Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Optimales Management eines Garantiefonds

Optimal Management of a Garantee Fund

Masterarbeit

vorgelegt von:

Stefan Blanke

Matrikelnummer: 371557

Studiengang: Master of Science, Mathematik

Erstprüfer:

Priv.-Doz. Dr. Volkert Paulsen

Zweitprüfer:

Prof. Dr. Steffen Dereich

Münster, 26. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit dem optimalen Management eines Garantiefonds in verschiendenen Finanzmärkten. Bei Garantiefonds handelt es sich um Investmentfonds, welche am Ende des Handelszeitraumes die zu Beginn eingezahlte Summe zuzüglich das bis dahin erwirtschaftete Plus garantieren. Um diese Garantiefonds optimal zu managen, wird eine Portfoliooptimierung mit Garantie betrachtet, also einem zentralen Bestandteil der modernen Finanzmathematik. Ziel ist es ein optimales Portfolio aus den an dem Finanzmarkt gehandelten Finanzgütern zusammenzustellen. Ob eine solche Zusammenstellung für einen bestimmten Investor jedoch optimal ist, hängt von seinen Präferenzen ab. Manche Investoren bevorzugen mehr Rendite und gehen dafür mehr Risiko ein, andere Investoren präferieren eine sichere Geldanlage.

Der Begründer der modernen Portfoliooptimierung war Harry Markowitz im Jahre 1952. Er betrachtete einen zeitdiskreten Markt und verwendete das μ-σ-Prinzip. Seine Grundidee war es Portfolios zu berechnen, die eine erwartete Mindestrendite besitzen und unter diesen Portfolios, dasjenige zu wählen, welches das kleinste Risiko beinhaltet. Die erwartete Rendite wird mit μ und die Standartabweichung als Maß für das Risiko mit σ bezeichnet. Wir werden in dieser Arbeit jedoch nicht mit dem μ-σ-Prinzip arbeiten, sondern Nutzenfunktionen verwenden. Weiterentwickelt wurde dieser Ansatz von Merton H. Miller. Er behandelte in seiner Arbeit "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continous-Time-Case" zum ersten Mal ein Portfoliooptimierungsproblem in einem stetigen Finanzmarkt, das sogenannte Merton Problem. Der Lösungsansatz ist hier, den erwarteten Endnutzen des Investors zu maximieren. Auch eine Optimierung unter Berücksichtigung von zwischenzeitlichem Konsum wurde betrachtet. Da es sich um ein stochastisches Kontrollproblem handelt, nutzte Merton die sogenannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung zur Bestimmung der expliziten Lösung.
Eine andere Methode zur exakten Berechnung des Optimierungsproblems entwickelte S. Pliska 1986 mit der Martingalmethode. Hierbei wird das Merton Problem in zwei seperate Probleme aufgeteilt und gelöst. Man löst zunächst ein zeitunabhängiges, statisches Problem, wodurch man das optimale Endvermögen und den optimalen Konsum erhält. Mittels dieser Informationen kann dann das Darstellungsproblem gelöst werden und man erhält zudem die optimale Investitionsstrategie. Auf die Martingalmethode wird in dieser Arbeit später noch eingegangen.

Es ist möglich, die Portfoliooptimierung in vielen verschiedenen Finanzmarktmodellen durchzuführen, wie beispielsweise in einem Aktienmarkt, einem Devisenmarkt oder einem Bondmarkt. In dieser Masterarbeit findet die Portfoliooptimierung sowohl in dem klassischen Black-Scholes Modell als auch in einem Zinsstrukturmodell wie dem Einfaktor Vasicek-Modell und dem HJM-Modell statt.
Inhalt dieser Masterarbeit ist wie schon zuvor beschrieben, das optimale Managen eines Ga-

rantiefonds. Zentrales Hilfsmittels hierzu ist die Portfoliooptimierung mit einer Garantie. Dies bedeutet, dass die Optimierung unter der Nebenbedingung geschieht, dass der Fond am Ende des Handelszeitraums eine vorher festgelegte Summe als Endvermögen mindestens erreichen muss. Dieser vorher festgelegte Benchmark wird zunächst als eine Konstante angenommen und eine allgemeine Methode zur Lösung dieses Problems entwickelt. Anschließend werden explizite Optimierungen in verschiedenen Finanzmarktmodellen durchgeführt. Wichtig ist jedoch für die Berechenbarkeit, dass die Volatilitäten der gehandelten Finanzgüter deterministisch sind, da in der Optimierung eine Call-Option bewertet werden muss. Im Anschluss wird die Annahme des konstanten Benchmarks zu einem stochastischen Benchmark, einer Zufallsvariablen, verallgemeinert. Hierdurch verändert sich der allgemeine Lösungsweg, sodass nun eine Exchange-Option statt einer Call-Option bewertet werden muss.

Inhaltlich gliedert sich die Masterarbeit in 5 Kapitel mit folgenden zentralen Schwerpunkten. Das erste Kapitel liefert auf Basis eines mehrdimensionalen Semimartingalmodells eine kurze Einführung in die Finanzmathematik. Zudem werden wichtige Begriffe wie Handelsstrategie, Portfolioprozess und Nutzenfunktionen eingeführt. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einer kurzen Einführung in die Portfoliooptimierung mittels der bereits erwähnten Martingalmethode. Es werden erste Optimierungsprobleme gelöst. Dabei werden, wie in der gesamten Arbeit, im Schwerpunkt logarithmische- sowie Power-Nutzenfunktionen genutzt.

Im zweiten Kapitel wird zunächst ein allgemeines Short-Rate Modell beschrieben und die abitragefreien Bondpreise, sowie die Volatilitäten analysiert. Anschließend wird das Vasicek-Modell als Beispiel eingeführt. Danach werden für diese Arbeit wichtige Zwischenergebnisse festgehalten, wie die Bewertung einer Call-Option in diesem Modell auf einen Bond. Am Ende des Abschnitts wird zudem das Forward Martingalmaß eingeführt, welches im weiteren Verlauf der Arbeit in der Optimierung eine wichtige Rolle spielen wird.

Die Betrachtungen des zweiten Kapitels werden im dritten Kapitel verallgemeinert und das HJM-Modell eingeführt. Hierfür werden zunächst wichtige Grundlagen gelegt und anschließend ein spezielles HJM-Modell, das Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate analysiert. In diesem Modell finden später explizite Optimierungen statt.

Im vierten Kapitel wird zuerst die Portfoliooptimierung mit deterministischer Garantie beschrieben und ein allgemeiner Lösungsweg aufgezeigt. Anschließend wird eine Optimierung im Black-Scholes, Vasicek- und HJM-Modell, sowie in einem Mixed Stock Bond Markt betrieben. Grundlage für die Modellierung der Präferenzen des Investors sind hier immer die logarithmische- und die Power-Nutzenfunktion.

Im fünften Kapitel wird die Annahme einer deterministischen Garantie zu einer stochastischen Garantie verallgemeinert. Auch hier wird zunächst ein allgemeiner Lösungsansatz beschrieben und anschließend eine Optimierung in einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und in einem Mixed Stock Bond Markt durchgeführt.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen finanzmathematischen Grundlagen, welche in dieser Arbeit benötigt werden, vorgestellt. Zunächst wird ein zeitstetiges Finanzmarktmodell für einen mehrdimensionalen Finanzmarkt beschrieben. Anschließend wird auf Handelsstrategien und Vermögensprozesse eingegangen. Um die Präferenzen des Investors beschreiben, beziehungsweise modellieren zu können, werden im dritten Abschnitt Nutzenfunktionen eingeführt. Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Lösung der Portfoliooptimierung ist die Martingalmethode, welche im letzten Abschnitts dieses Kapitels präsentiert wird.
Die in diesem Kapitel beschriebenen Grundlagen reichen jedoch nicht aus, um als mathematische Einführung in die zeitstetige Finanzmathematik angesehen zu werden. Hier wird auf [6] beziehungsweise [7] verwiesen, welche ebenfalls als Quellen für dieses Kapitel dienen. Ebenso wurde sich an [9] und [17] orientiert.

1.1 Zeitstetiges Finanzmarktmodell

In diesem Abschnitt wird ein zeitstetiges vollständiges Semimartingalmodell zur Beschreibung eines mehrdimensionalen Finanzmarktes eingeführt. Dieses wird von einem mehrdimensionalen Wiener Prozess getrieben. Wir betrachten den Handelszeitraum $[0, T^*]$, mit $0 < T^* < \infty$ und einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, wobei der Informationsverlauf $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Wiener Filtration sei, also eine von einem Wiener-Prozess erzeugte Filtration, die die usual conditions erfüllt. Genauer:

Definition 1.1 Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

- heißt vollständig, wenn $\mathcal{F}_0$ alle Nullmengen enthält,
- heißt rechtsstetig, wenn $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$ für jedes $t \geq 0$,
- erfüllt die usual conditions, wenn sie vollständig und rechtsstetig ist.

Ist eine Filtration vollständig, so enthält nicht nur $\mathcal{F}_0$ alle Nullmengen, sondern auch $\mathcal{F}_t$ für jedes $t \geq 0$. Dies liegt daran, dass Filtrationen aufsteigend geordnet sind, also für alle $s < t$ gilt $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Nun zu der Wiener-Filtration. Diese lässt sich wie folgt konstruieren

Konstruktion 1.2 Betrachte einen n-dimensionalen Wiener Prozess $W = (W_1, \ldots, W_n)$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Wir setzen

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(W_s : \ s \leq t) \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Somit ist dann

$$\mathcal{F}^0_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}^0_{t+\epsilon}$$

eine rechtsstetige Filtration. Betrachten wir nun die Nullmengen des Maßes $\mathbb{P}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Teilmengen von Nullmengen bezüglich $\mathbb{P}$, also

$$\mathcal{N} := \{A \subset \Omega : \ \exists\ B \in \mathcal{F}^0_T \text{ mit } \mathbb{P}(B) = 0 \text{ und } A \subset B\}.$$

Setzen wir nun

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{F}^0_{t+} \cup \mathcal{N}),$$

so erhalten wir eine vollständige Filtration, welche ebenfalls rechtsstetig ist. Nach Definition 1.1 handelt es sich also um eine Filtration, die die usual conditions erfüllt. Zudem ist W ein Wiener Prozess bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dies ist die kleinste Filtration, die die usual conditions erfüllt und bezüglich welcher W ein Wiener Prozess ist. Aus diesem Grund wird sie als Wiener Filtration bezeichnet.

Als nächstes führen wir die auf dem Finanzmarkt zu handelenden Finanzgüter ein. Dazu betrachten wir nun einen n-dimensionalen Wiener Prozess $W = (W_1, \ldots, W_n)$ als Quelle des Zufalls in dem Finanzmarktmodell und setzen die dazugehörige Wiener-Filtration voraus. Unser Finanzmarkt besteht aus $n,\ n \in \mathbb{N}$ Finanzgütern (Aktien und Bonds), auch Basisfinanzgüter genannt, welche stetig über die Zeit gehandelt werden. Ihre Preise werden zum Zeitpunkt t durch $S_1(t), \ldots, S_n(t)$ für $0 \leq t \leq T^*$ mit strikt positiven Startwerten beschrieben. Wir nehmen an, dass diese Preisprozesse strikt positive Semimartingale sind.

Definition 1.3 Ein stochastischer Prozess X mit Werten in $\mathbb{R}^n$ heißt Semimartingal, wenn gilt:

- X ist adaptiert,
- X hat càdlàg Pfade, das heißt, dass die Pfade von X rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limiten existieren,
- es existiert eine Zerlegung $X = X_0 + M + A$, wobei X_0 eine fast sicher endliche und $\mathcal{F}_0$-messbare Startvariable, M ein lokales stetiges Martingal mit $M(0) = 0$ und A ein Prozess mit endlicher Variation und $A(0) = 0$ ist.

Da wir gefordert haben, dass die risky Assets $S(t) = (S_1(t), \ldots S_n(t))$ positive Semimartingale bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sind, existiert eine Zerlegung

$$S_i(t) = S_i(0) + M_i(t) + A_i(t), \qquad t \geq 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Mittels eines Martingaldarstellungssatzes [7, Satz 3.4.15] folgt, dass die lokalen Martingale M_i für alle $i = 1, \ldots, n$ stetige Pfade haben und das previsible Prozesse
$K_i(t) = (K_{i1}(t), \ldots, K_{in}(t))$ existieren mit

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \int_0^t K_i(s) dW(s) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^t K_{ij} dW_j(s), \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nun müssen wir voraussetzen, dass die Prozesse A_i fast-sicher absolut stetig sind. Mittels des Hauptsatzes der Lebesque-Integralrechnung existieren dann progressiv-messbare Prozesse $J_1, \ldots, J_n$ mit

$$A_i(t) = \int_0^t J_i(s) ds, \qquad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Wir setzen nun

$$\sigma_{ij}(t) := \frac{K_{ij}(t)}{S_i(t)} \qquad \text{und} \qquad \mu_i(t) := \frac{J_i(t)}{S_i(t)}, \qquad t \geq 0,\ i,j = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

und erhalten mit (1.1) - (1.4) für die Preisdynamik der risikobehafteten Finanzgüter

$$S_i(t) = S_i(0) + \int_0^t S_i(s)\mu_i(s) ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t S_i(s)\sigma_{ij}(s) dW_j(s).$$

Es gilt also die stochastische Differenzialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)\left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) dW_j(t)\right) \qquad S_i(0) \in (0, \infty),\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Der Prozess $\mu(t)$ wird als Drift und $\sigma_{ij}(t)$ als Volatilität bezeichnet. Die Eigenschaften, die diese Prozesse erfüllen werden weiter unten aufgelistet.
Des Weiteren führen wir ein weiteres Finanzgut, ein Numeraire-Finanzgut $N(t)$ ein. Dies kann sowohl ein Geldmarktkonto, aber auch ein risikobehaftetes Finanzgut S_{n+1} mit $S_{n+1} > 0$ $\mathbb{P}$ fast sicher für alle $0 \leq t \leq T^*$ sein. Der Preisprozess dieses Numeraire-Gutes ist im Falle eines Bankgeldkontos gegeben durch

$$d\beta(t) = \beta(t) r(t) dt, \qquad 0 \leq t \leq T^*, \qquad \beta(0) = 1 \tag{1.6}$$

und im Falle eines risikobehafteten Finanzgutes durch

$$dS_{n+1}(t) = S_{n+1}(t)\left(\mu_{n+1}(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{n+1,j}(t) dW_j(t)\right), \qquad 0 \leq t \leq T^*, \qquad S_i(0) = s_i \in (0, \infty). \tag{1.7}$$

Hierbei sind die Prozesse $r(t)$, $\mu(t) := (\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t))^\top$, $\sigma(t) := (\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ und $\sigma_{n+1,j}(t) := (\sigma_{n+1,1}(t), \ldots, \sigma_{n+1,n}(t))$ progressiv messbar und erfüllen die folgende Integrabilitätsbedingung

$$\int_0^{T^*} |r(s)| + \|\mu_{n+1}(s)\| + \|\mu(s)\| + \|\sigma_{n+1}(s)\|^2 + \|\sigma_i(s)\|^2 ds < \infty \qquad \mathbb{P} - \text{fast sicher}, \tag{1.8}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ und σ_i die i-te Zeile der Matrix σ bezeichnet. Zudem ist die $n \times n$-Matrix $\sigma(t)$ auf $[0, T^*] \times \Omega$ invertierbar.

Wir wollen einen Finanzmarkt betrachten, in welchem ein Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existiert. Dazu die folgende Definition:

Definition 1.4 Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ heißt äquivalentes Martingalmaß zu $\mathbb{P}$, falls

i) $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$,

ii) der diskontierte Preisprozess des risikobehafteten Finanzgutes $S^*(t) := N^{-1}(t)S(t)$ ein lokales $\mathbb{P}^*$-Martingal ist.

Allein die Annahme der Arbitragefreiheit liefert in einem stetigen Finanzmarktmodell noch nicht die Existenz eines Martingalmaßes. Es muss zudem gefordert werden, dass die no free lunch with vanishing risk Bedingung (NFLVR) erfüllt ist. Die Existenz eines Martingalmaßes hingegen liefert die Eigenschaft der Arbitragefreiheit. Deshalb die folgende Definition:

Definition 1.5 Ein Finanzmarkt heißt arbitragefrei, falls ein äquivalentes Martingalmaß existiert.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird in dem folgenden Satz noch ein explizites Martingalmaß für diesen Finanzmarkt angeben:

Satz 1.6 *Es sei für das obere Finanzmarktmodell $\mathbb{P}^*$ das äquivalente Martingalmaß bezüglich des Numeraire N. Dann existiert ein $\mathbb{R}^n$-wertiger, previsibler Prozess $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ mit $\mathbb{P}(\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds < \infty) = 1$ für alle $0 \leq t \leq T^*$, sodass*

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \vartheta_i(u) dW_i(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^2(u) du\right) =: L(t). \tag{1.9}$$

Des Weiteren gilt, dass der Prozess $\frac{S_i(t)}{N(t)}$ für $i = 1, \ldots, n+1$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal ist. Zudem ist der Wiener Prozess unter dem Maß $\mathbb{P}^*$ gegeben durch

$$dW_i^*(t) = dW_i(t) - \vartheta_i(t)dt, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.10}$$

Der Prozess $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ wird als Marktpreis des Risikos bezeichnet.

Beweis: Für einen Beweis dieses elementaren Satzes der Finanzmathematik verweisen wir auf [6, 1.4.2]. □

Die Arbitragefreiheit lässt sich zudem mittels des folgenden Satzes charakterisieren:

Satz 1.7 *Ein äquivalentes Martingalmaß existiert genau dann, wenn es einen previsiblen Prozess $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ gibt, der*

$$\int_0^{T^*} \|\vartheta(t)\| dt < \infty \qquad \textit{fast sicher}$$

und

$$\mu(t) + \sigma(t)\vartheta(t) = r(t)\boldsymbol{1}_n, \qquad 0 \leq t \leq T^*, \quad \textit{fast sicher}$$

mit $\boldsymbol{1}_n = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ erfüllt und zudem

$$\mathbb{E}(L(T)) = 1$$

gilt.

Beweis: Ein Beweis ist in [6, Satz 1.4.2] zu finden. □

1.2 Handelstrategien und Vermögensprozess

Nachdem der Finanzmarkt mit seinen Finanzgütern in dem vorherigen Abschnitt vorgestellt worden ist, wird in diesem Abschnitt das Handeln des Investors modelliert. Wir betrachten einen Investor, dem ein Anfangskapital von $b > 0$ zur Verfügung steht. Es kann kontinuierlich zu jedem Zeitpunkt t gehandelt werden bis zu einem bestimmten Planungshorizont $T \leq T^*$. Der Investor kann sowohl in die n risikobehafteten Finanzgüter als auch in das Numeraire-Finanzgut investieren. Das Handeln wird durch einen $\mathbb{R}^n$-wertigen Portfolioprozess

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))^\top_{0 \leq t \leq T}$$

modelliert, wobei $\pi_i(t)$ den Geldbetrag bezeichnet, welchen der Investor zur Zeit t in das i-te risikobehaftete Finanzgut investiert. Wir fordern zudem, dass das restliche Kapital in das Numeraire-Finanzgut investiert wird. Dieser Geldbetrag wird mit $\pi_0(t)$ bezeichnet. Als Anlage hierfür kann wieder ein weiteres risikobehaftetes Finanzgut oder ein Geldmarktkonto gewählt werden. Durch das Verfolgen der Portfoliostrategie π zum Anfangskapital b wird ein Vermögensprozess $X^{b,\pi}$ erzeugt. Das Vermögen zum Zeitpunkt t stellt den Gesamtwert der Finanzgüter in dem Portfolio dar, das heißt es gilt:

$$X^{b,\pi}(t) = \frac{\pi_0(t)}{N(t)} N(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i(t)}{S_i(t)} S_i(t).$$

Somit ist der Geldbetrag, der in das Numeraire-Finanzgut investiert wird gegeben durch

$$\pi_0(t) = X^{b,\pi}(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t).$$

Der Portfolioprozess wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit die wichtige Eigenschaft der Selbstfinanzierung erfüllen. Dies bedeutet, dass die Änderung des Vermögens ausschließlich aus dem Gewinn (bzw. Verlust) der Investition resultiert. Aus diesem Grund erfüllt der Vermögensprozess die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dX^{b,\pi}(t) = \pi_0(t) \frac{dN(t)}{N(t)} + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}, \qquad X^{b,\pi}(0) = b.$$

Wir setzten nun die Dynamiken der Finanzgüter (1.5), (1.6) und (1.7) ein und erhalten für die Entwicklung des Vermögensprozesses:

Im Falle von $N(t) = \beta(t)$

$$dX^{b,\pi}(t) = r(t) X^{b,\pi}(t) dt + \pi(t)^\top \Big((\mu(t) - r(t) \mathbf{1}_n) dt + \sigma(t) dW(t) \Big) \tag{1.11}$$

und im Falle von $N(t) = S_{n+1}(t)$

$$\begin{aligned} dX^{b,\pi}(t) =& X^{b,\pi}(t) \Big(\mu_{n+1}(t) dt + \sigma_{n+1}(t) dW(t) \Big) \\ &+ \pi(t)^\top \Big((\mu(t) - \mu_{n+1} \mathbf{1}_n) dt + (\sigma(t) - \mathbf{1}_n \sigma_{n+1}(t)) dW(t) \Big), \end{aligned} \tag{1.12}$$

wobei $\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Aus dieser Vermögensgleichung ist es ersichtlich, dass der Portfolioprozess bestimmte Integrabilitätsbedingungen erfüllen muss, damit eine eindeutige Lösung für diese Gleichung existiert. In der nachfolgenden Definition des Portfolioprozesses werden diese Forderungen festgehalten.

Definition 1.8 Ein progressiv messbarer $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess $\pi(t) = (\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))^\top_{0 \leq t \leq T}$ heißt Portfolioprozess, wenn er die folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_0^T \left\|\pi(t)^\top \sigma(t)\right\|^2 dt + \int_0^T |\pi(t)^\top (\mu(t) - r(t)\mathbf{1}_n)| dt < \infty \qquad \mathbb{P} - \text{fast sicher.} \tag{1.13}$$

Bemerkung 1.9 Die Integrabilitätsbedingung (1.13) für den Portfolioprozess folgt aus dem Fall, dass das Numeraire-Finanzgut das Bankgeldkonto ist. Für den Fall, dass das Numeraire-Finanzgut ein risikobehaftetes Asset ist, müsste die Integrabilitätsbedingung

$$\int_0^T \left\|\pi(t)^\top (\sigma(t) - \mathbf{1}_n \sigma_{n+1}(t))\right\|^2 dt + \int_0^T |\pi(t)^\top (\mu(t) - \mu_{n+1}(t)\mathbf{1}_n)| dt < \infty \qquad \mathbb{P} - \text{fast sicher}$$

lauten. Diese Gleichung ergibt sich jedoch aus den Integrabilitätsbedingungen (1.8) und (1.13) und somit reicht es (1.13) zu fordern.

Als nächstes wird der Begriff der Selbstfinanzierung mathematisch formuliert:

Definition 1.10 Ein Portfolioprozess π heißt selbstfinanzierend, falls der entsprechende Vermögensprozess $X^{b,\pi}$ die Vermögensgleichung (1.11) beziehungsweise (1.12) eindeutig löst.

Jedoch darf man nicht alle progressiv-messbare Prozesse $(\pi(t))_{0 \leq t < T^*}$ zulassen, da sonst schon in einfachen Modellen Arbitragemöglichkeiten entstehen. Zudem besteht die Möglichkeit, dass der Investor so hohe Schulden verursacht, welche er nicht mehr begleichen kann. Deshalb betrachten wir nur die zulässigen Handelsstrategien.

Definition 1.11 Ein selbstfinanzierender Portfolioprozess π heißt zulässig für ein Anfangskapital $b \geq 0$, wenn der zugehörige Vermögensprozess $X^{b,\pi}$ positiv ist, dass heißt $X_t^{b,\pi} \geq 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Wir bezeichnen die Menge aller zulässigen Portfolioprozesse mit Anfangskapital $b \geq 0$ mit $\mathcal{A}_0(b)$.

Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, welches Endvermögen durch investieren des Anfangskapitals $b \geq 0$ erreicht werden kann. Dies ist eine zentrale Frage in der Portfoliooptimierung. Um diese Frage zu beantworten definieren wir den folgenden stochastischen Prozess

$$H(t) := \frac{L(t)}{N(t)}, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.14}$$

Satz 1.12 (1) *Der selbstfinanzierende Portfolioprozess π sei zulässig für ein Anfangskapital $b \geq 0$, dass heißt $\pi \in \mathcal{A}_0(b)$. Dann erfüllt der zugehörige Vermögensprozess $X^{b,\pi}$ die sogenannte Budgetbedingung*

$$N(0)\mathbb{E}(H(t)X^{b,\pi}(t)) \leq b \qquad \textit{für alle} \qquad 0 \leq t \leq T.$$

(2) *Es seien ein Anfangskapital* $b \geq 0$ *und eine nichtnegative,* $\mathcal{F}_T$*-messbare Zufallsvariable* Y *gegeben, für welche*

$$b = N(0)\mathbb{E}(H(T)Y) < \infty$$

gilt. Dann existiert ein Portfolioprozess $(\pi(t))_{0\leq t\leq T}$ *mit* $\pi \in \mathcal{A}_0(b)$*, sodass der zugehörige Vermögensprozess* $X^{b,\pi}$ *die folgende Gleichung erfüllt*

$$X^{b,\pi}(T) = Y \qquad \mathbb{P} - \textit{fast sicher.}$$

Beweis: Für den Beweis dieses elementaren Satzes des Finanzmathematik verweisen wir auf den Beweis von Satz 2.6 in [9]. □

Bemerkung 1.13 Der erste Teil dieses Satzes zeigt, dass zum Erreichen eines bestimmten Endvermögens Y in T das Anfangsvermögen in Höhe von mindestens $N(0)\mathbb{E}(H(T)Y)$ erforderlich ist. Teil (2) sagt aus, dass bei ausreichend hohem Anfangskapital jedes erwünschte Endvermögen Y in T durch das Handeln entsprechend eines selbstfinanzierenden, zulässigen Portfolioprozesses π realisiert werden kann.

Im folgeden wird der Begriff des Hedgings eingeführt.

Definition 1.14 Ein t-Claim C ist eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable, die auszahlbar zum Zeitpunkt t ist.

Die arbitragefreie Bewertung eines t-Claims kann mittels des folgenden Resultates durchgeführt werden.

Satz 1.15 *Der arbitragefreie Anfangspreis eines* t*-Claims* C *ist gegeben durch*

$$p_0(C) = \mathbb{E}^*(N^{-1}(T)C) \cdot N(0).$$

Es bezeichnet $\mathbb{E}^*(\cdot)$ *den Erwartungswert bezüglich dem Maß* $\mathbb{P}^*$

Definition 1.16 Ein t-Claim C heißt hedgebar oder replizierbar, falls ein selbstfinanzierender Portfolioprozess π existiert, dessen zugehöriger Vermögensprozess $X^\pi(t)$

$$C = X(T)$$

erfüllt. Ein Markt heißt vollständig, falls jeder t-Claim C hedgebar ist.

Satz 1.17 (2. Fundamentalsatz der Preistheorie)
Ein Finanzmarkt ist genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes Martigalmaß existiert.

Beweis: Eine Beweisskizze ist beispielsweise in [16, S. 232] zu finden. □

1.3 Nutzenfunktionen

Jeder Investor hat eine unterschiedliche Einstellung zum Risiko und jeder empfindet den Wert eines Geldbetrags als unterschiedlich. Die Idee in der Portfoliooptimierung ist es mit Hilfe einer

Nutzenfunktion jedem möglichen Endvermögen den daraus resultierenden Nutzen zuzuordnen und anschließend die Handelsstrategie so zu wählen, dass der erwartete Nutzen maximal wird. Der Grad der Risikoaversion des Investors wird dabei durch die Nutzenfunktion modelliert. Diese ist wie folgt definiert:

Definition 1.18 Eine stetige Funktion $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die strikt konkav, streng monoton wachsend und stetig differenzierbar ist heißt Nutzenfunktion, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt

$$U'(0+) := \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = +\infty \tag{1.15}$$

$$U'(\infty) := \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0. \tag{1.16}$$

Diese Eigenschaften lassen sich ökonomisch wie folgt interpretieren. Wegen des streng monotonen Wachstums wird ein höheres x immer bevorzugt, da man davon ausgeht, dass mehr Geldeinsatz einen höheren Nutzen beigemessen wird. Die strikte Konvexität, sowie die Bedingungen (1.15) und (1.16) lassen sich als das erste Gossensche Gesetz, das Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen interpretieren. Dies besagt, dass bei steigendem Konsum eines Gutes, also wenn hier das x steigt, der Zusatznutzen (Grenznutzen) immer kleiner wird.
Nun geben wir Beispiele für Nutzenfunktion an:

Beispiel 1.19 i) Logaritmische Nutzenfunktion:

$$U(x) = \log(x), \qquad x > 0.$$

ii) Power-Nutzenfunktion:

$$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \qquad x \in (0, \infty),\ -1 \leq \alpha \leq 1,\ \alpha \neq 0.$$

Die Power-Nutzenfunktion gehört zur Familie der CRRA Nutzenfunktionen, also zur Familie der Nutzenfunktionen mit einem konstanten relativen Risikoaversionsparameter α (constant relative risk aversion).

iii) Exponentielle Nutzenfunktion:

$$U(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}, \qquad x \in (0, \infty),\ \alpha \in (0, \infty).$$

Diese Nutzenfunktion gehört zu der Familie der CARA Nutzenfunktionen. In diesem Fall handelt es sich um eine Nutzenfunktion mit einem konstanten absoluten Risikoaversionsparameter α (constant absolute risk aversion).

Im späteren Verlauf der Arbeit benötigen wir die Inverse der Ableitung einer Nutzenfunktion um beispielsweise das optimalen Endvermögen zu bestimmen.

Definition 1.20 Die Inverse der Ableitung einer Nutzenfunktion wird mit $I(\cdot)$ bezeichnet und hat die Form

$$I(\cdot) = (U')^{-1}(\cdot).$$

Nun muss die Frage gestellt werden, ob so eine Funktion überhaupt existiert. Dies ist aber nach der Definition 1.18 einer Nutzenfunktion klar, denn U' ist stetig und streng monoton fallend, da eine Nutzenfunktion U nach Definition stetig differenzierbar und strikt konkav ist. Zudem ist das Bild von U' das Intervall $(0, \infty)$. Also ist U' schlussendlich bijektiv. Also exisitiert eine Umkehrfunktion $(U')^{-1} = I$.
Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir noch ein paar Eigenschaften von I an:

Bemerkung 1.21 Die Funktion $I : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist eine streng monoton fallende, stetige, positive Funktion mit

$$I(0+) = (U')^{-1}(0+) = +\infty \tag{1.17}$$

$$I(\infty) = (U')^{-1}(\infty) = 0. \tag{1.18}$$

Im späteren Verlauf wird die folgende Aussage für die Verifizierung einer Lösung in einem Optimierungsproblem benötigt.

Lemma 1.22 *Sei U eine Nutzenfunktion und I die Inverse von U'. Dann gilt die folgende Ungleichung*

$$U(I(y)) \geq U(x) + y(I(y) - x) \qquad \text{für } x, y \in (0, \infty).$$

Beweis: Da die Nutzenfunktion nach 1.18 konkav ist gilt unmittelbar

$$U(I(y)) \geq U(x) + U'(I(y))(I(y) - x) = U(x) + y(I(y) - x).$$

□

1.4 Portfoliooptimierung mittels der Martingalmethode

Betrachten wir zunächst ein Standard-Portfoliooptimierungsproblem, in dem der erwartete Endnutzen des Investors maximiert werden soll. Die Martingalmethode spaltet das Optimierungsproblem in ein statisches Problem, in welchem das erwartete Endvermögen berechnet wird und in ein Darstellungsproblem, in welchem mittels der Lösung aus dem statischen Problem die optimale Handelsstrategie bestimmt wird. Da es sich um ein elementares und schon oft ausgeführtes Verfahren handelt, werden wir zum großen Teil nur die Ergebnisse präsentieren und für die Beweise auf die entsprechende Literatur verweisen.

Sei U eine Nutzenfunktion gemäß Definition 1.18. Das Problem des Investors, welcher seinen erwarteten Endnutzen durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie π mit dem Anfangskapital $b > 0$ maximieren will, heißt Merton Problem. Ziel des Investors ist also das folgende:

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(b)} \mathbb{E}\Big(U(X^{b,\pi}(T))\Big), \tag{1.19}$$

wobei

$$\mathcal{A}(b) := \{\pi : \pi \text{ selbstfinanzierend mit } X^{b,\pi}(t) \geq 0 \text{ für alle } t \text{ und } \mathbb{E}(U(X^{b,\pi}(T))^-) < \infty\}. \tag{1.20}$$

Mittels der Einschränkung auf die Menge $\mathcal{A}(b)$ ist sichergestellt, dass der Erwartungswert in (1.19) existiert. Dies bedeutet jedoch nicht, dass dieser nicht unendlich sein kann.
Beachte, dass jeder t-Claim C durch ein Anfangsvermögen $b = p_0(C)$ und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie π, folgend bis zum Zeitpunkt t, repliziert werden kann. Für den damit assoziierten Vermögensprozess gilt also

$$X^{p_0(C),\pi}(t) = C.$$

Wegen dieses fundamentalen Zusammenhangs zwischen den Stategien und der korrekten Bepreisung von Claims, kann jedes erreichbare Zielvermögen von einem Startkapital nicht größer als b als T-Claim mit Startpreis nicht größer als b gesehen werden und umgekehrt. Um das optimale Endvermögen zu bestimmen müssen wir (A) einen optimalen T-Claim, finanziert durch ein Anfangsvermögen nicht größer als b finden und (B) eine Handelsstrategie finden, die diesen optimalen Claim repliziert.

Das statische Problem (A)
Das statische Problem wird mittels der punktweisen Lagrangemethode gelöst. Dazu definieren wir die Menge der betrachteten Handelsstrategien $\mathcal{A}(b)$ ein wenig um:

$$\mathcal{B}(b) := \{C : C \text{ nicht-negativer } T\text{-Claim mit } \mathbb{E}(U(C)^-) < \infty \text{ und } p_0(C) \leq b\}. \tag{1.21}$$

Somit ist das statische Problem nun gegeben durch

$$\max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C)). \tag{1.22}$$

Um das ursprünglich aufgestellt Problem zu lösen, genügt es somit über $\mathcal{B}(b)$ zu optimieren. Dabei kann der arbitragefreie Preis $p_0(C)$ des T-Claims C nicht größer als das Startkapital b sein. Also lautet die Nebenbedingung für das Optimierungsproblem nun

$$p_0(C) \leq b.$$

Da dies nicht mehr abhängig von der Zeit ist, wird es als statisches Problem bezeichnet. Um einen passenden Kandidaten für das optimale Endvermögen zu finden, verwenden wir die punktweise Lagrangemethode. Mittels Satz 1.15 und eines Maßwechsels gilt für die Nebenbedingung:

$$p_0(C) = \mathbb{E}^*(N^{-1}(T)C) \cdot N(0) = \mathbb{E}(N^{-1}(T)L(T)C) \cdot N(0) = \mathbb{E}(H(T)C) \cdot N(0),$$

mit $L(t)$ definiert wie in Satz 1.6, $0 \leq t \leq T$ und $H(t) = N^{-1}(t)L(t)$, $0 \leq t \leq T$ bezeichnet den diskontierten Martingalprozess. Sei λ der Lagrangeparameter. Somit ergibt sich die Nebenbedingung zu

$$\mathbb{E}(H(T)C) \leq b \cdot N^{-1}(0).$$

Wir fixieren ein $\omega \in \Omega$ und betrachten eine zufällige Auszahlung x zum Zeitpunkt T, also $x = C(\omega)$. Dann ist das statische Problem

$$\max_{x \geq 0}(U(x) - \lambda(H(T)(\omega)x - b \cdot N^{-1}(0))).$$

Das nun entstandene Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung, lässt sich wie folgt lösen: Wir bestimmen das Maximium der Funktion

$$f(x) := U(x) - \lambda(H(T)x - b \cdot N^{-1}(0)),$$

indem wir nach x ableiten und dann $f'(x) = 0$ setzen. Dies ergibt dann

$$x = I(\lambda H(T)(\omega)),$$

wobei I die Inverse der Ableitung der Nutzenfunktion ist. Da dies für alle $\omega \in \Omega$ gilt, erhalten wir als Kandidaten für die Lösung des statischen Problems den T-Claim

$$C = I(\lambda H(T)). \tag{1.23}$$

Falls jedoch U' nicht bei unendlich verschwindet, so existiert keine endliche Lösung, da $H(T)$ dann nicht beschränkt ist. Das dieser Kandidat (1.23) wirklich optimal ist, wird im folgenden Satz gezeigt:

Satz 1.23 *Sei U eine Nutzenfunktion nach Definition 1.18 und $b > 0$. Für alle $\lambda > 0$ gelte $\mathbb{E}(H(T)) < \infty$ und $\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T))) < \infty$. Dann wird das statische Problem* (1.22) *gelöst durch*

$$C = I(\lambda H(T)),$$

wobei $\lambda > 0$ eindeutig durch $\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T))) = b$ bestimmt ist.

Beweis: Ein Beweis dieses Resultates ist in [17, Satz 2.4] zu finden. □

Das Darstellungsproblem (B)

Der zweite Schritt ist eine optimale Handelsstrategie π zu bestimmen, welche das optimale Endvermögen $I(\lambda H(T))$, welches mit Satz 1.23 gefunden wurde, repliziert. Hier ist der folgende Satz von Bedeutung:

Satz 1.24 *Zu dem Portfolioproblem* (1.19) *und zu einem T-Claim $C = I(\lambda H(T))$ existiert unter den Voraussetzungen von Satz 1.23 eine Handelsstrategie $\pi \in \mathcal{A}(b)$, die das Problem optimal löst. Der zugehörige Vermögensprozess X ist gegeben durch*

$$V(t) = \frac{1}{H(t)} \mathbb{E}(H(T)C | \mathcal{F}_t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Die Handelsstrategie π ergibt sich aus

$$\pi(t)\sigma(t) = \frac{\psi(t)}{H(t)} - X(t)\vartheta(t), \qquad 0 \le t \le T,$$

wobei ψ durch

$$H(t)X(t) = b + \int_0^T \psi(s)dW(s), \qquad 0 \le t \le T,$$

bestimmt ist.

Beweis: Hier wird auf [17, Satz 2.5] verwiesen. □

Somit haben wir nun alle Instumente zusammen, um das Portfoliooptimierungsproblem zu lösen. Fassen wir noch einmal zusammen:

i) Mittels Satz 1.23 ermitteln wir das optimale Endvermögen als Lösung des statischen Problems durch $C = I(\lambda H(T))$ unter der Bedingung $\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T))) = b$.

ii) Mittels Satz 1.24 bestimmen wir die Handelsstrategie zum optimalen T-Claim C und lösen somit das Darstellungsproblem.

In den folgenden beiden Beispielen wird die hier hergeleitete Theorie einmal auf die logarithmische und anschließend auf die Power-Nutzenfunktion angewendet und das Optimierungsproblem explizit gelöst.

Beispiel 1.25 (Lösung des Merton-Problems bei logarithmischer Nutzenfunktion)
In diesem Abschnitt betrachten wir ein Standard-Finanzmarktmodell, welches ein Geldmarktkonto mit Preisprozess β und eine risikobehaftete Aktie mit Preisprozess S beinhaltet. Zudem betrachten wir eine logarithmische Nutzenfuktion $U(x) = \log(x)$ und starten mit einem Anfangskapital von $b > 0$. Für die Basisfinanzgüter gelten die Dynamiken, welche in Abschnitt 1.1 beschrieben worden sind. Wir fordern zudem, dass $\mathbb{E}(H(T)) < \infty$.
Zunächst muss das statische Problem gelöst werden. Die Voraussetzungen von Satz 1.23 sind erfüllt, da $\mathbb{E}(H(T)) < \infty$ vorausgesetzt worden ist und für alle $\lambda > 0$ aus $U'(x) = \frac{1}{x}$ und $I(y) = (U'(x))^{-1}(y) = \frac{1}{y}$ folgt:

$$\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T))) = \mathbb{E}\left(H(T)\frac{1}{\lambda H(T)}\right) = \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

Also ist mittels Satz 1.23 die Lösung des statischen Problems gegeben durch

$$C = I(\lambda H(T)) = \frac{1}{\lambda H(T)}.$$

Das Darstellungsproblem wird gelöst durch

$$\pi(t) = -\frac{\vartheta(t)}{\sigma(t)} = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma^2(t)}.$$

Im Black-Scholes-Modell mit konstanten Koeffizienten bedeutet dies, dass über den gesamten Handelszeitraum ein fester Anteil von $\pi = \frac{\mu - r}{\sigma}$ in die Aktie investiert werden muss, damit unter logarithmischem Nutzen optimal gehandelt wird.
Für explizite Rechenschritte verweisen wir wieder auf [17].

Beispiel 1.26 (Lösung des Merton-Problems bei Power-Nutzenfunktion)
Wir betrachten denselben finanzmathematischen Rahmen wie im Beispiel 1.25 zuvor, setzen jetzt aber eine Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ mit $\alpha \in (0, 1)$ anstatt einer logarithmischen Nutzenfunktion voraus und nehmen an, dass die in dem Standard-Finanzmarktmodell vorkommende Aktie eine deterministische Volatilität besitzt.

Auch hier bestimmen wir zunächst die Lösung des statischen Problems. Dazu müssen die Voraussetzungen von Satz 1.23 erfüllt sein. Da wir die Voraussetzungen aus dem vorherigen Abschnitt übernommen haben, gilt bereits $\mathbb{E}(H(T)) < \infty$. Für die Powernutzenfunktion gilt $I(y) = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T))) &= \mathbb{E}(H(T)(\lambda H(T))^{-\frac{1}{1-\alpha}}) \\ &= \lambda^{-\frac{1}{1-\alpha}}\mathbb{E}\left(H(T)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right).\end{aligned}$$

Hier muss also eine weitere Voraussetzung hinzugefügt werden, damit Satz 1.23 angewendet werden kann. Es muss gefordert werden, dass

$$\mathbb{E}\left(H(T)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) < \infty \tag{1.24}$$

gilt. Mittels dieser Voraussetzung ergibt sich ein optimales Endvermögen von

$$C = (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{1.25}$$

mit einer eindeutig bestimmten Konstanten λ. Eine vollständige Lösung des statischen Problems ist gegeben durch:

$$C = \frac{b}{m(T)}H(T)^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{1.26}$$

wobei $m(t)$ gegeben ist durch

$$m(t) := \mathbb{E}\left(H(t)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$$

und der optimale Portfolioprozess durch

$$\pi(t) = \frac{1}{\alpha-1}\frac{\vartheta(t)}{\sigma(t)}.$$

Auch hier verweisen wir für exakte Rechenschritte auf [17].

2 Short-Rate Modell

In diesem Kapitel wird zunächst ein allgemeines Short-Rate Modell beschrieben und Bedingungen für die Arbitragefreiheit hergeleitet. Anschließend wird das Vasicek-Modell betrachtet. Wir bestimmen den Preis einer Nullkuponanleihe im Einfaktor Vasicek-Modell, zeigen, dass die Volatilität eines Bonds deterministisch ist und Bewerten eine Call-Option auf einen Bond im Einfaktor Vasicek-Modell. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt insbesondere an [14] und [17]. Abschließend wird das Forward Martingalmaß vorgestellt, welches im weiteren Verlauf bei der Portfoliooptimierung eine zentrale Rolle spielen wird. Hier diente [3], [8] sowie [17] als Orientierung.

2.1 Das Einfaktor Bondmarktmodell

Wir werden ein Modell für den Zinssatz r, also für eine zufällige Zinsentwicklung, beschreiben. Dieser Zinssatz r wird als Short-Rate bezeichnet und gibt den Wert des Bonds an, wenn dieser im nächsten Moment fällig ist. Es wird ausgehend von der Short-Rate ein arbitragefreies Bondmarktmodell entwickelt.

Wir betrachten einen Handelszeitraum $[0, T^*]$ mit $T^* > 0$. Die Quelle des Zufalls in dem Bondmarkt sei durch einen eindimensionalen Wiener-Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ gegeben. Sei $(\mathcal{F}_t)$ die von dem Wiener Prozess W erzeugte Filtration. Auf dem Bondmarkt werden zwei Basisfinanzgüter gehandelt. Zum einen das risikoneutrale Geldmarktkonto mit Preisprozess β, ein risikobehaftetet Asset, ein T_1-Bond mit Laufzeit $T_1 \leq T^*$ und Preisprozess $B(t, T_1)$, $t \geq 0$. Für $B(t, T_1)$ fordern wir folgende vier Eigenschaften:

i) $B(T_1, T_1) = 1$,

ii) $(B(t, T_1))_{t\geq 0}$ ist ein positives Semimartingal mit stetigen Pfaden,

iii) der Variationsanteil von $B(t, T_1)$ hat fast sicher absolut stetige Pfade bezüglich des Lebesque-Maßes,

iv) $B(t, T_1)$ hat für $t \leq T_1 \leq T^*$ fast sicher differenzierbare Pfade, d.h. $B(t, T_1)$ ist differenzierbar in T_1 für fast alle $\omega \in \Omega$.

Mittels dieser Eigenschaften lässt sich folgendes festhalten:

Folgerung 2.1 Der Preisprozess eines T_1-Bonds $B(t, T_1)$ erfüllt für alle $t \geq 0$ eine stochastische Differenzialgleichung der Form

$$dB(t, T_1) = B(t, T_1)(\mu(t, T_1)dt + \sigma(t, T_1)dW(t)), \qquad B(T_1, T_1) = 1,$$

wobei $\mu(t,T_1)$ und $\sigma(t,T_1)$ previsible Prozesse sind. Für einen Beweis dieser Aussage nutzt man die Eigenschaften (ii) und (iii) für einen T_1-Bond und argumentiert wie bei der Herleitung einer stochatischen Differentialgleichung einer Aktie.

Nun wird dieses Modell auf die Existenz von Arbitragen untersucht. Hierzu wählen wir zunächst einen Bond mit maximaler Laufzeit $T_1 = T^*$. Damit das hier beschriebene Bondmarktmodell arbitragefrei ist, ist ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ nötig. Dieses ist mittels des Satzes von Girsanov bestimmt durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta^2(s)ds\right), \qquad 0 \le t \le T^*$$

und

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds$$

ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$. Somit ergibt sich für einen T^*-Bond

$$\begin{aligned} dB(t,T^*) &= B(t,T^*)(\mu(t,T^*)dt + \sigma(t,T^*)dW(t)) \\ &= B(t,T^*)((\mu(t,T^*) + \sigma(t,T^*)\vartheta(t))dt + \sigma(t,T^*)dW^*(t)). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\vartheta(t) = \frac{r(t) - \mu(t,T^*)}{\sigma(t,T^*)}, \qquad 0 \le t \le T^*,$$

so erhalten wir

$$dB(t,T^*) = B(t,T^*)(r(t)dt + \sigma(t,T^*)dW^*(t)).$$

Die Lösung dieser stochastische Differentialgleichung ist gegeben durch

$$B(t,T^*) = B(0,T^*)\exp\left(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t \sigma(s,T^*)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s,T^*)ds\right).$$

Somit ist der diskontierte Preisprozess $B^*(t,T^*) := \frac{B(t,T^*)}{\beta(t)}$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal. Für Bonds mit kürzerer Laufzeit T_1 ergibt sich analog

$$dB(t,T_1) = B(t,T_1)((\mu(t,T_1) + \sigma(t,T_1)\vartheta(t))dt + \sigma(t,T_1)dW^*(t)),$$

also muss

$$\frac{r(t) - \mu(t,T_1)}{\sigma(t,T_1)} = \vartheta(t) = \frac{r(t) - \mu(t,T^*)}{\sigma(t,T^*)}$$

für $0 \le t \le T_1$ gelten. Somit können wir mit dieser Anforderung an ϑ sicherstellen, dass für alle Märkte (mit einem T_1-Bond mit Laufzeit $0 < T_1 \le T^*$ und einem Geldmarktkonto als Basisfinanzgütern) keine Arbitragemöglichkeiten existieren. Fassen wir diese Überlegungen nochmal im folgenden Satz zusammen:

Satz 2.2 *Das hier vorgestellte Bondmarktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn ein previsibler, quadrat-integrierbarer Prozess ϑ existiert, sodass für alle $T_1 \in (0, T^*]$*

$$\vartheta(t) = \frac{r(t) - \mu(t, T_1)}{\sigma(t, T_1)}, \qquad 0 \leq t \leq T_1,$$

und

$$\mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(\int_0^{T^*} \vartheta(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T^*} \vartheta^2(t) dt \Bigg)\Bigg) = 1$$

gilt. Das zu $\mathbb{P}$ äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ ist gegeben durch

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = L_t = \exp\Bigg(\int_0^t \vartheta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \vartheta^2(s) ds \Bigg), \qquad 0 \leq t \leq T^*.$$

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ existiert. Des Weiteren erfüllt die Short-Rate die folgende stochastische Differenzialgleichung für $0 \leq t \leq T^*$

$$dr(t) = b(t, r(t))dt + \delta(t, r(t))dW^*(t), \qquad r(0) = r_0. \tag{2.1}$$

Hierbei ist $W^*(t)$ ein Wiener Prozess bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ und die Funktionen

$$\begin{aligned} b &: [0, T^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \delta &: [0, T^*] \times \mathbb{R} \to (0, \infty) \end{aligned}$$

sind messbar bezüglich der zwei Variablen und erfüllen die Integrabilitätsbedingungen

$$\int\limits_0^t |b(s, r(s))| ds < \infty, \qquad \int\limits_0^t \delta(s, r(s))^2 ds < \infty$$

für alle $t \leq T^*$.

Nun sollen die arbitragefreien Bondpreise bestimmt werden. Hierfür ist das folgende Lemma von Bedeutung:

Lemma 2.3 *Sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß. Für den Preis eines T_1-Bonds gilt*

$$B(t, T_1) = \mathbb{E}^*\Bigg(\exp\Bigg(- \int_t^{T_1} r(s) ds \Bigg) \Bigg| \mathcal{F}_t \Bigg),$$

wobei $\mathbb{E}^*(\cdot)$ der Erwartungswert bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ ist.

Beweis: Wir haben angenommen, dass ein äquivalentes Martingalmaß existiert und somit ist der diskontierte Preisprozess eines T_1-Bonds

$$B^*(t,T_1) = \beta^{-1}(t)B(t,T_1), \qquad 0 \le t \le T_1$$

ein $\mathbb{P}^*$-Martingal. Zudem gilt, dass

$$B^*(t,T_1) = \mathbb{E}^*(B^*(T_1,T_1)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*\left(\frac{1}{\beta(T_1)}\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

da $B(T_1,T_1) = 1$ und somit

$$\begin{aligned} B(t,T_1) &= \beta(t)B^*(t,T_1) \\ &= \mathbb{E}^*\left(\frac{\beta(t)}{\beta(T_1)}\middle|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(\exp\left(-\int_t^{T_1} r(s)ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

□

Um die Menge der arbitragefreien Bondpreise explizit beschreiben zu können, definieren wir $v(t,r(t)) := v(t,r(t),T_1) := B(t,T_1)$. Wenden wir nun die Itô-Formel auf v an und nutzen die Darstellung (2.1) der Short-Rate, so erhalten wir

$$\begin{aligned} dB(t,T_1) &= dv(t,r(t)) \\ &= \partial_t v(t,r(t))dt + \partial_x v(t,r(t))dr(t) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} v(t,r(t))d\langle r\rangle_t \\ &= \partial_t v(t,r(t))dt + \partial_x v(t,r(t))b(t,r(t))dt + \partial_x v(t,r(t))\delta(t,r(t))dW^*(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} v(t,r(t))\delta(t,r(t))^2 dt \\ &= \left(\partial_t v(t,r(t)) + \partial_x v(t,r(t))b(t,r(t)) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} v(t,r(t))\delta(t,r(t))^2\right)dt \\ &\quad + \partial_x v(t,r(t))\delta(t,r(t))dW^*(t). \end{aligned}$$

Wir sehen mit (2.1) durch Vergleich der dt-Terme, dass die Funktion $v : (0,T_1)\times\mathbb{R} \to (0,\infty)$ die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt

$$\partial_t v + b(t,r)\partial_x v + \frac{1}{2}\delta^2(t,r)\partial^2_{xx} v = rv, \qquad \lim_{t\uparrow T_1} v(t,r) = 1.$$

Auch für die Volatilität eines Bonds $\sigma(t,T_1)$ lässt sich die folgende Gleichung angeben:

$$\sigma(t,T_1) = \frac{\partial_x v(t,r(t))}{v(t,r(t))}\delta(t,r(t)), \tag{2.3}$$

da durch den Vergleich der $dW^*(t)$-Terme

$$B(t,T_1)\sigma(t,T_1) = \partial_x v(t,r(t))\delta(t,r(t))$$

folgt. In dem folgenden Satz fassen wir diese Ergebnisse nochmal zusammen:

Satz 2.4 *Falls für jedes $T_1 \in (0,T^*]$ die Abbildung*

$$v : (0,T_1) \times \mathbb{R} \to (0,\infty), \quad (t,r) \mapsto v(t,r,T_1)$$

eine Lösung der stochastischen Differenzialgleichung

$$\partial_t v + b(t,r)\partial_x v + \frac{1}{2}\delta^2(t,r)\partial_{xx}^2 v = rv$$
$$\lim_{t\uparrow T_1} v(t,r) = 1$$

ist und die Short-Rate die Dynamik

$$dr(t) = b(t,r(t))dt + \delta(t,r(t))dW^*(t)$$

bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ erfüllt, so ist

$$B(t,T_1) = v(t,r(t),T_1) \qquad \text{für } 0 \le t \le T_1,\ 0 \le T_1 \le T^*$$

eine Familie von arbitragefreien Bondpreisen. Für einen T_1-Bond gilt bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes die stochastische Differenzialgleichung

$$dB(t,T_1) = B(t,T_1)(r(t)dt + \sigma(t,r(t),T_1)dW^*(t))$$

und die Volatilität des Bonds ist gegeben durch

$$\sigma(t,r(t),T_1) = \frac{\partial_x v(t,r(t),T_1)}{v(t,r(t),T_1)}\delta(t,r(t)).$$

2.2 Das Vasicek-Modell

Betrachten wir nun ein spezielles Short-Rate Modell, das Vasicek-Modell. Dies wurde erstmals 1977 von Oldrich Vasicek publiziert. In diesem Modell wird die Short-Rate durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess beschrieben. In unserem Fall gilt somit für die Dynamik der Short-Rate

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW^*(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{2.4}$$

wobei $W^*(t)$ ein Wiener Prozess unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ ist und $a, b, \delta > 0$. Hier ist b die Mean Reversion Rate, a das Mean Reversion Level und δ die Diffusion. Ist beispielsweise die Short-Rate eine lange Zeit unterhalb (oberhalb) des Mean Reversion Levels a, so ist der Driftterm positiv (negativ). Wie stark die Short-Rate wieder zu dem Mean Reversion Level tendiert, wird durch die Mean Reversion Rate b beeinflusst.
Als nächstes wird die stochastische Differenzialgleichung aus (2.4) gelöst um eine explizite Darstellung der Short-Rate im Einfaktor Vasicek-Modell zu erhalten.

Lemma 2.5 *Für die Short-Rate gilt im Einfaktor Vasicek-Modell*

$$r(t) = r_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW^*(s). \tag{2.5}$$

Beweis: Wir setzen

$$f(t, x) := r_0 e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}) + \delta e^{-bt} x$$

und

$$X(t) := \int_0^t e^{bs} dW^*(s).$$

Dann entspricht $f(t, X(t))$ der rechte Seite von (2.5). Mittels der Itô-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \partial_t f(t, X(t))dt + \partial_x f(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 f(t, X(t))d\langle X\rangle_t \\ &= (-br(0)e^{-bt} + abe^{-bt} - X(t)\delta e^{-bt})dt + \delta e^{-bt} dX(t) + 0 \\ &= b(a - f(t, X(t)))dt + \delta dW^*(t). \end{aligned}$$

Da $f(0, X(0)) = r(0)$ ist, gilt $f(t, X(t)) = r(t)$ für alle $t \geq 0$ und somit folgt die Behauptung. □

Als nächstes lässt sich beobachten, dass sich die Short-Rate im Einfaktor Vasicek-Modell wie eine normalverteilte Zufallsvariable verhält.

Satz 2.6 *Unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ ist die Short-Rate normalverteilt und es gilt*

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(0)e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}), \frac{\delta^2}{2b}(1 - e^{-2bt})\right).$$

Beweis: Nach Lemma 2.5 gilt

$$r(t) = r(0)e^{-bt} + a(1 - e^{-bt}) + \int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW^*(s).$$

Also folgt aus dieser Darstellung mittels [16, Theorem 4.4.9] bereits, dass $r(t)$ normalverteilt ist, da der letzte Summand $\int_0^t \delta e^{-b(t-s)} dW^*(s)$ ein Itô-Integral über eine deterministische Funktion mit

$$\int_0^t \left(\delta e^{-b(t-s)}\right)^2 ds < \infty$$

für alle $t \geq 0$ ist und die ersten beiden Summanden deterministisch sind. Um den Beweis abzuschließen, berechnen wir den Erwartungswert und die Varianz von $r(t)$ unter dem Maß $\mathbb{P}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(r(t)) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-bt}r(0) + (1-e^{-bt})a + \delta\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right) \\
&= \mathbb{E}^*\left(e^{-bt}r(0)\right) + \mathbb{E}^*\left((1-e^{-bt})a\right) + \delta\,\underbrace{\mathbb{E}^*\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right)}_{=0,\text{ Martingal}} \\
&= e^{-bt}r(0) + (1-e^{-bt})a
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
Var^*(r(t)) &= Var^*\left(e^{-bt}r(0) + (1-e^{-bt})a + \delta\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right) \\
&= \underbrace{Var^*\left(e^{-bt}r(0)\right)}_{=\,0} + \underbrace{Var^*\left((1-e^{-bt})a\right)}_{=\,0} + \delta^2 Var^*\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right) \\
&= \delta^2 Var^*\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right) \\
&= \delta^2\left(\mathbb{E}^*\left(\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right)^2\right) - \underbrace{\mathbb{E}^*\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right)^2}_{=\,0,\text{ Martingal}}\right) \\
&= \delta^2\mathbb{E}^*\left(\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}dW^*(s)\right)^2\right] \\
&\overset{(*)}{=} \delta^2\int_0^t \left(e^{-b(t-s)}\right)^2 ds \\
&= \delta^2\left[\frac{e^{-2bs-2bt}}{2b}\right]_0^t \\
&= \delta^2\left(\frac{1-e^{2bt}}{2b}\right)
\end{aligned}$$

wobei bei (*) die Itô-Isometrie genutzt wurde. □

Als nächstes wird der Begriff einer Nullkuponanleihe eingeführt und der Preis einer solchen Anleihe bestimmt.

Definition 2.7 Eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit $T \in [0, T^*]$ ist ein Kontrakt, der zum Zeitpunkt T eine Auszahlung von einer Geldeinheit garantiert. Wir bezeichnen den Preis eines solchen Bonds zum Zeitpunkt $t < T$ mit $B(t,T)$.

Eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T liefert also nur zum Zeitpunkt T die Auszahlung einer Geldeinheit und keine weiteren Kuponzahlungen während der Laufzeit. Der Gewinn stellt sich somit für den Anleger lediglich als Differenz zwischen Anfangswert der Nullkuponanleihe und der Auszahlung am Ende dar.

Satz 2.8 *Der Preis eines T_1-Bonds mit Fälligkeit T_1 ist im Einfaktor Vasicek-Modell gegeben durch*

$$B(t,T_1) = \exp(-r(t)g(T_1-t) - h(T_1-t)),$$

wobei

$$\begin{aligned} g(s) &:= \frac{1-e^{-bs}}{b} \\ h(s) &:= \left(s - \frac{1-e^{-bs}}{b}\right)\left(a - \frac{\delta^2}{2b^2}\right) + \frac{\delta^2}{4b}\left(\frac{1-e^{-bs}}{b}\right)^2. \end{aligned}$$

Beweis: Wir wollen Lemma 2.3 benutzen und ermitteln zunächst $\int_t^{T_1} r(s)ds$. Dazu sei $s \geq t$ und wir betrachten die Short-Rate ausgehend vom Zeitpunkt t als Zins in s. Diese ist dann nach Lemma 2.5 gegeben durch

$$r(s) = r(t)e^{-b(s-t)} + a(1-e^{-b(s-t)}) + \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} dW^*(u).$$

Mittels des Satzes von Fubini (siehe [19, Lemma 4.1, Seite 117]) gilt

$$\begin{aligned} \int_t^{T_1} r(s)ds &= \int_t^{T_1} \left(r(t)e^{-b(s-t)} + a(1-e^{-b(s-t)}) + \int_t^s \delta e^{-b(s-u)} dW^*(u)\right) ds \\ &= \int_t^{T_1} r(t)e^{-b(s-t)}ds + \int_t^{T_1} a(1-e^{-b(s-t)})ds + \int_t^{T_1}\int_t^s \delta e^{-b(s-u)} dW^*(u)ds \\ &= \int_t^{T_1} r(t)e^{-b(s-t)}ds + \int_t^{T_1} a(1-e^{-b(s-t)})ds + \int_t^{T_1}\int_u^{T_1} \delta e^{-b(s-u)} ds dW^*(u) \\ &= r(t)\left[-\frac{e^{-b(s-t)}}{b}\right]_t^{T_1} + a\left[s + \frac{e^{-b(s-t)}}{b}\right]_t^{T_1} + \int_t^{T_1} \left[-\delta\frac{e^{-b(s-u)}}{b}\right]_u^{T_1} dW^*(u) \\ &= r(t)\frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b} + a\left((T_1-t) - \frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b}\right) + \int_t^{T_1} \delta\frac{1-e^{-b(T_1-u)}}{b} dW^*(u). \end{aligned}$$

Nach [16, Theorem 4.4.9] ist dieses Integral bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ normalverteilt. Wir nutzen, dass für eine normalverteilte Zufallsvariable X gilt

$$\mathbb{E}^*(\exp(X)) = \exp\left(\mathbb{E}^*(X) + \frac{1}{2}Var^*(X)\right). \tag{2.6}$$

Ein Beweis dieser Aussage ist in [1, Satz 32.10] zu finden. Es ergeben sich aufgrund der Martingaleigenschaft

$$\mathbb{E}^*\left(\int_t^{T_1} r(s)ds \middle| \mathcal{F}_t\right) = r(t)\frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b} + a\left((T_1-t) - \frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b}\right)$$

und mittels der Itô-Isometrie

$$Var^*\Big(\int_t^{T_1} r(s)ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\delta^2}{b^2}\Big((T_1-t) - \frac{2-2e^{-b(T_1-u)}}{b} + \frac{1-e^{-2b(T_1-u)}}{2b}\Big).$$

Exakte Rechenschritte sind in [14] zu finden. Setzen wir diese Berechnungen in (2.6) ein, so erhalten wir das gesuchte Resultat:

$$\begin{aligned}
B(t,T_1) &= \mathbb{E}^*\Big(\exp\Big(-\int_t^{T_1} r(s)ds\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big)\\
&= \exp\Big(-\mathbb{E}^*\Big(\int_t^{T_1} r(s)ds\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big) + \frac{1}{2}Var^*\Big(\int_t^{T_1} r(s)ds\Big|\mathcal{F}_t\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(-r(t)\frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b} - a\Big((T_1-t)\frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b}\Big)\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\Big((T_1-t) - \frac{2-2e^{-b(T_1-t)}}{b} + \frac{1-e^{-2b(T_1-t)}}{2b}\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(-r(t)\frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b}\\
&\quad - \Big((T_1-t) - \frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b}\Big)\Big(a - \frac{\delta^2}{2b^2}\Big) - \frac{\delta^2}{4b}\Big(\frac{1-e^{-b(T_1-t)}}{b}\Big)^2\Big).
\end{aligned}$$

□

Betrachten wir nochmals die Volatilität $\sigma(t,T_1)$. Im Einfaktor Vasicek-Modell lässt sich zeigen, dass diese deterministisch ist.

Satz 2.9 *Im Einfaktor Vasicek-Modell ist die Volatilität $\sigma(t,T_1)$ eines T_1-Bonds deterministisch und zur Zeit t gegeben durch*

$$\sigma(t,T_1) = \frac{\delta}{b}(\exp(-b(T_1-t)) - 1).$$

Beweis: Wir nutzen (2.3) und es folgt mit

$$\partial_x v(t,r(t)) = \frac{dB(t,T_1)}{dr(t)} = B(t,T_1)(-g(T_1-t)),$$

dass

$$\sigma(t,T_1) = \frac{\partial_x v(t,r(t))}{v(t,r(t))}\delta = -g(T_1-t)\delta = \frac{\delta}{b}(\exp(-b(T_1-t)) - 1)$$

gilt. □

Zum Abschluss soll noch eine Call-Option auf eine Nullkuponanleihe in einem Einfaktor Vasicek-Modell bewertet werden. Mittels der Dynamik des Preisprozesses einer Nullkuponanleihe, ausübend in T_1, sehen wir, dass die Bewertung auf ein Black-Scholes Modell mit determinstischen, zeitabhängigen Koeffizienten zurückgeführt werden kann. Wir haben in Satz 2.4 gesehen, dass

$$dB(t,T_1) = B(t,T_1)(r(t)dt + \sigma(t,r(t),T_1)dW^*(t))$$

gilt. Diese Dynamik ist analog zu der Dynamik eines risikobehafteten Assets in einem Black-Scholes Modell mit deterministischen, zeitabhängigen Koeffizienten:

$$dS(t) = S(t)\Big(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\Big).$$

Somit kann die Call-Option wie folgt bewertet werden:

Satz 2.10 *Sei $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$. Die folgende Formel gibt den Preis einer Call-Option (fällig in T_1) auf einen T_2-Bond mit Strike K an:*

$$C(t,T_1,T_2,K) = B(t,T_2)\Phi(d_1) - KB(t,T_1)\Phi(d_2),$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\widehat{\delta}}\log\left(\frac{B(t,T_2)}{KB(t,T_1)}\right) + \frac{\widehat{\delta}}{2} \\ d_2 &= d_1 - \widehat{\delta} \\ \widehat{\delta} &= \frac{\delta}{b}\left(1 - e^{-b(T_2-T_1)}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2b(T_1-t)}}{2b}} \end{aligned}$$

und Φ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung ist.

Beweis: Es wird auf [3, Theorem 5.11] verwiesen. □

2.3 Das Forward Martingalmaß

Das T-Forward Martingalmaß $\mathbb{P}_T$ spielt sowohl in der Lösung des statischen als auch des Darstellungsproblems bei der Portfoliooptimierung ohne Garantie, sowie bei der Portfoliooptimierung mit Garantie eine wichtige Rolle.
Unter der Voraussetzung, dass der T-Bond in einem Standard-Finanzmarktmodell einen arbitragefreien Anfangspreis besitzt, ist das Forward Martingalmaß nach Definition 3.2 aus [3] gegeben durch

$$R(t) := \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(0,T)\beta(t)}L(t) = \frac{B(t,T)}{B(0,T)}H(t). \tag{2.7}$$

Der Prozess $R(t)$ ist nach Satz 3.1 aus [3] ein Dichtequotientenprozess. Da $\mathbb{P}_T$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß ist, existiert nach dem Satz von Girsanov ein previsibler Prozess $(\eta_t)_{0\leq t\leq T}$, sodass

$$R(t) = \exp\left(\int_0^t \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds\right) \tag{2.8}$$

gilt und

$$W_T(t) := W(t) - \int_0^t \eta(s)ds$$

ist ein Wiener Prozess bezüglich $\mathbb{P}_T$.

Proposition 2.11 *Der Dichtequotientenprozess $R(t)$ besitzt bezüglich $\mathbb{P}$ die Dynamik*

$$dR(t) = R(t)\eta(t)dW(t). \tag{2.9}$$

Beweis: Siehe Beweis von Satz 3.3 aus [3]. □

Für die quadratische Variation von $R(t)$ gilt

$$d\langle R\rangle_t = R^2(t)\eta^2(t)dt.$$

Das Ziel ist es, den Prozess $(\eta(t))_{0\leq t\leq T}$ zu bestimmen. Hierzu wird das zu $\mathbb{P}$ äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ benötigt, sowie die Tatsache, dass aus dem Satz von Girsanov

$$dW^*(t) = dW(t) - \vartheta(t)dt$$

folgt. Mittels partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} dR(t) &= B^{-1}(0,T)d(B^*(t,T)L(t)) \\ &= B^{-1}(0,T)(L(t)dB^*(t,T) + B^*(t,T)dL(t) + d\langle B^*, L\rangle_t) \\ &= B^{-1}(0,T)(L(t)B^*(t,T)\sigma(t,T)dW^*(t) + B^*(t,T)L(t)\vartheta(t)dW(t) + B^*(t,T)L(t)\sigma(t,T)\vartheta(t)dt) \\ &= R(t)\sigma(t,T)(dW(t) - \vartheta(t)dt) + R(t)\vartheta(t)dW(t) + R(t)\sigma(t,T)\vartheta(t)dt \\ &= R(t)(\sigma(t,T) + \vartheta(t))dW(t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aus dem Vergleich der $dW(t)$-Terme von (2.9) und (2.10) folgt, dass

$$\eta(t) = \sigma(t,T) + \vartheta(t)$$

ist.

Bemerkung 2.12 Man sieht, dass unter der Voraussetzung eines deterministischen Marktpreises des Risikos ϑ im Vasicek Modell die Funktionen, die das Forward Martingalmaß definieren, deterministisch sind.

Mittels des Forward Martingalmaßes lassen sich auch arbitragefreie Preise eines Claims bestimmen: Betrachte dazu einen T-Claim C mit $\mathbb{E}\left(\frac{|C|}{\beta(T)}\right) < \infty$. Der arbitragefreie Preis $\Pi(t)$ zum Zeitpunkt $t \leq T$ ist gegeben durch

$$\Pi(t) = \beta(t)\mathbb{E}^*\left(\frac{C}{\beta(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Um dies zu berechnen, benötigt man die gemeinsame Verteilung von $\frac{1}{\beta(T)}$ und C. Durch das Forward Martingalmaß kann dieser Bewertungsprozess vereinfacht werden. Der folgende Satz liefert eine Beziehung zwischen den arbitragefreien Preisen und dem Forwardpreis:

Satz 2.13 *Sei C ein T-Claim mit $\mathbb{E}^*\left(\frac{|C|}{\beta(T)}\right) < \infty$. Dann ist $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}(|C|) < \infty$ und*

$$\Pi(t) = B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}(C|\mathcal{F}_t).$$

$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}(C|\mathcal{F}_t)$ bezeichnet den T-Forwardpreis des Claims C.

Beweis: Siehe den Beweis von Satz 3.4 aus [3]. □

Auch Optionsbewertungen lassen sich mittels des Forward Martingalmaßes durchführen. Sei $0 \leq t < S \leq T^*$. Von besonderen Interesse ist für uns die Call-Option auf einen S-Bond mit Maturität $T < S$ und Strike Preis K. Zentrale Idee zur Bewertung eines solchen Calls auf einen Bond ist es, einen Maßwechsel zu dem Forward Martingalmaß durchzuführen.

Satz 2.14 *Für den Preis eines Calls in t auf einen S-Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike-Preis K gilt*

$$C(t,T,S,K) = B(t,S)\mathbb{P}_S(B(T,S) > K|\mathcal{F}_t) - KB(t,T)\mathbb{P}_T(B(T,S) > K|\mathcal{F}_t),$$

wobei $\mathbb{P}_T$ und $\mathbb{P}_S$ das T- beziehungsweise das S-Forward Martingalmaß bezeichnet.

Beweis: Siehe Beweis von Theorem 3.5 aus [3]. □

3 HJM-Modell

In diesem Kapitel wird das arbitragefreie und vollständige HJM-Bondmarktmodell eingeführt. Zunächst werden grundlegende Begriffe erklärt und die für das Modell notwendigen Annahmen getroffen. Anschließend wird das HJM-Bondmarktmodell vorgestellt und speziell das Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate betrachtet. Auch der Zusammenhang zu Kapitel 2 wird hergestellt, da es sich hier um eine Verallgemeinerung des in Abschnitt 2 dieses Kapitels betrachteten Modells handelt. Dieses Kapitel orientiert sich an [2], [9], [10], und [16].

3.1 Grundlagen des HJM-Modells

In diesem Abschnitt werden zunächst die grundlegenden Begriffe, wie die Nullkuponanleihen und die Forward-Raten (Terminzinsen) vorgestellt und einige Annahmen für die Aufstellung des Modells gemacht. Im folgenden wird ein endlicher Handelszeitraum $[0, T^*]$ betrachtet.

Wie zuvor in Kapitel 2 werden Annahmen zum Preis eines Bonds beziehungsweise einer Nullkuponanleihe gemacht:

- Es gilt $B(T, T) = 1$ für alle T mit $0 \leq T \leq T^*$. Mit dieser Bedingung wird ausgeschlossen, dass die Auszahlung des Bonds ausfällt.
- Es gilt $B(t, T) > 0$ für alle t, T mit $0 \leq t \leq T \leq T^*$. So werden triviale Arbitragemöglichkeiten ausgeschlossen, bei der eine sichere Auszahlung einer Geldeinheit ohne Einsatz von Kapital erzielt werden kann.
- Für jedes fixe t ist der Preisprozess des Bonds $B(t, T)$ für $0 \leq T \leq T^*$ differenzierbar. Somit wird die Wohldefiniertheit der Forward-Raten gewährleistet.

Als nächstes führen wir die augenblickliche Forward-Rate ein. Die Idee ist ausgehend vom Bondpreis einen Zins in einem künftigen Zeitintervall zu vereinbaren.

Definition 3.1 Die augenblickliche Forward-Rate mit Fälligkeit T ist zum Zeitpunkt $t \leq T$ definiert durch

$$f(t, T) := \lim_{S \downarrow T} R(t; T, S) = -\frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T}, \tag{3.1}$$

wobei

$$R(t; T, S) = \frac{\log(B(t, T)) - \log(B(t, S))}{S - T}.$$

Sie entspricht dem Zins, der vom Markt zum Zeitpunkt t für einen zukünftigen Zeitpunkt T erwartet wird. Die Funktion $T \mapsto f(t,T)$ wird als Forward-Raten-Kurve zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Bemerkung 3.2 Die Definition der augenblicklichen Forward-Rate lässt sich wie folgt motivieren: Betrachte die folgende Investitionstrategie für $t < T < S$:

- Verkaufe in t einen T-Bond und kaufe dafür $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ Bonds mit der Fälligkeit S. Es entstehen somit zum Zeitpunkt t keine Kosten.
- Zahle in T eine Geldeinheit für den verkauften T-Bond.
- Erhalte in S die Auszahlung aus den S-Bonds in Höhe von $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$.

Diese Stratgie entspricht einer Anlage von einer Geldeinheit in T für den Zeitraum $[T,S]$ und führt zu einer sicheren Rückzahlung in S von $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ Geldeinheiten. Wir haben also durch diese Strategie einen Kontrakt zum Zeitpunkt t geschaffen, welcher eine risikolose Zinsrate für den zukünftigen Zeitraum $[T,S]$ garantiert. Als Forward-Rate oder Terminzins wird dieser Zinssatz bezeichnet. Wir gehen von einer stetigen Verzinsung aus und so lässt sich die stetige Forward-Rate $R(t;T,S)$ wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \exp(R(t;T,S)(S-T)) &= \frac{B(t,T)}{B(t,S)} \\ \Rightarrow R(t;T,S) &= \frac{\log(B(t,T)) - \log(B(t,S))}{S-T}. \end{aligned}$$

Tendiert die Länge des Zeitintervalls gegen Null, so ergibt sich die augenblickliche Forward-Rate.

Als nächstes wird der Zusammenhang zwischen den Bondpreisen und den Forward-Raten hergestellt.

Bemerkung 3.3 Für die Bondpreise gilt

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right). \tag{3.2}$$

Die in der Bemerkung angegebene Formel lässt sich wie folgt motivieren: Kennen wir die Forward-Rate $f(t,T)$ für alle Werte $0 \le t \le T \le T^*$, dann gilt mittels einfacher Integration:

$$\int_t^T f(t,u)du = -(\log(B(t,T)) - \log(B(t,t))) = -\log(B(t,T)),$$

wobei wir genutzt haben, dass $B(t,t) = 1$ gilt.
Von der augenblicklichen Forward-Rate ausgehend, wird die augenblickliche Short-Rate definiert und somit ein Zusammenhang mit Abschnitt 2.1 hergestellt.

Definition 3.4 Die augenblickliche Short-Rate zum Zeitpunkt t ist definiert durch

$$r(t) := f(t,t) = \lim_{T \downarrow t} R(t,T)$$

und gibt den Zinssatz an, der aktuell (zum Zeitpunkt t) am Markt gehandelt wird.

Der Wert des Geldmarktkonto wird somit, ausgehend von der Short-Rate, als Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (1.6), also durch

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

definiert.

3.2 Aufbau des HJM-Modells

In diesem Abschnitt wird das arbitragefreie und vollständige Zinsstrukturmodell nach Heath, Jarrow und Merton, das HJM-Modell eingeführt. Dieses Modell beschreibt die zeitliche Entwicklung der Forward-Raten-Kurve und nicht nur der Short-Rate. Die Bondpreise entstehen hier aus der Dynamik von Forward-Raten. Somit stellt das HJM-Modell einen entscheidenden Schritt zur Entwicklung von stetigen Zinsstrukturmodellen dar.

Zunächst muss der wahrscheinlichkeitstheoretische Rahmen festgelegt werden. Wir betrachten einen Handelszeitraum $[0, T^*]$. Der risikobehaftete Bond hat den Preisprozess $(B(t,T))_{0 \leq t \leq T}$ für $T \leq T^*$ und das risikolose Geldmarktkonto mit Preisprozess $(\beta(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ wird als Numeraire gewählt. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F})_{0 \leq t \leq T^*}, \mathbb{P}^*)$. Im Folgenden wird eine Bedingung angegeben, unter welcher das Maß $\mathbb{P}^*$ ein Martingalmaß ist. Des Weiteren sei $W^*(t) = (W_1^*(t), \ldots, W_n^*(t))$ ein n-dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Die Forward-Rate $f(t,T)$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ wird in einem HJM-Modell für jedes $0 \leq T \leq T^*$ modelliert durch

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \nu(u,T)du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,T)dW_i^*(u), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.3}$$

und in differentieller Schreibweise

$$df(t,T) = \nu(t,T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T)dW_i^*(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.4}$$

Um einen Startwert zu erhalten setzen wir voraus, dass die anfängliche Kurve der Forward-Raten $\{f(0,T);\ 0 \leq T^*\}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt ist und mit

$$\int_0^{T^*} |f(0,u)|du < \infty$$

$\mathbb{P}^*$-fast sicher integrierbar ist.
Für den $\mathbb{R}$-wertigen Prozess $\nu = \nu(\omega,t,T)$, dem Drift, und dem $\mathbb{R}^n$-wertigen Prozess $\sigma = (\sigma_1(\omega,t,T), \ldots, \sigma_n(\omega,t,T))^\top$, der Volatilität, aus (3.3) gelten die folgenden Eigenschaften:

- ν, σ sind progressiv-messbar bezüglich der Borelschen σ-Algebra,
- $\int_0^T \int_0^T |\nu(s,t)| ds dt < \infty$ für alle $0 \leq T \leq T^*$, punktweise für jedes $\omega \in \Omega$,
- $\sup_{s,t \leq T} \|\sigma(s,t)\| < \infty$ für alle $0 \leq T \leq T^*$, punktweise für jedes $\omega \in \Omega$,

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Mit der Identität $r(t) = f(t,t)$ erhalten wir für die Short-Rate

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \nu(u,t) du + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(u,t) dW_i^*(u), \qquad 0 \leq t \leq T^*. \tag{3.5}$$

Eine wichtige Eigenschaft von stochastischen Prozessen ist die Markov-Eigenschaft:

Definition 3.5 Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt markovsch (oder besitzt die Markov-Eigenschaft), falls für alle $0 \leq s < t$ und alle beschränkte Borel-meßbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(h(X_t)|\mathcal{F}_t^X) = \mathbb{E}(h(X_t)|X_s)$$

gilt, wobei $\mathcal{F}^X$ die von dem Prozess X erzeugte Filtration ist.

Bemerkung 3.6 Im Allgemeinen muss die Short-Rate nicht die Markov-Eigenschaft besitzen. Für einen Beweis hierfür, verweisen wir auf [9, Bemerkung 1.6]. Wir werden jedoch für die Portfoliooptimierung ein HJM-Modell betrachtet, welches eine Short-Rate mit Markov-Eigenschaft besitzt. Die Markov-Eigenschaft gewährleistet uns später, dass die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate seperabel ist.

Betrachten wir die Frage, ob das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ ein Martingalmaß ist. Wird der Drift der Forward-Raten durch die Volatilität determiniert, so ist $\mathbb{P}^*$ ein Martingalmaß. Dies ist die sogenannte Driftbedingung.

Satz 3.7 (Driftbedingung)
Haben die Forward-Raten die Dynamik (3.3)*, so ist das Maß* $\mathbb{P}^*$ *ein Martingalmaß, genau dann, wenn die Prozesse* ν *und* σ *für alle* $0 \leq t \leq T \leq T^*$ *die Gleichung*

$$\nu(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T) \int_t^T \sigma_i(t,s) ds \tag{3.6}$$

erfüllen. Dies bedeutet, dass die diskontierten Bondpreise unter $\mathbb{P}^*$ *Martingale bilden.*

Beweis: Es muss die Dynamik der Bondpreise unter dem Martingalmaß bestimmt werden. Dazu benutzen wir (3.2). Entsprechend betrachten wir zunächst die Dynamik von

$$y(t,T) := \int_0^T f(t,u) du.$$

Für $y(t,T)$ gilt mithilfe der Dynamik der Forward-Raten (3.3)

$$y(t,T) = \int_t^T f(t,u) du = \int_t^T \left(f(0,u) + \int_0^t \nu(s,u) ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s,u) dW_i^*(s) \right) du.$$

Nun wird in y die Short-Rate eingebunden, da der Drift der Bondpreise unter dem äquivalenten Martingalmaß gerade der Short-Rate entspricht. Mittels Gleichung (3.5) erhalten wir

$$\int_t^T r(u)du = \int_t^T \left(f(0,u) + \int_0^u \nu(s,u)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^u \sigma_i(s,u)dW_i^*(s) \right) du.$$

Insgesamt erhalten wir dann den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} y(t,T) = &\int_0^T f(0,u)du - \int_t^T r(u)du - \int_t^T \int_0^t \nu(s,u)dsdu - \int_t^T \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s,u)dW_i^*(s)du \\ &+ \int_0^T \int_0^u \nu(s,u)dsdu + \int_t^T \sum_{i=1}^n \int_0^u \sigma_i(s,u)dW_i^*(s)du. \end{aligned}$$

Als nächstes wenden wir den Satz von Fubini für stochastische Integrale, siehe [13, Satz 2.4] an, um Integrale über das Intervall $[0,t]$ zu erhalten. Es ergibt sich

$$y(t,T) = \int_0^T f(0,u)du - \int_t^T r(u)du + \int_0^t \left(\int_s^T \nu(s,u)du \right) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \left(\int_s^T \sigma_i(s,u)du \right) dW_i^*(s)$$

oder äquivalent in Differentialschreibweise

$$dy(t,T) = -r(t)dt + \left(\int_t^T \nu(t,u)du \right) dt + \sum_{i=1}^n \left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du \right) dW_i^*(t).$$

Durch Anwendung der Itô-Formel auf (3.2) für die Dynamik des Bondpreisprozesses erhalten wir:

$$\begin{aligned} dB(t,T) = & - B(t,T)dy(t,T) + \frac{1}{2}B(t,T)d\left\langle y(\cdot,T)\right\rangle_t \\ = & - B(t,T)\Big(- r(t)dt + \left(\int_t^T \nu(t,u)du \right) dt + \sum_{i=1}^n \left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du \right) dW_i^*(t) \Big) \\ & + \frac{1}{2}B(t,T) \sum_{i=1}^n \left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du \right)^2 dt \\ = & B(t,T)\Big(r(t)dt - \left(\int_t^T \nu(t,u)du \right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du \right)^2 \Big) dt \\ & + B(t,T) \sum_{i=1}^n \left(- \int_t^T \sigma_i(t,u)du \right) dW_i^*(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dieser Prozess ist somit ein Martingal, falls

$$\int_t^T \nu(t,u)du = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du \right)^2$$

gilt. Differenzieren liefert die Behauptung. □

Im folgenden machen wir die Annahme:

Die Diftbedingung sei von nun an erfüllt.

Bemerkung 3.8 Mit der Annahme der Driftbedingung folgt, dass ein Martingalmaß existiert. Somit ist nach dem ersten Fundamentalsatz der Finanzmathematik das HJM-Modell arbitragefrei.

Im folgenden Satz wird die Bondpreisdynamik beschrieben. Diese leitet sich im HJM-Modell aus der Dynamik der Forward-Raten her.

Satz 3.9 *Sei $\mathbb{P}^*$ das Martingalmaß. Dann entwickeln sich die Bondpreisprozesse $B(t,T)$ für jedes $0 \leq T \leq T^*$ gemäß der folgenden Dynamik:*

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(r(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,T)dW_i^*(t) \right), \qquad 0 \leq t \leq T$$

für einen n-dimensionalen Prozess $\sigma^B(t,T) = (\sigma_1^B(t,T), \dots, \sigma_n^B(t,T))$ mit

$$\sigma_i^B(t,T) := -\int_t^T \sigma_i(t,s)ds, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 3.7 Gleichung (3.7) wissen wir, dass

$$dB(t,T) = B(t,T)\underbrace{\left(r(t)dt - \left(\int_t^T \nu(t,u)du \right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\int_t^T \sigma_i(t,u)du \right)^2 \right)}_{=:\ \mu^B(t,T)}dt$$

$$+ B(t,T)\sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{-\int_t^T \sigma_i(t,u)du}_{=:\sigma_i^B(t,T)} \right) dW_i^*(t)$$

gilt. Weiter setze für den Drift der Forward-Rate

$$\nu(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T) \int_t^T \sigma_i(t,s)ds$$

und erhalte

$$\mu^B(t,T) = r(t) - \sum_{i=1}^{n} \int_t^T \sigma_i(t,u)\left(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds \right)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\int_t^T \sigma_i(t,u)du}_{=:\gamma_i(t,T)} \Big)^2. \tag{3.8}$$

Der Prozess γ_i^2 kann mit der partiellen Differentialgleichung $\partial_T \gamma_i^2(t,T) = 2\gamma_i(t,T)\sigma_i(t,T)$ durch

$$\gamma_i^2(t,T) = 2\int_t^T \gamma_i(t,u)\sigma_i(t,u)du = 2\int_t^T \left(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds \right) \sigma_i(t,u)du$$

dargestellt werden. Setzen wir dies in die Gleichung (3.8) ein so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mu^B(t,T) &= r(t) - \sum_{i=1}^{n} \int_t^T \sigma_i(t,u)\Big(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds\Big)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_t^T \sigma_i(t,u)du\Big)^2 \\
&= r(t) - \sum_{i=1}^{n} \int_t^T \sigma_i(t,u)\Big(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds\Big)du + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(2\int_t^T \Big(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds\Big)\sigma_i(t,u)du\Big) \\
&= r(t) - \sum_{i=1}^{n} \int_t^T \sigma_i(t,u)\Big(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds\Big)du + \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_t^T \Big(\int_t^u \sigma_i(t,s)ds\Big)\sigma_i(t,u)du\Big) \\
&= r(t).
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Driftbedingung, Satz 3.7, entspricht der Drift des Bondpreisprozesses unter dem Martingalmaß der Short-Rate. Also erhalten wir für die Dynamik des Bondpreisprozesses unter dem Martingalmaß:

$$
dB(t,T) = B(t,T)\Big(r(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^B(t,T)dW_i^*(t)\Big)
$$

für einen n-dimensionalen Prozess $\sigma^B(t,T)$ mit $\sigma_i^B(t,T) := -\int_t^T \sigma_i(t,u)du$ für $i = 1,\dots,n$. $\square$

Mittels Satz 3.9 sehen wir, dass sich die Volatilitäten des Bondpreisprozesses aus den Volatilitäten der Forward-Raten ergeben. Also ist die Dynamik der Bondpreise durch die Volatilitäten der Forward-Raten eindeutig bestimmt.

Bemerkung 3.10 Mittels der Driftbedingung ergibt sich, dass die Dynamiken der Forward-Raten allein durch ihre Volatilitätsstruktur determiniert werden. Existiert also in einem HJM-Modell ein Martingalmaß, so ist das HJM-Modell durch die Volatilität der Forward-Raten $\{(\sigma(t,T))_{0\le t\le T};\ 0 \le T \le T^*\}$ und die anfängliche Forward-Raten Kurve $\{f(0,T);\ 0 \le T \le T^*\}$ festgelegt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts machen wir noch die Annahme:

Das existierende Martingalmaß sei eindeutig.

Bemerkung 3.11 Mit der Eindeutigkeit des Martingalmaßes folgt mittels des zweiten Fundamentalsatzes der Finanzmathematik, dass das HJM-Modell vollständig ist, also jeder Claim replizierbar ist. Es existieren n verschiedene Bonds mit dem Preisprozess (siehe Satz 3.9)

$$
dB(t,T_i) = B(t,T_i)\Big(r(t)dt + \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sigma_j^B(t,T_i)}_{=:\sigma_{ji}(t)}dW_j^*(t)\Big), \qquad 0 \le t \le T_i, \qquad T_1 < \ldots < T_n,
$$

sodass die folgende Volatilitätsstruktur der Bondpreisprozesse für alle t mit $0 \le t \le T_n$ invertierbar ist:

$$
(\sigma_{ij}(t))_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^B(t,T_1) & \ldots & \sigma_1^B(t,T_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n^B(t,T_1) & \ldots & \sigma_n^B(t,T_n) \end{pmatrix}
$$

Wie vorher beschieben, stellt das HJM-Modell nur einen Modellrahmen dar, in welchen alle Zinstrukturmodelle, die von einem Wiener-Prozess getrieben werden, gehören. Hierzu gehören beispielsweise das Einfaktor Vasicek-Modell aus Kapitel 2, Abschnitt 2.2. In diesem Modell ist die zeitliche Entwicklung der Short-Rate gegeben und die Bondpreise werden daraus hergeleitet. In diesem Fall ist die Dynamik nach Gleichung (2.4) gegeben durch

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW^*(t), \qquad r(0) = r_0$$

und die Bondpreise eines T_1-Bonds nach Satz 2.8 gegeben durch

$$B(t, T_1) = \exp(-r(t)g(T_1 - t) - h(T_1 - t)),$$

wobei

$$\begin{aligned} g(s) &:= \frac{1 - e^{-bs}}{b} \\ h(s) &:= \left(s - \frac{1 - e^{-bs}}{b}\right)\left(a - \frac{\delta^2}{2b^2}\right) + \frac{\delta^2}{4b}\left(\frac{1 - e^{-bs}}{b}\right)^2. \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel wäre das CIR-Modell. Für weitere Details zu dem CIR-Modell verweisen wir auf [9, Abschnitt 1.3.1]

3.3 Das Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate

In diesem Abschnitt wird durch das Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate ein explizites Mehrfaktor HJM-Modell eingeführt. Wie bereits in Bemerkung 3.10 erwähnt, ist das HJM-Modell durch die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate eindeutig bestimmt. Wir machen die folgende Annahme:

Die Volatilitätsfunktion der Forward-Rate $\sigma(t, T)$ sei eine deterministische Funktion von t und T für $0 \leq t \leq T \leq T^*$.

Die Eigenschaft der deterministischen Volatilitätstruktur macht das hier betrachtete Modell zu einem wichtigen Spezialfall und wird als Gaußsches HJM-Modell bezeichnet. Aufgrund der deterministischen Volatilitätsstruktur erhalten wir eine geschlossene Lösung der Portfoliooptimierung und sie ermöglicht es uns die Call-Option beziehungsweise die Exchange-Option für die Portfoliooptimierung mit Garantie zu bewerten.
Wie schon in der Bemerkung 3.6 erwähnt, besitzt die Short-Rate im Allgemeinen nicht die Markov-Eigenschaft, welche jedoch einige Vorteile mit sich bringt. Zum Beispiel ist dann die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate seperabel wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3.12 *Es sei für alle $0 \leq t \leq T \leq T^*$ die Volatilität der Forward-Rate $\sigma(t, T)$ ungleich Null und die Short-Rate besitze die Markov-Eigenschaft. Dann ist die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate seperabel, dass heißt*

$$\sigma(t, T) = z(t)e(T), \qquad 0 \leq t \leq T \leq T^*.$$

Beweis: Für den Beweis verweisen wir auf [15, Satz 1.4.2 mit Beweis]. □

Wir machen folgende Annahme:

Die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate sei seperabel in dem Sinne

$$\sigma(t,T) = z(t)e(T), \qquad 0 \le t \le T \le T^*, \tag{3.9}$$

wobei $z(t)$ eine deterministische $n \times n$-Matrix und $e(T)$ ein n-dimensionaler deterministischer Vektor ist.

Wir wollen uns nun die Komponenten dieser Zerlegung etwas genauer ansehen. Wir machen dazu eine weitere Annahme:

In der Darstellung (3.9) der Volatilitätsstruktur der Forward-Raten sei der Vektor $e(t)$ gegeben durch

$$e(t) := \begin{pmatrix} \exp(-\int_0^t \chi_1(u)du) \\ \vdots \\ \exp(-\int_0^t \chi_n(u)du) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

für eine deterministische Funktion $\chi_i(t)$ mit $i = 1, \dots, n$, sodass $e_i(t) \neq 0$ für alle $t \le T^*$ gilt.

Mittels dieser Wahl der Volatilität erhalten wir für die Dynamik der Forward-Raten:

Satz 3.13 *Die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate sei seperabel und weiter sei eine $n \times n$-Diagonalmatrix $E(t)$ durch $E(t) := diag(e(t))$ und ein n-dimensionaler Vektor $e(t)$ entsprechend (3.10) definiert. Zudem sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor $x(t)$ und eine deterministische, symmetrische $n \times n$-Matrix $y(t)$ wie folgt definiert:*

$$x(t) := E(t) \int_0^t z(s)^\top z(s) \int_s^t e(u)duds + E(t) \int_0^t z(s)^\top dW^*(s), \tag{3.11}$$

$$y(t) := E(t)\left(\int_0^t z(s)^\top z(s)ds \right)E(t). \tag{3.12}$$

Dann ist für jedes T, mit $0 \le T \le T^*$, die Forward-Rate gegeben durch

$$f(t,T) = f(0,T) + M(t,T)^\top \left(x(t) + y(t) \int_t^T M(t,s)ds \right),$$

wobei $M(t,T) := E(T)E(t)^{-1}\boldsymbol{1}_n$ mit $\boldsymbol{1}_n = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Der Prozess $x(t)$ hat die Dynamik

$$dx(t) = (y(t)\mathbb{1} - \iota(t)x(t))dt + \sigma_x(t)^T dW^*(t),$$

wobei σ_x eine $n \times n$-dimensionale Matrix ist mit $\sigma_x(t) := z(t)E(t)$ und ι eine $n \times n$-dimensionale Diagonalmatrix ist, mit $\iota(t) := diag((\chi_1(t), \dots, \chi_n(t))^T)$ mit χ_i aus (3.10).

Beweis: Ein Beweis ist in [9, Satz 1.12, Seite 14-16] zu finden. □

4 Portfoliooptimierung mit deterministischer Garantie

Ziel dieser Masterarbeit ist das optimale Management eines Garantiefonds. Zentrales Hilfmittel hierfür ist die Portfoliooptimierung mit Garantie. In diesem Abschnitt wird ausgehend von einer deterministschen Garantie zunächst allgemeines Lösungsverfahren entwickelt, welches anschließend auf verschiendene Finanzmarktmodelle angewendet wird.

Im Abschnitt 1.4 wurde auf die Portfoliooptimierung, die Maximierung des erwarteten Endnutzens mittels der Martingalmethode, eingegangen. Nun wird eine deterministische Garantie hinzugefügt. Das bedeutet, dass der Fond am Ende des Handelszeitraumes $[0, T]$, $T > 0$, eine deterministische Garantie zahlen muss. Er muss also sicher stellen, dass das Endvermögen mindestens so groß ist wie diese Beschränkung. Anschließend wird die Portfoliooptimierung unter einer logarithmischen und Power-Nutzenfunktion in verschiedenen Finanzmarktmodellen durchgeführt. Für die allgemeine Lösung in Abschnitt 4.1 wurde sich an [5] orientiert.

4.1 Allgemeine Methode

Wie zuvor beschrieben wird in das Portfoliooptimierungsproblem eine Garantie eingefügt. Dies bedeutet, dass das Endvermögen des Fonds eine zu anfang gesetzten Benchmark G mindestens erreichen muss. Wir nehmen an, dass G eine positive Konstante ist. Im nächsten Kapitel wird diese Annahme verallgemeinert, indem G dann als nicht-negative Zufallsvariable vorausgesetzt wird.

Sei

$$\mathcal{A}_1(b) := \{\pi \in \mathcal{A}(b) : X^{b,\pi}(T) > G\}$$

und

$$\mathcal{B}_1(b) := \{C \in \mathcal{B}(b) : C \geq G \text{ fast sicher}\}.$$

Das Optimierungsproblem mit garantierter Auszahlung G zur Endzeit T ist gegeben durch

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}_1(b)} \mathbb{E}(U(X^{b,\pi}(T))) \tag{4.1}$$

und das statische Problem durch

$$\max_{C \in \mathcal{B}_1(b)} \mathbb{E}(U(C)). \tag{4.2}$$

Um aber am Ende des Handelszeitraums $[0, T]$, $T > 0$, eine Garantie in Höhe von G ausstellen zu können, ist ein Startkapital von mindestens

$$G \cdot B(0, T)$$

erforderlich, wobei mit $B(t, T)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t bezeichnet wird, die eine Auszahlung von 1 zur Maruritāt T hat. Es gilt, dass

$$B(t, T) = \mathbb{E}^* \left(\frac{N(t)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Wir nehmen an, dass $b > G \cdot B(0, T)$ ist. Auch hier kann das optimale Endvermögen $C = C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters durch punktweise Lagrangemaximierung bestimmt werden zu

$$C(\lambda) = \max\{G, I(\lambda H(T))\}. \tag{4.3}$$

Der Lagrangemultiplikator λ kann berechnet werden durch lösen der Gleichung

$$V_0(C(\lambda)) = G \cdot B(0, T) + \mathcal{C}(I(\lambda H(T)), G) = b, \tag{4.4}$$

wobei $\mathcal{C}(I(\lambda H(T)), G)$ den Anfangspreis einer Call-Option mit Strike G auf ein Asset mit Auszahlung $I(\lambda H(T))$ zur Zeit T bezeichnet. Da der Preis der Call-Option gegen ∞ tendiert, wenn $\lambda \to 0$, beziehungsweise gegen 0 tendiert, wenn $\lambda \to \infty$, ist die obrige Gleichung für alle $b > G \cdot B(0, T)$ lösbar und wir erhalten über das Optimierungsproblem folgende Aussage:

Satz 4.1 *Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G \cdot B(0, T)$. Dann ist eine Lösung des Optimierungsproblems* (4.2) *gegeben durch* (4.3) *mit λ als eindeutige Lösung von* (4.4)*. Die optimale Strategie von* (4.1) *ist gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $B(0, T)$

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G \cdot B(0, T)$ in eine Strategie, welche eine Call-Option auf $I(\lambda H(T))$ repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.

Betrachte nochmals die Call-Option in der Nebenbedingung (4.4). Sobald der zugrundeliegende Finanzmarkt vollständig ist, kann diese Option bewertet werden und das Problem theoretisch gelöst werden. Dies bedeuetet jedoch nicht, dass man auch explizite Berechnungen und Lösungen findet. Setzt man jedoch deterministische Volatilitäten voraus, so ist auch die Berechenbarkeit gegeben, wie wir in den folgenden Beispielen sehen werden. Zum Abschluss dieses Abschnitts fassen wir das in den folgenden Abschnitten zu verwendende Lösungsverfahren nochmals zusammen:

i) Löse mittels der Martingalmethode das statische Problem des Portfoliooptimierungsproblems ohne Garantie in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ.

ii) Bestimme mittels Gleichung (4.4) die Nebenbedingung für das Portfoliooptimierungsproblem mit deterministischer Garantie, um den Lagrangeparameter für dieses Problem eindeutig festzulegen. Hierfür muss eine Call-Option in dem jeweils betrachteten Finanzmarkt bewertet werden.

iii) Bestimme mittels Gleichung (4.3) das optimale Endvermögen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ. Das optimale Endvermögen ergibt sich anschließend durch Einsetzen des in (ii) festgelegten Parameters in das so erhaltene Endvermögen nach Satz 4.1.

iv) Bestimme den optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ.

v) Bestimme mittels Satz 4.1 die optimale Strategie.

4.2 Optimierung in einem Black-Scholes Modell

In diesem Abschnitt wenden wir die Portfoliooptimierung mit deterministischer Garantie auf ein Black-Scholes Modell an. Wir lösen das Optimierungsproblem zunächst für den Fall einer logarithmischen und anschließend für eine Power-Nutzenfunktion.

Betrachtet wird ein Black-Scholes Modell für einen risikolosen Bond mit konstanter Zinsrate r und einer Aktie mit konstanten Koeffizienten (μ, σ). In diesem Modell hat der Black-Scholes Preis die Volatilität $|\vartheta| = |\frac{\mu - r}{\sigma}|$. Damit Satz 1.23 angewendet werden kann und somit eine Optimierung nach dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Lösungsweg möglich ist, müssen die beiden Erwartungswerte $\mathbb{E}(H(T))$ und $\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T)))$ bestimmt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H(T)) &= \mathbb{E}(\beta^{-1}(T)L(T)) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\exp\Big(-\int_0^T r ds \Big) \exp\Big(\int_0^T \vartheta dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\vartheta| ds \Big) \Bigg) \\
&= \exp(-rT)\mathbb{E}\Bigg(\underbrace{\exp\Big(\vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T \Big)}_{\text{Martingal}} \Bigg).
\end{aligned}$$

Da der Erwartungswert eines Martingals konstant ist, gilt

$$\exp(-rT)\mathbb{E}\Bigg(\exp\Big(\vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T \Big) \Bigg) = \exp(-rT)\mathbb{E}\Bigg(\exp\Big(\vartheta W(0) - \frac{1}{2}\vartheta^2 0 \Big) \Bigg) = \exp(-rT).$$

Also ist $\mathbb{E}(H(T)) = \exp(-rT) < \infty$. Gleiches gilt, da $\lambda > 0$, auch für:

$$\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T))) = \mathbb{E}\Bigg(H(T)\frac{1}{\lambda H(T)} \Bigg) = \frac{1}{\lambda} < \infty. \tag{4.5}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 1.23 erfüllt und das optimale Endvermögen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters in dem Portfoliooptimierungsproblem ohne deterministische Garantie ist gegeben durch $\frac{1}{\lambda H(T)}$.

Um das Optimierungsproblem mit Garantie zu lösen, betrachte zunächst die im allgemeinen Fall in Gleichung (4.4) gegebene Nebenbedingung, durch welche der optimale Lagrangeparameter eindeutig bestimmt ist. Für ein $G > 0$, sodass $b > Ge^{-rT}$, ist die Nebenbedingung gegeben durch

$$Ge^{-rT} + \mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right) = b. \tag{4.6}$$

Das optimale Endvermögen ist dann mittels Gleichung (4.3) gegeben durch

$$C(\lambda) = \max\left\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\right\}.$$

Da es sich um ein vollständiges Finanzmarktmodell handelt, in dem die Volatilitäten deterministisch sind, kann der Anfangswert der Call-Option explizit angeben werden. Man sieht leicht, dass

$$H(0) = \beta^{-1}(0)L(0) = \exp\left(\int_0^0 r ds\right)\exp\left(\int_0^0 \vartheta dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^0 |\vartheta|^2 ds\right) = \exp(0)\exp(0) = 1$$

ist und somit

$$\frac{1}{\lambda H(0)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Mittels der klassischen Black-Scholes Formel, siehe [18, Satz 4.2.1], ergibt sich dann für den Anfangspreis der in Gleichung (4.6) auftretenden Call-Option

$$\mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right) = \frac{1}{\lambda}\Phi\left(g_1\left(\frac{1}{\lambda}, T\right)\right) - Ge^{-rT}\Phi\left(g_2\left(\frac{1}{\lambda}, T\right)\right)$$

mit

$$g_1(y,T) = \frac{\log\left(\frac{y}{G}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}, \; g_2(y,T) = \frac{\log\left(\frac{y}{G}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}},$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Im folgenden Satz wird der optimal erwartete Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters angegeben. Nach Satz 4.1 ergibt sich der optimale Endnutzen durch Einsetzen des in Gleichung (4.6) festgelegten Lagrangeparameters in diesen Endnutzen.

Satz 4.2 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist in dem oben beschriebenen Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und einer logarithmischen Nutzenfunktion gegeben durch:*

$$w(\lambda) = \log(G)\Phi(h_1(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(h_2(\lambda)) - |\vartheta|\sqrt{T}\phi(h_1(\lambda)),$$

wobei

$$h_1(\lambda) = \frac{\log(\lambda G) - (r + 1/2\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}, \qquad h_2(\lambda) = \frac{-\log(\lambda G) + (r + 1/2\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}$$

und ϕ, Φ die Dichte beziehungsweise die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung sind. λ ist eindeutig bestimmt durch die Gleichung (4.6).

Beweis: Bestimmen wir zunächst $H(T)$ explizit:

$$\begin{aligned}
H(T) &= \beta^{-1}(T)L(T) \\
&= \exp\left(\int_0^T r ds\right)^{-1} \cdot \exp\left(\int_0^T \vartheta dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\vartheta|^2 ds\right) \\
&= \exp\left(- \int_0^T r ds + \int_0^T \vartheta dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\vartheta|^2 ds\right) \\
&= \exp\left(- rT + \vartheta(W(T) - W(0)) - \frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2 ds\right) \\
&= \exp\left(- rT + \vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\right).
\end{aligned}$$

Nun zu dem optimalen erwarteten Endnutzen $w(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C(\lambda))) \\
&= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\Big(\log(C(\lambda))\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\log(\max\{G, I(\lambda H(T))\})\Big) \\
&= \mathbb{E}\left(\log \left(\max\left\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\right\}\right)\right) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G< \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)}_{II}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Wir berechnen die beiden Erwartungswerte einzeln. Zunächst betrachten wir uns die Indikatorfunktion von I. Es gilt:

$$\begin{aligned}
G \geq \frac{1}{\lambda H(T)} &\Leftrightarrow G\lambda \geq \frac{1}{H(T)} \\
&\Leftrightarrow G\lambda \geq \exp\left(rT - \vartheta W(T) + \frac{1}{2}\vartheta^2 T\right) \\
&\Leftrightarrow \log(\lambda G) \geq rT - \vartheta W(T) + \frac{1}{2}\vartheta^2 T \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\frac{-\log(\lambda G) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\vartheta}}_{:=-y_1} \leq W(T)
\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G\lambda \geq \frac{1}{H(T)}\}} \log(G)\Bigg) \\
&= \log(G)\mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G\lambda \geq \frac{1}{H(T)}\}}\Bigg) \\
&= \log(G)\mathbb{P}\Bigg(G\lambda \geq \frac{1}{H(T)}\Bigg) \\
&= \log(G)\int_{-y_1}^{\infty} \varphi_T(y)dy \\
&= \log(G)\int_{-y_1}^{\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2T}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}dy \\
&= \log(G)\int_{-\overline{y}_1}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \qquad \text{Substitution } x := \frac{y}{\sqrt{T}} \\
&= \log(G)\int_{-\infty}^{\overline{y}_1} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx
\end{aligned}$$

mit $\overline{y}_1 := \frac{y_1}{\sqrt{T}}$ und φ_T die Dichte der $\mathcal{N}(0,T)$-Verteilung. Insgesamt folgt somit für den Erwartungswert I

$$I = \log(G)\Phi(h_1(\lambda)) \tag{4.8}$$

mit

$$h_1(\lambda) = \frac{\log(\lambda G) - (r + 1/2\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}.$$

Nun zu dem zweiten Erwartungswert II. Dieser wird analog zu dem vorherigen berechnet:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\left(\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) + \mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) + \mathbb{E}\Bigg(\left(rT - \vartheta W(T) + \frac{1}{2}\vartheta^2 T\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{P}\Bigg(G < \frac{1}{\lambda H(T)}\Bigg) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\mathbb{P}\Bigg(G < \frac{1}{\lambda H(T)}\Bigg) - \mathbb{E}\Bigg(\vartheta W(T)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int_{y_1}^{\infty}\varphi_T(y)dy + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\int_{y_1}^{\infty}\varphi_T(y)dy - \int_{y_1}^{\infty}\vartheta y\varphi_T(y)dy \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(h_2(\lambda)) - \int_{y_1}^{\infty}\vartheta y\exp\left(\frac{-y^2}{2T}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}dy \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(h_2(\lambda)) - |\vartheta|\sqrt{T}\int_{\overline{y}_1}^{\infty}\vartheta y\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(h_2(\lambda)) - |\vartheta|\sqrt{T}\int_{-\infty}^{-\overline{y}_1} \vartheta y \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(h_2(\lambda)) - |\vartheta|\sqrt{T}\phi(h_1(\lambda)), \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

wobei

$$h_2(\lambda) = \frac{-\log(\lambda G) + (r + 1/2\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}$$

und φ_T die Dichte der $\mathcal{N}(0,T)$-Verteilung, Φ die Verteilungsfunktion und ϕ die Dichte der Standardnormalverteilung sind. Mittels einsetzen von (4.8) und (4.9) in (4.7) ergibt sich das gewünschte Resultat

$$w(\lambda) = \log(G)\Phi(h_1(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(h_2(\lambda)) - |\vartheta|\sqrt{T}\phi(h_1(\lambda))$$

mit $h_1(\lambda)$ und $h_2(\lambda)$ wie oben definiert. □

Die optimal erwartete Rendite ist dann

$$R(\lambda) = \frac{1}{T}(w(\lambda) - \log(b))$$

mit λ abhängig vom Anfangskapital Ge^{-rT}. Dieses wird benötigt um die Endvermögensgarantie zu gewährleisten.

Mittels Satz 4.1 lässt sich über die optimale Strategie folgende Aussage treffen:

Satz 4.3 *Betrachte eine logarithmische Nutzenfunktion. Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G \cdot B(0,T)$. Die optimale Strategie für das in diesem Abschnitt beschriebene Portfoliooptimierungsproblem ist dann gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $B(0,T)$

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G \cdot B(0,T)$ in eine Strategie, welche eine Call-Option auf $\frac{1}{\lambda H(T)}$ repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.

Bemerkung 4.4 Diese Investitionsstrategie lässt sich noch expliziter angeben mittels eines Delta-Hedges. Hierzu muss zunächst die stochastische Differenzialgleichung gefunden werden, welche durch den Prozess

$$Z(t) := \frac{1}{\lambda H(t)}, \qquad Z(0) = \frac{1}{\lambda}$$

gelößt wird. Anschließend gehen analog zu [11] vor. Betrachte dazu den diskontierten Callpreis aus der Strategie aus Satz 4.3. Dieser muss nach dem ersten Fundamentalsatz der Finanzmathematik ein Martingal unter dem eindeutigen Martingalmaß bilden. Aus dieser Betrachtung erhalten wir eine partielle Differenzialgleichung, welche der Callpreisprozess erfüllen muss. Mittels Anwendung der Itô-Formel auf den Callpreisprozess und Einsetzen der partiellen Differenzialgleichung ergibt sich eine Aufteilung des Portfolios.

Lösen wir das Optimierungsproblem nun für eine Power-Nutzenfunktion. Es wird das gleiche Modell wie bei der logarithmischen Nutzenfunktion betrachtet. Auch der grundsätzliche Lösungsweg unterscheidet sich von dem Fall der logarithmischen Nutzenfunktion nicht. Die Nutzenfunktion U ist gegeben durch

$$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

für ein $\alpha \in (0,1)$. Die Inverse der Ableitung von U ist somit $I(y) = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$.
Wir setzen voraus, dass

$$\mathbb{E}\left(H(T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) < \infty$$

gilt. Aus Beispiel 1.26 ist bekannt, dass das optimale Endvermögen für ein Portfoliooptimierungsproblem ohne Garantie bei einer Power-Nutzenfunktion gegeben ist durch

$$C = \frac{b}{m(T)} H(T)^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

mit $m(t) = \mathbb{E}\left(H(t)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$ und in Abhängigkeit des optimalen Lagrangemultiplikators λ durch

$$C(\lambda) = (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Somit ergibt sich das optimale Endvermögen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie nach (4.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\}.$$

Die Nebenbedingung (4.4) für ein $G > 0$ mit $b > Ge^{-rT}$ ist dann gegeben durch

$$Ge^{-rT} + \mathcal{C}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right) = b. \tag{4.10}$$

Wie im Fall einer logarthmischen Nutzenfunktion sehen wir leicht, dass

$$H^{\frac{1}{\alpha-1}}(0) = \exp\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\int_0^0 rds + \int_0^0 \vartheta dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^0 |\vartheta|^2 ds\right)\right) = \exp(0) = 1$$

gilt. Mittels der klassischen Black-Scholes Formel erhalten wir dann wieder

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right) &= \mathcal{C}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} H(T)^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}}\Phi\left(g_1\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}}, T\right)\right) - Ge^{-rT}\Phi\left(g_2\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}}, T\right)\right)\end{aligned}$$

mit

$$g_1(y,T) = \frac{\log\left(\frac{y}{G}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}, \quad g_2(y,T) = \frac{\log\left(\frac{y}{G}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\sqrt{\vartheta^2 T}}$$

und Φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung. Der optimal erwartete Endnutzen lässt sich nun wie folgt bestimmen:

Satz 4.5 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist bei einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und einer Power-Nutzenfunktion gegeben durch*

$$w(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\Bigg(G^{\alpha}\Phi(k_1(\lambda)) + \zeta\Phi(k_2(\lambda))\Bigg),$$

wobei

$$\zeta := \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\Bigg(- \frac{\alpha}{\alpha-1}\Bigg(r+\frac{1}{2}\vartheta^2\Bigg)T + \frac{1}{2T}\Bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta^2\Bigg)^2\Bigg)$$

und

$$k_1(\lambda) = \frac{-(\alpha-1)\log(G) + \log(\lambda) - \Bigg(r+\frac{1}{2}\vartheta^2\Bigg)T}{\vartheta\sqrt{T}}$$

$$k_2(\lambda) = \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) + \Bigg(r+\frac{1}{2}\vartheta^2+\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta\Bigg)T}{\vartheta\sqrt{T}}$$

und ϕ, Φ sind die Dichte beziehungsweise die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. λ ist eindeutig bestimmt als Lösung der Gleichung (4.10).

Beweis: Nach Gleichung (4.2) ist der optimale erwartete Endnutzen gegeben durch

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C)) \\
&= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\Bigg(\frac{C^{\alpha}}{\alpha}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\frac{1}{\alpha}(\max\{G, I(\lambda H(T))\})^{\alpha}\Bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\Bigg((\max\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\})^{\alpha}\Bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\Bigg((\max\{G^{\alpha}, (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\})\Bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\Bigg(G^{\alpha}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\Bigg((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg)}_{II}\Bigg)
\end{aligned}$$

Auch hier betrachten wir zunächst die Indikatorfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
G^{\alpha} \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} &\Leftrightarrow G^{\alpha} \geq \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} H(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\Leftrightarrow G^{\alpha}\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \geq H(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\Leftrightarrow G^{\alpha}\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \geq \exp\Bigg(- rT + \vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\Bigg)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\Leftrightarrow G^{\alpha}\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \geq \exp\Bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Bigg(- rT + \vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log\left(G^\alpha \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) \geq \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(-rT + \vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\vartheta} \geq W(T).
\end{aligned}
$$

Mittels Anwendung der Rechengesetze des Logarithmus ist

$$
\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right) = \log\left(G^{\alpha-1}\frac{1}{\lambda}\right) = (\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda)
$$

und somit gilt

$$
W(T) \leq \underbrace{\frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\vartheta}}_{:=y_2}.
$$

Analog zu dem Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion lassen sich die Erwartungswerte bestimmen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\left(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\right) \\
&= G^\alpha \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\right) \\
&= G^\alpha \mathbb{P}\left(G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) \\
&= G^\alpha \int_{y_2}^{\infty} \varphi_T(y)dy \\
&= G^\alpha \int_{y_2}^{\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2T}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}dy \\
&= G^\alpha \int_{-\infty}^{-\overline{y}_2} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi}dx
\end{aligned}
$$

mit

$$
-\overline{y}_2 := \frac{-y_2}{\sqrt{T}}
$$

und φ_T als Dichte der $\mathcal{N}(0,T)$-Verteilung. Also ergibt sich der Erwartungswert I zu

$$
I = G^\alpha \Phi(k_1(\lambda))
$$

mit

$$
k_1(\lambda) = \frac{-(\alpha-1)\log(G) + \log(\lambda) - \left(r + \frac{1}{2}\vartheta^2\right)T}{\vartheta\sqrt{T}}.
$$

Kommen wir nun zum Erwartungswert II. Es gilt

$$\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\Big((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(-rT - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\Big)\Big) \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta W(T)\Big) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Big) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(-rT - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\Big)\Big) \underbrace{\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta W(T)\Big) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Big)}_{III}
\end{aligned}$$

Um den Erwartungswert II zu bestimmen, muss also der Erwartungswert III berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta W(T)\Big) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Big) \\
&= \int_{-y_2}^{\infty} \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta y\Big) \varphi_T(y) dy \\
&= \int_{-y_2}^{\infty} \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta y\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\Big(\frac{-y^2}{2T}\Big) dy \\
&= \int_{-y_2}^{\infty} \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta y - \frac{y^2}{2T}\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} dy.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Exponenten der Exponentialfunktion im Integral, so erhalten wir mittels der binomischen Formel

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta y - \frac{y^2}{2T} &= \frac{1}{2T}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1} 2T\vartheta y - y^2\Big) \\
&= -\frac{1}{2T}\Big(y^2 - \frac{\alpha}{\alpha-1} 2T\vartheta y\Big) \\
&= -\frac{1}{2T}\Big(y^2 - \frac{\alpha}{\alpha-1} 2T\vartheta y + \Big(\frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2 - \Big(\frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2\Big) \\
&= -\frac{1}{2T}\Big(\Big(y - \frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2 - \Big(\frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2\Big).
\end{aligned}$$

Dies setzen wir in die vorherige Berechnung des Erwartungswertes III ein und erhalten

$$\begin{aligned}
III &= \int_{-y_2}^{\infty} \exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta y - \frac{y^2}{2T}\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} dy \\
&= \exp\Big(\frac{1}{2T}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2\Big) \int_{-y_2}^{\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2T}\Big(y - \frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} dy \\
&= \exp\Big(\frac{1}{2T}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2\Big) \int_{-y_2}^{\infty} \exp\Big(-\frac{\Big(y - \frac{\alpha}{\alpha-1} T\vartheta\Big)^2}{2T}\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{1}{2T}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta\right)^2\right)\int_{-\overline{y}_2}^{\infty}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \qquad \text{Substitution: } x := \frac{y-\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta}{\sqrt{T}}\\
&= \exp\left(\frac{1}{2T}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta\right)^2\right)\int_{-\infty}^{\overline{y}_2}\exp\left(\frac{-\overline{x}^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx
\end{aligned}
$$

mit

$$
\overline{y}_2 := \frac{y_2+\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta}{\sqrt{T}}.
$$

Somit ergibt sich als Lösung des Erwartungswertes II

$$
\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\bigg((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\bigg(-rT-\frac{1}{2}\vartheta^2T\bigg)\right)\mathbb{E}\bigg(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta W(T)\right)\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\bigg(-rT-\frac{1}{2}\vartheta^2T\bigg)+\frac{1}{2T}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta\right)^2\right)\Phi(k_2(\lambda))
\end{aligned}
$$

mit

$$
k_2(\lambda) = \frac{(\alpha-1)\log(G)-\log(\lambda)+\bigg(r+\frac{1}{2}\vartheta^2+\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta\bigg)T}{\vartheta\sqrt{T}}.
$$

Insgesamt ergibt sich für den optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des optimalen Lagrangeparameters λ in diesem Fall

$$
\begin{aligned}
w(\lambda) &= \frac{1}{\alpha}\Bigg(\mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda}H(T)\}}\bigg)+\mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda}H(T)\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}H(T)\}}\bigg)\Bigg)\\
&= \frac{1}{\alpha}G^\alpha\Phi(k_1(\lambda))+\frac{1}{\alpha}\zeta\Phi(k_2(\lambda))\\
&= \frac{1}{\alpha}\Big(G^\alpha\Phi(k_1(\lambda))+\zeta\Phi(k_2(\lambda))\Big)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\zeta := \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\left(-\frac{\alpha}{\alpha-1}\bigg(r+\frac{1}{2}\vartheta^2\bigg)T+\frac{1}{2T}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}T\vartheta^2\right)^2\right).
$$

□

Auch hier lässt sich die optimale Handelsstrategie mit Hilfe von Satz 4.1 angeben:

Satz 4.6 *Betrachte eine Power-Nutzenfunktion. Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G \cdot B(0,T)$. Die optimale Strategie für das in diesem Abschnitt beschriebene Portfoliooptimierungsproblem ist dann gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $B(0,T)$

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G \cdot B(0,T)$ in eine Strategie, welche eine Call-Option auf $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.

Bemerkung 4.7 Auch hier lässt sich die Investitionsstrategie aus Satz 4.6 genauer angeben mittels eines Delta-Hedges. Es muss zunächst die stochastische Differenzialgleichung gefunden werden, welche durch den Prozess

$$Y(t) := (\lambda H(t))^{\frac{1}{\alpha-1}}, \qquad Y(0) = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

gelößt wird. Anschließend gehe analog zu dem in Bemerkung 4.4 beschriebenen Verfahren vor.

4.3 Optimierung in einem Vasicek-Modell

Nun lösen wir das Portfoliooptimierungsproblem im Vasicek-Modell jeweils für eine logarithmische und eine Power-Nutzenfunktion. Dies bedeutet, dass der Finanzmarkt aus dem vorherigen Abschnitt zu einer stochastischen Zinsrate und zu zeitabhängigen Koeffizienten verallgemeinert wird. Aus diesem Grund wird auf das Forward-Martingalmaß zurückgegriffen.

Um das Portfoliooptimierungsproblem mit deterministischer Garantie lösen zu können, muss zunächst das Optimierungsproblem ohne Garantie gelöst werden. Wir werden sehen, dass das Optimierungsproblem auch im Vasicek-Modell berechenbar ist, dies bedeutet, dass die Call-Option aus Satz 4.1 explizit bewertet werden kann. Wir betrachten auch in diesem Abschnitt ein Standard-Finanzmarktmodell mit einem Handelszeitraum $[0, T^*]$ und zwei Basisfinanzgüter. Diese sind ein risikoloses Bankgeldkonto $\beta(t)$ und ein risikobehaftetes Asset $B(t,T)$. Die Dynamiken der Preisprozesse dieser Assets sind nach Abschnitt 2.2 gegeben durch

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t)r(t)dt, \\ dB(t,T^*) &= B(t,T^*)(r(t)dt + \sigma(t,T^*)dW^*(t)), \end{aligned}$$

wobei $T < T^*$. Die Zinsrate r ist in diesem Abschnitt durch das Einfaktor Vasicek-Modell (siehe Abschnitt 2.2) gegeben und wir betrachten eine logarithmische Nutzenfunktion $U(x) = \log(x)$. Als nächstes wird das unbeschränkte Optimierungsproblem gelöst. Es wird zu dem Zeitpunkt $T < T^*$ optimiert. Dazu wird Satz 1.23 angewendet. Wir wissen bereits, dass bei einer logarithmischen Nutzenfunktion der Erwartungswert $\mathbb{E}(H(T)I(\lambda H(T)))$ endlich ist. Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$\mathbb{E}(H(T)) < \infty.$$

Diese Aussage kann mittels eines Maßwechsels gefolgert werden. Es gilt

$$\mathbb{E}(H(T)) = \mathbb{E}^*\bigg(\frac{1}{L(T)}H(T)\bigg) = \mathbb{E}^*\bigg(\frac{1}{\beta(T)}\bigg).$$

Dies entspricht jedoch der Bedingung, dass der Anfangspreis eines T-Bonds endlich ist nach Lemma 2.3

$$B(0,T) = \mathbb{E}^*\bigg(\exp\bigg(-\int_0^T r(s)ds\bigg)\bigg) < \infty.$$

Also ist in jedem Finanzmarktmodell, in dem jeder T^*-Bond einen arbitragefreien Anfangspreis besitzt, die Martingalmethode bei logarithmischer Nutzenfunktion anwendbar. Es gelten die Resultate aus dem Beispiel 1.25. Das optimal erwartete Endvermögen ist somit

$$C(\lambda) = \frac{1}{\lambda H(T)}.$$

Kommen wir zum Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie. Nach Satz 2.8 ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Maturität T gegeben durch

$$B(0,T) = \exp(-r(t)g(T) - h(T)) \tag{4.11}$$

mit

$$g(T) = \frac{1-e^{-bT}}{b}$$

und

$$h(T) = \bigg(T - \frac{1-e^{-bT}}{b}\bigg)\bigg(a - \frac{\delta^2}{2b^2}\bigg) + \frac{\delta^2}{4b}\bigg(\frac{1-e^{-bT}}{b}\bigg)^2.$$

Der Fond muss am Ende des Optimierungszeitraumes, also zur Zeit T, eine garantierte Auszahlung von $G > 0$ garantieren können. Dazu benötigt er ein Startkapital von mindestens

$$G \cdot B(0,T),$$

wobei $B(0,T)$ in Gleichung (4.11) gegeben ist. Wir nehmen also nun an, dass $b > G \cdot B(0,T)$ ist. Das optimale Endvermögen $C = C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ ist dann gegeben durch

$$C(\lambda) = \max\bigg\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\bigg\}. \tag{4.12}$$

Der optimale Lagrangeparameter kann berechnet werden durch Lösen der Gleichung

$$V_0(C(\lambda)) = G \cdot B(0,T) + \mathcal{C}\bigg(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\bigg) = b, \tag{4.13}$$

wobei die hier gegebene Call-Option auf das Underlying $\frac{1}{\lambda H(T)}$ mit Strike G die Maturität T mit $T < T^*$ besitzt und das Underlying die Maturität T^*.
Wichtig für die Berechenbarkeit dieses Problems ist, dass die Call-Option bewertet werden kann.

Nach Satz 2.9 ist die Volatilität eines Bonds im Einfaktor Vasicek-Modell deterministisch und somit ist die Call-Option in (4.13) bewertbar. Mittels der Bewertungsformel einer Call-Option in diesem Modell, Satz 2.10, ergibt sich für die Gleichung (4.13):

$$G \cdot B(0,T) + \mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right) = G \cdot B(0,T) + \frac{1}{\lambda}\Phi(d_1) - G\frac{1}{\lambda}\Phi(d_2) = b \tag{4.14}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\overline{\delta}}{2} - \frac{1}{\overline{\delta}}\log(G) \\ d_2 &= d_1 - \overline{\delta} \\ \overline{\delta} &= \frac{\delta}{b}\left(1 - e^{-b(T^*-T)}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2bT}}{2b}} \end{aligned}$$

und Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zudem wurde der mittels des Forward Martingalmaßes festgestellte Zusammenhang aus Gleichung(2.7)

$$H(t) = R(t)\frac{B(0,T)}{B(t,T)}$$

genutzt. Mittels des folgenden Satzes wird der optimale erwartete Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters angegeben. Der optimale Endnutzen ergibt sich nach Satz 4.1 durch Einsetzten des optimalen Lagrangeparameters aus Gleichung (4.14) in dieses Vermögen.

Satz 4.8 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist in einem Einfaktor-Vasicek Modell mit logarithmischer Nutzenfunktion gegeben durch*

$$w(\lambda) = \log(G)\Phi(h_3(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_4(\lambda)) + \log(B^{-1}(0,T))\Phi(h_4(\lambda)) - \sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)) + \frac{1}{2}\kappa\Phi(h_4(\lambda)),$$

wobei

$$\kappa = \int_0^T \eta^2(s)ds$$

und

$$\begin{aligned} h_3(\lambda) &= \frac{\log(G\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds}{\left(\int_0^T \eta^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}} \\ h_4(\lambda) &= \frac{-\log(G\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds}{\left(\int_0^T \eta^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

und ϕ, Φ die Dichte beziehungsweise die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung sind.

Beweis: Nach Gleichung (2.7) gilt

$$R(t) = \frac{B(t,T)}{B(0,T)} H(t)$$

und somit, da nach Voraussetzung aus Abschnitt 2.1, $B(T,T) = 1$ ist, gilt

$$R(T) = \frac{1}{B(0,T)} H(T) \qquad \Leftrightarrow \qquad H(T) = R(T) \cdot B(0,T).$$

Der optimale erwartete Nutzen ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C(\lambda))) \\
&= \max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\Big(\log(C(\lambda)) \Big) \\
&= \max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\Big(\log(\max\{G, I(\lambda H(T))\}) \Big) \\
&= \mathbb{E}\left(\log\left(\max\left\{ G, \frac{1}{\lambda H(T)} \right\} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\log\left(\max\left\{ G, \frac{1}{\lambda} R^{-1}(T) B^{-1}(0,T) \right\} \right) \right) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\Big(\log(G) \mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda} R^{-1}(T) B^{-1}(0,T)\}} \Big)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\log\left(\frac{1}{\lambda} R^{-1}(T) B^{-1}(0,T) \right) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda} R^{-1}(T) B^{-1}(0,T)\}} \right)}_{II}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst die Indikatorfunktion. Mittels Gleichung (2.8) ist $R(t)$ gegeben durch

$$R(t) = \exp\left(\int_0^t \eta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \eta^2(s) ds \right),$$

wobei $\eta(t) = \sigma(t,T) + \vartheta(t)$ ist. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
G \geq \frac{1}{\lambda} R^{-1}(T) B^{-1}(0,T) &\Leftrightarrow G\lambda \geq R^{-1}(T) B^{-1}(0,T) \\
&\Leftrightarrow G\lambda B(0,T) \geq R^{-1}(T) \\
&\Leftrightarrow G\lambda B(0,T) \geq \exp\left(- \int_0^T \eta(s) dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^T \eta^2(s) ds \right) \\
&\Leftrightarrow \log(G\lambda) + \log(B(0,T)) \geq - \int_0^T \eta(s) dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^T \eta^2(s) ds \\
&\Leftrightarrow \underbrace{- \log(G\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \eta^2(s) ds}_{=: -y_3} \leq \int_0^T \eta(s) dW(s)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Betrachten wir nun das Integral auf der rechten Seite. Dies ist ein stochastisches Integral gegen den Wiener Prozess über eine deterministische Funktion. Zudem gilt

$$\int_0^T \eta^2(s)ds < \infty \qquad \text{für alle } s \leq T.$$

Nach [16, Theorem 4.4.9] ist dieses Integral eine $\mathcal{N}\left(0, \int_0^T \eta^2(s)ds\right)$-verteilte Zufallsvariable. Um eine bessere Übersicht zu gewährleisten, betrachte die folgende Notation

$$\kappa := \int_0^T \eta^2(s)ds.$$

Somit folgt für den Erwartungswert I:

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\left(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\lambda B(0,T)\geq R^{-1}(T)\}}\right) \\
&= \log(G)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{G\lambda B(0,T)\geq R^{-1}(T)\}}\right) \\
&= \log(G)\mathbb{P}(G\lambda B(0,T) \geq R^{-1}(T)) \\
&= \log(G)\int_{-y_3}^{\infty} \varphi_\kappa(y)dy \\
&= \log(G)\int_{-y_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\kappa}\right)dy \\
&= \log(G)\int_{-\overline{y}_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx \qquad \text{Substitution } x := \frac{y}{\sqrt{\kappa}} \\
&= \log(G)\int_{-\infty}^{\overline{y}_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx
\end{aligned}$$

mit $\overline{y}_3 := \frac{y_3}{\sqrt{\kappa}}$ und φ_κ als die Dichte der $\mathcal{N}(0,\kappa)$-Verteilung. Somit folgt insgesamt

$$I = \log(G)\Phi(h_3(\lambda))$$

mit

$$h_3(\lambda) = \frac{\log(G\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}} = \frac{\log(G\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds}{\left(\int_0^T \eta^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.16}$$

Betrachte anschließend den Erwartungswert II:

$$
\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\log(R^{-1}(T))+\log(B^{-1}(0,T))\Bigg)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg)+\mathbb{E}\Bigg(\log(R^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&\quad+\mathbb{E}\Bigg(\log(B^{-1}(0,T)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg)+\log(B^{-1}(0,T))\mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&\quad+\mathbb{E}\Bigg(\log(R^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{P}\Bigg(G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\Bigg)+\log(B^{-1}(0,T))\mathbb{P}\Bigg(G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\Bigg) \\
&\quad+\underbrace{\mathbb{E}\Bigg(\log(R^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg)}_{III}
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Betrachten wir nun zunächst den Erwartungswert III. Beachte dafür zunächst, dass

$$
\log(R^{-1}(T)) = -\int_0^T \eta(s)dW(s)+\frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds
$$

gilt. Somit folgt

$$
\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\Bigg(\log(R^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\Bigg(-\int_0^T \eta(s)dW(s)+\frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\Bigg)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(-\int_0^T \eta(s)dW(s)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg)+\frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\Bigg(\int_0^T \eta^2(s)ds\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= -\mathbb{E}\Bigg(\int_0^T \eta(s)dW(s)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg)+\frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\cdot\mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg) \\
&= -\underbrace{\mathbb{E}\Bigg(\int_0^T \eta(s)dW(s)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Bigg)}_{IV}+\frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\cdot\mathbb{P}\Bigg(G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\Bigg)
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Um den Erwartungwert IV zu bestimmen, sei darauf hingewiesen, dass das Integral $\int_0^T \eta(s)dW(s)$ eine $\mathcal{N}\Big(0, \int_0^T \eta^2(s)ds\Big)$-verteilte Zufallsvariable ist. Dies folgt analog zu obriger Argumentation mittels [16, Theorem 4.4.9]. Mittels einer analogen Rechnung wie in (4.9) ergibt sich

$$IV = \sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)),$$

wobei ϕ die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
III &= -\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \eta(s)dW(s)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\bigg) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \cdot \mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\bigg) \\
&= -\sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \cdot \mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\bigg) \\
&= -\sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)) + \frac{1}{2}\kappa \cdot \mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\bigg). \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun

$$\mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\bigg),$$

um den Erwartungwert II berechnen zu können. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\bigg) &= \int_{y_3}^{\infty} \varphi_\kappa(y)dy \\
&= \int_{y_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \exp\bigg(-\frac{y^2}{2\kappa}\bigg)dy \\
&= \int_{-\infty}^{-\overline{y}_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigg(\frac{-x^2}{2}\bigg)dx
\end{aligned}$$

mit $\overline{y}_3 := \frac{y_3}{\sqrt{\kappa}}$ und φ_κ als Dichte der $\mathcal{N}(0,\kappa)$-Verteilung. Ingesamt gilt dann also

$$\mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\bigg) = \Phi(h_4(\lambda)) \qquad (4.20)$$

mit Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und

$$h_4(\lambda) = \frac{-\log(G\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}} = \frac{-\log(G\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds}{\bigg(\int_0^T \eta^2(s)ds\bigg)^{\frac{1}{2}}}$$

Mittels der Gleichungen (4.17), (4.18), (4.19) und (4.20) erhalten wir dann für den Erwartungswert II

$$
\begin{aligned}
II = &\ \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{P}\Big(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\Big) + \log(B^{-1}(0,T))\mathbb{P}\Big(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\Big) \\
&+ \mathbb{E}\Big(\ \log(R^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\}}\Big) \\
= &\ \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_4(\lambda)) + \log(B^{-1}(0,T))\Phi(h_4(\lambda)) - \sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)) \\
&+ \frac{1}{2}\kappa\cdot\mathbb{P}\Big(G < \frac{1}{\lambda}R^{-1}(T)B^{-1}(0,T)\Big) \\
= &\ \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_4(\lambda)) + \log(B^{-1}(0,T))\Phi(h_4(\lambda)) - \sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)) + \frac{1}{2}\kappa\Phi(h_4(\lambda)).
\end{aligned}
$$

Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ in Abhängigkeit des optimalen Lagrangeparameters, welcher durch die Gleichung (4.13) eindeutig bestimmt ist, ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
w(\lambda) = &\ \mathbb{E}\Big(\ \log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda}R(T)B(0,T)\}}\Big) + \mathbb{E}\Big(\ \log\left(\frac{1}{\lambda}R(T)B(0,T)\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda}R(T)B(0,T)\}}\Big) \\
= &\ \log(G)\Phi(h_3(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_4(\lambda)) + \log(B^{-1}(0,T))\Phi(h_4(\lambda)) - \sqrt{\kappa}\phi(h_3(\lambda)) \\
&+ \frac{1}{2}\kappa\Phi(h_4(\lambda)),
\end{aligned}
$$

wobei ϕ beziehungsweise Φ die Dichte beziehungsweise die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. □

Analog zu Satz 4.1 erhalten wir das folgende Resultat für die optimale Handelstrategie:

Satz 4.9 *Betrachte eine logarithmische Nutzenfunktion. Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G\cdot B(0,T)$ mit $B(0,T)$ gegeben wie in Gleichung* (4.11)*. Dann ist die optimale Strategie gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $B(0,T)$ und

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G\cdot B(0,T)$ in eine Strategie, welche eine Call-Option auf $\frac{1}{\lambda H(T)}$ repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.

Kommen wir nun zur Optimierung im Fall einer Power-Nutzenfunktion. Auch hier wollen wir zunächst das unbeschränkte Portfolioproblem lösen und halten uns dafür an [17, Abschnitt 4.2]. Es muss also geprüft werden, dass für die beiden Erwartungswerte

$$\mathbb{E}(H(T)) < \infty \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}\Big(H(T)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\Big) < \infty$$

gilt, um Satz 1.23 anwenden zu können. Die Gültigkeit der ersten Ungleichung wurde bereits im Abschnitt 4.3 gezeigt. Um die zweite Ungleichung zu zeigen, nutzen wir wieder das Forward-Martingalmaß. Mittels eines Maßwechsels gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(H(T)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) &= \mathbb{E}\left((R(T)B(0,T))^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left(\frac{1}{R(T)}(R(T)B(0,T))^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) \\ &= B(0,T)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left(R(T)^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right).\end{aligned}$$

Da es sich bei dem Prozess $(R(t))$ um einen Dichtequotientenprozess handelt, welcher nach (2.7) die Darstellung

$$R(t) = \exp\left(\int_0^t \eta(s)dW_T(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds\right)$$

besitzt, η nach Bemerkung 2.12 deterministisch ist und W_T ein Wiener-Prozess bezüglich des Maßes $\mathbb{P}_T$ ist, ist $R(t)$ eine log-normalverteilte Zufallsvariable bezüglich des Maßes $\mathbb{P}_T$. Somit ist der obrige Erwartungswert auch endlich. Also sind die Voraussetzungen von Satz 1.23 erfüllt und nach obriger Gleichung (1.25) ist das optimale erwartete Endvermögen gegeben durch

$$C(\lambda) = (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

wobei der optimale Lagrangeparameter λ eindeutig bestimmt ist.
Betrachten wir nun das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie. Zu Zeitpunkt T muss der Fond eine Auszahlung von $G > 0$ garantieren können. Dazu benötigt er ein Startkapital von mindestens

$$G \cdot B(0,T),$$

wobei $B(0,T)$ in Gleichung (4.11) gegeben ist. Wir nehmen also nun an, dass $b > G \cdot B(0,T)$ ist. Das optimale Endvermögen $C = C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameter λ ist dann gegeben durch

$$C(\lambda) = \max\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\}. \tag{4.21}$$

Der optimale Lagrangeparameter kann berechnet werden durch lösen der Gleichung

$$V_0(C(\lambda)) = G \cdot B(0,T) + \mathcal{C}((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G) = b, \tag{4.22}$$

wobei auch hier die Call-Option $\mathcal{C}((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G)$ die Maturität T mit $T < T^*$ und das Underlying $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ die Maturität T^* besitzt.
Um den optimalen erwartete Endnutzen bestimmen zu können, ist es wieder wichtig diese Call-Option in Gleichung (4.22) bewerten zu können. Durch diese ist der optimale Lagrangeparameter λ eindeutig bestimmt. Da wir uns in einem Vasicek-Modell befinden, ist die in der Gleichung auftretende Call-Option bewertbar, weil in dem Vasicek-Modell die Volatilität eines

Bonds deterministisch ist, siehe Satz 2.9. Mittels der Bewertungsformel einer Call-Option in diesem Modell, Satz 2.10, ergibt sich für die Gleichung (4.13) hier, dass

$$\mathcal{C}((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G) = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}\Phi(d_1) - G\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}\Phi(d_2) \tag{4.23}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\overline{\delta}}{2} - \frac{1}{\overline{\delta}}\log(G) \\ d_2 &= d_1 - \overline{\delta}, \end{aligned}$$

wobei

$$\overline{\delta} = \frac{\delta}{b}\left(1 - e^{-b(T^*-T)}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2bT}}{2b}}$$

und Φ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung ist.

Satz 4.10 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist in einem Einfaktor Vasicek-Modell mit einer Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ gegeben durch*

$$w(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\left(G^\alpha\Phi(k_3(\lambda)) + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\zeta_2\Phi(k_4(\lambda))\right),$$

wobei

$$\begin{aligned} \zeta_2 &:= \exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\right)\exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right), \\ \kappa &:= \int_0^T \eta^2(s)ds \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} k_3(\lambda) &= \frac{-(\alpha-1)\log(G) + \log(\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}}, \\ k_4(\lambda) &= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}\kappa}{\sqrt{\kappa}}. \end{aligned}$$

Beweis: Die Berechnung des optimalen erwarteten Endnutzens erfolgt mithilfe des Forward-Martingalmaßes. Es gilt

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C)) \\ &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\left(\frac{C^\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha}(\max\{G, I(\lambda H(T))\})^\alpha\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left((\max\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\})^\alpha\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\Big((\max\{G^\alpha, (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\})\Big) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\Big((\max\{G^\alpha, (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\})\Big) \\
&= \frac{1}{\alpha}\Big(\underbrace{\mathbb{E}\Big(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\Big((\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)}_{II}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Eine zu (4.15) analoge Rechnung liefert uns mittels

$$
R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\int_0^T \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\right)\right),
$$

dass

$$
\begin{aligned}
G^\alpha \geq (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} &\Leftrightarrow G^\alpha \geq \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\Leftrightarrow G^\alpha \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \geq R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) \geq \int_0^T \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \geq \int_0^T \eta(s)dW(s)
\end{aligned}
$$

gilt. Mittels der Logarithmengesetze ergibt sich für den linken Teil der Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds &= \log\left(G^{\alpha-1}\frac{1}{\lambda B(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \\
&= (\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds
\end{aligned}
$$

und insgesamt

$$
\underbrace{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds}_{=:y_4} \geq \int_0^T \eta(s)dW(s). \tag{4.25}
$$

Mittels einer zu dem Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion analogen Argumentation mittels [16, Theorem 4.4.9] ist $\int_0^T \eta(s)dW(s)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^T \eta^2(s)ds$. Auch hier wollen wir die Notation

$$
\kappa := \int_0^T \eta^2(s)ds \tag{4.26}
$$

verwenden. Nun betrachte den Erwartungswert I. Dieser lässt sich berechnen zu

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\Bigg(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg) \\
&= G^\alpha \mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg) \\
&= G^\alpha \mathbb{P}\Bigg(G^\alpha \geq (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \Bigg) \\
&= G^\alpha \int_{y_4}^{\infty} \varphi_\kappa(y) dy \\
&= G^\alpha \int_{y_4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \exp\Bigg(-\frac{y^2}{2\kappa} \Bigg) dy \\
&= G^\alpha \int_{-\infty}^{-\overline{y}_4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Bigg(-\frac{x^2}{2} \Bigg) dx
\end{aligned}$$

mit $\overline{y}_4 := \frac{y_4}{\sqrt{\kappa}}$ und φ_κ als Dichte der $\mathcal{N}(0,\kappa)$-Verteilung. Insgesamt ist dann

$$I = G^\alpha \Phi(k_3(\lambda)) \tag{4.27}$$

mit

$$k_3(\lambda) := \frac{-(\alpha-1)\log(G) + \log(\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}} \tag{4.28}$$

und Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Nun kann der Erwartungswert II berechnet werden zu

$$\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\Bigg((\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \underbrace{\mathbb{E}\Bigg(R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg)}_{III}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Auch in diesem Fall wird zunächst den Erwartungswert III bestimmt:

$$\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\Bigg(R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1} \Bigg(\int_0^T \eta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \eta^2(s) ds \Bigg) \Bigg) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg) \\
&= \exp\Bigg(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \int_0^T \eta^2(s) ds \Bigg) \underbrace{\mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^T \eta(s) dW(s) \Bigg) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg)}_{IV}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Der Erwartungwert IV ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
IV &= \mathbb{E}\bigg(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^T \eta(s)dW(s)\right)\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) \\
&= \int_{-y_4}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}y\right)\varphi_\kappa(y)dy \\
&= \int_{-y_4}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\kappa}\right)dy \\
&= \int_{-y_4}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}y-\frac{y^2}{2\kappa}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}dy.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten den Exponenten der Exponentialfunktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha-1}y-\frac{y^2}{2\kappa} &= -\frac{1}{2\kappa}\left(y^2-\frac{\alpha}{\alpha-1}2\kappa y\right) \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\left(y^2-\frac{\alpha}{\alpha-1}2\kappa y+\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\left(\left(y-\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
IV &= \int_{-y_4}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}y-\frac{y^2}{2\kappa}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}dy \\
&= \int_{-y_4}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\kappa}\left(\left(y-\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}dy \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\int_{-y_4}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\kappa}\left(y-\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}dy \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\int_{-\overline{y}_4^*}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \qquad \text{Substitution: } x := \frac{y-\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa}{\sqrt{\kappa}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\int_{-\infty}^{\overline{y}_4^*} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

mit $\overline{y}_4^* := \frac{y_4+\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa}{\sqrt{\kappa}}$. Es ergibt sich dann für den Erwartungswert IV:

$$
\begin{aligned}
IV &= \mathbb{E}\bigg(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^T \eta(s)dW(s)\right)\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\Phi(k_4(\lambda)), \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

wobei

$$\begin{aligned}
k_4(\lambda) :&= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa}{\sqrt{\kappa}} \\
&= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) + \frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}\kappa}{\sqrt{\kappa}}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Durch Einsetzen der Gleichung (4.32) in (4.30) erhalten wir für den Erwartungswert III:

$$\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\Bigg(R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\int_0^T \eta^2(s)ds\right)\exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\Phi(k_4(\lambda)) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\right)\exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)\Phi(k_4(\lambda))
\end{aligned} \tag{4.34}$$

und durch Einsetzen von (4.34) in (4.29) den Erwartungswert II

$$\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\Bigg((\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \underbrace{\exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\right)\exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right)}_{:=\zeta_2}\Phi(k_4(\lambda)) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\zeta_2\Phi(k_4(\lambda)).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Insgesamt erhalten wir dann durch Einsetzen der Gleichungen (4.27) und (4.35) in (4.24) für den optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des Langrangeparameters

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \frac{1}{\alpha}\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg) + \mathbb{E}\Bigg((\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\Bigg(G^\alpha\Phi(k_3(\lambda)) + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\zeta_2\Phi(k_4(\lambda))\Bigg),
\end{aligned}$$

wobei

$$\zeta_2 := \exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\right)\exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right),$$

$k_3(\lambda)$ wie in (4.28), $k_4(\lambda)$ wie in (4.33) und κ wie in (4.26) definiert sind. Der optimale Lagrangeparameter λ kann durch lösen der Gleichung (4.22) ermittelt werden. □

Analog zu Satz 4.1 erhalten wir das folgende Resultat für die optimale Handelstrategie:

Satz 4.11 *Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G \cdot B(0,T)$ mit $B(0,T)$ gegeben wie in Gleichung (4.11). Dann ist die optimale Strategie für das in diesem Abschnitt beschriebene Portfoliooptimierungsproblem bei einer Power-Nutzenfunktion gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $B(0,T)$ und

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G \cdot B(0,T)$ in eine Strategie, welche eine Call-Option auf $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.

4.4 Optimierung in einem Mixed Stock Bond Markt

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Mixed Stock Bond Markt und ausschließlich eine Power-Nutzenfunktion. Es soll eine Optimierung zum Zeitpunkt T, mit $T < T^*$ durchgeführt werden. Der Fond hat hier also die Möglichkeit neben dem Geldmarktkonto und dem T^*-Bond, in eine Aktie mit Preisprozess S zu investieren. Das betrachtete Finanzmarktmodell wird in diesem Abschitt somit zu einem höherdimensionalen Finanzmarktmodell erweitert. Es gelten für die Preisprozesse der drei Güter die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
d\beta(t) &= \beta(t)r(t)dt \\
dB(t,T^*) &= B(t,T^*)(r(t)dt + \sigma_B(t,T^*)dW_B^*(t)) \\
dS(t) &= S(t)(r(t)dt + \sigma_S(t)dW_S^*(t) + \sigma_{SB}(t)dW_B^*(t)),
\end{aligned}$$

wobei $W = (W_B, W_S)^\top$ ein 2-dimensionaler Wiener Prozess bezüglich des Maßes $\mathbb{P}$ und $W^* = (W_B^*, W_S^*)^\top$ ein 2-dimensionaler Wiener Prozess bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ ist. Durch Anwendung des Satzes von Girsanov folgt, dass

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds$$

für previsibles $\vartheta = (\vartheta_B, \vartheta_S)^\top$ gilt. Gilt zudem

$$\begin{aligned}
\mu_B(t) + \sigma_B(t,T_1)\vartheta_B(t) &= r(t), \\
\mu_S(t) + \sigma_S(t)\vartheta_S(t) + \sigma_{SB}(t)\vartheta_B(t) &= r(t),
\end{aligned}$$

so ist der Markt vollständig und arbitragefrei. Weiter können wir den Dichtequotientenprozess L wie folgt beschreiben

$$L(t) = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta_B(s)dW_B(s) + \int_0^t \vartheta_S(s)dW_S(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\vartheta_B^2(s) + \vartheta_S^2(s)|ds\right).$$

Zudem treffen wir die Annahmen, dass die Volatilitätfunktion $\sigma_S(t) \neq 0$ für alle t, sowie ϑ als auch die hier auftretenden Volatilitäten deterministisch sind.

Ziel ist es zunächst, die Funktion η, welche das T-Forward-Martingalmaß $\mathbb{P}_T$ sowie den Dichtequotientenprozess

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = R(t) = \exp\left(\int_0^t \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds\right)$$

determiniert, neu zu ermitteln. Dies ist durch die Hinzunahme der Aktie notwendig geworden. Durch eine zu (2.10) analogen Rechnung erhalten wir für einen T-Bond:

$$\begin{aligned}
dR(t) &= B(0,T)^{-1}d(B^*(t,T)L(t)) \\
&= B(0,T)^{-1}(L(t)dB^*(t,T) + B^*(t,T)dL(t) + d\left\langle B^*, L\right\rangle_t) \\
&= B(0,T)^{-1}(L(t)B^*(t,T)\sigma_B(t,T)dW_B(t) + B^*(t,T)L(t)(\vartheta_B(t)dW_B(t) + \vartheta_S(t)dW_s(t))) \\
&= R(t)((\vartheta_B(t) + \sigma_B(t,T))dW_B(s) + \vartheta_S(t)dW_S(t)) \\
&= R(t)(\vartheta_B(t) + \sigma(t,T), \vartheta_S(t))dW(t)
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$\eta(t) = (\vartheta_B(t) + \sigma(t,T), \vartheta_S(t)).$$

Als nächstes wird das statische Problem für das Portfoliooptimierungsproblem ohne Garantie gelösen. Mittels eines Maßwechsels zum äquivalenten Martingalmaßes sieht man, dass

$$\mathbb{E}(H(T)) < \infty$$

ist. Mit einer analogen Rechnung zu oben erhalten wir

$$\mathbb{E}\left(H(T)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) < \infty,$$

da der Erwartungswert einer logarithmisch normalverteilten Zufallsvariable gebildet wird. Somit ist Satz 1.23 anwendbar und wir erhalten für das optimale Endvermögen

$$C(\lambda) = (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

mit einer eindeutig bestimmten Konstanten λ.

Nun wird das Portfoliooptimierungsproblem deterministischer Garantie gelöst. Um am Ende des Optimierungszeitraumes T eine garantierte Auszahlung in Höhe von $G > 0$ garantieren zu können, ist ein Startkapital von mindestens

$$G \cdot B(0,T)$$

erforderlich, wobei mit $B(t,T)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zur Zeit t bezeichnet wird, die eine Auszahlung von 1 zur Marurität T besitzt. Wir nehmen also nun an, dass $b > G{\cdot}B(0,T)$ ist. Auch hier kann das optimale Endvermögen $C = C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters durch punktweise Lagrangemaximierung bestimmt werden zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\}. \tag{4.36}$$

Der Lagrangemultiplikator λ kann berechnet werden durch Lösen der Gleichung

$$V_0(C(\lambda)) = G \cdot B(0,T) + \mathcal{C}\big((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\big) = b, \tag{4.37}$$

wobei $\mathcal{C}((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G)$ den Anfangspreis einer Call-Option mit Strike G auf ein Asset mit Auszahlung $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ zur Zeit T ist. Um das optimale Endvermögen explizit berechnen zu können, ist es wieder wichtig den Anfangspreis der Call-Option in Gleichung (4.37) exakt bestimmen zu können. Da wir in diesem vollständigen Mixed Stock Bond Modell vorausgesetzt haben, dass die Volatilitäten deterministisch sind, ist der Anfangspreis dieser Call-Option bestimmbar. Der optimale erwartete Endnutzen wird mittels des folgenden Satzes bestimmt.

Satz 4.12 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist bei einem Mixed Stock Bond Modell und einer Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ gegeben durch*

$$w(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\Big(G^\alpha \Phi(k_5(\lambda)) + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \zeta_2 \Phi(k_6(\lambda))\Big),$$

wobei

$$\zeta_2 := \exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\right) \exp\left(\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\right)^2\right), \tag{4.38}$$

$$\kappa := \int_0^T \eta^2(s)ds = \int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds, \tag{4.39}$$

sowie

$$\begin{aligned} k_5(\lambda) :&= \frac{(1-\alpha)\log(G) + \log(\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}} \\ &= \frac{(1-\alpha)\log(G) + \log(\lambda) + \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\Big(\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds\Big)}{\sqrt{\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} k_6(\lambda) :&= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) - \Big(\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}\Big)\kappa}{\sqrt{\kappa}} \\ &= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) - \Big(\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}\Big)\Big(\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds\Big)}{\sqrt{\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds}}. \end{aligned}$$

Beweis: Beachte zunächst folgende Notation:

$$\begin{aligned}\int_0^T \eta(s)dW(s) &:= \int_0^T \eta_B(s)dW_B(s) + \int_0^T \eta_S(s)dW_S(s)\\ &= \int_0^T \vartheta_B(s) + \sigma(s,T)dW_B(s) + \int_0^T \vartheta_S(s)dW_S(s).\end{aligned}$$

Der Beweis folgt auf analoge Weise zu dem Beweis von Satz 4.10. Für den optimal erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters gilt

$$w(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\Big(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\Big((\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)}_{II}\Bigg). \tag{4.40}$$

Da

$$R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\int_0^T \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\right)\right)$$

gilt, liefert uns eine zu (4.15) analoge Rechnung

$$G^\alpha \geq (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \geq \int_0^T \eta(s)dW(s),$$

wobei hier

$$\int_0^T \eta(s)dW(s) = \int_0^T \eta_B(s)dW_B(s) + \int_0^T \eta_S(s)dW_S(s)$$

definiert ist. Da sowohl $\eta_B(s)$, als auch $\eta_S(s)$ deterministisch sind und

$$\int_0^t \eta_B^2(s)ds < \infty \qquad \text{und} \qquad \int_0^t \eta_S^2(s)ds < \infty$$

für alle $t \leq T$ gilt, sind die beiden Integrale $\int_0^T \eta_B(s)dW_B(s)$ und $\int_0^T \eta_S(s)dW_S(s)$ nach [16, Theorem 4.4.9] normalverteilt. Für zwei Zufallsvariablen $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ gilt

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Also folgt

$$\int_0^T \eta(s)dW(s) \sim \mathcal{N}\Bigg(0, \underbrace{\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds}_{=\int_0^T \eta^2(s)ds}\Bigg).$$

Wir definieren wieder

$$\kappa := \int_0^T \eta^2(s)ds = \int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds. \tag{4.41}$$

Mittels der Logarithmengesetze erhalten wir

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\left(G^\alpha\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}B(0,T)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)=(\alpha-1)\log(G)-\log(\lambda)-\log(B(0,T))$$

und insgesamt

$$\underbrace{(\alpha-1)\log(G)-\log(\lambda)-\log(B(0,T))+\frac{1}{2}\int_0^T\eta^2(s)ds}_{:=y_5}\geq\int_0^T\eta(s)dW(s). \tag{4.42}$$

Mittels dieser Vorarbeit lässt sich der Erwartungswert I berechnen zu

$$\begin{aligned}
I&=\mathbb{E}\Bigg(G^\alpha\mathbb{1}_{\{G^\alpha\geq(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg)\\
&=G^\alpha\mathbb{E}\Bigg(\mathbb{1}_{\{G^\alpha\geq(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Bigg)\\
&=G^\alpha\mathbb{P}\Bigg(G^\alpha\geq(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Bigg)\\
&=G^\alpha\int_{y_5}^\infty\varphi_\kappa(y)dy\\
&=G^\alpha\int_{\overline{y}_5}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&=G^\alpha\int_{-\infty}^{-\overline{y}_5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx
\end{aligned}$$

mit $\overline{y}_5:=\frac{y_5}{\sqrt{\kappa}}$ und φ_κ als Dichte der $\mathcal{N}(0,\kappa)=\mathcal{N}(0,\int_0^T\eta_B^2(s)ds+\int_0^T\eta_S^2(s)ds)$-Verteilung. Insgesamt ist dann

$$I=G^\alpha\Phi(k_5(\lambda)) \tag{4.43}$$

mit

$$\begin{aligned}
k_5(\lambda):&=\frac{(1-\alpha)\log(G)+\log(\lambda)+\log(B(0,T))-\frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}}\\
&=\frac{(1-\alpha)\log(G)+\log(\lambda)+\log(B(0,T))-\frac{1}{2}\left(\int_0^T\eta_B^2(s)ds+\int_0^T\eta_S^2(s)ds\right)}{\sqrt{\int_0^T\eta_B^2(s)ds+\int_0^T\eta_S^2(s)ds}}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

und Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Als nächstes berechnen wir den Erwartungswert II:

$$
\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\bigg((\lambda R(T) B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \underbrace{\mathbb{E}\bigg(R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg)}_{III}. \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

Auch in diesem Fall bestimmen wir zunächst den Erwartungswert III:

$$
\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\bigg(R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\exp\bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1} \bigg(\int_0^T \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds \bigg)\bigg) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg) \\
&= \exp\bigg(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \int_0^T \eta^2(s)ds \bigg) \underbrace{\mathbb{E}\bigg(\exp\bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^T \eta(s)dW(s) \bigg) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg)}_{IV}. \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Analog zu dem Beweis von Satz 4.10 erhalten wir für den Erwartungswert IV:

$$
\begin{aligned}
IV &= \mathbb{E}\bigg(\exp\bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^T \eta(s)dW(s) \bigg) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \bigg) \\
&= \exp\bigg(\frac{1}{2\kappa} \bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa \bigg)^2 \bigg) \int_{-\infty}^{\overline{y}_5^*} \exp\bigg(-\frac{x^2}{2} \bigg) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \exp\bigg(\frac{1}{2\kappa} \bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa \bigg)^2 \bigg) \Phi(k_6(\lambda)), \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\overline{y}_5^* := \frac{y_5 + \frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa}{\sqrt{\kappa}}
$$

und

$$
\begin{aligned}
k_6(\lambda) :&= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa}{\sqrt{\kappa}} \\
&= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) - \bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{2} \bigg)\kappa}{\sqrt{\kappa}} \\
&= \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) - \log(B(0,T)) - \bigg(\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)} \bigg)\bigg(\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds \bigg)}{\sqrt{\int_0^T \eta_B^2(s)ds + \int_0^T \eta_S^2(s)ds}}. \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der Gleichung (4.47) in (4.46) erhalten wir für den Erwartungswert III:

$$\begin{aligned} III &= \mathbb{E}\Big(R(T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\\ &= \exp\Big(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\int_0^T \eta^2(s)ds\Big)\exp\Big(\frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\Big)^2\Big)\Phi(k_6(\lambda))\\ &= \exp\Big(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\Big)\exp\Big(\frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\Big)^2\Big)\Phi(k_6(\lambda)) \end{aligned} \tag{4.49}$$

und durch Einsetzen von (4.49) in (4.45) den Erwartungswert II:

$$\begin{aligned} II &= \mathbb{E}\Big((\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\\ &= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\zeta_2\Phi(k_6(\lambda)) \end{aligned} \tag{4.50}$$

mit

$$\zeta_2 = \exp\Big(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\Big)\exp\Big(\frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\Big)^2\Big).$$

Insgesamt ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (4.43) und (4.50) in (4.40)

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{1}{\alpha}\Big(\mathbb{E}\Big(G^\alpha\mathbb{1}_{\{G^\alpha\geq(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)+\mathbb{E}\Big((\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda R(T)B(0,T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha}\Big(G^\alpha\Phi(k_5(\lambda))+\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}B(0,T)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\zeta_2\Phi(k_6(\lambda))\Big), \end{aligned}$$

wobei

$$\zeta_2 := \exp\Big(-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\kappa\Big)\exp\Big(\frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\kappa\Big)^2\Big),$$

$k_5(\lambda)$ wie in (4.44), $k_6(\lambda)$ wie in (4.48) und κ wie in (4.41) definiert sind. □

Bemerkung 4.13 Wie wir sehen, ist der optimale erwartete Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters exakt durch eine zu Satz 4.10 analoge Rechnung ermittelt worden. Auch die Struktur der Lösung unterscheidet sich nicht vom Fall des Vasicek-Modells. Der Unterschied besteht jedoch bei den Werten der verwendeten Parameter wie beispielsweise von η. Da dies im Fall der logarithmischen Nutzenfunktion nicht anders ist, betrachten wir hier nur die Power-Nutzenfunktion.

Die optimale Strategie erhalten wir analog zu Satz 4.1:

Satz 4.14 *Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G \cdot B(0,T)$. Dann ist die optimale Strategie für das in diesem Abschnitt beschriebene Portfoliooptimierungsproblem gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $B(0,T)$

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G \cdot B(0,T)$ in eine Strategie, welche eine Call-Option auf $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.

4.5 Optimierung in einem Gaußschen HJM-Modell

In diesem Abschnitt wird das Portfoliooptimierungsproblem mit deterministischer Garantie in einem Gaußschen HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate gelöst. Hierfür verweisen wir nochmals auf die Annahmen für dieses Modells aus Abschnitt 3.3. Zudem muss die Martingalmethode anwendbar sein. Da die Optimierung im HJM-Modell über das Thema dieser Masterarbeit hinausgeht, werden hier nur die Ergebnisse dargestellt. Nach [9, Abschnitt 3.1] ist die Martingalmethode bei einer logarithmischen Nutzenfunktion in einem allgemeinen HJM-Modell anwendbar, bei einer Power-Nutzenfunktion aufgrund der deterministischen Bondpreisvolatilitäten jedoch nur in Gaußschen HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos. Aus diesem Grund betrachten wir auschließlich das im Abschnitt 3.3 beschriebene Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate.

Zunächst betrachten wir das Optimierungsproblem im Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion. In diesem Abschnitt wird von einem Handelszeitraum $[0, T^*]$ ausgegangen, jodoch zu dem Zeitpunkt $T < T^*$ optimiert. Des Weiteren wird angenommen, dass das Geldmarktkonto nicht zur Verfügung steht. Dies bedeutet, dass das Numeraire-Asset das $n+1$-ste Asset ist. Dessen Preisprozess wird zum Zeitpunkt $t \leq T$ mit $B(t, T_{n+1})$ bezeichnet. Somit ist

$$H(t) = \frac{1}{B(t, T_{n+1})} L(t)$$

mit

$$\begin{aligned} L(t) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \vartheta_j(u) dW_j^*(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^2(u) du \right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \vartheta_j(u) dW_j(u) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \vartheta_j^2(u) du - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^2(u) du \right), \end{aligned}$$

denn mit [9, Korollar 3.4] ist

$$W_j(t) = W_j^*(t) - \int_0^t \vartheta_j(u) du.$$

Das optimale Endvermögen $C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie ergibt sich nach nach (4.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{ G, \frac{1}{\lambda H(T)} \right\}.$$

Die Gleichung (4.4) für ein $G > 0$, sodass $b > G \cdot B(0, T)$ ist dann gegeben durch

$$G \cdot B(0, T) + \mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G \right) = b, \tag{4.51}$$

wobei $B(0,T)$ hier gegeben ist durch

$$B(0,T) = \exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$$

und $\mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right)$ der Anfangspreis einer Call-Option auf das Asset $\frac{1}{\lambda H(T)}$ mit Strike G und Maturität T mit $T < T^*$ ist. Des Weitern hat das Underlying $\frac{1}{\lambda H(T)}$ dieser Call-Option die Maturität T^*.
Diese Call-Option $\mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right)$ lässt sich mittels [13, Satz 2.18] wie folgt bewerten:

$$\mathcal{C}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right) = \frac{1}{\lambda}B(0,T^*_{n+1})\Phi(d_1) - G\frac{1}{\lambda}B(0,T_{n+1})\Phi(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{B\left(0,T^*_{n+1}\right)}{GB\left(0,T_{n+1}\right)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{B\left(0,T^*_{n+1}\right)}{GB\left(0,T_{n+1}\right)}\right) - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

sowie $\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)du$ und Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Wir bestimmen nun den optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ, welcher eindeutig durch Gleichung (4.51) bestimmt ist.

Satz 4.15 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist bei einem Gaußschen HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate bei einer logarithmischen Nutzenfunktion gegeben durch*

$$\begin{aligned} w(\lambda) =& \log(G)\Phi(h_5(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_6(\lambda)) - \sqrt{\upsilon}\phi(h_5(\lambda)) \\ &+ \left(\log(B(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^n \vartheta_j^2(u)du\right)\Phi(h_6(\lambda)), \end{aligned}$$

wobei

$$h_5(\lambda) = \frac{\log(G\lambda B^{-1}(T,T_{n+1})) + \sum_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^n \vartheta_j^2(u)du}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du}},$$

$$h_6(\lambda) = \frac{-\log(G\lambda B^{-1}(T,T_{n+1})) - \sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum\limits_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du}}$$

und $\upsilon := \sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du$*. Des Weiteren sind* ϕ, Φ *die Dichte beziehungsweise die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.* λ *ist eindeutig bestimmt als Lösung der Gleichung* (4.51)*.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C(\lambda))) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\Bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)}_{II}. \end{aligned}$$

Um den Erwartungswert I zu bestimmen, betrachten wir zunächst wieder die Indikatorfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned} G \geq \frac{1}{\lambda H(T)} &\Leftrightarrow G\lambda B^{-1}(T,T_{n+1}) \geq \frac{1}{L(T)} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{-\log(G\lambda B^{-1}(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du}_{=:-y_6} \leq Q \end{aligned}$$

mit

$$Q := \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u).$$

Da jedoch ϑ deterministisch ist und

$$\int_0^t \vartheta_j^2(u)du < \infty \qquad \text{für alle } t \leq T \text{ und für alle } j$$

gilt, ist

$$\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u) \sim \mathcal{N}\Bigg(0, \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du\Bigg).$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit definieren wir

$$\upsilon := \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du.$$

Es ergibt sich dann für den Erwartungswert I mittels Substitution:

$$
\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log(G)\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log(G)\mathbb{P}\bigg(G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\bigg) \\
&= \log(G)\int_{-y_6}^{\infty} \varphi_{\upsilon}(y)dy \\
&= \log(G)\int_{-y_6}^{\infty} \exp\bigg(-\frac{y^2}{2\upsilon}\bigg)\frac{1}{\sqrt{2\pi\upsilon}}dy \\
&= \log(G)\int_{-\infty}^{\overline{y}_6} \exp\bigg(-\frac{x^2}{2}\bigg)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx
\end{aligned}
$$

mit $\overline{y}_6 := \frac{y_6}{\sqrt{\upsilon}}$ und φ_υ als Dichte der $\mathcal{N}(0,\upsilon)$-Verteilung. Also ist dann

$$I = \log(G)\Phi(h_5(\lambda)),$$

wobei

$$h_5(\lambda) = \frac{\log(G\lambda B^{-1}(T,T_{n+1})) + \sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T \sum\limits_{j=1}^{n} \vartheta_j^2(u)du}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du}}. \tag{4.52}$$

Für den Erwartungswert II ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\bigg(\log\bigg(\frac{1}{\lambda H(T)}\bigg)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\log\bigg(\frac{1}{\lambda}\bigg)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) + \mathbb{E}\bigg(\log(H^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\bigg(\frac{1}{\lambda}\bigg)\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) + \mathbb{E}\bigg(\log(H^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\bigg(\frac{1}{\lambda}\bigg)\mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda H(T)}\bigg) + \mathbb{E}\bigg(\log(H^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\bigg(\frac{1}{\lambda}\bigg)\Phi(h_6(\lambda)) + \underbrace{\mathbb{E}\bigg(\log(H^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)}_{III}.
\end{aligned}
$$

Es ist nun:

$$
\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\Bigg(\log(H^{-1}(T))\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)\\
&= \mathbb{E}\Bigg(\Bigg(\log(B(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du\Bigg)\\
&\qquad \mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)\\
&= \Bigg(\log(B(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du\Bigg)\mathbb{P}\Bigg(G<\frac{1}{\lambda H(T)}\Bigg)\\
&\quad - \mathbb{E}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)\\
&= \Bigg(\log(B(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du\Bigg)\Phi(h_6(\lambda))\\
&\quad - \mathbb{E}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)\\
&= \Bigg(\log(B(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du\Bigg)\Phi(h_6(\lambda)) - \sqrt{\upsilon}\phi(h_5(\lambda))
\end{aligned}
$$

mit

$$
h_6(\lambda) = \frac{-\log(G\lambda B^{-1}(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du}}. \tag{4.53}
$$

Somit ergibt sich die Behauptung:

$$
\begin{aligned}
w(\lambda) &= \mathbb{E}\Bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg) + \mathbb{E}\Bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Bigg)\\
&= \log(G)\Phi(h_5(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(h_6(\lambda)) - \sqrt{\upsilon}\phi(h_5(\lambda))\\
&\quad + \Bigg(\log(B(T,T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du\Bigg)\Phi(h_6(\lambda))
\end{aligned}
$$

mit $h_5(\lambda)$ und $h_6(\lambda)$ definiert wie in (4.52) und (4.53). □

Auch hier leitet sich die optimale Strategie von Satz 4.1 ab:

Satz 4.16 *Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4, sowie von Kapitel 3 erfüllt und sei* $b > G \cdot B(0,T))$ *mit* $B(0,T) = \exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$. *Dann ist die optimale Strategie gegeben durch:*

i) kaufe G *Nullkuponanleihen mit Maturität* T *für einen Preis von jeweils* $\exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G \cdot \exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$ *in eine Strategie, welche eine Call-Option auf* $\frac{1}{\lambda H(T)}$ *repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.*

Als nächstes wird das Portfoliooptimierungsproblem in einem HJM-Modell für eine Power-Nutzenfunktion gelöst. Es wird exakt derselbe Finanzmarkt wie im Fall der logarithmischen Nutzenfunktion betrachtet. Auch hier wird wieder angenommen, dass das Geldmarktkonto nicht zur Verfügung steht und die Laufzeit der Bonds beträgt T^*. Das optimale Endvermögen $C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie ergibt sich nach nach (4.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\}.$$

Die Gleichung (4.4) für ein $G > 0$, sodass $G\exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right) < b$, ist dann gegeben durch

$$G\exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right) + \mathcal{C}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right) = b, \tag{4.54}$$

wobei $\mathcal{C}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right)$ der Anfangspreis einer Call-Option mit Maturität T, $T < T^*$, auf das Underlying $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ und Strike G ist. Des Weiteren hat das Underlying die Maturität T^*. Diese Call-Option $\mathcal{C}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right)$ lässt sich mittels [13, Satz 2.18] wie folgt bewerten:

$$\mathcal{C}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right) = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{B(0,T^*_{n+1})}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\Phi(d_3) - G\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{B(0,T_{n+1})}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\Phi(d_4)$$

mit

$$d_3 = \frac{-\log(G) + \frac{1}{\alpha-1}\log\left(\frac{B(0,T_{n+1})}{B(0,T^*_{n+1})}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

$$d_4 = \frac{-\log(G) + \frac{1}{\alpha-1}\log\left(\frac{B(0,T_{n+1})}{B(0,T^*_{n+1})}\right) - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_0^T (\sigma^*(u,T^*) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

sowie $\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)du$ und Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Satz 4.17 *Der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ ist in einem Gaußschen HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate bei einer Power-Nutzenfunktion gegeben durch*

$$\begin{aligned} w(\lambda) =& \frac{1}{\alpha}\Bigg(G^\alpha \Phi(k_7(\lambda)) + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}(T,T_{n+1}) \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\sum_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^n \vartheta_j^2(u)du\right)\right) \\ & \exp\left(\frac{1}{2\upsilon}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon\right)^2\right)\Phi(k_8(\lambda))\Bigg) \end{aligned}$$

wobei

$$k_7(\lambda) = \frac{(1-\alpha)\log(G) + \log(\lambda) - \log(B(T,T_{n+1})) + \sum\limits_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T \sum\limits_{j=1}^n \vartheta_j^2(u)du}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du}},$$

$$k_8(\lambda) = \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) + \log(B(T,T_{n+1})) - \sum\limits_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum\limits_{j=1}^n \vartheta_j^2(u)du + \frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon}{\sqrt{\upsilon}}$$

und $\upsilon := \sum\limits_{j=1}^n \int_0^T \vartheta_j^2(u)du$, sowie ϕ, Φ sind die Dichte beziehungsweise die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. λ ist eindeutig bestimmt durch Lösen der Gleichung (4.54).

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C)) \\ &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\left(\frac{C^\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha}(\max\{G, I(\lambda H(T))\})^\alpha\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left((\max\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\})^\alpha\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left((\max\{G^\alpha, (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\})\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\left(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\right)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\left((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\right)}_{II}\Bigg). \end{aligned}$$

Die Ungleichung

$$G^{\alpha}\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \geq B^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}(T, T_{n+1})L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(T)$$

ist äquivalent zu

$$\underbrace{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) + \log(B(T, T_{n+1})) - \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du}_{=:y_7} \geq Z$$

mit

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u).$$

Z hat somit nach [16, Theorem 4.4.9] eine $\mathcal{N}\Bigg(0, \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du}_{=:v}\Bigg)$ Verteilung, da ϑ_j deterministisch und

$$\int_0^t \vartheta_j(u)du < \infty \qquad \text{für alle } t \leq T \text{ und alle } j$$

ist. Der Erwartungswert I lässt sich mit der Substitution $x = \frac{y}{\sqrt{v}}$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(G^{\alpha}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\\
&= G^{\alpha}\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\\
&= G^{\alpha}\mathbb{P}\bigg(G^{\alpha} \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\bigg)\\
&= G^{\alpha}\int_{y_7}^{\infty}\varphi_v(y)dy\\
&= G^{\alpha}\int_{-\infty}^{-\overline{y}_7}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx
\end{aligned}$$

mit φ_v als Dichte der $\mathcal{N}(0, v)$-Verteilung und $\overline{y}_7 = \frac{y_7}{\sqrt{v}}$. Somit ist

$$I = G^{\alpha}\Phi(k_7(\lambda))$$

wobei

$$k_7(\lambda) = \frac{(1-\alpha)\log(G) + \log(\lambda) - \log(B(T, T_{n+1})) + \sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T \sum\limits_{j=1}^{n}\vartheta_j^2(u)du}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du}}. \tag{4.55}$$

Für den Erwartungswert II gilt:

$$\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\left((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \right) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}(T, T_{n+1}) \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^2(u)du \right) \right) \\
&\quad \underbrace{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} du \right)}_{=:III}.
\end{aligned}$$

Berechnen wir nun den Erwartungswert III. Es gilt

$$\begin{aligned}
III &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \vartheta_j(u)dW_j(u) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} du \right) \\
&= \int_{-y_7}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} y \right) \varphi_\upsilon(y)dy \\
&= \int_{-y_7}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} y - \frac{y^2}{2\upsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\upsilon}} dy.
\end{aligned}$$

Der Exponent der Exponentialfunktion lässt sich mittels der Binomischen Formel wie folgt umformen:

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} y - \frac{y^2}{2\upsilon} = -\frac{1}{2\upsilon} \left(\left(y - \frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon \right)^2 \right)$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}
III &= \int_{-y_7}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} y - \frac{y^2}{2\upsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\upsilon}} dy \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\upsilon} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon \right)^2 \right) \int_{-y_7}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - \frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon)}{2\upsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\upsilon}} dy \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\upsilon} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon \right)^2 \right) \int_{-\overline{y}_7^*}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\upsilon} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon \right)^2 \right) \int_{-\infty}^{\overline{y}_7^*} \exp\left(\frac{-x^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx,
\end{aligned}$$

wobei bei dem vorletzen Gleichheitszeichen die Substitution $x = \frac{y - \frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon}{\sqrt{\upsilon}}$ benutzt wurde und $\overline{y}_7^* = \frac{y_7 + \frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta}{\sqrt{\upsilon}}$ ist. Also ist dann

$$III = \exp\left(\frac{1}{2\upsilon} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon \right)^2 \right) \Phi(k_8(\lambda))$$

mit Φ als Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und

$$k_8(\lambda) = \frac{(\alpha-1)\log(G) - \log(\lambda) + \log(B(T,T_{n+1})) - \sum\limits_{j=1}^{n} \int_0^T \vartheta_j^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^T \sum\limits_{j=1}^{n} \vartheta_j^2(u)du + \frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon}{\sqrt{\upsilon}}. \tag{4.56}$$

Durch suksessives Einsetzen der Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{1}{\alpha}\Bigg(\mathbb{E}\bigg(G^\alpha \mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) + \mathbb{E}\bigg((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\Bigg) \\ &= \frac{1}{\alpha}\Bigg(G^\alpha \Phi(k_7(\lambda)) + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} B^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}(T,T_{n+1}) \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \vartheta_j^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^2(u)du\right)\right) \\ &\qquad \exp\left(\frac{1}{2\upsilon}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\upsilon\right)^2\right)\Phi(k_8(\lambda))\Bigg) \end{aligned}$$

mit $k_7(\lambda)$ und $k_8(\lambda)$ wie in (4.55) und (4.56). □

Auch hier leitet sich die optimale Strategie von Satz 4.1 ab:

Satz 4.18 *Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 sowie von Kapitel 3 erfüllt und sei* $b > G \cdot \exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$. *Dann ist die optimale Strategie gegeben durch:*

i) kaufe G Nullkuponanleihen mit Maturität T für einen Preis von jeweils $\exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$

ii) investiere das restliche Startkapital $b - G\cdot\exp\left(-\int_0^T f(0,s)ds\right)$ *in eine Strategie, welche eine Call-Option auf* $(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ *repliziert. Diese ist das optimale Vermögen in einem unbeschränkten Portfoliooptimierungsproblem mit modifizierten Anfangskapital.*

Insgesamt wurde das Portfoliooptimierungsproblem mit deterministischer Garantie in einem einfachen Black-Scholes Modell bis hin zu einem mehrdimensionalen HJM-Modell gelößt. Im nächsten Kapitel wird dieser Ansatz zu einer stochastischen Garantie verallgemeinert.

5 Portfoliooptimierung mit stochastischer Garantie

In diesem Kapitel wird das Optimierungsproblem aus Kapitel 4 verallgemeinert. Die anfangs gesetzte Garantie, die der Fonds am Ende des Handelszeitraums auszahlen muss, soll jetzt keine deterministische Konstante mehr sein, sondern eine Zufallsvariable.
Wir leiten für diesen allgemeineren Ansatz zunächst einen allgemeinen Lösungweg für das Optimierungsproblem her und wenden diesen anschließend auf verschiedene Modelle und verschiedene Nutzenfunktionen an.

5.1 Allgemeine Methode

Zunächst wird das Portfoliooptimierungsproblem mit stochastischer Garantie allgemein betrachtet und eine Lösung hergeleitet. Wie schon beschrieben ist der Unterschied zu Kapitel 4, dass der anfangs festgelegte Benchmark G, den das Endvermögen des Fonds mindestens erreichen muss, nicht mehr deterministisch, sondern stochastisch ist. Wir nehmen nun an, dass der Fond zum Zeitpunkt T mindestens ein Endvermögen von G haben muss, wobei G jetzt eine $\mathcal{F}_T$-messbare, nicht-negative Zufallsvariable ist. G kann somit als T-Claim gesehen werden. Wir verwenden die folgende Schreibweise:

$$G(t) := \mathbb{E}^* \left(\frac{G}{\beta(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right) \beta(t).$$

Somit gilt für den Anfangswert von G

$$V_0(G) = G(0) = \mathbb{E}^* \left(\frac{G}{\beta(T)} \right).$$

Sei weiter

$$\mathcal{A}'_1(b) := \{\pi \in \mathcal{A}(b) : X^{b,\pi} > G \text{ fast sicher}\}$$

und

$$\mathcal{B}'_1(b) := \{C \in \mathcal{B}(b) : C \geq G \text{ fast sicher}\}.$$

Hierbei sind die Mengen $\mathcal{A}(b)$ und $\mathcal{B}(b)$ wie in (1.20) und (1.21) definiert. Das Optimierungsproblem mit stochastischer, garantierter Auszahlung G zur Endzeit T ist gegeben durch

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}'_1(b)} \mathbb{E}(U(X^{b,\pi}(T))) \tag{5.1}$$

und das statische Problem durch

$$\max_{C \in \mathcal{B}_1'(b)} \mathbb{E}(U(C)). \tag{5.2}$$

Damit der Fond am Ende des Handelszeitraums T eine Auszahlung in Höhe von G garantieren kann, ist ein Startkapital von mindestens

$$G(0) = \mathbb{E}^* \left(\frac{G}{\beta(T)} \right)$$

notwendig. Wir nehmen also nun an, dass $b > G(0)$ ist. Auch hier kann das optimale Endvermögen $C = C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters durch punktweise Lagrangemaximierung bestimmt werden zu

$$C(\lambda) = \max\{G, I(\lambda H(T))\} = G + (I(\lambda H(T)) - G)^+. \tag{5.3}$$

Um den optimalen Lagrangeparameter zu bestimmen, kann nicht mehr auf eine Call-Option zurückgegriffen werden. Wir betrachten dafür eine Exchange-Option. Der Lagrangemultiplikator λ kann berechnet werden durch das Lösen der Gleichung

$$V_0(C(\lambda)) = G(0) + \mathcal{E}(I(\lambda H(T)), G) = b, \tag{5.4}$$

wobei $\mathcal{E}(I(\lambda H(T)), C)$ den Anfangspreis einer Exchange-Option auf die beiden Claims $I(\lambda H(T))$ und G ist. Wir erhalten analog zu Satz 4.1 die folgende Aussage:

Satz 5.1 *Seinen die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G(0)$. Dann ist eine Lösung des Optimierungsproblems* (5.2) *gegeben durch* (5.3) *mit λ als eindeutige Lösung von* (5.4). *Die optimale Strategie von* (5.1) *kann bestimmt werden durch*

i) handel gemäß der Replikationsstrategie von der stochastischen Garantie G

ii) investiere das restliche Startkapital in eine Strategie, welche die Exchange-Option $(I(\lambda H(T)) - G)^+$ repliziert.

Betrachte die Exchange-Option aus der Nebenbedingung (5.4). Wie zuvor bei der Call-Option ist es für exakte Berechnungen wichtig, dass die Volatilitäten in dem jeweils betrachteten Finanzmarkt deterministisch sind. Das die Exchange-Option theoretisch bewertet werden kann, liegt daran, dass wir ausschließlich vollständige Märkte betrachten. Wir geben wie im Fall einer deterministischen Garantie eine Zusammenfassung des Lösungswegs an:

i) Löse mittels der Martingalmethode das statische Problem des Portfoliooptimierungsproblems ohne Garantie in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ.

ii) Bestimme mittels Gleichung (5.4) die Nebenbedingung für das Portfoliooptimierungsproblem mit stochastischer Garantie, um den Lagrangeparameter für dieses Problem eindeutig festzulegen. Hierfür muss eine Exchange-Option in dem jeweils betrachteten Finanzmarkt bewertet werden.

iii) Bestimme mittels Gleichung (5.3) das optimale Endvermögen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ. Das optimale Endvermögen ergibt sich anschließend durch Einsetzen des in (ii) festgelegten Parameters in das so erhaltene Endvermögen nach Satz 5.1.

iv) Bestimme den optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ.

v) Bestimme mittels Satz 5.1 die optimale Strategie.

5.2 Optimierung in einem Black-Scholes Modell

Die im vorherigen Abschnitt beschriebene Methode zur Lösung der Portfoliooptimierung mit stochastischer Garantie wird in diesem Anschnitt in einem Black-Scholes Modell auf eine logarithmische und eine Power-Nutzenfunktion angewendet.
Dazu betrachten wir ein Black-Scholes Modell mit zwei Aktien S_i, $i = 1, 2$, einem Bankgeldkonto β gemäß (1.6) und eine logarithmische Nutzenfunktion. Wir gehen von einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten aus. Die Aktien folgen der folgenden stochastischen Differentialgleichung

$$dS_i(t) = \mu_1 S_i(t)dt + \sigma_1 S_i(t)dW_i(t), \qquad S_i(0) = s_i, \qquad \text{für } i = 1, 2, \tag{5.5}$$

wobei $W = (W_1, W_2)$ ein zweidimensionaler Wiener-Prozess ist. Des Weiteren soll für die Wiener-Prozesse

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = 0 \qquad \text{für alle } t \leq T$$

gelten und der Marktpreis des Risikos $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ deterministisch sein. Es wird die folgende stochastische Garantie

$$G = S_1(T)$$

ausgestellt. Die Martingalmethode für das Portfoliooptimierungsproblem ohne Garantie kann analog zu dem Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion in Abschnitt 4.2 angewendet werden. Es ergibt sich ebenfalls das Ergebnis

$$C(\lambda) = \frac{1}{\lambda H(T)},$$

wie in Beispiel 1.25 gesehen.

Betrachten wir nun die Portfoliooptimierung mit stochastischer Garantie. Das optimale Endvermögen $C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie ergibt sich nach nach (5.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\right\}.$$

Die Gleichung (5.4) für eine nicht-negative Zufallsvariable G, sodass $b > G(0)$, ist dann gegeben durch

$$G(0) + \mathcal{E}(I(\lambda H(T)), G) = G(0) + \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right) = b. \tag{5.6}$$

Nun ist es für die Berechenbarkeit des Optimierungsproblems von Bedeutung, dass die Exchange-Option in dieser Gleichung bewertet werden kann. Eine allgemeine Bewertung einer Exchange-Option in einem zweidimensionalen Black-Scholes Modell wird durch folgende Proposition getätigt:

Proposition 5.2 *Es sei ein von einem Wiener-Prozess getriebenes zweidimensionales Semimartingalmodell wie in Kapitel 1 gegeben. Wir nehmen an, dass die Volatilitäten der Aktien, der Drift als auch die Zinsrate Konstanten sind und die geeigneten Integrabilitätsbedingungen aus Kapitel 1 erfüllt sind. Des Weitern gehen wir davon aus, dass*

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = 0.$$

gilt. Dann ist der Wert einer Exchange-Option, die dem Inhaber das Recht einräumt, am Ende des Handelszeitraumes $[0, T]$ *das eine Asset gegen das andere zu tauschen gegeben durch*

$$\mathcal{E}(s_1, s_2) = s_1 \Phi(d_1) - s_2 \Phi(d_2), \tag{5.7}$$

wobei Φ *die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist und*

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

mit

$$\sigma := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Beweis: Ein Beweis ist in [12, Satz 1.3.2] zu finden. □

Als Startpreise haben wir in unserem Fall

$$s_1 = \frac{1}{\lambda H(0)} = \frac{1}{\lambda}$$

und

$$s_2 = S_1(0).$$

Damit lässt sich die Exchange-Option in Gleichung (5.6) wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}((I(\lambda H(T)), G)) &= \frac{1}{\lambda H(0)} \Phi(d_1) - S_1(0)\Phi(d_2) \\ &= \frac{1}{\lambda}\Phi(d_1) - S_1(0)\Phi(d_2) \end{aligned}$$

mit

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{1}{\lambda S_1(0)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{T}\sigma},$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{1}{\lambda S_1(0)}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{T}\sigma}$$

und

$$\sigma := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Der optimale erwartete Endnutzen ist in diesem Fall dann durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 5.3 *Es sei ein 2-dimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und einer logarithmischen Nutzenfunktion gegeben und wir nehmen an, dass $b > G(0)$ gilt. Weiter setzen wir als Garantie $G = S_1(T)$ voraus, also ist*

$$G = S_1(0) \exp\left(\int_0^T \sigma_1 dW_1(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_1^2 ds \right) \exp\left(\int_0^T \mu_1 ds \right). \tag{5.8}$$

Dann hat das Optimierungsproblem (5.2) *die Lösung*

$$\begin{aligned} w(\lambda) =& \left(\log(S_1(0)) + \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) T \right) \Phi(j_1(\lambda)) + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Phi(j_2(\lambda)) + \left(r + \frac{1}{2}\vartheta\right) T \Phi(j_2(\lambda)) \\ &+ \mathbb{E}\left(\sigma_1 W_1(T) \mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \right) - \mathbb{E}\left(\vartheta W(T) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} j_1(\lambda) &= \frac{\log(\lambda) + \log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T - (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T + \sigma_1^2 T}} \\ &= \frac{\log(\lambda) + \log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T - (r + \frac{1}{2}(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2))T}{\sqrt{\vartheta_1^2 T + \vartheta_2^2 T + \sigma_1^2 T}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} j_2(\lambda) &= \frac{-\log(\lambda) - \log(S_1(0)) - (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T + (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T + \sigma_1^2 T}} \\ &= \frac{-\log(\lambda) - \log(S_1(0)) - (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T + (r + \frac{1}{2}(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2))T}{\sqrt{\vartheta_1^2 T + \vartheta_2^2 T + \sigma_1^2 T}}. \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt, analog zum Beweis von Satz 4.2, dass

$$H(T) = \exp\left(-rT + \vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T \right)$$

und der optimale erwartete Endnutzen $w(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}'(b)} \mathbb{E}(U(C(\lambda))) \\
&= \max_{C\in\mathcal{B}'(b)} \mathbb{E}\Big(\log(C(\lambda))\Big) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\log\bigg(\max\Big\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\Big\}\bigg)\bigg) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\bigg(\log\bigg(\frac{1}{\lambda H(T)}\bigg)\mathbb{1}_{\{G< \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)}_{II}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Bestimmen wir zunächst den Erwartungswert I. Hierzu betrachte zunächst $\log(G)$. Mittels der Voraussetzung (5.8) aus dem Satz ist

$$\log(G) = \log(S_1(0)) + \sigma_1 W_1(T) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \mu_1 T$$

und somit

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G\geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\bigg(\log(S_1(0)) + \sigma_1 W_1(T) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \mu_1 T\bigg)\mathbb{1}_{\{G\geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\bigg(\sigma_1 W_1(T)\mathbb{1}_{\{G\geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)}_{III} + \bigg(\log(S_1(0)) + \bigg(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\bigg)T\bigg)\underbrace{\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G\geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)}_{IV}.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Indikatorfunktion ein bisschen genauer:

$$\begin{aligned}
G \geq \frac{1}{\lambda H(T)} &\Leftrightarrow \log(G) + \log(\lambda) \geq rT - \vartheta W(T) + \frac{1}{2}\vartheta^2 T \\
&\Leftrightarrow \log(\lambda) + \log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T - (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T \geq -\vartheta W(T) - \sigma_1 W_1(T) \\
&\Leftrightarrow \underbrace{- \log(\lambda) - \log(S_1(0)) - (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T + (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}_{=:-z_1} < \vartheta W(T) + \sigma_1 W_1(T).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Beachte, dass auch hier die folgende Notation

$$\vartheta W(T) + \sigma_1 W_1(T) = \vartheta_1 W_1(T) + \vartheta_2 W_2(T) + \sigma_1 W_1(T)$$

benutzt wird. Es ergibt sich somit, dass

$$\vartheta W(T) + \sigma_1 W_1(T) \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2 T + \sigma_1^2 T) = \mathcal{N}(0, \vartheta_1^2 T + \vartheta_2^2 T + \sigma_1^2 T)$$

gilt und wir definieren $\varpi := \vartheta^2 T + \sigma_1^2 T$. Die Berechnung des Erwartungswertes III ist somit ohne weitere Angaben von Parametern nicht möglich. Der Erwartungswert IV jedoch ist analog zu dem Beweis von Satz 4.2 berechenbar und es gilt

$$\begin{aligned}
IV &= \mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \mathbb{P}\bigg(G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\bigg) \\
&= \int_{-z_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varpi}} \exp\bigg(-\frac{y^2}{2\varpi}\bigg) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\overline{z}_1} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx
\end{aligned}$$

mit $\overline{z}_1 = \frac{z_1}{\sqrt{\varpi}}$. Insgesamt ist dann

$$IV = \Phi(j_1(\lambda)),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist und

$$\begin{aligned}
j_1(\lambda) &= \frac{\log(\lambda) + \log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T - (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T + \sigma_1^2 T}} \\
&= \frac{\log(\lambda) + \log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T - (r + \frac{1}{2}(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2))T}{\sqrt{\vartheta_1^2 T + \vartheta_2^2 T + \sigma_1^2 T}}.
\end{aligned}$$

Fügen wir diese Ergebnisse nun zusammen so ergibt sich für den Erwartungswert I

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\sigma_1 W_1(T)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) + \bigg(\log(S_1(0)) + \bigg(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\bigg)T\bigg)\Phi(j_1(\lambda)). \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Um den Beweis abzuschließen, muss noch der Erwartungswert II bestimmt werden. Hier gilt

$$\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) + \mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{P}\bigg(G < \frac{1}{\lambda H(T)}\bigg) + \mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int_{z_1}^{\infty} \varphi_{\varpi}(y) dy + \mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(j_2(\lambda)) + \underbrace{\mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)}_{=:V},
\end{aligned}$$

mit φ_ϖ als Dichte der $\mathcal{N}(0,\varpi)$-Verteilung und Φ als Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung. Abschließend wird noch der Erwartungswert V berechnet:

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{E}\left(\log\left(\frac{1}{H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left(rT+\frac{1}{2}\vartheta^2 T-\vartheta W(T)\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)\\
&= \left(rT+\frac{1}{2}\vartheta^2 T\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)-\mathbb{E}\left(\vartheta W(T)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)\\
&= \left(r+\frac{1}{2}\vartheta^2\right)T\Phi(j_2(\lambda))-\mathbb{E}\left(\vartheta W(T)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right).
\end{aligned}$$

Auch hier bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung und

$$\begin{aligned}
j_2(\lambda) &= \frac{-\log(\lambda)-\log(S_1(0))-(\mu_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T+(r+\frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T+\sigma_1^2 T}}\\
&= \frac{-\log(\lambda)-\log(S_1(0))-(\mu_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)T+(r+\frac{1}{2}(\vartheta_1^2+\vartheta_2^2))T}{\sqrt{\vartheta_1^2 T+\vartheta_2^2 T+\sigma_1^2 T}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich dann für den Erwartungswert II

$$\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\left(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)\\
&= \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Phi(j_2(\lambda))+\left(r+\frac{1}{2}\vartheta\right)T\Phi(j_2(\lambda))-\mathbb{E}\left(\vartheta W(T)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right).
\end{aligned}\tag{5.12}$$

Setzen wir nun die Ergebnisse der Erwartungswerte aus Gleichung (5.11) beziehnungsweise aus (5.12) in Gleichung (5.9) ein, so erhalten wir das zu zeigende Ergebnis. □

Bemerkung 5.4 Die Erwartungswerte

$$\mathbb{E}\left(\sigma_1 W_1(T)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)$$

und

$$\mathbb{E}\left(\vartheta W(T)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\right)$$

lassen sich ohne konkrete Angabe der Koeffizienten nicht weiter lösen. Der Grund hierfür ist, dass die beiden Zufallsvariablen $\sigma_1 W_1(T)$ und $\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}$, sowie $\vartheta W(T)$ und $\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}$ abhängig voneinander sind. Es lässt sich jedoch eine Näherung der Ergebnisse durch ein numerisches Lösungsverfahren, wie das Monte-Carlo-Verfahren, erzielen.

Mittels Satz 5.1 erhalten wir die folgende Stategie:

Satz 5.5 *Seinen die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G(0)$. Die optimale Strategie von (5.1) für ein 2-dimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und einer logarithmischen Nutzenfunktion kann bestimmt werden durch*

i) handel gemäß der Replikationsstrategie von der stochastischen Garantie $G = S_1(T)$

ii) investiere das restliche Startkapital in eine Strategie, welche die Exchange-Option $(I(\lambda H(T)) - G)^+$ repliziert.

Bemerkung 5.6 Auch in diesem Fall lässt sich die Investitionsstrategie spezifizieren. Dies erfolgt analog zu der Bemerkung 4.4. Es muss jedoch eine Exchange-Option anstatt einer Call-Option betrachtet werden. Das Verfahren zur Bestimmung des Delta-Hedges ändert sich dadurch jedoch nicht.

Nun zur Optimierung im Fall einer Power-Nutzenfunktion, dass heißt die Nutzenfunktion U ist gegeben durch

$$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

für ein $\alpha \in (0,1)$. Die Inverse der Ableitung von U ist somit $I(y) = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Wir betrachten exakt dasselbe Finanzmarktmodell wie im Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion. Des Weiteren geben wir wieder die Garantie $G = S_1(T)$.
Aus Beispiel 1.26 ist bekannt, da auch hier analog zu Abschnitt 4.2 die Martingalmethode anwendbar ist, dass das optimale Endvermögen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ bei einer Power-Nutzenfunktion in dem Portfoliooptimierungsproblem ohne Garantie, gegeben ist durch

$$C(\lambda) = (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Das optimale Endvermögen $C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie ergibt sich nach (5.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\}.$$

Wir bestimmen wieder den optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit von λ und die Nebenbedingungsgleichung mithilfe derer, der optimale Wert von λ bestimmen werden kann. Die Gleichung (5.4) für eine nicht-negative Zufallsvariable G, sodass $b > G(0)$, ist dann gegeben durch

$$G(0) + \mathcal{E}(I(\lambda H(T)), G) = G(0) + \mathcal{E}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right) = b. \tag{5.13}$$

Wie in dem Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion dieses Abschnitts 5.2 lässt sich der Anfangswert dieser Exchange-Option $\mathcal{E}\left((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\right)$ mittels der Proposition 5.2 wie folgt bestimmen:

Die Aktienstartpreise sind in diesem Fall

$$C_0(\lambda) = (\lambda H(0))^{\frac{1}{\alpha-1}} = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

und $S_1(0)$. Damit lässt sich die Exchange-Option wie folgt bestimmen

$$\mathcal{E}\bigg((\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}, G\bigg) = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}\Phi(d_1) - S_1(0)\Phi(d_2)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\frac{1}{\alpha-1}\log(\lambda) - \log(S_1(0)) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= \frac{\frac{1}{\alpha-1}\log(\lambda) - \log(S_1(0)) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

und

$$\sigma := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Hiermit lässt sich der optimale Lagrangeparameter explizit bestimmen. Nun wird mittels dem folgenden Satzes der optimale erwartete Endnutzen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters λ bestimmt. Der optimale erwartete Endnutzen und somit die Lösung des Optimierungsproblems (5.2) für ein Portfoliooptimierungsproblem mit stochastischer Garantie ist dann durch das Einsetzen des optimalen Lagrangeparameters in den optimalen erwarteten Endnutzen in Anhänigkeit des Lagrangeparameters gegeben.

Satz 5.7 *Es sei ein 2-dimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und eine Power-Nutzenfunktion gegeben und wir nehmen an, dass $b > G(0)$ gilt. Wir setzen weiter*

$$G = S_1(0)\exp\bigg(\int_0^T \sigma_1 dW_1(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_1^2 ds\bigg)\exp\bigg(\int_0^T \mu_1 ds\bigg) \tag{5.14}$$

voraus. Dann hat das Optimierungsproblem (5.2) *die Lösung*

$$\begin{aligned} w(\lambda) =& \frac{1}{\alpha}\bigg(S_1^\alpha(0)\exp\bigg(\alpha\mu_1 T - \frac{1}{2}\alpha\sigma_1^2 T\bigg)\mathbb{E}\bigg(\exp(\alpha\sigma_1 W(T))\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) \\ &+ \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}\bigg(-rT - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\bigg)\bigg)\mathbb{E}\bigg(\exp\bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta W(T)\bigg)\mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\bigg). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Beweis: Analog zum Fall einer Power-Nutzenfunktion im Abschnitt 4.2 ist der optimale erwartete Endnutzen gegeben durch

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}'(b)} \mathbb{E}(U(C)) \\ &= \max_{C\in\mathcal{B}'(b)} \mathbb{E}\bigg(\frac{C^\alpha}{\alpha}\bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\bigg(\frac{1}{\alpha}(\max\{G, I(\lambda H(T))\})^{\alpha}\bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\bigg((\max\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\})^{\alpha}\bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\bigg(\max\{G^{\alpha}, (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}\bigg) \\
&= \frac{1}{\alpha}\bigg(\underbrace{\mathbb{E}\bigg(G^{\alpha}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\bigg((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)}_{II}\bigg).
\end{aligned}
$$

Um den Erwartungswert I berechnen zu können, betrachten wir zunächst G^{α}. Mit der Voraussetzung (5.14) aus dem Satz folgt

$$
\begin{aligned}
G^{\alpha} &= S_1^{\alpha}(0)\exp\left(\alpha\int_0^T \sigma_1 dW_1(s) - \frac{1}{2}\alpha\int_0^T \sigma_1^2 ds\right)\exp\left(\alpha\int_0^T \mu_1 ds\right) \\
&= S_1^{\alpha}(0)\exp\left(\alpha\sigma_1 W_1(T) - \frac{1}{2}\alpha\sigma_1^2 T + \alpha\mu_1 T\right).
\end{aligned}
$$

Somit folgt für den Erwartungswert I

$$
\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(G^{\alpha}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(S_1^{\alpha}(0)\exp\left(\alpha\sigma_1 W_1(T) - \frac{1}{2}\alpha\sigma_1^2 T + \alpha\mu_1 T\right)\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) \\
&= S_1^{\alpha}(0)\exp\left(\alpha\mu_1 T - \frac{1}{2}\alpha\sigma_1^2 T\right)\mathbb{E}\bigg(\exp(\alpha\sigma_1 W(T))\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg). \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Nun zum Erwartungswert II. Hier gilt

$$
\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\bigg((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg) \\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\bigg(-rT - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\bigg)\right)\mathbb{E}\bigg(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\vartheta W(T)\right)\mathbb{1}_{\{G^{\alpha}<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg).
\end{aligned}
$$

Durch Zusammensetzen der Ergebnisse folgt die Behauptung. $\square$

Es ist jedoch zu sehen, dass die Indikatorfunktionen in Gleichung (5.15) normalverteilt sind. Die Ungleichung $G^{\alpha} \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ ist äquivalent zu

$$
\underbrace{(\alpha-1)\bigg(\log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\bigg) - \log(\lambda) + (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}_{=:z_2} \geq \vartheta W(T) - \frac{\sigma_1}{\alpha-1}W_1(T). \qquad (5.17)
$$

Betrachtet man den rechten Teil der Ungleichung, so ergibt sich

$$
\underbrace{\vartheta W(T)}_{\sim\mathcal{N}(0,\vartheta^2 T)} - \underbrace{\frac{\sigma_1}{\alpha-1}W_1(T)}_{\sim\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma_1^2}{(\alpha-1)}T\right)} \sim \mathcal{N}\bigg(0, \underbrace{\vartheta^2 T - \frac{\sigma_1^2}{(\alpha-1)^2}T}_{=:\tau}\bigg)
$$

und somit ergibt sich

$$\mathbb{P}\Big(G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big) = \int_{z_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\tau}\Big)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{-\overline{z}_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)dx$$

mit $\overline{z}_2 = \frac{z_2}{\sqrt{\tau}}$. Also ist

$$\mathbb{P}\Big(G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big) = \Phi(l_1(\lambda))$$

mit Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und

$$l_1(\lambda) = \frac{(1-\alpha)\Big(\log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\Big) + \log(\lambda) - (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\tau}}$$
$$= \frac{(1-\alpha)\Big(\log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\Big) + \log(\lambda) - (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T - \frac{\sigma_1^2}{(\alpha-1)^2}T}}$$

Auf analoge Weise erhalten wir für den Fall $G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

$$\mathbb{P}\Big(G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Big) = \Phi(l_2(\lambda)), \tag{5.18}$$

wobei

$$l_2(\lambda) = \frac{(\alpha-1)\Big(\log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\Big) - \log(\lambda) + (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\tau}}$$
$$= \frac{(\alpha-1)\Big(\log(S_1(0)) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T\Big) - \log(\lambda) + (r + \frac{1}{2}\vartheta^2)T}{\sqrt{\vartheta^2 T - \frac{\sigma_1^2}{(\alpha-1)^2}T}}$$

ist.

Bemerkung 5.8 Ein Vergleich mit dem erwarteten optimalen Endnutzen im Fall einer Power-Nutzenfunktion im Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten zeigt, dass die Verallgemeinerung zu der stochastischen Beschränkung $G = S_1(T)$ die Struktur der Lösung nicht verändert hat.

Nun zur optimalen Strategie:

Satz 5.9 *Seien die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei* $b > G(0)$*. Die optimale Strategie von* (5.1) *für ein 2-dimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und einer Power-Nutzenfunktion kann bestimmt werden durch*

i) handel gemäß der Replikationsstrategie von der stochastischen Garantie $G = S_1(T)$

ii) investiere das restliche Startkapital in eine Strategie, welche die Exchange-Option $(I(\lambda H(T)) - G)^+$ *repliziert.*

Bemerkung 5.10 Auch hier lässt sich die Investitionsstrategie mittels eines Delta-Hedges genauer angeben. Dazu wird auf die Bemerkungen 4.4 und 5.6 verwiesen.

5.3 Optimierung in einem Mixed Stock Bond Markt

In diesem Abschnitt wird die Portfoliooptimierung mit stochastischer Garantie in einem Mixed Stock Bond Markt durchgeführt. Wir betrachten ein Finanzmarktmodell mit einem Bankgeldkonto, einem Bond und einer Aktie. Diese Finanzgüter haben folgende Preisdynamiken

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t)r(t)dt, \\ dB(t,T_1) &= B(t,T_1)(r(t)dt + \sigma_1(t,T_1)dW_1^*(t)), \\ dS(t) &= S(t)(r(t)dt + \sigma_2(t)dW_2^*(t)), \end{aligned} \tag{5.19}$$

wobei $W^* = (W_1^*, W_2^*)$ ein zweidimensionalen Wiener-Prozess bezüglich des Maßes $\mathbb{P}^*$ und $W = (W_1, W_2)$ ein zweidimensionaler Wiener-Prozess bezüglich des Maßes $\mathbb{P}$ ist. Mittels des Satzes von Girsanov ist

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds$$

für previsibles $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Gilt

$$\begin{aligned} \mu_1(t) + \sigma_1(t,T_1)\vartheta_1(t) &= r(t), \\ \mu_2(t) + \sigma_2(t)\vartheta_2(t) &= r(t), \end{aligned}$$

so ist der Markt arbitragefrei und vollständig. Wir erhalten

$$H(T) = \exp\Big(- \int_0^T r(s)ds + \int_0^T \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \vartheta(u)du \Big).$$

Zudem sei

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho(t)t,$$

wobei $(\rho(t))_{0 \le t \le T}$ ein previsibler Prozess ist, welcher ein Maß für die Stärke der Abhängigkeit der Wiener-Prozesse zur Zeit $t \le T$ ist. Weiter seinen sowohl die Volatilitäten $\sigma_i(t,T_1) \neq 0$ für $i = 1, 2$, als auch der Marktpreis des Risikos ϑ deterministisch. Für die Zeithorizonte gelte

$T < T_1$. Wir erhalten dieselben Dichtequotientenprozesse $L(t)$ und $R(t)$ wie in Abschnitt 4.4 und es gilt

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t)) = (\vartheta_1(t) + \sigma_1(t, T_1), \vartheta_2(t)).$$

Anders als im Abschnitt zuvor wollen wir hier folgende Garantie aussprechen:

$$G = K \cdot B(T, T_1)$$

mit $K \in \mathbb{R}^{>0}$. Es wird also garantiert, dass am Ende des Handelszeitraumes T, K T_1-Bonds zur Verfügung stehen. Wir führen somit eine Optimierung zum Zeitpunkt T durch.

Mittels analoger Argumentation zu Abschnitt 4.4 folgt, dass auch hier die Martingalmethode angewendet werden darf. Man erhält somit für das Portfoliooptimierungsproblem ohne Garantie das optimale Endvermögen im Fall der logarithmischen Nutzenfunktion

$$C(\lambda) = \frac{1}{\lambda H(T)}.$$

Das optimale Endvermögen $C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie ergibt sich nach nach (5.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\right\}.$$

Die Gleichung (5.4) für eine logarithmische Nutzenfunktion und eine nicht-negative Zufallsvariable G, sodass $b > G(0)$, ist dann gegeben durch

$$G(0) + \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda H(T)}, G\right) = b. \tag{5.20}$$

Nun ist es für die Berechenbarkeit des Optimierungsproblems von Bedeutung, dass die Exchange-Option in dieser Gleichung bewertet werden kann. Mittels [12, Satz 1.3.2] ist für den Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion

$$\mathcal{E}(I(\lambda H(T)), G) = \frac{1}{\lambda}\Phi(d_+) - K \cdot B(0, T_1)\Phi(d_-)$$

mit

$$d_\pm = \frac{\log\left(\frac{1}{\lambda K B(0,T_1)}\right) \pm \int_0^T \sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}$$

und

$$\sigma(t) := \sqrt{\sigma_1(t, T_1) - 2\sigma_1(t, T_1)\sigma_2(t)\rho(t) + \sigma_2^2(t)}.$$

Der optimale erwartete Endnutzen ist in diesem Fall durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 5.11 *Es sei das zu Beginn dieses Abschnitts beschriebene Mixed Stock Bond Markt Modell und eine logarithmische Nutzenfunktion gegeben und wir nehmen an, dass $b > G(0)$. Weiter setzen wir als Garantie $G = K \cdot B(T, T_1)$ mit $T < T_1$ voraus, also gilt*

$$G = K \cdot B(0,T_1) \exp\bigg(\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1) dW_1(s) - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\bigg) \exp\bigg(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds\bigg). \quad (5.21)$$

Dann hat das Optimierungsproblem (5.2) *die Lösung*

$$\begin{aligned} w(\lambda) = &\log(KB(0,T_1)\Phi(j_3(\lambda)) + \bigg(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\bigg)\Phi(j_3(\lambda)) \\ &+ \bigg(\log\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) + \int_0^T r(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds\bigg)\Phi(j_4(\lambda)) \\ &+ \mathbb{E}\bigg(\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) - \mathbb{E}\bigg(\int_0^T \vartheta(s)dW(s)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg), \end{aligned}$$

wobei

$$j_3(\lambda) = \frac{-\log(\lambda B(0,T)K) + \frac{1}{2}\Big(\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)ds\Big) - \int_T^{T_1}\mu_1(s)ds - \int_0^T r(s)ds}{\sqrt{\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds}}$$

und

$$j_4(\lambda) = \frac{\log(\lambda B(0,T)K) - \frac{1}{2}\Big(\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)ds\Big) + \int_T^{T_1}\mu_1(s)ds + \int_0^T r(s)ds}{\sqrt{\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds}}.$$

Es gilt die Notation

$$\int_0^T \vartheta^2(s)ds = \int_0^T \vartheta_1^2(s)ds + \int_0^T \vartheta_2^2(s)ds.$$

Beweis: Auch hier gilt

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C(\lambda))) \\ &= \max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}\Big(\log(C(\lambda))\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\log(\max\{G, I(\lambda H(T))\})\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\log\Big(\max\Big\{G, \frac{1}{\lambda H(T)}\Big\}\Big)\Big) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\Big(\log(G)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Big)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\Big(\log\Big(\frac{1}{\lambda H(T)}\Big)\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\Big)}_{II}. \end{aligned}$$

Analog zu vorherigen Beweisen dieser Arbeit betrachten wir zunächst die Indikatorfunktion. Äquivalent zu $G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}$ ist

$$\underbrace{-\log(\lambda B(0,T)K) + \frac{1}{2}\bigg(\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)ds\bigg) - \int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \int_0^T r(s)ds}_{=:-z_3}$$
$$\leq \underbrace{\int_0^T \vartheta(s)dW(s) + \int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s)}_{=:Z}.$$

Beachte die Notation

$$\int_0^T \vartheta(s)dW(s) + \int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s) = \int_0^T \vartheta_1(s)dW_1(s) + \int_0^T \vartheta_2(s)dW_2(s) + \int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s).$$

Diese Zufallsvariable besitzt eine Normalverteilung, da nach Voraussetzung sowohl ϑ als auch σ_1 deterministisch sind und

$$\int_0^t \vartheta^2(s)ds < \infty \qquad \text{für alle } t \leq T$$

und

$$\int_T^t \sigma_1^2(s,T_1)ds < \infty \qquad \text{für alle } T \leq t \leq T_1$$

gilt. Es ist also

$$Z \sim \mathcal{N}\bigg(0, \int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\bigg).$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit definieren wir

$$\delta = \int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds$$

und somit besitzt die Zufallsvariable Z eine $\mathcal{N}(0,\delta)$ Verteilung. Mit diesen Erkenntnissen lässt sich der Erwartungswert I wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \mathbb{E}\bigg(\bigg(\log(KB(0,T_1)) + \int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s) \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds + \int_T^{T_1} \mu_1(s)ds\bigg) \cdot \mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&= \log(KB(0,T_1))\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) \\
&\quad + \bigg(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\bigg)\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)
\end{aligned}$$

$$+\mathbb{E}\bigg(\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg).$$

Berechnen wir nun den Erwartungswert der Indikatorfunktion:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg) &= \mathbb{P}\bigg(G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\bigg)\\ &= \int_{-z_3}^{\infty}\frac{1}{2\pi\delta}\exp\bigg(-\frac{y}{2\delta}\bigg)dy\\ &= \int_{-\overline{z}_3}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\bigg(-\frac{x^2}{2}\bigg)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\overline{z}_3}\frac{1}{2\pi}\exp\bigg(-\frac{x^2}{2}\bigg)dx\\ &= \Phi(j_3(\lambda))\end{aligned} \tag{5.22}$$

mit $\overline{z}_3=\frac{z_3}{\sqrt{\delta}}$ und

$$j_3(\lambda)=\frac{-\log(\lambda B(0,T)K)+\frac{1}{2}\bigg(\int_0^T\vartheta^2(s)ds+\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)ds\bigg)-\int_T^{T_1}\mu_1(s)ds-\int_0^T r(s)ds}{\sqrt{\int_0^T\vartheta^2(s)ds+\int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds}}. \tag{5.23}$$

Insgesamt ist dann

$$\begin{aligned}I =& \log(KB(0,T_1)\Phi(j_3(\lambda))+\bigg(\int_T^{T_1}\mu_1(s)ds-\frac{1}{2}\int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds\bigg)\Phi(j_3(\lambda))\\ &+\mathbb{E}\bigg(\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\mathbb{1}_{\{G\geq\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg).\end{aligned}$$

Nun berechnen wir Erwartungswert II. Es gilt

$$\begin{aligned}II &= \mathbb{E}\bigg(\log\bigg(\frac{1}{\lambda H(T)}\bigg)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)\\ &= \bigg(\log\bigg(\frac{1}{\lambda}\bigg)+\int_0^T r(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^T\vartheta^2(s)ds\bigg)\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)-\mathbb{E}\bigg(\int_0^T\vartheta(s)dW(s)\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg).\end{aligned}$$

Weiter berechnen wir mittels Substitution auf analoge Weise wie bei der Berechnung (5.22)

$$\mathbb{E}\bigg(\mathbb{1}_{\{G<\frac{1}{\lambda H(T)}\}}\bigg)=\Phi(j_4(\lambda))$$

mit

$$j_4(\lambda)=\frac{\log(\lambda B(0,T)K)-\frac{1}{2}\bigg(\int_0^T\vartheta^2(s)ds+\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)ds\bigg)+\int_T^{T_1}\mu_1(s)ds+\int_0^T r(s)ds}{\sqrt{\int_0^T\vartheta^2(s)ds+\int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds}}. \tag{5.24}$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned} II &= \mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg) \\ &= \left(\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \int_0^T r(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds \right) \Phi(j_4(\lambda)) - \mathbb{E}\bigg(\int_0^T \vartheta(s)dW(s) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg) \end{aligned}$$

Abschließend ist dann

$$\begin{aligned} w(\lambda) = &\max_{C \in \mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C(\lambda))) \\ = &\,\mathbb{E}\bigg(\log(G)\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg) + \mathbb{E}\bigg(\log\left(\frac{1}{\lambda H(T)}\right) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg) \\ = &\,\log(KB(0,T_1)\Phi(j_3(\lambda)) + \left(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds \right) \Phi(j_3(\lambda)) \\ &+ \left(\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \int_0^T r(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds \right) \Phi(j_4(\lambda)) \\ &+ \mathbb{E}\bigg(\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s) \mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg) - \mathbb{E}\bigg(\int_0^T \vartheta(s)dW(s) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg) \end{aligned}$$

mit $j_3(\lambda)$ und $j_4(\lambda)$ wie in (5.23) und (5.24). □

Bemerkung 5.12 Die Erwartungswerte

$$\mathbb{E}\bigg(\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s) \mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg)$$

und

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \vartheta(s)dW(s) \mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}} \bigg)$$

lassen sich ohne konkrete Angabe der Koeffizienten nicht weiter lösen. Der Grund hierfür ist, dass die beiden Zufallsvariablen $\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s)$ und $\mathbb{1}_{\{G \geq \frac{1}{\lambda H(T)}\}}$, sowie $\int_0^T \vartheta(s)dW(s)$ und $\mathbb{1}_{\{G < \frac{1}{\lambda H(T)}\}}$ abhängig voneinander sind. Es lässt sich jedoch eine Näherung der Ergebnisse durch ein nummerisches Lösungsverfahren, wie das Monte-Carlo-Verfahren, erzielen.

In Anlehnung an 5.1 ist die optimale Strategie gegeben durch:

Satz 5.13 *Seinen die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G(0)$. Dann ist die optimale Strategie von* (5.1) *in dem zu Beginn dieses Abschnitts beschriebenen Mixed Stock Bond Markt bei logarithmischer Nutzenfunktion und einer Garantie von $G = K \cdot B(T,T_1)$ mit $T < T_1$ und $K \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch*

i) handel gemäß der Replikationsstrategie von der stochastischen Garantie $G = K \cdot B(T,T_1)$

ii) investiere das restliche Startkapital in eine Strategie, welche die Exchange-Option $(I(\lambda H(T)) - G)^+$ repliziert.

Nun wird dasselbe Finanzmarktmodell wie zuvor betrachtet. Allerdings wird die Portfoliooptimierung mit stochastischer Garantie nun für eine Power-Nutzenfunktion gelöst. Auch in diesem Fall ist für die Bestimmung des optimalen erwarteten Endnutzen in Abhängigkeit des optimalen Lagrangeparameters für das Optimierungsproblem ohne Garantie die Martingalmethode anwendbar. Dies ergibt sich aus analoger Argumentation wie in 4.4. Das optimale Endvermögen in Abhängigkeit des Lagrangeparameters ist somit gegeben durch

$$C(\lambda) = (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Ebenso sprechen wir die Garantie $G = K \cdot B(T, T_1)$ mit $K \in \mathbb{R}^{>0}$ und $T < T_1$ aus. Das optimale Endvermögen $C(\lambda)$ in Abhängigkeit des Lagrangeparameters für das Portfoliooptimierungsproblem mit Garantie ergibt sich nach nach (5.3) zu

$$C(\lambda) = \max\left\{G, (\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\}.$$

Die Gleichung (5.4) für eine nicht-negative Zufallsvariable G, sodass $b > G(0)$ gilt, ist dann gegeben durch

$$G(0) + \mathcal{E}((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, G) = b. \tag{5.25}$$

Nun ist es für die Berechenbarkeit des Optimierungsproblems von Bedeutung, dass die Exchange-Option in dieser Gleichung bewertet werden kann. Mittels [12, Satz 1.3.2] ist dann für den Fall einer Power-Nutzenfunktion die Exchange-Option in der Nebenbedingung (5.25) gegeben durch

$$\mathcal{E}((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, G) = \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\Phi(d_+) - K \cdot B(0, T_1)\Phi(d_-)$$

mit

$$d_\pm = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}\log(\lambda) - \log(KB(0,T_1)) \pm \int_0^T \sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}$$

und

$$\sigma(t) := \sqrt{\sigma_1(t, T_1) - 2\sigma_1(t, T_1)\sigma_2(t)\rho(t) + \sigma_2^2(t)}.$$

Der optimale erwartete Endnutzen ist in diesem Fall durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 5.14 *Es sei das zu Beginn dieses Abschnitts beschriebene Mixed Stock Bond Markt Modell und eine Power-Nutzenfunktion gegeben und wir nehmen an, dass $b > G(0)$ ist. Weiter setzen wir als Garantie $G = K \cdot B(T, T_1)$ mit $T < T_1$, also*

$$G = K \cdot B(0, T_1) \exp\left(\int_T^{T_1} \sigma_1(s, T_1)dW_1(s) - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s, T_1)ds\right) \exp\left(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds\right) \tag{5.26}$$

voraus. Dann hat das Optimierungsproblem (5.2) die Lösung

$$w(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\Bigg(K^\alpha B^\alpha(0,T_1)\exp\bigg(\alpha\Big(\int_T^{T_1}\mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds\Big)\bigg)\overline{E}_1 + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\bigg(-\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{2}\int_0^T\vartheta^2(s)ds + \int_0^T r(s)ds\Big)\bigg)\overline{E}_2\Bigg),$$

wobei

$$\overline{E}_1 = \mathbb{E}\bigg(\exp\Big(\alpha\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)$$

und

$$\overline{E}_2 = \mathbb{E}\bigg(\exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^T\vartheta(s)dW(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg).$$

Beweis: Analog zu dem Beweis von Satz 4.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}
w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)}\mathbb{E}(U(C))\\
&= \max_{C\in\mathcal{B}(b)}\mathbb{E}\bigg(\frac{C^\alpha}{\alpha}\bigg)\\
&= \mathbb{E}\bigg(\frac{1}{\alpha}(\max\{G, I(\lambda H(T))\})^\alpha\bigg)\\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\bigg((\max\{G,(\lambda H(T))^{\frac{1}{\alpha-1}}\})^\alpha\bigg)\\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\bigg((\max\{G^\alpha,(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\})\bigg)\\
&= \frac{1}{\alpha}\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\bigg(G^\alpha\mathbb{1}_{\{G^\alpha\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)}_{I} + \underbrace{\mathbb{E}\bigg((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha<(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)}_{II}\Bigg).
\end{aligned}$$

Des Weiteren erhalten wir

$$H^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(T) = \exp\bigg(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(\int_0^T\vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T\vartheta^2(s)ds - \int_0^T r(s)ds\Big)\bigg)$$

und

$$G^\alpha = K^\alpha B^\alpha(0,T_1)\exp\bigg(\alpha\Big(\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)dW_1(s) - \frac{1}{2}\int_T^{T_1}\sigma_1^2(s,T_1)ds + \int_T^{T_1}\mu_1(s)ds\Big)\bigg).$$

Nun kann der Erwartungswert I berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\bigg(G^\alpha\mathbb{1}_{\{G^\alpha\geq(\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\bigg)\\
&= \mathbb{E}\bigg(K^\alpha B^\alpha(0,T_1)\exp\Big(\alpha\Big(\int_T^{T_1}\sigma_1(s,T_1)dW_1(s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds + \int_T^{T_1} \mu_1(s)ds\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\\
&= K^\alpha B^\alpha(0,T_1)\exp\Big(\alpha\Big(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\Big)\Big)\\
&\cdot \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\alpha\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)
\end{aligned}
$$

und für den Erwartungswert II gilt

$$
\begin{aligned}
II &= \mathbb{E}\Big((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(\int_0^T \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds - \int_0^T r(s)ds\Big)\Big)\\
&\quad \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\\
&= \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\Big(-\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_0^T r(s)ds\Big)\Big)\\
&\quad \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^T \vartheta(s)dW(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big).
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
w(\lambda) &= \max_{C\in\mathcal{B}(b)} \mathbb{E}(U(C))\\
&= \frac{1}{\alpha}\Big(\mathbb{E}\Big(G^\alpha\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big) + \mathbb{E}\Big((\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{\alpha}\Big(K^\alpha B^\alpha(0,T_1)\exp\Big(\alpha\Big(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\Big)\Big)\\
&\quad \cdot \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\alpha\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\\
&\quad + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\Big(-\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_0^T r(s)ds\Big)\Big)\\
&\quad \cdot \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^T \vartheta(s)dW(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{\alpha}\Big(K^\alpha B^\alpha(0,T_1)\exp\Big(\alpha\Big(\int_T^{T_1} \mu_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1)ds\Big)\Big)\overline{E}_1\\
&\quad + \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\Big(-\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \vartheta^2(s)ds + \int_0^T r(s)ds\Big)\Big)\overline{E}_2\Big)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\overline{E}_1 = \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\alpha\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1)dW_1(s)\Big)\mathbb{1}_{\{G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}}\Big)
$$

und

$$\overline{E}_2 = \mathbb{E}\Bigg(\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^T \vartheta(s) dW(s) \right) \mathbb{1}_{\{G^\alpha < (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}} \Bigg).$$

$\square$

Bemerkung 5.15 Auch hier lassen sich die in der Lösung auftretenden Erwartungswerte nicht explizit berechnen. Jedoch kann man sich beispielsweise durch eine Monte-Carlo Simulation nummerisch einer Lösung annähern. Zur Begründung siehe Bemerkung 5.12.

Weiterhin kann man auch hier sehen, dass die in den Erwartungswerten auftretenden Indikatorfunktionen normalverteilt sind. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
&G^\alpha \geq (\lambda H(T))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
\Leftrightarrow & K^\alpha B^\alpha(0,T_1) \exp\left(\alpha\bigg(\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1) dW_1(s) - \frac{1}{2} \int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1) ds + \int_T^{T_1} \mu_1(s) ds \bigg) \right) \\
&\geq \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \bigg(\int_0^T \vartheta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \vartheta^2(s) ds - \int_0^T r(s) ds \bigg) \right) \\
\Leftrightarrow & z_4 \geq \underbrace{\frac{1}{\alpha-1} \int_0^T \vartheta(s) dW(s) - \int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1) dW_1(s)}_{=:X}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
z_4 := &\log\left(KB(0,T_1) \lambda^{-\frac{1}{\alpha-1}} \right) + \int_0^{T_1} \mu_1(s) ds + \frac{1}{\alpha-1} \int_0^T r(s) ds \\
&+ \frac{1}{2(\alpha-1)} \int_0^T \vartheta^2(s) ds - \frac{1}{2} \int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1) ds
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Zufallsvariable X. Hier ist es von elementarer Bedeutung, dass sowohl $\vartheta(s)$, als auch $\sigma_1(s,T_1)$ deterministisch sind, sowie dass

$$\int_0^t \vartheta^2(s) ds < \infty \qquad \text{für alle } t \leq T$$

und

$$\int_T^t \sigma_1^2(s,T_1) ds < \infty \qquad \text{für alle } T \leq t \leq T_1$$

gilt. Dann ist

$$X = \underbrace{\frac{1}{\alpha-1} \underbrace{\int_0^T \vartheta(s) dW(s)}_{\sim\mathcal{N}\left(0, \int_0^T \vartheta^2(s) ds\right)}}_{\sim\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(\alpha-1)^2} \int_0^T \vartheta^2(s) ds\right)} - \underbrace{\int_T^{T_1} \sigma_1(s,T_1) dW_1(s)}_{\sim\mathcal{N}\left(0, \int_T^{T_1} \sigma_1^2(s,T_1) ds\right)}.$$

Da für zwei Zufallsvariablen $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ gilt, dass

$$Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

erhalten wir

$$X \sim \mathcal{N}\Bigg(0, \underbrace{\frac{1}{(\alpha-1)^2} \int_0^T \eta^2(s)ds - \int_T^{T_1} \sigma_1^2(s, T_1)ds}_{:=\delta}\Bigg).$$

Somit handelt es sich bei der Indikatorfunktion um eine normalverteilte Zufallsvariable.

Kommen wir nun zur optimalen Strategie. In Anlehnung an 5.1 ist diese gegeben durch:

Satz 5.16 *Seinen die Annahmen von Abschnitt 1.4 erfüllt und sei $b > G(0)$. Dann ist die optimale Strategie von* (5.1) *in dem zu Beginn dieses Abschnitts beschriebenen Mixed Stock Bond Markt bei logarithmischer Nutzenfunktion und einer Garantie von $G = K \cdot B(T, T_1)$ mit $T < T_1$ und $K \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch*

i) handel gemäß der Replikationsstrategie von der stochastischen Garantie $G = K \cdot B(T, T_1)$

ii) investiere das restliche Startkapital in eine Strategie, welche die Exchange-Option $(I(\lambda H(T)) - G)^+$ repliziert.

Es wurde das Portfoliooptimierungsproblem mit stochastischer Garantie somit für ein klassisches, zweidimensionales Black-Scholes Modell und ein Mixed Stock Bond Modell für eine logarithmische- und eine Power-Nutzenfunktion gelöst. Schon bei einfachen stochastischen Garantien, konnte der optimale erwartete Endnutzen nicht explizit berechnet werden, ohne nähere Angaben zu den Parametern.

Fazit und Ausblick

Ziel dieser Masterarbeit war das optimalen Management eines Garantiefonds in verschiendenen Finanzmarktmodellen mittels der Portfoliooptimierung mit einer Garantie. Es wurde also ein optimales Endvermögen und eine optimale Strategie unter bestimmten Restriktionen bestimmt. Die Optimierung wurde zunächst für eine deterministische Garantie und anschließend für eine stochastische Garantie durchgeführt. Die Präferenzen des Investors wurden durch eine logarithmische und eine Power-Nutzenfunktion dargestellt.

Ausgehend von der Lösung des Mertonproblems, wurde für die Portfoliooptimierung mit deterministischer Garantie ein allgemeiner Lösungsweg hergeleitet. Hierbei wurde die Lagrangemethode angewendet. Um den optimalen Lagrangeparameter zu ermitteln, musste in dem jeweils betrachteten Finanzmarktmodell eine Call-Option auf das optimale Endvermögen im Fall ohne Garantie bewertet werden. Dies war jedoch nur möglich, wenn die Volatilitäten der Bonds deterministisch waren. Zunächst wurden zwei eindimensionale Modelle, das Black-Scholes- und das Vasicek-Modell betrachtet. Anschließend betrachteten wir mittels des Mixed Stock Bond Marktes ein zweidimensionales und abschließend ein mehrdimensionales Finanzmarktmodell, das Gaußsche HJM-Modell. Im letzten Fall stand das Geldmarktkonto nicht zur Verfügung, sondern ein weiteres risikobehaftetes Asset war als Nummeraire vorgesehen.
In Kapitel 5 wurde die Annahme einer deterministischen Garantie zu einer stochastischen Garantie verallgemeinert. Grundlage für eine Lösung war wieder die durch die Martingalmethode gefundene Lösung des Portfolioproblems ohne Garantie. Bei der Herleitung des allgemeinen Lösungsweges konnte analog zu der Optimierung mit deterministischer Garantie argumentiert werden. Jedoch musste nun eine Exchange-Option anstatt einer Call-Option bewertet werden. Die Exchange-Option erlaubt es dem Inhaber am Ende des Handelszeitraums das eine Asset gegen das andere zu tauschen. Auch hier wurde unter Betrachtung der logarithmischen und der Power-Nutzenfunktion das Optimierungsproblem für ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten und in einem Mixed Stock Bond Modell gelöst. Es wurde zudem gesehen, dass bei der Optimierung mit stochastischer Garantie das optimale erwartete Endvermögen, aufgrund von stochastischen Abhängigkeiten, nicht explizit angegeben werden konnte, ohne konkreten Angaben der Koeffizienten. Näherungen sind jedoch möglich.

Offengelassen wurde hier die Frage nach der Handhabbarkeit der berechneten Ergebnisse. Ohne ein computerbasiertes Rechenprogramm sind konkrete Berechnungen schwer durchzuführen, wobei dies jedoch mit den in dieser Masterarbeit präsentierten Lösungen theoretisch möglich wäre. Auch die Annahme, dass zeitstetig zu jedem Zeitpunkt t ohne Transaktionskosten gehandelt werden kann, ist in der Realität nicht zu beobachten.
Ein weiterer kritischer Gesichtspunkt ist die Kalibierung der hier betrachteten Modelle. Die Parameter wie beispielsweise Zinsrate, Drift und Volatilität müssen natürlicherweise so gewählt

werden, dass sie relativ nah an den Werten sind, die in der Realität auftreten. Hier sind weitere Techniken der Statistik notwendig, um gute und realitätsnahe Ergebnisse bei den konkreten Berechnungen zu erzielen.

Weiterführend kann das hier vorgestellte und gelöste Portfoliooptimierungsproblem spezifiziert werden durch die Hinzunahme einer Konsumfunktion. In dieser Modellerweiterung hat der Investor somit die Option, zu jedem Zeitpunkt t zu konsumieren. Auch eine Anwendung für eine Erlebensfallversicherung ist durchführbar. Hierfür müssten Modellierungen der entsprechenden Garantien und der Mortalitätsrisiken durchgeführt und betrachtet werden.

Literaturverzeichnis

[1] G. Alsmeyer: Wahrscheinlichkeitstheorie. Skripten zur Mathematischen Statistik, 2005.

[2] T. Björk: Arbitrage Theory in Continuous Time. 2. edition. Oxford University Press, 2003.

[3] L. Boven: Über short-rate Modelle zur Beschreibung von Rentenmärkten. Masterarbeit, 2010. Online verfügbar unter http://wwwmath.unimuenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Diplomarbeiten/Boven.pdf.

[4] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picque: Optimization of consumption with labor income. Finance and Stochastics 2, 1998, Seite 409-440.

[5] R. Hochreiter, G. Pflug, V. Paulsen: Designing and managing unit-linked life insurance contracts with guarantees. 2005. Online verfügbar unter http://wwwmath.unimuenster.de/statistik/paulsen/Publikationen/insurance.pdf.

[6] I. Karatzas, S. Shreve: Methods of Mathematical Finance. Springer, 1998.

[7] I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2.Auflage. Springer-Verlag, New York, New York, USA, 2010.

[8] H. Kraft: Optimal Portfolios with Stochastic Interest Rates and Defaultable Assets. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Deutschland, 2004.

[9] E. Kiefel: Portfoliooptimierung in HJM-Modellen. Masterarbeit, August 2014. Westfälische-Wilhelms-Universität Münster.

[10] C. Kühn: Finanzmathematik in stetiger Zeit. Universität Hamburg, 2007. Vorlesungsskript, letzte Aktualisierung 2014.

[11] Prof. S. Lallay: Lecture Notes des Kurses Mathematical Finance 345. Universität Chicago, Herbst 2001. Online verfügbar unter: http://galton.uchicago.edu/ lalley/Courses/390/Lecture7.pdf.

[12] T. Ontrup: Zur Bewertung von Exchange-Optionen. Masterarbeit 2015, Münster.

[13] A. Ostwald: Das HJM-Modell und das LIBOR Markt Modell zur Beschreibung von Zinsstrukturkurven. Diplomarbeit 2010, Münster.

[14] D. Schlotmann: Das Vasicek-Modell - Ein Short-Rate-Modell zur Beschreibung von Rentenmärkten, 2010. Online verfügbar unter http://wwwmath.unimuenster.de/statistik/lehre/SS10/Seminar-Finanzmathematik.

[15] T. Schmidt: Zinsstrukturmodelle. Universität Leipzig, 2005. Vorlesungsskript.

[16] S. Shreve: Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models. Springer-Verlag, 2004.

[17] S. Simann: Portfoliooptimierung im Vasicek-Modell. Masterarbeit Oktober 2014. Paderborn

[18] S. Upgang: Bewertung von Derivaten im Black-Scholes Modell. Bachelorarbeit August 2012. Online verfügbar unter: http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Bachelorarbeiten/Upgang.pdf.

[19] N. Ikeda, S. Watanabe.: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North Holland, 1981.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Stefan Blanke, Münster, 26. Januar 2016

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Stefan Blanke, Münster, 26. Januar 2016