

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

MASTERTHESIS IN DER FINANZMATHEMATIK

Importance Sampling für Diffusionsprozesse mit Anwendungen in der Derivatebewertung

Michael ESPENDILLER

BETREUER:

PD Dr. Volkert PAULSEN

INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STATISTIK
FACHBEREICH 10 - MATHEMATIK UND INFORMATIK
WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

22. JANUAR 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Einführung	9
1.1 Variationsrechnung	9
1.1.1 Fixierte Randpunkte	10
1.1.2 hinreichende Bedingungen	12
1.1.3 variable Randpunkte	17
1.1.4 Endpunkte auf Kurven	20
1.2 Theorie der großen Abweichungen	25
1.2.1 Varadhan	27
1.2.2 Transformation von LDPs	36
1.2.3 LDP für Diffusionsprozesse	38
1.2.4 Austrittszeiten	40
2 Monte Carlo Simulation und Importance Sampling	45
2.1 Monte Carlo Simulation	46
2.2 Importance Sampling	50
2.2.1 Importance Sampling für Diffusionsprozesse	52
3 Deterministische Maßwechsel	55
3.1 Anwendung: Call im Black-Scholes Modell	62
3.2 Digitale Optionen	68
3.3 Anwendung im Black-Scholes Modell	71
3.4 Anwendung: Barriereoptionen im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen Barrieren.	74
3.5 Anwendung: Zweiseitige Barriereoptionen im BS-Modell	78
4 Dynamische Maßwechsel via Preisapproximation	79
4.1 Call im Black-Scholes Modell	82

4.2 Dynamisches Importance Sampling für asiatische Optionen 89

Einleitung

Im Jahr 2011 lag nach Schätzungen der Bank for International Settlements (2012, [1]) die Höhe der global ausstehenden nominalen Volumina von over-the-counter (OTC) Derivaten bei ca.

1.354.646.000.000.000 US-Dollar

oder anders ausgedrückt, betrug das globale nominale Marktvolumen für OTC Derivate im Jahr 2011 ca. 1.35 Milliarden US-Dollar. Dabei verzeichnete der Derivatemarkt in den letzten Jahren starke Zuwachsraten.

Auch wenn ein Vergleich dieser Summe mit realwirtschaftlichen Größen nicht ohne Weiteres möglich ist, so zeigt sich doch, dass Derivate auf dem weltweiten Finanzmarkt eine große Rolle spielt.

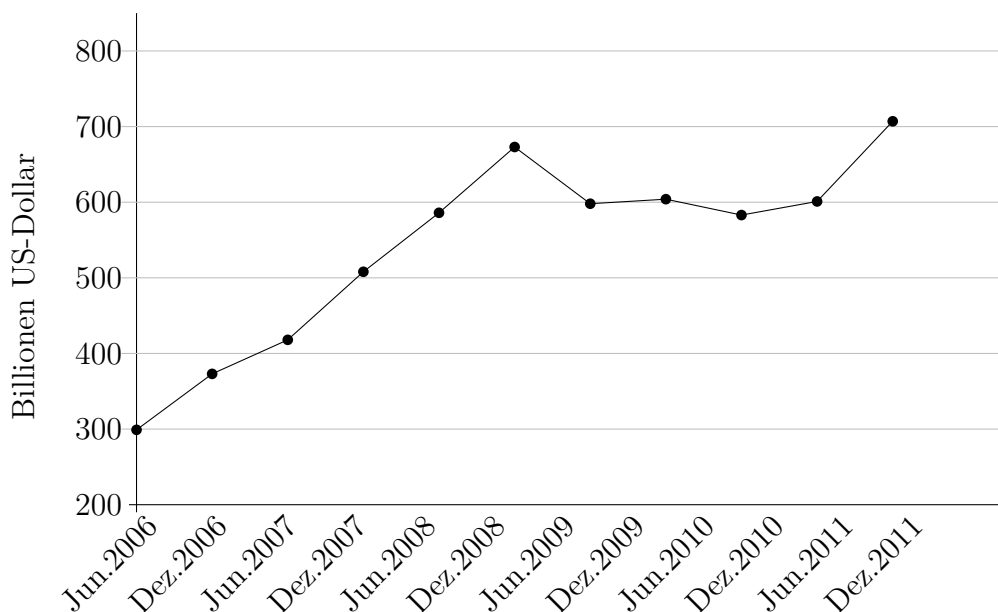


Abbildung: Global ausstehende Beträge von OTC Derivaten pro Halbjahr

Aus mathematischer Sicht besteht Bedarf an der Modellierung von Finanzmärkten und der Bewertung von Derivaten im Hinblick auf ihr Risikoprofil und ihren Wert. Je nach Wahl des Modells stehen für bestimmte Derivate analytische Formeln zur Verfügung (beispielsweise Callpreise im Black-Scholes Modell). In einigen Fällen kann ein Preis auch durch Lösung einer partiellen Differentialgleichung (PDE-Ansatz) oder durch Berechnung einer Fouriertransformierten bestimmt werden. Bei komplizierten Derivaten ist dies nicht ohne Weiteres möglich. In solchen Fällen kann eine Monte Carlo Simulation zur Ermittlung einer Näherungslösung angewandt werden.

Dieses Verfahren ist zwar sehr einfach umzusetzen allerdings im Vergleich zu den oben genannten Methoden nicht besonders effizient. Das zentrale Ziel dieser Arbeit ist die Verbesserung von Monte Carlo Simulationen. Dabei wird das Importance Sampling als Ansatz ausgewählt: Unter Anwendung der Formel von Bayes soll eine Verbesserung des Monte Carlo Schätzers durch eine Varianzreduktion nach einem Maßwechsel erreicht werden. Es gibt nun im Allgemeinen sehr viele Maßwechsel, die in Frage kommen. Nicht jeder dieser wird eine Varianzreduktion zur Folge haben. Es bleibt also noch ein Auswahlproblem zu lösen.

Zur Lösung des Maßwechselauswahlproblems werden nun heuristische Gütekriterien für Maßwechsel mit Hilfe der Theorie der großen Abweichungen und der Variationsrechnung entwickelt. Da es sich bei den vorgestellten Methoden lediglich um Heuristiken handelt, werden die Methoden durch umfangreiche Simulationen getestet und anschließend in Hinblick auf die Varianzreduktion des Monte Carlo Schätzers und den Rechenaufwand bewertet.

Zu Beginn dieser Arbeit wird in Kapitel 1 das Basiswissen für die Variationsrechnung und die Theorie der großen Abweichungen durch eine kompakte Zusammenfassung gegeben. Als erstes Ergebnis gelingt dabei die Herleitung eines Berechnungsverfahrens zur Bestimmung der Asymptotik der Austrittswahrscheinlichkeit von Diffusionsprozessen aus Gebieten mit differenzierbarem Rand.

In Kapitel 2 wird anschließend die Monte Carlo Simulation und das Importance Sampling für Diffusionsprozesse beschrieben. Dabei werden auch die technischen Herangehensweisen zur Durchführung von Maßwechseln gegeben. Diese sind im Wesentlichen die Formel von Bayes zur Bestimmung der Auswirkung von Maßwechseln auf Erwartungswerte sowie

Varianzen und der Satz von Cameron-Martin-Girsanov, der Maßwechsel für Diffusionsprozesse charakterisiert.

Dieses Wissen führt dann in Kapitel 3 zur Entwicklung der asymptotischen Optimalität als erstes Gütekriterium für Maßwechsel in Hinblick auf ihre Varianzreduktion bei der Monte Carlo Methode. Dabei werden Resultate zur Herleitung von asymptotisch optimalen Maßwechseln für das Black-Scholes Modell und Einfaktormodelle erzielt. Das Verfahren wird dabei für mehrere Fälle empirisch untersucht.

Als Alternative wird in Kapitel 4 eine Heuristik zur Bestimmung dynamischer Maßwechsel hergeleitet. Dieser kann bei Kenntnis des Preisprozesses und des Hedgeprozesses problemlos bestimmt werden. Da diese allerdings unbekannt sind, wird die Theorie der großen Abweichungen zur approximativen Ermittlung herangezogen. Das Vorgehen wird in einer Vergleichsanalyse im Black-Scholes Modell für eine Calloption getestet, um die Auswirkung der Approximation auf die Qualität des Maßwechsels zu bestimmen. Anschließend wird das Konzept auf asiatische Optionen erweitert.

Für viele Berechnung war es notwendig, auf das Computeralgebrasystem Maple zurückzugreifen. Zusammen mit den Quellcodes für die realisierten Simulationen finden sich die Worksheets auf dem beigelegten Datenträger.

1 Einführung

Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung in die mathematischen Grundlagen, die für das Verständnis dieser Arbeit notwendig sind. Für die Modellierung von Finanzmärkten sind Diffusionsprozesse wichtige Werkzeuge. Die spätere Anwendung der Theorie der großen Abweichung für solche Prozesse verlangt häufig die Lösung von Optimierungsproblemen über Funktionenräume. Vor einer Einführung in die Theorie der großen Abweichung werden zunächst die Techniken zur Lösung solcher Optimierungsprobleme vorgestellt.

1.1 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Minimierung von speziellen Funktionalen. Ein Funktional bezeichnet dabei eine Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, wobei X ein Raum reellwertiger Funktionen ist. Anders ausgedrückt ist ein Funktional eine „Funktion von Funktionen“. Ein Optimierungsproblem dieser Form taucht beispielsweise bei der Frage nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten auf. Für die spätere Anwendung treten sie vor allem bei der Berechnung von Ratenfunktionen und Erwartungswerten auf.

Die Variationsrechnung befasst sich mit solchen Fragestellungen. Dieses klassische¹ Themengebiet ist schon sehr gut erforscht und es gibt weitreichende Lösungsverfahren. Für eine weiterführende Recherche sind Gelfand und Fomin (1963, [10]) und Elsgolc (1962, [18]) zu empfehlen, die auch die Basis dieses Abschnittes bilden.

¹ Die Variationsrechnung ist auch als 23. Problem ein Bestandteil von Hilberts Liste. Er stellt dort die Frage, wie die Methoden der Variationsrechnung weiterentwickelt werden können.

Das Problem

Für $t_1 < t_2$ sei $F = F(t, x, y) : [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und sei $X \subseteq C^1[t_1, t_2]$ eine Menge differenzierbarer Funktionen. Betrachte nun das Funktional

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt.$$

Das Variationsproblem bezeichnet das Auffinden eines Minimums u^* von J , d. h. es ist folgendes Optimierungsproblem zu lösen

$$J(u^*) = \inf_{u \in X} J(u).$$

Eine einfache Interpretation besteht aus der Vorstellung von J als Kostenfunktion, die jeder differenzierbaren Funktion u die Kosten $J(u)$ zuordnet. Je nach dem, welche weiteren Bedingungen u erfüllen muss, unterscheiden sich die Lösungsverfahren für das Optimierungsproblem. Diese werden im Folgenden vorgestellt.

Zunächst setzen wir abkürzend folgende Notationen:

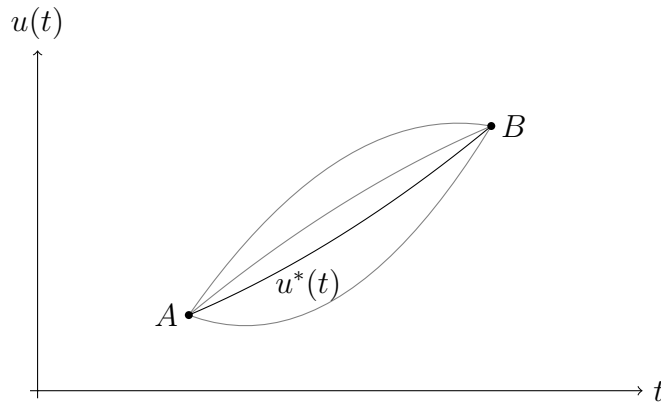
$$\begin{aligned} F_x(t, x, y) &:= \frac{d}{dx} F(t, x, y) & F_y(t, x, y) &:= \frac{d}{dy} F(t, x, y) \\ F_{xx}(t, x, y) &:= \frac{d^2}{dx^2} F(t, x, y) & F_{yy}(t, x, y) &:= \frac{d^2}{dy^2} F(t, x, y) \\ \dot{u}(t) &:= \frac{d}{dt} u(t) & \ddot{u}(t) &:= \frac{d^2}{dt^2} u(t). \end{aligned}$$

1.1.1 Fixierte Randpunkte

Es seien $t_1 < t_2$, $u_a, u_b \in \mathbb{R}$ und $A := (t_1, u_a)$, $B := (t_2, u_b)$ zwei feste Punkte auf der Ebene. Gesucht ist nun eine Funktion u , die die Punkte A und B verbindet und dabei das Funktional J minimieren. Dies entspricht dem Variationsproblem mit fixen Randpunkten

$$X := \{u \in C^1[t_1, t_2] \mid u(t_1) = u_a, u(t_2) = u_b\}$$

$$\inf_{u \in X} J(u).$$



Ähnlich wie in der Analysis können nun hinreichende und notwendige Bedingungen an ein Minimum formuliert werden. Das wichtigste Resultat ist die Euler-Lagrange Gleichung. Damit ist es möglich das Optimierungsproblem auf das Lösen von Systemen von Differentialgleichungen zu reduzieren.

Satz 1.1. *Eine Lösung u^* des Optimierungsproblems*

$$X := \{u \in C^1[t_1, t_2] \mid u(t_1) = u_a, u(t_2) = u_b\}$$

$$\inf_{u \in X} J(u) \tag{1.1}$$

erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung

$$F_x(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) - \frac{d}{dt} F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) = 0 \quad \text{für alle } t_1 \leq t \leq t_2. \tag{1.2}$$

Das Theorem übersetzt nun das Variationsproblem in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und liefert damit einen ersten möglichen Ansatz zur Bestimmung des Minimums. Zunächst wird die Euler-Lagrange Gleichung gelöst. Nach der Theorie der Differentialgleichungen werden die Lösungen im Allgemeinen von zwei Konstanten abhängen. Diese können dann zur Anpassung der Randbedingungen $u^*(t_1) = u_a$ und $u^*(t_2) = u_b$ genutzt werden. Existiert solch eine Funktion u^* , dann ist sie ein erster möglicher Kandidat für eine Minimalstelle. Beachte, dass die Euler-Lagrange Gleichung nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung an die Minima liefert.

Eine ausführliche Darstellung mitsamt Beweisen ist in Elsgolc (1963, [18], S. 14 ff) zu finden.

1.1.2 hinreichende Bedingungen

Ähnlich wie in der Analysis können nun hinreichende Bedingungen für Minima hergeleitet werden. Dabei werden lokale und globale Extrema unterschieden, welche mit jeweils unterschiedlichen Techniken zu untersuchen sind.

Für die späteren Anwendungen dieser Arbeit müssen globale Minima bestimmt werden. Allerdings ist es nicht immer möglich, diese Eigenschaft direkt nachzuweisen. Eine hinreichende Bedingung an F ist die Konvexität:

Lemma 1.2. *Erfüllt u^* die Euler-Lagrange Gleichung (1.2) und ist die Abbildung $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ konvex, dann ist u^* ein Minimierer für (1.1).*

Beweis. vgl. [3], S. 47 ff, Theorem 2.1 (2) und (3) □

Die Konvexitätsbedingung an F ist häufig verletzt. Deshalb sind noch weitere hinreichende Bedingungen notwendig, die sich allerdings als etwas schwieriger herausstellen.

Definition 1.3. *Die Weierstrassfunktion für das Funktional*

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

ist definiert als

$$E(t, x, p, y) := F(t, x, y) - F(t, x, p) - (y - p)F_y(t, x, y),$$

für alle $t_1 \leq t \leq t_2, x, y, p \in \mathbb{R}$.

Definition 1.4. *Es sei $u \in C^1[t_1, t_2]$ gegeben. Die Jacobi-Gleichung von F bezüglich u ist definiert als*

$$\left(F_{xx}(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{d}{dt} F_{xy}(t, u(t), \dot{u}(t)) \right) h(t) - \frac{d}{dt} \left(F_{yy}(t, u(t), \dot{u}(t)) \dot{h}(t) \right) = 0$$

für alle $t_1 \leq t \leq t_2$. Wir sagen, u erfüllt die Jacobi-Bedingung, falls eine Lösung h^* der Jacobi-Gleichung existiert, die $h^*(t_1) = 0$ und $h^*|_{(t_1, t_2]} \neq 0$ erfüllt.

Mit Hilfe der Jacobi-Bedingung und der Weierstrassfunktion können nun weitere hinreichende Bedingungen formuliert werden.

Satz 1.5. *Erfüllt u^* die Euler-Lagrange Gleichung, die Jacobi-Bedingung und gilt*

$$F_{yy}(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) > 0 \quad \text{für alle } t_1 \leq t \leq t_2,$$

so ist u^* ein lokales Minimum für (1.1).

Satz 1.6. Erfüllt u^* die Euler-Lagrange Gleichung, die Jacobi-Bedingung und gilt

$$F_{yy}(t, u(t), \dot{u}(t)) \geq 0 \quad (1.3)$$

für alle $t_1 \leq t \leq t_2$ und alle $u \in C^1[t_1, t_2]$, so ist u^* ein globales Minimum für (1.1).

Gleichung (1.3) wird auch Legendrebedingung genannt.

Satz 1.7. Erfüllt u^* die Euler-Lagrange Gleichung, die Jacobi-Bedingung und gilt

$$E(t, u(t), p, y) \geq 0 \quad (1.4)$$

für alle $t_1 \leq t \leq t_2$, $p, y \in \mathbb{R}$ und $u \in C^1[t_1, t_2]$, so ist u^* ein globales Minimum für (1.1).

Entsprechende Aussagen für Maximalstellen erhält man durch Übergang zu $-F$, was zu einer Umkehrung aller Ungleichheiten führt. Die Sätze 1.5, 1.6 und 1.7 sind lediglich Zusammenfassungen der für uns relevanten Aussagen. Es ist möglich, weitere hinreichende Bedingungen unter schwächeren Voraussetzungen zu folgern. So ist beispielsweise ausreichend, die Ungleichung (1.4) bzw. (1.3) für Funktionen $u \in C^1[t_1, t_2]$ zu fordern, die „nahe“ an u^* liegen. Eine weiterführende Übersicht und ein Lokalisationsbegriff für Funktionenräume ist beispielsweise in Elsgolc (1962, [18], S. 124 f) zu finden.

Beispiel

Es seien $s_0, y_1, r, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $y_1 > s_0$ und $2 \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) > r$. Betrachte das Funktional

$$F : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(t, x, y) = \left(\frac{y - rx}{\sigma x} \right)^2$$

Gesucht ist das Minimum des Funktionals

$$J : C^1[0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad J(u) := \int_0^T F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt,$$

wobei u in $A = (0, s_0)$ starten und in $B = (T, y_1)$ enden soll, d. h. es ist folgendes Optimierungsproblem zu lösen

$$X := \{u \in C^1[0, T] \mid u(0) = s_0, u(T) = y_1\}$$

1 Einführung

$$\inf_{u \in X} \int_0^T \left(\frac{\dot{u}(t) - ru(t)}{\sigma u(t)} \right)^2 dt.$$

Zunächst wird die Euler-Lagrange Gleichung von F ermittelt. Dazu werden einige Differentiale berechnet:

$$\begin{aligned} F_x(t, x, y) &= -2 \frac{(y - rx)r}{\sigma^2 x^2} - 2 \frac{(y - rx)^2}{\sigma^2 x^3} \\ F_y(t, x, y) &= 2 \frac{y - rx}{\sigma^2 x^2} \\ \frac{d}{dt} F_y(t, u(t), \dot{u}(t)) &= 2 \frac{\ddot{u}(t) - r\dot{u}(t)}{\sigma^2 (u(t))^2} - 4 \frac{(\dot{u}(t) - ru(t)) \dot{u}(t)}{\sigma^2 (u(t))^3}. \end{aligned}$$

Dies ergibt zusammengefasst die Euler-Lagrange Gleichung

$$0 = F_x(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{d}{dt} F_y(t, u(t), \dot{u}(t)) = 2 \frac{(\dot{u}(t))^2 - u(t)\ddot{u}(t)}{\sigma^2 (u(t))^3}.$$

Damit ist folgende nicht lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen

$$\dot{u}(t)^2 = u(t)\ddot{u}(t).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{u}(t)^2 &= u(t)\ddot{u}(t) \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= \frac{\ddot{u}(t)}{\dot{u}(t)} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln(u(t)) &= \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{\ddot{u}(t)}{\dot{u}(t)} = \frac{d}{dt} \ln(\dot{u}(t)) \\ \Leftrightarrow u(t) &= \dot{u}(t) \\ \Leftrightarrow u(t) &= c_1 \exp(c_2 t), \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

womit eine Lösung gefunden ist. Zusammen mit den Randbedingungen $u(0) = s_0$ und $u(T) = y_1$ ergibt sich ein Kandidat für die Minimalstelle

$$u^*(t) = s_0 \exp\left(\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_1}{s_0}\right) t\right).$$

Für den Nachweis der Jacobi-Bedingung muss etwas gerechnet werden:

$$F_{xx}(t, x, y) = 2 \frac{r^2}{\sigma^2 x^2} + 8 \frac{(y - rx)r}{\sigma^2 x^3} + 6 \frac{(y - rx)^2}{\sigma^2 x^4}$$

$$\begin{aligned}
F_{xy}(t, x, y) &= 2 \frac{r}{\sigma^2 x^2} + 4 \frac{y - rx}{\sigma^2 x^3} \\
F_{yy}(t, x, y) &= 2 \frac{1}{\sigma^2 x^2} \\
F_{xx}(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{d}{dt} F_{xy}(t, u(t), \dot{u}(t)) &= 2 \frac{-4r\dot{u}(t)u(t) + 9\dot{u}(t)^2 - 2u(t)\ddot{u}(t)}{\sigma^2 u(t)^4} \\
F_{yy}(t, u(t), \dot{u}(t)) &= \frac{2}{\sigma^2 u(t)^2}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von

$$u^*(t) = s_0 \exp\left(\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_1}{s_0}\right) t\right)$$

erhält man

$$\begin{aligned}
&\left(F_{xx}(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) - \frac{d}{dt} F_{xy}(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) \right) \\
&= 2 \frac{1}{\sigma^2 s_0^2} \left(\frac{y_1}{s_0} \right)^{-2t} \underbrace{\ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \left(-4r + 7 \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \right)}_{=:k} \\
&= 2 \frac{1}{\sigma^2 s_0^2} \left(\frac{y_1}{s_0} \right)^{-2t} k.
\end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\frac{d}{dt} (F_{yy}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot \dot{h}(t)) = \frac{1}{\sigma^2 s_0^2} \left(\frac{y_1}{s_0} \right)^{-2t} \left(4\dot{h}(t) \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) - 2\ddot{h}(t) \right)$$

ergibt sich die Jacobigleichung

$$\begin{aligned}
&\left(F_{xx}(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) - \frac{d}{dt} F_{xy}(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) \right) h(t) - \frac{d}{dt} (F_{yy}(t, u(t), \dot{u}(t)) \dot{h}(t)) &= 0 \\
\Leftrightarrow &2 \frac{1}{\sigma^2 s_0^2} \left(\frac{y_1}{s_0} \right)^{-2t} \left(k \cdot h(t) + 2\dot{h}(t) \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) - \ddot{h}(t) \right) &= 0 \\
\Leftrightarrow &-k \cdot h(t) - 2\dot{h}(t) \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) + \ddot{h}(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wird gelöst durch

$$h(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t),$$

1 Einführung

wobei

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \pm \sqrt{\ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right)^2 + k} \\ &= \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \pm \sqrt{\ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right)^2 + \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \left(-4r + 7 \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right)\right)} \\ &= \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \pm \sqrt{\underbrace{4 \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right) \left(-r + 2 \ln\left(\frac{y_1}{s_0}\right)\right)}_{>0}}\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Um die Jacobi-Bedingung zu erfüllen, benötigen wir eine Lösung, die aus der Null startet und $h(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, T]$ erfüllt. Es folgt aus $h(0) = 0$ direkt $c_1 + c_2 = 0$. Wähle willkürlich $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$. Damit ist eine Lösung der Jacobi-Gleichung durch

$$h^*(t) = \exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)$$

gefunden, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, folgt direkt

$$h^*(t) \neq 0$$

für alle $t > 0$. Die Jacobi-Bedingung an die potentielle Minimalstelle u^* ist damit erfüllt.

Zusammen mit der Legendre-Bedingung

$$F_{yy}(t, x, y) = 2 \frac{1}{\sigma^2 x^2} > 0$$

folgt wegen Satz 1.6, dass u^* bereits ein globales Minimum ist.

Durch Einsetzen kann der Wert des Minimums bestimmt werden. Es gilt zunächst

$$\dot{u}^*(t) = \log\left(\frac{y_1}{s_0}\right) u^*(t)$$

und damit

$$\left(\frac{\dot{u}^*(t) - ru^*(t)}{\sigma u^*(t)}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_1}{s_0}\right) u^*(t) - ru^*(t)}{\sigma u^*(t)}\right)^2 = \left(\frac{\log\left(\frac{1}{T} \frac{y_1}{s_0}\right) - r}{\sigma}\right)^2$$

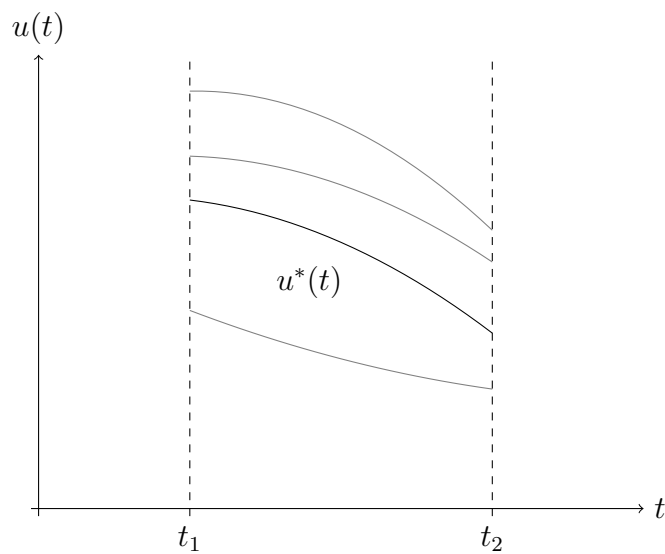
Der Wert des Minimums ist damit

$$\begin{aligned}
J(u^*) &= \int_0^T \left(\frac{\dot{u}^*(t) - ru^*(t)}{\sigma u^*(t)} \right)^2 dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_1}{s_0}\right) - r}{\sigma} \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{T\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y_1}{x}\right) - rT \right)^2.
\end{aligned}$$

1.1.3 variable Randpunkte

Das Optimierungsproblem ändert sich, wenn die Endpunkte A und B von u lediglich auf den gegebenen Geraden $t = t_1$ und $t = t_2$ liegen müssen, d. h. nun ist die kosteneffizienteste Funktion zwischen zwei senkrechten Geraden gesucht. Dies entspricht dem Variationsproblem

$$\inf_{u \in C^1[t_1, t_2]} J(u).$$



Es gelingt wieder, das Ausgangsproblem auf die Lösung von Differentialgleichungen zu reduzieren.

Satz 1.8. *Eine Lösung u^* des Optimierungsproblems*

$$\inf_{u \in C^1[t_1, t_2]} J(u) \tag{1.5}$$

1 Einführung

erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung (1.2) und die Bedingungen

$$F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t))|_{t=t_1} = 0 \qquad F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t))|_{t=t_2} = 0. \quad (1.6)$$

Ein möglicher Ansatz zur Bestimmung der Lösung im Falle von zwei flexibler Randpunkte besteht zunächst wieder in der Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Anschließend können die zwei weiteren Gleichungen (1.6) zusammen mit den auftretenden freien Konstanten zur Anpassung der Randbedingungen genutzt werden. Ist eine solche Funktion u^* gefunden, ist sie ein möglicher Kandidat für ein Minimum. Für den Fall eines flexiblen rechten (linken) und eines variablen linken (rechten) Endpunktes, erfüllt u^* lediglich die rechte (linke) Gleichung von (1.6) und zusätzlich die fixe Endpunktbedingung $u^*(t_2) = u_b$ (bzw. $u^*(t_1) = u_a$). Zusätzliche Details sind in Elsgolc (1963, [18], S. 64 ff) zu finden.

Beispiel

Es sei $T > 0$ und $x_0, r, \sigma, K \in \mathbb{R}$ und setze $a := r - \frac{1}{2}\sigma^2$. Betrachte das Funktional

$$F(t, x, y) := 2x_0 \frac{(\sigma y + a) \exp(\sigma x + at)}{x_0 \exp(\sigma x + at) - K} - y^2.$$

Gesucht ist das Maximum des Funktionals

$$J : C^1[0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \qquad J(u) := \int_0^T F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

mit linkem fixen Endpunkt $A = (0, 0)$ und rechtem variablen Endpunkt auf der Geraden $t = T$, d. h. es ist folgendes Optimierungsproblem zu lösen

$$X := \{u \in C^1[0, T] \mid u(t_1) = 0\}$$

$$\sup_{u \in X} \int_0^T F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt.$$

Zunächst muss die Euler-Lagrange Gleichung von F ermittelt werden. Dazu werden die Differentiale berechnet. Eine kleine Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} F_x(t, x, y) &= 2 \frac{x_0 (\sigma y + a) \sigma e^{\sigma x + at}}{x_0 e^{\sigma x + at} - K} \\ &\quad - 2 \frac{x_0^2 (\sigma y + a) (e^{\sigma x + at})^2 \sigma}{(x_0 e^{\sigma x + at} - K)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_y(t, x, y) &= 2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma x + at}}{x_0 e^{\sigma x + at} - K} - 2y \\
\frac{d}{dt} F_y(t, u(t), \dot{u}(t)) &= 2 \frac{x_0 \left(\sigma \frac{d}{dt} u(t) + a \right) \sigma e^{\sigma u(t) + at}}{x_0 e^{\sigma u(t) + at} - K} \\
&\quad - 2 \frac{x_0^2 \left(\sigma \frac{d}{dt} u(t) + a \right) \left(e^{\sigma u(t) + at} \right)^2 \sigma}{\left(x_0 e^{\sigma u(t) + at} - K \right)^2} - 2 \frac{d^2}{dt^2} u(t).
\end{aligned}$$

Ein einfacher Vergleich zeigt nun, dass sich in der Euler-Lagrange Gleichung fast alle Terme gegenseitig eliminieren. Man erhält

$$0 = F_x(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{d}{dt} F(t, u(t), \dot{u}(t)) = 2 \frac{d^2}{dt^2} u(t).$$

Diese Differentialgleichung kann mittels Integration gelöst werden. Die Lösung ist gegeben durch

$$u^*(t) = c_1 t + c_2$$

für zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Weiter gilt wegen dem linken fixen Endpunkt $u(0) = 0$ und damit

$$c_2 = 0.$$

Um c_1 zu bestimmen kann Satz 1.8 herangezogen werden. Demnach muss die Bedingung (1.6) für den rechten flexiblen Endpunkt erfüllt sein, d. h.

$$\begin{aligned}
F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) &= \left[2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma u^*(t) + at}}{x_0 e^{\sigma u^*(t) + at} - K} - 2 \dot{u}^*(t) \right]_{t=T} \\
&= 2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma c_1 T + aT}}{x_0 e^{\sigma c_1 T + aT} - K} - 2 c_1 = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Die Lösung für diese Gleichung ist eindeutig, falls sie existiert. Die Eindeutigkeit ist leicht mit mitteln der Analysis nachzuweisen. Die Lösung ist im Allgemeinen numerisch nach c_1 zu lösen. Ist dies gemacht, so bleibt zu klären, ob eine Lösung u^* tatsächlich eine Maximalstelle ist. Dazu muss die Jacobi-Bedingung untersucht werden. Es kann nachgerechnet werden, dass

$$F_{xx}(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{d}{dt} F_{xy}(t, u(t), \dot{u}(t)) = 0 \quad \text{und} \quad F_{yy}(t, u(t), \dot{u}(t)) = 0$$

für alle $u \in C^1[0, T]$ und insbesondere für u^* gilt. Damit ist die Jacobi-Bedingung 1.4 trivialerweise erfüllt. Weiter berechnet sich die Weierstrassfunktion für beliebige $u \in$

1 Einführung

$C^1[t_1, t_2]$ und $y \in \mathbb{R}$ zu

$$E(t, u(t), p, y) = -(y - p)^2 \leq 0,$$

womit alle Bedingungen für Satz 1.7 erfüllt sind und das Funktional J damit in u^* ein globales Maximum annimmt.

1.1.4 Endpunkte auf Kurven

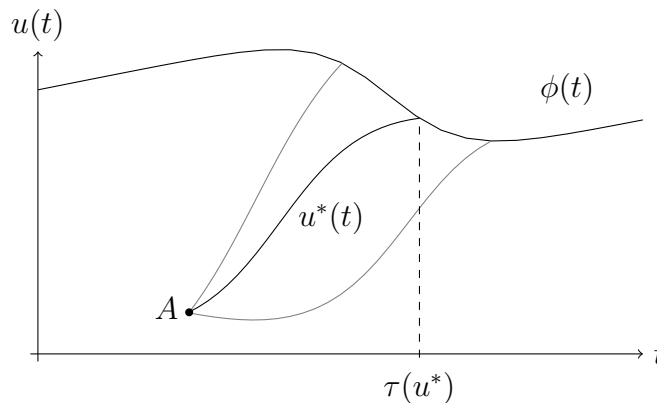
Es ist auch nötig, ein Verfahren zur Bestimmung des günstigsten Weges von einem Startpunkt zu einer Kurve zu ermitteln. Dazu seien eine C^1 -Kurve $\phi : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $A = (t_1, u_a)$ gegeben. Für eine Funktion $u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den ersten Schnittpunkt mit ϕ als

$$\tau(u) := \inf\{t \in [t_1, t_2] \mid u(t) = \phi(t)\}$$

ohne dabei explizit ϕ in die Notation mit aufzunehmen und setzen $\tau(u) = \infty$, falls kein Schnittpunkt existiert. Das Variationsproblem ist nun gegeben durch

$$X := \{u \in C^1[t_1, t_2] \mid u(t_1) = u_a, \tau(u) \leq t_2\}$$

$$\inf_{u \in X} \int_{t_1}^{\tau(u)} F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt.$$



Auch in diesem Fall kann ein System von Differentialgleichungen hergeleitet werden.

Satz 1.9. *Eine Lösung u^* des Optimierungsproblems*

$$X := \{u \in C^1[t_1, t_2] \mid u(t_1) = u_a, \tau(u) \leq t_2\}$$

$$\inf_{u \in X} \int_{t_1}^{\tau(u)} F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung (1.2) und die transversal condition

$$\left[F(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) - (\dot{\phi}(t) - \dot{u}^*(t)) F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) \right]_{t=\tau(u^*)} = 0. \quad (1.8)$$

Das Lösungsverfahren für dieses Variationsproblem besteht zunächst in der Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Anschließend kann der fixe linke Endpunkt und die *transversal condition* genutzt werden, um die zwei auftretenden Konstanten zu ermitteln. Existiert solch eine Funktion u^* , dann ist sie ein erster Kandidat für ein Minimum.

Beispiel

Es seien $T > 0$, $\alpha, \mu, \sigma, \theta, x_0, K_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < K_0$ gegeben. Betrachte das Funktional und die C^1 -Kurve

$$\begin{aligned} F : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & & F(t, x, y) &= \left(\frac{y - \theta(\mu - x)}{\sigma} \right)^2 \\ \phi : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} & \phi(t) &= K_0 \exp(\alpha t). \end{aligned}$$

Gesucht ist die günstigste Verbindung zwischen dem Punkt $A = (0, x_0)$ und der C^1 -Kurve ϕ im Intervall $[0, T]$, d. h. es ist folgendes Optimierungsproblem zu lösen

$$X := \{u \in C^1[0, T] \mid u(0) = x_0, \tau(u) \leq T\}$$

$$\inf_{u \in X} \int_0^{\tau(u)} F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt.$$

Bevor mit der Berechnung möglicher Extremstellen begonnen wird, wird die Konvexität der Funktion F untersucht:

Dafür ist es hinreichend, die positive Definitheit der Hessematrix von F zu beweisen.

Man rechnet nach:

$$\begin{aligned} F_x(t, x, y) &= 2 \frac{(y - \theta(\mu - x)) \theta}{\sigma^2} & F_y(t, x, y) &= 2 \frac{y - \theta(\mu - x)}{\sigma^2} \\ F_{xx}(t, x, y) &= 2 \frac{\theta^2}{\sigma^2} & F_{xy}(t, x, y) &= 2 \frac{\theta}{\sigma^2} \\ F_{yx}(t, x, y) &= 2 \frac{\theta}{\sigma^2} & F_{yy}(t, x, y) &= 2 \frac{1}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

1 Einführung

Die Hessematrix von F ist damit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 \frac{\theta^2}{\sigma^2} & 2 \frac{\theta}{\sigma^2} \\ 2 \frac{\theta}{\sigma^2} & 2 \frac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Diese symmetrische Matrix besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 := \frac{2 + 2\theta^2}{\sigma^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 := 1.$$

Da beide Eigenwerte positiv sind, ist die Matrix positiv definit und die Funktion $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ für alle $t \in [0, T]$ konvex. Ist dann eine Funktion u^* gefunden, die die Euler-Lagrange Gleichung erfüllt, so ist sie nach Lemma 1.2 bereits ein Minimum.

Berechnen wir nun mögliche Kandidaten für die Extremstellen. Dazu wird die Euler-Lagrange Gleichung hergeleitet:

$$\begin{aligned} F_x(t, x, y) &= 2 \frac{(y - \theta(\mu - x))\theta}{\sigma^2} \\ F_y(t, x, y) &= 2 \frac{y - \theta(\mu - x)}{\sigma^2} \\ \frac{d}{dt} F_y(t, u(t), \dot{u}(t)) &= 2 \frac{\ddot{u}(t) + \theta \dot{u}(t)}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

womit nun folgende Differentialgleichung zu lösen ist:

$$2 \frac{(\dot{u}(t) - \theta(\mu - u(t)))\theta}{\sigma^2} - 2 \frac{\ddot{u}(t) + \theta \dot{u}(t)}{\sigma^2} = 0.$$

Umgeformt ergibt dies eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{u}(t) - \theta^2 u(t) = -\theta^2 \mu.$$

Der homogene Teil wird gelöst durch

$$u_{hom}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t),$$

wobei $\lambda_{1,2}$ die Lösungen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \theta^2$$

sind, welches die Lösungen $\lambda_1 = \theta$ und $\lambda_2 = -\theta$ hat. Das ergibt

$$u_{hom}(t) = c_1 \exp(\theta t) + c_2 \exp(-\theta t).$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung wird die Störfunktion $-\theta^2 \mu$ betrachtet. Dies entspricht einem Polynom vom Grad 0, womit der Störterm $u_{stör}$ eine Konstante ist

$$u_{stör}(t) = A_0 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung u der inhomogenen Gleichung hat damit die Form

$$u(t) = u_{hom}(t) + u_{stör}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) + A_0.$$

Nun gilt mit einfachem nachrechnen

$$u(t) = \frac{\ddot{u}(t)}{\theta^2} + A_0.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$-\theta^2 \mu = \ddot{u}(t) - \theta^2 u(t) = \ddot{u}(t) - \ddot{u}(t) - \theta^2 A_0 = -\theta^2 A_0$$

und damit $A_0 = \mu$

Zusammen mit der linken Randpunktbedingung $u(0) = x_0$ folgt

$$\begin{aligned} x_0 &= u(0) \\ \Leftrightarrow x_0 &= c_1 + c_2 + \mu \\ \Leftrightarrow c_1 &= x_0 - c_2 - \mu. \end{aligned}$$

Nun kann die transversal condition (1.8) zur Bestimmung von c_2 genutzt werden. Dazu wird berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \alpha K_0 \exp(\alpha t) \\ \dot{u}^*(t) &= -\theta e^{-\theta t} c_2 + \theta e^{\theta t} (x_0 - c_2 - \mu) \\ F(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) &= \frac{\left(-\theta e^{-\theta t} c_2 + \theta e^{\theta t} (x_0 - c_2 - \mu) - \theta \left(-e^{-\theta t} c_2 - e^{\theta t} (x_0 - c_2 - \mu)\right)\right)^2}{\sigma^2} \\ F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) &= \frac{-2\theta e^{-\theta t} c_2 + 2\theta e^{\theta t} (x_0 - c_2 - \mu) - 2\theta \left(-e^{-\theta t} c_2 - e^{\theta t} (x_0 - c_2 - \mu)\right)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

1 Einführung

Nach Einsetzen und Vereinfachen hat die transversal condition (1.8) nun die Darstellung

$$\begin{aligned} 0 &= \left[F(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) - (\dot{\phi}(t) - \dot{u}^*(t)) F_y(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) \right]_{t=\tau(u^*)} \\ &= -4 \frac{\theta e^{\theta \tau(u^*)} (-x_0 + c_2 + \mu) (K_0 \alpha e^{\alpha \tau(u^*)} + \theta e^{-\theta \tau(u^*)} c_2)}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Es kommen zwei mögliche Lösungen in Frage:

$$x_2 = x_0 - \mu \quad \text{oder} \quad c_2 = -\frac{K_0 \alpha}{\theta} \exp((\alpha + \theta)\tau(u^*))$$

Für beide Fälle müssen noch die Schnittpunkte $\tau(u^*)$ berechnet werden. Im ersten Fall gilt

$$\begin{aligned} u^*(\tau(u^*)) &= \phi(\tau(u^*)) \\ \Leftrightarrow -\theta \exp(-\theta \tau(u^*)(x_0 - \mu)) + \mu &= K_0 \exp(\alpha \tau(u^*)). \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ist die relevante Gleichung

$$\begin{aligned} u^*(\tau(u^*)) &= \phi(\tau(u^*)) \\ \Leftrightarrow -\frac{K_0 \alpha e^{\alpha \tau(u^*)}}{\theta} + e^{\theta \tau(u^*)} \left(x_0 + \frac{K_0 \alpha e^{\alpha \tau(u^*)}}{\theta e^{-\theta \tau(u^*)}} - \mu \right) + \mu &= K_0 e^{\alpha \tau(u^*)}. \end{aligned}$$

Dies ist im Allgemeinen numerisch nach $\tau(u^*)$ aufzulösen. Für die Parameter

$$\begin{array}{lll} \theta = 1 & \mu = 0.25 & x_0 = 0.2 \\ \sigma = 0.1 & \alpha = 0.001 & K_0 = 0.4 \end{array}$$

ist die erste Gleichung nicht lösbar. Die numerische Lösung der zweiten Gleichung führt zu einem Schnittpunkt

$$\tau(u^*) = 4.847106473.$$

Dies eingesetzt in die Extremalstelle liefert

$$u^*(t) = -0.05119607392 e^{-t} + 0.0011960739 e^t + 0.25,$$

welche aufgrund der Konvexität von F bereits ein Minimum ist. Dabei beträgt der Wert des Minimums

$$\int_0^{\tau(u^*)} F(t, u^*(t), \dot{u}^*(t)) dt = 2.320771837.$$

1.2 Theorie der großen Abweichungen

Die Theorie großer Abweichungen beschäftigt sich mit Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse. Als Hauptreferenz wird in diesem Abschnitt das Buch von Dembo und Zeitouni (1993, [6]) genutzt, was sowohl als Einführung als auch als Nachschlagewerk für die Theorie der großen Abweichungen zu empfehlen ist. Weitere Quellen zu diesem Themengebiet sind Deuschel und Stroock (1989, [7]) und Freidlin und Wentzell (1998, [9]).

Die Techniken werden hier überwiegend auf Diffusionsprozesse angewandt. Auf eine ausführliche Vorstellung großer Abweichungen für endlichdimensionale Räume wird daher verzichtet. Als wichtigste Werkzeuge werden sich das Theorem von Varadhan und die Theorien von Freidlin-Wentzell herausstellen.

Gegen Ende dieses Abschnittes werden dann Prinzipien der Variationsrechnung in Kombination mit der Freidlin-Wentzell Theorie auf Austrittszeiten für Diffusionsprozesse angewandt. Das liefert eine Strategie zur Ermittlung des Grenzverhaltens von Austrittswahrscheinlichkeiten für eine große Klasse von Prozessen und resultiert von Fall zu Fall in einem einfach zu realisierenden Algorithmus.

Setup

Für einen topologischen Raum (\mathcal{X}, τ) bleibt die Topologie häufig unbenannt und er wird abkürzend nur mit \mathcal{X} bezeichnet. Um Wahrscheinlichkeitstheorie auf \mathcal{X} betreiben zu können, muss zusätzlich eine σ -Algebra angegeben werden. Dazu ist die vervollständigte Borel σ -Algebra $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ geeignet, d. h. die kleinste σ -Algebra bezüglich der alle offenen Mengen von \mathcal{X} messbar sind und zusätzlich enthält $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ alle Teilmengen von Nullmengen.

In der Finanzmathematik sind reellwertige zeitstetige Prozesse für die Modellierung von Finanzmärkten vonnöten. Die Menge alle stetigen Funktionen $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird mit $C[0, T]$ bezeichnet. In der folgenden Anwendung ist $n \in \mathbb{N}$ häufig klar und wird

1 Einführung

daher nicht in der Notation erwähnt. Im Folgenden sei $C[0, T]$ immer mit der Metrik $d(\varphi, \psi) := \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_t - \psi_t|$ versehen. Eine Folge $(\varphi^n)_n$ konvergiert in $C[0, T]$ genau dann gegen φ , falls

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_t^n - \varphi_t| \rightarrow 0.$$

Deshalb nennt man die von d induzierte Topologie auf $C[0, T]$ auch die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Wir kommen zu den grundlegenden Definitionen:

Definition 1.10. *Es sei $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ eine Funktion.*

(1) *Die Funktion I heißt Ratenfunktion, falls I von unten halbstetig ist, d. h. die Mengen*

$$\{x \in \mathcal{X} \mid I(x) \leq M\}$$

sind für alle $M \geq 0$ abgeschlossen.

(2) *Die Funktion I heißt gute Ratenfunktion, falls für alle $M \geq 0$ die Mengen*

$$\{x \in \mathcal{X} \mid I(x) \leq M\}$$

kompakt sind.

In Hausdorff-Räumen sind kompakte Mengen auch abgeschlossen. In diesem Fall ist also jede gute Ratenfunktion auch eine Ratenfunktion. Beispielsweise ist dies für metrische Räume und damit insbesondere für den Raum $C[0, T]$ automatisch erfüllt.

Definition 1.11. *(Large Deviation Principle) Es sei \mathcal{X} ein topologischer Raum mit σ -Algebra \mathcal{B} und $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ eine Ratenfunktion. Eine Familie $(\mu_\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ erfüllt das Large Deviation Principle (LDP) mit Ratenfunktion I falls*

$$-\inf_{x \in \dot{B}} I(x) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(B) \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(B) \leq -\inf_{x \in \bar{B}} I(x)$$

für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt.

Die mittlere Ungleichung ist in jedem Fall erfüllt. Das ist ein einfaches Resultat der Analysis. Für Beweise ist es häufig von Vorteil, folgende Äquivalenz zu nutzen:

Lemma 1.12. *Die Familie $(\mu_\epsilon)_\epsilon$ erfüllt das LDP mit Ratenfunktion I genau dann, wenn folgende beide Schranken erfüllt sind:*

Für alle offenen $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$-\inf_{x \in B} I(x) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(B) \quad (\text{untere Schranke}).$$

Für alle abgeschlossenen $A \in \mathcal{B}$ gilt

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) \leq -\inf_{x \in A} I(x) \quad (\text{obere Schranke}).$$

Beweis. Die Hinrichtung folgt direkt aus $\overset{\circ}{B} = B$ für alle offenen Mengen und $\overline{A} = A$ für alle abgeschlossenen Mengen. Die linke Ungleichung der Rückrichtung folgt mit $\overset{\circ}{B} \subseteq B$ direkt aus der Monotonie des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mu_\epsilon(\overset{\circ}{B}) \leq \mu_\epsilon(B)$ und der Monotonie des Logarithmus

$$-\inf_{x \in \overset{\circ}{B}} I(x) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\overset{\circ}{B}) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(B)$$

Die zweite Ungleichung folgt analog. □

Das LDP findet häufig Anwendung bei Zufallsvariablen. Verkürzend definieren wir daher, dass die Familie von Zufallsvariablen $(X^\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ das LDP erfüllt, falls dies für die Maße $\mathbb{P}_\epsilon := \mathbb{P} \circ (X^\epsilon)^{-1}$ der Fall ist.

Die Ratenfunktion einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_\epsilon)_\epsilon$ nimmt nun eine zentrale Position in der Theorie der großen Abweichungen an. Ist sie bekannt, so stehen viele Werkzeuge zur Bestimmung von Asymptotiken zur Verfügung. Dies wird nun im nächsten Abschnitt vorgestellt. Anschließend bleibt noch die Frage zu klären, inwiefern Ratenfunktionen bestimmt werden können. Dies wird dann im zweiten Teil dieses Kapitels bearbeitet.

1.2.1 Varadhan

In Anlehnung an an Dembo und Zeitouni (1993, [6]) formulieren und beweisen wir nun einen der fundamentalsten Sätze der Theorie großer Abweichungen. Ist die Ratenfunktion einer Familie $(X^\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ bekannt, so kann unter bestimmten Voraussetzungen damit das Grenzverhalten $\epsilon \rightarrow 0$ von Erwartungswerten unter stetigen Funktionen bestimmt werden.

1 Einführung

Folgendes Lemma ist dabei von Vorteil und wird im Laufe noch häufiger angewandt:

Lemma 1.13. *Es sei $N \in \mathbb{N}$ und für jedes $\epsilon > 0$ seien $a_\epsilon^1, \dots, a_\epsilon^N \geq 0$ positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\sum_{i=1}^N a_\epsilon^i \right) = \max_{i=1}^N \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log a_\epsilon^i.$$

Beweis. Da der Logarithmus monoton wächst, gilt

$$\max_{i=1}^N \log a_\epsilon^i \leq \log \left(\sum_{i=1}^N a_\epsilon^i \right) \leq \log \left(\max_{i=1}^N N a_\epsilon^i \right) = \log N + \log \left(\max_{i=1}^N a_\epsilon^i \right).$$

Es folgt daher

$$0 \leq \log \left(\sum_{i=1}^N a_\epsilon^i \right) - \max_{i=1}^N \log a_\epsilon^i \leq \log N.$$

Nun ist N fest und daher erhalten wir $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log N = 0$. Dann folgt durch Multiplikation mit ϵ und anschließender Grenzwertbildung

$$0 \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\epsilon \log \left(\sum_{i=1}^N a_\epsilon^i \right) - \max_{i=1}^N \epsilon \log a_\epsilon^i \right) \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log N = 0.$$

Es ergibt sich die Behauptung mit

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\sum_{i=1}^N a_\epsilon^i \right) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \max_{i=1}^N \log a_\epsilon^i = \max_{i=1}^N \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log a_\epsilon^i.$$

□

Theorem 1.14 (Varadhan). *Erfülle $(X^\epsilon)_\epsilon$ das LDP auf \mathcal{X} mit guter Ratenfunktion $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$. Es sei $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} = -\infty. \quad (1.9)$$

Dann gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\varphi(X^\epsilon)/\epsilon} = \sup_{x \in \mathcal{X}} [\varphi(x) - I(x)]. \quad (1.10)$$

Der Beweis wird in drei kleinere Teile zerlegt. Betrachte folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp(\varphi(X^\epsilon)/\epsilon) &\stackrel{(\star)}{\leq} \sup_{x \in \mathcal{X}} [\varphi(x) - I(x)] \\
 &\stackrel{(\star\star)}{\leq} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp(\varphi(X^\epsilon)/\epsilon) \\
 &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp(\varphi(X^\epsilon)/\epsilon).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt Varadhans Theorem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp(\varphi(X^\epsilon)/\epsilon) = \sup_{x \in \mathcal{X}} [\varphi(x) - I(x)].$$

Es muss im Folgenden (\star) und $(\star\star)$ bewiesen werden.

Zunächst kann für stetige und beschränkte Funktionen die Bedingung (1.9) umformuliert werden.

Lemma 1.15. *Es sei $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ wieder eine stetige Funktion. Für Bedingung (1.9) ist folgendes hinreichend: Es existiert ein $\gamma > 1$, so dass*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\gamma}{\epsilon} \varphi(X^\epsilon)} < \infty. \tag{1.11}$$

Insbesondere wird (1.11) von allen stetigen und nach oben beschränkten Funktionen erfüllt.

Beweis. Zunächst wird der Zusatz bewiesen: Es sei φ eine stetige und nach oben beschränkte Funktion. Dann existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) \leq K$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{\gamma}{\epsilon} \varphi(X^\epsilon)\right) &\leq \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{\gamma}{\epsilon} K\right) \\
 &= \epsilon \log \exp\left(\frac{\gamma}{\epsilon} K\right) \\
 &= \epsilon \frac{\gamma}{\epsilon} K \\
 &= \gamma K < \infty.
 \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann für beliebig gewähltes $\gamma > 1$. Nun zur eigentlichen Aussage:

1 Einführung

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig und setze $Z^\epsilon := \exp(\frac{\varphi(X^\epsilon) - M}{\epsilon})$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} Z^\epsilon \geq 1 &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{\varphi(X^\epsilon) - M}{\epsilon}\right) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\varphi(X^\epsilon) - M}{\epsilon} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(X^\epsilon) \geq M. \end{aligned}$$

Ist nun $\gamma > 1$ wie in (1.11) gewählt, dann folgt

$$\begin{aligned} e^{-\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{E}(\exp\left(\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}\right) 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}}) &= \mathbb{E}(\exp\left(\frac{\varphi(X^\epsilon) - M}{\epsilon}\right) 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}}) \\ &= \mathbb{E}(Z^\epsilon 1_{\{Z^\epsilon \geq 1\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(Z^\epsilon)^\gamma \\ &= \mathbb{E} \exp\left(\gamma \frac{\varphi(X^\epsilon) - M}{\epsilon}\right) \\ &= \exp\left(-\gamma \frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{E}(\exp\left(\frac{\gamma \varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}\right)). \end{aligned}$$

Damit ergibt nun eine kleine Rechnung:

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}\right) 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \exp\left(\frac{M}{\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \exp\left(\frac{M}{\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{\gamma M}{\epsilon}\right) \mathbb{E} \exp\left(\frac{\gamma}{\epsilon} \varphi(X^\epsilon)\right) \\ &= (1 - \gamma)M + \underbrace{\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{\gamma}{\epsilon} \varphi(X^\epsilon)\right)}_{< \infty \text{ nach (1.11)}}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt nun $\gamma > 1$ und damit $\lim_{M \rightarrow \infty} (1 - \gamma)M = -\infty$. Mit dem Grenzübergang $M \rightarrow \infty$ folgt dann die Behauptung. \square

Es wird nun $(\star\star)$ bewiesen.

Lemma 1.16. *Es sei $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ von unten halbstetig und erfülle $(X^\epsilon)_\epsilon$ das LDP mit guter Ratenfunktion $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$. Dann gilt:*

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}\right) \geq \sup_{x \in \mathcal{X}} (\varphi(x) - I(x)).$$

Beweis. Es seien $x \in \mathcal{X}$ und $\delta > 0$ beliebig. Da φ von unten halbstetig ist, existiert eine

offene Umgebung U von x , so dass

$$\inf_{y \in U} \varphi(y) \geq \varphi(x) - \delta.$$

Zusammen mit der Monotonie von \log , der Positivität von \exp und der oberen Schranke des LDPs für $(X^\epsilon)_\epsilon$ folgt damit:

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} &\geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in U\}} \\ &\geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\inf_{y \in U} \varphi(y)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in U\}} \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log e^{\frac{\inf_{y \in U} \varphi(y)}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \in U) \\ &= \inf_{y \in U} \varphi(y) + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(X^\epsilon \in U) \\ &\stackrel{LDP}{\geq} \inf_{y \in U} \varphi(y) - \inf_{y \in U} I(y) \\ &\geq \varphi(x) - I(x) - \delta. \end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ und $x \in \mathcal{X}$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Es wird nun (\star) bewiesen.

Lemma 1.17. *Es sei $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ von unten halbstetig und gelte (1.9). Erfülle $(X^\epsilon)_\epsilon$ die untere Schranke des LDP mit guter Ratenfunktion $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$. Dann gilt*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp(\varphi(X^\epsilon)/\epsilon) \leq \sup_{x \in \mathcal{X}} [\varphi(x) - I(x)].$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma zunächst für beschränkte φ . Der allgemeine Fall folgt dann durch Übergang zu $\varphi_M := \varphi \wedge M$ für $M < \infty$ und einer kurzen Rechnung am Ende.

Sei also φ beschränkt, etwa $\sup_{x \in \mathcal{X}} \varphi(x) \leq M < \infty$. Insbesondere erfüllt φ dann wegen $\log 0 := -\infty$ die Bedingung (1.9). Seien $\alpha < \infty$ und $\delta > 0$ beliebig. Da I eine gute Ratenfunktion ist, sind die Mengen $\Phi_I(\alpha) := \{x \in \mathcal{X} | I(x) \leq \alpha\}$ kompakt in \mathcal{X} . Da I von unten halbstetig und φ von oben halbstetig ist, existieren für alle $x \in \mathcal{X}$ offene Umgebungen $U_1(x)$ bzw. $U_2(x)$ mit

$$\begin{aligned} \inf_{y \in U_1(x)} I(y) &\geq I(x) - \delta \\ \inf_{y \in U_2(x)} \varphi(y) &\leq \varphi(x) + \delta \end{aligned}$$

1 Einführung

Insbesondere gelten beide Ungleichungen für die offene Umgebung $A_x := U_1(x) \cap U_2(x)$, da $A_x \subseteq U_1(x)$ und $A_x \subseteq U_2(x)$ gilt. Zusätzlich bilden die A_x eine offene Überdeckung von $\Phi_I(\alpha)$

$$\Phi_I(\alpha) \subseteq \bigcup_{x \in \Phi_I(\alpha)} A_x$$

Da nach Voraussetzung $\Phi_I(\alpha)$ kompakt ist, wähle eine endliche offene Teilüberdeckung $A_{x_i}, i = 1, \dots, N$, d. h. wir haben

$$\Phi_I(\alpha) \subseteq \bigcup_{i=1}^N A_{x_i}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} &= \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in \bigcup A_{x_i}\}} + \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \notin \bigcup A_{x_i}\}} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in A_{x_i}\}} + e^{\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \notin \bigcup A_{x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in A_{x_i}\}} + e^{\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \in (\bigcup A_{x_i})^c) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in \overline{A_{x_i}}\}} + e^{\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \in (\bigcup A_{x_i})^c) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E} e^{\frac{\sup_{y \in \overline{A_{x_i}}} \varphi(x_i)}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in \overline{A_{x_i}}\}} + e^{\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \in (\bigcup A_{x_i})^c) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(x_i) + \delta}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in \overline{A_{x_i}}\}} + e^{\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \in (\bigcup A_{x_i})^c) \end{aligned}$$

Da alle A_{x_i} offen sind, ist $\bigcup A_{x_i}$ offen und damit $(\bigcup A_{x_i})^c := \mathcal{X} - \bigcup A_{x_i}$ abgeschlossen. Mit der oberen Schranke des LDP für $(\bigcup A_{x_i})^c$ und für die abgeschlossenen $\overline{A_{x_i}}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(X^\epsilon \in \overline{A_{x_i}}) &\leq - \inf_{y \in \overline{A_{x_i}}} I(y) \\ \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(X^\epsilon \in (\bigcup A_{x_i})^c) &\leq - \inf_{y \in (\bigcup A_{x_i})^c} I(y) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 1.13 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(x_i) + \delta}{\epsilon}} 1_{\{X^\epsilon \in \overline{A_{x_i}}\}} + e^{\frac{M}{\epsilon}} \mathbb{P}(X^\epsilon \in (\bigcup A_{x_i})^c) \right) \\
 &\leq \max \left(\max_{i=1}^N (\varphi(x_i) + \delta - \inf_{y \in A_{x_i}} I(y)), M - \inf_{y \in (\bigcup A_{x_i})^c} I(y) \right) \\
 &\leq \max \left(\max_{i=1}^N (\varphi(x_i) - I(x_i) + 2\delta), M - \alpha \right) \\
 &\leq \max \left(\max_{i=1}^N (\varphi(x_i) - I(x_i)), M - \alpha \right) + 2\delta
 \end{aligned}$$

Die Aussage für den beschränkten Fall folgt nun direkt durch Übergang $\delta \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \infty$.

Für den allgemeinen Fall betrachte für $M < \infty$ die Funktion $\varphi_M(x) := \varphi(x) \wedge M \leq \varphi(x)$. Dann ist φ_M eine beschränkte und nach oben halbstetige Funktion. Es folgt wieder unter Ausnutzung von Lemma (1.13):

$$\begin{aligned}
 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) < M\}} + \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} \right) \\
 &\leq \max \left(\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) < M\}}, \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} \right) \\
 &\leq \max \left(\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi_M(X^\epsilon)}{\epsilon}}, \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} \right) \\
 &\leq \max \left(\sup_{x \in \mathcal{X}} \varphi_M(x) - I(x), \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} \right) \\
 &\leq \max \left(\sup_{x \in \mathcal{X}} \varphi(x) - I(x), \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\varphi(X^\epsilon)}{\epsilon}} 1_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} \right)
 \end{aligned}$$

Die Aussage ergibt sich wieder mit dem Grenzübergang $M \rightarrow \infty$. Dabei nimmt die rechte Seite von dem Maximum den Wert $-\infty$ aufgrund von Bedingung (1.9) an. \square

Für einen späteren Beweis benötigen wir noch eine ähnlich Aussage für Funktionen der Form $F1_A$ für $A \subseteq \mathcal{X}$ abgeschlossen:

Lemma 1.18. *Es sei $F : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ stetig und erfülle (1.9). Angenommen $(X^\epsilon)_\epsilon$ erfüllt*

1 Einführung

das LDP mit guter Ratenfunktion I . Dann gilt für alle $A \subseteq \mathcal{X}$ abgeschlossen:

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \int_A e^{F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) \leq \sup_{x \in A} (F(x) - I(x)).$$

Beweis. Für $A \subseteq \mathcal{X}$ abgeschlossen ist die Indikatorfunktion 1_A von oben halbstetig und somit auch $1_A F$. Wegen $1_A F \leq F$ bleibt die Schranke (1.9) erhalten. Anwendung von Lemma (1.17) liefert dann

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \int_{\mathcal{X}} e^{1_A(x)F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) \leq \sup_{x \in A} (F(x) - I(x)).$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} e^{1_A(x)F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) &= \int_A e^{1F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) + \int_{\mathcal{X} \setminus A} e^0 \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) \\ &= \int_A e^{1F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) + \underbrace{\mathbb{P}(X^\epsilon \in \mathcal{X} \setminus A)}_{\in [0,1]}. \end{aligned}$$

Damit folgt dann für die linke Seite mit Hilfe von Lemma 1.13:

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \int_{\mathcal{X}} e^{F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\int_A e^{1F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) + \mathbb{P}(X^\epsilon \in \mathcal{X} \setminus A) \right) \\ &= \max \left(\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\int_A e^{F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx) \right), \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(X^\epsilon \in \mathcal{X} \setminus A) \right) \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \int_A e^{F(x)/\epsilon} \mathbb{P}(X^\epsilon \in dx), \end{aligned}$$

wobei im Maximum der zweite Teil keine Rolle spielt, da aus $x \in [0, 1]$ schon $\log(x) \leq 0$ geschlossen werden kann und damit

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(X^\epsilon \in \mathcal{X} \setminus A) \leq 0.$$

Es folgt die Behauptung. □

In der späteren Anwendungen bedarf es noch der Erweiterung von Varadhans Theorem auf Abbildungen $F : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty)$ erweitern. D. h. F kann auch den Wert $-\infty$ annehmen.

Satz 1.19. Erfülle $(Z^\epsilon)_\epsilon$ das LDP auf \mathcal{X} mit guter Ratenfunktion $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$. Es sei $F : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty)$ stetig und existiere ein $\gamma > 1$ mit

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{\frac{\gamma}{\epsilon} F(Z^\epsilon)} < \infty.$$

Dann gilt für alle messbaren $A \in \mathcal{B}_\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} [F(x) - I(x)] &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} 1_A e^{F(Z^\epsilon)/\epsilon} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} 1_{\bar{A}} e^{F(Z^\epsilon)/\epsilon} \leq \sup_{x \in \bar{A}} [F(x) - I(x)]. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt für $A = \mathcal{X}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} e^{F(Z^\epsilon)/\epsilon} = \sup_{x \in \mathcal{X}} [F(x) - I(x)].$$

Beweis. Die mittlere Ungleichung ist klar.

Die erste Ungleichung ist Lemma 1.16.

Betrachte die dritte Ungleichung: Falls F konstant $-\infty$ ist, ist nichts zu zeigen. Sei also F nicht konstant $-\infty$. Sei $C \subseteq \mathcal{X}$ abgeschlossen und definiere für $M > 0$ die Menge $C_M := \{x \in \mathcal{X} | F(x) \geq -M\} = F^{-1}[-M, \infty)$. Da F stetig ist, ist $F^{-1}[-M, \infty)$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen und damit C_M abgeschlossen. Für $x \in C \setminus C_M$ gilt nach Definition $F(x) < -M$. Es folgt mit Hilfe der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} &\int_C \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) \\ &= \int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) + \int_{C \setminus C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) \\ &\leq \int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) + \int_{C \setminus C_M} \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) \\ &= \int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) + \int \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) 1_{C \setminus C_M} \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) \\ &= \int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) + \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in C \setminus C_M) \end{aligned}$$

Da Z^ϵ das LDP mit Ratenfunktion I erfüllt, folgt für den zweiten Teil der rechten Seite

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in C \setminus C_M) \right)$$

1 Einführung

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(Z^\epsilon \in C \setminus C_M) \\
&= \epsilon \frac{-M}{\epsilon} + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(Z^\epsilon \in C \setminus C_M) \\
&\leq -M - \inf_{c \in C \setminus C_M} I(x)
\end{aligned}$$

Für den ersten Teil der rechten Seite betrachte die Funktion $F1_{C_M}$. Diese ist von oben halbstetig, da C_M abgeschlossen ist. Aus Lemma 1.18 folgt

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) \leq \sup_{x \in C_M} [F(x) - I(x)]$$

Mit Lemma 1.13 erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \left(\int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx) + \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in C \setminus C_M) \right) \\
&= \max \left(\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \int_{C_M} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(Z^\epsilon)\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in dx), \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \exp\left(-\frac{M}{\epsilon}\right) \mathbb{P}(Z^\epsilon \in C \setminus C_M) \right) \\
&\leq \max \left(\sup_{x \in C_M} [F(x) - I(x)], -M - \inf_{c \in C \setminus C_M} I(x) \right) \\
&\leq \max \left(\sup_{x \in C_M} [F(x) - I(x)], -M \right)
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit die dritte Ungleichung durch Übergang $M \rightarrow \infty$. □

Mit Hilfe von Varadhans Theorem ist es nun möglich, Asymptotiken von Erwartungswerten auszurechnen.

1.2.2 Transformation von LDPs

Es werden zwei Techniken vorgestellt, wie man aus bestehenden LDPs neue konstruieren kann. Dabei wird einerseits das Verhalten von Maßen und Ratenfunktionen unter stetigen Abbildungen untersucht und andererseits geklärt, wie sich das LDP auf Grenzwerte von Maßfolgen auswirkt.

Kontraktionsprinzip

Es stellt sich zunächst die Frage, wie sich die LDP Eigenschaft einer Familie $(X^\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ auf \mathcal{X} unter Abbildungen $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ verhält. Eine Antwort für den Fall einer stetigen Funktion f liefert das Kontraktionsprinzip. Dies Konzept gehört zu den Standardtechniken und wird noch häufig genutzt.

Satz 1.20 (Kontraktionsprinzip). *Es seien \mathcal{X} und \mathcal{Y} Hausdorff-Räume und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine stetige Abbildung. Erfülle $(X^\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ das LDP auf \mathcal{X} mit (guter) Ratenfunktion I . Dann erfüllt $(f(X^\epsilon))_{\epsilon \geq 0}$ das LDP auf \mathcal{Y} mit guter Ratenfunktion*

$$J(y) = \inf\{I(x) \mid x \in \mathcal{X}, y = f(x)\}$$

und $J(y) := \infty$ falls die Menge leer ist.

Beweis. Zunächst ist J nicht negativ, da I nicht negativ ist. Ist I eine gute Ratenfunktion, so ist auch J eine gute Ratenfunktion. Dazu betrachte für $\alpha \geq 0$ die beiden Mengen:

$$\begin{aligned}\Psi_I^\alpha &:= \{x \in \mathcal{X} \mid I(x) \leq \alpha\} \\ \Psi_J^\alpha &:= \{y \in \mathcal{Y} \mid J(y) \leq \alpha\}.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist Ψ_I^α kompakt. Zusätzlich gilt

$$f(\Psi_I^\alpha) = \Psi_J^\alpha.$$

Da Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen ebenfalls kompakt sind, ist auch J eine gute Ratenfunktion. Dazu:

\subseteq Sei $y \in f(\Psi_I^\alpha)$. Dann existiert ein $x_0 \in \Psi_I^\alpha$ mit $f(x_0) = y$ und $I(x_0) \leq \alpha$. Es gilt also

$$J(y) = \inf_{x \in f^{-1}(y)} I(x) \leq I(x_0) \leq \alpha$$

und damit $y \in \Psi_J^\alpha$.

\supseteq Sei umgekehrt $y \in \Psi_J^\alpha$. Dann gilt

$$\inf_{x \in f^{-1}(y)} I(x) = J(y) \leq \alpha.$$

Es existiert also eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in f^{-1}(y)$ und $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \alpha$. Da $f^{-1}(y)$ abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in f^{-1}(y)$ und damit $x_0 \in \Psi_I^\alpha$. Also folgt wegen $f(x_0) = y$ schon $y \in f(\Psi_I^\alpha)$.

Untere Schranke: Es sei $B \subseteq \mathcal{Y}$ offen. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(B) \subseteq \mathcal{X}$ ebenfalls offen.

1 Einführung

Unter Ausnutzung des LDPs für $(X^\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ folgt

$$\begin{aligned} - \inf_{y \in G} J(y) &= - \inf_{y \in G} \inf_{x \in f^{-1}(y)} I(x) \\ &= - \inf_{x \in f^{-1}(G)} I(x) \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(X^\epsilon \in f^{-1}(G)) \\ &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(f(X^\epsilon) \in G) \end{aligned}$$

Obere Schranke: Dieser Teil folgt genau wie oben unter Ausnutzung der Tatsache, dass für $A \subseteq \mathcal{Y}$ abgeschlossen auch $f^{-1}(A) \subseteq \mathcal{X}$ abgeschlossen ist.

□

1.2.3 LDP für Diffusionsprozesse

Wie bereits angekündigt, ist die Betrachtung eines LDP für Maße auf dem Raum von Funktionen notwendig. Zur Anwendung der oben vorgestellten Techniken muss nun die Ratenfunktion bestimmt werden. Das erste und wichtigste Beispiel ist der Wienerprozess. Zunächst muss allerdings eine speziellere Klasse von Funktionen definiert werden:

Definition 1.21. *Es sei $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir nennen h absolutstetig, falls h fast überall differenzierbar ist, \dot{h} lebequeintegrierbar ist und*

$$h_t = h_a + \int_a^t \dot{h}_u du$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt.

Beachte, dass absolutstetige Funktionen fast überall differenzierbar sind und daher das Integral

$$\int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt$$

wohldefiniert ist.

Definition 1.22. *Wir bezeichnen den Raum der absolut stetigen Funktionen mit quadratintegrierbarer Ableitung gegeben durch*

$$\mathbb{H}_x^T := \{h \mid h \text{ abs. stetig}, h_0 = x, \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt < \infty\}$$

als Cameron-Martin Raum und setzen $\mathbb{H}^T := \mathbb{H}_0^T$

Im Folgenden wird immer angenommen, dass der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der augmentierten rechtsseitigstetigen Wienerfiltration versehen ist. Ein allererstes LDP Resultat wurde von Schilder für den Wienerprozess bewiesen.

Theorem 1.23 (Schilder). *Es sei W ein n -dimensionaler Wienerprozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann erfüllt $(\sqrt{\epsilon}W)_{\epsilon \geq 0}$ das LDP auf $C_0[0, T]$ mit guter Ratenfunktion*

$$I(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt & \text{falls } h \in \mathbb{H}^T \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. vgl. [6], S. 161, Theorem 5.2.3 □

Freidlin-Wentzell Theorie

Nun kann Schilders Theorem und das Kontraktionsprinzip genutzt werden, um ein LDP für eine Familie von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen herzuleiten. Als Nachschlagewerk der stochastischen Analysis ist Rogers und Williams (1987, [24]) zu empfehlen. Eine gute Einführung mit Fokus auf stochastischen Differentialgleichungen mit finanzmathematischen Anwendungen ist in Øksendal (1998, [20]) zu finden. Es sei zunächst eine Familie stochastischer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dS_t^\epsilon &= b(S_t^\epsilon)dt + \sqrt{\epsilon}\sigma(S_t^\epsilon)dW_t \\ S_0^\epsilon &= s_0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

für zwei beschränkte gleichmäßig lipschitzstetige Funktionen $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ mit geeigneten Integrationsbedingungen. Definiere nun eine Abbildung

$$F : \mathbb{H}^T \rightarrow \mathbb{H}_{s_0}^T$$

$$F(g) = h,$$

wobei h die eindeutige Lösung der Gleichung

$$h(t) = s_0 \int_0^t b(h(s)) ds + \int_0^t \sigma(h(s))\dot{g}(s) ds \quad 0 \leq t \leq T$$

ist. Dabei wird die Eindeutigkeit der Lösung durch die Lipschitzbedingung sichergestellt und die Abbildung F ist wohldefiniert. Es soll nun eine Art Kontraktionsprinzip auf die

1 Einführung

Prozessfamilie $(W^\epsilon)_\epsilon$ und die Abbildung F angewandt werden, um das LDP für $(S^\epsilon)_\epsilon$ herzuleiten. Dabei ist zu bemerken, dass die Abbildung F im Allgemeinen nicht stetig ist und sich der Beweis daher etwas technischer gestaltet. Wir verzichten deswegen an dieser Stelle darauf und verweisen für die Details auf Dembo und Zeitouni (1993, [6], S. 189, Theorem 5.6.7).

Theorem 1.24 (Freidlin-Wentzell). *Es sei $(S^\epsilon)_\epsilon$ eine Familie stochastischer Prozesse gegeben durch (1.12). Dann erfüllt $(S^\epsilon)_\epsilon$ das LDP auf $C[0, T]$ mit guter Ratenfunktion*

$$I_{s_0}(h) = \begin{cases} \inf_{g \in F^{-1}(h)} \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{g}_t|^2 dt & \text{falls } h \in \mathbb{H}_{s_0}^T \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

In einigen Situationen ist die Abbildung F bijektiv, wodurch die Ratenfunktion ohne Ermittlung des Infimums auskommt.

Korollar 1.25. *Ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die quadratische Matrix $a(x) := \sigma(x)\sigma(x)^T$ positiv definit, dann reduziert sich die Ratenfunktion zu*

$$I_{s_0}(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{h}_s - b(h_s))^T a^{-1}(h_s) (\dot{h}_s - b(h_s)) ds & \text{falls } h \in \mathbb{H}_{s_0}^T \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. vgl. [6], S. 189 □

Im eindimensionalen Fall ergibt sich in dieser Situation dann die Ratenfunktion zu

$$I_{s_0}(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\dot{h}_s - b(h_s)}{\sigma(h_s)} \right)^2 ds & \text{falls } h \in \mathbb{H}_{s_0}^T \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als entscheidendes Resultat der Freidlin-Wentzell Theorie kann nun die Ratenfunktion von Familien von Diffusionsprozessen bestimmt werden. Damit stehen nun eine große Menge an Werkzeugen der Theorie der großen Abweichungen zur Verfügung.

1.2.4 Austrittszeiten

Wir können das Theorem von Freidlin-Wentzell benutzen, um asymptotische Aussagen über die Austrittswahrscheinlichkeit der Familie $(S^\epsilon)_\epsilon$ gemäß der stochastischen Differentialgleichung (1.12) zu machen. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit glattem

Rand ∂D und nach außen gerichteten Normalenvektor v auf ∂D . Definiere für eine stetige Funktion $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Erstaustrittszeit

$$\tau^D(\varphi) := \inf\{t \in [0, T] \mid \varphi_t \notin D\}.$$

Es ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\tau^D(S^\epsilon) \leq T)$ gesucht. Mit Hilfe der Theorie der großen Abweichungen ist es wieder möglich, die Asymptotik dieser Wahrscheinlichkeit zu ermitteln.

Satz 1.26. *Es sei $(S^\epsilon)_\epsilon$ eine Familie von Prozessen gegeben durch die stochastische Differentialgleichung (1.12). Die Ratenfunktion dieser Familie ist nach Freidlin-Wentzell gegeben durch*

$$I^S(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)}{\sigma(\varphi_t)} \right)^2 dt,$$

falls $\varphi \in \mathbb{H}_{s_0}^T$ und $I^S(\varphi) < \infty$ sonst. Für ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂D gelte weiter $s_0 \in D$ und $b \cdot v < 0$ auf ∂D (Skalarprodukt). Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(\tau(S^\epsilon) \leq T) \\ &= - \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\tau^D(\varphi)} \left(\frac{\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)}{\sigma(\varphi_t)} \right)^2 dt \mid \varphi \in C[0, T], \varphi_0 = s_0, \tau^D(\varphi) \leq T \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. vgl. [8], S. 1378, Theorem 4.1 □

Zur Erinnerung: Für eine C^1 -Kurve $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir den ersten Schnittpunkt mit der Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$\tau^\phi(u) := \{t \in [0, T] \mid u(t) = \phi(t)\}.$$

Ist nun das Gebiet D mit Hilfe einer Funktion ϕ definiert, so kann die Aussage etwas modifiziert werden, um Variationsrechnung anwenden zu können.

Korollar 1.27. *Es sei $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Kurve. In der Situation von Satz 1.26 sei ∂D der Graph von ϕ und D die Menge oberhalb (unterhalb) des Graphen, falls $s_0 < \phi(0)$ (bzw. $s_0 > \phi(0)$). Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(\tau^D(S^\epsilon) \leq T) \\ &= - \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\tau^D(\varphi)} \left(\frac{\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)}{\sigma(\varphi_t)} \right)^2 dt \mid \varphi \in C[0, T], \varphi_0 = s_0, \tau^\phi(\varphi) \leq T \right\}. \end{aligned}$$

1 Einführung

Beweis. Für stetige Funktionen φ folgt

$$\begin{aligned}\tau^D(\varphi) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \inf\{t \in [0, T] \mid \varphi_t \notin D\} \\ &\stackrel{\text{stetig}}{=} \inf\{t \in [0, T] \mid \varphi_t \in \partial D\} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \tau^\phi(\varphi).\end{aligned}$$

D. h. eine stetige Funktion kann nicht in das Gebiet hinein springen, sondern muss zuvor den Rand ∂D passieren. Die Behauptung folgt dann direkt unter Anwendung von Satz 1.26. \square

Mit dem Korollar ist es nun gelungen, die Berechnung des Grenzverhaltens von

$$\mathbb{P}(\tau^D(S^\epsilon) \leq T)$$

auf ein Optimierungsproblem zu reduzieren. Genauer entspricht dies nun dem Variationsproblem mit linkem festen Randpunkt $A = (0, s_0)$ und rechtem Endpunkt auf der C^1 -Kurve $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}X &:= \{u \in C[0, T] \mid u(0) = s_0, \tau^\phi(u) \leq T\} \\ &\inf_{u \in X} \frac{1}{2} \int_0^{\tau^\phi(u)} \left(\frac{\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)}{\sigma(\varphi_t)} \right)^2 dt.\end{aligned}$$

Dieses Problem wurde in Abschnitt 1.1.4 ausführlich behandelt.

Beispiel: Vasicek-Prozess

Betrachte den Prozess

$$\begin{aligned}dS_t^\epsilon &= a(b - S_t^\epsilon)dt + \sqrt{\epsilon}\sigma dW_t \\ S_0^\epsilon &= s_0\end{aligned}$$

zusammen mit der C^1 -Kurve

$$\phi(t) = K_0 e^{\alpha t} \quad s_0 < K_0.$$

Damit ist in dieser Situation nun folgendes Variationsproblem mit linkem festen Randpunkt $A = (0, s_0)$ und rechtem Endpunkt auf der Kurve ϕ zu lösen:

$$X := \{u \in C[0, T] \mid u(0) = s_0, \tau^\phi(u) \leq T\}$$

$$\inf_{u \in X} \frac{1}{2} \int_0^{\tau^\phi(u)} \left(\frac{\dot{\varphi}_t - a(b - (\varphi_t))}{\sigma \varphi_t} \right)^2 dt.$$

Das Optimierungsproblem entspricht dem Beispiel am Ende von Abschnitt 1.1.4. Für die Parameter

$$\begin{array}{lll} a = 1 & b = 0.25 & s_0 = 0.2 \\ \sigma = 0.1 & \alpha = 0.001 & K_0 = 0.4 \end{array}$$

konnte dort der Wert m des Minimums ermittelt werden

$$m = 2.320771837.$$

Es folgt nun mit Korollar 1.27

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(\tau^D(S^\epsilon) \leq T) = -2.320771837.$$

Für $\epsilon = 1$ ergibt das eine Approximation

$$\mathbb{P}(\tau^D(S^\epsilon) \leq T) \sim \exp(-2.320771837) = 0.09819776368.$$

Dieses Verfahren kann von Fall zu Fall auf eine größere Klasse von Prozessfamilien $(S^\epsilon)_\epsilon$ und Kurven ϕ erweitert werden. Dazu sind einige Änderungen im anhängenden Maple Worksheet vonnöten. Insgesamt ergibt sich eine erfolgreiche Strategie mitsamt numerischen Lösungsverfahren für die Berechnung des asymptotischen Grenzverhaltens von Austrittszeiten für Diffusionsprozessen aus Gebieten, die durch eine differenzierbare Kurve bestimmt sind.

2 Monte Carlo Simulation und Importance Sampling

In der Finanzmathematik ist ein wesentliches Problem die Berechnung von Erwartungswerten von stochastischen Prozessen der Form

$$\begin{aligned}dS_t &= b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \\ S_0 &= s_0.\end{aligned}$$

Für ein messbares Funktional $G : C_{s_0}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}|G(S)| < \infty$ ist der Erwartungswert

$$I_G := \mathbb{E}G(S)$$

gesucht. Dabei wird G häufig als Auszahlung oder treffender als Auszahlungsfunktional bezeichnet, da es die Auszahlung eines Derivates repräsentiert. Die Berechnung von I_G entspricht dann dem Preisfestsetzungsproblem oder Bewertungsproblem für Derivate.

Die Handhabbarkeit von I_G hängt stark von der gewählten Dynamik und der betrachteten Auszahlungsfunktion ab. In einigen Fällen kann eine geschlossene Formel für den Erwartungswert angegeben werden (zum Beispiel im Black-Scholes Modell für Call- und Putoptionen). Häufig muss bei dem Preisfestsetzungsproblem für Derivate jedoch ein numerisches Verfahren angewandt werden, um den Preis des Finanzgutes approximativ zu berechnen. Ziel dieses Abschnittes ist eine kurze Vorstellung der Monte Carlo Simulation mit anschließender Einleitung in das Importance Sampling. Dabei wird zunächst erläutert, was unter Importance Sampling und dem damit verbundenen Maßwechselauswahlproblem verstanden wird. Dieses Auswahlproblem wird im nächsten Abschnitt dann basierend auf Guasoni und Robertson (2007, [12]), Robertson (2010, [23]) und Pham (2010, [22]) mit Hilfe der Theorie großer Abweichungen gelöst.

2.1 Monte Carlo Simulation

Eine Monte Carlo Simulation für die Derivatebewertung für ein Finanzprodukt mit Auszahlung G besteht aus einer Generierung von N Pfaden S^1, \dots, S^N der gegebenen Dynamik

$$\begin{aligned} dS_t &= b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \\ S_0 &= s_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit anschließender Mittelwertbildung

$$I_G^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S^i)$$

als Approximation für den Preis. Es wird I_G^N im Folgenden als Monte Carlo Schätzer bezeichnet. Zunächst ist allerdings für dieses Vorgehen ein Zufallsgenerator für Pfade von S nötig. Dies kann etwa durch das Euler-Maruyama oder das Milsteinverfahren erreicht werden. In dieser Arbeit wird das erste Verfahren genutzt:

Definition 2.1 (Euler-Maruyama). *Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ mit konstanter Schrittweite $\Delta t := \delta$. Definiere rekursiv*

$$S_{n+1} = S_n + b(S_n)\Delta t + \sigma(S_n)\Delta W_n,$$

wobei

$$\Delta W_n := W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \sim N(0, t_{n+1} - t_n) = \sqrt{t_{n+1} - t_n}N(0, 1) = \sqrt{\delta}N(0, 1).$$

Betrachte die stückweise definierte lineare Funktion S^δ

$$S^\delta|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) = S_{t_i} - \left(\frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \right) (t_i - t), \quad 0 \leq i \leq N - 1,$$

die durch Verbinden der Gitterpunkte entsteht. Nun ist S^δ ein simulierter Pfad von S .

Der eigentliche Monte Carlo Schätzer besteht nun für eine vorher gewählte Schrittweite $\delta > 0$ aus der Generierung von einer Stichproben S_1, \dots, S_N , welche durch $S_1^\delta, \dots, S_N^\delta$ gemäß Euler-Maruyama approximiert werden, d. h. der eigentliche Monte Carlo Schätzer

ist

$$I_G^{N,\delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i^\delta).$$

Um die Konsistenz dieses Schätzers zu begründen, muss

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} I_G^{N,\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} I_G^{N,\delta} = \mathbb{E}G(S)$$

in Wahrscheinlichkeit gelten.

Zunächst ist es sinnvoll, den Approximationsfehler in Folge der Diskretisierung durch das Euler-Maruyama Verfahren genauer zu untersuchen:

Lemma 2.2. *Es seien b und σ lokal lipschitzstetige Funktionen. Dann gilt*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t^\delta - S_t|^2 \right) = 0.$$

Beweis. vgl. [14], Theorem 2.2, S. 1043 □

Insbesondere gilt dies auch in Wahrscheinlichkeit, d. h.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t^\delta - S_t| > \epsilon \right) = 0.$$

Lemma 2.3. *Es seien b und σ lokal lipschitzstetige Funktionen und $G : C_{s_0}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ein lipschitzstetiges Funktional. Der Monte Carlo Schätzer $I_G^{N,\delta}$ ist konsistent, d. h. für alle $\epsilon > 0$ gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}(|I_G^{N,\delta} - \mathbb{E}G(S)| > \epsilon) = 0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|I_G^{N,\delta} - \mathbb{E}G(S)| > \epsilon).$$

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ und S_1, S_2, \dots eine unabhängige gemäß (2.1) identisch verteilte Stichprobe von S und $S_1^\delta, S_2^\delta, \dots$ die entsprechenden Euler-Maruyama Approximationen.

Es gilt

$$\begin{aligned} |I_G^{N,\delta} - \mathbb{E}G(S)| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i^\delta) - \mathbb{E}G(S) \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i^\delta) - G(S_i) + G(S_i) - \mathbb{E}G(S) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i^\delta) - G(S_i) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i) - \mathbb{E}G(S) \right| \end{aligned}$$

2 Monte Carlo Simulation und Importance Sampling

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i) - \mathbb{E}G(S) \right|$$

Wegen $\mathbb{E}|G(S)|^2 < \infty$ erfüllt die Folge $G(S_1), G(S_2), \dots$ das schwache Gesetz der großen Zahlen, d. h. für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i) - \mathbb{E}G(S) \right| > \epsilon \right) = 0.$$

Nach Lemma 2.2 gilt $S^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} S$ in L_1 in $C_{s_0}[0, T]$. Zusammen mit der Lipschitzstetigkeit von G mit Lipschitzkonstante $C > 0$

$$|G(S^\delta) - G(S)| \leq C \|S^\delta - S\|_\infty$$

folgt

$$0 \leq \mathbb{E} \left(|G(S^\delta) - G(S)| \right) \leq \mathbb{E} \left(C \|S^\delta - S\|_\infty \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0.$$

Unter Anwendung der Markovungleichung gilt nun für alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| > \epsilon \right) &\leq \frac{\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| \right)}{\epsilon} \\ &= \frac{\mathbb{E} \left(|G(S_1^\delta) - G(S_1)| \right)}{\epsilon} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$ und insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| > \epsilon \right) \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left(|G(S_1^\delta) - G(S_1)| \right)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} \left(|G(S_1^\delta) - G(S_1)| \right)}{\epsilon} = 0 \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| > \epsilon \right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} \left(|G(S_1^\delta) - G(S_1)| \right)}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(|G(S_1^\delta) - G(S_1)|)}{\epsilon} = 0.$$

Insgesamt ergibt dies für alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}(|I_G^{N,\delta} - \mathbb{E}G(S)| > \epsilon) \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i) - \mathbb{E}G(S)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |G(S_i^\delta) - G(S_i)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(S_i) - \mathbb{E}G(S)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|I_G^{N,\delta} - \mathbb{E}G(S)| > \epsilon) = 0.$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Als entscheidendes Resultat dieses Lemmas erhalten wir nun, dass Monte Carlo Simulationen für Diffusionsprozesse unter stetigen Funktionalen für kleine Schrittweiten δ und große Simulationsumfänge N sehr nahe gegen den tatsächlichen Erwartungswert von $G(S)$ konvergieren.

Um die Qualität eines Monte Carlo Schätzers zu bestimmen, können Konfidenzintervalle herangezogen werden.

Lemma 2.4. *Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mu = \mathbb{E}X_1$ und $0 < \mathbb{V}X_1 < \infty$. Definiere das Stichprobenmittel der Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) als*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

und die Stichprobenvarianz der Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) als

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Dann konvergiert die Zufallsgröße $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}$ in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \leq x \right) = \Phi(x),$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung ist.

Korollar 2.5. Es sei X_1, \dots, X_n eine Stichprobe und $\alpha \in (0, 1)$ vorgegeben. Dann ist

$$\left[\bar{X}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right].$$

ein asymptotische Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für $\mu = \mathbb{E}X_1$, wobei $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil einer standardnormalverteilten Zufallsgröße bezeichnet.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 2.4:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bar{X}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} < q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \Phi(q_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(-q_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

□

Die Länge des Konfidenzintervalls ist jetzt ein entscheidendes Qualitätskriterium für die Schätzung von μ . Dabei verursachen gute Schätzer kleine Konfidenzintervalle. Die Länge des Intervalls ist

$$2q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Um damit die Genauigkeit des Schätzers um eine Nachkommastelle zu verbessern, muss die Anzahl der Simulationen ver Hundertfacht werden.

Kann stattdessen die Standardabweichung der Stichprobe S_n halbiert werden, so halbiert sich auch die Länge des Intervalls. Dieses Vorgehen wird im nächsten Abschnitt untersucht.

2.2 Importance Sampling

Bei einer Monte Carlo Simulation besteht großes Interesse daran, die Stichprobenvarianz klein zu halten, um eine genauere Schätzung abgeben zu können. Dies lässt sich durch

eine Erhöhung des Stichprobenumfangs N erreichen. Dabei steigt allerdings auch der Simulationsaufwand. Gelingt es stattdessen die Standardabweichung zu reduzieren, so verkleinert sich auch das Intervall. Die Schätzung wird genauer.

Ein zweiter Ansatz zur Optimierung des Konfidenzintervalls besteht in der Reduktion der Stichprobenvarianz. Eine Möglichkeit, eine solche Varianzreduktion zu erreichen, ist die Änderung des zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P} . Dieses Vorgehen ist in der Literatur als Importance Sampling bekannt. Dass dieses Vorgehen bei richtiger Handhabung nicht zur Veränderung von Ergebnissen führt, kann mittels Bayes sichergestellt werden:

Lemma 2.6 (Bayes-Formel). *Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Filtration. Weiter sei \mathbb{Q} ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F}_T . Bezeichne für $t \in [0, T]$ mit L_t die Radon-Nikodym-Dichte von $\mathbb{Q}|\mathcal{F}_t$ bezüglich $\mathbb{P}|\mathcal{F}_t$, d. h.*

$$L_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t.$$

Dann gilt für jede \mathbb{Q} -integrierbare, \mathcal{F}_T -messbare Zufallsgröße G

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(G|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}(L_T G|\mathcal{F}_t)}{L_t}$$

für alle $0 \leq t \leq T$.

Für den Fall $t = 0$ gilt also $\mathbb{E}G = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}G \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$, sodass $G \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ ein alternativer Schätzer für $\mathbb{E}G$ unter \mathbb{Q} ist. Die Varianz dieses Schätzers unter \mathbb{Q} ist

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}G \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \mathbb{E} \left(G^2 \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) - (\mathbb{E}G)^2.$$

Durch einen Maßwechsel von \mathbb{P} nach \mathbb{Q} kann mit Hilfe der Radon-Nikodym Dichte sichergestellt werden, dass der Erwartungswert unverändert bleibt. Allerdings wird dies gewünschte Auswirkungen auf die Varianz haben. Dabei kann ein Maßwechsel zur Erhöhung oder Verringerung der Varianz führen. Ziel ist es nun, ein Maß \mathbb{Q} zu finden, dass die Varianz reduziert, um damit kleinere Konfidenzintervalle des Monte Carlo Schätzers zu erhalten. Bezeichne $\mathcal{P}(\mathbb{P}) := \{\mathbb{Q} \mid \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}\}$ die Menge aller zu \mathbb{P} äquivalenten Maße. Es ist also folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

$$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{P})} \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}G \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{P})} \left(\mathbb{E} \left(G^2 \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) - (\mathbb{E}G)^2 \right) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{P})} \left(\mathbb{E} \left(G^2 \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) \right) - (\mathbb{E}G)^2.$$

Dabei bleibt $(\mathbb{E}G)^2$ durch einen Maßwechsel unberührt und kann daher bei der Optimierung unberücksichtigt bleiben. Das Maßwechselauswahlproblem beim Importance Sampling ist nun das Auffinden einer Lösung des Optimierungsproblems

$$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{P})} \mathbb{E} \left(G^2 \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right).$$

2.2.1 Importance Sampling für Diffusionsprozesse

Für Diffusionsprozesse sind Maßwechsel durch den Satz von Cameron-Martin-Girsanov charakterisiert. Dadurch kann das Maßwechselauswahlproblem etwas umformuliert werden. Betrachte zunächst wieder einen Diffusionsprozess

$$\begin{aligned} dS_t &= b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \\ S_0 &= s_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei b und σ zwei gleichmäßig lipschitzstetige Funktionen sind, die geeignete Integrationsbedingungen erfüllen.

Für Funktionen $h \in \mathbb{H}^T$ kann der Satz von Cameron-Martin-Girsanov angewandt werden. Wir betrachten dazu das Doleansseponential von $\int_0^\bullet \dot{h}_s dW_s$ definiert durch

$$L_t := \exp \left(\int_0^t \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \dot{h}_s^2 ds \right).$$

Wegen der Novikovbedingung und $\int_0^T |\dot{h}_s|^2 ds < \infty$ ist gesichert, dass $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal mit $1 = \mathbb{E}L_0 = \mathbb{E}L_t$ ist. Wir können also für jedes $h \in \mathbb{H}^T$ ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}_h durch

$$\frac{d\mathbb{Q}_h}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = L_t$$

angeben und nennen \mathbb{Q}_h das von h induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Nach Satz von Girsanov ist $\bar{W}_t := W_t - \int_0^t \dot{h}_s ds$ ein Wienerprozess bezüglich \mathbb{Q}_h . Der Prozess S folgt dann unter diesem neuen Maß der Dynamik

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(b(S_t) + \sigma(S_t)\dot{h}_t \right) dt + \sigma(S_t)d\bar{W}_t \\ S_0 &= s_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Schreibt man $F := \log G$, so reformuliert sich mit Anwendung der Bayes-Formel das

Maßauswahlproblem unter dem von $h \in \mathbb{H}^T$ induzierten Maßwechsel zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}} G^2(S) \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^h} \right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} G^2(S) \exp \left(- \int_0^t \dot{h}_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \exp \left(\log(G^2(S)) - \int_0^t \dot{h}_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \exp \left(2F(S) - \int_0^t \dot{h}_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds \right) \\
&=: M_{var}(h).
\end{aligned}$$

Für das Maßwechselauswahlproblem muss nun

$$\inf_{h \in \mathbb{H}^T} M_{var}(h)$$

bestimmt werden. Damit reduziert sich das Problem auf die Ermittlung einer minimierenden Funktion h . Trotzdem ist die varianzbeeinflussende Größe $M_{var}(h)$ immernoch schwer zu erfassen. Dazu wird im nächsten Kapitel eine Approximation dieser Größe mittels Theorie der großen Abweichungen genutzt, um Qualitätskriterien für Maßwechsel herzuleiten.

3 Deterministische Maßwechsel

Basierend auf den Arbeiten von Guasoni und Robertson (2008, [12]) und Robertson (2010, [23]) wird ein heuristisches Verfahren zur Lösung des Maßwechselauswahlproblems im Importance Sampling vorgestellt. Die grundlegende Idee ist dabei, die Auswirkung eines deterministischen Maßwechsels mittels Varadhans Theorem zu approximieren, um anschließend einen im Sinne dieser Approximation optimalen Maßwechsel auszuwählen. Die Methode wird zunächst im Black-Scholes Modell vorgestellt und dort ausführlich untersucht. Anschließend kann das Resultat erfolgreich auf einige Einfaktormodelle ausgeweitet werden.

Es sei W ein Wienerprozess und $G = G(W) : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein nicht negatives Auszahlungsfunktional, dessen Wert sich basierend auf den Pfaden des Wienerprozesses ermitteln lässt. Mit $F := \log G$ konnte bereits in Abschnitt 2.2.1 die Varianz unter dem von h induziertem Maß \mathbb{Q}_h bestimmt werden. Wir erhalten damit ein Funktional

$$M_{var} : \mathbb{H}^T \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto \mathbb{E} \exp \left(2F(W) - \int_0^T \dot{h}_t dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt \right).$$

Nun gibt $M_{var}(h)$ die Varianz von $G(W)$ unter dem Maß \mathbb{Q}_h an. Wir sind an der Lösung des Maßwechselauswahlproblems, d.h. an einer Funktion $\hat{h} \in \overline{\mathbb{H}}^T$ mit

$$M_{var}(\hat{h}) = \inf_{h \in \mathbb{H}^T} M_{var}(h)$$

interessiert. Allerdings ist die Größe $M_{var}(h)$ immernoch schwer zu erfassen. Die Idee ist nun, eine Approximation von $M_{var}(h)$ mittels Theorie der großen Abweichungen heranzuziehen. Dazu muss geklärt werden, welche Familie von Zufallsgrößen $(X^\epsilon)_\epsilon$ und welche Funktion $\varphi_h : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty)$ für eine Approximation geeignet sind. Nach Annahme ist der Wienerprozess die entscheidende Zufallsgröße im Auszahlungsfunktional, definiere daher auf $\mathcal{X} = C_0[0, T]$ eine Familie von Zufallsgrößen gegeben durch $X^\epsilon = \sqrt{\epsilon}W$. Es gilt $X^{\epsilon=1} = W$ und $(\sqrt{\epsilon}W)_\epsilon$ erfüllt das LDP nach Schilders Theorem. Nun setzen wir

3 Deterministische Maßwechsel

für $h \in \mathbb{H}^T$

$$\varphi_h : C_0[0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_h(\omega) = 2F(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt. \quad (3.1)$$

Es ist zunächst zu klären, ob das Integral $\int_0^T \dot{h}_t d\omega_t$ existiert, damit die Abbildung φ_h wohldefiniert ist. Zusätzlich muss φ_h stetig sein und die Voraussetzung von Varadhans Theorem erfüllen. Zunächst treffen wir folgende Annahme an das Auszahlungsfunktional.

Annahme 3.1. *Das Auszahlungsfunktional $F = \log G : C_0[0, T] \rightarrow [-\infty, \infty)$ ist stetig und erfüllt*

$$F(x) \leq K_1 + K_2 \max_{t \in [0, T]} |x_t|^\alpha$$

for Konstanten $K_1, K_2 > 0$ und $\alpha \in (0, 2)$.

Nun können die notwendigen Eigenschaften von φ_h nachgerechnet werden.

Lemma 3.2. *Die Abbildung φ_h definiert durch (3.1) ist für alle $h \in \mathbb{H}^T$ wohldefiniert, stetig und erfüllt*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \varphi(X^\epsilon) \right) \mathbf{1}_{\{\varphi(X^\epsilon) \geq M\}} = -\infty, \quad (3.2)$$

d. h. auf φ_h kann Varadhans Theorem angewandt werden.

Beweis. Es seien also $h \in \mathbb{H}^T$ und $\omega \in C_0[0, T]$ beliebig. Zunächst ist \dot{h} eine Funktion von beschränkter Variation nach Definition von \mathbb{H}^T . Da ω stetig ist, existiert das Integral $\int_0^T \omega_t d\dot{h}_t$ pfadweise im Stieltjes Sinn. Nach partieller Intergrationsformel für Stieltjes Integrale (Hille und Phillips 1957, [15], Theorem 3.3.1, S. 63) existiert dann auch das Integral $\int_0^T \dot{h}_t d\omega_t$. Damit ist die Abbildung φ_h wohldefiniert. Als weitere Konsequenz erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t &= \dot{h}(T)\omega(T) - \dot{h}(0)\omega(0) - \int_0^T \omega_t d\dot{h}_t \\ &= \dot{h}(T)\omega(T) - \int_0^T \omega_t d\dot{h}_t. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t \right| &= \left| \dot{h}(T)\omega(T) - \int_0^T \omega_t d\dot{h}_t \right| \\ &\leq \left| \dot{h}(T)\omega(T) \right| + \left| \int_0^T \omega_t d\dot{h}_t \right| \end{aligned}$$

$$\leq |\dot{h}(T)\omega(T)| + \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq T} |\omega_t|}_{< \infty} \cdot \underbrace{FV_{[0,T]}(\dot{h})}_{< \infty} < \infty,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass \dot{h} von beschränkter Variation ist und stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind. Damit ist die Abbildung $\omega \mapsto \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t$ als beschränktes lineares Funktional bereits stetig. Da nach Annahme 3.1 auch F stetig ist, ist als Komposition stetiger Abbildung auch

$$\varphi_h : \omega \mapsto 2F(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt$$

stetig. Es bleibt zu zeigen, dass φ_h die Bedingung (3.2) für Varadhans Theorem erfüllt. Der Beweis ist etwas aufwändiger und wird daher hier übersprungen. Die Details finden sich in Guasoni und Robertson (2008, [12], Lemma A.6). \square

Nun liefert Varadhans Theorem angewandt auf φ_h

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \varphi_h(W^\epsilon) \right) = \sup_{\omega \in C_0[0,T]} \varphi_h(\omega) - I^W(\omega).$$

Wir können annehmen, dass das Maximum in \mathbb{H}^T erreicht wird, da das Supremum ansonsten wegen $I^W(\omega) = \infty$ für $\omega \notin \mathbb{H}^T$ den Wert $-\infty$ annimmt. Nach Schilders Theorem ist die Ratenfunktion für $(\sqrt{\epsilon}W)_\epsilon$ gegeben durch $I^W(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\omega}|^2 dt$ für $\omega \in \mathbb{H}^T$. Damit kann nun umformuliert werden:

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in C_0[0,T]} \varphi_h(\omega) - I^W(\omega) \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} \varphi_h(\omega) - \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t \dot{\omega}_t dt + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \\ &=: M(h). \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also folgendes entscheidendes Resultat für diesen Absatz:

Lemma 3.3. *Es gilt*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \varphi_h(W^\epsilon) \right) = \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \stackrel{\text{Def}}{=} M(h). \quad (3.3)$$

Im Folgenden wird nun die Notation $A \sim B$ für A approximiert B genutzt. Wir können mit dem obigen Resultat nun die Approximation für die Varianz unter dem von h induzierten Maßwechsel bestimmen

$$\log M_{var}(h) = \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \varphi_h(W^\epsilon) \right) |_{\epsilon=1} \sim M(h).$$

Das Optimierungsproblem (3.3) zur Bestimmung von $M(h)$ kann nun mit Mitteln der Variationsrechnung gelöst werden und gestaltet sich daher einfacher, als den Erwartungswert $M_{var}(h)$ direkt zu berechnen. Die Heuristik besteht nun darin anzunehmen, dass auch das Minimum durch die asymptotische Approximation gut angenähert werden kann

$$\inf_{h \in \mathbb{H}^T} \log M_{var}(h) \sim \inf_{h \in \mathbb{H}^T} M(h).$$

Das motiviert folgende Definition:

Definition 3.4. *Eine Funktion \hat{h} heißt asymptotisch optimal, falls es eine Lösung für*

$$\inf_{h \in \mathbb{H}^T} M(h)$$

ist und wir nennen das von \hat{h} induzierte Maß asymptotisch optimales Maß.

Bemerkung 3.5. *Der Raum \mathbb{H}^T ist nicht abgeschlossen. Die Weierstraßfunktion bildet dafür ein Gegenbeispiel: Es sei dazu eine Funktionenfolge*

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n a^i \cos(b^i \pi t), \quad 0 < a < 1, b \in \mathbb{N} \text{ und } ab > 1 + \frac{1}{3} \pi$$

gegeben. Nun konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ nach dem weierstraßschem Majorantenkriterium gleichmäßig gegen eine Funktion f . Wir bezeichnen f dann als Weierstraßfunktion. Diese ist bekanntermaßen stetig, aber nirgends differenzierbar und damit $f \notin \mathbb{H}^T$. Andererseits ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n differenzierbar und das Integral $\int_0^T |\dot{f}_n(t)|^2 dt$ existiert, da \dot{f}_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Also gilt $f_n \in \mathbb{H}^T$. Damit ist eine in \mathbb{H}^T konvergente Folge gefunden, deren Grenzwert nicht in \mathbb{H}^T liegt. Der Raum ist damit nicht abgeschlossen.

Ein asymptotisch optimales \hat{h} muss damit nicht unbedingt in \mathbb{H}^T liegen. Da allerdings beim Importance Sampling das von \hat{h} induzierte Maß von Belangen ist, ist vorher zu prüfen, ob mittels \hat{h} tatsächlich ein äquivalentes Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$ definiert werden kann.

Wir fassen kurz zusammen, wie nun mittels asymptotischer Optimalität Importance Sampling betrieben werden kann:

Es sei G ein Auszahlungsfunktional, das die Annahme 3.1 erfüllt. Gibt es ein asymptotisch optimales \hat{h} , sodass das induzierte äquivalente Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$ existiert, so folgt der Preisprozess S dann unter dem neuen Maß der Dynamik

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(b(S_t) + \sigma(S_t)\dot{\hat{h}}_t \right) dt + \sigma(S_t)d\hat{W}_t \\ S_0 &= s_0 \end{aligned}$$

für einen Wienerprozess \hat{W} bezüglich $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$. Der neue Monte Carlo Schätzer unter dem Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$ für eine Stichprobe S_1, \dots, S_N von S bezüglich $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$ und zugehörigen Dichtequotientenprozessen L_1, \dots, L_N ist nun gegeben durch

$$\sum_{i=1}^N G(S_i)L_i.$$

Es sollte zunächst die Existenz und Eigenschaften einer Lösung von (3.3) untersucht werden. Diese Ergebnisse führen dann zu einem Algorithmus zur Bestimmung von \hat{h} .

Lemma 3.6. *Es sei $h \in \mathbb{H}^T$, sodass \dot{h} von beschränkter Variation ist und gelte Annahme 3.1. Dann existiert eine Lösung des Optimierungsproblems (3.3).*

Lemma 3.7. *Gelte Annahme 3.1, dann existiert eine Lösung $\hat{x} \in \overline{\mathbb{H}}^T$ mit*

$$2F(\hat{x}) - \int_0^T \hat{x}_t^2 dt = \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2F(x) - \int_0^T x_t^2 dt. \quad (3.4)$$

Die Beweise dieser beiden Lemmata sind von starker technischer Natur und werden daher hier ausgelassen. Die Details sind in Guasoni und Robertson (2008, [12], Theorem 3.5) zu finden.

Durch Lösung von (3.4) kann ein asymptotisch optimales \hat{h} berechnet werden. Bevor wir die Aussage formulieren, präsentieren wir kurz die Idee. Nutzen wir das Ergebnis aus Lemma 3.3, so ist das Optimierungsproblem zur Bestimmung eines asymptotisch

3 Deterministische Maßwechsel

optimalen \hat{h} gegeben durch

$$\inf_{h \in \mathbb{H}^T} M(h) = \inf_{h \in \mathbb{H}^T} \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt.$$

Dies entspricht nun einem Minimaxproblem, d. h. einem Optimierungsproblem der Form

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} F(x, y)$$

für eine Abbildung $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$. Im Allgemeinen gilt

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} F(x, y) \neq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} F(x, y),$$

sodass die Ordnung des Minimaxproblems nicht problemlos vertauscht werden kann. Nehmen wir in unserer Situation zunächst an, dass die Ordnung getauscht werden kann:

$$\begin{aligned} & \inf_{h \in \mathbb{H}^T} \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} \inf_{h \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\omega}_t|^2 dt - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt + \inf_{h \in \mathbb{H}^T} \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\omega}_t|^2 dt \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{H}^T} 2F(\omega) - \int_0^T |\dot{\omega}_t|^2 dt, \end{aligned}$$

womit wir das Optimierungsproblem (3.4) erhalten. Es wird sich herausstellen, dass die Vertauschung der Ordnung des Minimaxproblems keinen Einfluss auf die asymptotische Optimalität hat:

Lemma 3.8. *Ist \hat{h} eine Lösung von (3.4) und gelte*

$$M(\hat{h}) = 2F(\hat{h}) - \int_0^T \dot{\hat{h}}_t^2 dt, \tag{3.5}$$

dann ist \hat{h} asymptotisch optimal und die Lösung von (3.4) ist eindeutig.

Beweis. Es seien $h, x \in \mathbb{H}^T$ beliebig. Es gilt

$$\int_0^T (\dot{h}_t - \dot{x}_t)^2 dt \geq 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 M(h) &= \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2F(x) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{x}_t - \dot{h}_t|^2 dt - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt \\
 &\geq \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2F(x) - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ist nun \hat{h} eine Lösung des Optimierungsproblems (3.6), d. h. eine Lösung von (3.4), so definiert es eine untere Schranke für M gegeben durch

$$\inf_{h \in \mathbb{H}^T} M(h) \geq 2F(\hat{h}) - \int_0^T \dot{\hat{h}}_t^2 dt.$$

Falls nun \hat{h} diese Schranke erreicht, d. h. (3.5) erfüllt, so ist es schon asymptotisch optimal.

Für die Eindeutigkeit seien h und g bezüglich des Lebesgue-Maß fast sicher verschiedene Lösungen für (3.4). Dann folgt wegen strikter Konvexität

$$\begin{aligned}
 M(h) &\stackrel{(i)}{=} \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2F(x) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{x}_t - \dot{h}_t|^2 dt - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt \\
 &\geq 2F(g) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{g}_t - \dot{h}_t|^2 dt - \int_0^T \dot{g}_t^2 dt \\
 &> 2F(g) - \int_0^T \dot{g}_t^2 dt \\
 &= 2F(h) - \int_0^T \dot{h}_t^2 dt,
 \end{aligned}$$

wobei die dritte Ungleichung wegen $h \neq g$ strikt ist. Das widerspricht nun der Optimalität (3.4) für h . Die Eindeutigkeit folgt. \square

Zusammenfassung

Es sei $G = G(W) : C_0[0, T]$ ein Auszahlungsfunktional. Um Importance Sampling mittels eines deterministischen Maßwechsels zu betreiben, müssen wir wie folgt vorgehen:

1. Beweise, dass $F = \log G$ Annahme 3.1 erfüllt.
2. Bestimme die Lösung \hat{h} des Optimierungsproblems (3.4).

3. Prüfe, ob \hat{h} ein äquivalentes Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$ induziert und ob es die Bedingung (3.5) erfüllt. Dann ist \hat{h} asymptotisch optimal.

4. Erstelle mittels Euler-Maruyama eine Stichprobe S_1, \dots, S_N bezüglich $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$.

5. Bilde das arithmetische Mittel

$$\sum_{i=1}^N G(S_i) L_i$$

als Monte Carlo Schätzer mit Importance Sampling für den Wert des durch G gegebenen Derivates.

3.1 Anwendung: Call im Black-Scholes Modell

Zunächst wird eine Calloption im Black-Scholes Modell untersucht, um das Verfahren zu testen. Es sei also ein risikobehafteter Preisprozess S bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{P} gegeben durch

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sigma dW_t) \\ S_0 &= s_0. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne r den risikolosen konstanten Zinssatz in dem betrachteten Handelszeitraum $[0, T]$. Die Lösung für diese stochastische Differentialgleichung ist gegeben durch eine geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = s_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right).$$

Damit hat ein Call mit Laufzeit T und Strike K als Funktional des Wienerprozesses folgende Auszahlung:

$$G(W) = \left(s_0 \exp(\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T) - K\right)^+ = (S_T - K)^+.$$

Ziel ist es nun, den asymptotisch optimalen Drift \hat{h} einer Calloption im Black-Scholes Modell auszurechnen. Die Abbildung $C_0[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \omega_T$ ist stetig und damit ist auch $\omega \mapsto \log G(\omega)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Um zu zeigen, dass $\log G$

Annahme 3.1 erfüllt, wähle $K_1 = |(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T|$, $K_2 = \sigma$ und $\alpha = 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \left| \log \left(s_0 \exp(\sigma\omega_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T) - K \right)^+ \right| \\ &\leq \left| \log \left(s_0 \exp(\sigma\omega_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T) \right) \right| \\ &= |\sigma\omega_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T| \\ &\leq |(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T| + \sigma \max_{0 \leq t \leq T} |\omega_t|. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun für diesen Fall eine Lösung des Optimierungsproblems (3.4):

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2 \log G(x) - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt \\ = \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2 \log \left(s_0 \exp \left(\sigma x_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right) - K \right)^+ - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die Anwendung der Variationsrechnung muss der innere Ausdruck in Integralform vorliegen. Zunächst kann angenommen werden, dass eine positive Auszahlung erfolgt, ansonsten gilt $\log 0 = -\infty$ und das Variationsproblem nimmt dort nicht sein Maximum an. Nun gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} 2 \log \left(s_0 \exp \left(\sigma x_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right) - K \right) \\ = \int_0^T \frac{d}{dT} \left[2 \log \left(s_0 \exp \left(\sigma x_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right) - K \right) \right]_{T=t} dt \\ = \int_0^T 2 \frac{(\sigma \dot{x}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)) s_0 \exp(\sigma x_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t)}{s_0 \exp(\sigma x_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t) - K} dt. \end{aligned}$$

Definiere $a := r - \frac{1}{2}\sigma^2$ und betrachte das Funktional

$$H : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad H(t, x, y) = 2 \frac{(\sigma y + a) s_0 \exp(\sigma x + at)}{s_0 \exp(\sigma x + at) - K} - y^2.$$

Damit ist das Optimierungsproblem (3.7) nun gegeben durch

$$X := \{u \in C[0, T] \mid u(0) = 0\}$$

$$\inf_{u \in X} \int_0^T H(t, u(t), \dot{u}(t)) dt.$$

Das entspricht dem Variationsproblem mit linkem fixen Randpunkt $A = (0, 0)$ und

3 Deterministische Maßwechsel

rechtem Randpunkt auf der senkrechten Geraden $t = T$. Dieses Problem wurde bereits in der Einführung in Abschnitt 1.1.3 gelöst. Dort konnte als Minimalstelle die Funktion

$$\hat{h}(t) = ct$$

hergeleitet werden, wobei c folgende Gleichung löst:

$$2 \frac{s_0 \sigma e^{\sigma cT + aT}}{s_0 e^{\sigma cT + aT} - K} - 2c = 0.$$

Damit gilt $\hat{h} \in \mathbb{H}^T$ und es existiert ein äquivalentes Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$. Um die asymptotische Optimalität von h nachzuweisen, benutzen wir Lemma 3.5. Dazu wird folgendes Variationsproblem gelöst:

$$\begin{aligned} M(\hat{h}) &= \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2F(x) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{x}_t - \dot{\hat{h}}_t|^2 dt - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt \\ &= \sup_{x \in \mathbb{H}^T} \underbrace{2F(x) - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt}_{=:A} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{x}_t - c|^2 dt}_{=:B} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Euler-Lagrange Gleichung bezüglich A ist bereits in Abschnitt 1.1.3 berechnet worden und ist gegeben durch

$$0 = A_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} A_y(t, x(t), \dot{x}(t)) = 2\ddot{x}(t).$$

Damit kann die Euler-Lagrange Gleichung bezüglich $C := A + B$ bestimmt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} B_y(t, x(t), \dot{x}(t)) &= \dot{x}(t) - c & B_x(t, x(t), \dot{x}(t)) &= 0 \\ \frac{d}{dt} B_y(t, x(t), \dot{x}(t)) &= \ddot{x}(t). \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise ergibt das

$$\begin{aligned} 0 &= C_x - \frac{d}{dt} C_y = A_x - \frac{d}{dt} A_y + B_x - \frac{d}{dt} B_y \\ &= 2\ddot{x}(t) + 0 - \ddot{x}(t) \\ &= \ddot{x}(t). \end{aligned}$$

Damit sind Extremstellen wieder Geraden. Zusammen mit der Randbedingung $x(0) = 0$ ist damit ein Kandidat

$$\hat{x}(t) = kt, \quad k \in \mathbb{R}$$

für die Extremalstelle gefunden. Zum Nachweis von (3.5) genügt es nun $k = c$ zu beweisen. Dann folgt direkt $\hat{x} = \hat{h}$ und damit dann

$$\begin{aligned} M(\hat{h}) &= \sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2F(x) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{x}_t - c|^2 dt - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt \\ &= 2F(\hat{x}) + \frac{1}{2} \int_0^T |\hat{x}_t - \hat{h}_t|^2 dt - \int_0^T \dot{\hat{x}}_t^2 dt \\ &= 2F(\hat{x}) - \int_0^T \dot{\hat{x}}_t^2 dt \\ &= 2F(\hat{h}) - \int_0^T \dot{\hat{h}}_t^2 dt. \end{aligned}$$

Um k zu bestimmen kann Satz 1.8 herangezogen werden. Demnach muss die Bedingung (1.6) für den rechten flexiblen Endpunkt erfüllt sein, d. h.

$$\begin{aligned} [C_y(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))]_{t=T} &= [A_y(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))]_{t=T} + [B_y(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))]_{t=T} \\ &= \left[2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma \hat{x}(t)+at}}{x_0 e^{\sigma \hat{x}(t)+at} - K} - 2 \dot{u}(t) \right]_{t=T} + [\dot{\hat{x}}(t) - c]_{t=T} \\ &= 2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma kT+aT}}{x_0 e^{\sigma kT+aT} - K} - 2k + k - c = 0 \\ &= 2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma kT+aT}}{x_0 e^{\sigma kT+aT} - K} - k - c = 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist wegen

$$2 \frac{x_0 \sigma e^{\sigma cT+aT}}{x_0 e^{\sigma cT+aT} - K} - 2c = 0$$

durch $k = c$ gegeben. Mit einfachen Mitteln der Analysis kann nachgewiesen werden, dass die Gleichung höchstens eine Lösung besitzt. Damit folgt $k = c$ und die asymptotische Optimalität von \hat{h} ist bewiesen.

Ist nun die Lösung \hat{c} der obigen Gleichung bekannt, dann ist die asymptotisch optimale Funktion gegeben durch $\hat{h}_t = \hat{c}t$ und S folgt unter dem asymptotisch optimalen Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$ der Dynamik

$$dS_t = S_t((r + \hat{c}\sigma)dt + \sigma dW_t)$$

für einen Wienerprozess W bezüglich $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$.

Auswertung der Simulationsergebnisse

Mit der hier vorgestellten Technik lässt sich eine Reduktion der Standardabweichung um den Faktor 3 bis 14 erreichen. Weiter zeigt sich, dass dieses Vorgehen umso besser ist, je geringer die Auszahlungswahrscheinlichkeit des Derivates wird („out-of-the-money“). Das kann durch den stärkeren Effekt des Importance Sampling in diesem Fall begründet werden.

Der zusätzliche Rechenaufwand bei der Berechnung des asymptotisch optimalen Driftes reduziert sich auf die einmalige Berechnung von \hat{c} vor Beginn der Simulation und die Berechnung des Dichtequotientenprozess am Laufzeitende pro simulierten Pfad. Da der Maßwechsel konstant ist, ist L_T gegeben durch

$$L_T = \exp(\hat{c}W_T - \frac{1}{2}\hat{c}^2T).$$

Die Bestimmung von L_T kommt also ohne die Ermittlung eines stochastischen Integrals aus. Der zusätzliche Rechenaufwand für die Simulation mit Importance Sampling kann daher als sehr gering eingeschätzt werden und die Varianzreduktion ist in einem akzeptablen Bereich. Da im Black-Scholes Modell allerdings eine analytische Formel für den Callpreis vorliegt, ist eine Ermittlung mit numerischen Verfahren nicht sinnvoll.

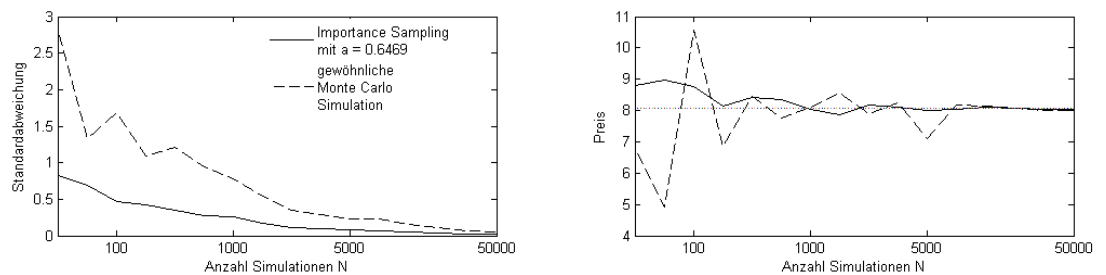


Abbildung 3.1: Ergebnisse verschiedener Monte Carlo Simulationen im Vergleich zur Black-Scholes Formel, Preis und Standardabweichung.

Volatilität	Strike	P_{MC}	P_{IS}	σ_{MC}	σ_{IS}	Ratio
20%	60	1.742	1.682	4.540	1.167	3.89
	70	0.414	0.403	2.193	0.351	6.24
	80	0.077	0.080	0.856	0.082	10.43
	90	0.017	0.014	0.400	0.016	24.62
	100	0.003	0.002	0.136	0.003	46.28
25%	60	2.575	2.623	6.355	1.719	3.70
	70	0.942	0.930	3.902	0.742	5.26
	80	0.293	0.300	2.136	0.277	7.71
	90	0.101	0.091	1.249	0.094	13.23
	100	0.021	0.028	0.506	0.031	16.41
30%	60	3.776	3.614	8.970	2.272	3.95
	70	1.612	1.624	5.804	1.222	4.75
	80	0.680	0.682	3.864	0.592	6.52
	90	0.313	0.287	2.611	0.273	9.55
	100	0.126	0.121	1.756	0.123	14.31
40%	60	5.496	5.660	12.796	3.423	3.74
	70	3.208	3.299	10.041	2.308	4.35
	80	1.978	1.933	8.489	1.485	5.72
	90	1.217	1.083	6.622	0.929	7.13
	100	0.662	0.643	4.988	0.581	8.58
50%	60	7.672	7.827	17.977	4.516	3.98
	70	5.208	5.211	15.895	3.438	4.62
	80	3.507	3.512	13.617	2.554	5.33
	90	2.354	2.378	11.372	1.871	6.08
	100	1.521	1.620	9.370	1.358	6.90
60%	60	9.619	9.937	23.503	5.625	4.18
	70	7.080	7.197	21.750	4.597	4.73
	80	5.815	5.383	21.653	3.708	5.84
	90	4.162	4.027	18.252	2.945	6.20
	100	3.127	3.023	14.919	2.349	6.35

Tabelle 3.1: Approximierter Preis und Standardabweichung der Monte Carlo Simulation mit und ohne Importance Sampling (deterministische Maßwechsel nach Varadhan-Laplace) im Black-Scholes Modell für einen Call. Als Vergleichskriterium ist die Ratio der Standardabweichungen $\frac{\sigma_{MC}}{\sigma_{IS}}$ angegeben. Die Simulationsparameter sind $T = 1$, $S_0 = 50$, $r = 0.05$ und $N = 10000$.

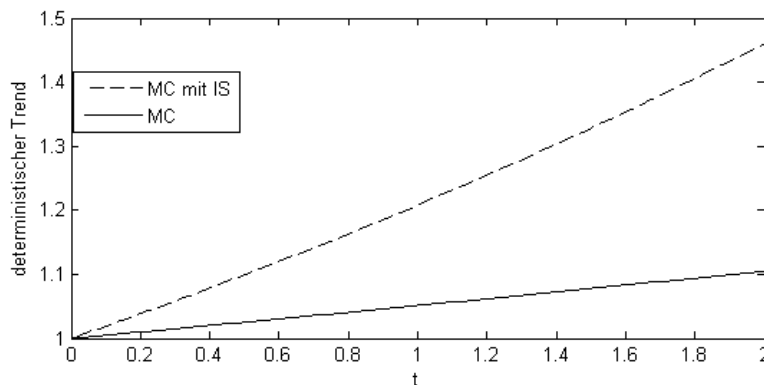


Abbildung 3.2: Vergleich der Erwartungswerte $t \mapsto \mathbb{E}S_t$ des Preisprozesses im Black-Scholes Modell unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{P} und dem asymptotisch optimalen Maß $\mathbb{Q}_{\hat{h}}$.

3.2 Digitale Optionen

Eine digitale Option liefert eine Auszahlung von 1, falls während des Handelszeitraumes eine festgelegte Bedingung eingetreten ist und verfällt ansonsten. Für eine messbare abgeschlossene Menge $A \subseteq C_0[0, T]$ ist damit die Auszahlung einer digitalen Option in Abhängigkeit des Wienerprozesses definiert als

$$G(W) = \mathbf{1}_A(W).$$

Nun ist eine Anwendung des obigen Verfahrens kritisch anzusehen, da das Auszahlungsfunktional $\log \mathbf{1}_A$ nicht stetig ist. Um dieses Vorgehen dennoch mathematisch zu untermauern, ist es notwendig, Varadhans Theorem auf solche Funktionen zu erweitern. Dies soll im Folgenden gemacht werden:

Satz 3.9. *Es sei $(X^\epsilon)_\epsilon$ eine Familie von Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\mathcal{X}, \mu)$, sodass sie das LDP mit Ratenfunktion I erfüllt. Weiter sei $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und sei für jedes $\delta > 0$ eine stetige Abbildung $F_\delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F_\delta \geq F$ und $\mu(F_\delta \neq F) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Existiere für jedes $\delta > 0$ ein $\gamma_\delta > 1$ mit*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \gamma_\delta F_\delta(X^\epsilon) \right) < \infty. \tag{3.9}$$

Dann gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} F(X^\epsilon) \right) = \sup_{x \in \mathcal{X}} F(x) - I(x).$$

Beweis. Die Idee ist eine Anwendung von Varadhans Theorem auf F_δ mit anschließendem Grenzübergang.

Aufgrund der Konvergenz ist $\exp(F_\delta(x)) - \exp(F(x))$ fast sicher durch ein $K > 0$ beschränkt für jedes $\delta > 0$. Weiter gilt wegen $F_\delta \geq F$ für jedes $X \in L_2$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} |\exp(F_\delta(X)) - \exp(F(X))| \\ &= \mathbb{E} \exp(F_\delta(X)) - \exp(F(X)) \\ &\leq K \mu(F_\delta \neq F) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F_\delta(X^\epsilon)\right) = \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(X^\epsilon)\right)$$

für alle $\epsilon > 0$. Weiter gilt nach Varadhan

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F_\delta(X^\epsilon)\right) = \sup_{x \in \mathcal{X}} F_\delta(x) - I(x) < \infty.$$

Damit können nun die Limiten vertauscht werden und es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(X^\epsilon)\right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F_\delta(X^\epsilon)\right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F_\delta(X^\epsilon)\right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{X}} F_\delta(x) - I(x) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} F(x) - I(x) \end{aligned}$$

□

Korollar 3.10. *Es sei $A \subseteq C_0[0, T]$ eine abgeschlossene Menge. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \left(2 \log \mathbf{1}_A(W^\epsilon) - \int_0^T \dot{h}_t dW_t^\epsilon + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt\right)\right) \\ = \sup_{\omega \in C_0[0, T]} \left(2 \log \mathbf{1}_A(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt\right). \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst muss eine stetige Approximation für die Abbildung

$$\omega \mapsto \left(2 \log \mathbf{1}_A(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt\right)$$

3 Deterministische Maßwechsel

konstruiert werden. Definiere zunächst

$$d(\omega, A) := \inf\{\|\omega - a\|_{sup} \mid a \in A\}$$

den minimalen Abstand von ω zu der Menge A . Beachte, dass die Abbildung $\Psi : C_0[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega \mapsto d(\omega, A)$ als Metrik auf $C_0[0, T]$ stetig ist. Setze dann für jedes $\delta > 0$

$$B_\delta := \{x \in \mathcal{X} \mid d(x, A) > \delta\}.$$

Wegen $B_\delta = \Psi^{-1}([\delta, \infty))$ ist diese Menge abgeschlossen. Da auch A abgeschlossen ist und metrische Räume immer perfekt normal sind, existiert nach Urysohn für jedes $\delta > 0$ eine stetige Funktion $f_\delta : C_0[0, T] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$f_\delta(a) = 1 \quad \text{für alle } a \in A \quad f_\delta(b) = 0 \quad \text{für alle } b \in B_\delta.$$

Nun konvergiert f_δ für $\delta \rightarrow 0$ punktweise gegen $\mathbf{1}_A$. Für $a \in A$ ist dies klar. Für $b \notin A$ gilt $d(b, A) > 0$. Damit existiert ein $\delta_0 > 0$ mit $b \in B_{\delta_0}$ und damit $f_\delta(b) = 0$ für alle $\delta < \delta_0$. Wegen der Konvergenz gilt $\mu(\log f_\delta \neq \mathbf{1}_A) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, wobei μ das Wienermaß ist.

Definiere nun

$$\begin{aligned} F_\delta(\omega) &= \left(2 \log f_\delta(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt \right) \\ F(\omega) &= \left(2 \log \mathbf{1}_A(\omega) - \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt \right) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist F_δ stetig mit $F_\delta \geq F$ und es gilt $\mu(\log F_\delta \neq F) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Für den Nachweis von Bedingung (3.9) betrachte die Funktion

$$\Theta(\omega) = \left(- \int_0^T \dot{h}_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t|^2 dt \right).$$

Es gilt $F_\delta \leq \Theta$. Nun ist Θ stetig und erfüllt die Voraussetzung für Lemma 3.2. Damit existiert ein $\gamma > 1$ mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \gamma F_\delta(W^\epsilon) \right) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \gamma \Theta(W^\epsilon) \right) < \infty.$$

□

Damit ist es nun möglich, das oben vorgestellte Vorgehen zur Bestimmung eines asym-

ptotisch optimalen Maßwechsels im Falle digitaler Optionen zu benutzen.

3.3 Anwendung im Black-Scholes Modell

Im Falle des Black-Scholes Modell lässt sich der deterministische asymptotisch optimale Maßwechsel leicht berechnen. Es sei also ein Preisprozess bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{P} gegeben durch

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sigma dW_t) \\ S_0 &= s_0 \end{aligned}$$

und es sei $A \subseteq C_0[0, T]$ eine messbare Teilmenge von Funktionen. Definiere wieder $a := r - \frac{1}{2}\sigma^2$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : C_0[0, T] &\rightarrow C_{s_0}[0, T] \\ \mathcal{S}(h) &:= t \mapsto s_0 \exp(\sigma h_t + at). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für einen Wienerprozess W nun mit dieser Notation $\mathcal{S}(W) = S$. Eine digitale Option mit Bedingung A hat folgende Auszahlung

$$G(W) = 1_{\{\mathcal{S}(W) \in A\}}$$

und kann damit als Funktional des Wienerprozesses dargestellt werden. Es sei $c \in \mathbb{R}$. Wir identifizieren $l_c \in C_0[0, T]$ mit der Geraden

$$l_c(t) = ct, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Es soll der asymptotisch optimale Maßwechsel berechnet werden.

Korollar 3.11. *Es sei $A \subseteq C_0[0, T]$ eine messbare, abgeschlossene Teilmenge und betrachte die Menge*

$$\mathcal{C} := \{c \in \mathbb{R} \mid \mathcal{S}(l_c) \in A\}.$$

Angenommen $\mathcal{C} \neq \emptyset$, dann ist der asymptotisch optimale Drift \hat{h} für digitale Optionen mit Bedingung A gegeben durch

$$\hat{h}_t = \hat{c}t,$$

3 Deterministische Maßwechsel

wobei $\hat{c} \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Optimierungsproblems

$$\inf_{c \in \mathbb{C}} |c|$$

ist.

Der asymptotisch optimalen Maßwechsel für eine digitale Option im Black-Scholes Modell ist also immer linear. Die Gerade ist dabei mit betragsmäßig schwächster Steigung zu wählen, dass die Bedingung A eintritt.

Beweis. Nach Lemma 3.8 ist zunächst folgendes Variationsproblem zu lösen:

$$\sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2 \log 1_{\{\mathcal{S}(x) \in A\}} - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt. \quad (3.10)$$

Gilt $\mathcal{S}(x) \notin A$, so ist $\log 1_{\{\mathcal{S}(x) \in A\}} = -\infty$ und das Problem nimmt dort nicht sein Maximum an. Wir erhalten also als erste Nebenbedingung $\mathcal{S}(x) \in A$. Damit reduziert sich Problem (3.10) zu

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{H}^T} - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt &= - \inf_{x \in \mathbb{H}^T} \int_0^T \dot{x}_t^2 dt \\ &\mathcal{S}(x) \in A \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definieren wir nun

$$H : C_0[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(t, x, y) = y^2,$$

so lässt sich die Euler-Lagrange Gleichung von H direkt bestimmen und ist gegeben durch

$$\frac{d^2}{dt^2} x_t = 0,$$

womit wegen der Randbedingung $h_0 = 0$ die Lösung eine Gerade

$$x_t = ct$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ ist. Es muss c näher bestimmt werden. Dazu wird die Nebenbedingung $\mathcal{S}(\hat{x}) \in A$ genutzt. Zunächst ergibt sich durch Einsetzen der Lösung x in (3.11)

$$\inf_{x \in \mathbb{H}^T} \int_0^T \dot{x}_t^2 dt = \inf_{c \in \mathbb{R}} c^2 T.$$

Das ist äquivalent dazu, c betragsmäßig minimal zu wählen. Die Nebenbedingung ist nun

$$c \in \mathcal{C}.$$

Ist nun \hat{c} betragsmäßig minimal in \mathcal{C} gewählt, so ist $\hat{x}_t = \hat{c}t$ eine mögliche Minimalstelle von (3.11). Da die Abbildung $(x, y) \mapsto H(t, x, y) = y^2$ konvex ist, ist \hat{x}_t bereits globale Minimalstelle. Damit gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{H}^T} 2 \log 1_{\{S(x) \in A\}} - \int_0^T \dot{x}_t^2 dt = - \inf_{x \in \mathbb{H}^T} \int_0^T \dot{x}_t^2 dt = -\hat{c}^2 T \quad (3.12)$$

Insbesondere kann mittels \hat{x} ein äquivalentes Maß definiert werden. Um die asymptotische Optimalität zu beweisen, genügt es demnach Gleichung (3.5) in Lemma 3.8 zu beweisen. Sei dazu

$$\hat{x}_t = \hat{c}t$$

die Lösung von oben.

Es gilt nun für die rechte Seite von Gleichung (3.5)

$$F(\hat{x}) - \int_0^T \hat{x}_t^2 dt = 2 \log 1_{\{S(\hat{x}) \in A\}} - \int_0^T \hat{x}_t^2 dt = - \int_0^T \hat{x}_t^2 dt = -\hat{c}^2 T.$$

Definiere für die linke Seite von Gleichung (3.5)

$$\begin{aligned} M(\hat{x}) &= \sup_{h \in \mathbb{H}^T} 2 \log 1_{\{S(h) \in A\}} + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \dot{\hat{x}}_t|^2 dt - \int_0^T \dot{h}_t^2 dt \\ &= \sup_{h \in \mathbb{H}^T} 2 \log 1_{\{S(h) \in A\}} + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \hat{c}|^2 dt - \int_0^T \dot{h}_t^2 dt \\ &= \inf_{h \in \mathbb{H}^T} - \left(2 \log 1_{\{S(h) \in A\}} + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \hat{c}|^2 dt - \int_0^T \dot{h}_t^2 dt \right) \\ &= \inf_{h \in \mathbb{H}^T} -2 \log 1_{\{S(h) \in A\}} - \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \hat{c}|^2 dt + \int_0^T \dot{h}_t^2 dt \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nun ist $M(\hat{x}) = -\hat{c}^2 T$ zu zeigen. Dazu muss das Variationsproblem gelöst werden. Eine sehr ähnliche Rechnung wie oben zeigt, dass die Lösung wieder gegeben ist durch eine Gerade

$$h_t = bt$$

für $b \in \mathbb{R}$. Es ist b näher zu bestimmen. Einsetzen von h in (3.13) liefert folgendes

Optimierungsproblem

$$M(\hat{x}) = \inf_{h \in \mathbb{H}^T} -\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{h}_t - \hat{c}|^2 dt + \int_0^T \dot{h}_t^2 dt = \inf_{b \in \mathbb{R}} -\frac{1}{2}(b - \hat{c})^2 T + b^2 T,$$

wobei hier wieder angenommen werden konnte, dass $1_{\{S(h) \in A\}} = 1$ gilt. Die Lösung kann mittels Differenzierung nach b ermittelt werden

$$-(b - \hat{c})T + 2bT = 0 \Leftrightarrow 0 = -b + \hat{c} + 2b = +b + \hat{c}.$$

Damit folgt $\hat{b} := -\hat{c}$ und die Extremstelle ist gegeben in $\hat{x}_t = -\hat{c}t$. Das liefert

$$M(\hat{h}) = -\frac{1}{2}(\hat{b} - \hat{c})^2 T + \hat{b}^2 T = -\frac{1}{2}(-2\hat{c})^2 T + \hat{c}^2 T = -\hat{c}^2 T.$$

Die asymptotische Optimalität von \hat{x} folgt nun mit Lemma 3.8. □

3.4 Anwendung: Barriereoptionen im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen Barrieren.

Eine digitale Barriereoption liefert eine Auszahlung von 1, falls der Preisprozess eine vorher festgelegt Barriere durchbricht. Sei diese Barriere gegeben durch eine deterministische Funktion $K : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Auszahlung ist dann als Funktional des Wienerprozesses gegeben durch

$$G(W) = 1_{\{\exists t \in [0, T] : S(W)_t > K_t\}}.$$

Lemma 3.12. *Es sei $s_0 \in \mathbb{R}$ und $K : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Menge*

$$A := \{f \in C_{s_0}[0, T] \mid \exists t \in [0, T] : f(t) > K_t\}$$

ist abgeschlossen.

Beweis. Betrachte für jedes $t_0 \in [0, T]$ das stetige Funktional $F_{t_0} : C_{s_0}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(f) = f(t_0)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \{f \mid \exists t \in [0, T] : f(t) > K_t\} \\ &= \bigcup_{t_0 \in [0, T]} \{f \mid f(t_0) > K_{t_0}\} \\ &= \bigcup_{t_0 \in [0, T]} F_{t_0}^{-1}(K_{t_0}, \infty] \end{aligned}$$

3.4 Anwendung: Barriereoptionen im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen Barrieren.

Da F_{t_0} für alle $t_0 \in [0, T]$ stetig ist, sind die Mengen $F_{t_0}^{-1}(K_{t_0}, \infty]$ offen. Damit ist A als Vereinigung offener Mengen offen. \square

Zur Berechnung des asymptotisch optimalen Maßwechsels ist nach Korollar 3.11 folgende Menge näher zu bestimmen:

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{Es existiert ein } t \in [0, T] \text{ mit } \mathcal{S}(l_a)_t > K_t\}.$$

Um die Rechnung etwas konkreter zu machen, betrachten wir die Funktion

$$K_t := K_0 \exp(\alpha t) \qquad K_0 > S_0$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, T]$ beliebig. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}(t \mapsto at)_t \geq K_t \\ \Leftrightarrow & S_0 \exp(\sigma at + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t) \geq K_0 \exp(\alpha t) \\ \Leftrightarrow & \sigma at \geq \log\left(\frac{K_0}{S_0}\right) + \alpha t - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t \\ \Leftrightarrow & a \geq \frac{1}{t\sigma} \log\left(\frac{K_0}{S_0}\right) + \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2) := c_t \end{aligned}$$

Es gilt nach Voraussetzung $\log(\frac{K_0}{S_0}) > 0$. Damit ist die Funktion $t \mapsto c_t$ monoton fallend. Hat c_t eine Nullstelle, so wähle $a = 0$. Ist das nicht der Fall, dann folgt aus der Monotonität:

$$\begin{aligned} \inf_{a \in \mathcal{A}} |a| &= \inf_{t \in [0, T]} c_t = c_T \\ &= \frac{1}{T\sigma} \log\left(\frac{K_0}{S_0}\right) + \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2). \end{aligned}$$

Insgesamt erschließt sich:

$$\inf_{a \in \mathcal{A}} |a| = \begin{cases} \frac{1}{T\sigma} \log\left(\frac{K_0}{S_0}\right) + \frac{\alpha - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma} & \text{falls } c_T > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Für $\alpha = 0$ ist damit nun der asymptotisch optimale Drift für digitale Barriereoptionen

mit konstanter Barriere bekannt.

Simulationsergebnisse: Barriereoptionen im Black-Scholes Modell mit zeitabhängiger Barriere

Mit Hilfe von Importance Sampling ist es möglich die Standardabweichung der Monte Carlo Simulation um den Faktor 1 bis 14 zu verbessern. Dabei steigt dieser Faktor, je unwahrscheinlicher eine Auszahlung wird („out-of-the-money“). Der Driftwechsel ist hier konstant und kann mittels der Formel in (3.14) ermittelt werden. Als zusätzlicher Rechenaufwand fällt also lediglich die Berechnung des Dichtequotientenprozesses L_T an. Wegen des konstanten Drifts kann dies mit einer einzigen Berechnung realisiert werden. Der zusätzliche Rechenaufwand kann daher als gering eingeschätzt werden. Ein Einsatz dieser Technik ist entsprechend für digitale zeitabhängige „out-of-the-money“ Barriereoptionen zu empfehlen.

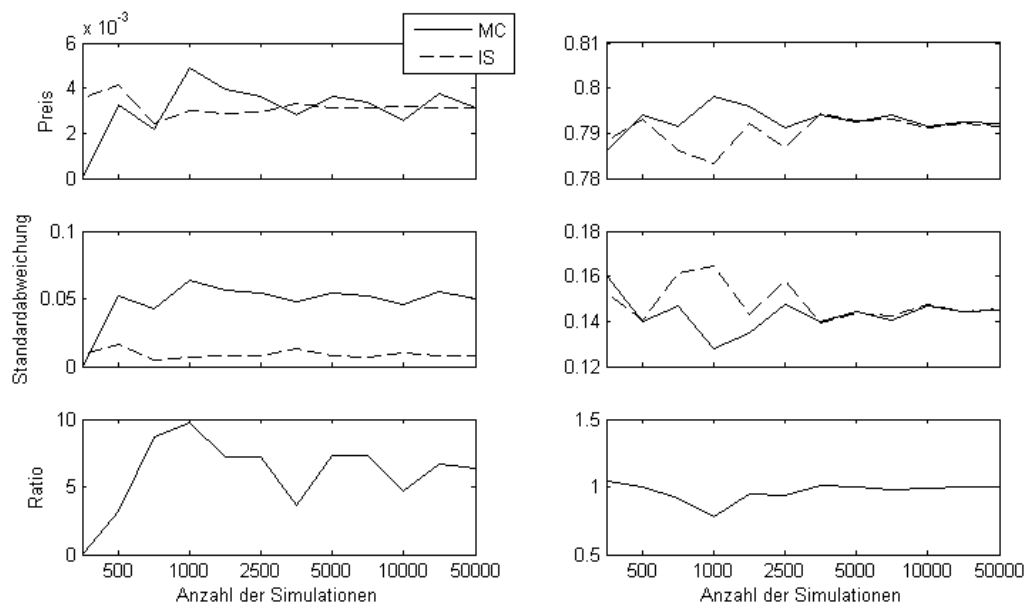


Abbildung 3.3: Vergleich der Auswirkung einer Ausweitung des Simulationsumfanges einer Monte Carlo Simulation mit und ohne Importance Sampling (deterministischer asymptotisch optimaler Maßwechsel) auf den geschätzten Preis, die Standardabweichung und die Ratio. Die Simulationsparameter sind $S_0 = 50$, $T = 2$, $r = 0.1$, $\alpha = 0.1$ sowie $\sigma = 0.2$, $K_0 = 100$ (linke Spalte) und $\sigma = 0.3$, $K_0 = 60$ (rechte Spalte).

3.4 Anwendung: Barriereoptionen im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen Barrieren.

Volatilität	K_0	P_{MC}	P_{IS}	σ_{IS}	σ_{MC}	Ratio
20 %	60	0.751	0.714	0.552	0.494	1.12
	70	0.309	0.304	0.356	0.266	1.34
	80	0.120	0.108	0.222	0.105	2.12
	90	0.054	0.041	0.149	0.053	2.82
	100	0.024	0.014	0.100	0.015	6.56
	110	0.002	0.005	0.026	0.006	4.47
	120	0.002	0.002	0.026	0.002	11.76
25 %	70	0.471	0.429	0.439	0.345	1.27
	80	0.197	0.231	0.284	0.231	1.23
	90	0.078	0.108	0.179	0.113	1.59
	100	0.057	0.053	0.153	0.057	2.70
	110	0.028	0.022	0.107	0.025	4.32
	120	0.015	0.012	0.078	0.015	5.09
	130	0.013	0.006	0.073	0.007	11.23
	140	0.003	0.004	0.037	0.008	4.68
	150	0.002	0.002	0.026	0.002	14.04
30 %	90	0.182	0.203	0.274	0.279	0.98
	100	0.123	0.108	0.225	0.104	2.17
	110	0.067	0.070	0.166	0.081	2.04
	120	0.041	0.037	0.129	0.043	3.03
	130	0.024	0.022	0.100	0.029	3.45
	140	0.016	0.013	0.082	0.018	4.55
	150	0.011	0.008	0.068	0.011	6.44
35 %	90	0.262	0.257	0.328	0.224	1.46
	100	0.162	0.165	0.258	0.173	1.49
	110	0.101	0.114	0.204	0.110	1.85
	120	0.073	0.071	0.174	0.076	2.27
	130	0.049	0.059	0.142	0.131	1.08
	140	0.044	0.034	0.134	0.042	3.18
	150	0.026	0.023	0.104	0.025	4.15

Tabelle 3.2: Monte Carlo Simulation mit und ohne Importance Sampling (deterministische asymptotisch optimaler Maßwechsel) für eine digitale Barriereoption mit zeitabhängiger Barriere $K_t = K_0 \exp(\alpha t)$ im Black-Scholes Modell mit den Parametern $S_0 = 50$, $T = 2$, $r = 0.1$, $\alpha = 0.1$ und $N = 1000$.

3.5 Anwendung: Zweiseitige Barriereoptionen im BS-Modell

Dieser Abschnitt soll aufzeigen, dass ein Importance Sampling mit asymptotisch optimalen Maßwechseln bei grober Anwendung auch zu gegenteiligen und damit unerwünschten Effekten führen kann. Als Beispiel wird ein zweiseitiges Derivat mit folgender Auszahlung gewählt:

$$G(W) = 1_{\{\max_t S(W)_t > K_{max} \text{ oder } \min_t S(W)_t < K_{min}\}}$$

Das Derivat liefert also eine Auszahlung von 1, falls der Preisprozess die obere Barriere K_{max} oder die untere Barriere K_{min} einmal durchschreitet. Deshalb bezeichnet man ein solches Derivat auch als zweiseitige Barriereoption.

Mit einem sehr ähnlichen Argument wie im einseitigen Fall kann die Abgeschlossenheit nachgewiesen werden. Eine Anwendung von Korollar 3.11 zeigt dann, dass der asymptotisch optimale Drift wieder eine Gerade der Form $\hat{h}_t = \hat{a}t$ ist. Je nachdem, welche Barriere günstiger zu erreichen ist, wird die Gerade steigen oder fallen. Dies kann durch eine analoge Rechnung wie im einseitigen Fall ermittelt werden. Im Falle einer steigenden Geraden ($\hat{a} > 0$) erhöht sich die Durchbruchwahrscheinlichkeit für die obere Schranke, während diese für die untere Schranke verringert wird. Das führt zu Problemen beim Importance Sampling mit diesem Drift.

Ist der Simulationsumfang gering ($n < 10.000$), so kann das untere Ereignis wohlmöglich nicht stattfinden und gewinnt so bei der Bewertung keine Bedeutung. Für große Simulationen wird dieser Umstand durch den Dichtequotientenprozess L korrigiert. Wir erhalten diese Probleme also nur, wenn die untere Schranke beim IS sehr selten durchbrochen wird.

n	P_{MC}	P_{IS}
100	0.130	0.0092
1000	0.124	0.0136
10000	0.121	0.0122

Tabelle 3.3: MC Simulation mit und ohne IS bei einer zweiseitige Barriereoption mit einseitigem Driftwechsel.

Aufgrund der nur einseitigen Berücksichtigung der Barrieren, kommt es in der Simulation zu erheblichen Fehlern und zu einer Fehlbepreisung des Derivates. Eine Anwendung von Importance Sampling ist für diese Form von Derivaten daher nicht empfehlenswert.

4 Dynamische Maßwechsel via Preisapproximation

Basierend auf dem Vorschlag von Pham (2010, [22]) wird eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung eines varianzoptimierenden Maßwechsels vorgestellt. Dabei soll der Maßwechsel nun vom simulierten Pfad abhängen und auch während der Simulation angepasst werden. Wir sprechen daher von dynamischen Maßwechseln. Wie eine kurze Rechnung zeigen wird, kann ein solcher Maßwechsel mittels Kenntnis des Preisprozesses $v(t, X_t)$ und des Delta-Hedge $D_x v(t, X_t)$ bestimmt werden. Diese beiden Werte sind nun allerdings unbekannt. Daher werden asymptotische Approximationen für diese beiden Werte genutzt, um den dynamischen Maßwechsel durch eine Näherung zu bestimmen. Diese Technik kann dabei erfolgreich auf eine große Klasse von Derivaten angewandt werden und soll hier präsentiert werden.

Der Maßwechsel

Es wird nun geklärt, welcher der dynamischer Maßwechsel berechnet herangezogen wird. Für einen n -dimensionalen Diffusionsprozess bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{P} mit der Form

$$\begin{aligned}dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 &= x\end{aligned}$$

und für ein Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $T > 0$ ist der Wert $\mathbb{E}(g(X_T))$ gesucht. Es sei zunächst h ein \mathbb{R}^n -wertiger prevesibler Prozess und \mathbb{Q}_h ein äquivalentes Maß gegeben durch

$$\frac{d\mathbb{Q}_h}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t h_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^t |h_t|^2 dt \right) =: L_t^{-1},$$

4 Dynamische Maßwechsel via Preisapproximation

so dass $(L_t^{-1})_t$ ein Martingal mit $\mathbb{E}L_T^{-1} = 1$ ist. Das ist beispielsweise durch die Novikovbedingung gesichert:

$$\mathbb{E} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T |h_t|^2 dt \right) < \infty.$$

Nach Cameron-Martin-Girsanov ist der Prozess

$$\bar{W}_t := W_t - \int_0^t h_t dt$$

ein Wienerprozess bezüglich \mathbb{Q}_h und die Dynamik von X ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} dX_t &= (b(X_t) + h_t \sigma(X_t)) dt + \sigma(X_t) d\bar{W}_t \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

Wegen der Markoveigenschaft existiert eine Funktion $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$v(t, X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(g(X_T) | \mathcal{F}_t).$$

Mit Hilfe von Bayes gilt nun:

$$v(t, X_t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_h}(g(X_T) L_T | \mathcal{F}_t)}{L_t}$$

Es ist $(v(t, X_t))_{0 \leq t \leq T}$ ein \mathbb{P} -Martingal, $(v(t, x) L_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein \mathbb{Q}_h -Martingal und es gilt $v(T, X_T) = g(X_T)$. Mit der mehrdimensionalen Ito-Formel folgt bezüglich \mathbb{Q}_h

$$\begin{aligned} dv(t, X_t) L_t &= L_t dv(t, X_t) + v(t, X_t) dL_t + d \langle v(t, X_t), L_t \rangle \\ &= L_t \left(\partial_t v(t, X_t) dt + D_x v(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} D_{xx} v(t, X_t) d\langle X \rangle_t \right) \\ &\quad + v(t, X_t) L_t h_t d\bar{W}_t + d \langle v(t, X_t), L_t \rangle \\ &= L_t \left(\partial_t v(t, X_t) dt + D_x v(t, X_t) (b(X_t) - h_t \sigma(X_t)) dt + D_x v(t, X_t) \sigma(X_t) d\bar{W}_t \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{xx} v(t, X_t) \sigma^2(X_t) dt + v(t, X_t) L_t h_t d\bar{W}_t + \sigma(X_t) L_t h_t dt. \end{aligned}$$

Nun fallen die Anteile beschränkter Variation wegen der \mathbb{Q}_h -Martingaleigenschaft weg, d. h.

$$dv(t, x) L_t = L_t (v(t, x) h_t + D_x v(t, x) \sigma(X_t)) d\bar{W}_t$$

In Integralschreibweise zum Zeitpunkt t also:

$$g(X_T)L_T = v(X_T, T)L_T = v(X_t, t) + \int_t^T L_u(v(u, X_u)h_u + D_x v(u, X_u)\sigma(X_u))d\bar{W}_u$$

Damit hat die Zufallsgröße $g(X_T)L_T$ unter dem Maß \mathbb{Q}_h die Varianz

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}_h} G(X_T)L_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_h} \int_t^T L_u^2 |v(u, X_u)h_u + \sigma(X_u)D_x v(u, X_u)|^2 du.$$

Ziel war es, h derart zu wählen, dass die Varianz minimiert wird. Da der Integrand positiv ist, wird der Erwartungswert des stochastischen Integrals minimiert, wenn der Integrand minimal ist.

$$\int_t^T L_u^2 \underbrace{|v(u, X_u)h_u + \sigma(X_u)D_x v(u, X_u)|^2}_{=0} du$$

Es liegt deshalb folgende Definition nahe

$$h_t = -\frac{1}{v(t, X_t)}\sigma(X_t)D_x v(t, X_t) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Damit verschwindet die Varianz unter dem Maßwechsel zumindest theoretisch. Nun ist v allerdings unbekannt und eine Bestimmung von h nicht möglich. Eine naheliegende Möglichkeit ist die Approximation von v und $D_x v$. Dazu wird die Theorie großer Abweichungen zur Herleitung einer Heuristik genutzt.

Betrachte zunächst die Prozessfamilie $(X^\epsilon)_\epsilon$ gegeben durch

$$\begin{aligned} dX_t^\epsilon &= b(X_t^\epsilon)dt + \sqrt{\epsilon}\sigma(X_t^\epsilon)dW_t \\ X_0^\epsilon &= x_0. \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Freidlin-Wentzell Theorie und Varadhans Lemma erhalten wir für ein stetiges Funktional $G_T : C_{x_0}[0, T]$, $G(X) = g(X_T)$ zusammen mit der Markoveigenschaft von X^ϵ zum Zeitpunkt t :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp \left(\frac{\log G_{T-t}(X^\epsilon)}{\epsilon} \right) &= \sup_{\phi \in \mathbb{H}_{x_0}^{T-t}} \log G_{T-t}(\phi) - I^X(\phi) \\ &= \sup_{\phi \in \mathbb{H}_{x_t}^{T-t}} \log g(\phi_{T-t}) - \frac{1}{2} \int_0^{T-t} \left(\frac{\dot{\phi}_u - b(\phi_u)}{\sigma(\phi_u)} \right)^2 du. \end{aligned}$$

Definieren wir nun

$$V(t, x_t) := \exp \left(\sup_{\phi \in \mathbb{H}_{x_t}^{T-t}} \log g(\phi_{T-t}) - \frac{1}{2} \int_0^{T-t} \left(\frac{\dot{\phi}_u - b(\phi_u)}{\sigma(\phi_u)} \right)^2 du \right)$$

als Wert des Supremums in Abhängigkeit von der Zeit t und dem aktuellen Kurswert x_t . Die Funktion $\frac{1}{\epsilon} V$ gibt nun näherungsweise die Werte von $\mathbb{E} \exp \left(\frac{\log g(X_{T-t}^\epsilon)}{\epsilon} \right)$ für sehr kleine $\epsilon > 0$ wieder. Daher besteht die Hoffnung, dass dieser Wert für $\epsilon = 1$ immernoch eine gute Approximation ist.

Die Heuristik besteht nun darin, für den echten Wert $v(t, X_t)$ die Funktion $V(t, X_t)$ als Schätzung zu nehmen:

$$v(t, x) \sim V(t, x)$$

Anschließend kann dann auf Basis von V eine Approximation von $D_x v(t, x) = \partial_x v(t, x)$ hergeleitet werden, indem für ein kleines aber festes $h > 0$ zum Differentialquotienten übergegangen wird:

$$D_x v(t, x) \sim \frac{V(t, x) - V(t, x + h)}{h}.$$

Da es sich hier um eine Heuristik handelt und genaue Fehlerabschätzungen des Verfahrens schwierig zu ermitteln sind, wird als erstes Beispiel die Calloption im Black-Scholes Modell untersucht. Dort sind v und $\partial_x v$ bekannt und ermöglicht so einen Vergleich mit dem geschätzten Wert V .

4.1 Call im Black-Scholes Modell

Ziel ist es, die Auswirkung des Fehlers einer asymptotischen Approximation von v und $D_x v$ auf die Varianzoptimierung zu beurteilen. Dazu kann exemplarisch der Call im Black-Scholes Modell untersucht werden. Dort sind v und $D_x v$ bekannt. Daher bietet sich diese Situation als erster Untersuchungsstandpunkt an.

Lemma 4.1. *Es sei \mathbb{P} das äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes Modell. Für den Preisprozess*

$$v(t, x) := \mathbb{E}(\exp(-r(T-t))(X_T - K)^+ | X_t = x)$$

eines Calls gilt

$$\begin{aligned} v(t, X_t) &= X_t \phi(d_1) - K \exp(-r(T-t)) \phi(d_2) \\ D_x v(t, X_t) &= \phi(d_1), \end{aligned}$$

wobei

$$d_1 := \frac{\log\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Beweis. Der Ausdruck von v ist die bekannte Black-Scholes Formel und der Beweis ist Standard. Der Delta-Hedge $D_x v$ kann dann problemlos durch Differenzierung von v berechnet werden. \square

Es wird nun Preis und Hedge mittels Theorie der großen Abweichungen approximiert. Dazu wird im Black-Scholes Modell folgende Familie von Diffusionsprozessen betrachtet

$$\begin{aligned} dS_t^\epsilon &= S_t^\epsilon (r dt + \sqrt{\epsilon} \sigma dW_t) \\ S_0^\epsilon &= s_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es muss zunächst ein LDP für die Familie $(S_T^\epsilon)_\epsilon$ hergeleitet werden. Zunächst sei allerdings angemerkt, dass für jedes $\epsilon > 0$ der reellwertige Prozess S_T^ϵ lognormalverteilt ist und damit die Berechnung der Ratenfunktion mittels einer geschickten Anwendung von Cramers Theorem und dem Kontraktionsprinzip realisiert werden kann. Dennoch wird im Hinblick auf die spätere Anwendung auf eine größere Klasse von Modellen das LDP mittels Freidlin-Wentzell und Variationsrechnung hergeleitet:

Die Ratenfunktion von $(S^\epsilon)_\epsilon$ ist nach Freidlin-Wentzell gegeben durch

$$I^S(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\dot{\varphi}_t - r\varphi_t}{\sigma\varphi_t} \right)^2 dt & \text{falls } \varphi \in \mathbb{H}_{s_0}^T \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Anwendung des Kontraktionsprinzips auf das stetige Funktional

$$F : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad F(\varphi) = \varphi_T$$

liefert dann das LDP für die reellwertige Familie von Zufallsgrößen $Y^\epsilon := F(S^\epsilon) = S_T^\epsilon$. Die Ratenfunktion ist dabei

$$I^Y(y) = \inf\{I^S(\varphi) \mid \varphi \in \mathbb{H}_{s_0}, \varphi_T = F(\varphi) = y\}.$$

Damit ist nun für jedes $y \in \mathbb{R}$ folgendes Variationsproblem zu lösen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\dot{\varphi}_t - r\varphi_t}{\sigma\varphi_t} \right)^2 dt &= \min && \text{(Hauptbedingung)} \\ \varphi_0 &= s_0 && \text{(linke Randbedingung)} \\ \varphi_T &= y && \text{(rechte Randbedingung)} \end{aligned}$$

Dieses Problem wurde zu Beginn in Abschnitt 1.1.2 behandelt. Die Minimalstelle ist gegeben durch

$$\varphi^*(t) = s_0 \exp\left(\frac{1}{T} \log\left(\frac{y}{s_0}\right)t\right)$$

und der Wert des Minimums ist dann

$$I^Y(y) = \frac{1}{2T\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{s_0}\right) - rT \right)^2.$$

Es sei nun $H = H(S_T) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, sodass ein $\gamma > 1$ existiert mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \gamma \log H(S_T^\epsilon)\right) < \infty.$$

Insbesondere gilt dies für alle stetigen nach oben beschränkten Funktionen. Eine asymptotische Approximation eines Derivates mit Auszahlung φ ist nun gegeben durch

$$\mathbb{E}H(S_T) \sim \exp\left(\sup_{y \in \mathbb{R}} \log \varphi(y) - I^Y(y)\right) = \exp\left(\sup_{y \in \mathbb{R}} \log H(y) - \frac{1}{2T\sigma^2} \left(\log\left(\frac{y}{s_0}\right) - rT\right)^2\right).$$

Wir werden nun im Folgenden zwei Verfahren vergleichend nebeneinander stellen: Verfahren A entspricht einer Monte Carlo Simulation mit dynamischem Importance Sampling, wobei die exakten Werte v und $D_x v$ entsprechend der Black-Scholes Formel zur Bestimmung von h herangezogen werden, d.h.

$$\begin{aligned} h_t &= -\frac{1}{v(t, X_t)} \sigma(X_t) D_x v(t, X_t) \\ &= -\frac{1}{X_t \phi(d_1) - K \exp(-r(T-t)) \phi(d_2)} \sigma X_t \phi(d_1). \end{aligned}$$

Bei Verfahren B wird h mittels V approximiert:

$$h_t \sim -\frac{1}{V(t, X_t)} \sigma(X_t) D_x V(t, X_t),$$

wobei

$$D_x V(t, X_t) \sim \frac{V(t, X_t) - V(t, X_t + h)}{h}$$

für sehr kleines $h > 0$.

Die Simulationsparameter sind

$$S_0 = 8 \quad r = 0.1 \quad T = 2 \quad \sigma = 0.3 \quad K = 10.$$

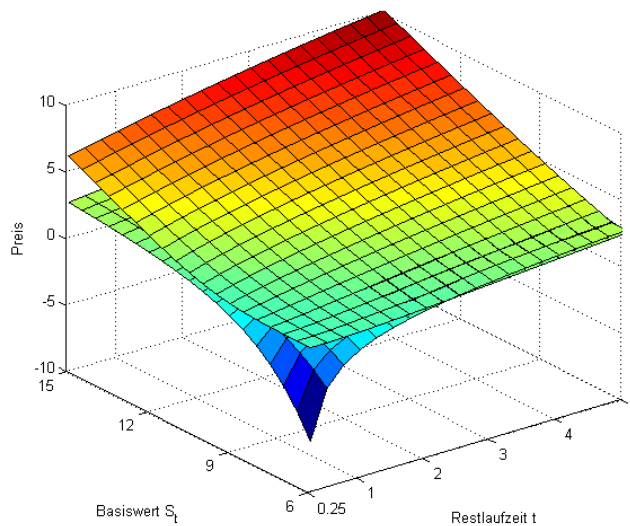


Abbildung 4.1: Preis eines Call im Black-Scholes Modell. Vergleich der Approximation $(t, X_t) \mapsto V(t, X_t)$ (untere Fläche) mit den tatsächlichen Werten der Black-Scholes Formel $(t, X_t) \mapsto v(t, X_t)$ (obere Fläche).

4 Dynamische Maßwechsel via Preisapproximation

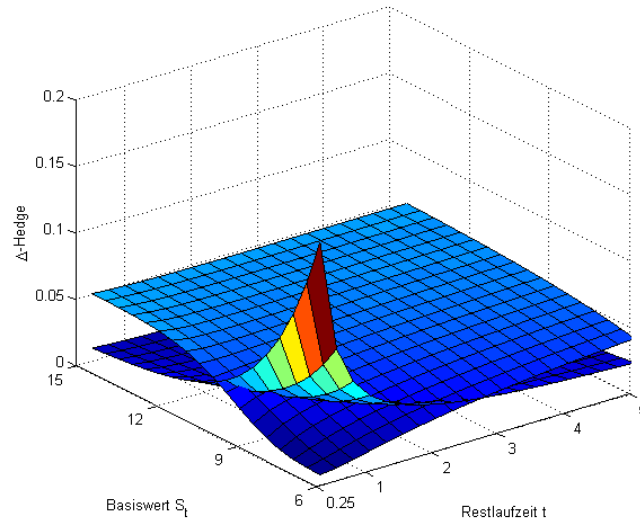


Abbildung 4.2: Hedge eines Call im Black-Scholes Modell. Vergleich der Approximation mittels Theorie großer Abweichungen mit den tatsächlichen Werten der Black-Scholes Formel.

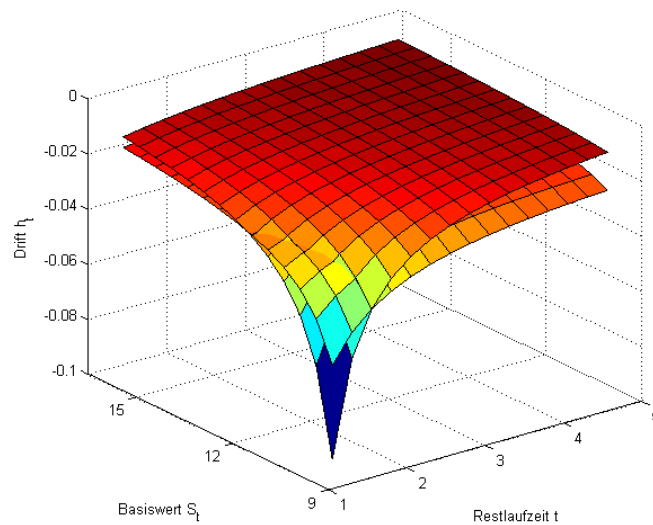


Abbildung 4.3: Vergleich der Approximation von h mit den tatsächlichen Werten.

Simulationen	P_{MC}	P_{IS}	σ_{MC}	σ_{IS}	Ratio
100	0.9135	1.2790	0.2106	0.0124	17.03
500	1.0573	1.2559	0.0991	0.0060	16.49
1000	1.3003	1.2667	0.0823	0.0048	17.04
2500	1.2851	1.2594	0.0504	0.0029	17.68
5000	1.2614	1.2574	0.0350	0.0021	16.71
10000	1.2041	1.2574	0.0240	0.0014	16.94
20000	1.2363	1.2588	0.0172	0.0010	17.18

Tabelle 4.1: Konvergenz für Verfahren A bei steigendem Simulationsumfang

Volatilität	K	P_{MC}	P_{IS}	σ_{MC}	σ_{IS}	Ratio
0.30	8	2.1806	2.0719	0.1028	0.0060	17.11
	9	1.7792	1.6199	0.0905	0.0051	17.63
	10	1.3420	1.2685	0.0831	0.0041	20.03
	11	0.9238	0.9705	0.0667	0.0037	18.02
	12	0.6675	0.7423	0.0603	0.0034	17.83
0.35	8	2.1843	2.2576	0.1122	0.0064	17.46
	9	1.6715	1.8278	0.1003	0.0060	16.63
	10	1.6907	1.4789	0.0999	0.0060	16.77
	11	1.1909	1.2007	0.0894	0.0048	18.50
	12	0.9016	0.9634	0.0770	0.0040	19.43
0.40	8	2.5033	2.4383	0.1388	0.0072	19.26
	9	1.9447	2.0377	0.1176	0.0077	15.30
	10	1.7660	1.6924	0.1190	0.0064	18.49
	11	1.4621	1.4159	0.1115	0.0058	19.23
	12	1.2392	1.1715	0.0997	0.0053	18.99

Tabelle 4.2: Varianzreduktion für Verfahren A mit $n = 1000$.

Auswertung

Es wurden Simulationen unter Ausnutzung der Black-Scholes Formel und der Approximation mittels der Theorie großer Abweichungen durchgeführt. Dabei kann festgestellt werden, dass die Approximation gerade an den Randbereichen (t klein, S_t klein) erhebliche Fehler aufweist. Dies hat gravierende Effekte in Hinblick auf die Varianzoptimalität des Maßwechsels. Während bei Kenntnis des genauen Preisverlaufs und Delta-Hedges eine Reduktion der Standardabweichung um den Faktor 16-20 erreicht werden konnte (Verfahren A), lag diese Verringerung bei dem approximativen Verfahren B lediglich bei einem Faktor von zwei bis drei.

Ein Vergleich der Drifte in Abbildung 4.3 zeigt, dass die Approximation für große Lauf-

Volatilität	K	P_{MC}	P_{IS}	σ_{MC}	σ_{IS}	Ratio
0.30	8	2.1712	2.0607	0.0964	0.0371	2.60
	9	1.7435	1.5521	0.0932	0.0346	2.69
	10	1.3535	1.2524	0.0828	0.0304	2.72
	11	1.0189	0.9519	0.0756	0.0405	1.87
	12	0.7396	0.6695	0.0677	0.0186	3.65
0.35	8	2.0119	2.1670	0.0997	0.0425	2.35
	9	1.9808	1.8377	0.1098	0.0375	2.93
	10	1.5104	1.4590	0.1009	0.0329	3.07
	11	1.0953	1.1683	0.0835	0.0276	3.02
	12	1.0736	0.9436	0.0845	0.0239	3.53
0.40	8	2.5731	2.3631	0.1301	0.0474	2.74
	9	1.8774	1.9584	0.1199	0.0414	2.90
	10	1.5756	1.6400	0.1051	0.0370	2.84
	11	1.2705	1.3371	0.1015	0.0331	3.06
	12	1.1232	1.1744	0.0981	0.0289	3.39

Tabelle 4.3: Varianzreduktion für Verfahren B mit $n = 1000$.

zeiten ($t > 1$) und hohe Basiswerte ($S_t > K$) sehr geringe Fehler aufweist. Im Gegenzug ist allerdings das Fehlerpotential im relevanten Bereich ($S_t < K$) als kritisch anzusehen. Es stellt sich letztendlich die Frage, ob nun andere Approximationsverfahren für v und $D_x v$ in diesem Bereich zu besseren Ergebnissen führen.

Im approximativen Fall reduzierte sich die Berechnung von v und $D_x v$ auf die Lösung eines einzigen Maximierungsproblems für jedes Paar (t, S_t) . Von einer numerischen Berechnung von v und $D_x v$ in jedem Schritt der Simulation ist abzuraten. Bei großen Simulationsumfängen würden dann viele Werte mehrfach berechnet werden. Es empfiehlt sich daher, über den relevanten Bereich des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Werte für ein vorgeschriebenes Gitter zu berechnen, ähnlich wie es bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen üblich ist. Dabei scheint es sinnvoll, das Gitter im relevanten Gebiet (nahe bei dem Graphen von $t \mapsto \mathbb{E}S_t$) etwas feiner zu gestalten.

In Fall eines Calls im Black-Scholes Modell ist eine Anwendung der approximativen Methode für dynamische Maßwechsel nicht zu empfehlen. Insbesondere ein Vergleich mit der Methode der deterministischen Wechsel, die bessere Varianzreduktionen mit einem weniger rechenintensiven Verfahren aufweist, untermauert diese Empfehlung.

Des Weiteren sind noch die Konvergenz bzw. Konsistenz des Monte Carlo Schätzers mit dynamischen Importance Sampling nachzuweisen (vgl. Tabelle 4.1). Diese Frage kann hier allerdings nicht endgültig beantwortet werden und bietet Potential für zukünftige

Forschungsarbeiten.

4.2 Dynamisches Importance Sampling für asiatische Optionen

Es sei $G : C_x[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Auszahlungsfunktional, S ein Diffusionsprozess und $(S^\epsilon)_\epsilon$ die entsprechende Prozessfamilie im Freidlin-Wentzell Sinn mit $S^{\epsilon=1} = S$. Ein entscheidender Punkt bei der Herleitung des dynamischen Maßwechsels der Form

$$h_t = -\frac{1}{v(t, X_t)} \sigma(X_t) D_x v(t, X_t) \quad 0 \leq t \leq T$$

im Falle europäischer Auszahlungen $G(S) = g(S_T)$ ist die Markoveigenschaft vom $G(S)$. Diese Bedingung ist in vielen Fällen verletzt und verhindert so eine Anwendung dieses Ansatzes. Dieser Umstand kann in einigen Situationen allerdings korrigiert werden. Wir möchten das am Beispiel einer asiatischen Option vorstellen: Eine asiatische Option auf einen Preisprozess S ist eine Funktion seines Mittelwertes, d. h. ein Claim der Form

$$C = H \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right)$$

für eine Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definiere eine Hilfsvariable

$$Y := \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt.$$

Der Prozess (X, Y) ist nun ein Markovprozess und ermöglicht die Anwendung der vorgestellten Importance Sampling Methode.

Betrachte die Prozessfamilie gegeben durch $Y^\epsilon := \frac{1}{T} \int_0^T S_t^\epsilon dt$. Gelingt nun die Herleitung eines LDP für $(Y^\epsilon)_\epsilon$ mit Ratenfunktion I^Y , so liefert Varadhans Theorem eine Approximation

$$\mathbb{E}H(Y) \sim \exp \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} \log H(y) - I^Y(y) \right).$$

Damit ist nun lediglich ein reelles Maximierungsproblem zu lösen.

Der generelle Vorteil dieser Methode besteht also in der Reduktion des Rechenanteils auf ein reelles Maximierungsproblem. Es muss nun noch ein LDP für stochastische Integrale hergeleitet werden:

Lemma 4.2. *Es sei $(S^\epsilon)_\epsilon$ eine Familie stochastischer Prozesse auf $C[0, T]$ mit guter Ratenfunktion I^S . Dann erfüllt die Familie reellwertiger Zufallsgrößen gegeben durch*

$$Y^\epsilon = \frac{1}{T} \int_0^T S_t^\epsilon dt$$

das LDP auf \mathbb{R} mit guter Ratenfunktion

$$I^Y(y) = \inf_{\psi \in C[0, T]} \{I^S(\psi) \mid y = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_t dt\}.$$

Beweis. Das Funktional $F : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(\psi) = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_t dt$$

ist stetig. Die Behauptung folgt dann direkt aus dem Kontraktionsprinzip. □

Falls S^ϵ für alle $\epsilon > 0$ eine Ito-Diffusion mit beschränkten gleichmäßig lipschitzstetigen Koeffizienten ist, d. h.

$$\begin{aligned} dS_t^\epsilon &= b(S_t^\epsilon)dt + \sqrt{\epsilon}\sigma(S_t^\epsilon)dW_t \\ S_0^\epsilon &= s_0, \end{aligned}$$

kann mittels Freidlin-Wentzell die Ratenfunktion I^S bestimmt werden. Nach dem Lemma ist für die Berechnung von I^Y demnach folgendes Variationsproblem mit Nebenbedingungen zu lösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\dot{\psi}_t - b(\psi_t)}{\sigma(\psi_t)} \right)^2 dt &= \min && \text{(Hauptbedingung)} \\ \int_0^T \psi_t dt &= y \cdot T && \text{(Nebenbedingung)} \\ \psi_0 &= s_0 && \text{(Randbedingung)} \end{aligned}$$

Beispiel: Vasicek-Prozess

Eine Familie von Vasicek-Prozessen $(S^\epsilon)_\epsilon$ folgt einer Dynamik der Form

$$\begin{aligned} dS_t^\epsilon &= \theta(\mu - S_t^\epsilon)dt + \sqrt{\epsilon}\sigma dW_t \\ S_0^\epsilon &= s_0. \end{aligned}$$

4.2 Dynamisches Importance Sampling für asiatische Optionen

Die Ratenfunktion kann nun durch Lösung des oben vorgestellten Variationsproblems erreicht werden. Allerdings gibt es in diesem speziellen Fall eine weitere Möglichkeit: Für den Vasicek-Prozess ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung bekannt und es gelingt, die Verteilung des stochastischen Integrals zu berechnen. Dabei ist $Y^\epsilon = \int_0^T S_t^\epsilon dt$ normalverteilt mit Parametern

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= s_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{\theta} + \mu \left(T - \frac{1 - \exp(-\theta T)}{\theta} \right) \\ \epsilon \bar{\sigma}^2 &= \epsilon \frac{\sigma^2}{\theta^2} \left(T - \frac{2 - 2 \exp(-\theta T)}{\theta} + \frac{1 - \exp(-2\theta T)}{2\theta} \right).\end{aligned}$$

Insbesondere ist damit die Ratenfunktion von Y^ϵ gegeben durch

$$I^Y(y) = \frac{1}{2} \frac{(y - \bar{\mu})^2}{\bar{\sigma}^2}.$$

Da nun die Ratenfunktion bekannt ist, kann für asiatische Optionen sehr leicht mittels Varadhans Theorem eine asymptotische Approximation gefunden werden.

Ist nun $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingung in Varadhans Theorem erfüllt, so ist folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\log H(y) - \frac{1}{2} \frac{(y - \bar{\mu})^2}{\bar{\sigma}^2} \right).$$

Asiatische Putoption: Betrachte beispielsweise einen asiatischen Put mit Strike $K > 0$, Laufzeit $T > 0$ und oberer Schranke K :

$$H(y) = (K - y)^+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}},$$

dann kann das Maximum des Optimierungsproblems durch Differentialrechnung hergeleitet werden. Falls es existiert, ist es eindeutig und gegeben durch

$$y_{max} = \frac{K + \bar{\mu}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K + \bar{\mu}}{2} \right)^2 + \bar{\sigma} - \bar{\mu}K}.$$

Wir erhalten damit eine Approximation

$$\mathbb{E}(K - Y_T)^+ \mathbf{1}_{\{Y_T > 0\}} \sim \exp \left(\log(y_{max} - K) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_{max} - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right).$$

Geometrische asiatische Putoption: Betrachte für einen Strike $K > 0$ die Auszahlungs-

Simulationen	Preis MC	Preis IS	σ_{MC}	σ_{IS}	Ratio
100	0.8246	0.8133	0.0350	0.0187	1.8707
1000	0.8528	0.8364	0.0117	0.0065	1.7897
5000	0.8489	0.8262	0.0052	0.0029	1.8052
10000	0.8461	0.8278	0.0036	0.0020	1.7900
20000	0.8438	0.8297	0.0026	0.0014	1.7783

Tabelle 4.4: Monte Carlo Simulation mit und ohne dynamischem Importance Sampling für die geometrische asiatische Putoption.

funktion

$$H(y) = (\exp(y) - K)^+.$$

Eine Lösung y_{max} des Optimierungsproblems

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\log(\exp(y) - K) - \frac{1}{2} \frac{(y - \bar{\mu})^2}{\bar{\sigma}^2} \right)$$

erfüllt die Gleichung

$$\frac{\exp(y_{max})}{\exp(y_{max}) - K} - \frac{y_{max} - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} = 0$$

wie leicht mittels Differenzierung hergeleitet werden kann.

Für dieses Beispiel wurde dynamisches Importance Sampling mit den Parametern

$$\begin{array}{lll} \theta = 0.8 & \mu = 0.3 & \sigma = 0.15 \\ T = 2.5 & S_0 = 0.2 & K = 1.1 \end{array}$$

durchgeführt.

Bemerkung 4.3. *Wie diese Beispiele zeigen, kann das Verfahren einfach auf eine große Klasse von Auszahlungsfunktionen angewandt werden. Das größte Problem ist die Berechnung der Ratenfunktion I^Y . Liegt in allgemeinen Diffusionsmodellen keine analytische Lösung für I^Y vor, so muss in jedem Schritt der Simulation ein Variationsproblem gelöst werden. Zusammen mit der Lösung des Optimierungsproblems ist der zusätzliche Simulationsaufwand beim dynamischen Importance Sampling daher enorm. In Hinblick auf die notwendige Rechenleistung sollten das Verfahren zukünftig noch optimiert werden. Eine Möglichkeit dafür bilden Gittermethoden, wie sie bei der numerischen Lösung von Differentialgleichung eine Rolle spielen.*

Neben asiatischen Optionen kann dynamisches Importance Sampling nach Pham auch noch auf einige weitere Klasse von Optionen ausgeweitet werden, die die Markoveigen-

4.2 Dynamisches Importance Sampling für asiatische Optionen

schaft nicht erfüllen. Dies ist neben anderen etwa denkbar bei Barriereoptionen, Basketoptionen, Lookbackoptionen und Compounded Options.

Fazit und Ausblick

Fazit

Die Derivatebewertung mittels Monte Carlo Simulation ist ein gängiges und bewährtes Vorgehen in der Finanzwirtschaft. Allerdings ist dieses Verfahren im Vergleich zu anderen Methoden nicht besonders effizient. Insbesondere bei exotischen Derivaten ist es nicht immer möglich auf Alternativen zurückzugreifen. Ziel dieser Arbeit war es daher die Verbesserung von Monte Carlo Simulationen mittels Importance Sampling: Dabei soll durch einen Maßwechsel eine Varianzreduktion erreicht werden. Es war entscheidend zu klären, welcher Maßwechsel dies am Besten erfüllt.

Zur Lösung dieses Auswahlproblems wurden zwei Techniken vorgestellt, die auf der Theorie großer Abweichungen aufbaut: Das erste Verfahren basierte auf der Einführung der asymptotischen Optimalität als Gütekriterium für deterministische Maßwechsel, womit es nun durch Lösung eines Variationsproblems bzw. einer Differentialgleichung möglich ist, „gute“ Maßwechsel zu berechnen. Dem Anwender steht damit ein relativ einfaches Konzept zur Durchführung von Monte Carlo Simulationen mit Importance Sampling mit deterministischen Maßwechseln zur Verfügung.

Das Verfahren wurde für digitale Optionen, Barriereoptionen und dem Call im Black-Scholes Modell getestet. Das führt bei „out-of-the-money“ Derivaten häufig zu einer Verbesserung der Standardabweichung. Bei zweiseitigen Barriereoptionen konnte allerdings ein unerwünschter Effekt nachgewiesen werden, weswegen eine generelle Anwendung des Verfahrens nicht ohne Weiteres zu empfehlen ist. Der Benutzer sollte daher zumindest über die grundlegende Wirkungsweise des Importance Sampling informiert sein, um solche unerwünschten Effekte im Vorfeld erkennen zu können.

Als alternatives Verfahren entstand eine Heuristik für die Ermittlung von dynamischen Maßwechseln, welche mit der Kenntnis von Preis und Hedge des Derivates mit einer Formel ermittelt werden können. Da diese Werte im Wesentlichen unbekannt sind, wurde mit Hilfe der Theorie großer Abweichungen ein Konzept zur Approximation hergeleitet.

Dieses wurde im Black-Scholes Modell getestet und anschließend auf asiatische Optionen erweitert.

Ausblick

Das Potential der beiden vorgestellten Methoden ist noch nicht ausgeschöpft: So ist es beispielsweise noch möglich weitere Konzepte zur Bestimmung des dynamischen Maßwechsels für andere Derivateklassen herzuleiten. Die Ausdehnbarkeit des Vorgehens motiviert nun auch eine systematische Untersuchung von LDPs für finanzrelevante stochastische Prozesse, wie sie in den Auszahlungsprofilen bekannter Derivate vorkommen.

Als weitere Entwicklungsmöglichkeit besteht die Ausweitung des deterministischen Maßwechselverfahrens auf Zinsstrukturmodelle und Zinsderivate. Im Falle von Swaptions ist dieses Problem mit Hilfe des Swapratenprozesses formal mit den vorgestellten Konzepten lösbar. Im Libormarktmodell oder in short rate Modellen sind die genutzten Werkzeuge ebenfalls Diffusionsprozesse. Eine Erweiterung der vorgestellten Methoden ist daher durchaus eine realistische Möglichkeit.

Insgesamt konnten die Ziele dieser Arbeit, ein weitreichendes praxisrelevantes Konzept in der Derivatebewertung herzuleiten und weiterzuentwickeln, erfolgreich erfüllt werden. Dabei entstanden auch einige weiterführende Fragestellungen, die Potential für zukünftige Forschungsarbeiten bieten.

Literaturverzeichnis

- [1] Amounts outstanding of over-the-counter (otc) derivatives by risk category and instrument, June 2012. <http://www.bis.org/statistics/derstats.htm>, 17. August 2012.
- [2] G. Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 5. Auflage. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30, 2007.
- [3] B. Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, 2004.
- [4] F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300:463–520, 1994.
- [5] F. Delbaen and W. Schachermayer. *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Finance, 2006.
- [6] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Jones and Bartlett, 1993.
- [7] J.-D. Deuschel and D. W. Stroock. *Large Deviations*. American Mathematical Society, 2001.
- [8] W. H. Fleming and M. R. James. Asymptotic series and exit time probabilities. *The Annals of Probability*, Vol. 20, No. 3:S. 1369–1384, 1992.
- [9] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1998.
- [10] I. Gelfand and S. Fomin. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, Inc., 1963.
- [11] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, volume Applications of Mathematics. Springer Verlag, 2004.
- [12] P. Guasoni and S. Robertson. Optimal importance sampling with explicit formulas in continuous time. *Finance and Stochastics*, Vol. 12:S. 1–19, 2007. Springer-Verlag.

- [13] S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 6:S. 327–343, 1993.
- [14] D. J. Higham, X. Mao, and A. M. Stuart. Strong convergence of euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, pages S. 1041–1063, 2002.
- [15] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*. American Mathematical Society, 1957.
- [16] J. Hull and A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, Vol. 42:S. 281–300, 1987.
- [17] A. Irle. *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. 2. Auflage. Teubner, 2003.
- [18] L.E.Elsgolc. *Calculus of Variations*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.
- [19] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer Verlag, 1993.
- [20] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 1998.
- [21] D. Peithmann. *Large Deviations and Exit Time Asymptotics for Diffusions and Stochastic Resonance*. PhD thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II Humboldt-Universität zu Berlin, 2007.
- [22] H. Pham. Large deviations in mathematical finance, 2010.
- [23] S. Robertson. Sample path large deviations and optimal importance sampling for stochastic volatility models. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 120:S. 66–83, 2010.
- [24] L. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Ito Calculus*, volume Vol. 2. Cambridge University Press, 1987.
- [25] C. Shalizi. Advanced probability ii or almost none of stochastic processes. Lecture Notes.

- [26] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, 2004.
- [27] S. R. S. Varadhan. *Diffusion Problems and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Tata Institute of Fundamental Research, 1980.

Eidesstattliche Erklärung

Gemäß § 12 (5) der Prüfungsordnung für den Masterstudiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 26.10.2011 versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

.....

Reken, den 22. Januar 2013

.....

Michael ESPENDILLER