

Universität Münster  
Fachbereich Mathematik

Lévy-Prozess Modelle in der Finanzmathematik

Masterarbeit

von: Johannes Blank  
Erstkorrektor: PD Dr. Volkert Paulsen  
Zweitkorrektor: Prof. Dr. Steffen Dereich

30. August 2013

# Einleitung

Seit der Vorstellung des Black-Scholes-Modells in den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts hat es im Bereich der finanzmathematischen Modellierung zahlreiche Weiterentwicklungen und Neuerungen gegeben. Eine davon, welche das Thema dieser Arbeit sein wird, ist die Einbindung von Lévy-Prozessen in den Modellierungsprozess. Die Klasse der Lévy-Prozesse umfasst bekannte stochastische Prozesse wie etwa den Wiener-Prozess und den Poisson-Prozess, welche beide häufig zur Modellierung verschiedener Sachverhalte verwendet werden. Im Black-Scholes-Modell ist es der schon erwähnte Wiener Prozess, der die zufälligen Schwankungen eines Finanzgutes modelliert. In den in dieser Arbeit betrachteten Finanzmarktmodellen übernimmt dies ein Lévy-Prozess, das ist auch ein Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, bei dem allerdings die Forderung normalverteilter Zuwächse und stetiger Pfade wegfällt. Lévy-Prozesse bieten durch die Möglichkeit, nichtgaußsche Verteilungen für die Zuwächse anzunehmen zusätzliche Flexibilität in der Modellierung. Gleichzeitig teilen die Lévy-Prozesse viele angenehme Eigenschaften mit dem Spezialfall des Wiener-Prozesses, etwa zeitliche Homogenität, die das Arbeiten mit diesen erleichtert.

Im einführenden Kapitel 1 werde ich einige Kritikpunkte am klassischen Black-Scholes-Ansatz wiedergeben (s. auch [15]). In den letzten vier Jahrzehnten haben empirische Beobachtungen nämlich aufgezeigt, dass es systematische Abweichungen zwischen tatsächlich beobachtbarem Marktgeschehen und den Ergebnissen im Black-Scholes-Modell gibt. Bekanntes Beispiel hierfür ist der sogenannte „smile“-Effekt, welcher der Annahme konstanter Volatilität im BS-Modell widerspricht.

In Kapitel 2 führe ich Lévy-Prozesse ein, gebe wichtige Eigenschaften und Beispiele für diese an und führe die Verbindung zur Klasse der unendlich teilbaren Verteilungen auf. Besonderen Stellenwert in dieser ersten Hälfte der Arbeit hat die Lévy-Ito-Zerlegung und deren Beweis in Kapitel 3, da sie das Verständnis für die Struktur von Lévy-Prozessen sehr erleichtert. Einfach ausgedrückt ermöglicht die Lévy-Ito-Formel es, einen Lévy-Prozess in einfachere Grundbestandteile zu zerlegen, genauer eine Wiener-Prozess-Komponente, einen Poisson-Prozess-Sprunganteil und einen weiteren Sprunganteil, welcher die kleinen Sprünge darstellt.

Der zweite Teil der Arbeit besteht im Vorstellen verschiedener Lévy-Prozess-Modelle. Ich beginne dabei in Kapitel 2 bei dem sich einfach aus dem BS-Modell ergebendem Merton-Modell (welches dem BS-Modell einen Poisson-Sprunganteil hinzufügt, vgl. [18]) und dem interessanten Ansatz des Variance-Gamma-Modells (welches komplett ohne einen stetigen Anteil auskommt, vgl. [8]). Diese werde ich in Form von Anwendungsbeispielen zusammen mit den entsprechenden Lévy-Prozessen vorstellen, mit vergleichsweise elementaren Mitteln.

Bevor ich zu den etwas aufwändigeren Modellen mit stochastischer Volatilität komme, werde ich noch in Kapitel 4 die weit verbreitete Klasse der exp-Lévy-Modelle betrachten, zu denen die oben genannten Modelle gehören. Zudem gehe ich in Kapitel 5 auf eine (vergleichsweise einfache) Berechnungsmethode in exp-Lévy-Modellen mittels Fouriertransformierten (nach Carr und Madan) ein, die sich natürlicherweise anbietet wenn mit Lévy-Prozessen gearbeitet wird. Anschließend ziehe ich ein Zwischenfazit, inwieweit diese Modelle die Kritikpunkte am BS-Modell beantworten.

ten, und führe stochastische Volatilitätsmodelle ein. Dies geschieht zunächst in Form des Modells von Bates (vgl. [2] und [10]) und schließlich folgt eine ausführliche Be- trachtung des Modells von Barndorff-Nielsen und Shephard (welches sehr viele der Kritikpunkte am BS-Modell beantwortet, vgl. hierzu [3], [4], [5], [6] und besonders [20]).

Bei jedem der Modelle wird versucht, eine Bewertung eines einfachen Finanzguts, genauer eines europäischen Calls oder Puts, innerhalb des Modells durchzuführen, um ein Gefühl für das Modell und die mathematische Handhabbarkeit desselben herzustellen. Solche Bewertungen sind schon deshalb wichtig, um ein Modell an eine gegebene Menge Daten kalibrieren zu können. Voraussetzung für das Verständnis des Textes ist, neben elementarer Wahrscheinlichkeitstheorie, die Kenntniss einiger Begriffe aus der stochastischen Analysis, insbesondere der Begriff des stochastischen Integrals (in [19] findet man alles hierzu relevante). Finanzmathematisches Vor- wissen ist nicht unbedingt erforderlich, erleichtert es allerdings einige Sachverhalte nachzu vollziehen (für einen Überblick über die Finanzmathematik vgl. etwa [9]). Das Gebiet der finanzmathematischen Modellierung mithilfe von Lévy-Prozessen ist in den vergangenen Jahren enorm angewachsen. Die hier vorgestellten Methoden und Modelle können daher nur einen ausgewählten Teil der Theorie abbilden. Ich hoffe dennoch, einen Einblick in dieses interessante Gebiet geben zu können.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das Black-Scholes Modell und empirische Fakten über Aktienmärkte</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lévy-Prozesse</b>	<b>3</b>
2.1	Unendlich teilbare Verteilungen und Lévy-Khintchine Formel . . . . .	4
2.2	Beispiele für Lévy-Prozesse . . . . .	7
2.2.1	Wiener Prozess . . . . .	7
2.2.2	Poisson-Prozess . . . . .	7
2.2.3	Inverse-Gaussian-Prozess . . . . .	14
2.2.4	Gamma-Prozess . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Einbettung in die Theorie der Semimartingale und stochastische Analysis mit Lévy-Prozessen</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Lévy-Prozess-Modelle in der Finanzmathematik: Exponentielle Lévy-Modelle</b>	<b>30</b>
4.1	Esscher-Transformation in exp. Lévy-Modellen . . . . .	34
4.2	Arbitragefreiheit der Exponentiellen Lévy-Modelle . . . . .	36
4.3	Integro-Differential Equation Ansatz zur Bestimmung des Wertes einer europäischen Option . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Berechnungsmethode mittels Fouriertransformation (nach Carr/Madan)</b>	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Zwischenfazit und Stochastic Volatility Modelle</b>	<b>41</b>
<b>7</b>	<b>Das Modell von Barndorff-Nielsen/Shephard</b>	<b>43</b>
7.1	Selbstteilbare Verteilungen und OU-Prozesse . . . . .	44
7.2	2 Spezialfälle: Gamma-OU und IG-OU Prozesse . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Strukturerhaltende äMMs im BNS-Modell</b>	<b>46</b>
<b>9</b>	<b>Das BNS Modell in Aktion: Preisberechnung von Derivaten</b>	<b>48</b>
9.1	Transformationsansatz zur Derivatberechnung . . . . .	49
9.2	Beispiel: Europäischer Call bzw. Put im IG- bzw. Gamma-OU-Modell	52
<b>10</b>	<b>Ober- und Untergrenzen für den arbitragefreien Preisprozess</b>	<b>53</b>
<b>11</b>	<b>Kurzfazit</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Verwendete R-codes</b>	<b>61</b>
<b>C</b>	<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>65</b>

# 1 Das Black-Scholes Modell und empirische Fakten über Aktienmärkte

Im Jahre 1973 stellten die Ökonomen Fischer Black und Myron Scholes in ihrem Paper „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“ das heute als *Black-Scholes-Modell* bekannte Modell zur Bewertung von Finanzgütern wie beispielsweise Aktienoptionen vor. Dieses sieht einen endlichen Zeithorizont  $T$  sowie zwei Finanzgüter auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$  vor, einen festverzinslichen Bond sowie ein zweites asset(eine Aktie), welches zufälligen Schwankungen unterliegt. Dazu sei der Aktienkurs  $S_t$  Lösung der SDE

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

mit Konstanten  $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  und einem Wienerprozess  $W$  bzgl. des am Markt vorliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ . Dabei wird  $\sigma$  als Maß für die zufälligen Schwankungen des Aktienkurses (die sogenannte *Volatilität* der Aktie) und  $\mu$  als Trendparameter gesehen. Die Bewertung von Optionen erfolgt durch Übergang zu einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^*$ <sup>1</sup> (im Folgenden nennen wir ein solches Maß *äquivalentes Martingalmaß* oder auch *äMM*). Insbesondere: Ist  $h$  Auszahlungsfunktion, so gilt für den Werteprozess  $(V_t)_{t \geq 0}$  des Derivats mit Auszahlung  $h(S_T)$  in  $T$ :  $V_t = \mathbb{E}^*(h(S_T) e^{-r(T-t)} | \mathcal{F}_t)$ . Für den Spezialfall, dass es sich um eine europäische Call- bzw. Putoption handelt, d.h.  $h(x) = (x - K)^+$  bzw.  $h(x) = (K - x)^+$  ergibt sich für den Preis zum Zeitpunkt  $t$  die berühmte Black-Scholes-Formel:

$$\begin{aligned} p_t^C(S_t, T, K, \sigma) &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ p_t^P(S_t, T, K, \sigma) &= K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) \end{aligned}$$

mit

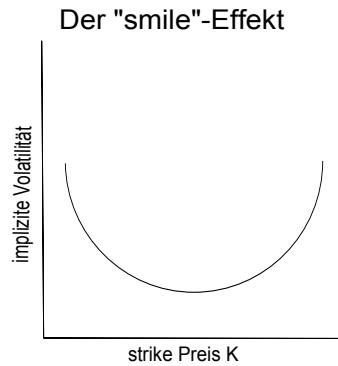
$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \mathcal{N}(0, 1)(-\infty, u) \\ d_{1,2} &:= \frac{\log\left(\frac{S_t}{K e^{-r(T-t)}}\right) \pm (T-t)\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{aligned}$$

Dieses Modell ist zwar einfach zu handhaben, hat aber gegenüber realer Daten einige Schwächen:

1. Die Volatilität  $\sigma$  ist im Modell konstant; die impliziten Volatilitäten, die man anhand tatsächlicher Kurse ermitteln kann(dafür wird zu gegebenen Marktpreisen von europäischen Put oder Call-Optionen die eindeutige Volatilität  $\sigma$  errechnet, die sich aus obiger Black-Scholes-Formel ergibt), deuten aber auf nichtkonstante Volatilitäten (vgl. smile-effect) und Clusterbildung hin. Letzteres ist die Beobachtung am Finanzmarkt, dass große Preissprünge zeitlich gehäuft auftreten, und selbiges für kleine Sprünge. An vielen Märkten lässt sich zudem eine negative Korrelation zwischen returns und ihrer Volatilität beobachten; dieser „leverage“-Effekt tritt im BS-Modell nicht auf.

---

<sup>1</sup>d.h. der abdiskontierte Preisprozess  $e^{-rt} S_t$  ist  $P^*$ -Martingal



- Der treibende stochastische Prozess  $W_t$  ist im Modell normalverteilt; da  $\log S_t = \log S_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$  ergibt sich für die log-returns eine Normalverteilung. Die Empirie legt allerdings für kleine bis mittlere Zeiträume eine Linksschiefe sowie eine Kurtosis größer als 3 nahe; dies spricht eher gegen die Annahme einer Normalverteilung. Vergrößert man die Zeiträume bei der Betrachtung der returns beobachtet man aggregierte Gaußscheit, d.h. aufsummierte returns sind annähernd normalverteilt-dies jedoch nur über längere Zeitspannen.

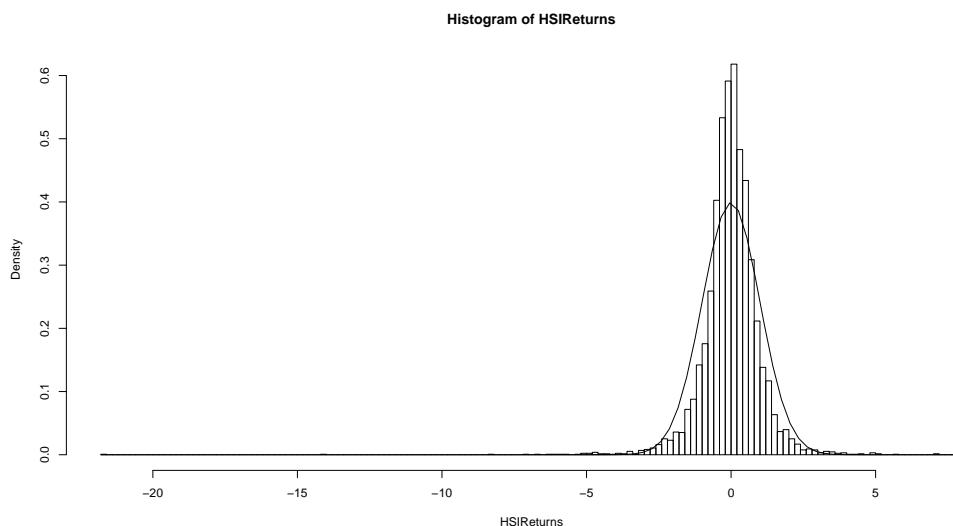


Abbildung 1: Histogramm von standardisierten HSI-Returns (von 31.12.1986 bis 27.4.2013, Tagesdaten) und Standardnormalverteilungsdichte

Das obige Histogramm verdeutlicht diese Differenz zwischen Normalverteilungsannahme und Empirie; die empirische Kurtosis beträgt  $K = 48.81$  in obigem Beispiel, die Kurtosis der Standardnormalverteilung ist  $K = 3$ . Es liegt eine Linksschiefe vor (empirische Schiefe=  $-2.2$ ) welche bei der symme-

trischen Normalverteilung nicht auftritt.<sup>2</sup>

3. Insbesondere in Zeiten hoher Unsicherheit am Finanzmarkt und während Krisen kann es zu beträchtlichen Kursänderungen in kürzester Zeit kommen (z.B. innerhalb weniger Minuten). Oftmals sind die Gründe für solche Kurssprünge nicht sofort ersichtlich. Es ist nicht selten eine psychologische Komponente der Marktteilnehmer, verbunden mit der Möglichkeit, dass schon geringfügige Abweichungen der Erwartungshaltung der Händler zu drastischen Kurseinbrüchen führen kann, die Ursache solcher Sprünge. Diese Unstetigkeiten sind in einem stetigen Semimartingalmodell nicht zu finden.
4. Das Black-Scholes Modell ist vollständig, also ist jede Endauszahlung replizierbar. Damit sind Optionen im Prinzip redundant; dennoch beobachtet man eine große Zahl unterschiedlichster Derivate, die am Markt gehandelt werden.

Um diese Probleme anzugehen werden wir auf die Normalverteilungsannahme und stetige Pfade beim treibenden Prozess verzichten. Insbesondere werden wir allgemeinere Prozesse betrachten als Brownsche Bewegungen. Wir werden uns dafür Lévy-Prozess-Modellen zuwenden; diese sind eine natürliche Verallgemeinerung des BS-Ansatzes und bilden einen adäquaten Kompromiss zwischen mathematischer Handhabbarkeit und Realitätsnähe.

## 2 Lévy-Prozesse

Nach den Feststellungen in Kapitel 1 ist es naheliegend, die Forderung der Normalverteilung bei den Zuwächsen des treibenden stochastischen Prozesses (im BS-Modell ist dies gerade der Wiener-Prozess) und die Stetigkeit der Pfade aufzugeben. Die nachfolgende Definition eines Lévy-Prozesses unterscheidet sich gerade in diesen Punkten von dem bekannten Wiener-Prozess.

**Definition 2.1** (Lévy-Prozess). Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ ; im Folgenden fordern wir immer, dass dieser die *usual conditions* erfüllt, d.h.  $\mathcal{F}_0$  enthalte alle  $P$ -Nullmengen und es sei  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ . Dann nennen wir einen adaptierten càdlàg Prozess  $Z$  Lévy-Prozess, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $Z_0 = 0$   $P$ -f.s.
- ii)  $Z$  hat unabhängige und stationäre Zuwächse, d.h.  $Z_t - Z_s$  ist stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}_s$  und  $Z_t - Z_s \stackrel{d}{=} Z_{t-s}$  gilt für alle  $s < t$ .
- iii)  $Z$  ist stetig in Wahrscheinlichkeit, also  $\lim_{s \rightarrow t} P(|Z_t - Z_s| > \varepsilon) = 0$  für alle  $t \geq 0$  and  $\varepsilon > 0$ .

---

<sup>2</sup>Obige Grafik entspricht im Wesentlichen derjenigen aus [15]; dort wurde der S&P 500 Index untersucht

Gelegentlich kann man eine etwas andere Definition finden; da iii) aus den anderen Voraussetzungen folgt, wird oft darauf verzichtet. Einige Autoren behalten Bedingung iii), verzichten aber auf die càdlàg- Eigenschaft, da unter den übrigen Voraussetzungen immer eine càdlàg-Modifikation existiert. Die Eigenschaft ii) sowie Prozesse mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir im Folgenden als PIID. Wir betrachten nun zunächst Eigenschaften und Charakterisierungen von Lévy-Prozessen. Eine anhand der Definition bereits offensichtliche Eigenschaft ist die, dass die Summe unabhängiger Lévy-Prozesse auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum wieder ein Lévy-Prozess ist.

**Proposition 2.2** (Markoveigenschaft). *Ist  $Z$  Lévy-Prozess, so hat  $Z$  die Markov-Eigenschaft, d.h. für  $t \geq 0$  ist der prä- $t$ -Prozess  $(Z_s)_{s \leq t}$  stochastisch unabhängig vom post- $t$ -Prozess  $(Z_{t+s} - Z_t)_{s \geq 0}$  und  $(Z_{t+s} - Z_t)_{s \geq 0} \stackrel{d}{=} (Z_s)_{s \leq t}$*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar daraus, dass Lévy-Prozesse stationäre und unabhängige Zuwächse haben.  $\square$

Es gilt sogar die starke Markoveigenschaft für Lévy-Prozesse (d.h. für eine Stoppzeit  $T$  mit  $P(T < \infty) = 1$  gilt  $((X_{T+t} - X_T)_{t \geq 0}$  ist unabhängig von  $\mathcal{F}_T$  und verteilt wie  $(X_t)_{t \geq 0}$ ), siehe [7], Seite 20.

## 2.1 Unendlich teilbare Verteilungen und Lévy-Khintchine Formel

Eine der wichtigsten Eigenschaften in Verbindung mit Lévy-Prozessen ist die der unendlichen Teilbarkeit. In diesem Unterkapitel werden wir den Begriff einführen und die Lévy-Khintchine-Formel vorstellen. Der Beweis derselben ist leider recht lang und wird in dieser Arbeit nicht wiedergegeben. Stattdessen werden wir in Kapitel 3 die sogenannte Lévy-Ito-Formel beweisen, welche einen recht guten Einblick in die Struktur von Lévy-Prozessen liefert.

**Definition 2.3** (Unendlich teilbare Verteilungen). Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  auf  $\mathbb{R}^d$  wird *unendlich teilbar* (engl. *infinitely divisible*) genannt, wenn für jedes  $n \geq 1$  ein W-Maß  $Q_n$  existiert so dass  $Q = Q_n^{*(n)}$ .  $Q$  ist also die  $n$ -fache Faltung eines bestimmten Maßes  $Q_n$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ .

Genauso sprechen wir von einer unendlich teilbaren Zufallsgröße  $X$ , falls  $X \stackrel{d}{=} X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$  für alle  $n$  wobei  $(X_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$  iid Zufallsvariablen sein sollen.

Ausgedrückt über die Fourier-Transformierte  $\phi_Q$  einer Verteilung  $Q$  heisst dies  $\phi_Q(u) = (\phi_{Q_n}(u))^n$  für gewisse  $Q_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Ist  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy Prozess, so ist die Verteilung von  $Z_t$  unendlich teilbar für jedes  $t$ . Tatsächlich gilt für ein festes  $t$

$$Z_t = \sum_{k=1}^n \left( Z_{\frac{kt}{n}} - Z_{\frac{(k-1)t}{n}} \right) \quad (2.1)$$

und wegen der unabhängigen und stationären Zuwächse ist damit die unendliche Teilbarkeit gezeigt.

Um die im Folgenden sehr wichtige Lévy-Khintchine Formel einzuführen benötigen wir den Begriff eines *Lévy Maß*, das ist ein Maß  $\nu$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} x^2 \wedge 1 \nu(dx) < \infty$$

**Theorem 2.4** (Lévy-Khintchine Formel). Eine Verteilung  $Q$  auf  $\mathbb{R}^d$  ist unendlich teilbar genau dann wenn die Fourier-Transformierte  $\phi$  die Form  $\phi_Q = \exp(\psi)$  hat mit einer Funktion

$$\psi(u) = \psi_{b,C,\nu}(u) = i u^T b - \frac{1}{2} u^T C u + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (e^{i u^T x} - 1 - i u^T h(x)) \nu(dx) \quad (2.2)$$

wobei  $\nu$  Lévy-Maß ist,  $b \in \mathbb{R}^d$ ,  $C$  positiv semidefinite Matrix ist und  $h(x) = x \mathbb{1}_{[0,1]}(|x|)$ . Die momenterzeugende Funktion mgf (wo diese existiert) hat dann die Form

$$mgf(u) = \exp(\kappa(u)) = \exp \left( u^T b + \frac{1}{2} u^T C u + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (e^{u^T x} - 1 - u^T h(x)) \nu(dx) \right) \quad (2.3)$$

Wir nennen  $\psi$  den *charakteristischen Exponenten* von  $Q$  und  $\kappa$  die Kumulante von  $Q$ . Überdies nennen wir  $C$  Gauss-Komponente und  $b$  die Drift des Prozesses; diese Namensgebung wird spätestens im Beweis der Lévy-Ito-Formel in Kapitel 3 klar werden.

**Anmerkung 2.5.** Die Funktion  $h$  ist etwas willkürlich gewählt; auch andere Abschneidefunktionen wären möglich. Dadurch ändert sich auch der Driftterm. Ist z.B.

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} 1 \wedge |x| \nu(dx) < \infty \quad (2.4)$$

so kann  $h = 0$  gewählt werden mit neuer Drift

$$b' := b - \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \nu(dx)$$

Wir werden in Zukunft wann immer möglich mit diesem Driftterm  $b'$  arbeiten. Wir werden die Integralbedingung 2.4 in Kapitel 3 ausführlicher diskutieren.

Für einen Beweis von Theorem 2.4 verweisen wir auf [1]. Die Funktionen  $\psi, \kappa$  sowie  $b, C$  und  $\nu$  sind eindeutig bestimmt. Die Umkehrung ist ebenfalls wahr, d.h. für jedes Tripel  $(b, C, \nu)$  existiert genau eine unendlich teilbare Verteilung  $Q$  mit obiger Lévy-Khintchine Zerlegung. Gegeben ein Lévy Prozess  $Z_t$  bezeichnen wir den charakteristischen Exponenten von  $Z_t$  mit  $\psi_t$  und seine Fourier-Transformierte mit  $\phi_t$ . Aufgrund der stationären und unabhängigen Zuwächse gilt für alle  $s, t \in [0, \infty)$ .

$$\phi_{s+t}(u) = \mathbb{E} e^{i u Z_{t+s}} = \mathbb{E} (e^{i u (Z_{t+s} - Z_s)} e^{i u Z_s}) = \phi_s(u) \cdot \phi_t(u) \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \psi_s(u) + \psi_t(u) = \psi_{s+t}(u) \quad (2.6)$$

Überdies ist  $\phi_t(u)$  stetig in  $t$  für alle  $u$ . Um dies zu sehen betrachten wir für  $h > 0$  die Ungleichung

$$|\phi_t(u) - \phi_{t+h}(u)| = |\phi_t(u)| \left| 1 - \frac{\phi_{t+h}(u)}{\phi_t(u)} \right| \underset{\phi \text{ ist F.T.}}{\leq} |1 - \phi_h(u)|$$

Da  $Z$  càdlàg ist, gilt mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{h \searrow 0} \phi_h(u) = \lim_{h \searrow 0} \mathbb{E} e^{iuZ_h} = \phi_0(u) = 1$$

und damit die rechtsseitige Stetigkeit von  $\phi_t(u)$  in  $t$ . Die linksseitige Stetigkeit folgt analog mit

$$|\phi_t(u) - \phi_{t-h}(u)| = |\phi_{t-h}(u)| \left| 1 - \frac{\phi_t(u)}{\phi_{t-h}(u)} \right| \leq |1 - \phi_h(u)|$$

Gleichung (2.5) liefert weiter  $\phi_n(u) = \phi_1(u)^n$ ; dies lässt sich sofort auf die rationalen Zahlen erweitern (denn mit (2.5) ist  $\phi_{\frac{1}{n}}(u)^n = \phi_1(u)$ ) und schließlich mithilfe der oben gezeigten Stetigkeit auf alle reellen Zahlen erweitern, somit also  $\phi_1(u)^t = \phi_t(u)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  (und analog  $\psi_t(u) = t\psi_1(u)$ ). Das bedeutet insbesondere, dass ein Lévy-Prozess  $Z_t$  schon durch die Angabe des charakteristischen Tripels  $(b, C, \nu)$  von  $Z_1$  vollständig charakterisiert wird. Außerdem kann die Stetigkeit von  $\phi_t$  auch verwendet werden, um die Stetigkeit in Wahrscheinlichkeit eines Lévy-Prozesses zu erhalten, denn es ist

$$\mathbb{E} e^{iu\Delta Z_t} = \lim_{h \searrow 0} \mathbb{E} e^{iu(Z_t - Z_{t-h})} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\phi_t(u)}{\phi_{t-h}(u)} = 1 \quad \forall u \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \Delta Z_t = 0 \text{ f.s.} \quad (2.8)$$

Das Lévy-Maß in obigem Satz kann als Maß für Anzahl bzw. Intensität von Sprüngen interpretiert werden. Betrachte dazu den Sprungzählmaßprozeß  $\mathbf{N}$ , definiert durch

$$\mathbf{N}_t(A) := \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s) \quad (2.9)$$

für einen càdlàg stochastischen Prozeß  $X_t$  und Borelsche Mengen  $A$  mit  $0 \notin \text{cl}(A)$  und  $\Delta X_s := X(s) - \lim_{u \nearrow s} X(u)$ .  $\mathbf{N}_t$  zählt also die Sprünge, die der Prozess bis zum Zeitpunkt  $t$  in der Menge  $A$  macht. Dann gilt im Fall, dass  $X$  Lévy-Prozess mit Lévy-Maß  $\nu$  ist,  $\nu(A) = \mathbb{E}(\mathbf{N}_1(A))$ . Insbesondere ist ein Lévy-Prozess  $Z$  stetig genau dann, wenn  $\nu^Z = 0$ , wenn also  $Z$  ein Wiener-Prozess mit Drift ist (vgl. Lévy-Khintchine Zerlegung). Gegeben durch

$$\mu^X(\omega, dt, dx) := \sum_s \mathbb{1}_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \delta_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx) \quad (2.10)$$

ist ein sogenanntes *Zufallsmaß* (siehe dazu Kapitel 3). Wir nennen  $\mu^X$  *Sprungmaß* des Prozesses  $X$ ; wir werden uns ausführlicher mit der Bedeutung des Sprungmaßes in Kapitel 3 beschäftigen. Zunächst wollen wir aber in diesem Kapitel Beispiele für Lévy-Prozesse geben.

## 2.2 Beispiele für Lévy-Prozesse

### 2.2.1 Wiener Prozess

Ein in 0 startender stetiger PIID-Prozess  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  mit  $W_t - W_s \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, t - s)$  heißt Wiener-Prozess oder Brownsche Bewegung. Schon im ersten Kapitel haben wir das Black-Scholes-Modell vorgestellt, bei dem die Dynamik eines Finanzgutes durch einen Wiener Prozess gegeben ist. Jeder Wiener-Prozess ist insbesondere auch Lévy-Prozess (klar nach Definition), mit charakteristischem Tripel  $(0, 1, 0)$ . Die Pfade des Wiener Prozesses sind von unbeschränkter Variation. Für eine explizite Konstruktion des Wiener-Prozesses verweisen wir z.B. auf [19]. s. 567ff.

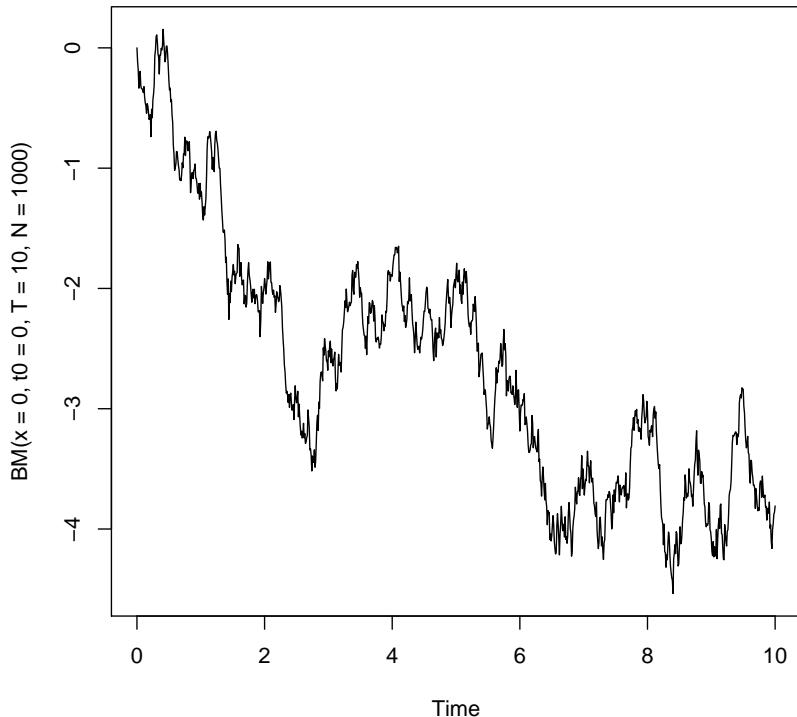


Abbildung 2: Pfad einer Brownschen Bewegung

Natürlich haben wir nicht Lévy-Prozesse eingeführt, um (wieder) nur Wiener Prozesse zu betrachten. Man beachte aber: Jeder stetige Lévy-Prozess ist bereits ein Wiener-Prozess mit Drift (vgl. dafür Kapitel 3), sodass wir für neue Beispiele Prozesse mit Sprüngen betrachten werden. Der bekannteste in dieser Kategorie ist der Poisson-Prozess.

### 2.2.2 Poisson-Prozess

Gegeben sei  $\lambda \geq 0$ . Dann nennen wir einen in 0 startenden càdlàg PIID-Prozess  $N$  mit  $N_t - N_s \stackrel{d}{=} N_{t-s} \stackrel{d}{=} \text{Poi}(\lambda(t-s))$  Poissonprozess der Intensität  $\lambda$ . Wir können einen

solchen Prozess folgendermaßen konstruieren: Sei  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  iid Familie von  $\exp(\lambda)$ -verteilten Zufallsgrößen. Definere den Erneuerungsprozess  $T_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Dann ist der zugehörige Erneuerungszählprozess  $N_t := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{t \geq T_n\}}$  Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$ . Der so definierte Prozess ist Lévy-Prozess mit zugehörigem charakteristischem Tripel  $(0, 0, \lambda\delta_1)$  (man beachte dabei, dass wir  $h = 0$  wählen konnten). Für unsere Zwecke ist ein solcher Poisson-Prozess unzureichend, da er deterministische Sprunghöhe hat. In der finanzmathematischen Modellierung brauchen wir einen flexibleren Prozess. Eine einfache Verallgemeinerung bietet der *zusammengesetzte Poisson-Prozess*, definiert durch  $X_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ ,  $Y_i$  iid Zufallsgrößen, s.u. von  $N$  mit Verteilung  $F$ ,  $N_t$  Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$ . Die  $Y_i$  geben dann die Verteilung der Sprunghöhe vor; die Fourier-Transformierte lässt sich einfach berechnen und lautet

$$\phi(u) = \mathbb{E} \left( e^{iu \sum_{i=1}^{N_t} Y_i} \right) = e^{-\lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iu x}) F(dx)} \quad (2.11)$$

Der Prozess ist von endlicher Variation, wir können daher in der Lévy-Khintchine-Formel  $h = 0$  wählen und erhalten als charakteristisches Tripel  $(0, 0, \lambda F)$ .

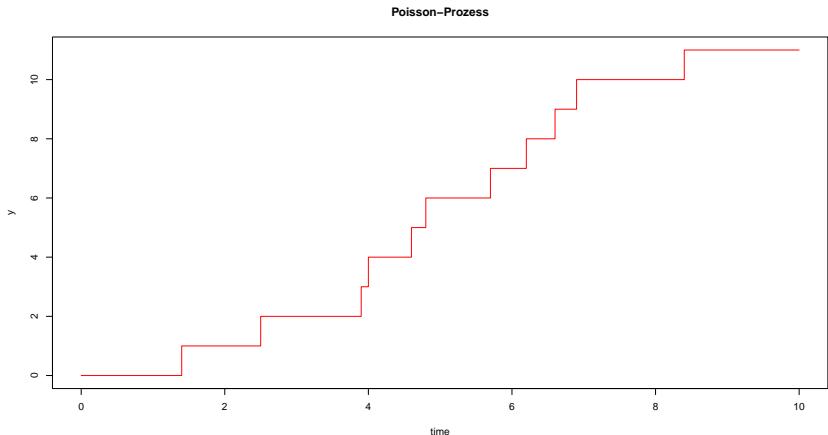


Abbildung 3: Simulation eines Poisson-Prozesses mit Intensität 1

Wir wollen kurz ein Kriterium vorstellen, wann ein Zählprozess schon ein Poisson-Prozess ist. Ein *Zählprozess* ist ein in 0 startender, fast sicher endlicher monoton wachsender stochastischer Prozess mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  und Zuwächsen in  $\{0, 1\}$ . Wir können auch  $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$  schreiben, wobei  $T_n$  die Sprungzeitpunkte von  $N$  sind. Der so definierte Prozess  $N$  ist rechtsseitig stetig.

**Lemma 2.6.** *Sei  $N$  Zählprozess und  $M_t := N_t - \lambda t$  Martingal. Dann ist  $N_t$  Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$ .*

*Beweis.*  $M$  ist offensichtlich càdlàg. Für  $s < t$  und  $\theta > 0$  ist

$$\begin{aligned} e^{\theta N_t} - e^{\theta N_s} &= \sum_{s < u \leq t} e^{\theta N_u} - e^{\theta N_{u-}} = \sum_{s < u \leq t} e^{\theta N_{u-}} (e^{\theta \Delta N_u} - 1) \\ &\stackrel{\Delta N_u \in \{0,1\}}{=} \sum_{s < u \leq t} e^{\theta N_{u-}} (e^\theta - 1) \Delta N_u = (e^\theta - 1) \int_{(s,t]} e^{\theta N_{u-}} dN_u \\ &= (e^\theta - 1) \left( \int_{(s,t]} e^{\theta N_{u-}} dM_u + \int_{(s,t]} \lambda e^{\theta N_u} du \right) \end{aligned}$$

Da der Prozess  $\int_{(s,t]} e^{\theta N_{u-}} dM_u$  in  $t$  ein in 0 startendes Martingal ist ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\theta N_t} - e^{\theta N_s} | \mathcal{F}_s) &= (e^\theta - 1) \mathbb{E} \left( \int_{(s,t]} \lambda e^{\theta N_u} du \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= (e^\theta - 1) \int_{(s,t]} \mathbb{E}(\lambda e^{\theta N_u} | \mathcal{F}_s) du \end{aligned}$$

Setzen wir  $g(t) := \mathbb{E}(e^{\theta N_t} | \mathcal{F}_s)$ , so erfüllt  $g$  somit die Integralgleichung

$$g(t) = g(s) + (e^\theta - 1) \int_{(s,t]} g(u) \lambda du$$

Diese wird gelöst von  $g(t) = e^{\theta N_s} \exp((e^\theta - 1)(t - s)\lambda)$ . Damit ist

$$\mathbb{E}(e^{\theta(N_t - N_s)} | \mathcal{F}_s) = \exp((e^\theta - 1)(t - s)\lambda)$$

Dies zeigt, dass  $N$  PIID ist mit  $\text{Poi}(\lambda(t - s))$ -verteilten Zuwächsen  $\square$

Gelegentlich ist es hilfreich, bei zwei gegebenen Lévy-Prozessen ein einfaches Kriterium zu haben um Unabhängigkeit feststellen zu können. Zumaldest für den Fall, dass einer der Prozesse Poisson-Prozess ist existiert so ein Kriterium.

**Lemma 2.7.** *Sei  $Y$  Poisson-Prozess und  $(X, Y)$  2-dimensionaler Lévy-Prozess. Falls  $X$  und  $Y$  keine gemeinsamen Sprünge aufweisen, falls also  $\Delta X_t \Delta Y_t = 0$  f.a.  $t$  fast sicher ist, so sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig.*

*Beweis.* Da es sich um PIID-Prozesse handelt reicht zu zeigen, dass  $X_1$  und  $Y_1$  s.u. sind. Wir betrachten die Martingale

$$M_t := \frac{e^{iuX_t}}{\mathbb{E} e^{iuX_t}} \tag{2.12}$$

$$M'_t := \frac{e^{iuY_t}}{\mathbb{E} e^{iuY_t}} \tag{2.13}$$

$M$  ist beschränkt und  $M'$  ist von integrierbarer Variation (da  $Y$  ein Poisson-Prozess ist). Wir können daher in der folgenden Rechnung majorisierte Konvergenz anwenden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_1 M'_1) - 1 &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n (M_{i/n} - M_{(i-1)/n}) (M'_{i/n} - M'_{(i-1)/n}) \right) \\ &\xrightarrow{\text{maj. Konv.}} \mathbb{E} \left( \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta M_t \Delta M'_t \right) \xrightarrow{\text{Var.}} 0 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbb{E} e^{iuX_1 + ivY_1} = \mathbb{E} e^{iuX_1} \mathbb{E} e^{ivY_1} \quad \forall u, v$$

und damit die Unabhängigkeit von  $X_1$  und  $Y_1$ .  $\square$

**Anwendungsbeispiel 2.8** (Das Merton Modell). Eine einfache Verallgemeinerung des Black-Scholes-Modells wurde 1976 von Merton vorgestellt. Es sei  $r$  der Zinssatz der risikolosen Anlage und der Aktienpreis  $S$  sei gegeben durch die SDE

$$dS_t = S_{t-} (\gamma dt + \sigma dW_t + (y_t - 1)dN_t) \quad (2.14)$$

Dabei sei  $W$  Standard-Wienerprozess,  $y_t$  seien iid  $\mathcal{N}(\mu, \delta^2)$  verteilt und  $N_t$  sei Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$ .  $W$ ,  $N$  und  $(y_t)$  werden als unabhängig angenommen und die zugrundeliegende Filtration sei die von  $S$  erzeugte,  $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s, s \leq t)$ . Die Vorstellung ist dabei, dass die Aktienkursentwicklung  $dS$  eine stetige Komponente in Form eines Wienerprozesses mit Drift hat, welche die alltäglichen Marktpreisfluktuationen wiedergibt sowie eine Sprungkomponente, welche plötzliche Marktreaktionen modelliert, etwa aufgrund unerwarteter politischer oder ökonomischer Neuigkeiten. Wir lösen diese SDE mithilfe der Ito-Formel unter Benutzung von  $\Delta S_t = S_{t-}(y_t - 1)\Delta N_t$ :

$$\begin{aligned} d \log S_t &= S_{t-}^{-1} dS_t - \frac{1}{2} S_{t-}^{-2} d[S_t^c] + d \sum_{0 < s \leq t} \left( \log(S_s) - \log(S_{s-}) - \frac{\Delta S_s}{S_{s-}} \right) \\ &= \gamma dt - \frac{\sigma^2}{2} dt + \sigma dW_t + (y_t - 1)dN_t + d \sum_{0 < s \leq t} \left( \log \left( \frac{S_s}{S_{s-}} \right) - \frac{\Delta S_s}{S_{s-}} \right) \\ &= \left( \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t + (y_t - 1)dN_t \\ &\quad + d \sum_{0 < s \leq t} (\log(1 + (y_s - 1)\Delta N_s) - ((y_s - 1)\Delta N_s)) \\ &= \left( \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t + d \sum_{0 < s \leq t} \log(1 + (y_s - 1)\Delta N_s) \\ &= \left( \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t + d \sum_{0 < s \leq t} \log(y_s) \mathbb{1}_{\{\Delta N_s = 1\}} \\ &= \left( \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t + d \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \end{aligned}$$

wobei  $Y_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$  von  $W$  und  $N$  unabhängige Zufallsgrößen sind. Damit lässt sich das Mertonmodell auch folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{X_t} \\ X_t &= \left( \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \end{aligned}$$

Im Unterschied zum BS-Modell ist hier also eine Sprungkomponente in Form eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses zusätzlich zu dem unterliegenden stetigen Prozess  $W$  hinzugekommen. Die Logreturns sind im Mertonmodell nicht länger normalverteilt; es gilt aber

$$\begin{aligned} P\left(\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \in \cdot\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N_t = i) P\left(\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \in \cdot \mid N_t = i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} \mathcal{N}\left(\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2\right) \end{aligned}$$

Die Momente von  $s_t := \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)t^{-1} = \frac{X_t}{t}$  lauten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}s_t &= \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda\mu\right) \\ \text{var}(s_t) &= \sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2 \\ \text{skew}(s_t) &= \frac{\lambda(3\delta^2\mu + \mu^3)}{(\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2)^{3/2}} \\ \text{kurt}(s_t) &= 3 + \frac{\lambda(3\delta^4 + 6\mu^2\delta^2 + \mu^4)}{(\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2)^2} \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich eine negative Schiefe für  $\mu < 0$  und eine Kurtosis  $> 3$  für  $\lambda > 0$ ; dies stellt eine klare Näherung an empirische Daten im Vergleich zum BS-Modell ohne Sprünge dar, vgl. Kapitel 1. Für die Fourier-Transformierte des Prozesses  $X_t$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(u) &= \mathbb{E} e^{iuX_t} = e^{iu(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2t} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N_t=n\}} e^{iu\sum_{i=1}^n Y_i} \\ &= e^{iu(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2t} \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) e^{n\left(i\mu u - \frac{\delta^2 u^2}{2}\right)} \\ &= e^{iu(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\left(\lambda t e^{i\mu u - \frac{\delta^2 u^2}{2}}\right)^n}{n!} \\ &= \exp\left(t\left(iu\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{u^2\sigma^2}{2} - \lambda + \lambda e^{i\mu u - \frac{\delta^2 u^2}{2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Damit lautet das charakteristische Tripel von  $X$

$$\begin{aligned} b &= \gamma - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda \int x h(x) d\mathcal{N}(\mu, \delta^2) \\ C &= \sigma^2 \\ \nu &= \lambda \mathcal{N}(\mu, \delta^2) \end{aligned}$$

### Mertons Ansatz zur Optionsbewertung

Das Merton-Modell ist unvollständig (das Risiko von Sprüngen kann nicht vollständig gehedgt werden). Merton argumentiert dafür, das Sprungrisiko als systematisches

Risiko zu betrachten und deshalb beim Maßwechsel nur die Drift des Wienerprozesses zu verändern, nicht aber Intensität des Poissonprozesses oder die Verteilung der Sprunghöhen. Damit ergibt sich ein äMM analog wie im Black-Scholes-Modell. Dafür definieren wir  $\eta := \mathbb{E}(e^{Y_i} - 1) = e^{\mu + \delta^2/2} - 1$  und betrachten die SDE (2.14) in der Form

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-} \left( \gamma dt + \sigma dW_t + d \sum_{i=1}^{N_t} (e^{Y_i} - 1) \right) \\ &= S_{t-} \left( (\gamma + \eta\lambda)dt + \sigma dW_t + d \left( \sum_{i=1}^{N_t} (e^{Y_i} - 1) - \eta\lambda t \right) \right) \end{aligned}$$

wobei  $M_t := \sum_{i=1}^{N_t} (e^{Y_i} - 1) - \lambda\eta t$  Martingal ist, da zusammengesetzte Poisson Prozesse PIID mit endlichem Erwartungswert sind und damit obige Kompensation ein Martingal ergibt. Ändern wir also mittels Girsanov-Transformation die Drift des Wienerprozesses  $W$  auf  $r - \gamma - \lambda\eta$  bzgl. eines neuen Maßes  $P_M^*$ , d.h. sei

$$\frac{dP_M^*}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} := \exp \left( aW_t - \frac{1}{2}a^2t \right), \quad a := \frac{r - \gamma - \lambda\eta}{\sigma}$$

so dass  $\bar{W}_t := W_t - at$  Standardwienerprozess bzgl.  $P_M^*$  ist, dann ist

$$d(e^{-rt} S_t) = S_{t-} (\sigma d\bar{W}_t + dM_t) \quad (2.15)$$

und damit ist  $P_M^*$  tatsächlich äMM.

Liegt nun eine europäische Option mit Auszahlung  $h(S_T)$  vor, so lässt sich der Preis bzgl. des Merton-äMM folgendermaßen errechnen. Ist  $p_t^M$  der Preisprozess bzgl.  $P_M^*$  und  $\tau := T - t$ , so ist

$$\begin{aligned} p_t^M(x) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{P_M^*} (h(S_T) | S_t = x) \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}_{P_M^*} \left( h \left( S_t \exp \left( \left( r - \lambda\eta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma(W_T - W_t) + \sum_{i=N_t+1}^{N_T} Y_i \right) \right) \middle| S_t = x \right) \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}_{P_M^*} \left( h \left( x \exp \left( \left( r - \lambda\eta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma(W_T - W_t) + \sum_{i=N_t+1}^{N_T} Y_i \right) \right) \right) \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}_{P_M^*} \left( h \left( x \exp \left( \left( r - \lambda\eta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma W_{T-t} + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} Y_i \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Wir können den Preis der Option im Merton-Modell ausdrücken als gewichtete Summe von Black-Scholes Preisen. Dazu bedingen wir unter der Anzahl der Sprünge,

die der Aktienkurs macht, und erhalten

$$\begin{aligned}
p_t^M(x) &= e^{-r\tau} \sum_{k \geq 0} P_M^*(N_\tau = k) \mathbb{E}_{P_M^*} \left( h \left( x \exp \left( \left( r - \lambda\eta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^{N_\tau} Y_i \right) \right) \middle| N_\tau = k \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} e^{-r\lambda} e^{-r\tau} \frac{(\tau\lambda)^k}{k!} \mathbb{E}_{P_M^*} \left( h \left( x \exp \left( \left( r - \lambda\eta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + k\mu + \sqrt{\sigma^2\tau + k\delta^2} \mathcal{N}(0, 1) \right) \right) \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} e^{-r\lambda} e^{-r\tau} \frac{(\tau\lambda)^k}{k!} \mathbb{E}_{P_M^*} \left( h \left( x_k \exp \left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma_k^2 \right) \tau + \sigma_k \sqrt{\tau} \mathcal{N}(0, 1) \right) \right) \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} e^{-r\lambda} \frac{(\tau\lambda)^k}{k!} p_t^{BS}(\sigma_k, x_k)
\end{aligned}$$

Dabei sei  $\sigma_k := \sqrt{\sigma^2 + \frac{k\delta^2}{\tau}}$ ,  $x_k := x e^{k\mu - \lambda\eta\tau + \frac{k\delta^2}{2}}$

Für die grafische Visualisierung der obigen Ergebnisse gehen wir zunächst von folgenden Parametern aus: Zinsrate sei  $r = 0.05$ , der Aktienkurs zum Startzeitpunkt  $t$  sei  $S_t = 100$ , wir betrachten einen Call mit strike  $K$  und verbleibender Zeit  $\tau = 0.5$ . Die Sprungparameter im Merton Modell seien  $\lambda = 4$ ,  $\mu = -0.3$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $\delta = 0.1$ . Wir können nun den Parameter  $\sigma$ , der in beiden Modellen vorkommt, gleichsetzen, d.h.  $\sigma_{Merton} = \sigma_{BS}$ . Man mache sich aber bewusst, dass im BS-Modell  $\sigma_{BS}\sqrt{t}$  tatsächlich die Standardabweichung der Logreturns  $\log \frac{S_t}{S_0}$  angibt, während diese im Merton-Modell  $\sqrt{\sigma_{Merton}^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2}$  beträgt. Setzt man also beide  $\sigma$  gleich an, ergeben sich im Merton-Modell höhere Preise aufgrund der zusätzlichen Quelle von Volatilität, den Sprüngen. Daher werden wir in einer zweiten Grafik  $\sigma_{BS} = \sqrt{\sigma_{Merton}^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2}$  betrachten.

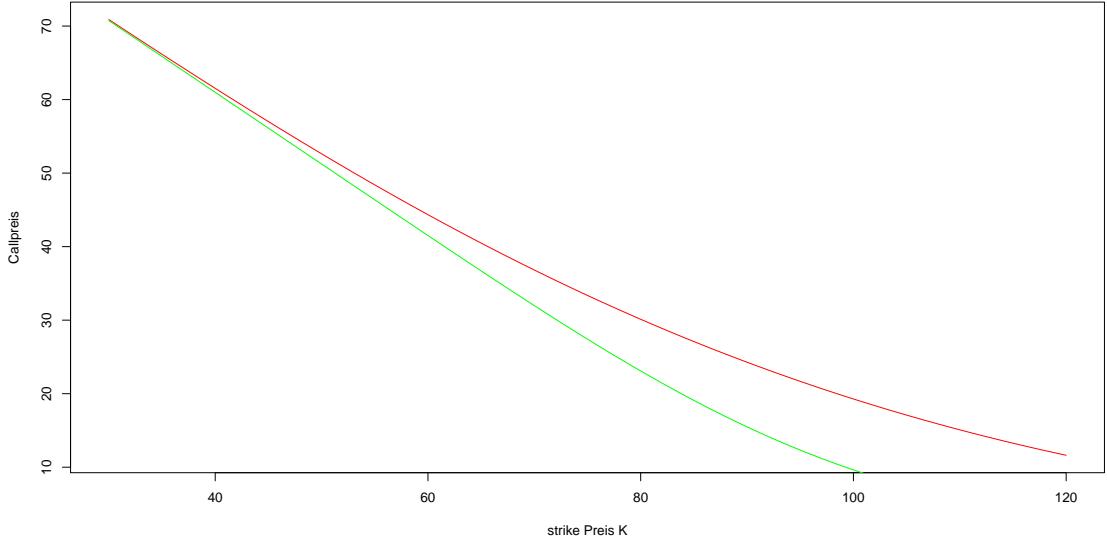


Abbildung 4: Mertonpreise (rot) und Black-Scholes-Preise (grün) einer Calloption mit obigen Parametern und  $\sigma_{BS} = \sigma_{Merton} = 0.3$ . Die Merton-Preise liegen überall über den BS-Preisen.

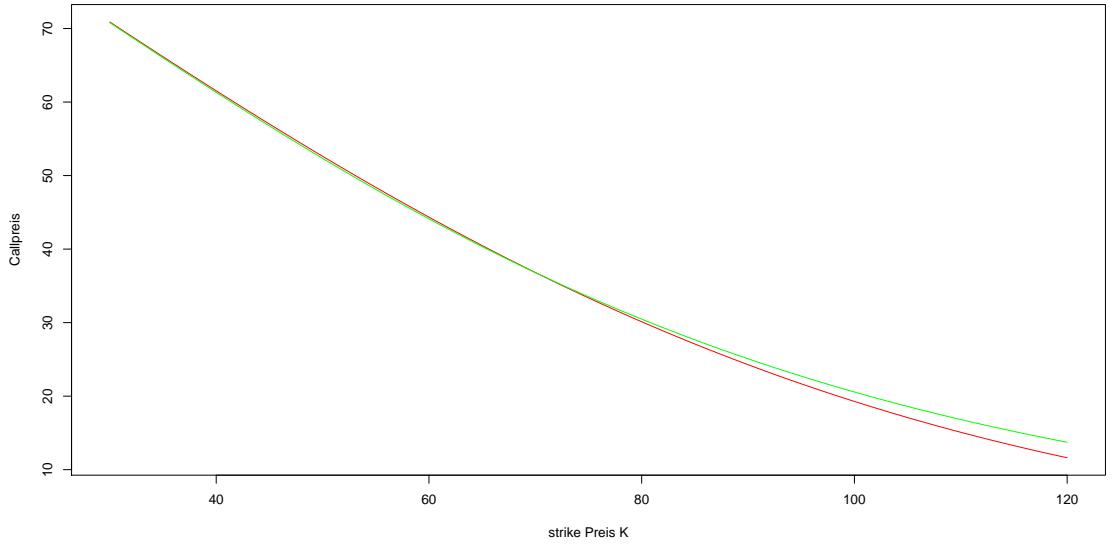


Abbildung 5: Mertonpreise (rot) und Black-Scholes-Preise (grün) einer Calloption mit obigen Parametern und  $\sigma_{BS} = \sqrt{\sigma_{Merton}^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2}$  mit  $\sigma_{Merton} = 0.3$

### 2.2.3 Inverse-Gaussian-Prozess

Sei  $B_t := W_t + \delta t$  Wienerprozess mit Drift  $\delta > 0$  und  $\tau_\gamma := \inf\{t > 0 : B_t > \gamma\}$  der erste Zeitpunkt an dem  $B$  den Wert  $\gamma$  überschreitet.  $\tau_\gamma$  ist dann Stoppzeit bzgl. der von  $W$  erzeugten Filtration und es ist  $B_{\tau_\gamma} = \gamma$  f.s. aufgrund der stetigen Pfade von  $W$ . Weiter gilt aufgrund der starken Markoveigenschaft des Wiener Prozesses

$$\begin{aligned} (B_{\tau_\gamma+t} - \gamma)_{t \geq 0} &\stackrel{d}{=} (B_t)_{t \geq 0} \\ \Rightarrow \tau_t &= \tau_\gamma + \tilde{\tau}_{t-\gamma} \quad \forall 0 \leq \gamma \leq t \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{\tau}_{t-\gamma}$  unabhängige Kopie von  $\tau_{t-\gamma}$  ist. Damit ist  $\tau$  PIID und überdies rechtsseitig stetig (da  $B$  stetig) mit linksseitigen Limiten (da  $\tau$  monoton wachsend ist) und  $\tau_0 = 0$ .  $\tau_\gamma$  ist also unendlich teilbar. Um den charakteristischen Exponenten (und damit das char. Tripel) zu bestimmen, werden wir die Laplace-Transformierte berechnen. Dazu betrachten wir für  $u > 0$  beliebig den Prozess  $Z_t := e^{\alpha B_t - ut} = e^{\alpha W_t - t(u - \alpha\delta)}$ . Wir wählen dabei  $\alpha$  so, dass der Prozess eine geometrische Brownsche Bewegung ist und damit ein Martingal, d.h. sei  $\alpha = \sqrt{\delta^2 + 2u} - \delta$  (dann ist  $Z_t = e^{\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$ ). Anwendung von Optional Sampling auf die beschränkte Stoppzeit  $\tau_\gamma \wedge t$  ergibt

$$1 = \mathbb{E} Z_0 = \mathbb{E} Z_{\tau_\gamma \wedge t} = \mathbb{E} e^{\alpha B_{\tau_\gamma \wedge t} - u(\tau_\gamma \wedge t)}$$

Da  $B$  stetig ist, ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha B_{\tau_\gamma \wedge t} - u(\tau_\gamma \wedge t)) = \alpha\gamma - u\tau_\gamma \text{ f.s.}$$

Wir können beide Gleichungen kombinieren, indem wir mittels majorisierter Konvergenz Erwartungswert und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{\tau_\gamma \wedge t} \right) = e^{\alpha\gamma} \mathbb{E} e^{-u\tau_\gamma} \\ &\Rightarrow \mathbb{E} e^{-u\tau_\gamma} = e^{-\gamma(\sqrt{\delta^2+2u}-\delta)} \end{aligned}$$

und damit lautet das char. Tripel

$$\begin{aligned} b &= 2 \frac{\gamma}{\delta} \Phi(b) \\ C &= 0 \\ \nu(dx) &= \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{-\delta^2 x}{2}} dx \end{aligned}$$

Aus der Laplace-Transformierten können wir auch eine Dichte von  $\tau_\gamma$  errechnen; diese lautet  $f_{\tau_\gamma}(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(\gamma-\delta x)^2}{2x}}$ . Wir bezeichnen den Lévy-Prozess  $X$  mit  $X_1 \stackrel{d}{=} \tau_\gamma$  als *Inverse-Gaussian* Prozess mit Parametern  $\gamma$  und  $\delta$ . Der Name ergibt sich aus der Definition von  $\tau_\gamma$  als Inverses des Pfades eines Gausschen Prozesses.

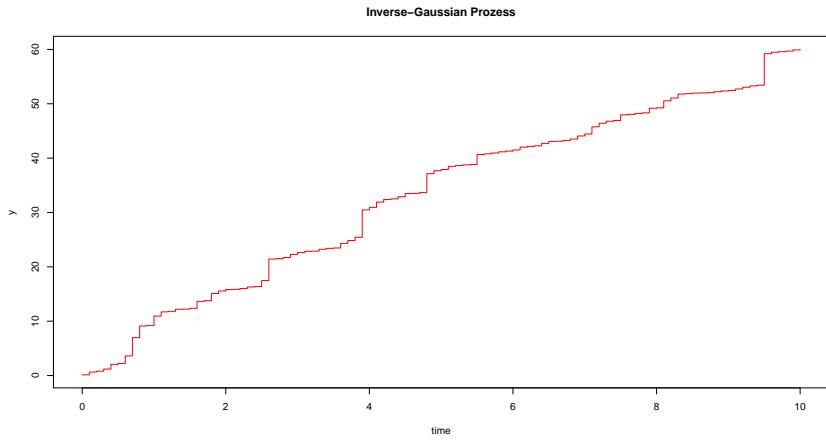


Abbildung 6: Pfad eines  $IG(5, 0.2)$ -Prozesses

#### 2.2.4 Gamma-Prozess

Wir betrachten die Gamma-Verteilung mit Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ , gegeben durch die Lebesgue-Dichte

$$g(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

Die Gamma-Verteilung ist unendlich teilbar, denn es ist

$$\phi_{\Gamma(\alpha, \beta)}(u) = \left(1 - \frac{i u}{\beta}\right)^{-\alpha} = \left(\left(1 - \frac{i u}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{n}}\right)^n = (\phi_{\Gamma(\alpha/n, \beta)}(u))^n$$

Für den zugehörigen Lévy-Prozess  $X_t$  ist  $X_t \sim \Gamma(\alpha t, \beta)$  mit char. Tripel

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{\beta}(1 - \exp(-\beta)) \\ C &= 0 \\ \nu &= \alpha \exp(-\beta x) x^{-1} \mathbb{1}_{(0, \infty)} dx \end{aligned}$$

Dieser Prozess ist ein sogenannter Subordinator. Das ist ein nichtnegativer Lévy-Prozess, bzw. äquivalent dazu: ein monoton wachsender Lévy-Prozess. Er hat Pfade von beschränkter Variation, aber von *unendlicher Aktivität*. So nennen wir einen Lévy-Prozess, der in jedem Intervall von positiver Länge unendlich viele Sprünge aufweist.

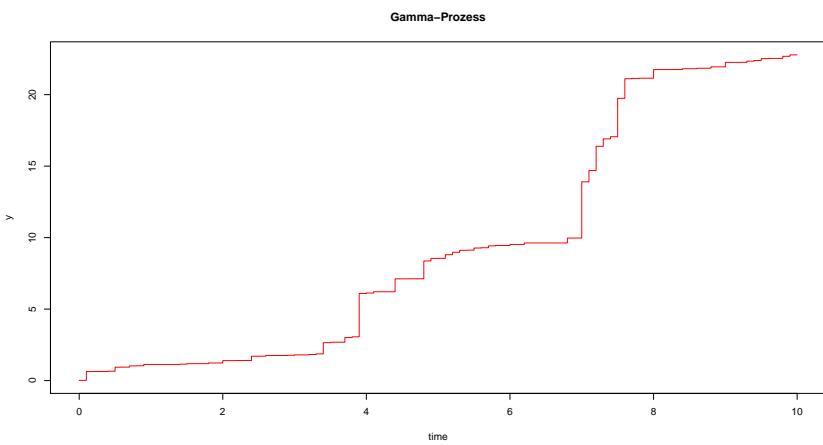


Abbildung 7: Gammaprozess mit  $\alpha = 2, \beta = 1$

**Anwendungsbeispiel 2.9** (Das variance-gamma Modell). Im Folgenden betrachten wir ein Finanzmarktmodell mit Zeithorizont  $[0, T]$  und konstanter Zinsrate  $r$ ; es sei überdies eine Brownsche Bewegung mit Drift  $\theta$  gegeben, d.h. sei  $B_t := B_t^\theta := \theta t + \sigma W_t$  mit Standardwienerprozess  $W$ . Ausserdem sei  $X_t := X_t^{\mu, \delta} \text{ Gamma}\left(\frac{\mu^2}{\delta}, \frac{\mu}{\delta}\right)$ -Prozess (die Parameter wurden so gewählt, dass  $\mathbb{E} X_t = \gamma$ ,  $\text{var } X_t = \delta$ ). Wir modellieren die Dynamik eines assets  $Z$  durch

$$Z_t = B_{X_t} = \theta X_t + \sigma W_{X_t} \quad (2.16)$$

Dies ist ein charakteristisches Beispiel für eine Klasse von Modellen für Finanzgüter, bei denen ein Lévy-Prozess durch einen nichtnegativen zweiten Lévy-Prozess zeitlich skaliert wird. Die Vorstellung ist dabei, dass es am Markt ruhige Zeiten mit wenig Kursänderungen gibt sowie hektische Zeiten mit raschen Kursänderungen. Der Prozess  $X$  modelliert dabei das (zufällige) Maß an „Hektik“, das am Markt vorliegt.

Es ist überdies exemplarisch für eine etwas andere Modellierungsphilosophie als

etwa beim Merton-Modell: Dort wurde die stetige Aktienpreisentwicklung des BS-Modells lediglich mit gelegentlich auftretenden Sprüngen ergänzt (man spricht von einem *jump diffusion model* mit *endlicher Aktivität*). Im Variance-Gamma-Modell verschwindet die Gauss-Komponente; ein reiner Sprungprozess modelliert die Kursentwicklung. Dieser hat unendliche Aktivität- es sind also viele kleine Sprünge, die den Aktienkurs ausmachen (wie oben bereits vermerkt spricht man von einem *infinite activity model*). In diesem Fall ist eine Diffusionskomponente nicht mehr nötig, da die zahlreichen Sprünge von marginaler Größe bereits das „Alltagsgeschäft“ am Aktienmarkt abbilden können.

Die Dichte von  $Z_t$  bzgl. des Lebesgue-Maßes ergibt sich durch Bedingen unter  $X_t$  und anschließendem Ausintegrieren zu

$$f_{Z_t}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{(x-\theta u)^2}{2\sigma^2 u}\right) \frac{u^{\frac{t}{\delta}-1} \exp\left(-\frac{u}{\delta}\right)}{\delta^{t/\delta} \Gamma\left(\frac{t}{\delta}\right)} du$$

Dann ist  $Z_t$  wieder Lévy-Prozess mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E} e^{iuZ_t} = (1 - i\theta\delta u + (\sigma^2\delta/2)u^2)^{-t/\delta}$$

Die Momente von  $Z$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_t &= \theta t \\ \mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E} Z_t)^2 &= (\theta^2\delta + \sigma^2)t \\ \mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E} Z_t)^3 &= (2\theta^3\delta^2 + 3\sigma^2\theta\delta)t \\ \mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E} Z_t)^4 &= (3\sigma^4\delta + 12\sigma^2\theta^2\delta^2 + 6\theta^4\delta^3)t + (3\sigma^4 + 6\sigma^2\theta^2\delta + 3\theta^4\delta^2)t^2 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das exp-Lévy-Modell, gegeben durch das Finanzgut  $S$ ,

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp(mt + Z_t - \kappa t) \\ \kappa &= \kappa_{Z_1}(1) = \log \mathbb{E} e^{Z_1} = -\frac{1}{\delta} \log(1 - \theta\delta - \sigma^2\delta/2) \end{aligned}$$

bzgl. des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$ . Setzen wir die Existenz eines äMM  $P^*$  voraus, so muss bzgl. diesem  $S$  die Dynamik

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp(rt + Z_t - \kappa^* t) \\ \kappa^* &= \kappa_{Z_1}(1) = \log \mathbb{E}_* e^{Z_1} = -\frac{1}{\delta^*} \log(1 - \theta^*\delta^* - \sigma^{2,*}\delta^*/2) \end{aligned}$$

haben, vgl. dazu auch die spätere Proposition 4.3.

**Theorem 2.10.** Der Preis eines europäischen Calls im VG-Modell mit obigen Parametern und Restlaufzeit  $t$  bzgl. eines äMM  $P^*$  lässt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} p_0(S_0, K, t) &= S_0 \Psi \left( d \sqrt{\frac{1-c_1}{\delta}}, (\alpha+s) \sqrt{\frac{\delta}{1-c_1}}, \frac{t}{\delta} \right) \\ &\quad - K \exp(-rt) \Psi \left( d \sqrt{\frac{1-c_2}{\delta}}, (\alpha+s) \sqrt{\frac{\delta}{1-c_2}}, \frac{t}{\delta} \right) \end{aligned}$$

mit Konstanten

$$\begin{aligned}
d &:= \frac{1}{s} \left( \log \left( \frac{S_0}{K} \right) + rt + \frac{t}{\delta} \log \left( \frac{1 - c_1}{1 - c_2} \right) \right) \\
\zeta &:= -\frac{\theta}{\sigma^2} \\
s &:= \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \frac{\theta^2}{\sigma^2} \frac{\delta}{2}}} \\
\alpha &:= \zeta s \\
c_1 &:= \frac{\delta(\alpha + s)^2}{2} \quad c_2 := \frac{\delta\alpha^2}{2}
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\Psi(a, b, \gamma) := \int_0^\infty \Phi \left( \frac{a}{\sqrt{u}} + b\sqrt{u} \right) \frac{u^{\gamma-1} e^{-u}}{\Gamma(\gamma)} du$ . Die Funktion  $\Psi$  ist in geschlossener Form<sup>3</sup> bekannt, vgl. [8]

*Beweis.* Es ist  $p_0(S_0, K, t) = e^{-rt} \mathbb{E}_*(S_t - k)^+$ . Bedingen wir zunächst unter  $X_t = g$ , so ergibt sich ein Aktienpreis der Form  $S_t^{(X_t=g)} = S_0 e^{rt} e^{W_g + \theta g - \kappa t}$ . Für den Callpreis ist dann

$$\begin{aligned}
p_0(S_0, K, t)^{(X_t=g)} &= S_0 \left( 1 - \frac{\delta(\alpha + s)^2}{2} \right)^{t/\delta} \exp \left( \frac{(\alpha + s)^2 g}{2} \right) \Phi \left( \frac{d}{\sqrt{g}} + (\alpha + s)\sqrt{g} \right) \\
&\quad - K e^{-rt} \left( 1 - \frac{\delta\alpha^2}{2} \right)^{t/\delta} \exp \left( \frac{\alpha^2 g}{2} \right) \Phi \left( \frac{d}{\sqrt{g}} + \alpha\sqrt{g} \right)
\end{aligned}$$

wie eine Rechnung analog zum BS-Modell zeigt. Durch Ausintegrieren ergibt sich also der unbedingte Callpreis zu

$$p_0(S_0, K, t) = \int_0^\infty p_0(S_0, K, t)^{(X_t=g)} \frac{g^{t/\delta-1} e^{-g/\delta}}{\delta^{t/\delta} \Gamma(t/\delta)} dg$$

Nach einer Variablentransformation ( $y = g/\delta$ ) und Einsetzen des bedingten Preises erhalten wir

$$p_0(S_0; K, t) = \int_0^\infty \left( S_0 (1 - c_1)^\gamma e^{c_1 y} \Phi \left( \frac{d}{\sqrt{\delta y}} + (\alpha + s)\sqrt{\delta y} \right) \right) \frac{y^{\gamma-1} e^{-y}}{\Gamma(\gamma)} dy \quad (2.17)$$

$$- K e^{-rt} (1 - c_2)^\gamma e^{c_2 y} \Phi \left( \frac{d}{\sqrt{\delta y}} + \alpha\sqrt{\delta y} \right) \frac{y^{\gamma-1} e^{-y}}{\Gamma(\gamma)} dy \quad (2.18)$$

mit  $\gamma = t/\delta$ . □

Setzen wir

$$\Psi(a, b, \gamma) := \int_0^\infty \Phi \left( \frac{a}{\sqrt{u}} + b\sqrt{u} \right) \frac{u^{\gamma-1} e^{-u}}{\Gamma(\gamma)} du$$

---

<sup>3</sup>Wie in [8] erweitern wir dabei die üblichen elementaren Funktionen um die Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung, da diese innerhalb der Finanzmathematik numerisch sehr gut erfasst ist und in den Bewertungsformeln omnipräsent

so ergibt sich (mit der Variablentransformation  $u = (1 - c)\gamma$  für  $c = c_1$  bzw.  $c = c_2$ )

$$p_0(S_0; K, t) = S_0 \Psi \left( d \sqrt{\frac{1 - c_1}{\delta}}, (\alpha + s) \sqrt{\frac{\delta}{1 - c_1}}, \gamma \right) - K e^{-rt} \Psi \left( d \sqrt{\frac{1 - c_2}{\delta}}, \alpha \sqrt{\frac{\delta}{1 - c_2}}, \gamma \right)$$

Die Herleitung eines im obigen Sinne geschlossenen Ausdrucks für  $\Psi$  ist mit einigem Aufwand verbunden; wir verweisen auf [8].

### 3 Einbettung in die Theorie der Semimartingale und stochastische Analysis mit Lévy-Prozessen

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass Lévy-Prozesse Semimartingale sind (was stochastische Analysis ermöglicht) und außerdem Lévy-Prozesse in einfachere Bestandteile zerlegen. Dies geschieht mithilfe der *Lévy-Ito Zerlegung*. Dazu führen wir zunächst einige Begriffe ein, welche bekannte Konzepte verallgemeinern und für den Beweis der Lévy-Ito-Zerlegung benötigt werden.

**Definition 3.1** (Zufallsmaß). Seien  $(X, \mathcal{C})$  und  $(Y, \mathcal{D})$  messbare Räume. Dann nennen wir eine Abbildung  $\mu : X \times \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$  Zufallsmaß, falls

- i) Für alle  $D \in \mathcal{D}$  ist  $x \mapsto \mu(x, D)$   $\mathcal{C}$ -messbar
- ii) Für alle  $x \in X$  ist  $D \mapsto \mu(x, D)$  ein Maß auf  $(Y, \mathcal{D})$

Wir werden nur Zufallsmaße auf  $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}_+ \times \mathcal{E})$  betrachten, wobei  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_+^n)$ . Wir haben bereits das für uns wichtigste Beispiel eines Zufallsmaßes gesehen: das Sprungmaß aus Gleichung (2.10). Wir führen die Bezeichnungen

$$\tilde{\Omega} := \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \otimes \mathcal{B}^d \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^d \quad (3.3)$$

ein und nennen messbare Funktionen bzgl. dieser  $\sigma$ -Algebren ebenfalls optional bzw. previsibel. Weiter definieren wir für eine optionale Funktion  $H : (\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Zufallsmaß  $\mu$  den Integralprozess

$$H * \mu_t(\omega) = \begin{cases} \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} H(\omega, s, x) \mu(\omega, ds, dx) & \text{falls } \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} |H(\omega, s, x)| \mu(\omega, ds, dx) < \infty \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.4)$$

Wir nennen einen adaptierten càdlàg Prozess  $X$  *Semimartingal*, wenn er eine Zerlegung der Form  $X_t = X_0 + V_t + M_t$  zulässt mit  $V_t \in \mathcal{FV}$  adaptiert und càdlàg,  $M$  lokales Martingal,  $M_0 = V_0 = 0$ ,  $X_0$   $\mathcal{F}_0$ -messbar. Ein *spezielles Semimartingal* ist ein solches, bei dem obige Zerlegung mit einem previsiblen  $V$  möglich ist. In diesem

Fall ist die Zerlegung eindeutig. Ein Semimartingal mit beschränkten Sprüngen ist speziell, siehe z.B. [19] (Seite 258, Example 4.47). Sind die aufsummierten großen Sprünge des Prozesses beschränkt, d.h. ist  $\sum_{s \leq t} \Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s| > 1\}}$  für alle  $t$  eine konvergente Reihe, so erhalten wir die eindeutige Zerlegung eines Semimartingales

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + M_t^c + M_t^d + V_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s| > 1\}} \\ &= X_0 + M_t^c + M_t^d + V_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{1}_{\{|x| > 1\}} \mu^X(ds, dx) \end{aligned}$$

wobei  $M^c$  bzw.  $M^d$  der stetige bzw. rein unstetige Anteil eines Martingals  $M$  sind.

Für einen Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel  $(b, C, \nu)$  ist

$$\begin{aligned} V_t &= bt \\ M_t^c &= c^{\frac{1}{2}} W_t \end{aligned}$$

und es stellt sich heraus, dass obige Zerlegung immer eindeutig möglich ist. Um dies zu sehen, muss man sich zunächst klarmachen dass Lévy-Prozesse tatsächlich Semimartingale sind. Ist  $Z$  Lévy-Prozess mit  $\mathbb{E}|Z_t| < \infty$ , so ist dies aufgrund der PIID sofort gegeben, denn es ist

$$\mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E}(Z_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((Z_t - Z_s) + Z_s|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(Z_t) = Z_s - \mathbb{E}(Z_s)$$

Im Allgemeinen haben Lévy-Prozesse jedoch keinen endlichen Erwartungswert. Betrachte etwa einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Sprüngen mit unendlichem Erwartungswert. Um zu zeigen, dass auch solche Lévy-Prozesse Semimartingale sind und um einen tieferen Einblick in den Aufbau solcher Prozesse zu erhalten werden wir im Folgenden die *Lévy-Ito-Zerlegung* beweisen. Für deren Beweis werden wir zuerst einige Begriffe einführen müssen. Wir verallgemeinern dazu zunächst den Begriff eines Poisson-Prozesses.

**Definition 3.2** (Poisson-Zufallsmaß). Sei  $(S, \mathcal{S}, \lambda)$   $\sigma$ -endl. Maßraum,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  W-Raum. Wir nennen ein Zufallsmaß  $\mu : \Omega \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  Poisson-Zufallsmaß (kurz: PZM) mit Intensität  $\lambda$ , wenn  $\mu$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

- i) Sind  $A_1, \dots, A_n, A_i \in \mathcal{S}$  für alle  $i$ , paarweise disjunkt, so sind  $\mu(\cdot, A_1), \dots, \mu(\cdot, A_n)$  stochastisch unabhängig
- ii) Für alle  $A \in \mathcal{S}$  ist  $\mu(\cdot, A) \sim \text{Poi}(\lambda(A))$ .

Dabei sei  $\text{Poi}(0) := \delta_0$ ,  $\text{Poi}(\infty) := \delta_\infty$ . Wenn der Zusammenhang klar ist, schreiben wir auch kurz  $\mu(A)$  für die Zufallvariable  $\mu(\cdot, A)$ .

Wir können ein PZM konstruieren, indem wir zunächst  $\lambda$  als endliches Maß mit Gesamtmasse  $c$  annehmen. Dann seien  $\xi_1, \xi_2, \dots$  iid Zufallsgrößen mit Verteilung  $c^{-1}\lambda$  und  $L$  von  $(\xi_i)$  unabhängige  $\text{Poi}(c)$ -verteilte Zufallsgröße. Setzen wir  $\mu(\omega, A) := \sum_{j=1}^L \delta_{\xi_j(\omega)}(A)$  so ist  $\mu$  Poisson-Maß mit Intensität  $\lambda$ . Für ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\lambda$  sei  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  Partition von  $X$  mit  $\lambda(A_i) < \infty$  f.a.  $i$ . Seien  $\mu_i, i = 1, \dots, n$  unabhängige Poisson-Maße mit Intensität  $\mathbb{1}_{A_i} \lambda$  und  $\mu := \sum_i \mu_i$ . Dann ist  $\mu$  Poisson-Maß mit Intensität  $\lambda$ .

**Lemma 3.3.** Sei  $\mu$  Poisson-Zufallsmaß auf  $(S, \mathcal{S}, \lambda)$  und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  messbare Funktion. Dann gilt:

i)  $X := \int f(x)d\mu(x)$  ist fast sicher absolut konvergent genau dann, wenn

$$(*) \quad \int_S (1 \wedge |f(x)|) \lambda(dx) < \infty$$

gilt.

ii) Wenn  $(*)$  erfüllt ist, dann gilt  $\mathbb{E} e^{i\beta X} = \exp\left(-\int_S (1 - e^{i\beta f(x)}) d\lambda(x)\right)$  für alle  $\beta \in \mathbb{R}$

iii) Falls  $\int_S |f(x)| d\lambda(x) < \infty$ , so ist  $\mathbb{E}(X) = \int_S f(x)d\lambda(x)$ . Ist sogar  $\int_S f(x)^2 d\lambda(x) < \infty$ , so gilt ausserdem  $\mathbb{E}X^2 = \int_S f(x)^2 d\lambda(x) + \left(\int_S f(x)d\lambda(x)\right)^2$ .

*Beweis.* Wir beweisen die obigen Aussagen mittels eines Funktionserweiterungsarguments. Sei also  $f$  zunächst elementare Funktion, d.h.  $f(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $(A_i)$  paarweise disjunkte Mengen in  $\mathcal{S}$  mit  $\lambda(A_i) < \infty$ . Dann ist  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$  f.s. endlich (da  $\mu(A_i) \sim \text{Poi}(\lambda(A_i))$ ). Sei  $\theta > 0$  beliebig; dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\theta X} &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} (e^{-\theta \alpha_i \mu(A_i)}) = \prod_{i=1}^n \exp\left(-(1 - e^{-\theta \alpha_i}) \lambda(A_i)\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\theta \alpha_i}) \lambda(A_i)\right) \\ &= \exp\left(-\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x)\right) \end{aligned}$$

Sei jetzt  $f \geq 0$  messbar, dann existiert eine monoton wachsende Folge  $(f_n)$  elementarer Funktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu(x) \underset{\text{mon. Konv.}}{=} \int f(x) d\mu(x) = X$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\theta X} &= \mathbb{E} \left( \exp\left(-\theta \int f(x) d\mu(x)\right) \right) \underset{\text{maj. Konv.}}{=} \lim_n \mathbb{E} \left( \exp\left(-\theta \int f_n(x) d\mu(x)\right) \right) \\ &= \lim_n \exp\left(-\int_S (1 - e^{-\theta f_n(x)}) d\lambda(x)\right) = \exp\left(-\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x)\right) \end{aligned}$$

Ist  $X = \infty$  f.s., so ergibt sich aus obiger Rechnung  $\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x) = \infty$  für alle  $\theta > 0$ . Ist andernfalls  $X < \infty$  mit positiver Wahrscheinlichkeit, so muss  $\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x) < \infty$  für alle  $\theta > 0$  gelten. Genauer gilt in dem Fall, dass obiges Integral für alle  $\theta > 0$  endlich ist, schon die fast sichere Endlichkeit von  $X$ . Um dies zu sehen stellen wir zunächst mittels majorisierter Konvergenz

$$\lim_{\theta \searrow 0} \int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x) = 0 \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta \searrow 0} \exp\left(\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x)\right) = 1 \tag{3.6}$$

fest. Daraus folgt aufgrund der obigen Rechnung  $P(X < \infty) = 1$ . Insgesamt haben wir also  $X < \infty$  gdw.  $\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) d\lambda(x) < \infty$  f.a.  $\theta > 0$ . Dies gilt genau dann, wenn  $\int_S (1 \wedge f(x)) d\lambda(x) < \infty$ . Ersetzen wir in den vorangegangenen Rechnungen  $\theta$  durch  $\theta - i\beta$  ergibt sich mit  $\theta \searrow 0$  die Aussage *ii)* für nichtnegative  $f$ . Sei jetzt  $f$  beliebige messbare Funktion mit Positiv- und Negativanteil  $f^+$  bzw.  $f^-$ . Wir schreiben  $X = X_+ - X_-$  mit

$$X_+ := \int_S f(x) d\mu_+(x), \quad \mu_+ := \mu(\cdot \cap \{x \in S : f(x) \geq 0\}) \quad (3.7)$$

$$X_- := \int_S f(x) d\mu_-(x), \quad \mu_- := \mu(\cdot \cap \{x \in S : f(x) < 0\}) \quad (3.8)$$

Dann sind  $\mu_+$ ,  $\mu_-$  PZM mit Intensität  $\lambda(\cdot \cap \{f \geq 0\})$  bzw.  $\lambda(\cdot \cap \{f < 0\})$ ; da sie stochastisch unabhängig sind gilt dies auch für  $X_+$ ,  $X_-$ . Damit konvergiert  $X$  f.s. absolut gdw.  $X_+$ ,  $X_-$  f.s. absolut konvergieren. Beachten wir das zuvor Gezeigte ergibt sich dies gdw.  $\int_S (1 \wedge |f(x)|) d\lambda(x) < \infty$ . Zu *ii)*:  $X_+$ ,  $X_-$  sind stochastisch unabhängig; in Verbindung mit Aussage *i)* ergibt sich für alle  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i\theta X} &= \mathbb{E} e^{i\theta X_+} \mathbb{E} e^{i\theta X_-} \\ &= \exp \left( - \int_{\{f > 0\}} (1 - e^{i\theta f^+(x)}) d\lambda(x) \right) \cdot \exp \left( - \int_{\{f < 0\}} (1 - e^{i\theta f^-(x)}) d\lambda(x) \right) \\ &= \exp \left( - \int_S (1 - e^{i\theta f(x)}) d\lambda(x) \right) \end{aligned}$$

Der Beweis zu *iii)* lässt sich genauso durchführen mittels eines Funktionserweiterungsargumentes. Alternativ könnten wir unter etwas stärkeren Voraussetzungen [1], Satz 41.3 s.208 benutzen, der uns  $\phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E} X^k e^{itX}$  liefert für  $\phi(t) = \mathbb{E} e^{itX}$ ,  $k = 1$  bzw.  $k = 2$ . Damit folgt Aussage *iii)* dann sofort aus *ii)*.  $\square$

**Definition 3.4** (Poisson Punktprozess). Sei  $g$  lokal integrierbar auf  $D \subset \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$  (oder  $\nu$  lokals endliches Maß). Wir nennen einen Prozess  $(\Delta_t)_{t \geq 0}$  in  $D \cup \{0\}$  Poisson Punktprozess mit Intensität  $g$  (bzw. Intensitätsmaß  $\nu$ ), wenn

$$\mu(\omega, (a, b] \times A) := \#\{t \in (a, b] : \Delta_t(\omega) \in A\}, \quad 0 \leq a < b, \quad A \subset D \quad (3.9)$$

PZM mit Intensität  $\Lambda((a, b] \times A) = (b-a) \int_A g(x) dx$  (bzw.  $\Lambda((a, b] \times A) = (b-a)\nu(A)$ ) ist.

Einen Poisson-Punkt-Prozess können wir folgendermaßen erhalten: Seien  $\xi_1, \xi_2, \dots$  iid Zufallsgrößen mit Verteilung  $\nu$  auf  $\mathbb{R}^d - \{0\}$ ,  $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$  sowie  $N_t$  von  $(\xi_i)$  unabhängiger Poisson-Prozess mit Parameter  $c > 0$ . Dann ist

$$\Delta_t := \begin{cases} \xi_i, & \text{falls } N_t = n > N_{t-} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.10)$$

Poisson-Punktprozess mit charakteristischem Maß  $c\nu$ . Damit sieht man

$$S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s \quad (3.11)$$

was dem oben eingeführten zusammengesetzten Poisson-Prozess entspricht. Wir betrachten im folgenden Lemma ein ähnliches, etwas anders formuliertes Resultat.

**Lemma 3.5.** Sei  $\lambda$  Maß auf  $\mathbb{R} - \{0\}$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $0 < \lambda(B) < \infty$  und  $\mu$  PZM auf dem Raum

$$(S, \mathcal{S}, \eta) := ([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{|[0, \infty)} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \lambda(dx))$$

Dann ist  $X_t := \int_0^t \int_B x \mu(ds, dx)$ ,  $t \geq 0$  zusammengesetzter Poisson Prozess mit Sprungintensität  $\lambda(B)$  und Sprungverteilung  $\lambda(B)^{-1} \lambda(\cdot \cap B)$ .

*Beweis.* Aus der Konstruktion des PZM ergibt sich, dass  $X_t$  endliche Summe ist für alle  $t > 0$  da  $\lambda(B) < \infty$ , und damit càdlàg. Weiter sind die Zuwächse von  $X$  s.u.; denn es ist  $X_t - X_s = \int_{(s,t]} \int_B x \mu(ds, dx)$  und dieser Ausdruck ist s.u. von  $(X_u)_{u \leq s}$  da  $\mu$  PZM ist. Nach Lemma 3.3 ii) ist

$$\mathbb{E} e^{i\theta X_t} = e^{-t \int_B (1 - e^{i\theta x}) \lambda(dx)} \quad (3.12)$$

Dies in Verbindung mit den unabhängigen Zuwächsen von  $X$  ergibt

$$\mathbb{E}(e^{i\theta(X_t - X_s)}) = \frac{\mathbb{E} e^{i\theta X_t}}{\mathbb{E} e^{i\theta X_s}} \quad (3.13)$$

$$= e^{-(t-s) \int_B (1 - e^{i\theta x}) \lambda(dx)} = \mathbb{E} e^{i\theta X_{t-s}} \quad (3.14)$$

und damit die Stationarität des Prozesses, mit charakteristischem Exponenten eines zusammengesetzten Poisson Prozesses mit der geforderten Sprungrate und Verteilung, vgl. 3.12.  $\square$

**Lemma 3.6.** Seien  $\mu$  und  $B$  wie oben und zusätzlich  $\int_B |x| \lambda(dx) < \infty$ . Dann gilt:

- i) Der zusammengesetzte Poisson Prozess mit Drift  $M_t := \int_{[0,t]} \int_B x \mu(ds, dx) - t \int_B x \lambda(dx)$  ist Martingal bzgl. der Filtration  $\mathcal{F}_t := \sigma(\mu(A) : A \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .
- ii) Ist ausserdem  $\int_B x^2 \lambda(dx) < \infty$  so ist  $M$  sogar  $L_2$ -Martingal.

*Beweis.* i)  $M$  ist adaptiert bzgl.  $\mathcal{F}$  und integrierbar, denn es ist

$$\mathbb{E} |M_t| \leq \mathbb{E} \left( \int_0^t \int_B |x| \mu(ds, dx) + t \int_B |x| \lambda(dx) \right) \stackrel{\text{vgl.3.3, iii)}}{<} \infty \quad (3.15)$$

Da  $\mathbb{E} M_t = 0$  und  $M$  stationäre und unabhängige Zuwächse hat, ist  $M$  somit Martingal.

- ii) Aus Lemma 3.3, iii) (mit  $f(x) = x \mathbb{1}_B$ ) und der Voraussetzung  $\int_B x^2 \lambda(dx) < \infty$  folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( M_t + t \int x \lambda(dx) \right)^2 &= \mathbb{E} \left( \int_{[0,t]} \int_B x \mu(ds, dx) \right)^2 \\ &= t \int_B x^2 d\lambda(x) + t^2 \left( \int_B x d\lambda(x) \right)^2 \end{aligned}$$

Weiter ist  $M$  ein in 0 startendes Martingal, damit lässt sich auch schreiben

$$\mathbb{E} \left( M_t + t \int x \lambda(dx) \right)^2 = \mathbb{E} M_t^2 + t^2 \left( \int_B x d\lambda(x) \right)^2 + \underbrace{\mathbb{E} \left( 2t M_t \int_B x d\lambda(x) \right)}_{=0}$$

Ein Vergleich der beiden Ausdrücke ergibt  $\mathbb{E} M_t^2 = t \int_B x^2 d\lambda(x) < \infty$ , also die Behauptung.  $\square$

Das obige Resultat ist Beispiel für ein allgemeineres Prinzip. In dem Zusammenhang spricht man auch von *Kompensation* eines Zufallsmaßes und von  $\lambda$  als Kompensator. Genauer hat man folgendes Theorem, welches wir in dieser Masterarbeit nicht beweisen können.

**Definition+Theorem 3.7** (Kompensator). *Sei  $\mu$  optionales,  $\sigma$ -endliches Zufallsmaß. Dann existiert ein  $P$ -f.s. eindeutiges previsibles Zufallsmaß  $\nu$  (Kompensator genannt) mit einer der folgenden äquivalenten Eigenschaften:*

1. Für alle  $\tilde{\mathcal{P}}$  messbaren Funktionen  $H$  mit  $|H| * \mu \in \mathcal{A}_{loc}^+$  ist  $|H| * \nu \in \mathcal{A}_{loc}^+$  und  $H * \mu - H * \nu$  ist lokales Martingal.
2.  $\mathbb{E}(H * \nu_\infty) = \mathbb{E}(H * \mu_\infty)$  für alle nichtnegativen  $\tilde{\mathcal{P}}$ -messbaren Funktionen  $H$  auf  $\tilde{\Omega}$

*Beweis.* Vgl. [12]  $\square$

Wir kommen nun zu einem wichtigen Theorem, mit dessen Hilfe wir Lévy-Prozesse besser verstehen werden.

**Theorem 3.8** (Lévy-Ito). *Sei  $b \in \mathbb{R}^d$ ,  $C$  positiv semidefinite Matrix in  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $\nu$  sei  $d$ -dimensionales Lévy-Maß. Definiere*

$$\psi(u) := i b^T u - \frac{1}{2} u^T C u + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i u^T x} - i u^T h(x) - 1) \nu(dx) \quad (3.16)$$

mit  $h(x) = x \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}$ . Dann existiert ein eindeutiges W-Maß  $P$  auf  $\Omega$  und ein stochastischer Prozess  $X$ , so dass  $X$  Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponenten  $\psi$  bzgl.  $P$  ist. Überdies ist  $\Delta X = (\Delta X_t)_{t \geq 0}$  Poisson Punkt Prozess mit charakteristischem Maß  $\nu$ .

*Beweis.* Es seien

1.  $W$  Wiener Prozess in  $\mathbb{R}^d$
2.  $\Delta$  von  $W$  stochastisch unabhängiger Poisson Punkt Prozess mit charakteristischem Maß  $\nu$
3.  $C^{\frac{1}{2}}$  Lösung von  $(C^{\frac{1}{2}})^T C^{\frac{1}{2}} = C$  (existiert, da  $C$  positiv semidefinit ist)

Wir definieren weiter

$$X_t^{(1)} := C^{\frac{1}{2}} W_t + bt \quad (3.17)$$

$$\Delta_t^{(2)} := \Delta_t \mathbb{1}_{\{|\Delta_t| \geq 1\}} \quad (3.18)$$

$$X_t^{(2)} := \sum_{s \leq t} \Delta_s^{(2)} \quad (3.19)$$

Dann ist  $X_t^{(1)}$  Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponenten  $\psi^{(1)}(u) = i b \cdot u - \frac{1}{2} u^T C u$ ,  $\Delta_t^{(2)}$  ist Poisson Punkt Prozess mit charakteristischem Maß  $\nu^{(2)}(dx) := \mathbb{1}_{\{|x| \geq 1\}} \nu(dx)$  und  $X_t^{(2)}$  ist càdlàg PIID, damit Lévy-Prozess. Genauer ist wie oben festgestellt-  $X^{(2)}$  zusammengesetzter Poisson Prozess und hat als solcher den charakteristischen Exponent

$$\psi^{(2)}(u) := \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu \cdot x} - 1) \mathbb{1}_{\{|x| \geq 1\}} \nu(dx) \quad (3.20)$$

Weiter sei

$$\Delta_t^{(3)} := \Delta_t \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}} \quad (3.21)$$

Dann ist  $\Delta^{(3)}$  Poisson Punkt Prozess mit char. Maß  $\nu^{(3)}(dx) := \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}} \nu(dx)$  und ist-da  $\Delta^{(2)}$  und  $\Delta^{(3)}$  konstruktionsgemäß keine gemeinsamen Sprünge aufweisen- stochastisch unabhängig von  $\Delta^{(2)}$  (siehe Lemma 2.7). Wir definieren weiter eine Familie von Prozessen  $X_t^{(\varepsilon,3)}$  durch

$$X_t^{(\varepsilon,3)} := \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |\Delta_s| < 1\}} \Delta_s - t \int_{\mathbb{R}^d} x \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |x| < 1\}} \nu(dx) \quad (3.22)$$

Wie oben sieht man, das  $(X_t^{(\varepsilon,3)})_{t \geq 0}$  Lévy-Prozess ist mit char. Exponenten

$$\psi^{(\varepsilon,3)}(u) := \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu \cdot x} - i u \cdot x - 1) \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |x| < 1\}} \nu(dx) \quad (3.23)$$

In integraler Schreibweise ist für  $0 < \eta < \varepsilon$

$$X_t^{(\eta,3)} - X_t^{(\varepsilon,3)} = \int_0^t \int_{\eta < |x| < \varepsilon} x \mu^X(ds, dx) - t \int_{\eta < |x| < \varepsilon} x \nu(dx)$$

wobei  $\mu^X$  das zu  $\Delta$  gehörende PZM sei. Es gilt mit Doobs Maximalungleichung und dem Argument aus dem Beweis von Lemma 3.6, ii)

$$\begin{aligned} \forall t \forall \eta \in (0, \varepsilon) : \mathbb{E} \sup_{s \leq t} |X_s^{(\eta,3)} - X_s^{(\varepsilon,3)}|^2 &\leq 4 \mathbb{E} |X_t^{(\eta,3)} - X_t^{(\varepsilon,3)}|^2 \\ &= 4t \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mathbb{1}_{\{\eta < |x| < \varepsilon\}} \nu(dx) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \end{aligned}$$

wobei für die Konvergenz benutzt wurde, dass  $\nu$  Lévy-Maß ist. Es ist  $(X_t^{(\varepsilon,3)}, \varepsilon > 0)$  somit Cauchy-Familie bzgl. der Norm  $\|Y\| := \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |Y_s|^2)^{\frac{1}{2}}$  auf dem Hilbertraum der zweifach integrierbaren Martingale mit Zeithorizont  $[0, t]$ , mit einem Grenzwert

$X^{(3)}$  (man beachte, dass der Wert von  $t$  in dieser Argumentation unerheblich ist). Dieser ist càdlàg PIID. Um die PIID-Eigenschaft zu sehen, beachte man dass aus  $L_2$ -Konvergenz f.s. Konvergenz einer Teilfolge  $(\varepsilon_n)$  folgt und entlang dieser Folge Konvergenz in Verteilung. Mittels majorisierter Konvergenz ist dann

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( e^{i\theta_1(X_v^{(3)} - X_u^{(3)})} e^{i\theta_2(X_t^{(3)} - X_s^{(3)})} \right) \\ &= \lim_n \mathbb{E} \left( e^{i\theta_1(X_v^{(\varepsilon_n,3)} - X_u^{(\varepsilon_n,3)})} e^{i\theta_2(X_t^{(\varepsilon_n,3)} - X_s^{(\varepsilon_n,3)})} \right) \\ &= \lim_n \mathbb{E} e^{i\theta_1 X_{v-u}^{(\varepsilon_n,3)}} \mathbb{E} e^{i\theta_2 X_{t-s}^{(\varepsilon_n,3)}} \\ &= \mathbb{E} e^{i\theta_1 X_{v-u}^{(3)}} \mathbb{E} e^{i\theta_2 X_{t-s}^{(3)}} \end{aligned}$$

woraus die PIID-Eigenschaft folgt. Als charakteristischer Exponent von  $X^{(3)}$  ergibt sich durch Grenzwertbildung:

$$\psi^{(3)}(u) := \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu.x} - iu.x - 1) \mathbb{1}_{\{|x|<1\}} \nu(dx) \quad (3.24)$$

Da  $X^{(3)}$  messbar bzgl.  $\sigma(\Delta^{(3)})$  ist, ist  $X^{(3)}$  unabhängig von  $X^{(2)}$ . Insgesamt ist also  $X := X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$  Lévy-Prozess mit char. Exponenten

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)} \text{ (aufgrund der Unabhängigkeit der Prozesse } X^{(i)})$$

Nach Konstruktion ist  $\Delta$  der Sprungprozess des Prozesses  $X$ ; damit ergibt sich die letzte Behauptung, nach der  $\Delta X$  Poisson Punkt Prozess mit char. Maß  $\nu$  ist.  $\square$

Die im obigen Beweis konstruierte Zerlegung  $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$  bezeichnet man als **Lévy-Ito-Zerlegung**. Danach kann jeder Lévy-Prozess zerlegt werden in einen stetigen Brownschen Bewegungsteil und zwei Sprungkomponenten. Letztere sind ein zusammengesetzter Poisson-Prozess  $X^{(2)}$  sowie ein reines Sprungmartingal  $X^{(3)}$  mit Sprüngen der Grösse  $\leq 1$ .

In dem Fall, dass die Kompensation in der Definition von  $X_t^{(\varepsilon,3)}$  nicht nötig ist (dazu später mehr), können wir den Grenzwert direkt betrachten und erhalten die gängige Form

$$\begin{aligned} X_t &= (C^{1/2}W_t + bt) + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} x \mu^X(ds, dx) \\ &+ \left( \int_0^t \int_{0<|x|<1} x \mu^X(ds, dx) - t \int_{0<|x|<1} x \nu(dx) \right) \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir also, dass Lévy-Prozesse Semimartingale sind und somit stochastische Analysis angewendet werden kann. Die oben beschriebene Semimartingalzerlegung erkennen wir hier wieder; der rein unstetige Martingalanteil ergibt sich als Integral über das Sprungmaß des Lévy-Prozesses.

**Korollar 3.9.** *Sei ein  $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess  $Z$  gegeben mit Sprungzählmaßprozess  $\mathbf{N}_t(A) := \sum_{0<s\leq t} \mathbb{1}_A(\Delta Z_s)$ . Dann ist  $\mathbf{N}_t(A)$  Poisson-Prozess mit Intensität  $\nu(A)$  wobei  $\nu$  das zu  $Z$  gehörende Lévy-Maß ist.*

*Beweis.* Mittels Lévy-Ito-Zerlegung erhalten wir einen  $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess  $X$ , so dass  $\Delta X_s = \Delta_s$  Poisson Punkt Prozess ist; damit ist  $\mathbf{N}_t(A) := \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s)$  Poissonprozess der Intensität  $\nu(A)$ .  $\square$

Damit erhalten wir auch die oben bereits erwähnte Beziehung

$$\nu(A) = \mathbb{E} \left( \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s) \right)$$

zwischen Lévymaß und Sprungprozess.

**Korollar 3.10.** *Ein Lévy-Prozess mit Charakteristik  $(b, C, \nu)$  ist von beschränkter Variation genau dann, wenn*

$$C = 0 \quad \text{und} \quad \int (1 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty$$

*Beweis.* Wir betrachten die Lévy-Ito Zerlegung  $X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ . Da Brownsche Bewegungen von unbeschränkter Variation sind, muss der Gauss-Anteil 0 sein, d.h. es muss  $C = 0$  gelten.  $X^{(2)}$  ist als zusammengesetzter Poisson-Prozess von beschränkter Variation und daher unerheblich. Nun ist  $\int_0^t \int_{0 < |x| < 1} x \mu^X(ds, dx) < \infty$  genau dann, wenn  $\int_{0 < |x| < 1} |x| d\nu(x) < \infty$ , vgl. Lemma 3.3. In der Lévy-Ito-Zerlegung fällt damit für den Prozess  $X_t^{(\varepsilon, 3)} = \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |\Delta_s| < 1\}} \Delta_s - t \int_{\mathbb{R}^d} x \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |x| < 1\}} \nu(dx)$  die Notwendigkeit der Kompensation durch  $t \int_{\mathbb{R}^d} x \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |x| < 1\}} \nu(dx)$  weg, um den Grenzwert für  $\varepsilon \searrow 0$  bilden zu können.  $X_t^{(3)}$  hat dann die Form  $\sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{0 < |\Delta_s| < 1\}} \Delta_s - t \int_{\mathbb{R}^d} x \mathbb{1}_{\{0 < |x| < 1\}} \nu(dx)$ . Dieser Prozess ist aber von beschränkter Variation genau dann, wenn  $\int_{0 < |x| < 1} |x| d\nu(x) < \infty$ . Da überdies  $\nu$  Lévy-Maß ist, ergibt sich die äquivalente Bedingung

$$\int (1 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty$$

wie gefordert.  $\square$

**Anmerkung 3.11.** *In der Situation von Korollar 3.10 wird häufig eine andere Abschneidefunktion  $h$  gewählt (genauer wird  $h = 0$  gesetzt, vgl. die Anmerkung zur Lévy-Khintchine-Zerlegung). Damit ergibt sich auch eine veränderte Drift; es ist dann  $b' := b - \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} x \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) \nu(dx)$ . Man erhält dann die sehr anschauliche Lévy-Ito-Darstellung*

$$Z_t = b't + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \mu^X(ds, dx) = b't + \sum_{s \leq t} \Delta Z_s$$

*Der Prozess ergibt sich also aus dem stetigen, deterministischen Drift-Anteil  $b't$  und dem rein unstetigen Sprunganteil. Man beachte, dass wir sowohl  $b$  als auch  $b'$  als Driftterm bezeichnen, obwohl dieser Ausdruck eher auf  $b'$  zutrifft.*

Wir kommen nun zu einer hilfreichen Charakterisierung von Subordinatoren, also nichtnegativen Lévy-Prozessen. Es ist schon angesprochen worden, dass die Nichtnegativität des Prozesses gleichbedeutend ist mit monoton wachsenden Pfaden. Dies wird unter anderem in der folgenden Proposition gezeigt.

**Proposition 3.12** (Charakterisierung von Subordinatoren). *Sei  $Z$  Lévy-Prozess auf  $\mathbb{R}$  mit Charakteristik  $(b, C, \nu)$ . Dann sind äquivalent:*

- i)  $Z_t \geq 0$  f.s. für ein  $t > 0$
- ii)  $Z_t \geq 0$  f.s. für alle  $t > 0$
- iii)  $t \mapsto Z_t$  ist fast sicher monoton wachsende Funktion
- iv) Die Charakteristik von  $Z$  erfüllt

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ \nu((-\infty, 0]) &= 0 \\ \int_0^\infty (x \wedge 1) \nu(dx) &< \infty \\ b' &\geq 0 \end{aligned}$$

*Beweis.* ii)  $\Rightarrow$  i) Trivial.

iii)  $\Rightarrow$  ii) Ebenfalls einfach, da aus iii)  $Z_t \geq Z_0 = 0$  für alle  $t$  fast sicher folgt.

i)  $\Rightarrow$  ii): Zunächst ist  $Z_{nt} \geq 0$  f.s. für alle  $n \in \mathbb{N}$ , denn es ist  $Z_{nt} = \sum_{i=1}^n Z_{it} - Z_{(i-1)t}$ . In dieser Summe sind alle Summanden iid aufgrund der Lévy-Eigenschaft und der erste Summand ist  $Z_t$ , welcher nach Voraussetzung nichtnegativ f.s. ist, also trifft dies auch für die Summe zu. Sei nun  $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+$  beliebig. Dann ist  $\sum_{i=1}^m Z_{qit} - Z_{q(i-1)t} = Z_{nt}$ . Da wir wissen, dass diese Summe von iid Zufallsgrößen nichtnegativ ist, gilt dies auch für jeden Summanden, insbesondere für  $Z_{qt}$ . Ist schließlich  $r \in \mathbb{R}^+$  beliebig, so existiert eine fallende Folge rationaler Zahlen  $q_n$ , die gegen  $r$  konvergiert. Aufgrund der obigen Rechnungen ist  $Z_{q_n t} \geq 0$  f.s. für alle  $n$ , also ist dies aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit von  $Z$  auch für  $Z_{rt}$  richtig. Da aber  $r$  beliebig war, ergibt sich ii).

ii)  $\Rightarrow$  iii) Da  $Z_t - Z_s$  wegen der Lévy-Eigenschaft von  $Z$  die gleiche Verteilung besitzt wie  $Z_{t-s}$  und dieses nach ii) fast sicher nichtnegativ ist, ergibt sich sofort die Aussage iii)

iii)  $\Rightarrow$  iv) Da die Pfade nach Voraussetzung nichtnegativ sind, sind sie insbesondere von beschränkter Variation. Daher ergibt sich  $C = 0$  und  $\int (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty$  aus Korollar 3.10. Da die Pfade wachsen, kann es keine negativen Sprünge geben, d.h. es muss  $\nu((-\infty, 0]) = 0$  sein. Da der Prozess auch wächst, wenn keine Sprünge vorkommen, ergibt sich für die Drift die Bedingung  $b' \geq 0$  wie gefordert.

iv)  $\Rightarrow$  iii) Wenn iv) gilt, sind unter anderem die Voraussetzungen dafür erfüllt, dass  $Z$  Pfade von beschränkter Variation hat. Damit hat  $Z$  die Darstellung  $Z_t = b't + \sum_{s \leq t} \Delta Z_s$ . Da  $b' \geq 0$  und die Sprünge fast sicher nichtnegativ sind, sind somit die Pfade von  $Z$  fast sicher monoton wachsend.  $\square$

Ein bekanntes und grundlegendes Resultat in der Theorie der Semimartingale ist die Ito-Formel. Wir formulieren diese im folgenden für Lévy-Prozesse. Dazu geben wir zunächst zur Erinnerung die Ito-Formel für Semimartingale an.

**Theorem 3.13** (Ito-Formel für Semimartingale). Sei  $X = (X^1, \dots, X^d)$   $d$ -dimensionaler Vektor von Semimartingalen und sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{s-}) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d[X^{i,c}, X^{j,c}]_s \quad (3.25)$$

$$+ \sum_{0 < s \leq t} \left( f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{s-}) \Delta X_s^k \right) \quad (3.26)$$

Für einen Beweis vgl. [19]. Wir wenden uns kurz den sogenannten Lévy-Ito Prozessen zu; diese haben die Form

$$X_t = \int_0^t b_s ds + \int_0^t C_s^{1/2} dW_s + \int_0^t \int_{|x|>1} \eta_s(x) \mu^X(ds, dx) \quad (3.27)$$

$$+ \int_0^t \int_{|x|\leq 1} \eta_s(x) d(\mu^X(ds, dx) - t\nu(x)) \quad (3.28)$$

Dabei seien  $b$  und  $C$  previsible lokal beschränkte Prozesse und  $\eta_s(x)$  linksseitig stetige Zufallsfunktion, für die der Prozess

$$\left( \int_{|x|\leq 1} \eta_t(x)^2 \nu(dx) \right)_{t \geq 0}$$

lokal beschränkt ist. Der Name dieser Prozesse lässt sich durch die angenehme Eigenschaft erkären, dass Lévy-Ito-Prozesse abgeschlossen unter  $C^2$ -Transformationen sind. Genauer ergibt eine Anwendung der Ito-Formel für eine  $C^2$ -Funktion  $f$ , angewendet auf einen Lévy-Ito-Prozess der obigen Bauart

$$\begin{aligned} & f(X_t) - f(X_0) \\ &= \int_0^t \left( b_s f'(X_s) + \frac{1}{2} C_s f''(X_s) + \int_{|x|\leq 1} (f(X_s + \eta_s(x)) - f(X_s) - \eta_s(x) f'(X_s)) \nu(dx) \right) dt \\ &+ \int_0^t f'(X_s) C_s^{1/2} dW_s + \int_0^t \int_{|x|\leq 1} (f(X_{s-} + \eta_s(x)) - f(X_{s-})) d(\mu^X(ds, dx) - t\nu(x)) \\ &+ \int_0^t \int_{|x|>1} (f(X_{s-} + \eta_s(x)) - f(X_{s-})) \mu^X(ds, dx) \end{aligned}$$

so dass sich wieder ein Lévy-Ito-Prozess ergibt.

Betrachten wir die zuvor bewiesene Lévy-Ito-Zerlegung wird sofort klar, dass es sich um eine Verallgemeinerung handelt, bei der die Koeffizienten  $b$ ,  $C$  nicht mehr konstant sein müssen und ein Prozess  $\eta$  die Abschneidefunktion  $h$  ersetzt.

Tatsächlich kann man zeigen, dass jedes Semimartingal eine Zerlegung wie in 3.27 zulässt. Dies geschieht, verbunden mit einem technischen Aufwand, in [12]. Man spricht dann von der Semimartingalcharakteristik  $(b, C, \nu)$  (bzgl.  $\eta$ ).

Ein bekanntes und wichtiges Resultat aus der stochastischen Analysis ist der Martingaldarstellungssatz bzgl. eines Wiener-Prozesses, welcher z.B. zur Optionsbewertung in manchen Modellen eingesetzt wird. Ein nützliches Resultat aus der Theorie der Lévy-Prozesse ist die folgende Verallgemeinerung, bei der die Darstellung bzgl. eines allgemeinen Lévy-Prozesses erfolgt.

**Theorem 3.14** (Martingaldarstellung eines Lévy-Prozesses). Sei  $Z$   $\mathbb{R}^d$ -wertiger Lévy-Prozess bzgl. der natürlichen Filtration von  $Z \mathcal{F}_t = \sigma(Z_s, s \leq t)$ . Sei  $M$  ein Martingal bzgl.  $\mathcal{F}$ . Dann existieren ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger previsibler Prozess  $H$  und eine previsible Funktion  $G : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \int_0^t (H_s^i)^2 ds &< \infty \text{ f.s.} \\ \int_0^t \int_{|x| \leq 1} |G(s, x)| ds d\nu(x) &< \infty \\ \int_0^t \int_{|x| > 1} G^2(s, x) ds d\nu(x) &< \infty \end{aligned}$$

so dass

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i dW_s^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(s, x) (\mu^X - \nu^X)(ds, dx) \quad (3.29)$$

Ein Beweis findet sich in dem Paper [16].

## 4 Lévy-Prozess-Modelle in der Finanzmathematik: Exponentielle Lévy-Modelle

Schon im Black-Scholes-Samuelson Modell generierte ein Lévy-Prozess die zufällige Dynamik eines assets. Dort ist

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t} \quad (4.2)$$

Wir wollen zunächst Modelle betrachten der Form  $S_t = S_0 e^{rt} e^{X_t}$  mit Lévy-Prozess  $X_t$  und deterministischer Zinsrate  $r$  (in diese Kategorie fallen z.B. das Black-Scholes sowie das Merton-Modell). Alternativ könnte man statt des gewöhnlichen Exponentials  $e^{X_t}$  zur Modellierung das stochastische Exponential  $\mathcal{E}(X)$ , i.e. die Lösung der SDE  $dZ_t = Z_{t-} dX_t$ ,  $Z_0 = 1$  benutzen. Die folgende Proposition (vgl. hierfür [26]) zeigt, dass beide Ansätze äquivalent sind. Zunächst wollen wir aber die genannte SDE lösen.

**Lemma 4.1.** Sei  $X$   $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess. Dann existiert genau ein càdlàg Prozess  $Z$ , so dass  $Z$  Lösung der SDE

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t, \quad Z_0 = 1$$

ist.  $Z$  ist gegeben durch

$$Z_t = e^{X_t - \frac{1}{2} Ct} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \quad (4.3)$$

und wird mit  $\mathcal{E}(X)$  bezeichnet.

*Beweis.* Wir definieren

$$Y_t := \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

und zeigen zunächst, dass dieser Ausdruck existiert und Pfade von beschränkter Variation hat. Dazu zerlegen wir das Produkt in zwei Teilprodukte, definiert durch

$$Y_{t,1} := \prod_{0 \leq s \leq t, |\Delta X_s| \leq \frac{1}{2}} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \quad (4.4)$$

$$Y_{t,2} := \prod_{0 \leq s \leq t, |\Delta X_s| > \frac{1}{2}} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \quad (4.5)$$

Da es nur eine endliche Zahl von Sprüngen der Größenordnung  $> \frac{1}{2}$  in einem endlichen Zeitraum geben kann, ist  $Y_{t,2}$  für jedes  $t$  ein endliches Produkt, damit existiert der Ausdruck und hat beschränkte Pfade. Wegen der Voraussetzung an die Sprunggrößen ist  $Y_{t,1}$  positiv, also können wir

$$\log Y_{t,1} = \sum_{0 \leq s \leq t, |\Delta X_s| \leq \frac{1}{2}} (\log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s) \quad (4.6)$$

bilden. Für alle nichttrivialen Summanden in der obigen Summe gilt nun die Abschätzung

$$0 > \log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s > -\Delta X_s^2 \quad (4.7)$$

Diese ergibt sich aus der Reihenentwicklung  $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + R(x)$ ,  $|x| \leq \frac{1}{2}$  mit einem Restglied  $R$ , dass sich aus der Taylorentwicklung ergibt und für das  $|R(x)| < \frac{x^2}{2}$  für  $x \in (-0.5, 0.5) \setminus \{0\}$  gilt. Die Reihe in 4.6 ist also monoton fallend und durch  $-\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s^2$  nach unten beschränkt. Da  $X$  Lévy-Prozess ist, ist dieser Ausdruck endlich, denn es ist

$$\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s^2 = \int_0^t \int x^2 \mu^X(ds, dx)$$

und mittels Lemma 3.3 für  $f(x) = x^2$  ergibt sich, dass diese Summe konvergiert falls

$$\int_0^t (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$$

was wiederum daraus folgt, dass  $\nu$  Lévy-Maß ist. Somit ex.  $Y$  und hat Pfade von beschränkter Variation. Jetzt können wir die Ito-Formel auf  $Z_t = f(t, X_t, Y_t)$  mit  $f(t, x, y) := e^{x - \frac{1}{2}Ct} y$  anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{-C}{2} e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_t dt + e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_{t-} dX_t + e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_{t-} dY_t \\ &\quad + \frac{1}{2} C e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_t dt + e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_t - e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_{t-} \\ &\quad - e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} Y_{t-} \Delta X_t - e^{X_t - \frac{1}{2}Ct} \Delta Y_t \end{aligned}$$

wobei wir  $[X^c]_t = \frac{C}{2}$ ,  $[Y^c]_t = [Y^c, X^c]_t = 0$  verwendet haben. Man beachte dabei, dass  $Y$  reiner Sprungprozess ist und somit  $dY_t = \Delta Y_t = Y_{t-} (e^{\Delta X_t} (1 + \Delta X_t) - 1)$ . Setzen wir dies oben ein, erhalten wir dass  $Z$  die geforderte SDE erfüllt. Um die Eindeutigkeit zu zeigen nehmen wir an, es gebe 2 Lösungen,  $Z^{(1)}$  und  $Z^{(2)}$ . Dann ist auch die Differenz  $Z' := Z^{(1)} - Z^{(2)}$  Lösung der SDE mit  $Z'_0 = 0$ . Da  $Z'_t = \int_0^t Z'_{s-} dX_s$  wird  $Z'$  konstant 0 ab jedem  $t$  sein, für welches  $Z'_t = 0$  ist, also erhalten wir  $Z_t^{(1)} = Z_t^{(2)}$  für alle  $t \geq 0$  und damit die Eindeutigkeit.  $\square$

**Proposition 4.2.** *i) Sei  $X$   $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess und  $Z = \mathcal{E}(X)$ . Ist  $Z > 0$  f.s. so existiert ein  $(\tilde{b}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ -Lévy-Prozess  $\tilde{X}$  wobei*

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= \log(Z_t) = X_t - \frac{Ct}{2} + \sum_{0 \leq s \leq t} (\log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s) \\ \tilde{C} &= C \\ \tilde{\nu}(A) &= \nu(\{x \mid \log(1 + x) \in A\}) = \int \mathbb{1}_A(\log(1 + x)) \nu(dx) \\ \tilde{b} &= b - \frac{C}{2} + \int (\log(1 + x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(\log(1 + x)) - x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)) \nu(dx) \end{aligned}$$

*ii) Sei  $\tilde{X}$   $(\tilde{b}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ -Lévy-Prozess und  $S_t = e^{\tilde{X}_t}$ . Dann existiert ein  $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess  $X$  so dass  $S = \mathcal{E}(X)$  wobei*

$$\begin{aligned} X_t &= \tilde{X}_t + \frac{Ct}{2} + \sum_{0 \leq s \leq t} \left( e^{\Delta \tilde{X}_s} - 1 - \Delta \tilde{X}_s \right) \\ C &= \tilde{C} \\ \nu(A) &= \tilde{\nu}(\{x \mid e^x - 1 \in A\}) = \int \mathbb{1}_A(e^x - 1) \tilde{\nu}(dx) \\ b &= \tilde{b} + \frac{\tilde{C}}{2} + \int (e^x - 1) \mathbb{1}_{[-1,1]}(e^x - 1) - x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \nu(dx) \end{aligned}$$

*Beweis.* i) Es ist  $Z > 0$  f.s. äquivalent zu  $\Delta X_s > -1$  für alle  $s$  f.s. siehe Lemma 4.1, also existiert der Term  $\log(1 + \Delta X_s)$ . Nun wissen wir:  $\sum_{0 \leq s \leq t} \log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s$  konvergiert und ist von endlicher Variation, vgl. dazu den Beweis von Lemma

4.1. Da  $\tilde{X}$  sich aus  $X$  durch Änderung der Drift und der Sprünge ergibt, ist  $\tilde{X}$  Lévy-Prozess mit Gauss-Anteil  $\tilde{C} = C$ . Da  $\Delta\tilde{X}_s = \log(1 + \Delta X_s)$  folgern wir

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{X}}([0, t] \times A) &= \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta\tilde{X}_s) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_A(\log(1 + \Delta X_s)) \\ &= \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_A(\log(1 + x)) \mu_X(ds, dx)\end{aligned}$$

und

$$\tilde{\nu}(A) = \int \mathbb{1}_A(\log(1 + x)) \nu(dx)$$

Wir setzen in  $\tilde{X}_t = \log(Z_t)$  für  $\tilde{X}_t$  und  $Z_t$  die jeweilige Lévy-Ito Zerlegung ein und erhalten so die Identität

$$\tilde{b}t - bt + \frac{Ct}{2} + \int_{[0, t] \times [-1, 1]} x \mu_{\tilde{X}}(ds, dx) + \int_{[0, t] \times \{|x| > 1\}} x \mu_X(ds, dx) \quad (4.8)$$

$$- \int_{[0, t] \times [-1, 1]} x \mu(X)(ds, dx) - \int_{[0, t] \times \{|x| > 1\}} x \mu_X(ds, dx) \quad (4.9)$$

$$- \sum_{0 \leq s \leq t} (\log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s) = 0 \quad (4.10)$$

Weil

$$\begin{aligned}& \int_{[0, t] \times [-1, 1]} x(\mu_{\tilde{X}}(ds, dx) - \mu_X(ds, dx)) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\Delta X_s) - \log(1 + \Delta X_s) \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\log(1 + \Delta X_s)))\end{aligned}$$

konvergiert können wir in Gleichung (4.8) Sprung- und Driftterme separieren. Für den Driftteil ergibt sich

$$\tilde{b} - b + \frac{C}{2} - \int_{[-1, 1]} x(\tilde{\nu} - \nu)(dx) = 0$$

Mittels einer Anwendung des Transformationssatzes (siehe etwa [1], Kor. 13.3) folgt  $\tilde{b}$ , denn

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= b - \frac{C}{2} + \int_{[-1, 1]} x(\tilde{\nu} - \nu)(dx) \\ &= b - \frac{C}{2} + \int_{[-1, 1]} \log(1 + x) \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\log(1 + x)) - x \mathbb{1}_{[-1, 1]} d\nu(x)\end{aligned}$$

- ii) Es ist  $\Delta S_t = S_{t-}(\exp(\Delta\tilde{X}_t) - 1)$ . Da für einen Lévy-Prozess  $X$  mit  $S = \mathcal{E}(X)$   $dS_t = S_{t-} dX_t$  gilt, ist  $\Delta S_t = S_{t-} \Delta X_t$  und somit  $\Delta X_t = \exp(\Delta\tilde{X}_t) - 1$ . Damit stimmt obige Form für  $\nu$ . Insbesondere ist  $\Delta X_t > -1$  fast sicher. Man rechnet

einfach nach, dass das charakteristische Tripel von  $\log \mathcal{E}(X)$  dem von  $\tilde{X}$  nur dann entspricht, wenn  $X$  obige Charakteristik hat. Anders ausgedrückt heisst dies, zu zeigen dass die Charakteristik von  $\tilde{X} = \log S$  der von  $\log \mathcal{E}(X)_t = X_t - \frac{1}{2}Ct \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$  entspricht, was sich sofort aus der Definition von  $X$  ergibt. Mit dem vorangegangenen Lemma folgt dann die Behauptung.  $\square$

Wir beenden dieses Unterkapitel mit einem Lemma und einer Proposition, die im Zusammenhang mit exp-Lévy-Modellen nützlich sind.

**Proposition 4.3.** *Sei  $Z$  Lévy-Prozess und  $\eta$  so, dass  $\kappa(\eta) = \log \mathbb{E} e^{\eta Z_1} < \infty$ . Dann ist  $e^{\eta Z_t - t\kappa(\eta)}$  ein Martingal.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\eta Z_t - t\kappa(\eta)} | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{\eta(Z_t - Z_s)} e^{\eta Z_s} e^{-t\kappa(\eta)} | \mathcal{F}_s) = e^{\eta Z_s} \mathbb{E}(e^{\eta(Z_t - Z_s)}) e^{-t\kappa(\eta)} \\ &= e^{\eta Z_s} e^{(t-s)\kappa(\eta)} e^{-t\kappa(\eta)} = e^{\eta Z_s - s\kappa(\eta)} \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 4.4.** *Es ist  $e^{-rt} S_t = e^{X_t}$  Martingal genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) &< \infty \quad \text{und} \\ \frac{C}{2} + b + \int (e^x - 1 - x \mathbb{1}_{(-1,1)}) \nu(dx) &= 0 \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus Proposition 4.3 folgern wir, dass  $\kappa(1) = 0$  zu zeigen ist. Dies ist aber gerade die oben angegebene Bedingung.  $\square$

In den folgenden beiden Unterkapiteln beschäftigen wir uns mit der Frage der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes. Diese ist schon deshalb von entscheidender Bedeutung, weil wir damit die Arbitragefreiheit in einem Modell nachweisen können.

## 4.1 Esscher-Transformation in exp. Lévy-Modellen

Wir wollen uns in diesem Unterkapitel einer populären Methode zum Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalwechsel in exp-Lévy-Modellen widmen. Zunächst geben wir eine Proposition von Sato ([23]) an, die wir in dieser Allgemeinheit nicht beweisen werden.

**Proposition 4.5** (Sato). *Sei  $Z$   $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess auf  $\mathbb{R}^d$  bzgl.  $P$ . Seien weiter  $\eta \in \mathbb{R}^d$ ,  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (e^{(g(x)/2)} - 1)^2 \nu(dx) < \infty$$

*und sei  $U_t := \eta \cdot Z^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{g(x)} - 1) d(\mu^Z - \nu^Z)(dx, dx)$ . Dann ist  $\mathcal{E}(U)_t$  positives Martingal so, dass für das durch  $\frac{d\tilde{P}}{dP} | \mathcal{F}_t := \mathcal{E}(U)_t$  definierte Maß  $\tilde{P}$  folgendes gilt:*

1. Es ist  $P \sim \tilde{P}$
2. Bezuglich  $\tilde{P}$  ist  $X$   $(\tilde{b}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ -Lévy-Prozess mit

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= e^g \nu \\ \tilde{C} &= C \\ \tilde{b} &= b + \int_{|x| \leq 1} x d(\tilde{\nu} - \nu)(dx) + C\eta\end{aligned}$$

Der folgende Spezialfall lässt sich vergleichsweise einfach beweisen und ist in vielen Fällen vollkommen ausreichend, um zu einem risikoneutralen W-Maß zu kommen.

**Definition+Theorem 4.6.** Sei  $X$   $d$ -dimensionaler Lévy-Prozess mit Charakteristik  $(b, C, \nu)$  und  $\mathbb{E} e^{\theta \cdot X_t} < \infty$  für alle  $t$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}^d$ . Dann ist bezüglich des Esscher-Maßes  $P_\theta$ , definiert durch

$$\frac{dP_\theta}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{\theta \cdot X_t}}{\mathbb{E} e^{\theta \cdot X_t}} =: L_t \quad (4.11)$$

$X$  weiterhin Lévy-Prozess mit Charakteristik

$$\begin{aligned}b_\theta &= b + \frac{1}{2}(C + C^T)\theta + \int x(e^{\theta \cdot x} - 1)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\nu(dx) \\ C_\theta &= C \\ \nu_\theta &= e^{\theta \cdot x} \nu(dx)\end{aligned}$$

*Beweis.* Es sei  $\zeta_u$  die analytische Transformierte von  $X_u$ , wo diese existiert, d.h.  $\zeta_u(z) = \mathbb{E} e^{zX_u}$  für zulässige  $z \in \mathbb{C}$ .  $L_t$  ist tatsächlich Martingal bzgl.  $P$ , denn nach Wahl von  $\theta$  ist  $L_t$   $\mathcal{L}_1$ -Prozess und es gilt vermöge der PIID:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( \frac{e^{\theta \cdot X_t}}{\mathbb{E} e^{\theta \cdot X_t}} \Big| \mathcal{F}_s \right) &= \mathbb{E} (e^{\theta \cdot (X_t - X_s)} e^{\theta \cdot X_s} \Big| \mathcal{F}_s) (\mathbb{E} e^{\theta \cdot X_t})^{-1} \\ &= e^{\theta \cdot X_s} \mathbb{E}(e^{\theta \cdot (X_t - X_s)}) \zeta_t(\theta)^{-1} \\ &= e^{\theta \cdot X_s} \zeta_{t-s}(\theta) \zeta_t(\theta)^{-1} \\ &= e^{\theta \cdot X_s} \zeta_t(\theta) \zeta_s(\theta)^{-1} \zeta_t(\theta)^{-1} = L_s\end{aligned}$$

Dass die Zuwächse unabhängig und identisch verteilt bzgl.  $P_\theta$  sind, ergibt sich aus der Bayes-Formel:

$$\begin{aligned}E_{P_\theta}(e^{iu \cdot (X_t - X_s)} \Big| \mathcal{F}_s) &= E_P(L_t L_s^{-1} e^{iu \cdot (X_t - X_s)} \Big| \mathcal{F}_s) \\ &= E_P(e^{\theta \cdot (X_t - X_s)} e^{iu \cdot (X_t - X_s)} \Big| \mathcal{F}_s) (\mathbb{E} e^{\theta \cdot X_t})^{-1} \mathbb{E} e^{\theta \cdot X_s} \\ &= \zeta_{t-s}(\theta + iu) (\mathbb{E} e^{\theta \cdot X_t})^{-1} \mathbb{E} e^{\theta \cdot X_s}\end{aligned}$$

Die Charakteristik bzgl.  $P_\theta$  ergibt sich aus der letzten Gleichung mit  $s = 0$ .  $\square$

**Theorem 4.7.** Sei  $S_t = e^{rt+X_t}$  Preisprozess eines assets in einem Modell mit Zinssatz  $r$  und sei  $X_t$  Lévy-Prozess. Dann ist die Esscher-Transformation  $L_t = L_t(\theta)$  Dichteprozess eines äquivalenten Martingalmaßes  $P^* = P_\theta$  genau dann, wenn  $\theta$  Lösung von  $\zeta(\theta) - \zeta(\theta + 1) = 0$  ist.

*Beweis.* Es ist  $e^{X_t}$  Martingal bzgl. eines äMM genau dann wenn  $e^{X_t} L_t$   $P$ -Martingal ist.

Da nach Theorem 4.6  $X_t$  auch bzgl.  $P_\theta$  Lévy-Prozess ist, ergibt eine Rechnung analog zu oben (mit  $\zeta_{t,\theta}$  als a.T. von  $X_t$  bzgl.  $P_\theta$ )

$$E_{P_\theta}(e^{X_t} | \mathcal{F}_s) = e^{X_s} \zeta_{t-s,\theta}(1) \quad (4.12)$$

Also ist  $e^{X_t}$  Martingal genau dann, wenn  $\zeta_{t-s,\theta}(1) = \zeta_{1,\theta}(1)^{t-s} = 1$  für alle  $s \leq t$ ; das ist erfüllt gdw.  $\zeta_{1,\theta}(1) = 1$ . Nun ist dies wegen

$$\zeta_{1,\theta}(1) = E_{P_\theta} e^{X_1} = E_P(e^{X_1} e^{\theta X_1} \zeta_1(\theta)^{-1}) \quad (4.13)$$

$$= \mathbb{E}_P(e^{(\theta+1)X_1}) \zeta_1(\theta)^{-1} = \frac{\zeta_1(\theta+1)}{\zeta_1(\theta)} \quad (4.14)$$

□

äquivalent zur zu zeigenden Aussage.

## 4.2 Arbitragefreiheit der Exponentiellen Lévy-Modelle

Für Finanzmarktmodelle ist der Begriff der Arbitragefreiheit entscheidend; diese ist gegeben, wenn ein äMM existiert. Im obigen Unterkapitel haben wir bereits ein etwas unhandliches Kriterium für die Existenz eines solchen äMM kennengelernt (vgl. Theorem 4.7). Wir können jedoch schon unter sehr schwachen Voraussetzungen zeigen, dass exponentielle Lévy-Modelle arbitragefrei sind. Offenbar ist dafür erforderlich, dass der Prozess  $X$  nicht monoton wachsend oder fallend ist (es sei denn,  $X$  ist schon konstant 0), denn andernfalls bestünden durch long bzw. short Positionen im Finanzgut  $S$  Arbitragemöglichkeiten. In diesem Unterkapitel werden wir zeigen, dass diese Bedingung bereits ausreichend ist für die Arbitragefreiheit eines Modells.

Dazu werden wir ein entsprechendes Theorem zunächst für Modelle beweisen, in denen  $S$  stochastisches Exponential, d.h.  $dS_t = S_{t-}(rdt + dX_t)$ , ist und dieses Ergebnis dann auf das gewöhnliche exponentielle Modell übertragen. Wir beschränken uns im Folgenden auf 1-dimensionale Modelle; im mehrdimensionalen ist der Beweis erheblich aufwendiger (vgl. [26]).

**Theorem 4.8** (Arbitragefreiheit in stochastischen Exponential Modellen). Sei  $S$  Lösung von  $dS_t = S_{t-}(rdt + dX_t)$ , wobei  $X$   $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess im Zeitintervall  $[0, T]$  sei bzgl. eines filtrierten W-Raums  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ . Dann sind äquivalent:

1. Es existiert  $P^* \sim P$  so dass  $X$  bzgl.  $P^*$  Lévy-Prozess und Martingal ist (damit ist insbesondere  $e^{-rt} S_t$  Martingal bzgl.  $P^*$ )
2. Es ist  $X \equiv 0$  oder  $X$  ist weder monoton wachsend noch monoton fallend  $P$ -f.s.

3. Es gilt eine der folgenden Bedingungen

- i)  $C > 0$
- ii)  $C = 0$  und  $\int_{|x| \leq 1} |x| d\nu(x) = \infty$
- iii)  $C = 0$ ,  $\int_{|x| \leq 1} |x| d\nu(x) < \infty$  und es kann positive und negative Sprünge mit positiver Wahrscheinlichkeit geben oder Drift und Sprünge haben unterschiedliche Vorzeichen, d.h.

$$\nu((-\infty, 0)) > 0, \nu((0, \infty)) > 0$$

oder

$$\nu((-\infty, 0)) > 0, b' > 0$$

oder

$$\nu((0, \infty)) > 0, b' < 0$$

oder

$$\nu = 0, b' = 0$$

$$\text{mit } b' := b - \int_{x \leq 1} |x| d\nu(x)$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $X \not\equiv 0$ .

2.  $\Leftrightarrow$  3. Dies folgt aus Proposition 3.12 und einer entsprechenden Aussage für monoton fallende Lévy-Prozesse.

1.  $\Rightarrow$  2. Diese Folgerung haben wir oben bereits mit einem Arbitrageargument erläutert. Ist  $X$  f.s. monoton bzgl.  $P$ , so auch bzgl. dem äquivalenten Maß  $P^*$ ; da  $X$  Martingal bzgl.  $P^*$  ist, ist  $X$  somit f.s. konstant, als Lévy-Prozess also konstant 0.

3.  $\Rightarrow$  1. Wir gehen so vor, dass wir 2 Maßwechsel durchführen; der zweite wird eine Esscher-Transformation sein. Zunächst sei  $\bar{P}$  das äquivalente Maß, welches durch

$$\frac{d\bar{P}}{dP}|_{\mathcal{F}_T} = \mathcal{E} \left( \int_0^{\cdot} \int \left( e^{-x^2} - 1 \right) (\mu - \nu)(ds, dx) \right)_T$$

gegeben ist. Bezuglich  $\bar{P}$  ist  $X$   $(\bar{b}, \bar{C}, \bar{\nu})$ -Lévy-Prozess mit  $\bar{\nu} := e^{-x^2} \nu$ ,  $\bar{b} := b + \int_{|x| \leq 1} x(e^{-x^2} - 1) \nu(dx)$  (vgl. die Prop. von Sato). Betrachte die konvexe reellwertige Funktion  $g(\lambda) := \mathbb{E}_{\bar{P}}(e^{\lambda X_1})$ . Finden wir ein  $\lambda^*$ , welches  $g$  minimiert, so ist (mittels majorisierter Konvergenz)  $\mathbb{E}_{\bar{P}}(X_1 e^{\lambda^* X_1}) = 0$  notwendiges Kriterium für die Minimalstelle. Betrachten wir dann die Esscher-Transformation

$$\frac{dP^*}{d\bar{P}}|_{\mathcal{F}_t} := \frac{e^{\lambda^* X_t}}{\mathbb{E} e^{\lambda^* X_t}}$$

so ist bzgl.  $P^*$   $X$  ein Lévy-Prozess mit  $\mathbb{E}^* X_1 = 0$  und damit ein  $P^*$ -Martingal. Wir müssen allerdings noch zeigen, dass so ein  $\lambda^*$  existiert. Aufgrund der Konvexität von  $g$  reicht zu zeigen, dass  $g(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$  oder  $f(\lambda) := \log(g(\lambda)) = \frac{C}{2} \lambda^2 + \bar{b} \lambda + \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) e^{-x^2} d\nu(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$ . Gilt i), so ist  $f''(\lambda) \geq C > 0$  und  $f(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$  folgt.

Ist ii) gegeben, so ist  $f'(\lambda) = \bar{b} + \int_{|x| > 1} x e^{-x^2} \nu(dx) + \int x(e^{\lambda x} - 1) e^{-x^2} d\nu(x)$  damit  $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f'(\lambda) = \pm\infty$  also  $f(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$ . Ist schließlich iii) erfüllt, so ist  $f'(\lambda) = b + \int_{\mathbb{R}} x e^{\lambda x} e^{-x^2} d\nu(x)$ .

Jede der obigen *oder*-Bedingungen reicht aus, damit  $f'$  nach unten hin beschränkt ist und damit die Behauptung folgt.  $\square$

**Korollar 4.9.** Sei  $X$   $(b, C, \nu)$ -Lévy-Prozess auf  $[0, T]$ . Dann sind äquivalent:

1. Es existiert ein  $W$ -Maß  $P^* \sim P$  so dass  $X$  bzgl.  $P^*$  Lévy-Prozess ist und  $e^X$  Martingal.
2. Es ist  $X \equiv 0$  oder  $X$  ist bzgl.  $P^*$  nicht f.s. monoton
3. Es gilt eine der folgenden drei Bedingungen
  - (a)  $\sigma > 0$
  - (b)  $\sigma = 0$  und  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$  und
  - (c)  $\sigma = 0$ ,  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$  und

$\nu((-\infty, 0)) > 0, \nu((0, \infty)) > 0$   
oder  
 $\nu((-\infty, 0)) > 0, b' > 0$   
oder  
 $\nu((0, \infty)) > 0, b' < 0$   
oder  
 $\nu = 0, b' = 0$

*Beweis.* Wir zeigen:  $\log(\mathcal{E}(X))$  ist monoton gdw.  $X$  monoton ist. Die Behauptung folgt dann sofort aus obigem Theorem. Der Prozess  $\mathcal{E}(X)$  ist von endlicher Variation gdw. dies für  $X$  zutrifft; in diesem Fall hat  $\mathcal{E}(X)$  die Form

$$\mathcal{E}(X) = e^{b't} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \quad (4.15)$$

und damit  $\log(\mathcal{E}(X)) = b't + \sum_{s \leq t} \log(1 + \Delta X_s)$ ; dieser Prozess ist monoton gdw.  $X$  monoton ist.  $\square$

Sei nun eine europäische Option gegeben, d.h. ein asset mit Auszahlung  $h(S_T)$  zu einem fest vorgegebenem Zeitpunkt  $T$ ;  $h$  ist hierbei die (messbare) Auszahlungsfunktion. Wir gehen von der Existenz eines äMM  $P^* = P_\theta$  aus wie in 4.7 und fordern ausserdem die  $P^*$ -Integrierbarkeit von  $h(S_T)$ . Für den Werteprozess  $V_t$  dieser Anlage gilt bekanntermaßen  $V_t = e^{rt} \mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT} h(S_T) | \mathcal{F}_t)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_\theta(e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t) \\ &\stackrel{\text{Bayes}}{=} e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left( h(S_T) \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left( h \left( \frac{S_T}{S_t} S_t \right) \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left( \left( h(S_t e^{r(T-t)} e^{(Z_T - Z_t)}) \frac{e^{\theta(Z_T - Z_t)}}{(\mathbb{E} e^{\theta Z_1})^{T-t}} \right) | \mathcal{F}_t \right) \\ &\stackrel{\text{ZPIID}}{=} e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left( h \left( u e^{r(T-t) + Z_{T-t}} \right) \frac{e^{\theta Z_{T-t}}}{\mathbb{E} e^{\theta Z_{T-t}}} \right) \Big|_{S_t=u} \end{aligned}$$

Wir betrachten im folgenden Unterkapitel noch die Möglichkeit, mittels eines Differentialgleichungsansatzes Optionen in exp-Lévy-Modellen zu bewerten.

### 4.3 Integro-Differential Equation Ansatz zur Bestimmung des Wertes einer europäischen Option

Sei nun  $Y_t := \log(e^{r(T-t)} S_t)$  und  $p(y, t) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_\theta(h(e^{y+X_{T-t}}))$ ; außerdem sei die Esscher-Transformation  $P_\theta$  äquivalentes Martingal-Maß. Dann ist  $V_t = p(Y_t, t)$  und wir können- unter Regularitätsannahmen-hoffen, mittels Ito-Formel eine IPDE für die Derivatbestimmung zu erhalten. Sei also  $p \in C^{(2,1)}$  und sei  $\mathbb{R}$  Träger von  $X_t$ . Es ist  $Y_t = \log(S_0) + rT + X_t$ . Nach Annahme ist der abdiskontierte Prozess  $(e^{-rt} V_t)$   $P_\theta$ -Martingal. Ito-Formel liefert:

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} V_t) &= -r e^{-rt} V_t dt + e^{-rt} dV_t \\ &= -r e^{-rt} V_t dt + e^{-rt} \left( \partial_t p(Y_{t-}, t) dt + \partial_y p(Y_{t-}, t) dY_t + \frac{1}{2} \partial_y^2 p(Y_{t-}, t) d\langle Y^c, Y^c \rangle_t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} (p(Y_{t-} + u, t) - p(Y_{t-}, t)u - \partial_y p(Y_{t-}, t)u) \mu^Y(du, dt) \right) \end{aligned}$$

wobei  $\mu^Y$  Zufallssprungmaß von  $Y$  ist. Nun gilt offenbar

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta Y \\ \mu^X &= \mu^Y \\ dX &= dY \\ d\langle Y^c, Y^c \rangle &= d\langle X^c, X^c \rangle \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} V_t) &= -r e^{-rt} V_t dt \\ &\quad + e^{-rt} \left( \partial_t p(Y_{t-}, t) dt + \partial_y p(Y_{t-}, t) dZ_t + \frac{1}{2} \partial_y^2 p(Y_{t-}, t) cdt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} (p(Y_{t-} + u, t) - p(Y_{t-}, t) - \partial_x p(Y_{t-}, t)u) \mu^Y(du, dt) \right) \end{aligned}$$

Wir können den obigen Term in Martingal- und  $\mathcal{F}\mathcal{V}$ -Anteil aufteilen. In differentieller Schreibweise ist der previsible  $\mathcal{F}\mathcal{V}$ -Anteil gegeben durch

$$\begin{aligned} &-r e^{-rt} p(Y_{t-}, t) dt + e^{-rt} \left( \partial_t p(Y_{t-}, t) dt + \partial_y p(Y_{t-}, t) bdt + \frac{1}{2} \partial_y^2 p(Y_{t-}, t) cdt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} (p(Y_{t-} + u, t) - p(Y_{t-}, t) - \partial_y p(Y_{t-}, t)u) \nu^X(du, dt) \right) \end{aligned}$$

wobei  $\nu^X(du, dt) = \nu(du)dt$  Kompensator von  $\mu^X$  ist. Da der abdiskontierte Preisprozess  $V_t^* = e^{-rt} V_t$  Martingal ist, muss dieser Anteil verschwinden. Damit folgt die

Integro-Partielle Gleichung

$$\begin{aligned} rp(y, t) &= \partial_t p(y, t) + \partial_y p(y, t)b + \frac{1}{2} \partial_y^2 p(y, t)c \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (p(y+u, t) - p(y, t) - \partial_y p(y, t)u) \nu(du) \\ h(e^y) &= p(y, T) \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \end{aligned}$$

## 5 Berechnungsmethode mittels Fouriertransformation (nach Carr/Madan)

Bevor wir uns etwas komplexeren Modellen widmen, wollen wir noch kurz auf eine populäre Methode zur Bewertung (und numerischen Berechnung) von europäischen Call/Put-Optionen in exp-Lévy-Modellen eingehen. Die Relevanz solcher Bewertungen ergibt sich sofort aus der Notwendigkeit der Kalibrierung von Modellen, und dies geschieht am einfachsten durch Anpassung der Modellparameter an am Markt ablesbare Preise wie etwa für europ. Optionen. Ein hilfreicher Ansatzpunkt ist es, mit Fouriertransformierten zu arbeiten, da diese durch die Lévy-Khintchine-Formel bereits gegeben sind. Sei  $S_0 = 1$ . Wir wollen eine europäische Call-Option mit Maturity  $T$  bewerten, also haben wir die Auszahlung  $(e^{rT+X_T} - K)^+$  risikoneutral zu bewerten. Wir benötigen im Folgenden eine Zusatzannahme an die Momente von  $X_T$ ; ist  $g_T$  die risikoneutrale Dichte von  $X_T$  so gelte

$$(*) \quad \exists \alpha > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} g_T(s) e^{(1+\alpha)s} ds < \infty \quad (5.1)$$

Wir würden nun für die Callpreise  $C(k) := e^{-rT} \mathbb{E}^* \left( (e^{rT+X_T} - e^k)^+ \right)$ <sup>4</sup> zunächst die Fouriertransformierte in  $k$  bestimmen und dann mit Fourierinversion arbeiten; da aber  $C(k) \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} \mathbb{E}^* e^{rT+X_T} = 1$  ist  $C(k)$  nicht integrierbar, daher betrachten wir die kompensierte Funktion  $Z(k) := C(k) - (1 - e^{k-rT})^+$  und deren Fouriertransformierte  $\mathfrak{Z}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} Z(k) dk$ . Da  $e^{-rT} e^{rT+X_T}$  bzgl.  $P^*$  Martingal ist, gilt  $\mathbb{E}^* (e^{-rT} (e^{rT+X_T} - e^k) \mathbb{1}_{k \leq rT}) = (1 - e^{k-rT})^+$  daher können wir den Kompensatorterm in das Integral hineinziehen und haben

$$Z(k) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(x) (e^{rT+x} - e^k) \mathbb{1}_{\{rT < k \leq rT+x\}} dx \quad (5.2)$$

Wir verwenden diesen Ausdruck und vertauschen die Reihenfolge der Integration (hierfür benötigen wir  $(*)$ ), um

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(u) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} g_T(x) (e^{rT+x} - e^k) \mathbb{1}_{\{rT < k \leq rT+x\}} dx dk \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(x) \int_{rT}^{x+rT} e^{iuk} (e^{rT+x} - e^k) dk dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_T(x) \left( \frac{e^{iurT} (1 - e^x)}{iu + 1} - \frac{e^{x+iurT}}{iu(iu + 1)} + \frac{e^{(iu+1)x+iurT}}{iu(iu + 1)} \right) dx \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Wir arbeiten mit  $k := \log(K)$ , weil das in den Rechnungen Platz spart

zu erhalten. Die ersten beiden Terme in der obigen Klammer ergeben sich sofort wegen  $\int_{-\infty}^{\infty} g_T(x) e^x dx = 1$  (da  $e^{X_T}$  Martingal) zu 0 bzw.  $-\frac{e^{iuT}}{iu(iu+1)}$ . Für den dritten Term ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(x) \frac{e^{(iu+1)x+iuT}}{iu(iu+1)} dx &= \frac{e^{iuT}}{(iu(iu+1))} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(x) e^{(iu+1)x} dx \\ &= \frac{e^{iuT}}{(iu(iu+1))} \zeta_{X_T}(iu+1) \\ &= \frac{e^{iuT}}{(iu(iu+1))} \phi_{X_T}(u-i) \end{aligned}$$

also haben wir insgesamt

$$\mathfrak{Z}(u) = e^{iuT} \frac{\phi_{X_T}(u-i) - 1}{iu(iu+1)}$$

Mittels Fourierinversion (möglich wegen (\*)) ergibt sich

$$Z(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \mathfrak{Z}(u) du$$

Dieser Wert lässt sich mittels numerischer Verfahren näherungsweise ermitteln.

## 6 Zwischenfazit und Stochastic Volatility Modelle

Bisher haben wir uns vor allem mit exponentiellen Lévy-Modellen der Form  $S_t = e^{rt} e^{Z_t}$  beschäftigt. Diese sind zwar mathematisch sehr gut handhabbar, allerdings können sie nicht am Markt beobachtbare Effekte wie Volatility Clustering abbilden. Dies ergibt sich sofort aus der zeitlichen Homogenität von Prozessen mit unabhängigen und identisch verteilten Zuwächsen. Wir wollen daher im Folgenden Modelle betrachten, die diese empirisch beobachtbare Inhomogenität einbeziehen können. Diese sind die sogenannten Stochastic Volatility Modelle, bei denen die Volatilität des Aktienkurses selbst durch eine SDE gegeben ist. Ein sehr bekanntes Modell in dieser Kategorie, das Heston-Modell, ist gegeben durch die SDE

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t^S) \\ d\sigma_t^2 &= \xi(\eta - \sigma_t^2)dt + \theta \sigma dW_t^\sigma \\ \langle W_t^S, W_t^\sigma \rangle &= \rho dt \end{aligned}$$

wobei  $W^S, W^\sigma$  Wiener Prozesse seien. Im Vergleich zum klassischen BS-Modell ist hier also eine nichtdeterministische Volatilität  $\sigma_t$  in Form eines Cox-Ingersoll-Ross Prozesses aufgetaucht. Wir wenden uns aber stattdessen gleich dem Modell von Bates zu; dieses vereint Hestons und Mertons Ansätze in einem einzigen SV-Modell, gegeben durch

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-} (\mu dt + \sigma_t dW_t^S + dZ_t) \\ d\sigma_t^2 &= \xi(\eta - \sigma_t^2)dt + \theta \sigma dW_t^\sigma \\ \langle W^\sigma, W^S \rangle_t &= \rho dt \end{aligned}$$

wobei  $Z$  von  $W^\sigma, W^X$  unabhängiger zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$  ist und lognormalverteilten Sprunggrößen, genauer sei für die Sprunggrößenvariable  $K$

$$\log(1 + K) \sim \mathcal{N} \left( \log(1 + k) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2 \right)$$

für Parameter  $\delta$  und  $k$ . Im risikoneutralen Fall ist der Parameter  $\mu$  festgelegt durch  $\mu = r - \lambda k$ . Wir können natürlich auch hier wieder das Modell in der Form  $S_t = S_0 e^{X_t}$  aufstellen; die Dynamik von  $X_t$  ist dann gegeben durch

$$dX_t = \left( r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t^S + d\tilde{Z}_t$$

wobei  $\tilde{Z}$  zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$  und Gausschen Sprunggrößen ist (das geht so, wie wir es oben schon beim Merton-Modell getan haben). Wir können die charakteristische Funktion von  $X$  berechnen (um z.B. Optionen zu bewerten), indem wir getrennt die char. Funktionen des stetigen und des Sprungannteils berechnen; da diese unabhängig sind, lässt sich die Gesamtfunktion anschließend multiplikativ aus diesen beiden zusammensetzen. Die c.F. der Sprungkomponente ergibt sich einfach als

$$\phi_t^J(u) = \exp \left( t\lambda \left( e^{-\delta^2 u^2/2 + i(\log(1+k) - \frac{1}{2}\delta^2)u} - 1 \right) \right) \quad (6.1)$$

Für die c.F. von  $X^c$  müssen wir mehr arbeiten. Wir werden  $\phi^c$  als Lösung einer bestimmten DGL erhalten. Sei dafür  $f(x, u, t) := \mathbb{E}(e^{i u X_T^c} | X_t^c = x, \sigma_t^2 = u)$  und  $M_t := f(X_t^c, \sigma_t^2, t)$ . Eine Anwendung von Itos Formel liefert

$$\begin{aligned} dM_t &= \left( \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho\theta\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} + \frac{1}{2}\theta^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left( r - \lambda k - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi(\eta - \sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \\ &\quad + \sqrt{u} \frac{\partial f}{\partial x} dW_t^S + \theta\sqrt{u} \frac{\partial f}{\partial u} dW^\sigma \end{aligned}$$

Da nun  $M$  Martingal ist, muss der Driftteil verschwinden. Wir erhalten eine DGL

$$\frac{1}{2}u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho\theta u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} + \frac{1}{2}\theta^2 u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left( r - \lambda k - \frac{u}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi(\eta - \sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

mit Endbedingung  $f(x, u, T) = e^{i u x}$ . Wir vermuten eine Lösung der Gestalt

$$f(x, u, t) = \exp(A(T-t) + rB(T-t) + i u x)$$

mit Funktionen  $A, B$  im Zeitparameter  $t$ . Setzen wir diese Gestalt in die obige DGL ein, erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$B'(s) = \frac{1}{2}\theta^2 B^2(s) + (i\rho\theta u \xi) B(s) - \frac{u^2 + i u}{2} \quad (6.2)$$

$$A'(s) = \xi\eta B(s) + i u (r - \lambda k) \quad (6.3)$$

mit  $A(0) = B(0) = 0$ . Dieses lässt sich lösen durch

$$B(s) = -\frac{u^2 + i u}{\gamma \coth(\frac{\gamma s}{2}) + \xi - i \rho \theta u}$$

$$A(s) = i u s(r - \lambda k) + \frac{\xi \eta s(\xi - i \rho \theta u)}{\theta^2} - 2 \frac{\xi \eta}{\theta^2} \log \left( \cosh \left( \frac{\gamma s}{2} \right) + \frac{\xi - i \rho \theta u}{\gamma} \sinh \left( \frac{\gamma s}{2} \right) \right)$$

$$\gamma := \sqrt{\theta^2(u^2 + i u) + (\xi - i \rho \theta u)^2}$$

Also erhalten wir die c.F. von  $X$  durch  $\phi = \phi^J \cdot \phi^c$ .

Die Bewertung von Optionen in diesem Modell ist aufwendiger als etwa im BS- oder Merton-Modell. Am einfachsten Durchzuführen ist ein Ansatz wie im vorangegangenen Kapitel mittels der Fouriertransformiertenmethode.

## 7 Das Modell von Barndorff-Nielsen/Shephard

Wir wollen uns in diesen abschließenden Kapiteln noch einem weiteren Modell widmen, welches uns zur finanzmathematischen Modellierung besonders geeignet erscheint. Es verbindet mehrere wünschenswerte Eigenschaften und ist hervorragend dazu geeignet, den im ersten Kapitel gemachten Kritikpunkten am BS-Modell zu begegnen.

Im klassischen Black-Scholes Modell liegt die stoch. DGL

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

vor mit konstanter Volatilität  $\sigma$ . Im BNS-Modell hingegen ist die Volatilität stochastisch (wie in den Modellen von Bates und Heston), gegeben durch eine SDE

$$d\sigma_t^2 = -\lambda \sigma_t^2 dt + dZ_{\lambda t} \quad (7.1)$$

wobei  $Z$  der sogenannte *background driving Lévy process* (BDLP, wir sprechen auch vom *treibenden Lévy-Prozess*) ist und im folgendem als Subordinator (d.h. ein Lévy-Prozess mit nichtnegativen Zuwächsen) angenommen wird. Dabei seien der Wiener-Prozess  $W$  und der BDLP  $Z$  stochastisch unabhängig und die zugrundeliegende Filtration die von  $(W_t, Z_{\lambda t})_{t \geq 0}$  erzeugte. Mithilfe der Ito-Formel ergibt sich für  $X_t = \log(S_t)$  nach Hinzufügen des Terms  $\rho dZ_{\lambda t}$

$$dX_t = (\mu - \frac{1}{2} \sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t + \rho dZ_{\lambda t}$$

$\rho$  sei nichtpositiv und steht für den sogenannten *leverage-effect*; dieser trägt der Beobachtung Rechnung, dass fallende Kurse oft mit steigender Volatilität am Markt verbunden sind. BNS betrachten schließlich etwas allgemeiner

$$dX_t = (\mu + \beta \sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t + \rho dZ_{\lambda t}$$

mit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Mittels Ito-Formel ergibt sich auch sofort die Dynamik von  $S_t = e^{X_t}$  durch

$$dS_t = S_{t-} \left( b_t dt + \sigma_t dW_t + d \left( \sum_{0 < s \leq t} (e^{\rho \Delta Z_{\lambda s}} - 1) - \lambda \kappa(\rho) t \right) \right)$$

$$b_t := \mu + \lambda \kappa(\rho) + \left( \beta + \frac{1}{2} \right) \sigma_t^2$$

Der Prozess  $\sigma_t$  ist ein nicht-gaußscher Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit  $\sigma_0^2 > 0$ . Wir geben im folgenden Unterkapitel einen Existenzssatz für diese Art von Prozess an und zeigen die Verbindung zwischen diesen Prozessen und der Eigenschaft der Selbstteilbarkeit. Wir werden im Folgenden 3 zusätzliche Annahmen an den BDLP  $Z$  stellen; diese werden uns erlauben, mit der Kumulante von  $Z$  zu arbeiten.

### Zusatzannahmen an den Subordinator $Z$

1)  $Z$  hat keinen deterministischen Drift und  $\nu^Z$  hat Lebesgue-Dichte  $w$ , so dass

$$\kappa(\theta) = \int_{\mathbb{R}_+} (e^{\theta x} - 1) w(x) dx \quad (7.2)$$

2)  $0 < \hat{\theta} := \sup\{\theta \in \mathbb{R} : \kappa(\theta) < \infty\}$

3)  $\lim_{\theta \rightarrow \hat{\theta}} \kappa(\theta) = \infty$

## 7.1 Selbstteilbare Verteilungen und OU-Prozesse

**Definition 7.1.** Eine Verteilung  $Q$  heißt *selbstteilbar* (engl. *selfdecomposable*), wenn für die Fourier-Transformierte  $\phi$  dieser Verteilung gilt: Für alle  $d \in (0, 1)$  existiert eine Fouriertransformierte  $\phi_d$  einer Verteilung  $Q_d$ , so dass  $\phi(u) = \phi_d(u) \cdot \phi(du)$ . Eine Zufallsgröße  $X$  mit Verteilung  $Q$  nennen wir entsprechend *selbstteilbar*, wenn  $Q$  dies ist.

Selbstteilbare Verteilungen sind unendlich teilbar. Genauer ist eine unendlich teilbare Verteilung  $P$  mit Lévy-Maß  $\nu$  genau dann selbstteilbar, wenn  $\nu(dx) = u(x)dx$  für eine Funktion  $u$  so, dass  $|x| u(x)$  monoton wachsend auf  $(-\infty, 0)$  ist und monoton fallend auf  $(0, \infty)$  ist ( vgl.[23], Corollary 15.11).

**Theorem 7.2** (Darstellungssatz für selbstteilbare Zufallsvariablen). Eine Zufallsvariable  $X$  ist selbstteilbar genau dann, wenn eine Darstellung

$$X = \int_0^\infty e^{-t} dZ_t \quad (7.3)$$

mit einem Lévy-Prozess  $Z$  existiert. Für die Lévy-Maße  $\mu$  und  $\nu$  von  $X$  bzw.  $Z$  gilt dann die Identität

$$\mu(dx) = \int_0^\infty \nu(e^t dx) dt \quad (7.4)$$

*Beweis.* Vergleiche etwa [13] oder [23], Kapitel 17. □

**Lemma 7.3.** Für die Kumulanten von  $X$  bzw.  $Z$  in Theorem 7.2 gelten die Beziehungen

$$\kappa_X(u) = \int_0^\infty \kappa_Z(e^{-s} u) ds = \int_0^u \kappa_Z(y) y^{-1} dy \quad (7.5)$$

$$\kappa_Z(u) = u \frac{\partial \kappa_X(u)}{\partial u} \quad (7.6)$$

*Beweis.* Die Aussage lässt sich mithilfe der in Unterkapitel 9.1 aufgestellten Berechnungsformel sowie dem obigen Darstellungssatz leicht beweisen.

$$\begin{aligned}
\kappa_X(u) &= \log \mathbb{E} e^{uX} \stackrel{\text{Thm. 7.2}}{=} \log \mathbb{E} e^{u \int_0^\infty e^{-t} dZ_t} \\
&= \log e^{\int_0^\infty \kappa_Z(e^{-t} u) dt} \\
&\stackrel{\substack{\text{Lemma 9.1} \\ + \text{mon. Konv.}}}{=} \int_0^\infty \kappa_Z(e^{-t} u) dt \\
&\stackrel{\text{Variablenwechsel}}{=} \int_0^u \kappa_Z(y) y^{-1} dt
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage ergibt sich aus der ersten sofort durch Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den Term  $\frac{\partial}{\partial u} \int_0^u \kappa_Z(y) y^{-1} dt$ .  $\square$

**Theorem 7.4.** Sei  $\phi$  die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen  $Y$ . Ist  $Y$  selbstteilbar, so existiert für alle  $\lambda > 0$  ein stationärer stochastischer Prozess  $(Y_t)_{t \geq 0}$  und ein Lévy-Prozess  $(Z_t)_{t \geq 0}$  der stochastisch unabhängig von  $Y_0$  ist, so dass

$$\begin{aligned}
Y_t &\stackrel{d}{=} Y \\
Y_t &= e^{-\lambda t} Y_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dZ_{\lambda s}
\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt: Ist  $Y_t$  stationärer Prozess und  $Z$  Lévy-Prozess, s.u. von  $Y_0$ , so dass  $Y, Z$  obige Gleichung für alle  $\lambda > 0$  erfüllt, so ist  $Y_t$  selbstteilbar.

*Beweis.* Siehe etwa [23], Kapitel 17.  $\square$

In unserem Fall ist  $\sigma_t^2 = Y_t$ ; es sei  $D$  die Verteilung der Zufallsgröße  $Y$  in obigem Theorem.  $\sigma^2$  wird dann als D-OU Prozess bezeichnet; nimmt man stattdessen  $Z_1 \sim D$  spricht man von einem OU-D Prozess. Beachte: Die Verteilung von  $\sigma^2$  hängt nicht von  $\lambda$  ab. Die Lösung der SDE (7.1), gegeben durch

$$\sigma_t^2 = \exp(-\lambda t) \left( X_0 + \int_0^t \exp(\lambda s) dZ_{\lambda s} \right) \quad (7.7)$$

hat nach Integration die Form

$$\sigma_t^{2,int} := \int_0^t \sigma_s^2 ds = \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda t}) \sigma_0^2 + \int_0^t \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda(t-s)}) dZ_{\lambda s} \quad (7.8)$$

Beispiele für selbstteilbare Verteilungen sind obige IG und Gamma Verteilung, die beide zur Klasse der GIG (Generalized Inverse Gaussian) gehören.

## 7.2 2 Spezialfälle: Gamma-OU und IG-OU Prozesse

Wie oben angekündigt spielen diese Prozesse für uns eine besondere Rolle. Für  $D = IG(a, b)$  sei  $\kappa^D(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta D})$  und  $\kappa(\theta) := \theta \frac{d\kappa^D}{d\theta}(\theta)$  ist die Kumulante von  $Z_1$ . Wegen  $\kappa^{IG}(\theta) = ab - b(a^2 - 2\theta)^{1/2}$  ergibt sich  $\kappa(\theta) = \theta b(a^2 - 2\theta)^{-1/2}$  und  $w(x) = \frac{a}{2\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} (1 + a^2 x) e^{-\frac{1}{2} a^2 x}$ .

Ist  $D = \Gamma(a, b)$  so ergibt sich  $\kappa(\theta) = \frac{a\theta}{b-\theta}$  und  $w(x) = ab e^{-bx}$ . In beiden Fällen sind die obigen Zusatzannahmen erfüllt.

## 8 Strukturerhaltende äMMs im BNS-Modell

Das BNS-Modell ist arbitragefrei, aber wie die SV-Modelle, die wir zuvor kennengelernt haben, unvollständig. Es existieren nämlich (im Allgemeinen) sehr viele äquivalente Martingalmaße im BNS-Modell. Um Derivate (risikoneutral) zu bewerten, wird wie gewohnt ein Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß durchgeführt. Allerdings werden nicht alle äMM'e als geeignete Maßwechsel betrachtet; die Struktur des Prozesses soll erhalten bleiben, insbesondere soll  $Z_{\lambda t}$  unter einem äMM  $P^*$  Lévy-Prozess bleiben. Dies wird in diesem Kapitel aufgeführt. Wir geben dabei das Paper von Nicolato/Vernados ([20]) in weiten Teilen wieder. An einigen Stellen werden Resultate aus [12] verwendet, insbesondere eine allgemeine Version des Satzes von Girsanov für Semimartingale.

Sei im Folgenden  $\mathcal{M}$  die Menge der äMM im BNS-Modell.

**Theorem 8.1.** Sei  $P^* \in \mathcal{M}$ . Dann gilt

$$L_t := \frac{dP^*}{dP} |_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(H \cdot W + (Y - 1) * (\mu^Z - \nu^Z))_t$$

Wobei  $H$  previsibler Prozess sei,  $Y = Y(\omega, t, x)$  strikt positive previsible Funktion mit

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} (\sqrt{Y(s, x)} - 1)^2 w(x) ds dx < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

und  $\mu^Z$  bzw.  $\nu^Z$  das Zufallsmaß der Sprünge von  $Z$  bzw. dessen Kompensator seien. Überdies gilt

$$\mu + \left( \beta + \frac{1}{2} \right) \sigma_t^2 + \sigma_t H_t + \lambda \int_{\mathbb{R}_+} Y(t, x) (e^{\rho x} - 1) w(x) dx = r \quad (8.1)$$

$P \otimes dt$ -f.s.

*Beweisskizze.* Mittels Standardresultaten aus der stochastischen Analysis wissen wir, dass  $L_t = \mathcal{E}(M)_t$  gilt für ein Martingal  $M$ . Für dieses existiert wegen des Martingaldarstellungssatzes 3.14 eine Darstellung

$$H \cdot W + (Y - 1) * (\mu^Z - \nu^Z)$$

wie gefordert. In [12], §§3, 5a wird (mittels einer Version des Satzes von Girsanov für Semimartingale) gezeigt, dass  $W_t^* := W_t - \int_0^t H_s ds$  bzgl.  $P^*$  Wiener Prozess ist und

$$\nu_*^Z := \nu_{P^*}^Z(\omega, dt, dx) = (Y * \nu)(\omega, dt, x) = \lambda Y(\omega, t, x) w(x) dx dt \quad (8.2)$$

Kompensator des Sprungmaßes  $\mu_Z$  bzgl.  $P^*$ . Mit der Ito-Formel ergibt sich bezüglich  $P^*$

$$dS_t = S_{t-} (b_t^{P^*} dt + \sigma_t dW_t^{P^*} + d((e^{\rho x} - 1) * (\mu^Z - \nu^Z))) \quad (8.3)$$

wobei

$$b_t^{P^*} = \mu + \left( \beta + \frac{1}{2} \right) \sigma_t^2 + \sigma_t \psi_t + \lambda \int_{\mathbb{R}_+} Y(t, x) (e^{\rho x} - 1) w(x) dx \quad (8.4)$$

Da  $P^*$  äMM ist  $e^{-rt} S_t$   $P^*$ -Martingal und damit  $b_t^* = r$ .  $\square$

Beim Maßwechsel kann der unerwünschte Nebeneffekt auftreten, dass unter dem neuen äMM  $Z$  kein Lévy-Prozess mehr ist. Daher betrachten wir die Menge  $\mathcal{M}^s$  der äMM, unter denen weiterhin ein BNS-Modell vorliegt. Wir charakterisieren die Menge  $\mathcal{M}^s$  im Folgendem durch Funktionen  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , die  $\int_{\mathbb{R}_+} (\sqrt{y(x)} - 1)^2 w(x) dx < \infty$  erfüllen und nennen deren Gesamtheit  $\mathcal{S}$ . Wir definieren weiter  $w^y(x) = y(x)w(x)$  für  $y \in \mathcal{S}$  und  $\kappa^y(\theta) := \int_{\mathbb{R}_+} (e^{\theta x} - 1)w^y(x) dx$  für  $\text{Re}(\theta) < 0$  (achte  $\int_{\mathbb{R}_+} (1 \wedge x)w^y(x) dx < \infty$ ). Außerdem halten wir fest, dass  $\mathcal{E}((y-1) * (\mu^Z - \nu^Z))$  ein Martingal für alle  $y$  in  $\mathcal{S}$  bildet.

**Theorem 8.2.** Sei  $y \in \mathcal{S}$ . Dann erfüllt  $H_t := \sigma_t^{-1}(r - \mu - (\beta + \frac{1}{2})\sigma_t^2 - \lambda\kappa^y(\rho))$

$$P \left( \int_0^T H_s^2 ds < \infty \right) = 1 \quad (8.5)$$

und

$$L_t^y = \mathcal{E}(H \cdot W + (y-1) * (\mu^Z - \nu^Z))_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.6)$$

ist ein Dichteprozess. Dann ist  $dP_y^* = L_T^y dP$  ein äMM mit Dynamik

$$dX_t = \left( r - \lambda\kappa^y(\rho) - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t^y + \rho dZ_{\lambda t} \quad (8.7)$$

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 dt + dZ_{\lambda t} \quad (8.8)$$

mit Wiener Prozess  $W_t^y := W_t - \int_0^t H_s ds$  bzgl.  $P_y^*$  und  $Z_{\lambda t}$  ist Lévy-Prozess bzgl.  $P_y^*$ . Dabei hat  $Z_1$  Lévy-Dichte  $w^y(x)$  und Kumulante  $\kappa^y(\theta)$  wie oben und  $W^y, Z$  sind stochastisch unabhängig unter  $P_y^*$ . Insgesamt ist also  $P_y^* \in \mathcal{M}^s$ . Umgekehrt existiert auch für alle strukturerhaltenden äMM  $P^*$  eine Funktion  $y$  in  $\mathcal{S}$  so dass  $P^*$  und  $P_y^*$  übereinstimmen.

*Beweis.* Die Integrierbarkeit von  $H_s^2$  folgt aus

$$\sigma_t^2 \geq \sigma_0^2 \exp(-\lambda t) > 0 \quad \text{vgl. (7.7)} \Rightarrow \sigma_t^{-2} \leq \frac{1}{\sigma_0^2 \exp(-\lambda T)} \forall t \quad (8.9)$$

Also definiert  $L_t^y$  tatsächlich ein Supermartingal. Da  $W, Z$  unabhängig sind ist insbesondere  $[H \cdot W, (y-1) * (\mu^Z - \nu^Z)] = 0$ . Mit Yors Formel folgt also

$$\mathcal{E}(H \cdot W + (y-1) * (\mu^Z - \nu^Z))_t = \mathcal{E}(H \cdot W)_t \mathcal{E}((y-1) * (\mu^Z - \nu^Z))_t = 1 \forall t \quad (8.10)$$

somit ist  $L_t^y$  sogar Martingal und damit Dichtequotientenprozess des oben definierten  $P_y^*$ . Sei nun  $(b^y, C^y, \nu^y)$  Charakteristik von  $W_t - \int_0^t H_s ds + Z_{\lambda t} = W_t^y + Z_{\lambda t}$  unter  $P_y^*$ . Dabei nehmen wir als Abschneidefunktion  $h = 0$ , da  $Z$  als wachsender Prozess von beschränkter Variation ist. Mit Girsanov (oder mit der Proposition 4.5, die wir hier aufgrund der Gestalt von  $y$  verwenden dürfen) folgt

$$\begin{aligned} b_t^y &= 0 \\ C_t^y &= t \\ \nu^y(dx, dt) &= \lambda w^y(x) dx dt \end{aligned}$$

Also ist  $W_t^y + Z_{\lambda t}$  Lévy-Prozess,  $W^y$  ist Wiener Prozess,  $Z$  Lévy-Prozess mit Dichte  $w^y(x)$  ohne Drift und  $W^y, Z$  sind stochastisch unabhängig unter  $P_y^*$ . Die Dynamik von  $X$  unter  $P_y^*$  ist damit wie behauptet. Überdies ist der diskontierte Prozess  $e^{-rt} e^{X_t}$  ein Martingal. Um dies zu sehen halten wir fest, dass  $(H, y)$  die Bedingung (8.1) nach Konstruktion erfüllt, was den diskontierten Prozess zu einem Supermartingal macht. Wegen der Unabhängigkeit von  $W^y$  und  $Z$  handelt es sich sogar um ein Martingal, was diese Richtung des Beweises abschließt. Für die Rückrichtung sei  $P \in \mathcal{M}^s$  strukturerhaltendes äMM. Sei  $(H, Y)$  das zugehörige Paar aus Theorem 8.1. Dann muss  $Y$  von der Gestalt  $Y(\omega, t, x) = y(x)$  für ein  $y \in \mathcal{S}$  sein, da  $Z$  unter  $P$  Lévy-Prozess ist und somit eine entsprechende Charakteristik aufweist, also ist  $P = P_y$ .  $\square$

Für  $IG(\gamma, \delta)$  bzw.  $\Gamma(\gamma, \delta)$  OU-Prozesse können äMMs so gewählt werden, dass die  $IG$  bzw.  $Gamma$  Gestalt erhalten bleibt. Unter diesen Maßen  $P_y^*$  ist  $\sigma^2 IG(\gamma, \eta)$ -OU Prozess bzw.  $\Gamma(\eta, \theta)$ -OU-Prozess. Die möglichen  $y$  aus dem obigen Theorem sind dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{IG} &= \{P_y^* \in \mathcal{M}^s \mid y(x) = \frac{1 + \eta^2 x}{1 + \delta^2 x} e^{-\frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2)x}, \eta \in \mathbb{R}_+\} \\ \mathcal{M}^\Gamma &= \{P_y^* \in \mathcal{M}^s \mid y(x) = \frac{\eta \theta}{\gamma \delta} e^{-(\eta - \gamma)x}, \eta, \theta \in \mathbb{R}_+\}\end{aligned}$$

## 9 Das BNS Modell in Aktion: Preisberechnung von Derivaten

Beispielhaft wollen wir uns mit der Anwendung des Modells von BNS zur Bewertung (europäischer) Derivate beschäftigen. Wir nehmen dabei obige Modellparameter als gegeben an und fordern überdies eine deterministische Zinsrate  $r > 0$  (d.h. es existiert ein deterministisches riskless asset  $B$  mit Dynamik  $dB_t = r B_t dt$ ). Weiter habe der BDLP  $Z$  keine Drift und das Lévy-Maß  $\nu$  habe Lebesgue-Dichte  $w$ . Dann gilt für die Kumulante  $\kappa(u) = \kappa_\nu(u) := \log \mathbb{E} e^{uZ_1}$

$$\kappa(u) = \int_0^\infty (e^{ux} - 1) w(x) dx \tag{9.1}$$

Das zu bewertende Derivat habe maturity  $T$  mit Auszahlungsfunktion  $h(X_T)$ ,  $p_t$  sei ein arbitragefreier Preis in  $t \leq T$ , also  $p_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} h(X_T) | \mathcal{F}_t)$ . Zu einem strukturerhaltenden äMM  $P^* = P_y^*$  sei  $\nu^*$  das Levy-Maß von  $Z$  unter  $P^*$ ; dann  $\nu^*(dx) = y(x)w(x)dx$  wobei  $y > 0$  mit  $\int_{\mathbb{R}_+} (\sqrt{y(x)} - 1)^2 w(x) dx < \infty$ . Unter  $P^*$  hat  $X$  die Dynamik

$$dX_t = (r - \lambda \kappa^*(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t^* + \rho dZ_{\lambda t} \tag{9.2}$$

wobei  $(W_t^*)$  Wiener Prozess bzgl.  $P^*$  ist und s.u. vom BDLP  $(Z_{\lambda t})$  (vgl. dazu Kapitel 8).

## 9.1 Transformationsansatz zur Derivatberechnung

Wir wollen nun, ähnlich wie zuvor in Kapitel 5 für exp-Lévy-Modelle, für das BNS-Modell eine Berechnungsmethode für Derivate mittels analytischer Transformierten vorstellen. Betrachte dazu die Laplace-Transformierte der Funktion  $h$ , definiert durch

$$\hat{h}(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} h(x) dx \quad (9.3)$$

und sei  $\varphi(z) := \mathbb{E}^*(e^{zX_T} | \mathcal{F}_t)$  die bedingte Laplace-Transformierte von  $X_T$ .

Wir wollen diese berechnen und benutzen dafür eine hilfreiche Berechnungsformel mit ähnlicher Aussage wie Lemma 3.3.

**Lemma 9.1** (Key formula). *Sei  $Z$  Subordinator mit Kumulante  $\kappa$  und  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  linksseitig stetig mit  $\text{Re}(f) \leq 0$  bzw.  $\text{Re}(f) \leq \hat{\theta}/(1+u)$  für ein  $u > 0$  wenn  $Z$  A2 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \exp \left( \int_0^t f(s) dZ_{\lambda s} \right) = \exp \left( \lambda \int_0^t \kappa(f(s)) ds \right) \quad (9.4)$$

*Beweisskizze.* Sei  $(t_k)_{k=1, \dots, n}$  Zerlegung von  $[0, t]$  mit Feinheit  $\pi$ . Wir verwenden die IID Eigenschaft von  $Z$  und die daraus resultierende Identität  $\kappa_t(u) = \log \mathbb{E} \exp(uZ_t) = \kappa_1(U)$  und erhalten:

$$\mathbb{E} \exp \left( \sum_k f(t_{k-1})(Z_{\lambda t_k} - Z_{\lambda t_{k-1}}) \right) \quad (9.5)$$

$$= \prod_k \mathbb{E} \exp(f(t_{k-1})(Z_{\lambda t_k} - Z_{\lambda t_{k-1}})) \quad (9.6)$$

$$= \prod_k \exp(\kappa(f(t_{k-1}))\lambda(t_k - t_{k-1})) \quad (9.7)$$

$$= \exp \left( \sum_k \kappa(f(t_{k-1}))\lambda(t_k - t_{k-1}) \right) \quad (9.8)$$

Die Bedingungen an  $f$  erlauben uns beidseitig Grenzwerte zu bilden und wir erhalten die Behauptung.  $\square$

Wir gehen in 2 Schritten vor um  $\varphi$  zu berechnen:

1. Mit  $\varepsilon(s, t) := \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(t-s)})$  folgt

$$\mathbb{E}(\exp(z\sigma_{t,T}^{2,int} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\exp(z\varepsilon(t, T)\sigma_t^2 + z \int_t^T \varepsilon(s, T) dZ_{\lambda s}) | \mathcal{F}_t) \quad (9.9)$$

$$\stackrel{\text{Key-Formula}}{=} \exp \left( z\sigma_t^2 \varepsilon(t, T) + \int_t^T \lambda \kappa(z\varepsilon(s, T)) ds \right) \quad (9.10)$$

für alle  $z$  mit  $\text{Re}(z) < \varepsilon(t, T)^{-1}\hat{\theta}$ , wobei die unabhängigen Zuwächse des Lévy-Prozess  $Z$  ausgenutzt wurde sowie die Identität

$$\sigma_{t,T}^{2,int} = \varepsilon(t, T)\sigma_t^2 + \int_t^T \varepsilon(s, T) dZ_{\lambda s} \quad (9.11)$$

2. Um  $\varphi$  zu bestimmen definiere  $\mathcal{G} = \sigma(\sigma(Z_t, t \leq T) \cup \mathcal{F}_t)$ ,  $\xi := X_t + \mu(T - t)$  und  $f(s, z) := \rho z + \frac{1}{2}(z^2 + 2\beta z)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-s)})$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \mathbb{E}^* \left( \exp \left( z \left( \xi + \beta \sigma_{t,T}^{2,int} + \rho \int_t^T dZ_{\lambda s} \right) \right) \mathbb{E}^* \left( \exp \left( z \int_t^T \sigma_s dW_s \right) \middle| \mathcal{G} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= \mathbb{E}^* \left( \exp \left( z \left( \xi + \rho \int_t^T dZ_{\lambda s} \right) + \frac{1}{2}(z^2 + 2z\beta)\sigma_{t,T}^{2,int} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= \exp \left( z\xi + \frac{1}{2}(z^2 + 2\beta z)\varepsilon(t, T)\sigma_t^2 \right) \mathbb{E}^* \left( \exp \left( \int_t^T f(s, z) dZ_{\lambda s} \right) \right) \\
&= \exp \left( z(X_t + \mu(T - t)) + (z^2 + 2\beta z)\frac{1}{2}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda(T-t)})\sigma_t^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_t^T \lambda \kappa(f(s, z)) ds \right)
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung das Einsetzungslemma für bedingte Erwartung sowie die Laplace-Transformierte der Normalverteilung und in der letzten die Key Formel benutzt wurde (für zulässiges  $z$  aus  $(a, b) \times i\mathbb{R}$  für bestimmte  $a, b$ ).

Man beachte, dass nach dem Maßwechsel  $\beta = -\frac{1}{2}, \mu = r - \lambda \kappa^*(\rho)$  ist. Im IG bzw. Gamma Fall kann das Integral in  $\varphi$  explizit berechnet werden. Weiter kann eine bedingte Dichte durch Inversion erhalten werden:

**Lemma 9.2.** *Die Verteilung von  $X_T$  - gegeben  $\mathcal{F}_t$ - ist Lebesgue-stetig mit einer Dichte  $g$ , gegeben durch*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} e^{-zx} \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\theta+is)x} \varphi(\theta + is) ds \quad (9.12)$$

mit  $\theta \in (a, b)$  beliebig.

*Beweis.* Sei  $z = \theta + ix$  ein zulässiger Punkt; dann gilt (vgl. obige Rechnung) mit  $c := \xi + \rho \int_t^T dZ_{\lambda s}$

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| &\leq \mathbb{E} \left( \left| e^{\theta c} e^{ixc} e^{\frac{1}{2}(z^2 + 2z\beta)\sigma_{t,T}^{2,int}} \right| \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \left| e^{\theta c} e^{\frac{1}{2}(\theta^2 + 2\theta\beta)\sigma_{t,T}^{2,int}} e^{ixc} e^{\frac{1}{2}(-x^2 + 2ix\theta + 2i\theta\beta)\sigma_{t,T}^{2,int}} \right| \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left( \left| e^{\theta c} e^{\frac{1}{2}(\theta^2 + 2\theta\beta)\sigma_{t,T}^{2,int}} e^{\frac{1}{2}(-x^2)\sigma_t^2 \varepsilon(t, T)} \right| \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= e^{\frac{1}{2}(-x^2)\sigma_t^2 \varepsilon(t, T)} \mathbb{E} \left( e^{\theta c} e^{\frac{1}{2}(\theta^2 + 2\theta\beta)\sigma_{t,T}^{2,int}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2\sigma_t^2 \varepsilon(t, T)} \varphi(\theta)
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Ungleichung  $\sigma_{t,T}^{2,int} \geq \sigma_t^2 \varepsilon(t, T)$  benutzt wurde. Insbesondere ist  $|\varphi(\theta + ix)| \leq \varphi(\theta) e^{-\frac{1}{2}x^2 \sigma_t^2 \varepsilon(t, T)}$ . Damit ist

$$\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} |\varphi(z)| dz \leq \varphi(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 \sigma_t^2 \varepsilon(t, T)} dx = \varphi(\theta) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_t^2 \varepsilon(t, T)} < \infty \quad (9.13)$$

(für die letzte Gleichung einnere man sich an die Dichte der Normalverteilung). Definieren wir nun den Maßwechsel

$$dP^E = e^{\theta X_T|t} \varphi(\theta)^{-1} dP$$

so gilt

$$\varphi^E(ix) = \mathbb{E}_{P_E} \left( e^{ixX_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_P \left( e^{ixX_T} e^{\theta X_T|t} \varphi(\theta)^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \varphi(\theta + ix) \varphi(\theta)^{-1}$$

Nach dem oben gezeigten ist diese Fourier-Transformierte integrierbar, also erhalten wir mit dem Inversionssatz von Lévy

$$\frac{dP_E^{X_T|t}}{d\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \varphi^E(ix) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \varphi(\theta + ix) \varphi(\theta)^{-1} dt$$

und anschließender Rücktransformation mit

$$\frac{dP^{X_T|t}}{d\lambda} = \frac{dP_E^{X_T|t}}{d\lambda} \frac{dP^{X_T|t}}{dP_E^{X_T|t}}$$

die Behauptung.  $\square$

Mithilfe von  $\varphi$  und  $\hat{h}$  können wir den Derivatpreis ausdrücken durch

$$p_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \varphi(z) \hat{h}(z) dz \quad (9.14)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X_T)|\mathcal{F}_t) &= \int h(x) dP^{X_T|t}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int h(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-(\theta+ix)x} \varphi(\theta+ix) dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int h(x) e^{-(\theta+ix)x} dx \varphi(\theta+ix) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \varphi(z) \hat{h}(z) dz \end{aligned}$$

Dieser Wert kann (in vielen Fällen) numerisch berechnet werden, falls  $\hat{h}$ ,  $\varphi$  in geschlossener Form vorliegen (für letzteres ist die Gestalt der Kumulante entscheidend). Dies ist z.B. der Fall, wenn  $h$  Auszahlungsfunktion einer europäischen Put- bzw. Calloption ist und  $\sigma^2 D - OU$ -Prozess ist mit  $D \in \{IG, Gamma\}$ .

## 9.2 Beispiel: Europäischer Call bzw. Put im IG- bzw. Gamma-OU-Modell

Im Falle eines europäischen Calls ist  $h(x) = (\mathrm{e}^x - K)^+$  und es gilt für  $\mathrm{Re}(z) > 1$

$$\hat{h}(z) = \int \mathrm{e}^{-zx} (\mathrm{e}^x - K) \mathbb{1}_{(\log K, \infty)} dx \quad (9.15)$$

$$= \frac{1}{z(z-1)} K^{1-z} \quad (9.16)$$

Liegt ein europäischer Put vor, d.h. ist  $h(x) = (K - \mathrm{e}^x)^+$ , so ist analog für  $\mathrm{Re}(z) > 0$   $\hat{h}(z) = \frac{1}{z(z-1)} K^{1-z}$ . Nach Gleichung 9.14 müssen wir noch den Wert  $\int_t^T \kappa(f(s, z)) ds$  berechnen. Die entsprechenden Werte im IG- bzw. Gamma-Prozessfall lassen sich in [20] finden und lauten:

*IG*( $\gamma, \delta$ ) :

$$\begin{aligned} \int_t^T \kappa(f(s, z)) ds &= \frac{\delta}{\gamma} \left( \sqrt{\gamma^2 - 2g_1} - \sqrt{\gamma^2 - 2z\rho} \right) \\ &+ \frac{2\delta g_2}{\lambda \sqrt{2g_2 - \gamma^2}} \left( \arctan \left( \sqrt{\frac{\gamma^2 - 2z\rho}{2g_2 - \gamma^2}} \right) - \arctan \left( \sqrt{\frac{\gamma^2 - 2g_1}{2g_2 - \gamma^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

*Gamma*( $\gamma, \delta$ ) :

$$\int_t^T \kappa(f(s, z)) ds = \left( \gamma \log \left( \frac{\gamma - g_1}{\gamma - z\rho} \right) + g_2 \lambda (T - t) \right) \frac{\delta}{\lambda(\gamma - g_2)}$$

mit

$$\begin{aligned} g_1 &:= z\rho + \frac{1}{2}(z^2 + 2\beta z)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(T-t)}) \\ g_2 &:= z\rho + \frac{1}{2}(z^2 + 2\beta z) \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen kann der Call- bzw. Putpreis durch numerische Approximation des Integrals in 9.14 ermittelt werden. Methoden wie die der Fast Fourier Transform und ähnliches sind hierbei nützlich, da die numerische Integration von stark oszillierenden Funktionen wie die oben betrachteten heikel sein kann. Bei dem Beispiel unten waren solche Methoden allerdings nicht erforderlich.

In der Abbildung unten sind Werte für ein Gamma(10,1)-Modell mit Parametern  $T = 1, t = 0, X_t = 0, \sigma_t = 0.1, \theta = 1.1, \rho = -1, \lambda = 2, \beta = -0.5, \mu = r - \lambda \frac{\delta\rho}{\gamma - \rho}$  zu finden. Der verwendete R-Code befindet sich im Anhang.

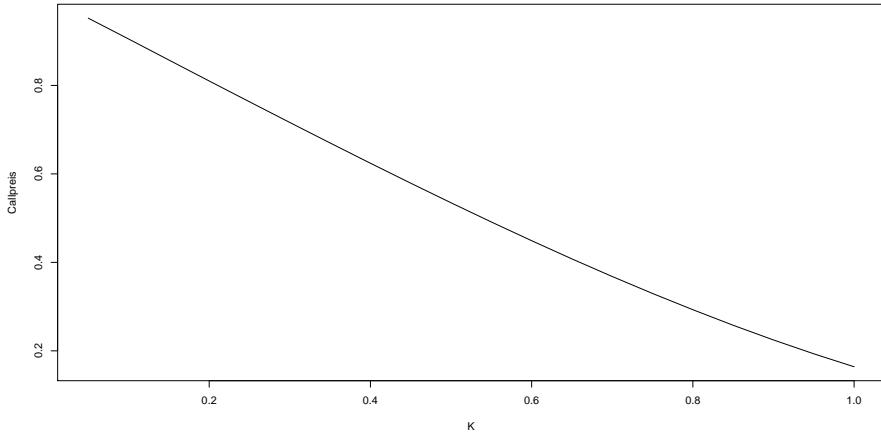


Abbildung 8: Beispielhafte Callpreiswerte im Gamma(10,1)-BNS-Modell in Abhängigkeit vom Strikepreis K

## 10 Ober- und Untergrenzen für den arbitragefreien Preisprozess

Da das BNS-Modell nicht vollständig ist ergibt sich für jedes äMM  $Q \in \mathcal{M}$  ein arbitragefreier Preis zum Zeitpunkt  $t$  für das Derivat mit Auszahlung  $h(X_T)$ . Bezeichnen wir mit  $p_t(Q) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(h(X_T) | \mathcal{F}_t)$  diesen Preis in Abhängigkeit von  $Q$ , so ist  $I_t := \{p_t(Q) | Q \in \mathcal{M}\}$  ein Intervall (ein Standardresultat aus der Finanzmathematik). Im folgenden benutzen wir die Transformation  $\tilde{h}(x) = h(\log x)$ , also die Auszahlung bzgl. des Preisprozesses  $S_T$ . Wir fordern:

$$\begin{aligned} \tilde{h} &\text{ ist konvex} \\ \tilde{h}(0) &= 0 \\ 0 \leq \tilde{h}(x) &< x \\ g(x) := x - \tilde{h}(x) &\text{ ist beschränkt} \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für obere und untere Preisschranken, also für  $\inf I_t$  und  $\sup I_t$ . Offensichtlich ist  $I_t \subset [e^{-r(T-t)} \tilde{h}(e^{-r(T-t)} S_t, S_t)]$ , denn andernfalls beständen Arbitragemöglichkeiten. Wir arbeiten mit *Black-Scholes-Preisen*, definiert durch:

$$p_t^{BS}(x, \sigma) := \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} \tilde{h}(Y_T) \mid Y_t = x \right)$$

Dabei sei  $Y$  Lösung der Black-Scholes-Gleichung mit deterministischer Volatilitätsfunktion  $\sigma$ , d.h.

$$dY_t = Y_t(rdt + \sigma_t dW_t)$$

bzgl. des eindeutigen äMM  $P^*$ . Die Black-Scholes Differentialgleichung besagt

$$p_t^{BS}(x, \sigma) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left( \tilde{h} \left( x e^{r(T-t)} \exp \left( \left( \int_t^T \sigma_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{N} - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_s^2 ds \right) \right) \right) \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial p_t^{BS}(x, \sigma)}{\partial t} + rx \frac{\partial p_t^{BS}(x, \sigma)}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 p_t^{BS}(x, \sigma)}{\partial x^2} - rp_t^{BS}(t, \sigma) = 0 \quad (10.2)$$

wobei  $\mathcal{N}$  standardnormalverteilte Zufallsgröße sei.

**Theorem 10.1.** Es ist

$$\begin{aligned} \sup I_t &= S_t \\ \inf I_t &= p_t^{BS}(S_t, m) \end{aligned}$$

mit  $m_s := \sigma_t e^{-\frac{\lambda}{2}(s-t)}$ . Ausserdem ist für  $I'_t := \{p_t(Q) : Q \in \mathcal{M}^s\}$

$$\begin{aligned} \sup I_t &= \sup I'_t \\ \inf I_t &= \inf I'_t \end{aligned}$$

Wir beweisen dieses Theorem in mehreren Lemmata.

**Lemma 10.2.** Es gilt  $\inf I_t \geq p_t^{BS}(S_t, m)$

*Beweis.* Sei  $Q \in \mathcal{M}$ . Es gilt

$$dS_t = S_{t-} (b_t^Q dt + \sigma_t dW_t^Q + dM_t^Q)$$

mit  $M_t^Q := (e^{\rho x} - 1) * (\mu^Z - \nu^Z)$  (siehe (8.3)). Wir benutzen dies und die Ito-Formel auf den Prozess  $(p_T^{BS}(S_t, m))_{t \geq t}$  und erhalten

$$\begin{aligned} e^{-rT} p_T^{BS}(S_T, m) &= e^{-rt} p_t^{BS}(S_t, m) + \int_t^T \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial x} d(e^{-rs} S_s) \\ &+ \int_t^T e^{-rs} \left( \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial t} + r S_{s-} \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S_{s-}^2 \frac{\partial^2 p_t^{BS}}{\partial x^2} - r p_s^{BS} \right) ds \\ &+ \sum_{t < s \leq T} e^{-rs} \left( p_s^{BS}(S_s, m) - p_s^{BS}(S_{s-}, m) - \frac{\partial p_s^{BS}}{\partial x} \Delta S_s \right) \end{aligned}$$

Wir benutzen die BS-Differentialgleichung (10.1) und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_t^T e^{-rs} \left( \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial t} + r S_{s-} \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S_{s-}^2 \frac{\partial^2 p_t^{BS}}{\partial x^2} - r p_s^{BS} \right) ds \\ &= \int_t^T e^{-rs} \left( \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial t} + r S_{s-} \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial x} + \frac{1}{2} m_s^2 S_{s-}^2 \frac{\partial^2 p_t^{BS}}{\partial x^2} - r p_s^{BS} \right) ds \\ &+ \int_t^T e^{-rs} \frac{1}{2} (\sigma_s^2 - m_s^2) S_{s-}^2 \frac{\partial^2 p_s^{BS}}{\partial x^2} ds \geq 0 \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung wurde  $\sigma_s^2 \geq m_s^2$  f.a.  $s \geq t$  sowie  $S_{s-} \geq p_s^{BS}$  und die Konvexität von  $p_s(x, m)$  benutzt. Weiter gilt

$$\sum_{t < s \leq T} e^{-rs} \left( p_s^{BS}(S_s, m) - p_s^{BS}(S_{s-}, m) - \frac{\partial p_s^{BS}}{\partial x} \Delta S_s \right) \geq 0$$

da  $f(x) - f(y) - f'(x)(x - y) \geq 0$  für konvexe und differenzierbare Funktionen  $f$  gilt und damit

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial x} d(e^{-rs} S_s) &\leq e^{-rT} p_T^{BS}(S_T, m) - e^{-rt} p_t(S_t, m) \\ &\stackrel{p_t^{BS}(x, m) \leq x}{\leq} e^{-rT} S_T - e^{-rt} p_t^{BS}(S_t, m) \end{aligned}$$

Der Prozess  $\left( \int_t^T \frac{\partial p_t^{BS}}{\partial x} d(e^{-rs} S_s) \right)_{T \geq 0}$  ist Submartingal bzgl.  $Q$ , da er lokales Martingal bzgl.  $Q$  ist und aufgrund der obigen Ungleichung nach oben durch ein Martingal beschränkt ist. Somit ergibt sich

$$\mathbb{E}_Q(e^{-rT} \tilde{h}(S_T) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q(e^{-rT} p_T^{BS}(S_T, m) | \mathcal{F}_t) \geq e^{-rt} p_t(S_t, m)$$

□

Wir wollen nun zeigen  $\sup I'_t = S_t$ ,  $\inf I'_t = p_t^{BS}(S_t, m)$ ; wegen der Markov-Eigenschaft von  $(S_t, \sigma_t^2)$  reicht dies für  $t = 0$  zu zeigen.

**Lemma 10.3.** *Sei  $Q_1, Q_2, \dots \in \mathcal{M}$  Folge von äMMs. Dann gilt  $p_0(Q_n) \rightarrow S_0$  genau dann, wenn  $Q_n(S_T \in \cdot)$  schwach gegen  $\delta_0$  konvergiert.*

*Beweis.* Vgl. [22], Chap. 2.7

□

**Lemma 10.4.** *Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$  mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty y_n(x) w(x) dx = \infty \quad (10.3)$$

und seien  $Q_n$  die zugehörigen äMMs in  $\mathcal{M}^s$ . Dann gilt  $\lim_n p_0(Q_n) = S_0$ .

*Beweis.* Bezuglich  $Q_n$  gilt

$$S_T = \exp \left( rT + \rho Z_{\lambda T} - \lambda T \kappa^n(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_{0,T}^{2*} + \int_0^T \sigma_s dW_s^n \right)$$

vgl. Gleichung (8.7) mit  $W^n, Z$  stochastisch unabhängig. Weiter gilt für  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < a < 1$

$$Q_n(e^{-rT} S_t > \varepsilon) \leq Q_n(e^{\rho Z_{\lambda T} - \lambda T \kappa^n(\rho)} > \sqrt{\varepsilon}) + Q_n(e^{-\frac{1}{2} \sigma_T^{2*} + \int_0^T \sigma_s dW_s^n} > \sqrt{\varepsilon}) \quad (10.4)$$

$$\stackrel{Markov-}{\leq} \varepsilon^{-\frac{a}{2}} \left( \mathbb{E} Q_n(e^{a(\rho L_{\lambda T} - \lambda T \kappa^n(\rho))}) + \mathbb{E} Q_n(e^{\frac{1}{2}(a^2-a)\sigma_{0,T}^{2,int}}) \right) \quad (10.5)$$

$$= \varepsilon^{-\frac{a}{2}} \left( e^{\lambda T(\kappa^n(a\rho) - a\kappa^n(\rho))} + \mathbb{E} Q_n(e^{\frac{1}{2}(a^2-a)\sigma_{0,T}^{2,int}}) \right) \quad (10.6)$$

Da  $f(x) := e^{a\rho x} - 1 - a e^{\rho x} + a$  nichtpositive monoton fallende Funktion ist für  $a \in (0, 1)$  (beachte dabei  $\rho \leq 0$ ) und  $\kappa^n(\theta) = \int_{\mathbb{R}_+} (e^{\theta x} - 1) w(x) y_n(x) dx$  (vgl. Kapitel 8) gilt

$$\begin{aligned} \kappa^n(a\rho) - a\kappa^n(\rho) &= \int w(x) y_n(x) f(x) dx \\ &\leq f(1) \int_1^\infty y_n(x) w(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \text{ nach Vor. (10.3)} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$e^{\lambda T(\kappa^n(a\rho) - a\kappa^n(\rho))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\begin{aligned} \log \mathbb{E} Q_n \left( e^{\frac{1}{2}(a^2-a)\sigma_{0,T}^{2,int}} \right) &\stackrel{(9.9)}{=} \log e^{\frac{1}{2}(a^2-a)\sigma_0^2 \varepsilon(0,T) + \int_0^T \lambda \kappa_n(\frac{1}{2}(a^2-a)\varepsilon(s,T)) ds} \\ &\leq \int_0^T \kappa_n \left( \frac{1}{2}(a^2-a)\varepsilon(s,T) \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \left( e^{\frac{a^2-a}{2}\varepsilon(s,T)x} - 1 \right) y_n(x) w(x) ds dx \\ &\leq \int_0^T \left( e^{\frac{a^2-a}{2}\varepsilon(s,T)} - 1 \right) ds \int_1^\infty y_n(x) w(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung wurde benutzt, dass  $g(x) := \int_0^T \left( e^{\frac{a^2-a}{2}\varepsilon(s,T)x} - 1 \right) ds$  nichtpositiv und monoton fallend ist (da für  $a \in (0, 1)$ :  $\frac{a^2-a}{2} < 0$ ). Mit Lemma 10.3 und der Abschätzung (10.6) ergibt sich damit die Behauptung.  $\square$

Wir haben somit die obere Grenze des Preisintervalls bestimmt. Man beachte, dass es eine wie in Lemma 10.4 geforderte Folge  $(y_n)$  gibt;  $y_n(x) := e^{c_n x}$  mit  $\lim_n c_n = \hat{\theta}$  erfüllt die Bedingung.

**Lemma 10.5.** *Sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  so, dass  $\int_{\mathbb{R}_+} (1 \wedge x) f(x) w(x) dx < \infty$  und sei  $(y_n)$  Folge in  $\mathcal{S}$  mit*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) &= 0 \\ y_n(x) &\leq f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt für die zu  $(y_n)$  äMMS  $Q_n \in \mathcal{M}^s$ :

$$p_0(Q_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p_0^{BS}(S_0, m) \text{ mit } m_t = \sigma_0 e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

*Beweis.* Wegen (8.7) und den Berechnungen in Kapitel 9.1 ergibt sich

$$\mathbb{E}_{Q_n} (e^{i\theta X_T}) = \exp \left( i\theta(X_0 + Tr) - \frac{1}{2}(\theta^2 + i\theta) \int_0^T m_s^2 ds \right) \quad (10.7)$$

$$\times \exp \left( \lambda \left( \int_0^T \kappa^n(f(s, i\theta)) ds - i\theta T \kappa^n(\rho) \right) \right) \quad (10.8)$$

mit

$$\begin{aligned} f(s, i\theta) &= \rho i\theta - \frac{1}{2}(\theta^2 + i\theta)\varepsilon(s, T) \\ \int_0^T m_s^2 ds &= \varepsilon(o, T)\sigma_0^2 \end{aligned}$$

Unter erneuter Verwendung von  $\kappa^n(\theta) = \int_{\mathbb{R}_+} (e^{\theta x} - 1)w(x)y_n(x) dx$  erhalten wir

$$\int_0^T \kappa^n(f(s, i\theta)) ds = \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T (e^{f(s, i\theta)x} - 1) y_n(x) w(x) ds dx$$

Es gilt wegen der Beschränktheit und Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  für jedes  $\theta$

$$\begin{aligned} \text{f.a. } \theta \in \mathbb{R} \text{ ex. Konstante } c > 0, \text{ so dass} \\ |e^{f(s, i\theta)x} - 1| &\leq c(1 \wedge x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq s \leq T \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^T \kappa^n(f(s, i\theta)) ds - i\theta T \kappa^n(\rho) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Dom.} \text{ } K_{\text{onv.}}} 0$$

Wir folgern aus (10.7)

$$Q_n(X_T \in \cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \mathcal{N}(\gamma_T, \delta_T)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_T &:= X_0 + rT - \frac{1}{2} \int_0^T m_s^2 ds \\ \delta_T &:= \int_0^T m_s^2 ds \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $g(x) = x - \tilde{h}(x)$  beschränkt und konkav, ist also insbesondere  $\mathcal{N}(\gamma_T, \delta_T)$ -f.ü. stetig. Damit können wir [14] Satz 13.16 (Portmanteau-Theorem)

benutzen und erhalten

$$\begin{aligned}
p_0(Q_n) &= e^{-rT} \mathbb{E}_{Q_n} \left( \tilde{h}(e^{X_T}) \right) \\
&= -e^{-rT} \int \left( e^{X_T} - \tilde{h}(e^{X_T}) \right) dQ_n + \int e^{-rT} e^{X_T} dQ_n \\
&= -e^{-rT} \int \left( e^x - \tilde{h}(e^x) \right) dQ_n^{X_T}(x) + \int e^{-rT} e^x dQ_n^{X_0}(x) \\
&= -e^{-rT} \int \left( e^x - \tilde{h}(e^x) \right) dQ_n^{X_T}(x) + S_0 \\
&\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} -e^{-rT} \int \left( e^x - \tilde{h}(e^x) \right) d\mathcal{N}(\gamma_T, \delta_T)(x) + S_0 \\
&= e^{-rT} \int \tilde{h}(e^x) d\mathcal{N}(\gamma_T, \delta_T)(x) - e^{-rT} \left( e^{X_0 + rT - \frac{1}{2} \int_0^T m_s^2 ds} e^{\frac{1}{2} \int_0^T m_s^2 ds} \right) + S_0 \\
&= e^{-rT} \int \tilde{h}(e^x) d\mathcal{N}(\gamma_T, \delta_T)(x) \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left( \tilde{h} \left( x e^{rT} \exp \left( \left( \int_0^T \sigma_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{N} - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds \right) \right) \right) \\
&= p_0^{BS}(S_0, m)
\end{aligned}$$

wobei wir die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung verwendet haben sowie die Martingaleigenschaft von  $e^{-rt} S_t$  bzgl.  $Q_n$ .  $\square$

Eine Folge  $(y_n)$  wie in Lemma 10.5 existiert, betrachte  $y_n(x) := e^{c_n x}$  mit  $\lim_n c_n = -\infty$  (die zugehörigen Transformationen sind also Esscher-Transformationen). Wir haben gezeigt

$$\begin{aligned}
\inf_{Q \in \mathcal{M}} p_0(Q) &= \inf_{Q \in \mathcal{M}^s} p_0(Q) = \inf_{Q \in \mathcal{M}^E} p_0(Q) = p_0^{BS}(0, S_0) \\
\sup_{Q \in \mathcal{M}} p_0(Q) &= \sup_{Q \in \mathcal{M}^s} p_0(Q) = \sup_{Q \in \mathcal{M}^E} p_0(Q) = S_0
\end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{M}^E = \{Q^y : y(x) = e^{\eta x}, \eta \in (-\infty, \hat{\theta})\}$  die Menge der Esscher-Transformierten in diesem Modell bezeichnet. Analog zum Beweis von Lemma zeigt man dass die Abbildung  $J : \eta \mapsto p_0(Q^\eta)$ , wobei  $Q^\eta$  das zu  $\eta \in (-\infty, \hat{\theta})$  in  $\mathcal{M}^E$  zugehörige äMM ist, stetig ist. Damit ist  $\{p_0(Q) : Q \in \mathcal{M}^E\} = J((-\infty, \hat{\theta}))$  ein Intervall und der Beweis von Theorem 10.1 vollständig.

Abschließend geben wir noch ein Resultat aus [20] an, dass den Spezialfall von IG/Gamma-Modellen abdeckt.

### Korollar 10.6.

- (i) Sei  $\sigma_t^2$  IG( $\delta, \gamma$ )-OU Prozess bzgl.  $P$ . Dann ist  $I_t^{IG} := \{p_t(Q) : Q \in \mathcal{M}^{IG}\}$  Intervall mit  $\inf I_t^{IG} = p_t(S_t, m)$ .
- (ii) Ist  $\sigma_t^2$   $\Gamma(\delta, \gamma)$ -OU Prozess bzgl.  $P$  so ist  $I_t^\Gamma := \{p_t(Q) : Q \in \mathcal{M}^\Gamma\}$  Intervall mit  $\inf I_t^\Gamma = \inf I_t$  und  $\sup I_t^\Gamma = \sup I_t$

*Beweis.* Siehe [20]  $\square$

## 11 Kurzfazit

Wir haben in den vorangegangenen Kapiteln gesehen, wie mithilfe von Lévy-Prozessen und der dahinterstehenden Theorie interessante neue finanzmathematische Modelle aufgestellt und untersucht werden können. Die vorgestellten Modelle sind geeigneter als das Black-Scholes-Modell, um reale Daten abzubilden, da ihnen eine größere Flexibilität zu eigen ist. Gleichzeitig zeigen die Rechnungen innerhalb der Modelle, dass diese mathematisch handhabbar sind und somit nicht bloß theoretischen Zugewinn bedeuten. Natürlich bieten Modelle mit allgemeineren treibenden Prozessen eine noch größere Flexibilität in der Modellierung, erfordern aber im Gegenzug häufig aufwändigere Rechnungen zur Bestimmung von etwa Optionspreisen. Insgesamt stellen Lévy-Prozesse also ein adequates Mittel dar, um mit relativ geringem Aufwand eine gute Näherung an das tatsächliche Marktgeschehen zu erhalten.

## A Anhang

**Theorem A.1** (Doobs Martingalungleichung). Sei  $M$  càdlàg Submartingal mit Werten in  $\mathbb{R}_+$ . Dann gilt für alle  $C > 0$  und  $p \geq 1$

$$P \left( \sup_{t \leq T} M_t \geq C \right) \leq \frac{\mathbb{E}(M_T^p)}{C^p} \quad (\text{A.1})$$

Für  $p > 1$  gilt überdies

$$\left\| \sup_{t \leq T} M_t \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M\|_p \quad (\text{A.2})$$

**Theorem A.2** (Girsanov).  $X$  sei d-dimensionales Semimartingal auf einem filtrierten Raum  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  mit Charakteristik  $(B, C, \nu)$  bzgl.  $h \in \mathcal{C}$  mit einem wachsenden previsiblen Prozess  $A$ , so dass  $C^{ij} = c^{ij} \cdot A$ . Weiter sei  $\frac{dP'}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$  lokal äquivalentes W-Maß. Dann existiert eine  $\mathcal{P}$  meßbare nichtnegative Funktion  $Y$  und ein d-dimensionaler Prozeß  $\beta$  mit

$$|h(x)(Y-1)| * \nu_t < \infty \quad (\text{A.3})$$

$$\left| \sum_{j \leq d} c^{ij} \beta^j \right| \cdot A_t < \infty \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{j, k \leq d} \beta^j c^{jk} \beta^k \cdot A_t < \infty \quad (\text{A.5})$$

$P' - f.s.$  für alle  $t$  so dass  $X$  bzgl.  $P'$  die Charakteristik  $(B', C', \nu')$  hat mit

$$B'^i = B^i + \sum_{j \leq d} c^{ij} \beta^j \cdot A + h^i(x)(Y-1) * \nu \quad (\text{A.6})$$

$$C' = C \quad (\text{A.7})$$

$$\nu' = Y \cdot \nu \quad (\text{A.8})$$

$Y, \beta$  erfüllen obige Bedingungen genau dann, wenn

$$YZ_- = M_{\mu_X}^P(Z|\tilde{\mathcal{P}})$$

$$\langle Z^c, X^{i.c} \rangle = \left( \sum_{j \leq d} c^{ij} \beta^j Z_- \right) \cdot A$$

wobei  $Z$  der Dichteprozess ist und  $M_{\mu_X}^P(Z|\tilde{\mathcal{P}})$  die in [12], §3 definierte bedingte Erwartung bzgl.  $\tilde{\mathcal{P}}$  ist. Für Details zu obigem Satz und dessen Anwendung müssen wir auf [12] verweisen.

## B Verwendete R-codes

```
#Simulation von Brownschen Bewegungen

Paket:sde
plot( BM(x=0, t0=0, T=100, N=10000))

#Poisson-Prozess-Simulation (mittels Simulation der Zuwächse)

range<-10
lambda<-1
epsilon<-0.1
points<-range/epsilon
eps<-1/epsilon
n<-range/epsilon
x<-seq(0,range,by=epsilon)
u<-rpois(n+1,lambda*epsilon)
y<-seq(0,range,by=epsilon)
for (i in 1:(points+1)){
y[i]<-sum(u[1:i])}
plot(x,y,type="s",main="Poisson-Prozess",xlab="time",ylab="y",cex=1,
col="red",pch=1)

#Gamma-Prozess Simulation (mittels Simulation der Zuwächse)

range<-10
gamma<-2
delta<-1
epsilon<-0.1
points<-range/epsilon
eps<-1/epsilon
n<-range/epsilon
x<-seq(0,range,by=epsilon)
u<-rgamma(n+1,gamma*epsilon,delta)
y<-seq(0,range,by=epsilon)
for (i in 1:(points+1)){
y[i]<-sum(u[1:i])}
plot(x,y,type="s",main="Gamma-Prozess",xlab="time",ylab="y",cex=1,
col="red",pch=1)
```

```

#IG Simulation (mittels Simulation der Zuwächse)

range<-10
gamma<-5
delta<-0.2
epsilon<-0.1
points<-range/epsilon
eps<-1/epsilon
n<-range/epsilon
x<-seq(0,range,by=epsilon)
u<-rinvgauss(n+1, gamma*epsilon, delta)
y<-seq(0,range,by=epsilon)
for (i in 1:(points+1)){
  y[i]<-sum(u[1:i])}
plot(x,y,type="s",main="Inverse-Gaussian Prozess",xlab="time",ylab="y",cex=1,
  col="red",pch=1)

#Bewertung im Merton-Modell
#BS-Preise

Callpreis<-function(K,sigma=0.7,St=100,tau=0.5,r=0.05){
  d1<-(log(St/(K*exp(-r*(tau))))+(tau)*(sigma^2)/2)/(sigma*sqrt(tau))
  d2<-(log(St/(K*exp(-r*(tau))))-(tau)*(sigma^2)/2)/(sigma*sqrt(tau))
  z<-St*pnorm(d1)-K*exp(-r*(tau))*pnorm(d2)
  return(z)}

#Merton-Preise

n<-100
Mertoncall<-
  function(K,r=0.05,sigma=0.3,St=100,lambda=4,mu=-0.3,tau=0.5,delta=0.1){
    a<-seq(0,n,1)
    eta<-exp(mu+delta^2/2)-1
    sigmai<-sqrt(sigma^2+(a*delta^2)/tau)
    xi<-St*exp((a*delta^2)/2-lambda*eta*tau+a*mu)
    z<-exp(-tau*lambda)*(((tau*lambda)^a)/factorial(a))*Callpreis(K,sigmai,xi,tau,r)
    return(sum(z))}

x<-seq(30,120,0.1)
y<-sapply(x,Mertoncall)
plot(x,y,type="l",col="red",xlab="strike Preis K",ylab="Callpreis")
z<-sapply(x,Callpreis)
lines(x,z,type="l",col="green",xlab="strike Preis K",ylab="Callpreis")

```

```

#Histogramm der HSI-Returns

daxi<-read.csv("C:/levy/hsi.csv", header=T)
z<-daxi[,1]
z2<-z[2:length(z)]
x<-as.Date(z)
y1<-daxi[,2]
y<-log(y1)
u<-diff(-y)
v<-u-mean(u)
HSIReturns<-v/sd(v)
hist(HSIReturns, breaks=200, freq=FALSE)
s = 1
m = 0
curve(dnorm(x, mean=m, sd=s), add=TRUE)
k<-mean(HSIReturns^4)
s<-mean(HSIReturns^3)

#Preise im Gamma-BNS-Modell (analog im IG-Fall)
#Paket:elliptic

X_t<-0
sigma_t<-0.1
T<-1
t<-0
r<-0.05
theta<-1.1
gamma<-10
delta<-1
rho<--1
lambda<-2
K<-0.05
beta<--0.5
mu<-r-lambda*((delta*rho)/(gamma-rho))

kappaaint<-function(x){g_1<-complex(1,theta,x)*rho+(1/2)*(complex(1,theta,x)^2+
2*beta*complex(1,theta,x))*(1-exp(-lambda*(T-t)))
g_2<-complex(1,theta,x)*rho+(1/2)*(complex(1,theta,x)^2+2*beta*complex(1,theta,x))
u<-(gamma*log((gamma-g_1)/(gamma-complex(1,theta,x)*rho))+g_2*lambda*(T-t))*
(delta/(lambda*(gamma-g_2)))
return(u)}

hath<-function(x){u<-1/(complex(1,theta,x)*complex(1,theta-1,x))*
K^(1-complex(1,theta,x))

```

```

return(u)}

phi<-function(x){u<-exp(complex(1,theta,x)*(X_t+mu*(T-t))+  

(complex(1,theta,x)^2+2*beta*complex(1,theta,x))*(1/2)  

*lambda^(-1)*(1-exp(-lambda*(T-t)))*sigma_t^2+lambda*kappaInt(x))  

return(u)}

f<-function(x){return(phi(x)*hath(x))}

intz<-myintegrate(f,-Inf,Inf)
p_t<-(exp(-r*(T-t)))*(intz/(2*pi))
p_t

WertefürK<-seq(0.05,1,0.05)
PreisefürCall<-c(0.952,0.905,0.8574,0.81,0.763,0.71622,0.6699,0.6241,0.579,0.5347  

,0.4913,0.449,0.4078,0.368,0.3297,0.293,0.2578,0.2246,0.1933,0.164)
plot(WertefürK,PreisefürCall,type="l",xlab="K", ylab="Callpreis")

```

## C Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

SDE: Stochastische Differentialgleichung (*stochastic differential equation*)

PIID: Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen („Process with Independent and identically distributed increments“)

$\Delta X_t$ : Der Sprungprozess von  $X$  im Punkt  $t$ , d.h.  $\Delta X_t := X_t - \lim_{s \nearrow t} X_s$ . Wir setzen  $\Delta X_0 := 0$

$Z$ : Ein Lévy-Prozess

$\nu$ : Lévy Maß eines Lévy-Prozesses  $Z$ . Soll die Abhängigkeit von  $Z$  betont werden, so schreiben wir  $\nu_Z$

$u^T$ : Das Transponierte eines Vektors  $u \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{O}$ : Die optionale  $\sigma$ -Algebra, erzeugt durch die adaptierten càdlàg-Prozesse.

$\mathcal{P}$ : Die previsible  $\sigma$ -Algebra, erzeugt durch die adaptierten linksseitig stetigen Prozesse ( $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ )

PZM: Poissonzufallsmaß

$\Phi$ : Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, d.h.  $\Phi(u) := \mathcal{N}(0, 1)((-\infty, u))$

$\delta_x$ : Einpunktmaß/Dirac-Maß im Punkt  $x$

$\mu^X, \nu^X$ : Sprungmaß und Kompensator des Lévy-Prozesses  $X$ . Der Kompensator ist dabei definiert durch  $\nu^X(ds, dx) = \nu(dx)ds$  wobei  $\nu$  das zu  $X$  gehörende Lévy-Maß ist.

$\mathcal{A}$ : Prozesse von integrierbarer Variation

$\mathcal{A}_+$ : Wachsende Prozesse von integrierbarer Variation

$\mathcal{FV}$ : Prozesse mit beschränkter Variation

$x.y$  für  $x, y \in \mathbb{R}^d$ : Standardskalarprodukt der Vektoren  $x, y$

$\zeta(u)$  Analytische Transformierte einer Verteilung  $Q$ , d.h.  $\zeta(u) = \int e^{ux} dQ(x)$  wo diese existiert

$\kappa$ : Kumulante eines PIID-Prozesses, d.h. für einen PIID Prozess  $X$

$$\kappa(u) := \log \mathbb{E} e^{uX_1}$$

# Literatur

- [1] Alsmeyer, G. Wahrscheinlichkeitstheorie Skript
- [2] Bates, D. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options
- [3] Barndorff-Nielsen,O.E. und N.Shephard (2001): Integrated OU processes and non-Gaussian OU-based stochastic volatility models.
- [4] Barndorff-Nielsen,O.E. und N.Shephard und E. Nicolato(2001): Some recent developments in stochastic volatility modelling
- [5] Barndorff-Nielsen,O.E.(1999): Superposition of Ornstein Uhlenbeck Type Processes
- [6] Barndorff-Nielsen,O.E. und N.Shephard (2000): Modelling by Lévy Processes for Financial Econometrics
- [7] Bertoin, J. Lévy-Processes Cambridge University Press
- [8] Carr P., Chang E., Madan D.: The Variance Gamma Process and Option Pricing (1998)
- [9] Chesney M., Monique,J. und Yor M. (2009): Mathematical Methods for Financial Markets. *Springer-Verlag*
- [10] Cont, R., Tankov P. Financial Modelling With Jump Processes
- [11] Eberlein, E. Jump Processes
- [12] A. N. Shiryaev und J. Jacod (2003): Limit Theorems for Stochastic Processes. *Springer-Verlag*
- [13] Jurek, Z. und Vervaat, W. (1983): An Integral Representation for Selfdecomposable Banach Space Valued Random Variables
- [14] Klenke, A. Wahrscheinlichkeitstheorie 2. Auflage
- [15] Kou, S.G. Lévy processes in Asset Pricing
- [16] Kunita, H. (2004) Representation of Martingales with Jumps and Applications to Mathematical Finance. in: Advanced Studies in Pure Mathematics 41, 2004, Seiten 209-232
- [17] Kyprianou, A.E. (2006) Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications
- [18] Matsuda, Kazuhsia (2004) Introduction to Merton Jump Diffusion Model
- [19] Medvegyev, P. (2007): Stochastic Integration Theory. *Oxford Graduate Texts in Mathematics*

- [20] Nicolato, E. und E. Venardos (2003): Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein Uhlenbeck Type. *Mathematical Finance, Vol. 13, No4 (October 2003), 445-466*
- [21] Papapantoleon, A. (2005): An Introduction to Lévy Processes with Applications in Finance
- [22] Raible, S. Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics and Empirical Facts (2000)
- [23] Sato, K. (1999): Lévy-Processes and Infinitely Divisible Distributions. *Cambridge University Press.*
- [24] Schoutens, Wim (2003): Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives. *Wiley Series in Probability and Statistics*
- [25] Serfozo, R. Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag
- [26] Tankov P., Financial modeling with Lévy processes
- [27] Tankov P., Lévy processes in finance and risk management
- [28] Winkel, M. Lévy Processes and Finance
- [29] Yahoo Finance Deutschland (<http://de.finance.yahoo.com>)

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

**Münster, 15.08.2013**