW_i^{(j+1)}(u)$$

ein eindimensionaler Wiener-Prozess unter P_{j+1} für alle $1 \leq i \leq d$. Mithilfe der Eigenschaften der quadratischen Kovariation für stochastische Integrale (siehe Theorem 2.2 in [RY05]) folgt für beliebige $i, k \in \{1, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{W}_i^{(j+1)}, \tilde{W}_k^{(j+1)} \right\rangle_s &= \int_0^{\nu_j^{-1}(s)} \|\lambda_j(u)\|^2 d \left\langle W_i^{(j+1)}, W_k^{(j+1)} \right\rangle_u \\ &= \delta_{i,k} \int_0^{\nu_j^{-1}(s)} \|\lambda_j(u)\|^2 du \\ &= \nu_j(\nu_j^{-1}(s)) \cdot \delta_{i,k} = s \cdot \delta_{i,k}. \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{W}^{(j+1)} = \left(\tilde{W}_1^{(j+1)}, \dots, \tilde{W}_d^{(j+1)} \right)$ ein d -dimensionaler Wiener-Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1} .

□

Nun kann mithilfe der deterministischen Zeittransformation ausgehend von der

Gleichung (4.1) ein stochastischer Prozess $(f_j(s))_{0 \leq s \leq \nu_j(T_j)}$ mit zeithomogener Volatilität definiert werden. Man setze dafür

$$f_j(s) := L_j(\nu_j^{-1}(s)) \quad \text{und} \quad \tilde{Z}_j^{(j+1)}(s) := \int_0^s \sum_{i=1}^d \frac{\lambda_j^{(i)}(\nu_j^{-1}(u))}{\|\lambda_j(\nu_j^{-1}(u))\|} d\tilde{W}_i^{(j+1)}(u). \quad (4.4)$$

$\tilde{Z}_j^{(j+1)}$ ist ein eindimensionaler P_{j+1} -Wiener-Prozess unter dem deterministischen Zeitwechsel ν_j . Unter Verwendung von Satz 4.3 erhält man folgende stochastische Differentialgleichung für den Prozess f_j

$$\begin{aligned} df_j(s) &= dL_j(\nu_j^{-1}(s)) \stackrel{(4.1)}{=} L_j(\nu_j^{-1}(s))^\alpha \sum_{i=1}^d \lambda_j^{(i)}(\nu_j^{-1}(s)) dW_i^{(j+1)}(\nu_j^{-1}(s)) \\ &= L_j(\nu_j^{-1}(s))^\alpha \sum_{i=1}^d \frac{\lambda_j^{(i)}(\nu_j^{-1}(s))}{\|\lambda_j(\nu_j^{-1}(s))\|} d\tilde{W}_i^{(j+1)}(\nu_j(\nu_j^{-1}(s))) \\ &\stackrel{(4.4)}{=} f_j(s)^\alpha d\tilde{Z}_j^{(j+1)}(s). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der Vorteil dieser Darstellung der stochastischen Differentialgleichung besteht darin, dass es nun möglich ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $L_j(T)$, $0 < T \leq T_j$, gegeben den Anfangswert $L_j(0)$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1} zu bestimmen. Die Dichte kann zur Bewertung von Zinsderivaten verwendet werden. In dem Fall von Caplets kann sogar eine geschlossene Preisformel hergeleitet werden.

Satz 4.4 *Sei T mit $0 < T \leq T_j$ beliebig und $L_j(0) = y$ der Anfangswert der j -ten LIBOR-Rate. Definiert man*

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{a+2n}}{n! \Gamma(a+n+1)}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du, \quad \vartheta = -\frac{1}{2(1-\alpha)}.$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $g_{j+1}(\cdot; y, T)$ von $L_j(T)$ unter dem Forwardmartingalmaß P_{j+1} gegeben durch

$$g_{j+1}(x; y, T) = \frac{x^{1-2\alpha}}{(1-\alpha)\nu_j(T)} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^{-1/\vartheta} + y^{-1/\vartheta}}{2\nu_j(T)(1-\alpha)^2}\right) I_{|\vartheta|} \left(\frac{(xy)^{-1/2\vartheta}}{\nu_j(T)(1-\alpha)^2}\right).$$

Beweis: Die Grundidee des Beweises besteht darin, den Prozess f_j durch Anwenden einer bijektiven Funktion h zu einem Prozess mit bekannter Dichte zu modifizieren. Dann kann die gesuchte Dichte durch eine entsprechende Transformation ermittelt werden. Man setze hierfür

$$h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto \frac{x^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2}. \quad (4.6)$$

Für den stochastischen Prozess x_j mit $x_j(s) := h(f_j(s))$, $0 \leq s \leq \nu_j(T_j)$, erhält man mit der Itô-Formel folgende Dynamik

$$dx_j(s) = 2 \frac{f_j(s)^{1-2\alpha}}{1-\alpha} df_j(s) + \frac{(1-2\alpha)}{(1-\alpha)} f_j(s)^{-2\alpha} d\langle f_j \rangle_s.$$

Da $\tilde{Z}_j^{(j+1)}$ ein Wiener-Prozess ist, gilt mit (4.5) und der Eigenschaften der quadratischen Variation

$$d\langle f_j \rangle_s \stackrel{(4.5)}{=} f_j(s)^{2\alpha} d\langle \tilde{Z}_j^{(j+1)} \rangle_s = f_j(s)^{2\alpha} ds.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} dx_j(s) &= 2 \frac{f_j(s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} d\tilde{Z}_j^{(j+1)}(s) + \frac{(1-2\alpha)}{(1-\alpha)} ds \\ &= 2\sqrt{x_j(s)} d\tilde{Z}_j^{(j+1)}(s) + \frac{(1-2\alpha)}{(1-\alpha)} ds. \end{aligned}$$

Setzt man $n = \frac{(1-2\alpha)}{(1-\alpha)}$, dann ist x_j ein quadrierter Bessel-Prozess¹ der Dimension n mit dem Index ϑ

$$\vartheta = \frac{n}{2} - 1 = -\frac{1}{2(1-\alpha)}.$$

Ist $y' := x_j(0)$ der Startwert des Prozesses x_j , so ist die Dichte von $x_j(s)$ für ein $s \in (0, \nu_j(T_j)]$ bekannt und ist gegeben durch

$$q(x; y', s) = \frac{1}{2s} \left(\frac{y'}{x} \right)^{\vartheta/2} \exp\left(-\frac{x+y'}{2s}\right) I_{|\vartheta|} \left(\frac{\sqrt{xy'}}{s} \right).$$

¹Siehe Kapitel XI in [RY05].

Es sei nun $y := L_j(0)$ der Anfangswert der LIBOR-Rate L_j . Die Funktion h ist für $0 < \alpha < 1$ streng monoton steigend, so lässt sich mithilfe der Beziehungen (4.4) und (4.6) die P_{j+1} -Dichte von $L_j(T)$ berechnen durch

$$\begin{aligned} g_{j+1}(x; y, T) &= \frac{dP_{j+1}(L_j(T) \leq x)}{dx} \stackrel{(4.4)}{=} \frac{dP_{j+1}(f_j(\nu_j(T)) \leq x)}{dx} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{dP_{j+1}(x_j(\nu_j(T)) \leq h(x))}{dx} = \frac{dh(x)}{dx} q(h(x); h(y), \nu_j(T)). \end{aligned}$$

Einsetzen der Ableitung von h und der Dichte q liefert die Behauptung.

□

Durch die Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Verteilung von $L_j(T_j)$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1} festgelegt, was dann insbesondere bei der Bewertung von Caplets verwendet werden kann.

4.2. Bewertung von Caplets

Das Ziel dieses Abschnittes ist es eine geschlossene Formel für den Preis eines Caplets in dem CEV-Modell mit dem Elastizitätsfaktor $\alpha \in (0, 1)$ herzuleiten. Durch die numerische Umsetzung dieser Preisformel werden dann die Modellierungsmöglichkeiten für die implizite Volatilität sowie die implizite Volatilitätsfläche in einem CEV-Modell grafisch veranschaulicht.

Seien also $j \in \{1, \dots, N - 1\}$, $\alpha \in (0, 1)$ beliebig und $W^{(j+1)}$ ein Wiener-Prozess bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_{j+1} . Dann erfüllt der LIBOR-Raten-Prozess L_j unter P_{j+1} folgende stochastische Differentialgleichung

$$dL_j(t) = \lambda_j(t)L_j(t)^\alpha dW^{(j+1)}(t),$$

wobei die Null einen absorbierenden Punkt für den Prozess darstellt.

Wie in dem Abschnitt 3.1.1 gezeigt wurde, ist der arbitragefreie Preis des Caplets für das Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$ mit Strike K zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$C_j(0) = B(0, T_{j+1})\delta_j \mathbb{E}_{j+1} [(L_j(T_j) - K)^+],$$

wobei $\mathbb{E}_{j+1}[\cdot]$ der Erwartungswert unter P_{j+1} ist. Ist $y := L_j(0)$ der Anfangskurs der LIBOR-Rate L_j , so gilt unter der Verwendung von Satz 4.4

$$\begin{aligned} C_j(0) &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \int_K^\infty (x - K) g_{j+1}(x; y, T_j) dx \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \left[\int_K^\infty x g_{j+1}(x; y, T_j) dx - K \int_K^\infty g_{j+1}(x; y, T_j) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Im Folgenden werden die Integrale in (4.7) berechnet. Man definiere dafür die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto \frac{x^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \nu_j(T_j)}.$$

Dann folgt mit Substitution $z := f(x)$

$$\begin{aligned} & \int_K^\infty x g_{j+1}(x; y, T_j) dx \\ &= \int_K^\infty x \underbrace{\frac{x^{1-2\alpha}}{(1-\alpha)\nu_j(T_j)}}_{=f'(x)/2} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^{2(1-\alpha)} + y^{2(1-\alpha)}}{2\nu_j(T_j)(1-\alpha)^2}\right) I_{-\vartheta}\left(\frac{(xy)^{(1-\alpha)}}{\nu_j(T_j)(1-\alpha)^2}\right) dx \\ &= \int_{f(K)}^\infty \frac{1}{2} \left((1-\alpha)^2 \nu_j(T_j) z\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\frac{f(y)}{z}\right)^{\frac{1}{4(1-\alpha)}} \exp\left(-\frac{z+f(y)}{2}\right) I_{-\vartheta}\left(\sqrt{zf(y)}\right) dz \\ &= \left((1-\alpha)^2 \nu_j(T_j) f(y)\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \int_{f(K)}^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{z}{f(y)}\right)^{\frac{1}{4(1-\alpha)}} \exp\left(-\frac{z+f(y)}{2}\right) I_{-\vartheta}\left(\sqrt{zf(y)}\right) dz \\ &= y \int_{f(K)}^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{z}{f(y)}\right)^{\frac{1}{4(1-\alpha)}} \exp\left(-\frac{z+f(y)}{2}\right) I_{-\vartheta}\left(\sqrt{zf(y)}\right) dz. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Der Integrand in (4.8) stimmt mit der Dichte einer nichtzentralen Chi-Quadrat-Verteilung überein. Denn die Dichte einer nichtzentralen Chi-Quadrat-Verteilung $\chi^2(n, \lambda)$ mit $n \geq 0$ Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter λ ist gegeben durch¹

$$f(x; n, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left(-\frac{x+\lambda}{2}\right) I_{n/2-1}\left(\sqrt{x\lambda}\right).$$

¹Siehe Seite 436 in [JKB95].

Bezeichnet man mit $\chi^2(\cdot; n, \lambda)$ die Verteilungsfunktion von $\chi^2(n, \lambda)$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_K^\infty x g_{j+1}(T_j; x, y) dx &= y \int_{f(K)}^\infty f\left(z; \frac{1}{1-\alpha} + 2, f(y)\right) dz \\ &= y \left(1 - \chi^2\left(f(K); \frac{1}{1-\alpha} + 2, f(y)\right)\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Bei der Berechnung des zweiten Integrals in (4.7) erhält man analog mit Substitution

$$\begin{aligned} \int_K^\infty g_{j+1}(x; y, T_j) dx &= \int_{f(K)}^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{f(y)}{z}\right)^{\frac{1}{4(1-\alpha)}} \exp\left(-\frac{z+f(y)}{2}\right) I_{-\vartheta}\left(\sqrt{zf(y)}\right) dz \\ &= \int_{f(K)}^\infty f\left(f(y); \frac{1}{1-\alpha} + 2, z\right) dz \\ &\stackrel{z' := z/2}{=} \int_{f(K)/2}^\infty 2f\left(f(y); \frac{1}{1-\alpha} + 2, 2z'\right) dz'. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrals wird die in [Sch89] gezeigte Gleichung

$$\int_a^\infty 2f(x; n, 2\lambda) d\lambda = \chi^2(x; n - 2, 2a).$$

verwendet. Es folgt

$$\int_K^\infty g_{j+1}(T_j; x, y) dx = \chi^2\left(f(y); \frac{1}{1-\alpha}, f(K)\right). \quad (4.10)$$

Setzt man nun (4.9) und (4.10) in die Gleichung (4.7) ein, so erhält man eine geschlossene Formel für den Capletpreis. Der folgende Satz gibt das Resultat an.

Satz 4.5 *Es gelte folgende stochastische Differentialgleichung für den LIBOR-Raten-Prozess $(L_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$, $1 \leq j \leq N - 1$, unter dem Forwardmartingalmaß P_{j+1}*

$$dL_j(t) = \lambda_j(t) L_j(t)^\alpha dW^{(j+1)}(t)$$

mit einer beschränkten, messbaren Funktion $\lambda_j : [0, T_j] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\alpha \in (0, 1)$ und Null

als die absorbierende Grenze des Prozesses. Man definiere die Funktion f durch

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto \frac{x^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \nu_j(T_j)}.$$

Dann ist der arbitragefreie Preis eines Caplets für das Zeitintervall $[T_j, T_{j+1}]$ mit Strike K in $t = 0$ gegeben durch

$$C_j(0) = B(0, T_{j+1}) \delta_j \left[L_j(0) \left(1 - \chi^2 \left(f(K); \frac{1}{1-\alpha} + 2, f(L_j(0)) \right) \right) - K \chi^2 \left(f(L_j(0)); \frac{1}{1-\alpha}, f(K) \right) \right], \quad (4.11)$$

wobei $\chi^2(\cdot; n, \lambda)$ die nichtzentrale Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter λ ist.

Wie schon in dem Abschnitt 4.1 erläutert wurde, wird der Verlauf der impliziten Volatilität eines Caplets in einem CEV-Modell durch den Elastizitätsfaktor α bestimmt. Es soll nun anhand eines Beispiels der Verlauf der impliziten Volatilität in der Abhängigkeit von α grafisch dargestellt werden.

Es sei angenommen, dass die Capletpreise des CEV-Modells mit einem Elastizitätsfaktor $\alpha \in (0, 1)$ mit den Marktpreisen übereinstimmen. Man betrachte ein Caplet mit dem Zinsanpassungstermin T_j , $1 \leq j \leq N - 1$, und Strike K . Sei $C_j(0)$ der mithilfe von (4.11) berechnete Modellpreis des Caplets. Nach der Definition 3.2 stimmt die implizite Volatilität σ_j^{imp} des Caplets mit dem σ überein, für das die folgende Gleichheit erfüllt ist

$$C_j(0) = B(0, T_{j+1}) \delta_j [L_j(0) \Phi(f_+(L_j(0), \sigma)) - K \Phi(f_-(L_j(0), \sigma))]$$

mit

$$f_{\pm}(x, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) \pm \frac{1}{2} \sigma^2 T_j}{\sigma \sqrt{T_j}}.$$

Mit der Formel (4.11) folgt somit, dass σ_j^{imp} die Nullstelle der Funktion F mit

$$F(\sigma) = L_j(0) \left(1 - \chi^2 \left(f(K); \frac{1}{1-\alpha} + 2, f(L_j(0)) \right) \right) - K \chi^2 \left(f(L_j(0)); \frac{1}{1-\alpha}, f(K) \right) - [L_j(0) \Phi(f_+(L_j(0), \sigma)) - K \Phi(f_-(L_j(0), \sigma))] \quad (4.12)$$

ist. Die Nullstelle von F kann numerisch für bestimmte Werte von α und K berechnet werden.

Man betrachte nun zum Beispiel den Fall mit $T_j = 5$ und $L_j(0) = 0,06$. Die Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf der impliziten Volatilität für unterschiedliche Werte von $\alpha \in (0, 1)$. Dabei wird die Funktion λ_j als konstant in der Zeit vorausgesetzt. Außerdem wird λ_j in Abhängigkeit von α so gewählt, dass für $K = L_j(0)$ $\sigma_j^{imp} = 0,2$ gilt.¹ Die genaue numerische Umsetzung wird in dem Abschnitt A.1 erläutert.

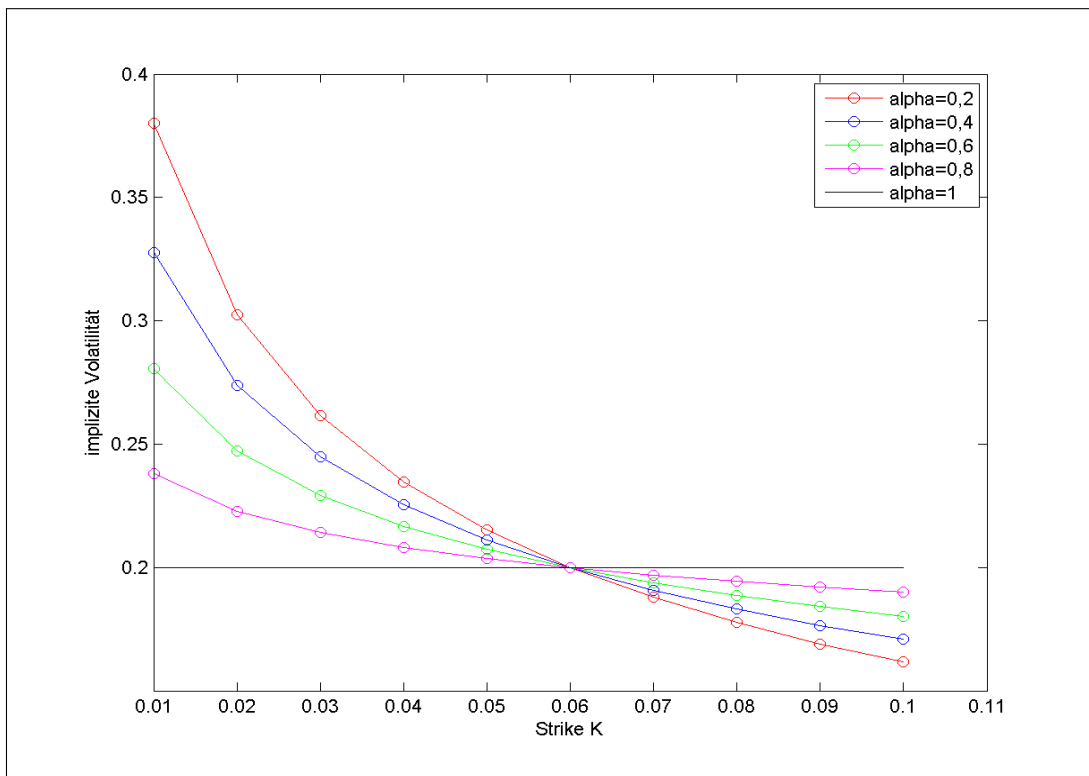


Abbildung 4.1.: Implizite Volatilität eines Caplets mit dem Zinsanpassungstermin $T_j = 5$ in einem CEV-Modell mit dem Elastizitätsfaktor α .

¹Durch diese Annahme wird eine bessere Vergleichbarkeit der Kurven der impliziten Volatilität für unterschiedliche α erreicht.

Ein $0 < \alpha < 1$ induziert einen streng monoton fallenden Verlauf der impliziten Volatilität. Ferner ist zu beobachten, dass mit dem steigenden α die Volatilitätskurve flacher wird.

In dem Fall $\alpha = 1$ reduziert sich das CEV-Modell zu einem LIBOR-Markt-Modell mit lognormal-verteilten LIBOR-Raten. Die Volatilität der LIBOR-Rate wird durch die konstante Funktion λ_j festgelegt. Da für $K = L_j(0)$ $\sigma_j^{imp} = 0,2$ gesetzt wurde, gilt $\lambda_j = 0,2$ (vgl. Formel (3.6) in dem Abschnitt 3.1.2). Die implizite Volatilität weist in einem deterministischen Ansatz keine Abhängigkeit von dem Strike K auf. Aus diesem Grund entspricht der Verlauf der impliziten Volatilität einer Geraden auf der Höhe 0,2.

Mithilfe der Preisformel (4.11) kann auch die sogenannte implizite Volatilitätsfläche, also der Verlauf der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von dem Strike K für unterschiedliche Zinsanpassungstermine $T_j \in \{T_1, \dots, T_{N-1}\}$, berechnet und grafisch dargestellt werden. Die Abbildung 4.2 zeigt diese Verläufe auf der Tenorstruktur mit $T_{N-1} = 30$ und $\delta_j = T_{j+1} - T_j = 1$ für alle $1 \leq j \leq N - 1$. Hier sind $\alpha = 0,5$ und $\lambda_j = 0,05$ für alle $1 \leq j \leq N - 1$ fest gewählt. Der Wert der LIBOR-Raten $L_j(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt aber mit steigendem j zu. Es wird folgende Entwicklung der Startwerte vorausgesetzt

$$L_j(0) = 0,05 + 0,002 \cdot j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq N - 1.$$

Die genaue numerische Umsetzung wird in dem Abschnitt A.2 erläutert.

In der Abbildung 4.2 ist zu beobachten, dass die implizite Volatilitätskurve mit dem steigenden Zinsanpassungstermin T_j flacher wird und sich nach unten verschiebt. Dies hängt mit dem Anstieg der Startwerte $L_j(0)$ zusammen.¹ Weiter fällt aber auf, dass der Verlauf der impliziten Volatilität für alle Zinsanpassungstermine recht einheitlich aussieht. Auch wenn über die Zeitabhängigkeit von λ_j der Volatilitätsverlauf variiert werden kann, ist zu berücksichtigen, dass der Elastizitätsfaktor α alle LIBOR-Raten gleichermaßen beeinflusst. Somit sind die Modellierungsmöglichkeiten für die implizite Volatilitätskurve eingeschränkt.

¹Wird $L_j(0)$ für alle $1 \leq j \leq N - 1$ gleich gesetzt, so lässt sich die beschriebene Entwicklung der impliziten Volatilitätskurve nicht beobachten.

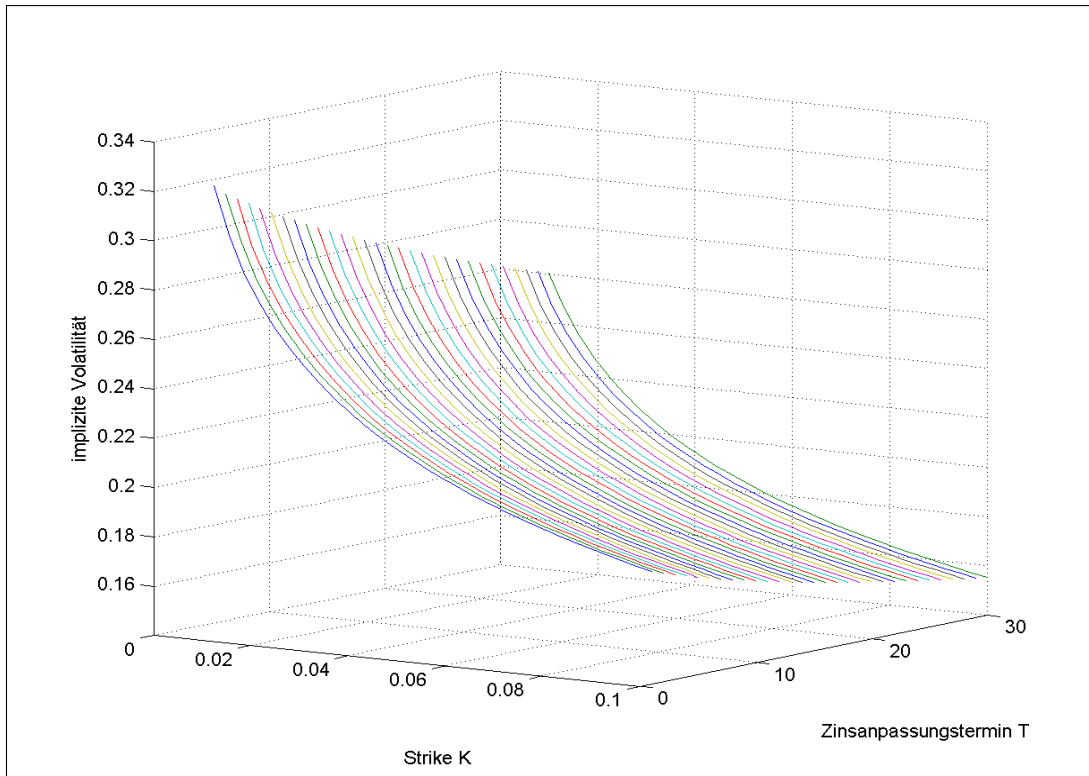


Abbildung 4.2.: Implizite Volatilitätsfläche der Caplets in einem CEV-Modell mit $\alpha=0,5$ und $\lambda_j=0,05$, $1 \leq j \leq N-1$.

4.3. Bewertung von Swaptions

Bei der Bewertung von Swaptions in dem CEV-Modell kann zunächst analog zu dem deterministischen Fall in Abschnitt 3.2 vorgegangen werden. Für beliebige n, m mit $1 \leq n < m \leq N$ sei $(R_{n,m}(t))_{0 \leq t \leq T_n}$ der Swapraten-Prozess für das Zeitintervall $[T_n, T_m]$ mit

$$R_{n,m}(t) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{N_{n,m}(t)},$$

$$N_{n,m}(t) = \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1}).$$

Dann ist der arbitragefreie Preis einer Swaption auf dem Zeitintervall $[T_n, T_m]$ mit Strike K gegeben durch

$$PS_{n,m}(0) = N_{n,m}(0) \mathbb{E}^S[(R_{n,m}(T_n) - K)^+], \quad (4.13)$$

wobei $\mathbb{E}^S[\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich des Forwardswapmaßes P^S ist.

Der Swapraten-Prozess ist ein P^S -Martingal und analog zu dem deterministischen Fall kann gezeigt werden, dass $R_{n,m}$ unter P^S folgende Dynamik erfüllt (vgl. (3.12))

$$dR_{n,m}(t) = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_k(t)} \lambda_k(t) L_k(t)^\alpha dW^S(t) \quad \text{mit} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_k(t)} = \frac{R_{n,m}(t) \delta_k \gamma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1}, \quad (4.15)$$

$$\gamma_k(t) = \left(\frac{\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1)}{\prod_{j=n}^{m-1} (\delta_j L_j(t) + 1) - 1} - \frac{\sum_{j=n}^{k-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{i=j+1}^{m-1} (\delta_i L_i(t) + 1)} \right). \quad (4.16)$$

Im Hinblick auf die oben angegebene Dynamik und (4.13) ist es nicht möglich eine geschlossene Formel für die Swaptionpreise anzugeben. Ähnlich zu dem deterministischen Fall kann durch das Freezing eine Näherung für die Preise bestimmt werden. Wird also angenommen, dass $L_k(t) \approx L_k(0)$ für alle $t \in (0, T_k]$ und $n \leq k \leq m-1$, so gilt wegen (3.11) und (4.16) $R_{n,m}(t) \approx R_{n,m}(0)$ und $\gamma_k(t) \approx \gamma_k(0)$. Daher folgt mit (4.14) und (4.15)

$$\begin{aligned} dR_{n,m}(t) &\approx R_{n,m}(t)^\alpha \underbrace{\sum_{k=n}^{m-1} \frac{R_{n,m}(0) \delta_k \gamma_k(0) L_k(0)^\alpha}{R_{n,m}(0)^\alpha (\delta_k L_k(0) + 1)}}_{=: \lambda_{n,m}(t)} \lambda_k(t) dW^S(t) \\ &= \lambda_{n,m}(t) R_{n,m}(t)^\alpha dW^S(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Es ist zu beachten, dass $\lambda_{n,m} : [0, T_n] \rightarrow \mathbb{R}^d$ als eine Linearkombination von λ_k , $n \leq k \leq m-1$, eine beschränkte und messbare Funktion ist.

Die aus der Approximation resultierende Dynamik (4.17) der Swaprate erlaubt ein zur Bewertung von Caplets (siehe Abschnitt 4.2) analoges Vorgehen bei der Berechnung von (4.13). Es ist dabei zu beachten, dass hier die deterministische Zeittransformation durch

$$\nu_{n,m}(t) = \int_0^t \|\lambda_{n,m}(u)\|^2 du, \quad t \geq 0,$$

definiert ist.

Bemerkung 4.6 Die Swaprate $R_{n,m}$ ist ein nichtnegatives P^S -Martingal. Wird die Dynamik von $R_{n,m}$ näherungsweise durch die stochastische Differentialgleichung (4.17) mit $\alpha \in (0, 1)$ beschrieben, so ist die Null eine absorbierende Grenze für den Prozess. Dieses Verhalten ist aber nicht nur für die Approximation des Swapraten-Prozesses sondern auch allgemein gültig, wenn die LIBOR-Raten die entsprechende Randbedingung erfüllen. Denn die absorbierende Eigenschaft der Null überträgt sich aufgrund der Gleichung (3.11) von den LIBOR-Raten auf die Swaprate. Daher verfälscht das Freezing das Verhalten der Swaprate in dieser Hinsicht nicht.

In dem folgenden Satz wird die Näherung für den Swaptionpreis in dem CEV-Modell mit $\alpha \in (0, 1)$ angegeben.

Satz 4.7 *Der Swapraten-Prozess $(R_{n,m}(t))_{0 \leq t \leq T_n}$ mit $1 \leq n < m \leq N$ erfülle folgende stochastische Differentialgleichung unter dem Forwardswapmaß P^S*

$$dR_{n,m}(t) = \lambda_{n,m}(t)R_{n,m}(t)^\alpha dW^S(t) \quad (4.18)$$

mit einer beschränkten, messbaren Funktion $\lambda_{n,m} : [0, T_n] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\alpha \in (0, 1)$ und Null als die absorbierende Grenze. Sei ferner die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$f(x) = \frac{x^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 \nu_{n,m}(T_n)}.$$

Dann ist der arbitragefreie Preis einer Swaption für das Zeitintervall $[T_n, T_m]$ mit Strike K in $t = 0$ gegeben durch

$$PS_{n,m}(0) = N_{n,m}(0) \left[R_{n,m}(0) \left(1 - \chi^2 \left(f(K); \frac{1}{1-\alpha} + 2, f(R_{n,m}(0)) \right) \right) - K \chi^2 \left(f(R_{n,m}(0)); \frac{1}{1-\alpha}, f(K) \right) \right], \quad (4.19)$$

wobei $\chi^2(\cdot; n, \lambda)$ die nichtzentrale Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter λ ist.

4.4. Verbesserung durch das LCEV-Modell

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wurde gezeigt, dass in einem CEV-Modell mit $\alpha \in (0, 1)$ geschlossene Formeln für die Capletpreise und für eine Näherung an die Swaptionpreise existieren, wenn die Null als die absorbierende Grenze für den LIBOR-Raten- bzw. Swapraten-Prozess gesetzt wird. Aus diesem Grund ist eine schnelle Kalibrierung des Modells an die Marktdaten möglich. Außerdem weist die durch die Modellpreise induzierte implizite Volatilität der Caplets einen streng monoton fallenden Verlauf in der Abhängigkeit von dem Strike K auf. Dadurch kann im Vergleich zu dem deterministischen Ansatz eine viel höhere Genauigkeit bei der Bewertung von Caplets erzielt werden. Die Anwendung des Modells zur Bewertung komplexerer Zinsderivate ist aber zu hinterfragen. Das Verhalten der LIBOR-Rate in der Null unter dem CEV-Modell ist nicht marktkonsistent und kann vor allem die Bewertung von pfadabhängigen Derivaten erschweren. Eine Modifizierung des CEV-Modells, das sogenannte LCEV(Limited CEV)-Modell, kann das unerwünschte Verhalten aufheben. Das LCEV-Modell ist ein Separationsansatz mit der lokalen Volatilitätsfunktion

$$\varphi(x) = x \cdot \min(\epsilon^{\alpha-1}, x^{\alpha-1}) \quad \text{mit } \alpha, \epsilon > 0. \quad (4.20)$$

Das heißt für die j -te LIBOR-Rate L_j gilt unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1}

$$dL_j(t) = L_j(t)\lambda_j(t) \min(\epsilon^{\alpha-1}, L_j(t)^{\alpha-1}) dW^{(j+1)}(t) \quad (4.21)$$

für eine beschränkte und messbare Funktion λ_j .

Für $\alpha \in (0, 1)$ wird ϵ klein gewählt. Es ist ersichtlich, dass dann die lokale Volatilitätsfunktion φ alle Voraussetzungen des Satzes 4.1 erfüllt und somit eine eindeutige, positive Lösung der stochastischen Differentialgleichung (4.21) existiert.^{1,2} Leider wird neben den Schwächen des CEV-Modells auch ein wesentlicher Vorteil dieses Modellansatzes aufgehoben. Es ist nämlich nicht möglich in einem

¹Diese Aussage lässt sich auf die Differentialgleichung, die die Dynamik der Swaprate in dem LCEV-Modell beschreibt, übertragen.

²In dem Fall $\alpha > 1$ wird durch ein großes ϵ sichergestellt, dass die lokale Volatilitätsfunktion auch die Wachstumsbeschränkung in 4.1 erfüllt. Damit wird das unkontrollierte Ansteigen der LIBOR-Rate unter dem Terminalmaß P_N verhindert.

LCEV-Modell eine geschlossene Preisformel für die Caplets und Swaptions anzugeben. Im Hinblick auf die Gestalt der lokalen Volatilitätsfunktionen in dem CEV- und dem LCEV-Modell liegt aber die Vermutung nahe, dass die Caplet- und Swaptionpreise des CEV-Modells eine gute Näherung für die LCEV-Preise liefern. Der folgende Satz bestätigt diese Vermutung.

Satz 4.8 Sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit der Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eines Wiener-Prozesses $(W(t))_{t \geq 0}$ bzgl. P . Seien X und Y zwei adaptierte stochastische Prozesse mit $X(0) = Y(0) > 0$ und

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)^\alpha dW(t) \\ dY(t) &= \min(\epsilon^{\alpha-1}, Y(t)^{\alpha-1}) Y(t) dW(t), \end{aligned}$$

für $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$. Sei ferner Null eine absorbierende Grenze für den Prozess X . Dann gilt für beliebige $h > 0$, $K > 0$ und $T > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \searrow 0} |P(X(T) < h) - P(Y(T) < h)| &= 0, \\ \lim_{\epsilon \searrow 0} |\mathbb{E}(X(T) - K)^+ - \mathbb{E}(Y(T) - K)^+| &= 0. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\tau := \inf\{t \geq 0 : X(t) \leq \epsilon\}$, dann ist τ eine Stopzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und es gilt

$$\begin{aligned} &|P(X(T) < h) - P(Y(T) < h)| \\ &= |P(X(T) < h, \tau < T) - P(Y(T) < h, \tau < T)| \\ &\quad + \underbrace{|P(X(T) < h, \tau \geq T) - P(Y(T) < h, \tau \geq T)|}_{=0, \text{ da } X(T)=Y(T) \text{ auf } \{\tau \geq T\}} \\ &= |P(Y(T) \geq h, \tau < T) - P(X(T) \geq h, \tau < T)|. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Um die Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen, soll das Optional Sampling Theorem für beschränkte Stopzeiten¹ angewendet werden. Hierbei ist zu beachten, dass X und Y nach Definition stetige Martingale sind und dass für ein festes $T > 0$

¹Siehe Kapitel II Theorem 3.2 in [RY05].

$\min(\tau, T)$ eine beschränkte Stopzeit ist. Es gilt

$$\begin{aligned} E(1_{\{\tau < T\}}Y(T) \mid \mathcal{F}_{\min(\tau, T)}) &= 1_{\{\tau < T\}}E(Y(T) \mid \mathcal{F}_{\min(\tau, T)}) \\ &\stackrel{O.S.}{=} 1_{\{\tau < T\}}Y(\min(\tau, T)) = 1_{\{\tau < T\}}Y(\tau) \\ &= 1_{\{\tau < T\}}X(\tau) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Bei der ersten Gleichheit ist zu beachten, dass $1_{\{\tau < T\}} = 1_{\{\min(\tau, T) < T\}}$ gilt und dass $1_{\{\min(\tau, T) < T\}}$ nach der Definition von Stopzeiten eine $\mathcal{F}_{\min(\tau, T)}$ -messbare Zufallsvariable ist. Mit den Eigenschaften der bedingten Erwartungswerte folgt

$$E(1_{\{\tau < T\}}Y(T)) = E(E(1_{\{\tau < T\}}Y(T) \mid \mathcal{F}_{\min(\tau, T)})) \leq E(\epsilon) = \epsilon.$$

Schließlich erhält man folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} P(Y(T) \geq h, \tau < T) &= \int_{\{Y(T) \geq h, \tau < T\}} 1 \, dP \leq \int_{\{Y(T) \geq h, \tau < T\}} \frac{Y(T)}{h} \, dP \\ &\leq \int_{\{\tau < T\}} \frac{Y(T)}{h} \, dP = \frac{1}{h} E(1_{\{\tau < T\}}Y(T)) \leq \frac{\epsilon}{h}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $P(X(T) \geq h, \tau < T) \leq \frac{\epsilon}{h}$ gilt. Es folgt schließlich

$$\begin{aligned} |P(X(T) < h) - P(Y(T) < h)| &\stackrel{(4.22)}{=} |P(X(T) \geq h, \tau < T) - P(Y(T) \geq h, \tau < T)| \\ &\leq \max(P(X(T) \geq h, \tau < T), P(Y(T) \geq h, \tau < T)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{h} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Damit ist die erste Aussage der Behauptung gezeigt und kann für den Beweis der zweiten Aussage verwendet werden. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} &|E(X(T) - K)^+ - E(Y(T) - K)^+| \\ &= |E(X(T) - K) + E(X(T) - K)^- - E(Y(T) - K) - E(Y(T) - K)^-)| \\ &= |EX(T) - EY(T) + E(K - X(T))^+ - E(K - Y(T))^+| \\ &\stackrel{X, Y \text{ sind Martingale}}{=} |EX(0) - EY(0) + E(K - X(T))^+ - E(K - Y(T))^+|. \end{aligned}$$

Da $X(0) = Y(0)$ und $(K - X(T))^+, (K - Y(T))^+$ nicht negative Zufallsgrößen

sind, folgt mit den Eigenschaften des Erwartungswertes¹

$$\begin{aligned}
 & |E(X(T) - K)^+ - E(Y(T) - K)^+| \\
 &= \left| \int_0^\infty P((K - X(T))^+ > t) - P((K - Y(T))^+ > t) dt \right| \\
 &\stackrel{t \geq 0}{=} \left| \int_0^\infty P(X(T) < K - t) - P(Y(T) < K - t) dt \right| \\
 &\stackrel{X, Y \geq 0}{\leq} \int_0^K |P(X(T) < K - t) - P(Y(T) < K - t)| dt .
 \end{aligned}$$

So folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz²

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\epsilon \searrow 0} |E(X(T) - K)^+ - E(Y(T) - K)^+| \\
 &\leq \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^K \underbrace{|P(X(T) < K - t) - P(Y(T) < K - t)|}_{\leq 1} dt \\
 &= \int_0^K \lim_{\epsilon \searrow 0} |P(X(T) < K - t) - P(Y(T) < K - t)| dt \stackrel{(4.23)}{=} 0.
 \end{aligned}$$

□

Interpretiert man die Prozesse X und Y aus Satz 4.8 als den LIBOR-Raten-Prozess unter dem CEV- beziehungsweise LCEV-Modell, so folgt aus der zweiten Aussage des Satzes, dass die Caplet- und Swaptionpreise beider Modelle für ein positives ϵ nahe Null näherungsweise übereinstimmen. Daher können die Parameter des LCEV-Modells mithilfe der CEV-Preisformel (4.11) und (4.19) an die Marktdaten kalibriert werden. Die Bewertung von anderen Zinsderivaten erfolgt dann unter dem angepassten LCEV-Modell. Auf diese Weise werden die Vorteile beider Modelle optimal ausgenutzt.

¹Siehe Korollar A.2 in [Als07].

²Siehe Satz 9.9 in [Als07].

5. LIBOR-Markt-Modell mit stochastischer Volatilität

Auch wenn das CEV- und das LCEV-Modell gegenüber dem deterministischen Ansatz eine deutliche Verbesserung darstellen, weisen sie Einschränkungen in der Flexibilität bei der Modellierung auf. Zum einen kann ein nicht monotoner Verlauf der impliziten Volatilität, ein sogenannter 'hockey stick' oder Smile Effekt, nicht modelliert werden.¹ Zum anderen ist der Elastizitätsfaktor α für alle LIBOR-Raten gleich, was eine spezifische Modellierung der Raten nicht zulässt und damit die Modellierungsmöglichkeiten für die implizite Volatilitätsfläche begrenzt.

In diesem Kapitel wird ein weiterer LIBOR-Markt-Modellansatz vorgestellt, der die gewünschte Flexibilität bei der Modellierung ermöglicht. Als Literaturquelle dienen [Pau11], [Pau12] und das Paper [WZ06] von Wu und Zhang.

5.1. Aufbau des Modells

Die LIBOR-Markt-Modelle mit stochastischer Volatilität basieren auf der Annahme, dass die Volatilität der LIBOR-Raten von der auf dem Markt herrschenden Unsicherheit beeinflusst wird. Demnach werden hohe Volatilitäten durch hohe Unsicherheit auf dem Markt hervorgerufen und umgekehrt bringt geringe Unsicherheit kleinere Volatilitäten mit sich. Aus diesem Grund wird angenommen, dass die Volatilität zufällig und exogen beeinflusst ist.

Die Volatilität σ_j der j -ten LIBOR-Rate wird folgendermaßen modelliert

$$\begin{aligned}\sigma_j(t) &= \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) \quad \text{mit} \\ dV(t) &= a(b - V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

¹Ein nicht monotoner Verlauf der impliziten Volatilität ließ sich zum Beispiel während der Rubel-Krise 1998 beobachten (vgl. [WZ06] S. 200).

wobei $(B(t))_{t \geq 0}$ ein eindimensionaler P_N -Wiener-Prozess, $a, b, \epsilon > 0$ konstante Parameter und $\gamma_j : [0, T_j] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine beschränkte, messbare Funktion ist. Somit setzt sich die Volatilität aus einer deterministischen Komponente γ_j und einer stochastischen Komponente V zusammen.

Der sogenannte stochastische Volatilitätsprozess V spiegelt die auf dem Markt herrschende Unsicherheit wider und wird daher von einem zusätzlichen Wiener-Prozess B getrieben. Durch die in (5.1) beschriebene Dynamik wird V als ein Cox-Ingersoll-Ross-Prozess¹ (CIR-Prozess) definiert. Dadurch wird zum einen sichergestellt, dass V nichtnegativ ist. Die von dem Wiener-Prozess B getriebenen Schwankungen des Prozesses hängen von \sqrt{V} ab, wodurch es verhindert wird, dass V negative Werte annehmen kann. Zum anderen unterliegt der Prozess V dem sogenannten Mean-Reversion-Effekt mit Returnlevel b und der Rückkehrrate a . Denn die Drift in (5.1) ist so konstruiert, dass ein Trend zu dem allgemeinen Level b des Prozesses besteht, wobei der Parameter a die Rückkehrgeschwindigkeit beeinflusst.

Es ist anzumerken, dass das so definierte LIBOR-Markt-Modell für jede Wahl von d und N nicht vollständig ist, da die Volatilität V auf dem Markt nicht handelbar ist.

Eine weitere Annahme ist für die Modellierung der Steigung der impliziten Volatilitätskurve von großer Bedeutung. Hierfür wird angenommen, dass eine Korrelation zwischen der LIBOR-Rate L_j , $1 \leq j \leq N - 1$, und der stochastischen Volatilität V besteht. Genauer gilt:

Definiert man einen Prozess $(\bar{W}_j(t))_{t \geq 0}$, $1 \leq j \leq N - 1$, durch

$$d\bar{W}_j(t) = \sum_{i=1}^d \frac{\gamma_j^{(i)}(t)}{\|\gamma_j(t)\|} dW_i(t) \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (5.2)$$

so ist \bar{W}_j ein eindimensionaler Wiener-Prozess bezüglich P_N . Man nimmt nun an, dass eine Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen \bar{W}_j und B besteht

$$d\langle B, \bar{W}_j \rangle_t = \rho_j(t) dt \quad \text{mit } |\rho_j(t)| \leq 1.$$

Durch die LIBOR-Raten-spezifischen Korrelationsprozesse ρ_j , $1 \leq j \leq N - 1$,

¹Siehe Abschnitt 22.1 in [Bjö04].

kann die Auswirkung der Marktunsicherheit auf die einzelnen LIBOR-Raten modelliert werden. Außerdem wird durch negative Korrelation ρ_j eine negative Steigung der impliziten Volatilitätskurve des Caplets mit dem Zinsanpassungstermin T_j erreicht, und entsprechend führt eine positive Korrelation zu einer positiven Steigung. Wird die Korrelation gleich Null gewählt, so ist die implizite Volatilität monoton fallend in dem *in-the-money*-Bereich und monoton steigend in dem *out-of-the-money*-Bereich.¹ In der Abbildung 5.1 wird der Zusammenhang zwischen der impliziten Volatilität eines Caplets und ρ skizzenhaft dargestellt.²

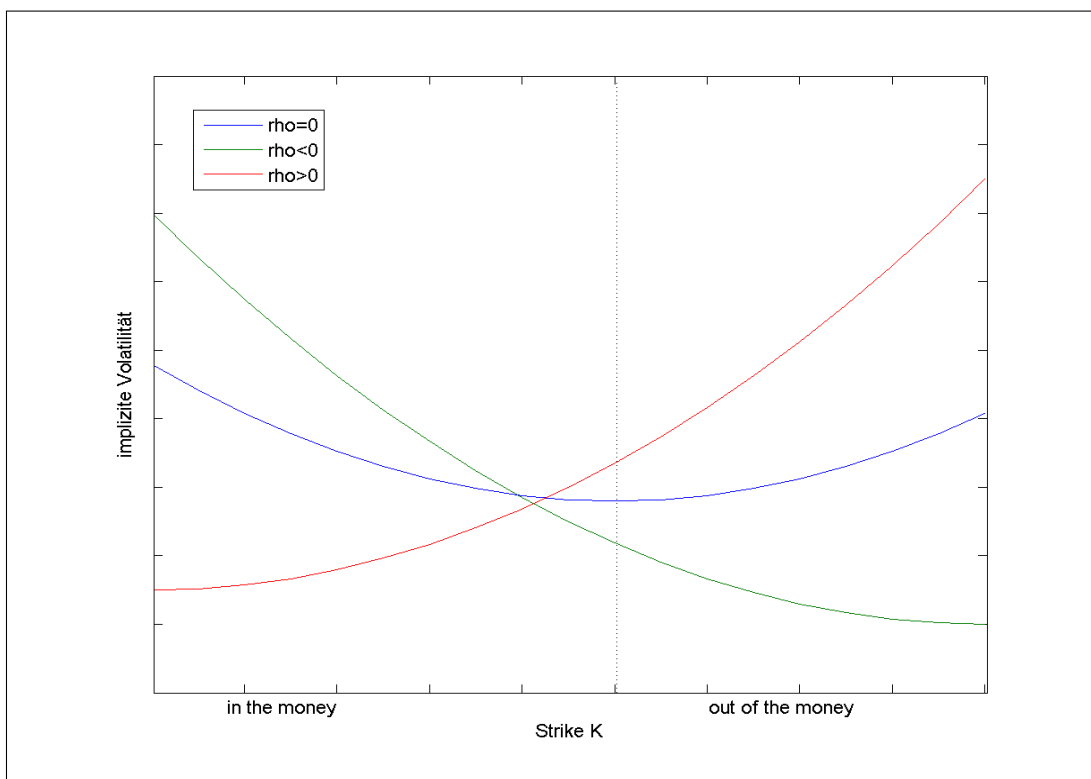


Abbildung 5.1.: Eine Skizze der impliziten Volatilität eines Caplets in einem LIBOR-Markt-Modell mit stochastischer Volatilität in der Abhängigkeit von ρ .

¹Wie schon in Abschnitt 3.1.1 erwähnt, kann ein Caplet als eine Call-Option mit einer LIBOR-Rate als Underlying verstanden werden. Somit liegt der Strike-Zins eines Caplets in dem *in-the-money*-Bereich, falls dieser kleiner als der Anfangskurs der zugehörigen LIBOR-Rate ist. Umgekehrt ist ein Capletstrike in dem *out-of-the-money*-Bereich, wenn dieser über dem Anfangskurs liegt (vgl. Abschnitt 8.4 in [Hul09]).

²Die Abbildung 5.1 ist angelehnt an die Abbildung 10 in [WZ06].

Die oben getroffenen Annahmen führen folglich zu einem zeitstetigen, unvollständigen Finanzmarktmodell, das durch die Dynamik der Basisfinanzgüter $L_j, 1 \leq j \leq N - 1$, und der stochastischen Volatilität V sowie durch die Korrelationsprozesse $\rho_j, 1 \leq j \leq N - 1$, vollständig beschrieben wird. Das so definierte Modell wird als das LIBOR-Markt-Modell mit stochastischer Volatilität bezeichnet.

5.2. Bewertung von Caplets

In dem oben beschriebenen Modell besitzen die j -te LIBOR-Rate L_j und der stochastische Volatilitätsprozess V bezüglich P_N folgende Dynamik

$$\begin{aligned} dL_j(t) &= L_j(t) \left(\mu_j(t) dt + \sum_{i=1}^d \sqrt{V(t)} \gamma_j^{(i)}(t) dW_i(t) \right) \\ &= L_j(t) \left(\mu_j(t) dt + \sqrt{V(t)} \|\gamma_j(t)\| d\bar{W}_j(t) \right), \\ dV(t) &= a(b - V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB(t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei $W = (W_1, \dots, W_d)$, B und \bar{W}_j Wiener-Prozesse bezüglich P_N sind mit

$$d\bar{W}_j(t) = \sum_{i=1}^d \frac{\gamma_j^{(i)}(t)}{\|\gamma_j(t)\|} dW_i(t) \quad \text{und} \quad d\langle B, \bar{W}_j \rangle_t = \rho_j(t) dt.$$

Bemerkung 5.1 Sind μ_j, γ_j und ρ_j konstante Funktionen, so entspricht das unter (5.3) beschriebene Modell einem Heston-Modell mit den LIBOR-Raten als Basisfinanzgüter, in dem eine geschlossene Formel für die Caplets angegeben werden kann (vgl. [Hes93]).

Die zentrale Frage ist nun, wie man in dem so definierten Modell die Preise für Caplets und Swaptions bestimmen kann. Man schaue sich zuerst die Caplets an. Der Preis eines Caplets für ein Intervall $[T_j, T_{j+1}]$ mit Strike K zum Zeitpunkt $t = 0$ ist gegeben durch

$$C_j(0) = B(0, T_{j+1}) \delta_j \mathbb{E}_{j+1} [(L_j(T_j) - K)^+], \quad (5.4)$$

wobei $\mathbb{E}_{j+1}[\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich des Forwardmartingalmaßes P_{j+1} zum Termin T_{j+1} ist (vgl. (3.4)).

Da L_j ein P_{j+1} -Martingal ist, ist die Dynamik von L_j unter P_{j+1} bekannt. Um die Preisformel (5.4) weiter auswerten zu können, ist es notwendig auch die Dynamik des stochastischen Volatilitätsprozesses V bezüglich des Forwardmartingalmaßes P_{j+1} zu bestimmen.

5.2.1. Dynamik bezüglich des Forwardmartingalmaßes

Es wird nun ein Maßwechsel von P_N nach P_{j+1} durchgeführt. Man gehe dabei analog zum Abschnitt 2.2 mit Berücksichtigung des weiteren Wiener-Prozesses B vor.

Satz 5.2 *Sei P_{j+1} ein Forwardmartingalmaß zum Termin T_{j+1} für ein $j \in \{1, \dots, N-2\}$. Dann werden durch*

$$W^{(j+1)}(t) = W(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t X_k(s) ds,$$

$$B^{(j+1)}(t) = B(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds$$

mit $X_k(t) = \sqrt{V(t)} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \gamma_k(t)$ für alle $0 \leq t \leq T_k$, $2 \leq k \leq N-1$

ein d -dimensionaler Wiener-Prozess $W^{(j+1)} = (W_1^{(j+1)}, \dots, W_d^{(j+1)})$ und ein eindimensionaler Wiener-Prozess $B^{(j+1)}$ bezüglich P_{j+1} definiert.

Beweis: Die Behauptung wird, wie in dem Beweis von dem Satz 2.1, induktiv von $j = N-2$ nach $j = 1$ gezeigt. Auch hier ist das Schlüsselargument die Martingaleigenschaft der LIBOR-Raten unter dem entsprechenden Forwardmartingalmaß. Sei also $j = N-2$. Der P_N -Dichteprozess von dem Forwardmartingalmaß P_{N-1} ist gegeben durch

$$R_{N-1}(t) := \left. \frac{dP_{N-1}}{dP_N} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1}.$$

Analog zu dem Satz 2.1 kann mithilfe der Martingaleigenschaft von L_{N-1} bezüglich P_N gezeigt werden, dass

$$R_{N-1}(t) = \exp \left(\int_0^t X_{N-1}(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_{N-1}(s)\|^2 ds \right)$$

gilt mit

$$X_{N-1}(t) = \sqrt{V(t)} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1} \gamma_{N-1}(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_{N-1}.$$

Somit gilt nach dem Satz von Girsanov, dass

$$\begin{aligned} W^{(N-1)}(t) &= W(t) - \left\langle W, \int X_{N-1} dW \right\rangle_t \\ &= W(t) - \int_0^t X_{N-1}(s) ds \end{aligned}$$

ein d -dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich P_{N-1} ist.

Nun wird erneut der Satz von Girsanov angewendet, um aus B einen Wiener-Prozess bezüglich P_{N-1} zu erhalten. Hier ist die Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen B und \bar{W}_{N-1} zu berücksichtigen. Zunächst gilt, dass

$$\begin{aligned} B^{(N-1)}(t) &= B(t) - \left\langle B, \int X_{N-1} dW \right\rangle_t \\ &= B(t) - \left\langle B, \int \sqrt{V} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}}{\delta_{N-1} L_{N-1} + 1} \gamma_{N-1} dW \right\rangle_t \\ &= B(t) - \left\langle B, \sum_{i=1}^d \int \sqrt{V} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}}{\delta_{N-1} L_{N-1} + 1} \gamma_{N-1}^{(i)} dW_i \right\rangle_t \\ &= B(t) - \left\langle B, \int \sqrt{V} \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}}{\delta_{N-1} L_{N-1} + 1} \|\gamma_{N-1}\| \sum_{i=1}^d \frac{\gamma_{N-1}^{(i)}}{\|\gamma_{N-1}\|} dW_i \right\rangle_t \\ &= B(t) - \left\langle B, \int \|X_{N-1}\| d\bar{W}_{N-1} \right\rangle_t \\ &= B(t) - \int_0^t \|X_{N-1}(s)\| d\langle B, \bar{W}_{N-1} \rangle_s \\ &= B(t) - \int_0^t \|X_{N-1}(s)\| \rho_{N-1}(s) ds \end{aligned} \tag{5.5}$$

ein stetiges, lokales P_{N-1} -Martingal ist. Aufgrund der Definition der quadratischen Kovariation¹ gilt außerdem für alle $t \geq 0$

$$\langle B^{(N-1)}, B^{(N-1)} \rangle_t \stackrel{(5.5)}{=} \langle B, B \rangle_t = t.$$

So folgt mit dem Satz von Lévy², dass $B^{(N-1)}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess bezüglich P_{N-1} ist.

Somit ist die Behauptung für $j = N - 1$ gezeigt. Nun gelte die Behauptung für ein beliebiges $j \in \{2, \dots, N - 2\}$. Das Forwardmartingalmaß P_j ist durch den folgenden Dichtequotientenprozess definiert

$$R_j(t) := \frac{dP_j}{dP_{j+1}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} \frac{B(0, T_{j+1})}{B(0, T_j)} = \frac{\delta_j L_j(t) + 1}{\delta_j L_j(0) + 1}.$$

Da die LIBOR-Rate L_j ein Martingal unter P_{j+1} ist, erhält man folgende Darstellung für den Dichtequotientenprozess R_j

$$R_j(t) = \exp \left(\int_0^t X_j(s) dW^{(j+1)}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_j(s)\|^2 ds \right).$$

Mit dem Satz von Girsanov und der Induktionsvoraussetzung folgt dann ähnlich zum Beweis von 2.1 die behauptete Gestalt für den Wiener-Prozess $W^{(j)}$ unter P_j . Den P_j -Wiener-Prozess $B^{(j)}$ erhält man durch erneute Anwendung des Satzes von Girsanov. Es gilt

$$\begin{aligned} B^{(j)}(t) &= B^{(j+1)}(t) - \left\langle B^{(j+1)}, \int X_j dW^{(j+1)} \right\rangle_t \\ &\stackrel{IV}{=} B^{(j+1)}(t) \\ &\quad - \left\langle B - \int \sum_{k=j+1}^{N-1} \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds, \int X_j dW - \int X_j(s) \sum_{k=j+1}^{N-1} X_k(s) ds \right\rangle_t. \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung stellen die Argumente in der quadratischen Kovariation Semimartingale bezüglich P_N dar. Wobei jeweils der erste Term der Argumente den Martingalanteil und der zweite Term den Anteil mit beschränkter Variation des Semimartingals darstellt. Somit folgt aus der Definition der quadratischen

¹Siehe Kapitel IV Definition 1.20 in [RY05].

²Siehe Kapitel IV Satz 3.6 in [RY05].

Kovariation

$$\begin{aligned}
 B^{(j)}(t) &= B^{(j+1)}(t) - \left\langle B, \int X_j dW \right\rangle_t \\
 &= B^{(j+1)}(t) - \left\langle B, \int \|X_j\| d\bar{W}_j \right\rangle_t \\
 &= B^{(j+1)}(t) - \int_0^t \|X_j(s)\| \rho_j(s) ds \\
 &\stackrel{IV}{=} B(t) - \int_0^t \sum_{k=j+1}^{N-1} \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds - \int_0^t \|X_j(s)\| \rho_j(s) ds \\
 &= B(t) - \int_0^t \sum_{k=j}^{N-1} \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds.
 \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für $j - 1$ gezeigt.

□

Bemerkung 5.3 Der Prozess $(\bar{W}_j^{(j+1)}(t))_{t \geq 0}$ definiert durch

$$d\bar{W}_j^{(j+1)}(t) = \sum_{i=1}^d \frac{\gamma_j^{(i)}(t)}{\|\gamma_j(t)\|} dW_i^{(j+1)}(t)$$

ist ein eindimensionaler P_{j+1} -Wiener-Prozess. Mit dem Satz 5.2 und den Eigenschaften der quadratischen Kovariation folgt

$$d \left\langle B^{(j+1)}, \bar{W}_j^{(j+1)} \right\rangle_t = d \left\langle B, \bar{W}_j \right\rangle_t = \rho_j(t) dt.$$

Somit hat sich die Korrelation zwischen den LIBOR-Raten und der stochastischen Volatilität nach dem Maßwechsel nicht geändert.

Unter dem Forwardmartingalmaß P_{j+1} erfüllt die LIBOR-Rate L_j aufgrund der Martingaleigenschaft folgende stochastische Differentialgleichung

$$dL_j(t) = L_j(t) \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) dW^{(j+1)}(t) = L_j(t) \sqrt{V(t)} \|\gamma_j(t)\| d\bar{W}_j^{(j+1)}(t),$$

wobei $W^{(j+1)}$ der in dem Satz 5.2 definierte Wiener-Prozess ist.

Für den Prozess V erhält man mithilfe von dem Satz 5.2 folgende Dynamik

$$\begin{aligned}
 dV(t) &= a(b - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)} dB(t) \\
 &= a(b - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)} \left(dB^{(j+1)}(t) + \sum_{k=j+1}^{N-1} \sqrt{V(t)} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \|\gamma_k(t)\| \rho_k(t) dt \right) \\
 &= a \left(b - V(t) \left(1 - \frac{\epsilon}{a} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \|\gamma_k(t)\| \rho_k(t) \right) \right) dt + \epsilon\sqrt{V(t)} dB^{(j+1)}(t) \\
 &= a(b - \xi_j(t)V(t)) dt + \epsilon\sqrt{V(t)} dB^{(j+1)}(t) \quad \text{mit} \\
 \xi_j(t) &= 1 - \frac{\epsilon}{a} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \|\gamma_k(t)\| \rho_k(t).
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
 dL_j(t) &= L_j(t)\sqrt{V(t)} \|\gamma_j(t)\| d\bar{W}_j^{(j+1)}(t) \\
 dV(t) &= a(b - \xi_j(t)V(t)) dt + \epsilon\sqrt{V(t)} dB^{(j+1)}(t).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wie bereits in der Bemerkung 5.3 erwähnt, kann in einem Heston-Modell eine geschlossene Formel für die Caplets angegeben werden. Es ist aber zu beachten, dass nach dem Maßwechsel in (5.6) neben der Abhängigkeit der Parameter von der Zeit zusätzlich die Abhängigkeit der ξ_j von L_k , $j + 1 \leq k \leq N - 1$ vorliegt. Um die Ergebnisse des Heston-Modells auf das LIBOR-Markt-Modell übertragen zu können, wird zum einen durch das Freezing $L_k(t)$ durch $L_k(0)$ approximiert. Wu und Zhang sagen aus, dass diese Approximation zu vernünftigen Ergebnissen führt, zumal wegen der Martingaleigenschaft von L_k bezüglich P_{k+1} , $L_k(t)$ durch den erwarteten Wert für $L_k(t)$ ersetzt wird. Das heißt man setzt

$$L_k(t) \approx \mathbb{E}_{k+1}[L_k(t)] = L_k(0).$$

Zum anderen wird angenommen, dass γ_j und ρ_j für alle $1 \leq j \leq N - 1$ stückweise konstant sind. Definiert man also

$$\xi_j^*(t) = 1 - \frac{\epsilon}{a} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(0)}{\delta_k L_k(0) + 1} \|\gamma_k(t)\| \rho_k(t),$$

so erfüllt der Prozess V approximativ folgende stochastische Differentialgleichung

$$dV(t) = a (b - \xi_j^*(t)V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB^{(j+1)}(t),$$

mit ξ_j^* deterministisch und stückweise konstant.

Unter den oben getroffenen Annahmen kann bei der Auswertung der Preisformel (5.4) wie in dem Heston-Modell vorgegangen werden.

Sei $(Z_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$ ein stochastischer Prozess mit $Z_j(t) = \log(L_j(t))$, $t \in [0, T_j]$. Sei ferner \tilde{P}_{j+1} ein zu P_{j+1} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert durch

$$\left. \frac{d\tilde{P}_{j+1}}{dP_{j+1}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_j(t)}{L_j(0)} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_j(0) &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \mathbb{E}_{j+1} [(L_j(T_j) - K)^+] & (5.7) \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j (\mathbb{E}_{j+1} [L_j(T_j) 1_{\{L_j(T_j) > K\}}] - K P_{j+1}(L_j(T_j) > K)) \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j (L_j(0) \tilde{P}_{j+1}(L_j(T_j) > K) - K P_{j+1}(L_j(T_j) > K)) \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j (L_j(0) \tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) - K P_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K))). \end{aligned}$$

Somit lässt sich der Capletpreis berechnen, wenn die Verteilung von $Z_j(T_j)$ unter P_{j+1} und \tilde{P}_{j+1} bekannt ist. Dafür bestimmt man zunächst die analytische Transformierte von $Z_j(T_j)$ bezüglich P_{j+1} und \tilde{P}_{j+1} . Dann erhält man die Verteilung von $Z_j(T_j)$ indem man eine Fourierinversion durchführt.

5.2.2. Berechnung der analytischen Transformierten

In diesem Abschnitt wird die analytische Transformierte von $Z_j(T_j)$ unter P_{j+1} und \tilde{P}_{j+1} berechnet. Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an [Hes93], [Pau11] und [WZ06].

Zuerst soll die analytische Transformierte von $Z_j(T_j)$ bezüglich P_{j+1} bestimmt

werden, das heißt gesucht ist¹

$$\begin{aligned} \phi_j(\lambda) &= \mathbb{E}_{j+1} [h(Z_j(T_j), V(T_j), \lambda)] \quad \text{mit } h(z, v, \lambda) = \exp(\lambda z) \\ \text{für } \lambda \in D(\phi_j) &:= \left\{ x \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |e^{xz}| P_{j+1}^{Z_j(T_j)}(dz) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\phi_j(i\lambda)$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Fouriertransformierten von $Z_j(T_j)$ an der Stelle λ übereinstimmt.

Mithilfe der Itô-Formel und unter der Berücksichtigung der Dynamik von L_j und V unter P_{j+1} erhält man

$$\begin{aligned} dZ_j(t) &= d \log(L_j(t)) = \frac{1}{L_j(t)} dL_j(t) - \frac{1}{2L_j(t)^2} d\langle L_j \rangle_t \\ &= \sqrt{V(t)} \|\gamma_j(t)\| d\bar{W}_j^{(j+1)}(t) - \frac{1}{2} V(t) \|\gamma_j(t)\|^2 dt, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$dV(t) = a(b - \xi_j^*(t)V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB^{(j+1)}(t). \quad (5.9)$$

Aufgrund der vorliegenden Dynamik bildet (Z_j, V) einen zweidimensionalen Markov-Prozess². Somit ist der durch

$$\begin{aligned} u_\lambda(t, z, v) &:= \mathbb{E}_{j+1} [h(Z_j(T_j), V(T_j), \lambda) \mid Z_j(t) = z, V(t) = v] \\ &= \mathbb{E}_{j+1} [h(Z_j(T_j), V(T_j), \lambda) \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

definierte Prozess u_λ ein Martingal bezüglich P_{j+1} . Man schreibe zwecks Abkürzung $u(t)$ für $u_\lambda(t, Z_j(t), V(t))$. So gilt mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} du(t) &= \partial_t u(t) dt + \partial_z u(t) dZ_j(t) + \partial_v u(t) dV(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_z^2 u(t) d\langle Z_j \rangle_t + \frac{1}{2} \partial_v^2 u(t) d\langle V \rangle_t + \partial_z \partial_v u(t) d\langle Z_j, V \rangle_t \\ &\stackrel{(5.8), (5.9)}{=} \partial_t u(t) dt + \partial_z u(t) \sqrt{V(t)} \|\gamma_j(t)\| d\bar{W}_j^{(j+1)}(t) - \frac{1}{2} \partial_z u(t) V(t) \|\gamma_j(t)\|^2 dt \\ &\quad + \partial_v u(t) \epsilon \sqrt{V(t)} dB^{(j+1)}(t) + \partial_v u(t) a(b - \xi_j^*(t)V(t)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_z^2 u(t) V(t) \|\gamma_j(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \partial_v^2 u(t) \epsilon^2 V(t) dt \\ &\quad + \partial_z \partial_v u(t) \epsilon V(t) \|\gamma_j(t)\| \rho_j(t) dt, \end{aligned}$$

¹Vergleiche Definition 40.1. in [Als07].

²Siehe Kapitel III Abschnitt 1 in [RY05].

wobei man den letzten Term durch

$$\begin{aligned}
 \langle Z_j, V \rangle_t &\stackrel{(5.8),(5.9)}{=} \left\langle \int \sqrt{V} \|\gamma_j\| d\bar{W}_j^{(j+1)}, \int \epsilon \sqrt{V} dB^{(j+1)} \right\rangle_t \\
 &= \int_0^t \epsilon V(s) \|\gamma_j(s)\| d \left\langle \bar{W}_j^{(j+1)}, B^{(j+1)} \right\rangle_t \\
 &\stackrel{\text{Bem.5.3}}{=} \int_0^t \epsilon V(s) \|\gamma_j(s)\| \rho_j(s) ds
 \end{aligned}$$

erhält.

Aufgrund der Martingaleigenschaft ist der Driftterm von u_λ gleich Null, somit erfüllt u_λ folgende partielle Differentialgleichung auf $(0, T_j) \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
 \partial_t u - \frac{1}{2} V \|\gamma_j\|^2 \partial_z u + a(b - \xi_j^* V) \partial_v u + \frac{1}{2} V \|\gamma_j\|^2 \partial_z^2 u \\
 + \frac{1}{2} \epsilon^2 V \partial_v^2 u + \epsilon V \|\gamma_j\| \rho_j \partial_z \partial_v u = 0
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

mit der Endwertbedingung

$$\lim_{t \nearrow T_j} u_\lambda(t, z, v) = e^{\lambda z}.$$

Es liegt also ein Cauchy-Problem vor, dessen Lösung die analytische transformierte $\phi_j(\lambda) = u_\lambda(0, Z_j(0), V(0))$ liefert. Als Lösungsansatz für u_λ wählt man

$$u_\lambda(t, z, v) = \exp(C_\lambda(\tau) + D_\lambda(\tau)v + \lambda z)$$

mit $\tau = T_j - t$ und $C_\lambda, D_\lambda : (0, T_j) \rightarrow \mathbb{C}$. Bildet man nun ausgehend von diesem Lösungsansatz die partiellen Ableitungen von u_λ und setzt diese in (5.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 &(-C'_\lambda(\tau) - D'_\lambda(\tau)V)u - \frac{1}{2} V \|\gamma_j\|^2 \lambda u + a(b - \xi_j^* V) D_\lambda(\tau)u \\
 &+ \frac{1}{2} V \|\gamma_j\|^2 \lambda^2 u + \frac{1}{2} \epsilon^2 V D_\lambda^2(\tau)u + \epsilon V \|\gamma_j\| \rho_j \lambda D_\lambda(\tau)u = 0 \\
 \Leftrightarrow &\underbrace{-C'_\lambda(\tau) + a b D_\lambda(\tau)}_{= (*)} + V \left(-D'_\lambda(\tau) - \frac{1}{2} \|\gamma_j\|^2 \lambda - a \xi_j^* D_\lambda(\tau) \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \|\gamma_j\|^2 \lambda^2 + \frac{1}{2} \epsilon^2 D_\lambda^2(\tau) + \epsilon \|\gamma_j\| \rho_j \lambda D_\lambda(\tau) \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Da (5.11) für alle $t \in (0, T_j)$ erfüllt ist und der Term (*) unabhängig von V ist, liefert (5.11) ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} C'_\lambda(\tau) &= abD_\lambda(\tau), \\ D'_\lambda(\tau) &= \frac{1}{2} \epsilon^2 D_\lambda^2(\tau) + (\epsilon \|\gamma_j\| \rho_j \lambda - a \xi_j^*) D_\lambda(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\gamma_j\|^2 (\lambda^2 - \lambda) \quad \text{für alle } \tau \in (0, T_j) \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit der Anfangswertbedingung

$$\lim_{\tau \searrow 0} C_\lambda(\tau) = \lim_{\tau \searrow 0} D_\lambda(\tau) = 0.$$

Es bietet sich an zuerst die Differentialgleichung für D_λ zu lösen, da diese von C_λ unabhängig ist. D_λ erfüllt eine Riccati Gleichung, für die man bei konstanten Koeffizienten eine explizite Lösung angeben kann. Da angenommen wurde, dass γ_j , ρ_j und damit auch ξ_j^* stückweise konstante Funktionen für alle $1 \leq j \leq N-1$ sind, kann eine rekursive Lösung der Differentialgleichung angegeben werden. C_λ erhält man dann durch

$$C_\lambda(\tau) = \int_0^\tau C'_\lambda(s) ds = \int_0^\tau abD_\lambda(s) ds.$$

In dem folgenden Korollar sind die Lösungen von C_λ und D_λ angegeben.

Korollar 5.4 *Seien γ_j und ρ_j für alle $1 \leq j \leq N-1$ stückweise konstant, das heißt es existieren $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = T_j$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit*

$$\begin{aligned} \gamma_j(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_j(T_j - \tau_{k+1}) 1_{\{T_j - \tau_{k+1} \leq t < T_j - \tau_k\}} \quad \text{und} \\ \rho_j(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \rho_j(T_j - \tau_{k+1}) 1_{\{T_j - \tau_{k+1} \leq t < T_j - \tau_k\}} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j. \end{aligned}$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem (5.12) eine eindeutige Lösung

$$D_\lambda(\tau) = D_\lambda(\tau_k) + \frac{(c + d - \epsilon^2 D_\lambda(\tau_k)) (1 - e^{d(\tau - \tau_k)})}{\epsilon^2 (1 - g_k e^{d(\tau - \tau_k)})},$$

$$C_\lambda(\tau) = C_\lambda(\tau_k) + \frac{ab}{\epsilon^2} \left[(c + d)(\tau - \tau_k) - 2 \log \left(\frac{1 - g_k e^{d(\tau - \tau_k)}}{1 - g_k} \right) \right]$$

für $\tau_k < \tau \leq \tau_{k+1}$, $k = 0, \dots, m - 1$, mit

$$c = a\xi_j^*(T_j - \tau) - \epsilon \|\gamma_j(T_j - \tau)\| \rho_j(T_j - \tau)\lambda,$$

$$d = \sqrt{c^2 - \epsilon^2 \|\gamma_j(T_j - \tau)\|^2 (\lambda^2 - \lambda)},$$

$$g_k = \frac{c + d - \epsilon^2 D_\lambda(\tau_k)}{c - d - \epsilon^2 D_\lambda(\tau_k)}.$$

Somit ist die analytische Transformierte ϕ_j von $Z_j(T_j)$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{j+1} gegeben durch

$$\phi_j(\lambda) = u_\lambda(0, Z_j(0), V(0)) = \exp(C_\lambda(T_j) + D_\lambda(T_j)V(0) + \lambda Z(0))$$

für alle $\lambda \in D(\phi_j)$.

Für die Berechnung der analytischen Transformaten $\tilde{\phi}_j$ von $Z_j(T_j)$ unter \tilde{P}_{j+1} ist zu berücksichtigen, dass \tilde{P}_{j+1} und P_{j+1} äquivalente Maße sind mit

$$\left. \frac{d\tilde{P}_{j+1}}{dP_{j+1}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_j(t)}{L_j(0)} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_j.$$

Für ein

$$\lambda \in D(\tilde{\phi}_j) := \left\{ x \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |e^{xz}| \tilde{P}_{j+1}^{Z_j(T_j)}(dz) < \infty \right\}$$

gilt somit

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j(\lambda) &= \int e^{\lambda Z_j(T_j)} d\tilde{P}_{j+1} = \int e^{\lambda Z_j(T_j)} \frac{L_j(T_j)}{L_j(0)} dP_{j+1} \\ &= \int e^{\lambda Z_j(T_j)} \frac{e^{Z_j(T_j)}}{L_j(0)} dP_{j+1} = \frac{1}{L_j(0)} \int e^{(\lambda+1)Z_j(T_j)} dP_{j+1} \\ &= \frac{1}{L_j(0)} \phi_j(\lambda + 1). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Folglich erhält man die analytische Transformierte $\tilde{\phi}_j$ direkt aus der transformierten ϕ_j .

In dem nächsten Abschnitt wird nun gezeigt, wie aus der analytischen transformierten ϕ_j mithilfe der Fourierinversion die Verteilung von $Z_j(T_j)$ unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen P_{j+1} und \tilde{P}_{j+1} bestimmt werden kann. Dies führt dann direkt zu einer geschlossenen Formel für die Capletpreise.

5.2.3. Preisbestimmung mithilfe der Fourierinversion

Der Preis eines T_j -Caplets mit Strike K ist gegeben durch (vgl. (5.7))

$$C_j(0) = B(0, T_{j+1}) \delta_j \left(L_j(0) \tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) - K P_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) \right)$$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten

$$P_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) \quad \text{und} \quad \tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K))$$

erhält man nun durch die Fourierinversion. Der Beweis des folgenden Satzes basiert auf dem Beweis von dem Umkehrsatz von Lévy in [Als07].

Satz 5.5 *Es gilt*

$$P_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}(e^{-it \log(K)} \phi(it))}{t} dt$$

$$\tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi L_i(0)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}(e^{-it \log(K)} \phi(it+1))}{t} dt$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge mit $a_n \rightarrow -\infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann ergibt sich aus den Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq k) - P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq a_n)).$$

Zur besseren Lesbarkeit wird $k := \log(K)$ und $Q := P_{j+1}^{Z_j(T_j)}$ gesetzt. Da $\phi_j(i\lambda)$ der Fouriertransformierten von Z_j unter P_{j+1} an der Stelle λ entspricht, folgt für

ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit dem Umkehrsatz von Lévy

$$\begin{aligned}
 P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq k) - P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq a_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ia_nt} - e^{-ikt}}{2\pi it} \phi(it) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-a_n)} - e^{it(z-k)}}{2\pi it} Q(dz) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-a_n)} - e^{-it(z-a_n)} - e^{it(z-k)} + e^{-it(z-k)}}{2\pi it} Q(dz) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t(z-a_n))}{\pi t} Q(dz) dt - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t(z-k))}{\pi t} Q(dz) dt, \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Eulerschen Formel,

$$e^{ix} - e^{-ix} = \cos(x) + i \sin(x) - \cos(-x) - i \sin(-x) = 2i \sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

folgt.

Für den zweiten Term von (5.14) erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t(z-k))}{\pi t} Q(dz) dt &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{it(z-k)})}{\pi t} Q(dz) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-k)}}{\pi t} Q(dz) \right) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-itk} \phi_j(it))}{t} dt.
 \end{aligned}$$

Man betrachte nun den ersten Term von (5.14)

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t(z-a_n))}{\pi t} Q(dz) dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t(z-a_n))}{\pi t} Q(dz) dt.$$

Es ist zu beachten, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \times [0, c] \rightarrow \mathbb{C}; (z, t) \mapsto \frac{\sin(t(z-a_n))}{\pi t},$$

mit stetiger Fortsetzung $g(z, 0) = \frac{z-a_n}{\pi}$ für alle $z \in \mathbb{R}$, für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ beschränkt ist. Somit kann der Satz von Fubini¹ angewendet werden und es folgt

¹Siehe Satz 19.16 in [Als07].

mit Substitution

$$\begin{aligned} \int_0^c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t(z - a_n))}{\pi t} Q(dz) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^c \frac{\sin(t(z - a_n))}{\pi t} dt Q(dz) \\ &\stackrel{s:=t(z-a_n)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{c(z-a_n)} \frac{\sin(s)}{\pi s} ds Q(dz). \end{aligned}$$

Aufgrund der oszillierenden Form der Sinus-Funktion gilt für alle $c > 0$, $z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^{c(z-a_n)} \frac{\sin(s)}{\pi s} ds \right| \leq \sup \left\{ \left| \int_0^x \frac{\sin(s)}{\pi s} ds \right| : x > 0 \right\} \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{\pi s} ds \leq 1.$$

Somit folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz¹

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{c(z-a_n)} \frac{\sin(t)}{\pi t} dt Q(dz) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^{c(z-a_n)} \frac{\sin(t)}{\pi t} dt Q(dz) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\pi t} dt Q(dz) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} Q(dz) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt nun insgesamt

$$\begin{aligned} P_{j+1}(Z_j(T_j) > k) &= 1 - P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq k) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq k) - P_{j+1}(Z_j(T_j) \leq a_n)) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-itk} \phi_j(it))}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-itk} \phi_j(it))}{t} dt. \end{aligned}$$

¹Siehe Satz 9.9 in [Als07].

Bei \tilde{P}_{j+1} geht man zunächst analog vor, das heißt man erhält

$$\tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \left(e^{-itk} \tilde{\phi}_j(it) \right)}{t} dt.$$

Dann folgt mit der Gleichung (5.13)

$$\tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi L_i(0)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \left(e^{-itk} \phi_j(it+1) \right)}{t} dt.$$

Dabei ist zu beachten, dass $(it+1) \in D(\phi_j)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |e^{(it+1)z}| Q(dz) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\operatorname{Re}((it+1)z)} Q(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^z Q(dz) = \mathbb{E}_{j+1} [e^{Z_j(T_j)}] \\ &= \mathbb{E}_{j+1} [L_j(T_j)] = L_j(0) < \infty. \end{aligned}$$

Wobei bei der letzten Gleichheit die Martingaleigenschaft von L_j bezüglich P_{j+1} ausgenutzt wurde.

□

Der Satz 5.5 liefert eine Formel für die Approximation an die Capletpreise

$$\begin{aligned} C_j(0) &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \left(L_j(0) \tilde{P}_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) - K P_{j+1}(Z_j(T_j) > \log(K)) \right) \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \left(\frac{L_j(0) - K}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \left(e^{-itk} (\phi_j(it+1) - K \phi_j(it)) \right)}{t} dt \right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Um eine Näherung für den Preis eines Caplets mit einem bestimmten Strike K zu bestimmen, muss das Integral in (5.15) numerisch berechnet werden. Für die Untersuchung des Verlaufs der impliziten Volatilität wird (5.15) für mehrere Strikes ausgewertet, was zu einem hohen numerischen Aufwand führt. Wu und Zhang stellen eine weitere Methode zur Bewertung der Caplets vor, die auf dem Verfahren der Schnellen Fourier Transformation basiert und die Berechnung von mehreren Capletpreisen mit einem geringeren Rechenaufwand ermöglicht. Diese wird in dem folgenden Abschnitt näher beschrieben.

5.2.4. Preisbestimmung mithilfe der Schnellen Fourier Transformation

Die folgenden Ausführungen basieren auf [WZ06] und [CM99]. Es existiert eine weitere Möglichkeit eine geschlossene Formel für die Capletpreise mithilfe der analytischen Transformaten ϕ_j anzugeben. Denn es besteht eine Beziehung zwischen der Fouriertransformation des modifizierten Forwardpreises eines T_j -Caplets und ϕ_j . In dem ersten Schritt wird diese Beziehung hergeleitet. Den Forwardpreis eines Caplets in Abhängigkeit von dem Strike K erhält man dann durch die Rücktransformation der Fouriertransformation.

Man betrachte den Forwardpreis des Caplets als eine Funktion des Strikes K

$$G_j(k) := \mathbb{E}_{j+1} [(L_j(T_j) - K)^+] = \mathbb{E}_{j+1} [(e^{Z_j(T_j)} - e^k)^+] \quad \text{mit } k = \log(K).$$

Sei f_j die Wahrscheinlichkeitsdichte von $Z_j(T_j) = \log(L_j(T_j))$ unter dem Forwardmartingalmaß P_{j+1} , dann gilt

$$G_j(k) = \mathbb{E}_{j+1} [(e^{Z_j(T_j)} - e^k) 1_{\{Z_j(T_j) > k\}}] = \int_k^\infty (e^z - e^k) f_j(z) dz.$$

Es ist zu beachten, dass G_j auf \mathbb{R} nicht integrierbar ist, da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} G_j(k) &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\int_k^\infty e^z f_j(z) dz - e^k \int_k^\infty f_j(z) dz \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^z f_j(z) dz = \mathbb{E}_{j+1} [L_j(T_j)] = L_j(0) > 0. \end{aligned}$$

Daher ist die Fouriertransformation von G_j nicht wohldefiniert. Aus diesem Grund betrachtet man zunächst den modifizierten Forwardpreis

$$g_j(k) = e^{\alpha k} G_j(k) \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

so dass g_j integrierbar ist. Die Wahl von α wird später in diesem Abschnitt genauer erläutert.

Bemerkung 5.6 Ist $\alpha > 0$ so gewählt, dass g_j integrierbar ist, dann ist g_j schon quadratintegrierbar.

Beweis: Sei $\alpha > 0$ so gewählt, dass g_j integrierbar ist. G_j, g_j sind nichtnegative Funktionen und es gilt

$$\begin{aligned} G_j(k) &= \mathbb{E}_{j+1} \left[(e^{Z_j(T_j)} - e^k)^+ \right] \leq \mathbb{E}_{j+1} [e^{Z_j(T_j)}] = L_j(0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}. \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^0 g_j(k)^2 dk &= \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha k} G_j(k)^2 dk \leq L_j(0) \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha k} G_j(k) dk \\ &\stackrel{k \leq 0}{\leq} L_j(0) \int_{-\infty}^0 e^{\alpha k} G_j(k) dk = L_j(0) \int_{-\infty}^0 g_j(k) dk < \infty. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aufgrund der Integrierbarkeit gilt $g_j(k) = e^{\alpha k} G_j(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Also existiert ein $0 < k_0 < \infty$ mit $g_j(k) < 1$ für alle $k > k_0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^\infty g_j(k)^2 dk &= \int_0^{k_0} g_j(k)^2 dk + \int_{k_0}^\infty g_j(k)^2 dk \\ &\leq e^{2\alpha k_0} L_j(0)^2 k_0 + \int_{k_0}^\infty g_j(k) dk < \infty. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mit (5.16) und (5.17) folgt schließlich die Behauptung. □

Da $g_j \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ist die Fouriertransformation sowie die Rücktransformation wohldefiniert.¹ Die Fouriertransformation von g_j ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi_j(\lambda) &= \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda k} g_j(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda k} \int_k^\infty e^{\alpha k} (e^z - e^k) f_j(z) dz dk \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_j(z) \int_{-\infty}^z (e^{z+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{i\lambda k} dk dz \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_j(z) \left(\frac{e^{(\alpha+1+i\lambda)z}}{\alpha+i\lambda} - \frac{e^{(\alpha+1+i\lambda)z}}{\alpha+1+i\lambda} \right) dz \\ &= \frac{1}{(\alpha+i\lambda)(\alpha+1+i\lambda)} \int_{-\infty}^\infty f_j(z) e^{(\alpha+1+i\lambda)z} dz \\ &= \frac{\phi_j(\alpha+1+i\lambda)}{(\alpha+i\lambda)(\alpha+1+i\lambda)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

¹Siehe Abschnitt 2.2.4 in [Gra08].

wobei bei der dritten Gleichung der Satz von Fubini verwendet wurde.

Somit ist die Fouriertransformierte der Funktion g_j über die analytische Transformierte ϕ_j von $Z_j(T_j)$, die in dem Abschnitt 5.2.2 berechnet wurde, definiert. Nun können mithilfe der Rücktransformation die Werte der Funktion g_j berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} g_j(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\lambda k) - i \sin(\lambda k)) (Re(\psi_j(\lambda)) + iIm(\psi_j(\lambda))) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda k) Re(\psi_j(\lambda)) + \sin(\lambda k) Im(\psi_j(\lambda)) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda k) Im(\psi_j(\lambda)) - \sin(\lambda k) Re(\psi_j(\lambda)) d\lambda \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Da g_j eine reellwertige Funktion ist, der Kosinus eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda k) Im(\psi_j(\lambda)) - \sin(\lambda k) Re(\psi_j(\lambda)) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \cos(\lambda k) [Im(\psi_j(\lambda)) + Im(\psi_j(-\lambda))] - \sin(\lambda k) [Re(\psi_j(\lambda)) - Re(\psi_j(-\lambda))] d\lambda. \end{aligned}$$

Wegen der Achsen- beziehungsweise Punktsymmetrie von dem Kosinus und dem Sinus ist diese Gleichheit nur dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} Im(\psi_j(\lambda)) &= -Im(\psi_j(-\lambda)), \\ Re(\psi_j(\lambda)) &= Re(\psi_j(-\lambda)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Setzt man nun (5.20) in (5.19) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} g_j(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda k) Re(\psi_j(\lambda)) + \sin(\lambda k) Im(\psi_j(\lambda)) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\lambda k) Re(\psi_j(\lambda)) + \sin(\lambda k) Im(\psi_j(\lambda)) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Re(e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda)) d\lambda. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$G_j(k) = \exp(-\alpha k) g_j(k) = \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda) d\lambda \right). \quad (5.21)$$

Auf diese Weise erhält man eine geschlossene Formel für den Capletpreis

$$\begin{aligned} C_j(0) &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \mathbb{E}_{j+1} [(L_j(T_j) - K)^+] \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j G_j(k) \\ &= B(0, T_{j+1}) \delta_j \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda) d\lambda \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Der Vorteil dieser Methode gegenüber der in dem Abschnitt 5.2.3 vorgestellten Vorgehensweise besteht darin, dass mithilfe der Schnellen Fourier Transformation die Rücktransformation gleich für mehrere Werte von k mit einem wesentlich geringeren numerischen Aufwand berechnet werden kann.

Im Folgenden wird die Berechnung der Rücktransformation sowie die Wahl von α näher erläutert.

Der Parameter $\alpha > 0$ muss so gewählt werden, dass die Funktion g_j , definiert durch

$$g_j(k) = e^{\alpha k} G_j(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R},$$

integrierbar und somit auch quadratintegrierbar ist, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_j(k)| dk \stackrel{g_j \geq 0}{=} \psi_j(0) < \infty.$$

Mit (5.18) folgt, dass dies genau dann erfüllt ist, wenn

$$\phi_j(\alpha + 1) = \mathbb{E}_{j+1} [e^{(\alpha+1)Z_j(T_j)}] = \mathbb{E}_{j+1} [L_j(T_j)^{(\alpha+1)}] < \infty \quad (5.23)$$

gilt. Man wähle also α so, dass (5.23) erfüllt ist. Für die folgenden Überlegungen sei $A = \mathbb{E}_{j+1} [L_j(T_j)^{(\alpha+1)}]$ gesetzt.

Bei der numerischen Berechnung des Integrals in der Formel (5.21) stellt sich zuerst die Frage, wie die obere Integralgrenze zu wählen ist, damit der Fehler, der beim Abschneiden entsteht, weniger als $\epsilon > 0$ beträgt. Das heißt man sucht

ein $M \in (0, \infty)$ mit

$$\left| \int_M^\infty e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda) d\lambda \right| < \epsilon.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} |\psi_j(\lambda)| &= \left| \frac{\phi_j(\alpha + 1 + i\lambda)}{(\alpha + i\lambda)(\alpha + 1 + i\lambda)} \right| = \frac{|\mathbb{E}_{j+1} [e^{(\alpha+1+i\lambda)Z_j(T_j)}]|}{|\alpha(1 + \alpha) + i\lambda(1 + 2\alpha) - \lambda^2|} \\ &\stackrel{\alpha > 0}{\leq} \frac{\mathbb{E}_{j+1} [|e^{(\alpha+1)Z_j(T_j)}| |e^{i\lambda Z_j(T_j)}|]}{|i\lambda - \lambda^2|} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{j+1} [|L_j(T_j)^{(\alpha+1)}|]}{\sqrt{\lambda^4 + \lambda^2}} \stackrel{L_j > 0}{\leq} \frac{A}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left| \int_M^\infty e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_M^\infty |\psi_j(\lambda)| d\lambda \leq \int_M^\infty \frac{A}{\lambda^2} d\lambda = \frac{A}{M}.$$

Es ist also $M = \frac{A}{\epsilon}$ zu wählen, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

Das Integral

$$I(k) := \int_0^M e^{-i\lambda k} \psi_j(\lambda) d\lambda$$

kann mithilfe der zusammengesetzten Trapezregel numerisch berechnet werden. Hierfür wird das Intervall $[0, M]$ in n Intervalle der gleichen Länge zerlegt. Setzt man $\Delta\lambda = \frac{M}{n}$, dann erhält man $n + 1$ äquidistante Stützstellen $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$\lambda_m = m\Delta\lambda \quad \text{für } 0 \leq m \leq n.$$

Die zusammengesetzte Trapezregel liefert eine Approximation $I_n(k)$ für $I(k)$

$$I_n(k) = \frac{\Delta\lambda}{2} \left(\psi_j(0) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} e^{-i\lambda_m k} \psi_j(\lambda_m) + e^{-iMk} \psi_j(M) \right).$$

Von Interesse sind Preise von Caplets mit Strike K , der sich in der Nähe von dem Anfangskurs von $L_j(0)$ befindet. Für ein $b > 0$ setze man $\Delta k = \frac{2b}{n}$ und $k_l = \log(L_j(0)) - b + l\Delta k$ für $1 \leq l \leq n - 1$. Für ein k_l mit $l = 1, \dots, n - 1$ erhält

man

$$I_n(k_l) = \frac{\Delta\lambda}{2} \left(\psi_j(0) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} e^{-i\Delta\lambda\Delta kml} e^{-i(\log(L_j(0))-b)\lambda_m} \psi_j(\lambda_m) + e^{-i\Delta\lambda\Delta knl} e^{-i(\log(L_j(0))-b)M} \psi_j(M) \right).$$

Setzt man nun $\Delta\lambda\Delta k = \frac{2\pi}{n}$, dann gilt

$$\begin{aligned} I_n(k_l) &= \frac{\Delta\lambda}{2} \left(\psi_j(0) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}ml} e^{-i(\log(L_j(0))-b)\lambda_m} \psi_j(\lambda_m) + e^{-i2\pi l} e^{-i(\log(L_j(0))-b)M} \psi_j(M) \right) \\ &= \frac{\Delta\lambda}{2} \left(\psi_j(0) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}ml} e^{-i(\log(L_j(0))-b)\lambda_m} \psi_j(\lambda_m) + e^{-i(\log(L_j(0))-b)M} \psi_j(M) \right). \end{aligned}$$

Mithilfe der Schnellen Fourier Transformation können nun die Terme

$$\sum_{m=1}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}ml} [e^{-i(\log(L_j(0))-b)\lambda_m} \psi_j(\lambda_m)], \quad 1 \leq l \leq n-1,$$

berechnet und die Preisformel (5.22) für die Strikes $K_l := \exp(k_l)$, $1 \leq l \leq n-1$, ausgewertet werden.

5.3. Bewertung von Swaptions

In diesem Abschnitt soll nun die entsprechende Methode zur Bewertung von Swaptions vorgestellt werden. Man betrachte eine Swaption für ein Zeitintervall $[T_n, T_m]$, $1 \leq n < m \leq N$, mit Strike K . Sei $R_{n,m}$ die Swaprate für das gleiche Zeitintervall mit

$$R_{n,m}(t) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1})} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_n.$$

Sei außerdem der Prozess $(N_{n,m}(t))_{0 \leq t \leq T_n}$ definiert durch

$$N_{n,m}(t) = \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j B(t, T_{j+1}) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_n$$

und P^S der Forwardswapmaß. Dann ist der Preis der Swaption zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch (vgl. Abschnitt 3.2)

$$PS_{n,m}(0) = N_{n,m}(0) \mathbb{E}^S [(R_{n,m}(T_n) - K)^+],$$

wobei mit $\mathbb{E}^S [\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich P^S bezeichnet wird.

Zur Berechnung von $PS_{n,m}(0)$ ist es nun notwendig die genaue Dynamik von $R_{n,m}$ und V bezüglich P^S in dem vorliegenden LIBOR-Markt-Modell zu bestimmen. Hierfür wird zunächst der Maßwechsel bzw. Numérairewechsel durchgeführt und die Wiener-Prozesse bezüglich P^S bestimmt.

Satz 5.7 *Sei P^S das Forwardswapmaß, dann werden durch*

$$\begin{aligned} W^S(t) &:= W(t) - \int_0^t \sqrt{V(s)} \sigma^S(s) ds, \\ B^S(t) &:= B(t) - \int_0^t \sqrt{V(s)} \xi^S(s) ds \quad \text{mit} \\ \sigma^S(t) &= \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j(t) \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \gamma_k(t), \\ \xi^S(t) &= \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j(t) \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \|\gamma_k(t)\| \rho_k(t) \quad \text{und} \\ \alpha_j(t) &= \frac{\delta_j B(t, T_{j+1})}{N_{n,m}(t)} \end{aligned}$$

ein d -dimensionaler Wiener-Prozess W^S und ein eindimensionaler Wiener-Prozess B^S bezüglich P^S definiert.

Beweis: Sei P^S das Forwardswapmaß. Mithilfe der Numéraire Technik erhält man die folgende Gestalt für den Dichtequotientenprozess¹

$$\left. \frac{dP^S}{dP_N} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \frac{N_{n,m}(t)}{B(t, T_N)} =: L^S(t), \quad 0 \leq t \leq T_n.$$

Das Ziel ist es nun die Exponentialmartingaldarstellung von L^S herzuleiten, um dann den Satz von Girsanov anwenden zu können.

Für ein beliebiges $1 \leq j \leq N - 1$ gilt

$$\frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_N)} = \frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_{j+2})} \frac{B(t, T_{j+2})}{B(t, T_{j+3})} \cdots \frac{B(t, T_{N-1})}{B(t, T_N)} = \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1). \quad (5.24)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} L^S(t) &= \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \frac{N_{n,m}(t)}{B(t, T_N)} = \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_N)} \\ &= \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Mit der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} dL^S(t) &= \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \sum_{i=j+1}^{N-1} \left[\delta_i \prod_{k=j+1, k \neq i}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \right] dL_i(t) \\ &= \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i}{(\delta_i L_i(t) + 1)} \left[\prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \right] dL_i(t) \\ &= \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \left[\prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \right] \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i L_i(t)}{(\delta_i L_i(t) + 1)} \sqrt{V(t)} \gamma_i(t) dW(t), \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Gleichheit die Dynamik von L_i , $1 \leq i \leq N - 1$, bezüglich P_N ausgenutzt wurde. Außerdem ist zu beachten, dass L^S ein Martingal bezüglich P_N ist und deshalb die Driftterme außer Acht gelassen wurden.

¹Siehe Abschnitt 24.3 in [Bjö04].

Man setze

$$\alpha_j(t) = \frac{\delta_j \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1)}{\sum_{l=n}^{m-1} \delta_l \prod_{k=l+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1)} \stackrel{(5.24)}{=} \delta_j \frac{B(t, T_{j+1}) B(t, T_N)}{B(t, T_N) N_{n,m}(t)} = \frac{\delta_j B(t, T_{j+1})}{N_{n,m}(t)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} dL^S(t) &= \frac{B(0, T_N)}{N_{n,m}(0)} \left(\sum_{l=n}^{m-1} \delta_l \prod_{k=l+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \right) \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i L_i(t) \gamma_i(t)}{(\delta_i L_i(t) + 1)} dW(t) \\ &\stackrel{(5.25)}{=} L^S(t) \sqrt{V(t)} \sigma^S(t) dW(t). \end{aligned}$$

Somit erfüllt L^S eine homogene lineare stochastische Differentialgleichung. Diese wird gelöst durch

$$L^S(t) = \exp \left(\int_0^t \sqrt{V(s)} \sigma^S(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t V(s) \|\sigma^S(s)\|^2 ds \right).$$

Der Satz von Girsanov liefert schließlich, dass die Prozesse W^S und B^S mit

$$\begin{aligned} W^S(t) &= W(t) - \left\langle W, \int \sqrt{V} \sigma^S dW \right\rangle_t = W(t) - \int_0^t \sqrt{V(s)} \sigma^S(s) ds, \\ B^S(t) &= B(t) - \left\langle B, \int \sqrt{V} \sigma^S dW \right\rangle_t \\ &= B(t) - \left\langle B, \int \sqrt{V} \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k}{\delta_k L_k + 1} \gamma_k dW \right\rangle_t \\ &= B(t) - \sum_{j=n}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{N-1} \left\langle B, \int \sqrt{V} \alpha_j \frac{\delta_k L_k}{\delta_k L_k + 1} \|\gamma_k\| d\bar{W}_k \right\rangle_t \\ &= B(t) - \sum_{j=n}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \sqrt{V(s)} \alpha_j(s) \frac{\delta_k L_k(s)}{\delta_k L_k(s) + 1} \|\gamma_k(s)\| \rho_k(s) ds \\ &= B(t) - \int_0^t \sqrt{V(s)} \xi^S(s) ds \end{aligned}$$

Wiener-Prozesse unter dem Forwardswapmaß P^S sind.

□

Mit dem Satz 5.7 erhält man für die LIBOR-Raten und den stochastischen Volatilitätsprozess folgende Dynamik unter dem Forwardswapmaß P^S

$$\begin{aligned} dL_j(t) &= L_j(t) \left(\mu_j(t) dt + \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) dW(t) \right) \\ &= L_j(t) \left((\mu_j(t) + V(t) \gamma_j(t) \sigma^S(t)) dt + \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) dW^S(t) \right), \\ dV(t) &= a(b - V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB(t) \\ &= a(b - \tilde{\xi}^S(t) V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB^S(t) \\ \text{mit } \tilde{\xi}^S(t) &= 1 - \frac{\epsilon \xi^S(t)}{a}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz liefert die Dynamik der Swaprate $R_{n,m}$ bezüglich P^S .

Satz 5.8 Für die Swaprate $(R_{n,m}(t))_{0 \leq t \leq T_n}$ gilt

$$\begin{aligned} dR_{n,m}(t) &= \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_j} L_j(t) \gamma_j(t) dW^S(t) \quad \text{mit} \\ \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_j} &= \alpha_j(t) + \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(t) (L_k(t) - R_{n,m}(t)), \quad 1 \leq j \leq N-1. \end{aligned}$$

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt mit der Itô-Formel. Es gilt

$$dR_{n,m}(t) = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} dL_j(t) = \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} L_j(t) \gamma_j(t) dW^S(t),$$

wobei bei der letzten Gleichheit die Dynamik von L_j , $n \leq j \leq m-1$, bezüglich P^S eingesetzt wurde und aufgrund der Martingaleigenschaft von $R_{n,m}$ die Driftterme nicht berücksichtigt wurden.

Bei der Berechnung der partiellen Ableitung von $R_{n,m}(t)$ nach $L_j(t)$ für ein beliebiges $j \in \{n, \dots, m-1\}$ ist zu berücksichtigen, dass

$$\begin{aligned} R_{n,m}(t) &= \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{N_{n,m}(t)} = \frac{\sum_{k=n}^{m-1} B(t, T_k) - B(t, T_{k+1})}{N_{n,m}(t)} \\ &= \frac{\sum_{k=n}^{m-1} B(t, T_{k+1}) \delta_k L_k(t)}{N_{n,m}(t)} = \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k(t) L_k(t), \quad 0 \leq t \leq T_n, \end{aligned} \quad (5.26)$$

gilt.

Somit folgt

$$\frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} = \alpha_j(t) + \sum_{k=n}^{m-1} \frac{\partial \alpha_k(t)}{\partial L_j(t)} L_k(t). \quad (5.27)$$

Da

$$\alpha_k(t) = \frac{\delta_k B(t, T_{k+1})}{N_{n,m}(t)} = \delta_k \frac{B(t, T_{k+1})}{B(t, T_N)} \frac{B(t, T_N)}{N_{n,m}(t)} = \frac{\delta_k \prod_{i=k+1}^{N-1} (\delta_i L_i(t) + 1)}{\sum_{l=n}^{m-1} \delta_l \prod_{i=l+1}^{N-1} (\delta_i L_i(t) + 1)},$$

folgt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k(t)}{\partial L_j(t)} &= \left(\delta_k \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \prod_{i=k+1}^{N-1} (\delta_i L_i(t) + 1) \frac{N_{n,m}(t)}{B(t, T_N)} 1_{\{j>k\}} \right. \\ &\quad \left. - \delta_k \frac{B(t, T_{k+1})}{B(t, T_N)} \sum_{l=n}^{j-1} \delta_l \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \prod_{i=l+1}^{N-1} (\delta_i L_i(t) + 1) \right) \left(\frac{B(t, T_N)}{N_{n,m}(t)} \right)^2 \\ &= \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \left(\alpha_k(t) 1_{\{j>k\}} - \alpha_k(t) \sum_{l=n}^{j-1} \frac{\delta_l \prod_{i=l+1}^{N-1} (\delta_i L_i(t) + 1) B(t, T_N)}{N_{n,m}(t)} \right) \\ &= \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \alpha_k(t) \left(1_{\{j>k\}} - \sum_{l=n}^{j-1} \alpha_l(t) \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Das Einsetzen von (5.28) in (5.27) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_j} &= \alpha_j(t) + \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k(t) L_k(t) \left(1_{\{j>k\}} - \sum_{l=n}^{j-1} \alpha_l(t) \right) \\ &= \alpha_j(t) + \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \left(\sum_{k=n}^{j-1} \alpha_k(t) L_k(t) - \left(\sum_{l=n}^{j-1} \alpha_l(t) \right) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k(t) L_k(t) \right) \\ &\stackrel{(5.26)}{=} \alpha_j(t) + \frac{\delta_j}{\delta_j L_j(t) + 1} \sum_{k=n}^{j-1} \alpha_k(t) (L_k(t) - R_{n,m}(t)). \end{aligned}$$

□

Die in dem Satz 5.8 beschriebene Dynamik der Swaprate weist eine hohe Komplexität auf, die das Auswerten der Preisformel

$$PS_{n,m}(0) = N_{n,m}(0) \mathbb{E}^S [(R_{n,m}(T_n) - K)^+] \quad (5.29)$$

erschwert. Aus diesem Grund bietet es sich an, wie bei der Bewertung von Caplets (vgl. Abschnitt 5.2.1), Freezing durchzuführen. Das heißt $L_j(t)$ wird durch $L_j(0)$ für alle $0 \leq t \leq T_j$ und $n \leq j \leq m-1$ approximiert. Es folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^S(t) &= 1 - \frac{\epsilon \xi^S(t)}{a} \\ &\approx 1 - \frac{\epsilon}{a} \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j(0) \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k L_k(0)}{\delta_k L_k(0) + 1} \|\gamma_k(t)\| \rho_k(t) =: \tilde{\xi}_0^S(t).\end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\omega_j = \frac{\partial R_{n,m}(0)}{\partial L_j(0)} \frac{L_j(0)}{R_{n,m}(0)},$$

so kann die Dynamik von $R_{n,m}$ und V unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P^S approximativ durch folgende stochastische Differentialgleichungen beschrieben werden

$$\begin{aligned}dR_{n,m}(t) &= R_{n,m}(t) \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j \gamma_j(t) dW^S(t) \\ dV(t) &= a \left(b - \tilde{\xi}_0^S(t) V(t) \right) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dB^S(t).\end{aligned}$$

Betrachtet man nun diese Dynamik und die Preisformel (5.29), so ist festzustellen, dass die Bewertung von Swaptions ein Analogon zu der Bewertung von Caplets ist. Nimmt man also an, dass die Funktionen γ_j und ρ_j , $1 \leq j \leq N-1$, stückweise konstant sind, so kann bei der Berechnung von (5.29) analog zu der Bewertung von Caplets vorgegangen werden.

Wu und Zhang haben die Güte der oben durchgeführten Approximation numerisch überprüft, indem sie die mit der Schnellen Fourier Transformation und der Monte-Carlo-Simulation berechneten Swaptionpreise miteinander verglichen. Sie stellten nur geringe Abweichungen fest, wobei die Bewertung mithilfe der Schnellen Fourier Transformation gegenüber der Monte-Carlo-Simulation deutlich geringere Rechenzeit aufweist.¹

¹Die Abweichungen liegen meistens unter einem Prozent. Die Ausnahme bilden nur die Swaptions mit $T_n = T_m - T_n = 10$ Jahre. Hier überschreitet aber die Abweichung die 2% nicht.

6. Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war es zu untersuchen, wie die Volatilitätsstruktur in einem LIBOR-Markt-Modell zu wählen ist, um eine möglichst hohe Marktkonsistenz zu erreichen. Bei der Analyse des Modellansatzes mit deterministischen Volatilitäten stellte sich heraus, dass die aus dem Modell resultierende implizite Volatilität der Caplets unabhängig von dem Strike der Caplets ist. Das heißt, es ist nicht möglich in einem so definierten LIBOR-Markt-Modell den Skew-Effekt der impliziten Volatilität abzubilden. Wegen der direkten Beziehung zwischen der impliziten Volatilität und den Capletpreisen, führt die Fehleinschätzung der impliziten Volatilität zur Fehlbepreisung der Caplets. Aus diesem Grund sollte der Einsatz des deterministischen Modellansatzes in der Praxis überdacht werden, auch wenn er durch seine Einfachheit besticht und aufgrund der Verwendung von Black's Formel für Caplets und Swaptions ein schnelles Kalibrieren des Modells an die Marktdaten ermöglicht.

Das CEV- und das LCEV-Modell ergänzen sich zu einem LIBOR-Markt-Modell, das eine mögliche Alternative zu dem deterministischen Modellansatz darstellt. Die Bewertung von Zinsderivaten erfolgt in dem LCEV-Modell, wobei die Modellparameter mithilfe der CEV-Preisformel für Caplets und Swaptions an die Marktdaten kalibriert werden können. Die Wahl des Elastizitätsfaktors in dem Modell ermöglicht die Realisierung eines monoton fallenden oder steigenden Verlaufs der impliziten Volatilität. Auf diese Weise kann im Hinblick auf die Marktkonsistenz eine deutliche Verbesserung gegenüber dem deterministischen Ansatz erreicht werden. Dennoch bestehen weiterhin Einschränkungen bei der Modellierung der impliziten Volatilität. Zum einen ist es nicht möglich einen nicht monotonen Verlauf der Volatilitätskurve zu modellieren. Und zum anderen wirkt sich der Elastizitätsfaktor auf die Volatilität aller LIBOR-Raten gleichermaßen aus, so dass die Beeinflussung des Verlaufs der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von dem Zinsanpassungstermin eines Caplets stark eingeschränkt ist. Das heißt, dass

die Möglichkeiten für die Modellierung der gesamten impliziten Volatilitätsfläche begrenzt sind.

Der Ansatz mit stochastischer Volatilität weist unter den drei in dieser Arbeit vorgestellten Modellansätzen die höchste Flexibilität bei der Modellierung der impliziten Volatilität, aber auch die höchste Komplexität bei der Bewertung von Caplets und Swaptions auf. Auch wenn die Bewertung im Vergleich zu den anderen zwei Modellansätzen mit einem erheblich höherem Rechenaufwand verbunden ist, können durch den Einsatz der Schnellen Fourier Transformation die Preise gleich für mehrere Strikes berechnet werden. Über die Korrelation zwischen einer LIBOR-Rate und dem stochastischen Volatilitätsprozess wird der Verlauf der impliziten Volatilität der Caplets mit unterschiedlichen Zinsanpassungsterminen beeinflusst. Dabei kann neben einem monoton fallenden oder steigenden Kurvenverlauf auch ein Smile-Effekt der impliziten Volatilität erreicht werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Einsatz des deterministischen Modellansatzes in der Praxis unter dem Gesichtspunkt der Marktkonsistenz nicht gerechtfertigt ist. Das CEV-Modell und insbesondere der Modellansatz mit stochastischer Volatilität stellen Alternativen dar, die in der Lage sind den am Markt beobachtbaren Skew-Effekt der impliziten Volatilität abzubilden. Über den letzten Modellansatz mit stochastischer Volatilität lässt sich sogar die komplette Volatilitätsfläche modellieren.

Die Verwendung des LIBOR-Markt-Modells mit deterministischer Volatilität in der Praxis wird im Wesentlichen durch die Einfachheit der Kalibrierung legitimiert. Aus diesem Grund könnte in weiteren Untersuchungen, die den Rahmen der vorliegenden Masterarbeit übersteigen, die Umsetzbarkeit der komplexeren Modellansätze in der Praxis untersucht werden. Es ist zu prüfen, wie gut sich das CEV-Modell und der Modellansatz mit stochastischer Volatilität mithilfe der in dieser Arbeit angegebenen Preisformeln für Caplets und Swaptions an die Marktdaten kalibrieren lassen.

Literaturverzeichnis

- [AA00] ANDERSEN, L. ; ANDREASEN, J.: Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model. In: *Applied Mathematical Finance* 7 (2000), S. 1–32
- [Als07] ALSMEYER, G.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Münster, 2007 (Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30)
- [Arn73] ARNOLD, L.: *Stochastische Differentialgleichungen*. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1973. – S. 118-128
- [BBA] BBALIBOR: *British Bankers' Association*. – <http://bbalibor.com/bbalibor-explained/the-basics> -Letzter Zugriff : 09.11.2012
- [BDB99] BRACE, A. ; DUN, T. ; BARTON, G.: *Towards a Central Interest Rate Modell*. Mai 1999. – Kapitelentwurf
- [BGM97] BRACE, A. ; GATAREK, D. ; M., Musiela: The Market Model of Interest Rate Dynamics. In: *Mathematical Finance* 7 (1997), Nr. 2, S. 127–147
- [Bjö04] BJÖRK, T.: *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 2. Edition. Oxford University Press, 2004
- [BM01] BRIGO, D. ; MERCURIO, F.: *Interest Rate Models Theory and Practice*. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2001
- [BS02] BORODIN, A ; SALMINEN, P.: *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*. 2. Edition. Birkhäuser, 2002
- [CM99] CARR, P. ; MADAN, D: Option valuation using the fast Fourier transform. In: *Journal of Computational Finance* 2 (1999), Nr. 4

- [Dec06] DECK, T.: *Der Itô-Kalkül*. Springer, 2006
- [Gra08] GRAFAKOS, L.: *Classical Fourier Analysis*. 2. Edition. Springer, 2008
- [Hes93] HESTON, STEVEN L : A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. In: *The Review of Financial Studies* 6 (1993), Nr. 2, S. 327–343
- [Hul09] HULL, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, 2009
- [HW99] HULL, J. ; WHITE, A.: Forwar Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model / Joseph L. Rotman School of Management University of Toronto. 1999. – Forschungsbericht
- [Jam97] JAMSHIDIAN, F.: LIBOR and swap market models and measures. In: *Finance and Stochastics* 1 (1997), S. 293–330
- [JKB95] JOHNSON, N. ; KOTZ, S. ; BALAKRISHNAN, N.: *Continuous Univariate Distributions*. Bd. 2. 2. Edition. John Wiley and Sons, Inc., 1995
- [MSS97] MILTERSEN, K. ; SANDMANN, K. ; SONDERMANN, D.: Closed Form Solution for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. In: *Journal of Finance* 52 (1997), Nr. 1, S. 409–430
- [Oks03] OKSENDAL, B.: *Stochastic Differential Equations*. Springer, 2003
- [Pau10] PAULSEN, V.: *Handschriftliches Skript zu der Vorlesung Finanzmathematik I*. WS 2009/2010. – Universität Münster
- [Pau11] PAULSEN, V.: *Handschriftliches Skript zu der Vorlesung Mathematische Modelle*. SS 2011. – Universität Münster
- [Pau12] PAULSEN, V.: *Handschriftliches Skript zu der Vorlesung Ausgewählte Kapitel der Finanzmathematik*. WS 2011/2012. – Universität Münster
- [RY05] REVUZ, D. ; YOR, M.: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3. Edition. Springer, 2005

- [Sch89] SCHRODER, M.: Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula. In: *The Journal of Finance* 44 (1989), Nr. 1, S. 211–218
- [WZ06] WU, L. ; ZHANG, F.: Libor market model with stochastic volatility. In: *Journal of industrial and management optimization* 2 (2006), Nr. 2, S. 199–227

A. Anhang

A.1. Das numerische Erzeugen der Kurvenverläufe in der Abbildung 4.1

Die Abbildung 4.1 stellt den Verlauf der impliziten Volatilität eines Caplets in einem CEV-Modell in der Abhängigkeit von dem Elastizitätsfaktor α und dem Strike K an einem Beispiel dar. Diese Abbildung wurde mit Mathworks MATLAB erzeugt, indem das in dem Abschnitt 4.2 vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der impliziten Volatilität numerisch realisiert wurde. Im Folgenden wird die numerische Umsetzung erläutert.

Es wird ein Caplet mit dem Zinsanpassungstermin $T_j = 5$ und $L_j(0) = 0,06$ betrachtet. Außerdem werden bei der Implementierung folgende vereinfachende Modellannahmen getroffen:

- Die Quelle des Zufalls wird von einem eindimensionalen Wiener-Prozess getrieben (d.h. $d = 1$),
- Die deterministische Funktion λ_j wird als konstant in der Zeit vorausgesetzt und soll in der Abhängigkeit von α so gewählt werden, dass die implizite Volatilität des Caplets mit Strike $K = L_j 0,2$ beträgt.

Die grafische Darstellung der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von α und K erfolgt in drei Schritten. Die MATLAB-Funktion `Vorbereitung.m` stellt den ersten Schritt dar. Hier wird die Funktion F mit

$$F(\sigma) \stackrel{(4.12)}{=} \underbrace{L_j(0) \left(1 - \chi^2 \left(f(K); \frac{1}{1-\alpha} + 2, f(L_j(0)) \right) \right)}_{=:A} - K \chi^2 \left(f(L_j(0)); \frac{1}{1-\alpha}, f(K) \right) - [L_j(0)\Phi(f_+(L_j(0), \sigma)) - K\Phi(f_-(L_j(0), \sigma))]. \quad (\text{A.1})$$

durch den folgenden Quellcode

```
function [ F ] = Vorbereitung( alpha, lambda, T, K, L_T, sigma )

nu_T=T*lambda^2;
fK=K^(2*(1-alpha))/(nu_T*(1-alpha)^2);
fL_T=L_T^(2*(1-alpha))/(nu_T*(1-alpha)^2);
A=L_T*(1-ncx2cdf(fK,1/(1-alpha)+2,fL_T))...
-K*ncx2cdf(fL_T,1/(1-alpha),fK)

f_1=(log(L_T/K)+0.5*sigma^2*T)/(sigma*sqrt(T));
f_2=(log(L_T/K)-0.5*sigma^2*T)/(sigma*sqrt(T));
F=10^6*(A-(L_T*cdf('Normal',f_1,0,1)-K*cdf('Normal',f_2,0,1)))

end
```

implementiert. Die Inputvariablen α , λ_j , T , K , L_T , σ entsprechen α , λ_j , T_j , K , $L_j(0)$ und σ . nu_T entspricht der Zeittransformation

$$\nu_j(T_j) \stackrel{(4.3)}{=} \int_0^{T_j} \lambda_j(u)^2 du = T_j \cdot \lambda_j^2,$$

wobei bei der letzten Gleichheit die Unabhängigkeit des λ_j von der Zeit verwendet wurde. fK , fL_T , A , f_1 und f_2 stimmen mit $f(K)$, $f(L_j(0))$, A , $f_+(L_j(0), \sigma)$ und $f_-(L_j(0), \sigma)$ aus der Formel (A.1) überein. In der letzten Zeile des Quellcodes wird die Funktion F umgesetzt. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass die in der Formel (A.1) beschriebene Funktion F mit dem Faktor 10^6 multipliziert wird. In dem zweiten Schritt der Implementierung wird die implizite Volatilität σ_j^{imp} als die Nullstelle von F bestimmt. Durch den Faktor 10^6 wird die Nullstelle der Funktion nicht verändert, es kann aber bei der numerischen Berechnung der Nullstelle eine wesentlich höhere Genauigkeit erreicht werden.

Die Berechnung der impliziten Volatilität σ_j^{imp} beziehungsweise der Nullstelle von F erfolgt in der MATLAB-Funktion `implVol.m`.

```
function [ sigma ] = implVol( alpha, lambda, T, K, L_T )

sigma=fsolve(@(x)Vorbereitung(alpha, lambda, T, K, L_T, x),...
0.35,optimset('display', 'off'));
```

end

Die Funktion `fsolve` berechnet iterativ die Nullstelle der Funktion `Vorbereitung` in der Variablen `x`, wobei 0,35 der Startwert der Berechnung ist. Somit ist die Outputvariable `sigma` die implizite Volatilität für die fest gewählten Parameter $\alpha, \lambda_j, T_j, K, L_j(0)$.

Der m-File `Graph1` ist der letzte Schritt. Hier wird die Funktion `implVol` für $\alpha \in \{0,2,0,4,0,6,0,8\}$ und $K \in \{0,01,0,02, \dots, 0,1\}$ ausgewertet, die Ergebnisse werden in der Matrix `iV` abgespeichert und dann grafisch dargestellt. Bevor `implVol` verwendet werden kann, muss für ein jeweiliges α das zugehörige λ_j bestimmt werden. Nach Voraussetzung muss λ_j so gewählt werden, dass $\sigma_j^{imp} = 0,2$ für $K = L_j(0)$ gilt. Daher wird λ_j als Nullstelle der Funktion `Vorbereitung` in der entsprechenden Komponente ermittelt. Mit dem folgenden Quellcode erhält man die Matrix `iV`.

```
T=5;
L_T=0.06;
alpha=[0.2:0.2:0.8];
K=[0.01:0.01:0.1];
iV=zeros(length(alpha),length(K));
lambda=zeros(1,length(alpha));

for n=1:length(alpha)
    lambda(n)=fsolve(@(x)Vorbereitung(alpha(n), x, T, L_T, L_T,...
        0.2), 0.035,optimset('display', 'off'));

    for i=1:length(K)
        iV(n,i)=implVol(alpha(n), lambda(n), T, K(i), L_T);
    end
end
iV
```

Dabei wird in einer Zeile der Matrix für das zugehörige α der Verlauf der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von dem Strike festgehalten. Es ist zu beachten, dass der Fall $\alpha = 1$ getrennt betrachtet wird. Wie es schon in dem Abschnitt 4.2

erläutert wurde, ist die implizite Volatilität in diesem Fall konstant in K . Der Verlauf von σ_j^{imp} wird durch den Vektor `iV_a1` modelliert

```
iV_a1=ones(1,length(K));
iV_a1=iV_a1.*0.2;
```

Die Abbildung 4.1 ist die grafische Darstellung der Ergebnisse der Matrix `iV` und des Vektors `iV_a1` und wird durch

```
plot(K,iV(1,:),'-ro',K,iV(2,:),'-bo',K,iV(3,:),'-go',K,iV(4,:),...
'-mo',K,iV_a1,'-k')
hleg1 = legend('alpha=0,2','alpha=0,4','alpha=0,6','alpha=0,8',...
'alpha=1');
xlabel('Strike K')
ylabel('implizite Volatilität')
```

erzeugt.

A.2. Das numerische Erzeugen der Kurvenverläufe in der Abbildung 4.2

Die Abbildung 4.2 ist eine dreidimensionale grafische Darstellung der impliziten Volatilitätsfläche und wird durch den m-File `Graph2.m` erzeugt. Hier wird die implizite Volatilität für unterschiedliche Strikes $K \in [0,01,0,1]$ und Zinsanpassungstermine $T_j \in \{1, \dots, 30\}$ berechnet. `Graph2.m` baut wie `Graph1.m` auf den Funktionen `Vorbereitung.m` und `implVol.m` auf.

Die Tenorstruktur wird durch $T_{N-1} = 30$ und $\delta_j = 1$ für alle $1 \leq j \leq N - 1$ definiert. Um eine dreidimensionale Darstellung erzeugen zu können, müssen genauso viele Strikes wie Zeitpunkte betrachtet werden. Durch

```
[T,K]=meshgrid(1:1:30,0.01:0.09/29:0.1);
```

wird ein quadratisches Gitter, auf dem die implizite Volatilität berechnet wird, aufgespannt. Ferner wird $\alpha = 0,5$, $\lambda_j = 0,05$ und $L_j(0) = 0,05 + 0,002$ für alle $1 \leq j \leq N - 1$ gesetzt.

```

alpha=0.5;
lambda=0.05;
L_T=zeros(1,length(T));
for n=1:length(T)
    L_T(n)=0.05+n*0.002
end

```

Die implizite Volatilität für ein bestimmtes K und T_j wird mithilfe der Funktion `implVol` berechnet und in der Matrix `iV` abgespeichert.

```

iV=zeros(length(K),length(T));
for i=1:length(K)
for n=1:length(T)
    iV(i,n)=implVol(alpha, lambda, T(1,n), K(i,1), L_T(n));
end
end

```

Die Abbildung 4.2 wird schließlich durch

```

plot3(K,T,iV)
grid on
xlabel('Strike K')
ylabel('Zinsanpassungstermin T')
zlabel('implizite Volatilität')

```

erzeugt.

A.3. Daten-CD

Die MATLAB-Funktionen, die zur Erzeugung der Abbildung 1 und 2 dienen, sind auf der beigefügten CD enthalten.