Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Portfoliooptimierung in HJM-Modellen

Masterarbeit

von

Eugenia Kiefel

Betreuer: Privatdozent Dr. V. Paulsen
Mathematisches Institut für Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Einleitung

Eine zentrale Rolle in der modernen Finanzmathematik spielt die Portfoliooptimierung. Die Portfoliooptimierung beschäftigt sich mit der Bestimmung optimaler Investitionsstrategien. Somit trägt diese Theorie nicht nur zur Erforschung der Finanzmathematik bei, sondern liefert vor allem für Finanzinstitute ein unverzichtbares Instrument im Bereich Investition. Die Optimierung des Portfolios kann in verschiedenen Finanzmärkten wie Aktienmärkten, Bondmärkten oder Währungsmärkten durchgeführt werden. Wir wollen uns mit der Portfoliooptimierung in einem Bondmarkt befassen, welcher mittels eines Zinsstrukturmodells modelliert wird. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage wie in einem Bondmarkt optimal in Bonds verschiedener Restlaufzeiten gehandelt werden kann.

Zur Klärung dieser Frage wählen wir das zeitstetige Zinsstrukturmodell von Heath, Jarrow und Morton (HJM-Modell). Die Wahl dieses Modells zur Konstruktion des Bondmarktes ist aus mehreren Gründen sinnvoll. Zum einen ist in dem Modell die zeitliche Entwicklung der Bondpreise explizit und in einfacher Form gegeben. Zum anderen ist die Wahl vielmehr durch die Wichtigkeit dieses Modells motiviert. Das HJM-Modell stellt einen entscheidenden Schritt in der Entwicklung stetiger Zinsstrukturmodelle dar. Es beschreibt die Entwicklung der gesamten Zinsstruktur und nicht nur des kurzfristigen Zinses. Außerdem bildet dieses Modell einen ganzen Modellrahmen, sodass durch dessen Betrachtung allgemeine Ergebnisse erzielt werden.

Diese Arbeit beschäftigt sich somit mit der Bestimmung einer optimalen Investitionsstrategie in einem HJM-Bondmarktmodell. In diesem Bondmarktmodell ermitteln wir die optimale Investitionsstrategie durch das Lösen des Problems der Erwartungsnutzenmaximierung, welches als Mertonproblem bekannt ist. Das Lösen dieses Problems führen wir mit der Martingalmethode durch. Dadurch erhalten wir eine Investitionsstrategie, die dem Investor zu jedem Zeitpunkt vorgibt, wie viel Kapital in welchen Bond er investieren soll, damit sein erwarteter Nutzen aus dem Endvermögen maximal wird. Das Ziel dieser Arbeit ist somit die Lösung des Mertonproblems der Portfoliooptimierung mit der Martingalmethode in einem HJM-Modell. Wobei wir zusätzlich den besonderen Fall betrachten, dass das Geldmarktkonto nicht verfügbar ist.

Im **ersten Kapitel** stellen wir zunächst ein vollständiges, arbitragefreies HJM-Bondmarktmodell auf, in dem die Portfoliooptimierung stattfinden wird. Des Weiteren zeigen wir einige Beispiele von bestimmten HJM-Modellen. Im Besonderen stellen wir ein praxisrelevantes Gaußsches HJM-Modell vor, für welches wir im Weiteren konkrete Ergebnisse der Portfoliooptimierung angeben.

Im **zweiten Kapitel** formulieren wir das Mertonproblem der Portfoliooptimierung und stellen die Martingalmethode zu seiner Lösung vor. Im Anschluss darauf führen wir einige Beispiele der Finanzmarktmodelle, in denen die Martingalmethode zur Portfoliooptimierung anwendbar ist. Dabei verwenden wir die logarithmische Nutzenfunktion und die Potenznutzenfunktion zur Darstellung der Präferenzen eines Investors.

Im **dritten Kapitel** lösen wir das Mertonproblem in einem Mehrfaktor-HJM-Bondmarktmodell. Wir betrachten dabei den besonderen Fall, dass das Geldmarktkonto nicht zur Verfügung steht. Zu Beginn des Kapitels erörtern wir die Anwendbarkeit der Martingalmethode im HJM-Modell. Insbesondere zeigen wir an einem Beispiel, dass die Portfoliooptimierung mit der Martingalmethode nicht in allen HJM-Modellen durchführbar ist. Anschließend bestimmen wir die optimale Investitionsstrategie für die logarithmische Nutzenfunktion und die Potenznutzenfunktion. Die Anwendung der Ergebnisse auf ein konkretes Gaußsches Mehrfaktor-HJM-Modell schließt dieses Kapitel ab.

Das **Fazit** resümiert die Ergebnisse und führt die Arbeit zum Abschluss.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Dozenten Dr. Volkert Paulsen für seine engagierte Unterstützung bedanken. Mit seinem fachlichen Rat und seinen zahlreichen Anregungen begleitete er mich bei der Erstellung dieser Masterarbeit und war stets für mich ansprechbar. Ein großer Dank gebührt auch meinem Ehemann. Sein Glaube an mich sowie seine Unterstützung gaben mir Kraft und halfen mir die Herausforderungen während meines Studiums zu meistern.

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Münster, 15. August 2014 ____________________

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in das HJM-Modell

In diesem Kapitel erfolgt eine Einführung in das arbitragefreie und vollständige HJM-Bondmarktmodell, in dem später die Portfoliooptimierung stattfinden wird. Als Erstes erklären wir die grundlegenden Begriffe und machen die notwendigen Annahmen für die Formulierung dieses Modells. Danach stellen wir das HJM-Bondmarktmodell vor und führen einige Beispiele von bestimmten Modelle an. Dabei präsentieren wir ein praxisrelevantes HJM-Modell, für welches wir im Weiteren die konkreten Ergebnisse der Portfoliooptimierung angeben werden.

1.1 Grundlagen

In diesem Unterkapitel werden die grundlegemden Begriffe sowie einige Annahmen für die Aufstellung des HJM-Modells eingeführt. Insbesondere werden die Zero-Coupon Bonds und die Forward-Raten (Terminzinsen) vorgestellt. Hierfür werden [Bjö03], [BS04], [Küh07] und [Fil09] als Literaturquellen verwendet.

Zudem wird im Folgenden ein endlicher Handelszeitraum $[0, \hat{T}]$ vorausgesetzt.

Definition 1.1. ***(Zero-Coupon Bond)***
Ein Zero-Coupon Bond mit der Fälligkeit $\tau \in [0, \hat{T}]$ ist ein Kontrakt, der seinem Inhaber zum Zeitpunkt τ eine Auszahlung von einer Geldeinheit garantiert. Der Preis eines solchen Bonds zum Zeitpunkt $t < \tau$ wird mit $B(t, \tau)$ bezeichnet.

Ein Zero-Coupon Bond leistet somit außer seiner Auszahlung am Ende, keine weiteren Kuponzahlungen während der Laufzeit. In dieser Arbeit werden ausschließlich Zero-Coupon Bonds mit der Fälligkeit τ betrachtet und zur Vereinfachung als Bonds bzw. τ-Bonds bezeichnet.

Als Nächstes werden die notwendigen **Annahmen an die Bondpreise**[1] getroffen:

- Es sei $B(\tau, \tau) = 1$ für alle τ mit $0 \leq \tau \leq \hat{T}$ erfüllt. Das Ausfallrisiko der Bonds wird damit ausgeschlossen.

- Es gelte $B(t, \tau) > 0$ für alle t, τ mit $0 \leq t \leq \tau \leq \hat{T}$. Diese Forderung schließt die triviale Arbitragemöglichkeit aus, bei der eine sichere Zahlung einer Geldeinheit ohne Einsatz von Kapital erzielt werden kann.

- Für jedes fixes t sei der Bondpreis $B(t, \tau)$, als Funktion in τ, für alle τ mit $0 \leq \tau \leq \hat{T}$ differenzierbar. Diese Bedienung garantiert die Wohldefiniertheit der Forward-Raten.

[1] Siehe [HJM92], S.79 .

Ausgehend von den Bondpreisen kann in t mit $t < \tau$ ein Zins für eine Investition in einem zukünftigen Zeitintervall $[\tau, S]$ vereinbart werden. Dies lässt sich an der folgenden Investitionsstrategie veranschaulichen: Sei $t < \tau < S$.

- In t: Verkaufe einen τ-Bond und kaufe dafür $\frac{B(t,\tau)}{B(t,S)}$ Bonds mit der Fälligkeit S. Dabei entstehen zum Zeitpunkt t keine Kosten.
- In τ: Zahle eine Geldeinheit für den verkauften τ-Bond.
- In S: Erhalte die Auszahlung aus den S-Bonds in Höhe von $\frac{B(t,\tau)}{B(t,S)}$.

Diese Strategie entspricht einer Anlage von einer Geldeinheit in τ für den Zeitraum $[\tau, S]$ und führt zu einer sicheren Rückzahlung in S von $\frac{B(t,\tau)}{B(t,S)}$ Geldeinheiten. Durch diese Strategie haben wir zum Zeitpunkt t einen Kontrakt geschaffen, welcher uns eine risikolose Zinsrate für den zukünftigen Zeitraum von τ bis S garantiert. Dieser Zinssatz wird als *Forward-Rate* (*Terminzins*) bezeichnet. Wird eine stetige Verzinsung angenommen, so kann aus dieser Strategie die stetige Forward-Rate $R(t; \tau, S)$ bestimmt werden

$$\begin{aligned} e^{R(t;\tau,S)(S-\tau)} &= \frac{B(t,\tau)}{B(t,S)} \\ \Longrightarrow R(t;\tau,S) &= \frac{\log B(t,\tau) - \log B(t,S)}{S-\tau}. \end{aligned}$$

Wenn wir die Länge des Zeitintervalls gegen Null laufen lassen, entsteht daraus die augenblickliche Forward-Rate.

Definition 1.2. *Die augenblickliche Forward-Rate mit der Fälligkeit τ ist zum Zeitpunkt $t \leq \tau$ definiert durch*

$$f(t,\tau) := \lim_{S \downarrow \tau} R(t;\tau,S) = -\frac{\partial \log B(t,\tau)}{\partial \tau}. \tag{1.1}$$

Die Funktion $\tau \mapsto f(t,\tau)$ wird als Forward-Raten-Kurve zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Die augenblickliche Forward-Rate $f(t,\tau)$ entspricht dem Zins, der vom Markt zum Zeitpunkt t für einen zukünftigen Zeitpunkt τ erwartet wird.

Bemerkung 1.3. Die Definition der augenblicklichen Forward-Rate impliziert, dass sich der Preis eines Bonds aus den Forward-Raten wie folgt berechnen lässt

$$B(t,\tau) = \exp\Big(-\int_t^\tau f(t,u)\,du\Big). \tag{1.2}$$

Umgekehrt kann die Forward-Rate aus dem Bondpreis entsprechend der Darstellung (1.2) bestimmt werden.

Ausgehend von der augenblicklichen Forward-Rate wird die augenblickliche Short-Rate definiert.

Definition 1.4. *Die augenblickliche Short-Rate ist zum Zeitpunkt $t \leq \tau$ definiert durch*

$$r(t) := f(t,t) = \lim_{\tau \downarrow t} R(t,\tau).$$

Die Short-Rate (*kurzfristiger Terminzins*) kann als ein Zinssatz verstanden werden, der im Augenblick (zum Zeitpunkt t) am Markt gilt.

In dieser Arbeit werden nur die augenblicklichen Forward-Raten bzw. Short-Raten betrachtet und als Forward-Raten bzw. Short-Raten bezeichnet. Dabei sind die augenblicklichen Zinssätze am Markt nicht beobachtbar und bilden lediglich ein theoretisches mathematisches Konstrukt.

Ausgehend von der Short-Rate wird ein Geldmarktkonto definiert.

Definition 1.5. *Der Wert des Geldmarktkontos zum Zeitpunkt t ist definiert durch*

$$\beta(t) := \exp\left(\int_0^t r(u)\,du\right), \tag{1.3}$$

bzw. in differentieller Form

$$d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt.$$

Somit entspricht $\beta(t)$ zum Zeitpunkt t dem Wert einer Geldeinheit, welche ausgehend vom Zeitpunkt 0 rollierend bis t zur jeweiligen Short-Rate r risikolos angelegt wurde. Außerdem representiert dieses Konto die Möglichkeit einer fristlosen Geldanlage (bzw. Geldaufnahme) in beliebiger Höhe und über eine beliebige Laufzeit. Das Geldmarktkonto wird nicht am Markt gehandelt und ist deshalb ein künstliches Finanzgut.

1.2 Aufbau des HJM-Modells

Das Zinsstrukturmodell von Heath, Jarrow und Morton, welches als HJM-Modell bezeichnet wird, stellt einen entscheidenden Schritt in der Entwicklung stetiger Zinsstrukturmodelle dar. Es beschreibt die zeitliche Enwicklung der gesamten Forward-Raten-Kurve und nicht nur der Short-Rate. Die Entwicklung der Bondpreise über die Zeit entsteht in diesem Modell in einfacher Form aus der Dynamik von Forward-Raten. Dieses Unterkapitel stellt des arbitragefreie und vollständige HJM-Modell mit dem Fokus auf die bevorstehende Portfoliooptimierung vor. Dabei dienen [Bjö03], [Shr04], [Küh07], [Sch05] und [HJM92] als Literaturquellen.

Zunächst wird für die Formulierung des Modells der wahrscheinlichkeitstheoretische Rahmen eingeführt: Es sei ein $\hat{T}$ mit $0 < \hat{T} < \infty$ fixiert, sodass ein endlicher Handelszeitraum $[0, \hat{T}]$ entsteht. Das bedeutet, dass ein stetiger Handel innerhalb des Zeitintervalls $[0, \hat{T}]$ betrachtet wird. Dabei werden die risikobehafteten Bonds mit dem Preisprozess $(B(t,\tau))_{0\leq t\leq \tau}$ für alle τ mit $0 \leq \tau \leq \hat{T}$, als Basisfinanzgüter und das Geldmarktkonto $(\beta(t))_{0\leq t\leq \hat{T}}$ als Numéraire gewählt. Die Unsicherheit in dem Modell sei durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}, P^*)$ charakterisiert, mit einem Ergebnisraum Ω, einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^*. Im Folgenden werden wir eine Bedingung angeben, unter welcher dieses Maß ein Martingalmaß wird. Weiter wird angenommen, dass die Quelle des Zufalls von einem n-dimensionalen Wiener-Prozess $(W^*(t))_{0\leq t\leq \hat{T}}$ mit $W^*(t) = (W_1^*(t), \dots, W_n^*(t))^\top$ getrieben wird. Somit entwickelt sich der Informationsverlauf gemäß einer rechtsseitig stetigen und vollständigen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}$, die von einem n-dimensionalen Wiener-Prozess erzeugt wird.

In einem HJM-Modell ist für jedes τ mit $0 \leq \tau \leq \hat{T}$ die Dynamik der Forward-Rate $f(t,\tau)$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P^* wie folgt modelliert[2]:

$$f(t,\tau) = f(0,\tau) + \int_0^t \nu(u,\tau)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,\tau)\,dW_i^*(u), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{1.4}$$

bzw. in differentieller Form

$$df(t,\tau) = \nu(t,\tau)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t,\tau)dW_i^*(t), \qquad 0 \leq t \leq \tau. \tag{1.5}$$

Zudem ist vorausgesetzt, dass die anfängliche Kurve der Forward-Raten $\{f(0,\tau);\ 0 \leq \tau \leq \hat{T}\}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt und mit

$$\int_0^{\hat{T}} |f(0,u)|\,du < \infty \qquad P - f.s.$$

integrierbar ist.

Die Drift der Forward-Rate ist durch einen $\mathbb{R}$-wertigen stochastischen Prozess $\nu = \nu(\omega,t,\tau)$ beschrieben. Ihre Volatilität ist durch einen $\mathbb{R}^n$-wertigen stochastischen Prozess $\sigma = (\sigma_1(\omega,t,\tau), \dots, \sigma_n(\omega,t,\tau))^\top$ dargestellt. Für diese Prozesse gelten die nachfolgenden Eigenschaften[3] :

- ν, σ sind bezüglich $Prog \otimes \mathcal{B}$-messbar,
- $\int_0^\tau \int_0^\tau |\nu(s,t)|\,ds\,dt < \infty$ für alle $0 \leq \tau \leq \hat{T}$, punktweise für jedes $\omega \in \Omega$,
- $\sup_{s,t\leq\tau} \|\sigma(s,t)\| < \infty$ für alle $0 \leq \tau \leq \hat{T}$, punktweise für jedes $\omega \in \Omega$,

[2]Siehe [HJM92], S.80, sowie [Bjö03], S. 342.
[3]Siehe [Fil09], S.93 und S.59. sowie [HJM92], S.80.

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ darstellt.

Aufgrund der Beziehung $r(t) = f(t,t)$ besitzt die Short-Rate r in diesem Modell die folgende Dynamik:

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \nu(u,t)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,t)\,dW_i^*(u), \quad 0 \le t \le \hat{T}. \tag{1.6}$$

Bemerkung 1.6. Der Short Rate-Prozess ist im Allgemeinen kein Markov-Prozess[4]. Dies lässt sich aus der Betrachtung des Prozesses D mit

$$D(t) \coloneqq \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,t)\,dW_i^*(u), \quad 0 \le t \le \hat{T}$$

erschließen. Dieser Prozess kann für ein τ mit $t < \tau \le \hat{T}$ wie folgt aufgeteilt werden

$$D(\tau) = D(t) + \sum_{i=1}^n \int_t^\tau \sigma_i(u,\tau)\,dW_i^*(u) + \Bigg(\sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,\tau)\,dW_i^*(u) - \int_0^t \sigma_i(u,t)\,dW_i^*(u)\Bigg).$$

Offensichtlich ist der eingeklammerte Teil weder nicht zufällig, noch stellt er eine deterministische Funktion von $D(t)$ dar. Deshalb gilt die folgende Ungleichheit

$$E^*[D(\tau)|D(t)] \ne E^*[D(\tau)|\mathcal{F}_t],$$

wobei mit $E^*[\cdot]$ der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P^* bezeichnet wird. Somit erfüllt der Prozess D die Markov-Eigenschaft nicht. Hieraus folgt, dass der Short Rate-Prozess im Allgemeinen kein Markov-Prozess ist.

Damit das Wahrscheinlichkeitsmaß P^* ein Martingalmaß wird, muss die Drift der Forward-Rate durch ihre Volatilität festgelegt sein. Diese sogenannte Driftbedingung wird im folgenden Satz zusammengefasst (siehe [Sch05], Theorem 1.3.1).

Satz 1.7. ***(Driftbedingung)***
Folgen die Forward-Raten der Dynamik (1.4), so ist das Maß P^* ein Martingalmaß, genau dann, wenn die Prozesse ν und σ für alle $0 \le t \le \tau \le \hat{T}$ die folgende Relation erfüllen

$$\nu(t,\tau) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t,\tau) \int_t^\tau \sigma_i(t,s)\,ds. \tag{1.7}$$

Annahme 1.1. *Die Driftbedingung (1.7) sei erfüllt.*

Folgerung 1.1. *Da die Driftbedingung gilt, existiert ein Martingalmaß und das HJM-Modell ist somit arbitragefrei.*

[4] Siehe [AP10a], Kapitel 4.4.3 und [Sch05], Definition 1.4.1.

Nachdem die grundlegenden Aspekte des HJM-Modells vorgestellt wurden, formulieren wir im nächsten Schritt die Bondpreisdynamik. Die zeitliche Entwicklung der Bondpreise leitet sich in dem HJM-Modell aus der Dynamik der Forward-Rate und wird im folgenden Satz dargestellt.

Satz 1.8. *Es sei P^* das Martingalmaß. Dann für jedes τ mit $0 \leq \tau \leq \hat{T}$ entwickeln sich die Bondpreisprozesse $B(t,\tau)$ gemäß der folgenden Dynamik:*

$$dB(t,\tau) = B(t,\tau)\Bigg(r(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,\tau)dW_i^*(t)\Bigg), \quad 0 \leq t \leq \tau \tag{1.8}$$

für einen n-dimensionalen Prozess $\sigma^B(t,\tau) = \big(\sigma_1^B(t,\tau), \dots, \sigma_n^B(t,\tau)\big)^\top$ mit

$$\sigma_i^B(t,\tau) := -\int_t^\tau \sigma_i(t,s)\,ds, \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.9}$$

Beweis: Es ist die stochastische Differentialgleichung der Bondpreisprozesse unter dem Martingalmaß zu bestimmen. Diese Differentialgleichung lässt sich aus der Dynamik der Forward-Raten mithilfe der Relation (1.2)

$$B(t,\tau) = \exp\Bigg(-\int_t^\tau f(t,u)\,du\Bigg)$$

ermitteln. Entsprechend dieser Relation wird zunächst die Dynamik des Prozesses y mit $y(t,\tau) := \int_t^\tau f(t,u)\,du$ hergeleitet. Für diesen Prozess gilt mit der Darstellung der Forward-Rate (1.4) die folgende Gleichheit

$$y(t,\tau) = \int_t^\tau f(t,u)\,du = \int_t^\tau \Bigg(f(0,u) + \int_0^t \nu(s,u)\,ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s,u)\,dW_i^*(s)\Bigg)\,du.$$

Da die Drift der Bondpreise unter dem äquivalenten Martingalmaß der Short-Rate entspricht, ist es nützlich die Short-Rate in diese Darstellung von y einzubringen. Hierzu wird die Short-Rate in (1.6) integriert

$$\int_t^\tau r(u)\,du = \int_t^\tau \Bigg(f(0,u) + \int_0^u \nu(s,u)\,ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^u \sigma_i(s,u)\,dW_i^*(s)\Bigg)\,du.$$

Mit diesem Ausdruck erhalten wir die folgende Darstellung des Prozesses y

$$\begin{aligned} y(t,\tau) = \int_0^\tau f(0,u)\,du - \int_t^\tau r(u)\,du - \int_t^\tau\int_0^t \nu(s,u)\,ds\,du - \int_t^\tau \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s,u)\,dW_i^*(s)\,du \\ + \int_t^\tau\int_0^u \nu(s,u)\,ds\,du + \int_t^\tau \sum_{i=1}^{n}\int_0^u \sigma_i(s,u)\,dW_i^*(s)\,du. \end{aligned}$$

Damit wir das Integral über dem Intervall $[0,t]$ erhalten, wird die obere Darstellung mit dem Satz von Fubini für stochastische Integrale [5] umgeformt. Es ergibt sich

$$y(t,\tau)=\int_0^\tau f(0,u)\,du-\int_t^\tau r(u)\,du+\int_0^t\Big(\int_s^\tau \nu(s,u)\,du\Big)ds+\sum_{i=1}^n\int_0^t\Big(\int_s^\tau \sigma_i(s,u)\,du\Big)dW_i^*(s).$$

Aus diesem Ausdruck folgt die stochastische Differentialgleichung für den Prozess y

$$dy(t,\tau)=-r(t)dt+\Big(\int_t^\tau \nu(t,u)\,du\Big)dt+\sum_{i=1}^n\Big(\int_t^\tau \sigma_i(t,u)\,du\Big)dW_i^*(t).$$

Damit ergibt sich unter Verwendung der Ito-Formel[6] aus der Relation (1.2) die Dynamik des Bondpreisprozesses:

$$\begin{aligned}
dB(t,\tau)&=-B(t,\tau)dy(t,\tau)+\frac{1}{2}B(t,\tau)d\langle y(\cdot,\tau)\rangle_t\\
&=-B(t,\tau)\Big(-r(t)dt+\Big(\int_t^\tau \nu(t,u)\,du\Big)dt+\sum_{i=1}^n\Big(\int_t^\tau \sigma_i(t,u)\,du\Big)dW_i^*(t)\Big)\\
&\quad+\frac{1}{2}B(t,\tau)\sum_{i=1}^n\Big(\int_t^\tau \sigma_i(t,u)\,du\Big)^2dt\\
&=B(t,\tau)\underbrace{\Big(r(t)-\Big(\int_t^\tau \nu(t,u)\,du\Big)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\Big(\int_t^\tau \sigma_i(t,u)\,du\Big)^2\Big)}_{\mu^B(t,\tau):=}dt\\
&\quad+B(t,\tau)\sum_{i=1}^n\underbrace{\Big(-\int_t^\tau \sigma_i(t,u)\,du\Big)}_{\sigma_i^B(t,\tau):=}dW_i^*(t).
\end{aligned}$$

Weiter zeigt die Anwendung der Driftbedingung (1.7), dass die Drift des Bondpreisprozesses unter dem Martingalmaß tatsächlich der Short-Rate entspricht. Hierfür setzten wir $\nu(t,\tau)=\sum_{i=1}^n\sigma_i(t,\tau)\int_t^\tau\sigma_i(t,s)\,ds$ für die Drift der Forward-Rate und erhalten zunächst die folgende Drift des Bondpreisprozesses

$$\mu^B(t,\tau)=r(t)-\sum_{i=1}^n\int_t^\tau\sigma_i(t,u)\Big(\int_t^u\sigma_i(t,s)\,ds\Big)du+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\Big(\underbrace{\int_t^\tau\sigma_i(t,u)\,du}_{\gamma_i(t,\tau):=}\Big)^2.$$

Der Prozess γ_i^2 kann mit der partiellen Differentialgleichung $\partial_\tau\gamma_i^2(t,\tau)=2\gamma_i(t,\tau)\sigma_i(t,\tau)$ durch

$$\gamma_i^2(t,\tau)=2\int_t^\tau\gamma_i(t,u)\sigma_i(t,u)\,du=2\int_t^\tau\Big(\int_t^u\sigma_i(t,s)\,ds\Big)\sigma_i(t,u)\,du$$

[5] Siehe [Fil09], Theorem 6.2.
[6] Siehe [KS91], Theorem 3.6.

dargestellt werden. Damit wird die Drift des Bondpreisprozesses berechnet und es folgt

$$\mu^B(t,\tau) = r(t).$$

Insgesamt ergibt sich die folgende Dynamik der Bondpreisprozesse unter dem Martingalmaß:

$$dB(t,\tau) = B(t,\tau)\left(r(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,\tau)dW_i^*(t)\right)$$

für einen n-dimensionalen Prozess $\sigma^B(t,\tau)$ mit $\sigma_i^B(t,\tau) := -\int_t^\tau \sigma_i(t,u)\,du$ für $i = 1,\ldots,n$.

□

Bemerkung 1.9. 1. Aus den Darstellungen (1.8), (1.9) ist es ersichtlich, dass sich die Volatilität des Bondpreisprozesses aus den Volatilitäten der Forward-Raten bestimmen lässt. Damit sind die Dynamiken der Bondpreise durch die Volatilitätsstruktur der Forward-Raten eindeutig charakterisiert.

2. Aus der Driftbedingung folgt, dass die Dynamiken der Forward-Raten allein durch ihre Volatilitätsstruktur spezifiziert sind. Damit ist das HJM-Modell, in welchem das Martingalmaß existiert, durch die Volatilitätsstruktur der Forward-Raten $\{(\sigma(t,\tau))_{0\le t\le\tau};\ 0 \le \tau \le \hat{T}\}$ und die anfängliche Forward-Raten-Kurve $\{f(0,\tau);\ 0 \le \tau \le \hat{T}\}$ vollständig festgelegt. Diese Feststellung macht die Volatilität der Forward-Rate $\sigma(t,\tau)$ zu einer zentralen Größe des HJM-Modells.

Abschließend machen wir eine Annahme, welche die Vollständigkeit des Modells garantiert.

Annahme 1.2. *Das Martingalmaß sei eindeutig bestimmt.*

Folgerung 1.2. *Aus der Eindeutigkeit des Martingalmaßes folgt die Vollständigkeit des HJM-Modells*[7]*. Deshalb existieren n verschiedene Bonds mit den Preisprozessen*[8]

$$dB(t,\tau_i) = B(t,\tau_i)\left(r(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sigma_j^B(t,\tau_i)}_{:=\sigma_{ji}(t)} dW_j^*(t)\right), \quad 0 \le t \le \tau_i, \quad \tau_1 <,\ldots,< \tau_n,$$

sodass die folgende Volatilitätsmatrix der Bondpreisprozesse für alle t mit $0 \le t \le \tau_n$ invertierbar ist[9]*:*

$$(\sigma_{ij}(t))_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^B(t,\tau_1) & \ldots & \sigma_1^B(t,\tau_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n^B(t,\tau_1) & \ldots & \sigma_n^B(t,\tau_n) \end{pmatrix}.$$

[7] Siehe [Shr04], Theorem 5.4.9.
[8] Siehe den Satz 1.8.
[9] Siehe [Pau12].

1.3 Beispiele

Das HJM-Modell stellt einen Modellrahmen dar. In diesen Rahmen gehören alle Zinsstrukturmodelle, die von einem Wiener-Prozess getrieben werden. Einige Beispiele für die konkreten Modelle präsentiert dieses Unterkapitel.

Im ersten Teil dienen Vasicek- und CIR-Modelle als Beispiele für ein Ein-Faktor-HJM-Modell. Dort erfolgt die Reformulierung dieser Short-Rate-Modelle als ein HJM-Modell. Hierfür werden die Entwicklung der Forward-Rate und die entsprechende Volatilität ermittelt. Die Ausführungen in diesem Teil beziehen sich auf [Shr04] und [BS04].

Im zweiten Teil wird das Gaußsche Mehrfaktor-HJM-Modell mit der Markovschen Short-Rate als Beispiel für ein Mehrfaktor-HJM-Modell vorgestellt. Zur Herleitung dieses Modells wird die Spezifizierung der Volatilitätsstruktur mit dem Fokus auf die praktische Anwendung vorgenommen. So entsteht ein für die Praxis relevantes Modell. In diesem Modell erfolgt später die Anwendung der Ergebnisse aus der Portfoliooptimierung. Dieser Teil orientiert sich an [AP10a] und [AP10b].

1.3.1 Vasicek- und CIR-Modelle

Als Erstes werden das Vasicek Modell und das CIR-Modell kurz vorgestellt. Hierzu sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}, P^*)$ entsprechend dem Kapitel 1.2 zu Grunde gelegt. Dabei sei P^* das äquivalente Martingalmaß und die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}$ sei von einem eindimensionalen Wiener-Prozess W^* erzeugt. Die beiden Modelle gehören zu den Short-Rate-Modellen. Das bedeutet, dass am Anfang dieser Modelle die zeitlichen Entwicklung der Short-Rate steht. Die Bondpreise ergeben sich modellendogen aus der Dynamik der Short-Rate.

- **Vasicek-Modell:**
  Im Vasicek-Modell ist die Entwicklung der Short-Rate über die Zeit unter einem äquivalenten Martingalmaß durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW^*(t), \quad r(0) = r_0 \tag{1.10}$$

  beschrieben. Dabei sind r_0, θ, σ, κ strikt positive Konstanten. Der Preis eines Bonds in diesem Modell ist bestimmt durch[10]

$$B(t,\tau) = \exp\bigl(-r(t)C(t,\tau) - A(t,\tau)\bigr), \tag{1.11}$$

[10] Siehe [Bjö03], Proposition 22.3 und [BS04], Satz 6.11.

wobei

$$C(t,\tau) := \tfrac{1}{\kappa}\big(1 - e^{-\kappa(\tau-t)}\big), \tag{1.12}$$
$$A(t,\tau) := \tfrac{1}{\kappa^2}\big((\tau-t) - C(t,\tau)\big)\big(\kappa^2\theta - \tfrac{\sigma^2}{2}\big) + \tfrac{1}{4\kappa}\sigma^2 C(t,\tau)^2.$$

- **CIR-Modell:**
Im CIR-Modell ist die Dynamik der Short-Rate unter einem äquivalenten Martingalmaß gegeben durch

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*(t), \quad r(0) = r_0, \tag{1.13}$$

wobei r_0, θ, σ, κ strikt positive Konstanten sind. Und für den Preis eines Bonds gilt[11]

$$B(t,\tau) = \exp\big(-r(t)C(t,\tau) - A(t,\tau)\big), \tag{1.14}$$

wobei

$$C(t,\tau) := \frac{2\big(e^{\gamma(\tau-t)} - 1\big)}{(\gamma+\kappa)\big(e^{\gamma(\tau-t)} - 1\big) + 2\gamma}, \tag{1.15}$$
$$A(t,\tau) := -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma e^{0.5(\gamma+\kappa)(\tau-t)}}{(\gamma+\kappa)\big(e^{\gamma(\tau-t)} - 1\big) + 2\gamma}\right),$$
$$\gamma := \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.$$

Als nächstes wird die Einbettung dieser Short-Rate-Modelle in den Modellrahmen von HJM gezeigt. Hierzu wird unter Verwendung der Dynamik der Bondpreisprozesse die Forward-Raten-Dynamik hergeleitet. Um anschließend die spezielle Volatilitätsfunktion der Forward-Rate für das jeweilige Short-Rate-Modell zu ermitteln. Die Ergebnisse werden in dem nachfolgenden Satz festgehalten.

Satz 1.10. *1. Es sei das Modell von Vasicek mit der Short-Rate Dynamik (1.10) gegeben. Dann ist für alle $\tau \le \hat{T}$ die Dynamik Forward-Rate $f(t,\tau)$ in diesem Modell durch eine stochastische Differenttialgleichung mit der folgenden Forward-Raten-Volatilität beschrieben:*

$$\sigma(t,\tau) = \sigma e^{-\kappa(\tau-t)}.$$

2. Es sei das CIR-Modell mit der Short-Rate Dynamik (1.13) gegeben. Dann ist für alle $\tau \le \hat{T}$ die Dynamik der Forward-Rate $f(t,\tau)$ in diesem Modell durch eine stochastische

[11] Siehe [Bjö04], Proposition 22.6 und [BS04], S.180 f.

Differentialgleichung mit der folgenden Forward-Raten-Volatilität beschrieben:

$$\sigma(t,\tau) = \frac{4\gamma^2 e^{\gamma(\tau-t)}}{\big((\gamma+\kappa)\big(e^{\gamma(\tau-t)}-1\big)+2\gamma\big)^2}\sigma\sqrt{r(t)}.$$

Beweis: Es wird die Dynamik der Forward-Rate für das Modell von Vasicek und das CIR-Modell hergeleitet. In beiden Modellen gilt die stochastische Differentialgleichnug der Short-Rate

$$dr(t) = m(t,r(t))dt + n(t,r(t))dW^*(t)$$

bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes für die jeweiligen Prozesse m und n. Zudem wird der Bondpreis in diesen Modellen mit (1.11) und (1.14) für die jeweiligen Prozesse A und C dargestellt durch

$$B(t,\tau) = \exp\big(-r(t)C(t,\tau) - A(t,\tau)\big).$$

Damit kann, entsprechend der Darstellung (1.1), die Forward-Rate aus dem Bondpreis in folgender Weise bestimmt werden:

$$f(t,\tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\log B(t,\tau) = r(t)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}A(t,\tau).$$

Daraus ergibt sich die Dynamik der Forward-Rate für diese Modelle:

$$\begin{aligned} df(t,\tau) &= \frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)dr(t) + r(t)\frac{\partial}{\partial\tau}C'(t,\tau)dt + \frac{\partial}{\partial\tau}A'(t,\tau)dt \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)m(t,r(t)) + r(t)\frac{\partial}{\partial\tau}C'(t,\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}A'(t,\tau)\right)dt \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)n(t,r(t))dW^*(t), \end{aligned}$$

wobei $C'(t,\tau)$ bzw. $A'(t,\tau)$ die partiellen Ableitungen bzgl. t bezeichnen. Dies entspricht einem HJM-Modell mit folgender Volatilität der Forward-Rate

$$\sigma(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)n(t,r(t)).$$

Für das Vasicek Modell mit $n(t,r(t)) = \sigma$ aus (1.10) gilt nach (1.12) die folgende Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\tfrac{1}{\kappa}\big(1-e^{-\kappa(\tau-t)}\big)\Big) = e^{-\kappa(\tau-t)}.$$

Somit entspricht das Vasicek Modell einem HJM-Modell mit der Volatilität der Forward-Rate:

$$\sigma(t,\tau) = \sigma e^{-\kappa(\tau-t)}.$$

Für das CIR-Modell mit $n(t,r(t)) = \sigma\sqrt{r(t)}$ aus (1.13) gilt nach (1.15) die folgende

Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial \tau} C(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{2\big(e^{\gamma(\tau-t)}-1\big)}{(\gamma+\kappa)\big(e^{\gamma(\tau-t)}-1\big)+2\gamma}\right) = \frac{4\gamma^2 e^{\gamma(\tau-t)}}{\big((\gamma+\kappa)\big(e^{\gamma(\tau-t)}-1\big)+2\gamma\big)^2}$$

Somit entspricht das CIR-Modell einem HJM-Modell mit der Volatilität der Forward-Rate:

$$\sigma(t,\tau) = \frac{4\gamma^2 e^{\gamma(\tau-t)}}{\Big((\gamma+\kappa)\Big(e^{\gamma(\tau-t)}-1\Big)+2\gamma\Big)^2}\sigma\sqrt{r(t)}. \qquad \square$$

1.3.2 Das Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate

In diesem Unterkapitel leiten wir ein anwendungsorientiertes Mehrfaktor-HJM-Modell her. Wie bereits in der Bemerkung 1.9 (2) erwähnt wurde, entsteht durch die Festlegung der Volatilitätsstruktur der Forward-Rate ein bestimmtes Modell. Wir machen die folgende Annahme.

Annahme 1.3. *Die Volatilitätsfunktion der Forward-Rate $\sigma(t,\tau)$ sei eine deterministische Funktion von t und von τ für $0 \le t \le \tau \le \hat{T}$.*

Ein HJM-Modell mit dieser Volatilitätsstruktur stellt einen wichtigen Spezialfall dar und wird als ein Gaußsches HJM-Modell bezeichnet. In diesem Modell findet später unsere Portfoliooptimierung statt, da die deterministische Volatilitätsstruktur uns die Lösung des Portfolioproblems in einer geschlossenen Form ermöglicht.

Bevor wir eine weitere Spezifizierung der Volatilitätsstruktur vornehmen, ist folgendes anzumerken: Wie bereits in der Bemerkung 1.6 festgehalten wurde, besitzt der Short-Rate-Prozess die Markov-Eigenschaft im Allgemeinen nicht. Die Markov-Eigenschaft bringt jedoch konzeptionelle Vorteile für das Modell. Eine Volatilitätsstruktur, welche der Short-Rate diese Eigenschaft verleiht wird im nachfolgenden Satz vorgestellt[12].

Satz 1.11. *Es sei für alle $0 \le t \le \tau \le \hat{T}$ die Volatilität der Forward-Rate $\sigma(t,\tau)$ ungleich Null und die Short-Rate besitze die Markov-Eigenschaft. Dann ist die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate separabel*

$$\sigma(t,\tau) = g(t)h(\tau), \quad 0 \le t \le \tau \le \hat{T}.$$

Entsprechend diesem Satz erfolgt eine weitere Spezifizierung der Volatilitätsstruktur. Dabei verwenden wir im Folgenden eine Matrixschreibweise zum Zwecke der Übersichtigkeit.

[12] Siehe [Sch05], Satz 1.4.2.

Annahme 1.4. *Die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate sei separabel im folgenden Sinne*

$$\sigma(t,\tau) = g(t)h(\tau), \quad 0 \le t \le \tau \le \hat{T} \tag{1.16}$$

wobei $g(t)$ eine deterministische $n \times n$-Matrix und $h(\tau)$ ein n-dimensionaler deterministischer Vektor sind.

Als Nächstes wird die Komponente $h(t)$ der Volatilitätsstrukur festgelegt. Hierzu machen wir die folgende Annahme.

Annahme 1.5. *In der Darstellung (1.16) der Forward-Raten-Volatilitätsstruktur sei der Vektor $h(t)$ durch*

$$h(t) := \begin{pmatrix} e^{-\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} \\ \vdots \\ e^{-\int_0^t \varkappa_n(u)\,du} \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

für deterministische Funktionen $\varkappa_i(t)$ mit $i = 1,\dots,n$ definiert, sodass $h_i(t) \neq 0$ für alle $t \le \hat{T}$ gilt.

Die Dynamik der Forward-Rate für diese Wahl der Volatilitätsstruktur wird im nachfolgenden Satz präsentiert.

Satz 1.12. *Die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate sei separabel im Sinne von der Annahme 1.4. Weiter seien eine $n \times n$-dimensionale Diagonalmatrix $H(t)$ durch $H(t) := diag(h(t))$ und ein n-dimensionaler Vektor $h(t)$ entsprechend (1.17) definiert. Zudem seien ein n-dimensionaler Zufallsvektor $x(t)$ und eine deterministische, symmetrische $n \times n$-Matrix $y(t)$ wie folgt definiert*

$$x(t) := H(t)\int_0^t g(s)^\top g(s)\int_s^t h(u)\,du\,ds + H(t)\int_0^t g(s)^\top\,dW^*(s), \tag{1.18}$$

$$y(t) := H(t)\left(\int_0^t g(s)^\top g(s)\,ds\right)H(t). \tag{1.19}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist für jedes τ mit $0 \le \tau \le \hat{T}$ die Forward-Rate auf folgende Weise dargestellt

$$f(t,\tau) = f(0,\tau) + M(t,\tau)^\top\left(x(t) + y(t)\int_t^\tau M(t,s)\,ds\right), \tag{1.20}$$

für $M(t,\tau) := H(\tau)H(t)^{-1}\mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1} = (1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dabei entwickelt sich der Prozess $x(t)$ über die Zeit gemäß

$$dx(t) = (y(t)\mathbf{1} - \kappa(t)x(t))dt + \sigma_x(t)^\top dW^*(t), \tag{1.21}$$

für eine $n \times n$-dimensionale Matrix $\sigma_x(t) := g(t)H(t)$ und eine $n \times n$-dimensionale Diagonalmatrix $\kappa(t) := diag\big((\varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_n(t))^\top\big)$ mit $\varkappa_i$ aus (1.17).

Beweis: Es ist die Darstellung der Forward-Rate unter dem äquivalenten Martingalmaß für die Volatilitätsstruktur zu bestimmen, welche im Sinne von den Annahmen 1.3 bis 1.5 festgelegt ist. Hierzu wird die Forward-Rate zunächst für die separable Volatilitätsstruktur (1.16) spezifiziert. Aus (1.5) und (1.7) ist bekannt, dass sich die Forward-Rate in der Zeit unter dem äquivalenten Martingalmaß gemäß

$$df(t,\tau) = \sigma(t,\tau)^\top \int_t^\tau \sigma(t,u)\,du\,dt + \sigma(t,\tau)^\top dW^*(t)$$

entwickelt. Wir setzen in diese Gleichung $\sigma(t,\tau) = g(t)h(\tau)$ ein und integrieren anschließend nach der Zeit. Dadurch erhalten wir die folgende Darstellung der Forward-Rate für die separable Volatilität

$$f(t,\tau) = f(0,\tau) + h(\tau)^\top \int_0^t \left(g(s)^\top g(s)\left(\int_s^\tau h(u)\,du\right)\right) ds + h(\tau)^\top \int_0^t g(s)^\top\,dW^*(s),$$

wobei $g(t)$ eine deterministische $n \times n$–Matrix und $h(t)$ ein n–dimensionaler deterministischer Vektor sind.

Weiter sei die Komponente $h(t)$ der separablen Volatilitätsstruktur entsprechend (1.17) festgelegt. Jetzt definieren wir einen stochastischen Prozess $x(t)$ durch

$$x(t) := H(t) \int_0^t \left(g(s)^\top g(s)\left(\int_s^t h(u)\,du\right)\right) ds + H(t) \int_0^t g(s)^\top\,dW^*(s),$$

sowie einen weiteren detereministischen Prozess $y(t)$ durch

$$y(t) := H(t)\left(\int_0^t g(s)^\top g(s)\,ds\right)H(t),$$

für eine Matrix $H(t) := \operatorname{diag}\big(h(t)\big)$. Mithilfe dieser Prozesse lässt sich die Forward-Rate wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
f(t,\tau) &= f(0,\tau) + h(\tau)^\top \int_0^t \left(g(s)^\top g(s)\left(\int_s^\tau h(u)\,du\right)\right) ds + h(\tau)^\top \int_0^t g(s)^\top\,dW^*(s)\\
&= f(0,\tau) + \mathbf{1}^\top H(\tau) \int_0^t \left(g(s)^\top g(s)\left(\int_s^\tau h(u)\,du\right)\right) ds + \mathbf{1}^\top H(\tau) \int_0^t g(s)^\top\,dW^*(s)\\
&= f(0,\tau) + \mathbf{1}^\top H(\tau) \int_0^t \left(g(s)^\top g(s)\left(\int_s^\tau h(u)\,du\right)\right) ds\\
&\quad + \left(\mathbf{1}^\top H(\tau)H(t)^{-1}x(t) - \mathbf{1}^\top H(\tau) \int_0^t \left(g(s)^\top g(s)\left(\int_s^t h(u)\,du\right)\right) ds\right)\\
&= f(0,\tau) + \mathbf{1}^\top H(\tau)H(t)^{-1}x(t) + \mathbf{1}^\top H(\tau)H(t)^{-1}y(t)H(t)^{-1} \int_t^\tau h(u)\,du.
\end{aligned}$$

Es ist anzumerken, dass aufgrund von $h_i(t) \neq 0$ für alle t in (1.17), die Matrix $H(t)^{-1}$ existiert. Weiter definieren wir einen n-dimensionalen deterministischen Vektor durch $M(t,\tau) \coloneqq H(\tau)H(t)^{-1}\mathbf{1}$. Für diesen Vektor gilt zum einen $M(t,\tau)^\top = \mathbf{1}^\top H(\tau)H(t)^{-1}$, da $H(t)$ eine symmetrische Matrix ist, und zum anderen

$$H(t)^{-1}\int_t^\tau h(u)\,du = \int_t^\tau H(t)^{-1}H(u)\mathbf{1}\,du = \int_t^\tau M(t,u)\,du.$$

Damit ergibt sich nun die folgende Darstellung der Forward-Rate

$$f(t,\tau) = f(0,\tau) + M(t,\tau)^\top\left(x(t) + y(t)\int_t^\tau M(t,u)\,du\right).$$

Aus diesem Ausdruck folgt, dass die zeitliche Entwicklung der Forward-Rate von dem stochastischen Prozess x getrieben wird. Deshalb bestimmen wir als Nächstes seine Dynamik. Hierzu führen wir die Matrixmultiplikation in der Darstellung (1.18) von dem Zufallsvektor x aus, wodurch wir

$$x_i(t) = h_i(t)\int_0^t \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n g_{ji}(s)\sum_{l=1}^n g_{jl}(s)\left(\int_s^t h_l(u)\,du\right)\right)}_{\coloneqq k_i(t,s)} ds + h_i(t)\underbrace{\int_0^t \sum_{j=1}^n g_{ji}(s)\,dW_j^*(s)}_{\coloneqq z_i(t)},$$

für jedes i mit $i = 1,\ldots,n$ erhalten. Jetzt kann die stochastische Differentialgleichung für jedes $x_i(t)$ bestimmt werden. Hierfür wenden wir die Produktregel auf den Prozess $h_i(t)K_i(t)$ mit $K_i(t) \coloneqq \int_0^t k_i(t,s)\,ds$ und die partielle Integration für Ito-Prozesse[13] auf den Prozess $h_i(t)z_i(t)$ an. Dadurch erhalten wir

$$dx_i(t) = \frac{dh_i(t)}{dt}K_i(t)dt + h_i(t)dK_i(t) + \frac{dh_i(t)}{dt}z_i(t)dt + h_i(t)dz_i(t) + d\langle h_i(\cdot), z_i(\cdot)\rangle_t.$$

Dabei gilt $d\langle h_i(\cdot), z_i(\cdot)\rangle_t = 0$, da $h_i(t)$ deterministisch ist. Weiter wird die deterministische Funktion $K_i(t)$ mit der Leibniz-Regel wie folgt differenziert

$$\begin{aligned} dK_i(t) &= \left[\int_0^t \frac{d}{dt}k_i(t,s)\,ds\right]dt = \left[\int_0^t \left(\sum_{j=1}^n g_{ji}(s)\sum_{l=1}^n g_{jl}(s)\frac{d}{dt}\left(\int_s^t h_l(u)\,du\right)\right)ds\right]dt \\ &= \left[\int_0^t \left(\sum_{j=1}^n g_{ji}(s)\sum_{l=1}^n g_{jl}(s)h_l(t)\right)ds\right]dt. \end{aligned}$$

Mittels dieser Gleichung kann die stochastische Differentialgleichung für $x_i(t)$ wie folgt

[13] Siehe [Sch08], Satz 2.3.19.

berechnet werden:

$$\begin{aligned}
dx_i(t) &= \frac{dh_i(t)}{dt} K_i(t)dt + h_i(t)dK_i(t) + \frac{dh_i(t)}{dt} z_i(t)dt + h_i(t)dz_i(t) \\
&= \frac{dh_i(t)}{dt} \left[\int_0^t \left(\sum_{j=1}^n g_{ji}(s) \sum_{l=1}^n g_{jl}(s) \Big(\int_s^t h_l(u)\, du \Big) \right) ds \right] dt \\
&\quad + h_i(t) \left[\int_0^t \left(\sum_{j=1}^n g_{ji}(s) \sum_{l=1}^n g_{jl}(s) h_l(t) \right) ds \right] dt \\
&\quad + \frac{dh_i(t)}{dt} \left[\int_0^t \sum_{j=1}^n g_{ji}(s)\, dW_j^*(s) \right] dt + h_i(t) \sum_{j=1}^n g_{ji}(t) dW_j^*(t).
\end{aligned}$$

Die stochastischen Differentialgleichungen für $x_i(t)$ mit $i = 1, \ldots, n$ ergeben zusammen die folgende stochastische Differentialgleichung für den Zufallsvektor $x(t)$ in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned}
dx(t) = \frac{dH(t)}{dt} \left[\int_0^t \left(g(s)^\top g(s) \Big(\int_s^t h(u)\, du \Big) \right) ds \right] dt + H(t) \left[\int_0^t \big(g(s)^\top g(s) h(t) \big)\, ds \right] dt \\
+ \frac{dH(t)}{dt} \left[\int_0^t g^\top(s)\, dW^*(s) \right] dt + H(t) g(t)^\top dW^*(t).
\end{aligned}$$

Ferner gilt, da $h(t)$ durch $h_i(t) := e^{-\int_0^t \varkappa_i(u)\, du}$ für $i = 1, \ldots, n$ definiert ist, dass

$$-\frac{dH(t)}{dt} H(t)^{-1} = \operatorname{diag}\big((\varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_n(t))^\top \big).$$

Zudem definieren wir $\sigma_x(t) := g(t)H(t)$ und $\kappa(t) := \operatorname{diag}\big((\varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_n(t))^\top \big)$. Damit erhalten wir schließlich die folgende stochastische Differentialgleichung für den Zufallsvektor $x(t)$:

$$\begin{aligned}
dx(t) &= \frac{dH(t)}{dt} \Bigg[\underbrace{\int_0^t \left(g(s)^\top g(s) \Big(\int_s^t h(u)\, du \Big) \right) ds + \int_0^t g^\top(s)\, dW^*(s)}_{=H(t)^{-1} x(t)} \Bigg] dt \\
&\quad + \left[H(t) \Big(\int_0^t g(s)^\top g(s)\, ds \Big) \underbrace{h(t)}_{=H(t)\mathbf{1}} \right] dt + H(t) g(t)^\top dW^*(t) \\
&= \frac{dH(t)}{dt} H(t)^{-1} x(t) dt + \left[H(t) \Big(\int_0^t g(s)^\top g(s)\, ds \Big) H(t)\mathbf{1} \right] dt + (g(t)H(t))^\top dW^*(t) \\
&= \big(y(t)\mathbf{1} - \kappa(t) x(t) \big) dt + \sigma_x(t)^\top dW^*(t).
\end{aligned}$$

□

Die Annahmen 1.3-1.5 spezifizieren die Volatilitätsstruktur der Forward-Rate und führen zu einem Gaußschen Mehrfaktor-HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate. Dieses Modell wird im Folgenden mithilfe des Satzes 1.12 beschrieben.

Das Gaußsche HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate:

Es sei ein Mehrfaktor-HJM-Modell mit folgender Volatilitätsstruktur der Forward-Rate gegeben

$$\sigma(t,\tau) = g(t)h(\tau), \quad 0 \le t \le \tau \le \hat{T}.$$

Dabei sind g eine deterministische $n \times n$-Matrix und h ein n-dimensionaler deterministischer Vektor mit

$$h(t) = \left(e^{-\int_0^t \varkappa_1(u)\,du}, \ldots, e^{-\int_0^t \varkappa_n(u)\,du}\right)^\top,$$

für deterministische Funktionen $\varkappa_i(t)$ mit $i = 1,\ldots,n$, sodass $h_i(t) \neq 0$ für alle $t \le \hat{T}$ gilt. Dann ist die Forward-Rate, entsprechend dem Satz 1.12 unter einem äquivalenten Martingalmaß durch einen stochastischen Prozess $x(t)$ aus (1.18), (1.20) und eine deterministische Funktion $y(t)$ aus (1.19) wie folgt dargestellt

$$f(t,\tau) = f(0,\tau) + M(t,\tau)^\top \left(x(t) + y(t)\int_t^\tau M(t,s)\,ds\right),$$

wobei $M(t,\tau) = \left(e^{-\int_t^\tau \varkappa_1(u)\,du}, \ldots, e^{-\int_t^\tau \varkappa_n(u)\,du}\right)^\top$ gilt. Insbesondere erhält die Short-Rate in diesem Modell die folgende Gestalt

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \mathbf{1}^\top x(t) = f(0,t) + \sum_{i=1}^n x_i(t).$$

Des Weiteren entwickeln sich die Bondpreise über die Zeit gemäß[14]

$$B(t,\tau) = \frac{B(0,\tau)}{B(0,t)} \exp\left(-G(t,\tau)^\top x(t) - \frac{1}{2}G(t,\tau)^\top y(t) G(t,\tau)\right), \tag{1.22}$$

für einen Prozess $G(t,\tau)$ mit $G(t,\tau) \coloneqq \int_t^\tau M(t,u)\,du$.

Das Gaußsche 3-Faktor-HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate

Hier wird ein konkretes, praxisbezogenes, Gaußsches 3-Faktor-HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate vorgestellt. Entsprechend der oberen Beschreibung des n-dimensionalen Modells wird die folgende Volatilitätsstruktur der Forward-Rate betrachtet:

$$\sigma(t,\tau) = g(t)h(\tau), \quad 0 \le t \le \tau \le \hat{T}.$$

[14] Siehe [AP10b], Korollar 12.1.3.

Dabei sind g eine deterministische 3×3-Matrix und h ein deterministischer Vektor mit

$$h(t) = \left(e^{-\int_0^t \varkappa_1(u)\,du}, e^{-\int_0^t \varkappa_2(u)\,du}, e^{-\int_0^t \varkappa_3(u)\,du}\right)^\top, \tag{1.23}$$

für deterministische Funktionen $\varkappa_i(t)$ mit $i = 1, 2, 3$, sodass $h_i(t) \neq 0$ für alle $t \leq \hat{T}$ gilt. Weiter wird die Matrix g wie folgt gewählt:

$$g(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t)e^{\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} & \sigma_{12}(t)e^{\int_0^t \varkappa_2(u)\,du} & \sigma_{13}(t)e^{\int_0^t \varkappa_3(u)\,du} \\ \sigma_{21}(t)e^{\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} & \sigma_{22}(t)e^{\int_0^t \varkappa_2(u)\,du} & \sigma_{23}(t)e^{\int_0^t \varkappa_3(u)\,du} \\ \sigma_{31}(t)e^{\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} & \sigma_{32}(t)e^{\int_0^t \varkappa_2(u)\,du} & \sigma_{33}(t)e^{\int_0^t \varkappa_3(u)\,du} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Aus Vereinfachungsgründen kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $g(t)$ die untere Diagonalmatrix ist[15], d. h. wir können $\sigma_{12}(t) = 0$, $\sigma_{13}(t) = 0$ sowie $\sigma_{23}(t) = 0$ setzen. Der stochastische Prozess $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)^\top$ zur Beschreibung der Forward-Rate ist entsprechend dem Satz 1.12 wie folgt gegeben

$$dx(t) = \big(y(t)\mathbf{1} - \kappa(t)x(t)\big)dt + \sigma_x(t)^\top dW^*(t), \quad \sigma_x(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) & 0 \\ \sigma_{31}(t) & \sigma_{32}(t) & \sigma_{33}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $x(0) = 0$, $\kappa(t) = \operatorname{diag}\big((\varkappa_1(t), \varkappa_2(t), \varkappa_3(t))^\top\big)$ und $y(t)$ eine 3×3-dimensionale deterministische Matrix aus (1.19) sind. Zu bemerken ist, dass die treibenden Prozesse $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ miteinander korreliert sind. Die augenblickliche Korrelation $\rho_{ij}(t)$ zwischen $x_i(t)$ und $x_j(t)$ kann wie folgt bestimmt werden[16]

$$\rho_{ij}(t) = \frac{\sigma_x^i(t)^\top \sigma_x^j(t)}{\|\sigma_x^i(t)\| \cdot \|\sigma_x^j(t)\|}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

wobei $\sigma_x^i(t)$ die i-te Spalte der Matrix $\sigma_x(t)$ ist. Der Einfachheit halber werden diese Prozesse bezüglich korrelierter Wiener-Prozesse $W^{**}(t)$ mit $\langle dW_i^{**}(t), dW_j^{**}(t)\rangle = \rho_{ij}(t)dt$ umgeschrieben[17]. Wir erhalten auf diese Weise die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dx(t) = \big(y(t)\mathbf{1} - \kappa(t)x(t)\big)dt + \sigma_x^{**}(t)dW^{**}(t). \tag{1.25}$$

[15]Wenn $g(t)$ nicht die untere Diagonalmatrix ist, so kann diese Form mit der Cholesky Zerlegung erreicht werden.

[16]Siehe [Bjö03], Kapitel 4.8, S.58.

[17]Siehe [Bjö03], Kapitel 4.8, Proposition 4.19.

Dabei ist die Matrix $\sigma_x^{**}(t)$ bestimmt durch

$$\sigma_x^{**}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{21}^2(t) + \sigma_{31}^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}^2(t) + \sigma_{23}^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & |\sigma_{33}(t)| \end{pmatrix}.$$

Weiter sind für alle τ mit $0 \le \tau \le \hat{T}$ die Forward-Raten und die Bondpreise entsprechend (1.20) und (1.22) durch

$$\begin{aligned} f(t,\tau) &= f(0,\tau) + M(t,\tau)^\top \big(x(t) + y(t)G(t,\tau)\big) \\ B(t,\tau) &= \frac{B(0,\tau)}{B(0,t)} \exp\!\left(-G(t,\tau)^\top x(t) - \frac{1}{2} G(t,\tau)^\top y(t) G(t,\tau)\right), \end{aligned} \tag{1.26}$$

dargestellt, wobei

$$G(t,\tau) = \int_t^\tau M(t,u)\,du, \quad M(t,\tau) = \left(e^{-\int_t^\tau \varkappa_1(u)\,du}, e^{-\int_t^\tau \varkappa_2(u)\,du}, e^{-\int_t^\tau \varkappa_3(u)\,du}\right)^\top$$

gilt. Die Angaben (1.25) und (1.26) definieren dieses Gaußsche 3-Faktor-HJM-Modell.

2 Einführung in die Portfoliooptimierung

In diesem Kapitel erfolgt eine Einführung in die Theorie der Portfoliooptimierung. Hierzu definieren und erläutern wir zunächst die grundlegenden Begriffe. Darauf folgend formulieren wir das Mertonproblem der Portfoliooptimierung und stellen die Martingalmethode zu ihrer Lösung vor. Hierfür dienen [KK01], [KS98], [Kor97] und [Kar97] als Literaturquellen. Im Anschnluss darauf führen wir einige Beispiele der Finanzmarktmodelle an, in denen die Martingalmethode anwendbar ist. Dabei wählen wir zur Darstellung der Präferenzen eines Investors die logarithmische Nutzenfunktion und die Potenznutzenfunktion.

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe der Portfoliooptimierung, wie die Portfolio- und Vermögensprozesse sowie die Nutzenfunktion, definiert und erläutert. Wir beginnen mit der Beschreibung des arbitragefreien und vollständigen Finanzmarktmodells, welches den bevorstehenden Formulierungen zugrude gelegt wird.

Das Finanzmarktmodell

Wir betrachten ein vollständiges Finanzmarktmodell in dem ein äquivalentes Martingalmaß P^* existiert[18] Der Handelszeitraum $[0, \hat{T}]$ ist endlich mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \hat{T}}, P)$. Dabei ist die Quelle des Zufalls von einem n-dimensionalen Wiener-Prozess $(W(t))_{0 \leq t \leq \hat{T}}$ mit $W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^\top$ getrieben. Der Informationsverlauf ist durch eine rechtsseitig stetige und vollständige Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \hat{T}}$ dargestellt, welche von diesem Wiener-Prozess erzeugt ist. Des Weiteren enthält der Finanzmarkt n Basisfinanzgüter (Aktien und Bonds), deren Preisprozesse $(S_i(t))_{0 \leq t \leq \hat{T}}$ für $i = 1, \dots, n$ auf folgende Weise modelliert sind

$$dS_i(t) = S_i(t)\left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right), \quad 0 \leq t \leq \hat{T}, \quad S_i(0) = s_i \in (0, \infty). \tag{2.1}$$

Ein weiteres Finanzgut ist das Numéraire-Finanzgut. Dieses wird mit $N(t)$ bezeichnet und kann als das Geldmarktkonto oder als ein weiteres risikobehaftetes Finanzgut S_{n+1} mit $S_{n+1}(t) > 0$ P^*-fast sicher für alle $0 \leq t \leq \hat{T}$ gewählt werden. Somit ist der Preisprozess

[18]Die Forderung der Arbitragefreiheit ist für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes in einem stetigen Finanzmarktmodell nicht ausreichend. Damit die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes garantiert ist, muss das Modell die sogenannte „no free lunch with vanishing risk“-Bedingung (NFLVR) erfüllen. Dagegen sichert die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes die Arbitragefreiheit des Modells (siehe [Pau13]).

des Numéraire-Finanzgutes im Falle des Geldmarktkontos durch

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt, \quad 0 \le t \le \hat{T} \tag{2.2}$$

und im Falle eines $n+1$-Finanzgutes durch

$$dS_{n+1}(t) = S_{n+1}(t)\Bigg(\mu_{n+1}(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{n+1,j}(t)dW_j(t)\Bigg), \quad 0 \le t \le \hat{T} \tag{2.3}$$

dargestellt, mit $\beta(0) = 1$ und $S_{n+1}(0) = s_{n+1} \in (0, \infty)$. Dabei sind die Prozesse $r(t)$, $\mu(t) := (\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t))^\top$, $\sigma(t) := (\sigma_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}$, $\sigma_{n+1}(t) := (\sigma_{n+1,1}(t), \ldots, \sigma_{n+1,n}(t))$ progressiv messbar und erfüllen die folgende Integrabilitätsbedingung

$$\int_0^{\hat{T}} \big(|r(s)| + \|\mu_{n+1}(s)\| + \|\mu(s)\| + \|\sigma_{n+1}(s)\|^2 + \|\sigma_i(s)\|^2 \big)\, ds < \infty, \quad P - f.s., \tag{2.4}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$ und σ_i die i-te Zeile der Matrix σ sind. Zudem ist die $n \times n$-Matrix $\sigma(t)$ auf $[0, \hat{T}] \times \Omega$ invertierbar.

Des Weiteren geben wir mit dem nachfolgenden Satz ein äquivalentes Martingalmaß für dieses Finanzmarktmodell an[19].

Satz 2.1. *Es sei für das obere Finanzmarktmodell P^* das äquivalente Martingalmaß bezüglich des Numéraire N. Dann existiert ein $\mathbb{R}^n$-wertiger, previsibler Prozess $(\vartheta(t))_{0 \le t \le \hat{T}}$ mit $P\big(\int_0^t \|\vartheta(s)\|^2\, ds < \infty\big) = 1$ für alle $0 \le t \le \hat{T}$, sodass*

$$\frac{dP^*}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \vartheta_i(u)\, dW_i(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(u)^2\, du\Bigg) := L(t) \tag{2.5}$$

gilt. Der Dichtequotientenprozess $L(t)$ erfüllt dann die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dL(t) = L(t)\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(t)dW_i(t). \tag{2.6}$$

Wobei der Prozess $\vartheta(t)$ als der Marktpreis des Risikos bezeichnet wird. Des Weiteren gilt, dass der Prozess $\frac{S_i(t)}{N(t)}$ für $i = 1, \ldots, n+1$ ein P^*-Martingal ist. Zudem ist der Wiener-Prozess unter dem Maßes P^* dargestellt durch

$$dW_i^*(t) = dW_i(t) - \vartheta_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

[19] Siehe hierzu [Pau12].

Portfolio- und Vermögensprozesse

Nachdem das Finanzmarktmodell festgelegt wurde, soll das Handeln des Investors modelliert werden. Hierzu werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Investor kann sein Vermögen umschichten[20], d.h. er kann einige seiner Finanzgüter verkaufen und das Geld in andere Finanzgüter investieren.
- Dabei beeinflusst sein Handel die Marktpreise nicht.
- Außerdem trifft er seine Investitionsentscheidungen zum Zeitpunkt t auf der Basis in t verfügbarer Marktinformationen und ohne Kenntnis der zukünftigen Ereignisse.

Der Investor startet zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem fixen Anfangskapital $x > 0$ und handelt kontinuierlich in der Zeit bis zu einem bestimmten Planungshorizont T mit $T \leq \hat{T}$. Als Investitionsmöglichkeiten stehen ihm n risikobehaftete Finanzgüter sowie ein Numéraire-Finanzgut zur Verfügung. Sein Handeln wird durch einen $\mathbb{R}^n$-wertigen Portfolioprozess

$$\pi = (\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))^\top_{0 \leq t \leq T},$$

dargestellt, dessen genaue Definition später folgt. Dabei bezeichnet $\pi_i(t)$ den Geldbetrag, welcher zum Zeitpunkt t in das i-te risikobehaftete Finanzgut investiert wird. Zudem wird gefordert, dass der Rest des Geldvermögens, welcher mit $\pi_0(t)$ bezeichnet wird, in das Numéraire-Finanzgut angelegt wird. Als Numéraire-Finanzgut können das Geldmarktkonto oder ein weiteres risikobehaftetes Finanzgut gewählt werden.

Der Portfolioprozess kann auch negative Werte annehmen. Dabei wird eine negative Position in dem Geldmarktkono als ein Kredit aufgefasst. Ein negativer Wert in dem risikobehafteten Finanzgut weist auf die Short Position hin, d. h. der Investor lieh sich ein risikobehaftetes Finanzgut und verkaufte dieses, wodurch eine Schuld gegenüber dem Gläubiger entstand.

Durch das Verfolgen der Portfoliostrategie π zum Anfangskapital x wird ein Vermögensprozess V_x^π erzeugt. Das Vermögen zum Zeitpunkt t stellt den Gesamtwert der Finanzgüter in dem Portfolio dar, d. h. es gilt:

$$V_x^\pi(t) = \frac{\pi_0(t)}{N(t)} N(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i(t)}{S_i(t)} S_i(t).$$

Dann ist der Geldbetrag, welcher zum Zeitpunkt t in das Numéraire-Finanzgut investiert wird durch $\pi_0(t) = V_x^\pi(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)$ bestimmt. Weiter wird gefordert, dass der Portfolioprozess selbstfinanzierend ist. Das bedeutet, dass die Änderung des Vermögens ausschließlich aus dem Gewinn (bzw. Verlust) der Investition resultiert. Deshalb wird die

[20] Die Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt.

Entwicklung dieses Vermögens in der Zeit durch die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dV_x^\pi(t) = \pi_0(t)\frac{dN(t)}{N(t)} + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$$

mit $V_x^\pi(0) = x$ modelliert. Um die Entwicklung des Vermögensprozesses für das betrachtete Finanzmarktmodell zu präzisieren, werden die Dynamiken der Finanzgüter (2.1)-(2.3) eingesetzt und es ergibt sich:

Im Falle $N(t) = \beta(t)$ gilt

$$dV_x^\pi(t) = r(t)V_x^\pi(t)dt + \pi(t)^\top\Big(\big(\mu(t) - r(t)\mathbf{1}_n\big)dt + \sigma(t)dW(t)\Big). \tag{2.8}$$

Im Falle $N(t) = S_{n+1}(t)$ gilt

$$\begin{aligned} dV_x^\pi(t) &= V_x^\pi(t)\big(\mu_{n+1}(t)dt + \sigma_{n+1}(t)dW(t)\big) \\ &\quad + \pi(t)^\top\Big(\big(\mu(t) - \mu_{n+1}(t)\mathbf{1}_n\big)dt + \big(\sigma(t) - \mathbf{1}_n\sigma_{n+1}(t)\big)dW(t)\Big), \end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei $\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ ist. Aus dieser Vermögensgleichung ist es ersichtlich, dass der Portfolioprozess bestimmte Integrabilitätsbedingungen erfüllen muss, damit eine eindeutige Lösung für diese Gleichung existiert. Diese Forderungen werden in der nachfolgenden Definition des Portfolioprozesses festgehalten.

Definition 2.2. *Ein progressiv messbarer $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess $\pi = (\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t))_{0\leq t\leq T}^\top$ wird als ein Portfolioprozess bezeichnet, falls er die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$\int_0^T \|\pi(t)^\top\sigma(t)\|^2\, dt + \int_0^T |\pi(t)^\top(\mu(t) - r(t)\mathbf{1}_n)|\, dt < \infty \quad P - f.s. \tag{2.10}$$

Bemerkung 2.3. Die obere Integrabilitätsbedingung für den Portfolioprozess resultiert aus der Vermögensgleichung (2.8) bezüglich des Geldmarktkontos als Numéraire. Im Falle des risikobehafteten Finanzgutes als Numéraire müsste der Portfolioprozess entsprechend (2.9) die folgende Bedingung erfüllen

$$\int_0^T \|\pi(t)^\top(\sigma(t) - \mathbf{1}_n\sigma_{n+1}(t))\|^2\, dt + \int_0^T |\pi(t)^\top(\mu(t) - \mu_{n+1}(t)\mathbf{1}_n)|\, dt < \infty \quad P - f.s.$$

Die Gültigkeit dieser Bedingung folgt jedoch aus den Integrabilitätsbedingungen (2.4) und (2.10). Somit ist die gegebene Definition des Portfolioprozesses auch für den Fall ausreichend, dass das risikobehaftete Finanzgut als Numéraire dient.

Definition 2.4. *Ein Portfolioprozess π heißt selbstfinanzierend, falls der entsprechende Vermögensprozess V_x^π die Vermögensgleichung (2.8) bzw. (2.9) eindeutig löst.*

Das Verfolgen der Porfoliostrategie kann Schulden verursachen, welche der Investor nicht mehr in der Lage zu begleichen ist. Der Wert $V_x^\pi(t) < 0$ ist also möglich. Damit solche Portfolioprozesse ausgeschlossen werden, wird die Zulässigkeit des Portfolioprozesses eingeführt.

Definition 2.5. *Ein selbstfinanzierender Portfolioprozess π heißt zulässig für ein Anfangskapital $x > 0$, wenn der zugehörige Vermögensprozess V_x^π die Bedingung*

$$V_x^\pi(t) \geq 0 \quad \mathbb{P} - f.s. \quad \textit{für alle} \quad 0 \leq t \leq T$$

erfüllt. Die Menge der zulässigen Portfolioprozesse zum Anfangskapital $x \geq 0$ wird mit $\mathcal{A}_0(x)$ bezeichnet.

Aus der Perspektive der Portfoliooptimierung stellt sich die Frage, welches Endvermögen durch das Investieren eines bestimmten Kapitals am Anfang erreicht werden kann. Diese Frage wird im nachfolgenden Satz beantwortet. Hierzu wird ein stochastischer Prozess H für den Dichtequotientenprozess L des äquivalenten Martingalmaßes bezüglich des Numéraires N wie folgt definiert

$$H(t) := \frac{L(t)}{N(t)}, \qquad 0 \leq t \leq \hat{T}. \tag{2.11}$$

Satz 2.6. *(1) Es sei der selbstfinanzierende Portfolioprozess π zulässig für ein Anfangskapital $x \geq 0$, d. h. $\pi \in \mathcal{A}_0(x)$. Dann erfüllt der zugehörige Vermögensprozess V_x^π die sogenannte Budgetbedingung*

$$N(0)E\big[H(t)V_x^\pi(t)\big] \leq x \quad \textit{für alle} \quad 0 \leq t \leq T.$$

(2) Es seien ein Anfangskapital $x \geq 0$ und eine nichtnegative, $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable ξ gegeben, für welche

$$x = N(0)E\big[H(T)\xi\big] < \infty$$

gilt. Dann existiert ein Portfolioprozess $(\pi(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $\pi \in \mathcal{A}_0(x)$, sodass der zugehörige Vermögensprozess V_x^π die folgende Gleichheit erfüllt

$$V_x^\pi(T) = \xi \quad P - f.s.$$

Beweis: Zu 1: Im Falle des Geldmarktkontos als Numéraire-Finanzgut entspricht dieser Satz dem Theorem 2.63 in [KK01]. Somit können wir die Ergebnisse für $N(t) = \beta(t)$ übernehmen und für den Fall, dass $N(t) = S_{n+1}(t)$ erweitern.
Der Portfolioprozess π sei selbstfinanzierend und zulässig für ein Anfangskapital $x \geq 0$. Weiter sei P^* das äquivalente Martingalmaß bezüglich des Geldmarktkontos $\beta(t)$ als

Numéraire mit $\frac{dP^*}{dP}\big|_{\mathcal{F}_t} = L^*(t)$. Damit definieren wir einen Prozess $H^*(t)$ durch

$$H^*(t) := \frac{L^*(t)}{\beta(t)}.$$

Für diesen Prozess gilt nach dem Theorem 2.63 in [KK01] mit $\beta(0) = 1$, dass

$$\beta(0)E[H^*(t)V_x^\pi(t)] \leq x.$$

Es sei $\overline{P}$ ein weiteres äquivalentes Martingalmaß bezüglich $S_{n+1}(t)$ als Numéraire mit $\frac{d\overline{P}}{dP}\big|_{\mathcal{F}_t} = \overline{L}(t)$. Dazu definieren wir einen weiteren Prozess $\overline{H}$ durch

$$\overline{H}(t) := \frac{\overline{L}(t)}{S_{n+1}(t)}.$$

Als Nächstes bestimmen wir den Dichtequotientenprozess von dem Maß $\overline{P}$ bezüglich P^*. Da $\frac{S_{n+1}(t)}{\beta(t)}$ ein Martingal bezüglich P^* ist, kann der Dichtequotientenprozess wie folgt definiert werden[21]

$$\frac{d\overline{P}}{dP^*}\bigg|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_{n+1}(t)}{\beta(t)} \cdot \frac{1}{S_{n+1}(0)} := R(t)$$

Weil $\overline{P}$ zu P^* und P^* zu P äquivalent sind, ist das Maß $\overline{P}$ zu P äquivalent. Es bleibt zu zeigen, dass $\frac{S_i(t)}{S_{n+1}(t)}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\frac{\beta(t)}{S_{n+1}(t)}$ Martingale bezüglich $\overline{P}$ sind. Der Satz von Bayes[22] impliziert, dass M genau dann ein $\overline{P}$-Martingal ist, wenn MR ein P^*-Martingal ist. Deshalb betrachten wir die folgenden Prozesse:

$$\begin{aligned}
\frac{S_i(t)}{S_{n+1}(t)}R(t) &= \frac{S_i(t)}{S_{n+1}(t)} \cdot \frac{S_{n+1}(t)}{\beta(t)} \cdot \frac{1}{S_{n+1}(0)} = \frac{S_i(t)}{\beta(t)}\frac{1}{S_{n+1}(0)}, \\
\frac{\beta(t)}{S_{n+1}(t)}R(t) &= \frac{\beta(t)}{S_{n+1}(t)} \cdot \frac{S_{n+1}(t)}{\beta(t)} \cdot \frac{1}{S_{n+1}(0)} = \frac{1}{S_{n+1}(0)}.
\end{aligned}$$

Die oberen Gleichungen zeigen, dass die Prozesse $\frac{S_i(t)}{S_{n+1}(t)}R(t)$ und $\frac{\beta(t)}{S_{n+1}(t)}R(t)$ Martingale bezüglich P^* sind. Somit folgt die Martingaleigenschaft der Prozesse $\frac{S_i(t)}{S_{n+1}(t)}$ und $\frac{\beta(t)}{S_{n+1}(t)}$ unter dem Maß $\overline{P}$.

[21] Vergleiche [Pau12].

[22] Siehe [Bjö03], S.440 Proposition B41 und [KS91], Lemma 5.3.

Jetzt kann der Erwartungswert $E[H^*(t)V_x^\pi(t)]$ mit dem Satz von Bayes wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned}E[H^*(t)V_x^\pi(t)] &= E\left[\frac{L^*(t)}{\beta(t)}V_x^\pi(t)\right] = E^*\left[\frac{V_x^\pi(t)}{\beta(t)}\right] = E^*\left[\frac{V_x^\pi(t)}{\beta(t)}\frac{R(t)}{R(t)}\right] = \overline{E}\left[\frac{V_x^\pi(t)}{\beta(t)}\frac{1}{R(t)}\right] \\ &= \overline{E}\left[\frac{V_x^\pi(t)}{\beta(t)}\frac{\beta(t)S_{n+1}(0)}{S_{n+1}(t)}\right] = S_{n+1}(0)\overline{E}\left[\frac{V_x^\pi(t)}{S_{n+1}(t)}\right] = S_{n+1}(0)E\left[\overline{L}(t)\frac{V_x^\pi(t)}{S_{n+1}(t)}\right] \\ &= S_{n+1}(0)E[\overline{H}(t)V_x^\pi(t)],\end{aligned}$$

wobei $E^*[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich P^* und $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich $\overline{P}$ bezeichnen. Damit lässt sich die obere Ungleichung wie folgt umformen:

$$S_{n+1}(0)E[\overline{H}(t)V_x^\pi(t)] \leq x.$$

Insgesamt ergibt sich für den Prozess $H(t)$ mit $H(t) := \frac{dP^*}{dP}\big|_{\mathcal{F}_t}\frac{1}{N(t)}$, wobei P^* nun das äquivalente Martingalmaß bezüglich des Numeraires $N(t)$ ist, die folgende Ungleichung:

$$N(0)E[H(t)V_x^\pi(t)] \leq x.$$

Zu 2: Es sei eine nichtnegative $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable ξ gegeben. Diese Zufallsvariable ξ kann als ein Claim aufgefasst werden. Da das betrachtete Finanzmarktmodell vollständig ist und das äquivalente Martingalmaß existiert, gibt es einen selbstfinanzierenden und zulässigen Portfolioprozess π, sodass zugehörige Vermögensprozess zum Zeitpunkt T dem Wert des Claims entspricht[23], d. h. es gilt

$$V^\pi(T) = \xi.$$

Insbesondere ist der arbitragefreie Anfangspreis für ξ wie folgt gegeben

$$V^\pi(0) = N(0)E^*\left[\frac{V^\pi(T)}{N(T)}\right] = N(0)E[H(T)\xi].$$

Dabei bezeichnet P^* das äquivalente Martingalmaß bezüglich des Numéraires N und der Prozess H ist durch $H(t) := \frac{dP^*}{dP}\big|_{\mathcal{F}_t}\frac{1}{N(t)}$ definiert. Es sei $x := V^\pi(0)$. Somit existiert für jede nichtnegative $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable ξ mit

$$x = N(0)E\big[H(T)\xi\big] < \infty,$$

ein selbstfinanzierender und zum Anfangskapital von x zulässiger Portfolioprozess π, sodass $V_x^\pi(T) = \xi$ gilt. □

[23]Siehe [Pau13].

Die Implikation vom Teil (1) dieses Satzes ist, dass zum Erreichen eines bestimmten Endvermögens ξ in $t = T$ das Anfangsvermögen in Höhe von mindestens $E[H(T)\xi]N(0)$ erforderlich ist. Der Teil (2) dieses Satzes besagt, dass jedes erwünschte Endvermögen ξ in $t = T$ durch das Handeln entsprechend einem selbstfinanzierenden, zulässigen Portfolioprozess π realisiert werden kann. Es muss jedoch genügend Anfangskapital eingesetzt werden.

Nutzenfunktion

Jeder Investor hat eine individuelle Einstellung zum Risiko. Außerdem wird der Wert eines Geldbetrages von jedem unterschiedlich empfunden. Deshalb wird eine Nutzenfunktion eingeführt, durch welche die Präferenzen des Investors bei der Entscheidungsfindung modelliert werden.

Definition 2.7. *Eine Funktion $U\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wird als Nutzenfunktion bezeichnet, falls sie streng monoton steigend, streng konkav sowie stetig differenzierbar ist und zudem die sogenannten Inada-Bedingungen erfüllt:*

$$U'(0+) := \lim_{x \searrow 0} U'(x) = +\infty,$$
$$U'(\infty) := \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0.$$

Ein Investor mit einer solchen Nutzenfunktion wird immer ein höheres Level x (z. B. vom Endvermögen) gegenüber einem niedrigeren bevorzugen. Jedoch sein zusätzlicher Nutzen wird mit jeder weiteren Einheit von x abnehmen. Schließlich, wenn x bereits sehr groß ist, wird jeder weiteren Einheit davon kein Nutzen mehr beigemessen. Dagegen bei einem sehr kleinen x wird jede zusätzliche Einheit einen sehr großen Nutzenzuwachs bewirken.

Hier sind einige **Beispiele** solcher Nutzenfunktionen:

- Logarithmische Nutzenfunktion: $U(x) = \log(x), \quad x \in (0,\infty)$.
- Potenz-Nutzenfunktion: $U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad x \in (0,\infty),\ p \in (0,1)$.
- Exponentielle Nutzenfunktion: $U(x) = \frac{-\exp(-px)}{p}. \quad x \in (0,\infty),\ p \in (0,\infty)$.

2.2 Formulierung des Mertonproblems

Es sei das Finanzmarktmodell aus dem Abschnitt 2.1 vorausgesetzt. In diesem Modell wird ein Investor betrachtet, der zum Zeitpunkt $t = 0$ ein bestimmtes Anfangskapital $x > 0$ besitzt und seinen erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen zum Planungshorizont $T \leq \hat{T}$ maximieren möchte. Des Weiteren sei angenommen, dass seine Präferenzen durch eine Nutzenfunktion U entsprechend der Definition 2.7 beschrieben sind. Das Optimierungsproblem liegt somit in der Bestimmung eines optimalen Portfolioprozesses, der seinen erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen maximiert. Dieses Problem der Portfoliooptimierung wird als Mertonproblem bezeichnet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die stetige Änderung der Preise von Finanzgütern in der Zeit eine kontinuierliche Anpassung des Portfolioprozesses erfordert. Somit handelt es sich um ein dynamisches Optimierungsproblem. Im Folgenden wird das Mertonproblem mathematisch formuliert:

Mertonproblem

Finde einen selbstfinanzierenden Portfolioprozess π, welcher für ein vorgegebenes Anfangskapital $x > 0$ zulässig ist und den erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen zum Planungshorizont $T \leq \hat{T}$ maximiert:

$$J(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E\big[U\big(V_x^\pi(T)\big)\big],$$

$$\mathcal{A}(x) = \big\{\pi \in \mathcal{A}_0(x);\, E\big[U^-\big(V_x^\pi(T)\big)\big] < \infty\big\}.$$

Dabei bezeichnet y^- mit $y^- := \max\{-y, 0\}$ den negativen Teil von y.

2.3 Martingalmethode zur Lösung des Mertonproblems

2.3.1 Darstellung der Methode

In diesem Abschnitt wird die Martingalmethode zur Lösung des Mertonproblems vorgestellt. Die grundlegende Idee dieser Methode besteht in der Aufteilung dieses zeitlich dynamischen Optimierungsproblems in ein statisches Optimierungsproblem und in ein Darstellungsproblem. Wir beginnen mit der Erläuterung der Transformation von einem dynamischen zu einem statischen Optimierungsproblem.

Das Endvermögen lässt sich als ein Claim auffassen. Somit garantiert die Vollständigkeit des Finanzmarktmodells die Existenz eines replizierenden Portfolioprozesses für das Endvermögen. Diese fundamentale Überlegung wurde in dem Satz 2.6 festgehalten. Im Konkreten hat dieser Satz die folgende Aussage: Es sei ein festes Anfangskapital $x > 0$

vorgegeben. Für ein Endvermögen X unter der Voraussetzung

$$\frac{x}{N(0)} = E[H(T)X] < \infty$$

existiert ein Portfolioprozess, sodass der erzeugte Vermögensprozess zum Planungshorizont T dem Endvermögen in Höhe von X entspricht, d. h. es gilt

$$V_x^\pi(T) = X \quad P - f.s.$$

Außerdem ist dieser Portfolioprozess selbstfinanzierend und zulässig für das vorgegebene Anfangskapital. In diesem Zusammenhang ist entsprechend dem ersten Teil des Satzes 2.6 anzumerken, dass zum Erreichen des gewünschten Endvermögens X das Anfangsvermögen mindestens den Wert

$$N(0)E[H(T)X]$$

betragen sollte. Insgesamt folgt, dass die Maximierung des erwarteten Nutzens über Portfolioprozessen, zunächst durch die Maximierung über Endvermögen X ersetzt werden kann. Dies führt zu einem statischen Optimierungsproblem mit folgender Formulierung:

Statisches Optimierungsproblem

$$\sup_{X \in \mathcal{B}(x)} E[U(X)], \quad x \in (0, \infty),$$

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ X;\ X \geq 0,\ X\ \mathcal{F}_T - \text{messbar},\ E\big[U^-(X)\big] < \infty,\ N(0)E[H(T)X] \leq x \right\}.$$

Damit die Lösung des dynamischen Optimierungsproblems vollendet wird, sollte im nächsten Schritt ein replizierender Portfolioprozess für das optimale Endvermögen bestimmt werden. Dieses Problem wird als ein Darstellungsproblem bezeichnet und wird im Folgenden genauer formuliert.

Das optimale Endvermögen X ist ein replizierbarer Claim, d. h. es existiert ein progressiv messbarer, selbstfinanzierender und zum $x > 0$ zulässiger, $\mathbb{R}^{n+1}$-wertiger Prozess φ mit[24]

$$\int_0^T |\varphi_0(t)|\, dt < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \int_0^T (\varphi_i(t) S_i(t))^2\, dt < \infty \qquad P^* - f.s., \tag{2.12}$$

sodass gilt

$$E^*\left[\frac{X}{N(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{x}{N(0)} + \sum_{i=1}^n \int_0^t \varphi_i(u)\, d\left(\frac{S_i(u)}{N(u)}\right),$$

für das äquivalente Martingalmaß P^* bezüglich des Numéraires N mit dem Erwartungs-

[24]Siehe [Pau13].

wert $E^*[\cdot]$. Dabei ist der zugehörige diskontierte Vermögensprozess dargestellt durch

$$\frac{V_x^\varphi(t)}{N(t)} = E^*\left[\frac{X}{N(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right], \tag{2.13}$$

wobei insbesondere

$$V_x^\varphi(T) = X \qquad P - f.s.$$

gilt. Der Prozess $\varphi(t)$ wird als eine selbstfinanzierende, zulässige ***Handelsstrategie*** bezeichnet. Der Wert $\varphi_i(t)$ für $i = 1, \ldots, n$ gibt die Anzahl an Anteilen im risikobehafteten Finanzgut $S_i(t)$ an, welche der Investor zum Zeitpunkt t halten soll, damit er zum Planungshorizont T das optimale Endvermögen X erreicht. Wobei der Rest des Vermögens stets in das Numéraire-Finanzgut investiert wird. Sein Anteil wird mit $\varphi_0(t)$ bezeichnet. Der Portfolioprozess π wird hingegen in Geldeinheiten notiert. Daher geht der Portfolioprozess aus der Handelsstrategie φ wie folgt hervor:

$$\pi_i(t) = \varphi_i(t)S_i(t), \quad \text{für } i = 1, \ldots, n, \quad \pi_0(t) = V_x^\pi(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t).$$

Aus diesen Überlegungen heraus wird nun das Darstellungsproblem formuliert.

Darstellungsproblem

Gesucht ist ein progressiv messbarer, selbstfinanzierender und zum $x > 0$ zulässiger, $\mathbb{R}^{n+1}$-wertiger Prozess φ mit der Eigenschaft (2.12), der die folgende Gleichheit erfüllt

$$E^*\left[\frac{X}{N(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{x}{N(0)} + \sum_{i=1}^n \int_0^t \varphi_i(u)\, d\left(\frac{S_i(u)}{N(u)}\right), \tag{2.14}$$

wobei $E^*[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes P^* zum Numéraire N bezeichnet. Der Portfolioprozess π ergibt sich aus der Darstellung des Prozesses φ durch:

$$\pi_i(t) = \varphi_i(t)S_i(t), \quad \text{für } i = 1, \ldots, n, \quad \pi_0(t) = V_x^\pi(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t). \tag{2.15}$$

Lösung des statischen Optimierungsproblems

Zur Lösung des statischen Optimierungsproblems wird die Lagrange-Methode angewandt. Dadurch ergibt sich, dass die Lösung von der Form[25]

$$X = I(\lambda H(T))$$

[25] Siehe [KS98], S.102.

sein muss. Dabei ist $\lambda > 0$ der Lagrange-Multiplikator, der so zu wählen ist, dass die Nebenbedingung für das Gleichheitszeichen eingehalten wird:

$$E[H(T)X] = \frac{x}{N(0)}.$$

Weiter seien eine Funktion $\mathcal{X}$ und ein $\overline{x} > 0$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\lambda) &:= E[H(T)I(\lambda H(T))] \quad \text{für} \quad I(\cdot) := \big(U'(\cdot)\big)^{-1}, \quad \lambda \in (0,\infty), \\ \overline{x} &:= \frac{x}{N(0)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Funktion $\mathcal{X}$ ist fallend und es gilt $\mathcal{X}(\lambda) = \overline{x}$. Zusätzlich wird folgende Annahme gemacht.

Annahme 2.1. Es gelte $\mathcal{X}(\lambda) < \infty$ für alle $\lambda \in (0,\infty)$.

Dann hat $\mathcal{X}$ eine inverse Funktion $\mathcal{Y}$, sodass $\lambda = \mathcal{Y}(\overline{x})$ gilt. Somit kann der Lagrange-Multiplikator λ eindeutig bestimmt werden. Hieraus ergibt sich der folgende Kandidat für das optimale Endvermögen:

$$X^* = I(\mathcal{Y}(\overline{x})H(T)). \tag{2.17}$$

Karatzas zeigt, dass dieser Kandidat für das optimale Endvermögen tatsächlich unter der folgenden Annahme in der Menge $\mathcal{B}(x)$ liegt.

Annahme 2.2. Es gelte $E[H(T)] < \infty$.

Somit erweist sich X^* aus (2.17) als Lösung des statischen Optimierungsproblems. Des Weiteren zeigt Karatzas, dass der replizierende Portfolioprozess zu diesem optimalen Endvermögen tatsächlich das Mertonproblem löst. Diese Ergebnisse werden im nachfolgenden Satz zusammengefasst (siehe [KS98], Theorem 6.3).

Satz 2.8. *Es seien die Annahmen 2.1 und 2.2 erfüllt. Ferner sei zu einem fest vorgegebenen Anfangskapital $x \in (0,\infty)$ das Endvermögen X^* durch (2.17) gegeben. Weiter sei π^* ein Portfolioprozess mit $\pi^* \in \mathcal{A}_0(x)$ und $X^* = V_x^{\pi^*}(T)$. Dann gilt, dass $\pi^* \in \mathcal{A}(x)$ und π^* optimal für das Mertonproblem ist:*

$$J(x) = E\Big[U\Big(V_x^{\pi^*}(T)\Big)\Big].$$

2.3.2 Beispiele zur Anwendbarkeit

In diesem Unterkapitel geben wir einige Beispiele der Finanzmarktmodelle, in denen die Martingalmethode anwendbar ist. Hierzu sei das vom Wiener-Prozess getriebene, vollständige Finanzmarktmodell, in dem das äquivalente Martingalmaß existiert, aus dem Kapitel 2.1 gegeben. Die Voraussetzungen für die Zulässigkeit der Anwendung wurden mit dem Satz 2.8 erfasst. Diesem Satz entsprechend muss die Gültigkeit der folgenden Bedingungen überprüft werden:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad E[H(T)] < \infty, \\ &\text{ii)} \quad \mathcal{X}(\lambda) = E[H(T)I(\lambda H(T))] < \infty, \quad \lambda \in (0,\infty), \end{aligned}$$

für einen Prozess H aus (2.11), T mit $0 \leq T \leq \hat{T}$ und $I(\cdot) := (U'(\cdot))^{-1}$. Dabei geht aus der zweiten Bedingung hervor, dass die Anwendbarkeit der Martingalmethode entscheidend von der Art der Nutzenfunktion abhängt. Wir prüfen die Erfüllung dieser Bedingungen für die logarithmische Nutzenfunktion sowie die Potenznutzenfunktion.

Die erste Bedingung ist für das betrachtete Finanzmarktmodell erfüllt, falls es zusätzlich ein Bondmarktmodell einschließt. Diese Feststellung wird im nachfolgenden Satz bewiesen.

Satz 2.9. *Es sei das vom Wiener-Prozess getriebene, vollständige Finanzmarktmodell in dem das äquivalente Martingalmaß existiert, entsprechend dem Abschnitt 2.1 gegeben. Weiter sei der Prozess H gemäß (2.11) definiert. Zudem gelte*

$$E^*\left[\frac{1}{\beta(T)}\right] < \infty, \quad 0 \leq T \leq \hat{T}, \tag{2.18}$$

wobei $E^*[\cdot]$ den Erwartungswert unter dem äquivalenten Martingalmaß bezüglich des Geldmarktkontos $\beta(t)$ darstellt. Dann schließt dieses Finanzmarktmodell ein Bondmarktmodell ein und der folgende Erwartungswert existiert

$$E[H(T)] < \infty, \quad 0 \leq T \leq \hat{T}.$$

Beweis: Es sei P^* das äquivalente Martingalmaß bezüglich des Geldmarktkontos $\beta(t)$ als Numéraire. Unter diesem Maß ist der arbitragefreie Anfangspreis eines Bonds mit der Fälligkeit $T \leq \hat{T}$ durch

$$B(0,T) = E^*\left[\frac{B(T,T)}{\beta(T)}\right] = E^*\left[\frac{1}{\beta(T)}\right]$$

bestimmt. Im Falle eines risikobehafteten Finanzgutes S_{n+1} als Numéraire für das äquivalente Martingalmaß $\overline{P}$ gilt mit dem Satz von Bayes für[26]

$$\left.\frac{d\overline{P}}{dP^*}\right|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_{n+1}(t)}{\beta(t)} \cdot \frac{1}{S_{n+1}(0)}$$

[26]Siehe für die Herleitung des Dichtequotientenprozesses den Beweis des Satzes 2.6, Teil 1.

die folgende Gleichheit:

$$B(0,T) = E^* \left[\frac{1}{\beta(T)} \right] = S_{n+1}(0) \overline{E} \left[\frac{1}{S_{n+1}(T)} \right].$$

Dabei bezeichnet $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich $\overline{P}$. Somit folgt aus der Voraussetzung (2.18) die Existenz arbitragefreier Anfangspreise der Bonds für jede Fälligkeit $T \leq \hat{T}$, unabhängig von der Wahl des Numéraires. Das bedeutet, dass das betrachtete Finanzmarktmodell ein Bondmarktmodell einschließt.
Ferner sei ein Prozess H durch $H(t) := \frac{L(t)}{N(t)}$ für ein äquivalentes Martingalmaß P^{**} bezüglich des Numéraires N (β oder S_{n+1}) mit $\frac{dP^{**}}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = L(t)$ definiert. Nach dem Satz von Bayes erfüllt dieser Prozess die folgende Gleichheit:

$$E[H(T)] = E \left[\frac{L(T)}{N(T)} \right] = E^{**} \left[\frac{1}{N(T)} \right] = \frac{B(0,T)}{N(0)},$$

wobei $E^{**}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich P^{**} bezeichnet. Aus dieser Gleichheit zusammen mit der Existenz arbitragefreier Anfangspreise der Bonds $B(0,T) < \infty$ für alle Fälligkeiten ergibt sich dann die Existenz des folgenden Erwartugswertes:

$$E[H(T)] < \infty, \quad 0 \leq T \leq \hat{T}. \qquad \square$$

Sei die erste Bedingung erfüllt, dann ist die Anwendbarkeit der Martingalmethode von der zweiten Bedingung abhängig. Die Gültigkeit dieser Bedingung wird für die logarithmische Nutzenfunktionen und die Potenznutzenfunktion unter zusätzlichen Voraussetzungen an das betrachtete Modell gezeigt.

Beispiel für die logarithmische Nutzenfunktion

Die zweite Bedingung ist für eine logarithmische Nutzenfunktion in dem betrachteten Finanzmarktmodell immer gültig. Dieses Ergebnis wird im folgenden Satz formuliert und bewiesen.

Satz 2.10. *Es sei das vom Wiener-Prozess getriebene und vollständige Finanzmarktmodell in dem das äquivalente Martingalmaß existiert, entsprechend dem Abschnitt 2.1 gegeben. Weiter seien der Prozess H gemäß (2.11) definiert und U eine logarithmische Nutzenfunktion mit*

$$U(x) = \log(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Dann gilt für diese Nutzenfunktion mit $I = (U')^{-1}$, dass

$$E[H(T) I(\lambda H(T))] < \infty, \quad \forall\, \lambda \in (0, \infty), \quad 0 \leq T \leq \hat{T}.$$

Beweis: Sei U eine logarithmische Nutzenfunktion. Dann hat die Funktion I mit $I = (U')^{-1}$ die Gestalt $I(x) = 1/x$. Damit lässt sich der Erwartungswert wie folgt darstellen:

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] = E\left[H(T)\frac{1}{\lambda H(T)}\right] = \frac{1}{\lambda} < \infty, \quad \forall\, \lambda \in (0,\infty) \quad 0 \le T \le \hat{T}. \qquad \square$$

Beispiel für die Potenznutzenfunktion

Für eine Potenznutzenfunktion ist die zweite Bedingung in dem betrachteten Finanzmarktmodell unter der Voraussetzung der deterministischer Bondpreisvolatilität sowie des deterministischen Marktpreises des Risikos erfüllt. Im folgenden Satz wird diese Aussage gezeigt.

Satz 2.11. *Es sei das vom Wiener-Prozess getriebene und vollständige Finanzmarktmodell in dem das äquivalente Martingalmaß existiert, entsprechend dem Abschnitt 2.1 gegeben. Zudem sei vorausgesetzt, dass die Bondpreisvolatilität sowie der Marktpreis des Risikos deterministisch sind. Weiter seien der Prozess H gemäß (2.11) definiert und U eine Potenznutzenfunktion mit*

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad p \in (0,1), \quad x \in (0,\infty).$$

Dann gilt für diese Nutzenfunktion mit $I = (U')^{-1}$, dass

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] < \infty, \quad \forall\, \lambda \in (0,\infty), \quad 0 \le T \le \hat{T}.$$

Zum Beweis dieses Satzes führen wir zunächst mit dem nachfolgenden Lemma ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß ein[27].

Lemma 2.12. *Sei P^* ein bezüglich des Numéraires N äquivalentes Martingalmaß. Weiter wird ein zum P^* äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P_τ durch den Dichtequotientenprozess*

$$\left.\frac{dP_\tau}{dP^*}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,\tau)N(0)}{B(0,\tau)N(t)}, \quad 0 \le t \le \tau, \tag{2.19}$$

definiert. Dann gilt, dass mit dem τ-Bond diskontierte Preis des Basisfinanzgutes (Forwardpreis zum Termin τ) ein Martingal bezüglich P_τ bildet. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_τ wird als Forwardmartigalmaß zum Termin τ bezeichnet.

Beweis zum Satz 2.11: Es sei P^* das äquivalente Martingalmaß zum Numéraire N mit

$$\left.\frac{dP^*}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = L(t).$$

[27] Siehe [Fil09], S. 105 f.

Weiter sei der Prozess H durch $H(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$ definiert. Das Ziel ist für alle $0 < \lambda < \infty$, $0 \leq T \leq \hat{T}$ die Existenz des folgenden Erwartungswertes zu zeigen

$$E[H(T)I(\lambda H(T))]. \tag{2.20}$$

Sei U eine Potenznutzenfunktion. Dann hat die Funktion I mit $I = (U')^{-1}$ die Gestalt $I(x) = x^{1/(p-1)}$. Wir setzen diese Funktion in den Erwartungswert (2.20) ein und erhalten

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] = E[H(T)(\lambda H(T))^{1/(p-1)}] = \lambda^{1/(p-1)} E[H(T)^{p/(p-1)}]. \tag{2.21}$$

Als Nächstes bestimmen wir den Dichtequotientenprozess von dem Forwardmartingalmaß P_T zum Termin T bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P. Dieser Dichtequotientenprozess kann mit (2.19) wie folgt dargestellt werden

$$\left.\frac{dP_T}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \left.\frac{dP_T}{dP^*}\right|_{\mathcal{F}_t} \cdot \left.\frac{dP^*}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)N(0)}{B(0,T)N(t)} \cdot L(t) := R(t).$$

Wir formulieren den Prozess H mithilfe des Dichtequotientenprozesses R um:

$$H(T)^{p/(p-1)} = \left(\frac{L(t)}{N(t)}\right)^{p/(p-1)} = \left(\frac{R(T)B(0,T)}{B(T,T)N(0)}\right)^{p/(p-1)}$$

und setzen ihn in die Gleichung (2.21) ein. Wir erhalten dadurch die folgende Darstellung des Erwartungswertes (2.20):

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] = \lambda^{1/(p-1)} \left(\frac{B(0,T)}{N(0)}\right)^{p/(p-1)} E[R(T)^{p/(p-1)}].$$

Als Nächstes wird die Gestalt des Dichtequotientenprozesses R unter P bestimmt. Hierzu ermitteln wir die Dynamik des dikontierten Bondpreisprozesses mit der Fälligkeit T. Dieser Prozess ist unter dem äquivalenten Martingalmaß durch die folgende stochastische Differentialgleichung gemäß (2.1) beschrieben[28]:

$$d\frac{B(t,T)}{N(t)} = \frac{B(t,T)}{N(t)} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,T) dW_i^*(t),$$

wobei $\sigma^B(t,T)$ die Volatilität des Bondpreisprozesses mit der Fälligkeit T bezeichne. Mit der Beziehung $dW_i^*(t) = dW_i(t) - \vartheta_i(t)dt$ für $i = 1, \ldots, n$ aus (2.7) erfolgt der Wechsel zum Maß P

$$d\frac{B(t,T)}{N(t)} = \frac{B(t,T)}{N(t)} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,T)(dW_i(t) - \vartheta_i(t)dt).$$

[28]Das diskontierte Basisfinanzgut ist ein Martingal unter dem äquivalenten Martingalmaß und besitzt somit keine Drift.

Nun wird unter der Verwendung von Dynamiken von $L(t)$ aus (2.6) und $\frac{B(t,T)}{N(t)}$ zusammen mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse[29] die stochastische Differentialgleichung für den Prozess $R(t)$ ermittelt:

$$\begin{aligned}
dR(t) &= \frac{N(0)}{B(0,T)} d\frac{B(t,T)}{N(t)} \cdot L(t) \\
&= \frac{N(0)}{B(0,T)} \left(\frac{B(t,T)}{N(t)} dL(t) + L(t) d\frac{B(t,T)}{N(t)} + d\left\langle \frac{B(\cdot,T)}{N(\cdot)}, L(\cdot) \right\rangle_t \right) \\
&= \frac{N(0)}{B(0,T)} \left(\frac{B(t,T)}{N(t)} L(t) \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(t) dW_i(t) \right. \\
&\quad + L(t) \left(\frac{B(t,T)}{N(t)} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,T) dW_i(t) - \frac{B(t,T)}{N(t)} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^B(t,T) \vartheta_i(t) dt \right) \\
&\quad \left. + \frac{B(t,T)}{N(t)} L(t) \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(t) \sigma_i^B(t,T) dt \right) \\
&= R(t) \sum_{i=1}^{n} \big(\vartheta_i(t) + \sigma_i^B(t,T) \big) dW_i(t).
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser stochstischen Differentialgleichung ist bekannt[30]. Somit hat der Prozess R die folgende Form:

$$R(T) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \big(\sigma_i^B(t,T) + \vartheta_i(t) \big)\, dW_i(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \big(\sigma_i^B(t,T) + \vartheta_i(t) \big)^2\, dt \right).$$

Die Bondpreisvolatilität σ^B und der Marktpreis des Risikos ϑ wurden als deterministisch forausgesetzt mit $\int_0^T \|\sigma^B(s)\|^2\, ds < \infty$ P-fast sicher und $\int_0^T \|\vartheta(s)\|^2\, ds < \infty$ P-fast sicher. Deshalb ist für alle i mit $i = 1, \ldots, n$ der Prozess $\int_0^T \big(\sigma_i^B(t,T) - \vartheta_i(t) \big)\, dW_i(t)$ normalverteilt[31]. Daraus folgt mit Unabhängigkeit der Wiener-Prozesse W_i für alle $i = 1, \ldots, n$, dass der Prozess R logarithmisch normalverteilt ist und sein Erwartungswert ist damit beschränkt. Dadurch ergibt sich schließlich die Existenz des Erwartungswertes (2.20):

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] = \lambda^{1/(p-1)} \left(\frac{B(0,T)}{N(0)} \right)^{p/(p-1)} E[R(T)^{p/(p-1)}] < \infty, \quad \forall\, \lambda \in (0,\infty). \quad \square$$

Wir haben ein vom Wiener-Prozess getriebenes und vollständiges Finanzmarktmodell betrachtet, in dem das äquivalentes Martingalmaß existiert. In diesem Modell konnten wir zeigen, dass die Anwendbarkeit der Martingalmethode für die logarithmische Nutzenfunktion, falls es ein Bondmarktmodell einschließt, immer gültig ist. Des Weiteren stellten wir fest, dass bei der Potenznutzenfunktion zusätzliche Forderungen an die Volatilitäten der

[29] Vergleiche [Sch08], Satz 2.3.19.
[30] Siehe [Dec06], Kapitel 10, S. 195.
[31] Siehe [Dec06], Satz 2.19.

Bonds bzw. an den Marktpreis des Risikos notwendig sind, damit die Martingalmethode funktioniert. Wir zeigten, dass für die deterministische Bondpreisvolatilität und den deterministischen Marktpreis des Risikos die Martingalmethode anwendbar ist.

3 Portfoliooptimierung im HJM-Modell

Im vorherigen Kapitel stellten wir die Martingalmethode zur Lösung des Mertonproblems der Portfoliooptimierung vor. In diesem Kapitel wenden wir die Methode um die Portfoliooptimierung in einem vollständigen HJM-Bondmarktmodell, in dem ein äquivalentes Martingalmaß existiert, durchzuführen. Dabei betrachten wir den besonderen Fall, dass das Geldmarktkonto nicht verfügbar ist und ein Bond als Numéraire dient.

Zu Beginn des Kapitels wird die Anwendbarkeit der Martingalmethode im HJM-Modell erörtert. Danach werden das Bondmarktmodell und das Portfolioproblem spezifiziert. Anschließend erfolgt die Portfoliooptimierung für die logarithmische Nutzenfunktion und die Potenznutzenfunktion mit der Martingalmethode. Wir bestimmen den optimalen Portfolioprozess zuerst in dem eindimensionalen Fall. Es wird also der Fall betrachtet, dass die Quelle des Zufalls im HJM-Modell von einem eindimensionalen Wiener-Prozeß getrieben wird und es neben dem Numéraire-Bond nur in einen weiteren Bond investiert werden kann. Diese Ergebnisse werden schließlich auf ein n-dimensionalen Fall verallgemeinert.

3.1 Anwendbarkeit der Martingalmethode

Wir untersuchten bereits im Abschnitt 2.3.2 die Anwendbarkeit der Martingalmethode für ein vom Wiener-Prozess getriebenes, vollständiges Finanzmarktmodell, in dem ein äquivalentes Martingalmaß existiert. Die Ergebnisse zeigten zum einen die Anwendbarkeit der Martingalmethode für die logarithmische Nutzenfunktion in einem allgemeinen HJM-Modell (siehe Sätze 2.8, 2.9 und 2.10). Zum anderen zeigten sie, aufgrund der deterministischer Bondpreisvolatilität, die Anwendbarkeit dieser Methode für eine Potenznutzenfunktion in einem Gaußschen HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos (siehe Sätze 2.8, 2.9 und 2.11). Dagegen ist in einem nicht Gaußschen HJM-Modell die Portfoliooptimierung für eine Potenznutzenfunktion mit dieser Methode nicht immer möglich. Ein Beispiel dafür bietet das CIR-Modell. In diesem Modell existieren bestimmte Parametrisierungen von Short-Rate, für welche die Voraussetzungen aus dem Satz 2.8 zur Anwendung der Martingalmethode nicht erfüllt sind. Im Folgenden wird diese Behauptung bewiesen. Dabei orientieren sich die Darlegungen am Kapitel 2.4 von [Kra04].

Anwendbarkeit im CIR-Modell

Das CIR-Modell:

Es sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}, P)$ entsprechend dem Kapitel 1.2 zu Grunde gelegt, wobei die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \hat{T}}$ von einem eindimensionalen Wiener-Prozess W erzeugt wird. In einem CIR-Modell ist die Entwicklung der Short-Rate r über die Zeit für $0 \leq t \leq \hat{T}$ durch den Prozess

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(0) = r_0 \in (0, \infty), \tag{3.1}$$

modelliert. Dabei sind κ, θ, σ strikt positive Konstanten. Wir setzen voraus, dass

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2 \tag{3.2}$$

gilt. Dadurch erreicht die Short-Rate die Null fast sicher nicht, d. h.

$$P\Big(r(t) > 0,\, 0 \leq t \leq \hat{T}\Big) = 1.$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass das Geldmarktkonto als Numéraire dient und der Marktpreis des Risikos den Wert Null besitzt.

Satz 3.1. *Es sei das oben definierte CIR-Modell gegeben. Weiterhin sei der Prozess H durch (2.11) definiert und U sei eine Potenznutzenfunktion mit*

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad p \in (0,1), \quad x \in (0, \infty).$$

Dann existieren in diesem Modell für alle $\kappa \in \mathbb{R}^+$ die Parameter σ, $\theta \in \mathbb{R}^+$, sodass für die Funktion I mit $I = (U')^{-1}$ die folgende Gleichheit gilt

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] = +\infty, \quad \forall\, \lambda \in (0, \infty), \quad 0 \leq T \leq \hat{T}.$$

Beweis: Sei U eine Potenznutzenfunktion, dann hat die Funktion I mit $I = (U')^{-1}$ die Gestalt $I(x) = x^{1/(p-1)}$ für $p \in (0,1)$ und es gilt

$$E[H(T)I(\lambda H(T))] = E[H(T)(\lambda H(T))^{1/(p-1)}] = \lambda^{1/(p-1)} E[H(T)^{p/(p-1)}],$$

für alle $0 < \lambda < \infty$ und $0 \leq T \leq \hat{T}$. Weiter sei P^* das äquivalente Martingalmaß mit

$$\left.\frac{dP^*}{dP}\right|_{F_t} := L(t), \qquad 0 \leq t \leq \hat{T}.$$

Die Gestallt des Dichtequotientenprozesses L ist mit dem Satz 2.1 durch

$$L(t) = \exp\bigg(\int_0^t \vartheta(u)\, dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta(u)^2\, du\bigg), \quad 0 \leq t \leq \hat{T},$$

gegeben. Da der Marktpreis des Risikos $\vartheta(t)$ den Wert Null für alle $0 \leq t \leq \hat{T}$ besitzt, vereinfacht sich die Darstellung von L zu

$$L(t) = 1, \qquad \forall\, 0 \leq t \leq \hat{T}.$$

Somit erhält der Prozess H aus (2.11) für das Geldmarktkonto β als Numéraire mithilfe (1.3) die Gestalt:

$$H(t) = \frac{L(t)}{\beta(t)} = \frac{1}{\beta(t)} = \exp\Big(-\int_0^t r(s)\,ds\Big), \quad 0 \leq t \leq \hat{T}.$$

Für diese Gestalt von H ergibt sich dann die folgende Gleichheit

$$\begin{aligned} E[H(T)I(\lambda H(T))] &= \lambda^{1/(p-1)} E[H(T)^{p/(p-1)}] \\ &= \lambda^{1/(p-1)} E\Big[\exp\Big(-\frac{p}{p-1}\int_0^T r(s)\,ds\Big)\Big], \end{aligned}$$

für alle $0 < \lambda < \infty$ und $0 \leq T \leq \hat{T}$. Es sei $\gamma := -\frac{p}{p-1}$ mit $\gamma > 0$ für $0 < p < 1$. Somit ist zu zeigen, dass für alle $\gamma, \kappa \in \mathbb{R}^+$ die Parameter σ, $\theta \in \mathbb{R}^+$ existieren, sodass

$$E\Big[\exp\Big(\gamma\int_0^T r(s)\,ds\Big)\Big] = +\infty, \quad \forall\, 0 \leq T \leq \hat{T}$$

gilt. Sei $\delta := \kappa\theta$, dann ist die Dynamik (3.1) der Short-Rate gegeben durch

$$dr(t) = (\delta - \kappa r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$

Aus der Proposition 1.3 zusammen mit der Bemerkung d) aus der Proposition 1.2 in [Kra04] ist es bekannt, dass der Short-Rate Prozess $\hat{r}$ mit

$$d\hat{r}(t) = \Big(\frac{\sigma}{4} - \kappa\hat{r}(t)\Big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

fast sicher kleiner als der Short-Rate Prozess r ist:

$$P\Big(\hat{r}(t) \leq r(t),\, 0 \leq t \leq \hat{T}\Big) = 1.$$

Die Betrachtung des Prozesses $\hat{r}$ hat den Vorteil, dass seine stochastische Differentialgleichung eine explizite Lösung besitzt. Denn der Prozess $\hat{r}$ kann durch $\hat{r}(t) = y^2(t)$ dargestellt werden, für einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess y mit der Dynamik[32]

$$dy(t) = -\frac{1}{2}\kappa y(t)dt + \frac{1}{2}\sigma dW(t).$$

[32]Siehe [EK99] S. 236 f.

Dabei ist die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung für y wie folgt gegeben:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}\kappa t}\Big(y(0) + \frac{1}{2}\sigma \int_0^t e^{0.5\kappa s}\, dW(s)\Big).$$

Deshalb wird unter Anwendung der Hölder Ungleichung die folgende Abschätzung für den Erwartungswert erreicht:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\exp\Big(\gamma \int_0^T r(s)\, ds\Big)\Big] \\
&\quad \geq E\Big[\exp\Big(\gamma \int_0^T \hat{r}(s)\, ds\Big)\Big] = E\Big[\exp\Big(\gamma \int_0^T y^2(s)\, ds\Big)\Big] \\
&\quad = E\Big[\exp\Big(\gamma \int_0^T \Big\{e^{-\frac{1}{2}\kappa u}\Big(y(0) + \frac{1}{2}\sigma \int_0^u e^{\frac{1}{2}\kappa s}\, dW(s)\Big)\Big\}^2 du\Big)\Big] \\
&\quad \geq E\Big[\exp\Big(\gamma e^{-\kappa T} \int_0^T \Big\{y(0) + \frac{1}{2}\sigma \int_0^u e^{\frac{1}{2}\kappa s}\, dW(s)\Big\}^2 du\Big)\Big] \\
&\quad = E\Big[\exp\Big(\gamma e^{-\kappa T}\Big(\int_0^T \Big\{y(0) + \frac{1}{2}\sigma \int_0^u e^{\frac{1}{2}\kappa s}\, dW(s)\Big\}^2 du\Big) \cdot \Big(T^{-1}\int_0^T 1^2\, du\Big)\Big)\Big] \\
&\quad \overset{\text{Hölder}}{\geq} E\Big[\exp\Big(\gamma e^{-\kappa T} T^{-1}\Big(\int_0^T \Big\{y(0) + \frac{1}{2}\sigma \underbrace{\int_0^u e^{\frac{1}{2}\kappa s}\, dW(s)}_{:=\hat{X}(u)}\Big\} \cdot 1\, du\Big)^2\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Das lokale Martingal $\hat{X}$ kann mit dem Theorem „Zeitänderung für Martingale“[33] als ein zeittransformierter Wiener-Prozess $\hat{W}$ der Form $\hat{W}_{\langle \hat{X}\rangle_t}$ dargestellt werden, d. h. es gilt $\hat{X}_t = \hat{W}_{\langle \hat{X}\rangle_t}$. Hierbei seien die Prozesse β, α durch $\beta(s) := \langle \hat{X}\rangle(s)$ und $\alpha(u) := \beta^{-1}(u)$ definiert. Dann gilt

$$\beta(s) = \int_0^s e^{\kappa u}\, du = \kappa^{-1}\big(e^{\kappa s} - 1\big) \quad \text{und} \quad \alpha(u) = \kappa^{-1}\ln(\kappa u + 1)$$

und es ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\hat{X}(\alpha(u)) = \hat{X}(\beta^{-1}(u)) = \hat{W}(\beta(\beta^{-1}(u))) = \hat{W}(u).$$

[33] Siehe [KS91], Theorem 4.6. oder [Dec06], Satz 9.21.

Mit der Darstellung $\hat{X}(\alpha(u)) = \hat{W}(u)$ und unter einer pfadweisen Anwendung der Substitutionsregel erfolgt dann die nachfolgende Umformung

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\exp\Big(\gamma\int_0^T r(s)\,ds\Big)\Big]\\
&\geq E\Big[\exp\Big(\gamma e^{-\kappa T}T^{-1}\Big(\int_0^T\Big\{y(0)+\frac{1}{2}\sigma\hat{X}(u)\Big\}\,du\Big)^2\Big]\\
&= E\Big[\exp\Big(\gamma e^{-\kappa T}T^{-1}\Big(\int_{\alpha^{-1}(0)}^{\alpha^{-1}(T)}\Big\{y(0)+\frac{1}{2}\sigma\hat{X}(\alpha(u))\alpha'(u)\Big\}\,du\Big)^2\Big)\Big]\\
&= E\Big[\exp\Big(\gamma e^{-\kappa T}T^{-1}\Big(\int_0^{\beta(T)}\Big\{y(0)+\frac{1}{2}\sigma\hat{W}(u)\alpha'(u)\Big\}\,du\Big)^2\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

Für das weitere Vorgehen wird das nächste Lemma eingeführt.

Lemma 3.2. *Es sei g eine messbare, deterministische Funktion von beschränkter Variation. Dann gilt:*

$$\int_0^t W(s)\,dg(s) = \int_0^t \big(g(t)-g(s)\big)\,dW(s) \sim \mathcal{N}\Big(0, \int_0^t \big(g(t)-g(s)\big)^2\,ds\Big).$$

Folglich ergibt sich für eine stetige Funktion h mit der Stammfunktion H:

$$\int_0^t W(s)\,h(s)d(s) = \int_0^t \big(H(t)-H(s)\big)\,dW(s) \sim \mathcal{N}\Big(0, \int_0^t \big(H(t)-H(s)\big)^2\,ds\Big).$$

Beweis: Mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse[34] gilt

$$dW(t)g(t) = g(t)dW(t) + W(t)dg(t) + d\langle W(\cdot), g(\cdot)\rangle_t,$$

wobei $d\langle W(\cdot), g(\cdot)\rangle_t = 0$, da die Funktion g von beschränkter Variation ist. Die obere stochastische Differentialgleichung wird in Integralschreibweise dargestellt:

$$
\begin{aligned}
W(t)g(t) &= W(0)g(0) + \int_0^t g(s)\,dW(s) + \int_0^t W(s)dg(s)\\
\Longleftrightarrow \int_0^t W(s)dg(s) &= g(t)\int_0^t dW(s) - \int_0^t g(s)\,dW(s).
\end{aligned}
$$

Aus dieser Gleichung und zusammen mit der Tatsache, dass der Prozesses $\int_0^t \big(g(t) - g(s)\big)\,dW(s)$ mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz $\int_0^t \big(g(t)-g(s)\big)^2\,ds$ normalverteilt ist[35], ergibt sich die erste Behauptung. Weiter wird die Funktion H betrachtet. Diese Funktion ist auf $[0,t]$ von beschränkter Variation. Denn sie besitzt eine stetige Ableitung, welche auf diesem Intervall beschränkt ist. Deshalb folgt die zweite Behauptung sofort aus

[34] Vergleiche [Sch08], Satz 2.3.19.

[35] Siehe [Dec06], Satz 2.19.

der Ersten mit der folgenden Beziehung

$$\int_0^t W(s)h(s)\,ds = \int_0^t W(s)\,dH(s).$$

□

Der Beweis des Satzes 3.1 wird fortgesetzt. Für ein festes $t > 0$ wird eine Zufallsvariable Z wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} Z(\beta(T)) &:= \int_0^{\beta(T)} \left\{ y(0) + \frac{1}{2}\sigma \hat{W}(u)\alpha'(u) \right\} du \\ &= y(0)\beta(T) + \frac{1}{2}\sigma \int_0^{\beta(T)} \hat{W}(u)\,d\alpha(u). \end{aligned}$$

Nach dem Lemma 3.2 ist Z mit dem Erwartungswert $\mu_z = y(0)\beta(T)$ und der Varianz $\nu_z^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 \int_0^{\beta(T)} \big(\alpha(\beta(T)) - \alpha(s)\big)^2\,ds$ normalverteilt. Die Varianz ν_z^2 kann mit einer pfadweisen Substitution wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \nu_\sigma^2 &= \frac{1}{4}\sigma^2 \int_0^{\beta(T)} \big(\underbrace{\alpha(\beta(T))}_{=T} - \alpha(s)\big)^2\,ds \\ &= \frac{1}{4}\sigma^2 \int_0^{T} \big(T - \underbrace{\alpha(\beta(s))}_{=s}\big)^2 \beta'(s)\,ds = \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\kappa^3}\Big(\big(1+\kappa(T-s)\big)^2 + 1\Big)e^{\kappa s}\Big|_{s=0}^{s=T} \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\kappa^3}\big(2e^{\kappa T} - (1+\kappa T)^2 - 1\big). \end{aligned}$$

Da die Zufallsvariable Z normalvertielt ist, ist ihre Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_z} e^{-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\nu_z^2}}, \quad z \in \mathbb{R},$$

gegeben. Damit wird der Erwartungswert umgeformt und es folgt eine weitere Abschätzung:

$$\begin{aligned} & E\left[\exp\left(\gamma \int_0^T r(s)\,ds\right)\right] \\ &\geq E\left[\exp\left(\gamma e^{-\kappa T} T^{-1} \left(\int_0^{\beta(T)} \left\{ y(0) + \frac{1}{2}\sigma \hat{W}(u)\alpha'(u) \right\} du\right)^2\right)\right] \\ &= E\Big[\exp\Big(\underbrace{\gamma e^{-\kappa T} T^{-1}}_{:=c} Z(\beta(T))^2\Big)\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_z} e^{-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\nu_z^2}}\,dz \\ &\geq \int_{\mu_z}^{+\infty} e^{cz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_z} e^{-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\nu_z^2}}\,dz \geq \int_{\mu_z}^{+\infty} e^{cz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_z} e^{-\frac{z^2}{2\nu_z^2}}\,dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_z} \int_{\mu_z}^{+\infty} e^{\frac{(2c\nu_z^2 - 1)z^2}{2\nu_z^2}}\,dz. \end{aligned}$$

Für feste γ, κ, $T > 0$ kann ein $\sigma \in \mathbb{R}^+$ mit[36]

$$\sigma^2 \geq \frac{2\kappa^3 T e^{\kappa T}}{\gamma\big(2e^{\kappa T} - (1+\kappa T)^2 - 1\big)} \geq \frac{\kappa^2}{2\gamma} \tag{3.3}$$

gewählt werden, sodass

$$\frac{\big(2c\nu_z^2 - 1\big)}{2\nu_z^2} \geq 0$$

gilt. Somit für die Wahl von θ entsprechend (3.2) und σ entsprechend (3.3) bekommt das letzte Integral einen unendlichen Wert. Daraus resultiert schließlich die folgende Gleichheit

$$E\left[\exp\left(\gamma \int_0^T r(s)\, ds\right)\right] = +\infty, \quad \forall\, 0 \leq T \leq \hat{T}. \qquad \square$$

3.2 Portfoliooptimierung mit der Martingalmethode

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Durchführung der Portfoliooptimierung in einem HJM-Bondmarktmodell, in dem das Geldmarktkonto nicht verfügbar ist. Damit die Portfoliooptimierung durchgeführt werden kann, wird zunächst das HJM-Bondmarktmodell aus dem Kapitel 1.2 entsprechend spezifiziert.

Das HJM-Bondmarktmodell

Es sei für den Handelszeitraum $[0, \hat{T}]$ das Bondmarktmodell mit der HJM-Zinsstruktur unter dem äquivalenten Martingalmaß P^* aus dem Kapitel 1.2 gegeben. In diesem Bondmarktmodell werden n Bonds entsprechend der folgenden Annahme gewählt.

Annahme 3.1. *Die n Bonds mit den Fälligkeiten $\tau_1 <, \ldots, < \tau_n$ seien so fixiert, dass die folgende Volatilitätsmatrix der Bondpreisprozesse für alle t mit $0 \leq t \leq \tau_n$ invertierbar wird (siehe Folgerung 1.2.):*

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^B(t,\tau_1) & \ldots & \sigma_1^B(t,\tau_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n^B(t,\tau_1) & \ldots & \sigma_n^B(t,\tau_n) \end{pmatrix} := \Sigma(t). \tag{3.4}$$

Da das Geldmarktkonto nicht zur Verfügung steht, wird ein weiteres Bond mit der Fälligkeit in τ_{n+1} für $\tau_{n+1} > \tau_n$ als Numéraire gewählt. Somit werden die Investitionsmöglichkeiten durch die n Bonds dargestellt, deren Preise in den Anteilen des τ_{n+1}-Bonds notiert werden. Wegen der neuen Verrechnungsgröße muss ein Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß bezüglich des τ_{n+1}-Bonds als Numéraire durchgeführt werden.

[36] Es ist zu bemerken, dass $2xe^x \geq e^x - \frac{1}{2}(1+x)^2 - \frac{1}{2}$ für $x \geq 0$ gilt. Mit $x = \kappa t$ folgt daraus die zweite Ungleichheit.

Es ist bekannt, dass das Forwardmartingalmaß $P_{\tau_{n+1}}$ zum Termin τ_{n+1} aus dem Lemma 2.12 zu dem Maß P^* äquivalent ist. Zudem sind die diskontierten Bondpreisprozesse $\frac{B(t,\tau_i)}{B(t,\tau_{n+1})}$ Martingale bezüglich dieses Maßes für alle $i = 1, \ldots, n$. Aus diesen Überlegungen findet mit dem folgenden Lemma der Maßwechsel zu dem Maß $P_{\tau_{n+1}}$ statt.

Lemma 3.3. *Für jedes τ_i mit $i = 1, \ldots, n$ entwickeln sich die Bondpreisprozesse $B(t, \tau_i)$ unter dem Forwardmartingalmaß $P_{\tau_{n+1}}$ gemäß der folgenden Dynamik:*

$$dB(t,\tau_i) = B(t,\tau_i)\Bigg(\Bigg(r(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_{n+1})\sigma_j^B(t,\tau_i)\Bigg)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_i)d\overline{W}_j(t)\Bigg) \tag{3.5}$$
$$\textit{mit} \quad \sigma_j^B(t,\tau_i) := -\int_t^{\tau_i} \sigma_j(t,s)\,ds, \quad j = 1,\ldots,n, \quad 0 \le t \le \tau_i.$$

Beweis: Zunächst bestimmen wir den Wiener-Prozess unter dem Forwardmartingalmaß zum Termin τ_{n+1}. Entsprechend dem Lemma 2.12 ist das Forwardmartingalmaß $P_{\tau_{n+1}}$ bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes P^* für das Geldmarktkonto als Numéraire wie folgt definiert:

$$\left.\frac{dP_{\tau_{n+1}}}{dP^*}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,\tau_{n+1})}{B(0,\tau_{n+1})\beta(t)} := K(t), \quad 0 \le t \le \tau_{n+1}.$$

Weiter gilt nach dem Satz 1.8, dass für jedes τ mit $0 \le \tau \le \hat{T}$ sich die Bondpreisprozesse unter dem äquivalenten Martingalmaß gemäß der folgenden Dynamik entwickeln:

$$dB(t,\tau) = B(t,\tau)\Bigg(r(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau)dW_j^*(t)\Bigg),$$
$$\text{mit} \quad \sigma_j^B(t,\tau) = -\int_t^{\tau} \sigma_j(t,s)\,ds.$$

Daraus ergibt sich die folgende stochastische Differentialgleichung für den Dichtequotientenprozess K, da dieser Prozess durch den diskontierten Bondpreisprozess unter dem Maß P^* dargestellt ist[37]:

$$\begin{aligned} dK(t) &= \frac{1}{B(0,\tau_{n+1})} d\frac{B(t,\tau_{n+1})}{\beta(t)} = \frac{1}{B(0,\tau_{n+1})}\frac{B(t,\tau_{n+1})}{\beta(t)} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dW_j^*(t) \\ &= K(t)\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dW_j^*(t). \end{aligned}$$

Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung ist bekannt[38]. Somit hat der Prozess

[37] Die Dynamik der diskontierten Bondpreisprozesse ergibt sich mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse aus den Dynamiken der Bondpreisprozesse unter P^* und der Dynamik des Geldmarktkontos.

[38] Siehe [Dec06], Kapitel 10, S. 195.

K die folgende Form:

$$K(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \sigma_j^B(u,\tau_{n+1})\, dW_j^*(u) - 1/2 \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \sigma_j^B(u,\tau_{n+1})^2\, du\right).$$

Daraus folgt mit dem Satz von Girsanov[39], dass der Prozess $\overline{W}$ mit

$$d\overline{W}_j(t) = dW_j^*(t) - \sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dt, \quad j = 1,\dots,n$$

ein Wiener-Prozess unter dem Maß $P_{\tau_{n+1}}$ ist. Jetzt wird mithilfe dieser Darstellung des Wiener-Prozesses $\overline{W}$ der Maßwechsel von dem äquivalenten Martingalmaß zu dem Forwardmartingalmaß zum Termin τ_{n+1} durchgeführt, wodurch die Dynamik der Bondpreisprozesse unter dem Maß $P_{\tau_{n+1}}$ wie folgt resultiert:

$$\begin{aligned} dB(t,\tau_i) &= B(t,\tau_i)\left(r(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_i)dW_j^*(t)\right) \\ &= B(t,\tau_i)\left(r(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_i)\big(d\overline{W}_j(t) + \sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dt\big)\right) \\ &= B(t,\tau_i)\left(\left(r(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_i)\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})\right)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^B(t,\tau_i)d\overline{W}_j(t)\right). \qquad \square \end{aligned}$$

Zum Zwecke der bevorstehenden Portfoliooptimierung müssen die Bondpreisprozesse unter dem subjektiven Maß des Investors dargestellt werden. Da in diesem Bondmarktmodell eine Wiener-Filtration vorliegt, kann das äquivalente, subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß bezüglich des Maßes $P_{\tau_{n+1}}$ mit dem Satz von Girsanov bestimmt werden. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß wird im folgenden Korollar definiert.

Korollar 3.4. *Es sei* $(\vartheta(t))_{0\le t\le\tau_{n+1}} = (\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_n(t))^\top_{0\le t\le\tau_{n+1}}$ *ein* $\mathbb{R}^n$*-wertiger, previsibler Prozess mit*

$$\int_0^{\tau_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j(u)^2\, du < +\infty \quad P_{\tau_{n+1}} - f.s.,$$

welcher die folgende Gleichheit erfüllt:

$$\overline{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_{n+1}} \vartheta_j(u)\, d\overline{W}_j(u) - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j(u)^2\, du\right)\right] = 1,$$

wobei $\overline{E}[\cdot]$ *den Erwartungswert unter dem Maß* $P_{\tau_{n+1}}$ *bezeichnet. Dann wird das subjektive,*

[39] Siehe [Bjö03], Theorem 11.3 und [KS91], Theorem 5.1.

äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß P bezüglich $P_{\tau_{n+1}}$ wie folgt definiert:

$$\frac{dP}{dP_{\tau_{n+1}}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} := \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \vartheta_j(u)\, d\overline{W}_j(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(u)^2\, du\right) := L(t) \tag{3.6}$$

für $0 \leq t \leq \tau_{n+1}$, wobei der Prozess ϑ als der Marktpreis des Risikos bezeichnet wird. Der Wiener-Prozess unter dem Maß P erfüllt dann die folgende Gleichheit

$$W_j(t) = \overline{W}_j(t) - \int_0^t \vartheta_j(u)\, du, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Mit diesem Korollar ergibt sich die Bondpreisdynamik unter dem subjektiven Maß des Investors sofort aus dem Lemma 3.3 und der Beziehung (3.7). Der folgende Satz präsentiert das Ergebnis.

Satz 3.5. *Unter dem äquivalenten, subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß P gilt für den Bondpreisprozess $B(t, \tau_i)$ für jedes τ_i mit $i = 1, \ldots, n$ die folgende Dynamik:*

$$dB(t, \tau_i) = B(t, \tau_i)\left(\mu^B(t, \tau_i)dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t, \tau_i)dW_j(t)\right), \quad 0 \leq t \leq \tau_i. \tag{3.8}$$

Dabei erfüllt der Driftprozess $\mu^B(t, \tau_i)$ die folgende Gleichung:

$$\mu^B(t, \tau_i) := r(t) + \sum_{j=1}^{n}\big(\sigma_j^B(t, \tau_{n+1}) + \vartheta_j(t)\big)\sigma_j^B(t, \tau_i). \tag{3.9}$$

Des Weiteren wird für die Portfoliooptimierung mit der Martingalmethode der Prozess H aus (2.11) benötigt. Die spezielle Darstellung dieses Prozesses für das betrachtete Bondmarktmodell wird im nachfolgenden Korollar bestimmt.

Korollar 3.6. *Es sei der stochastische Prozess H für alle t mit $0 \leq t \leq \tau_{n+1}$ definiert durch*

$$H(t) := \frac{1}{B(t, \tau_{n+1})}\frac{1}{L(t)}, \tag{3.10}$$

für den Dichtequotientenprozess L aus (3.6). Dann ist dieser Prozess durch die folgende stochastische Differentialgleichung bestimmt:

$$dH(t) = H(t)\left(-r(t)dt - \sum_{j=1}^{n}\big(\sigma_j^B(t, \tau_{n+1}) + \vartheta_j(t)\big)dW_j(t)\right), \quad 0 \leq t \leq \tau_{n+1}. \tag{3.11}$$

Zudem erfüllt der Prozess H für jede $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable Y mit $\overline{E}[\,|Y|\,] < \infty$, die folgende Gleichheit

$$\overline{E}\left[\frac{Y}{B(t, \tau_{n+1})}\right] = E[YH(t)].$$

Dabei bezeichnen $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes $P_{\tau_{n+1}}$ und $E[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes P.

Beweis: Als Erstes wird die Gleichheit der Erwartungswerte gezeigt. Die Dichte des Wahrscheinlichkeitsmaßes P bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $P_{\tau_{n+1}}$ wird durch den Prozess L entsprechend dem Korollar 3.4 dargestellt. Daraus folgt, dass die Dichte von $P_{\tau_{n+1}}$ bezüglich P durch den Prozess $1/L$ beschrieben wird[40]:

$$\left.\frac{dP_{\tau_{n+1}}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{1}{L(t)}, \quad 0 \leq t \leq \tau_{n+1}.$$

Es sei Y eine beliebige $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable mit $\overline{E}[\,|Y|\,] < \infty$, wobei $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich $P_{\tau_{n+1}}$ bezeichnet. Der Wechsel vom Erwartungswert unter dem Maß $P_{\tau_{n+1}}$ zum Erwartungswert unter dem Maß P wird für eine diskontierte Zufallsvariable Y mit dem Satz von Bayes[41] durchgeführt und es ergibt sich für ein beliebiges t mit $0 \leq t \leq \tau_{n+1}$ die folgende Gleichheit:

$$\overline{E}\left[\frac{Y}{B(t,\tau_{n+1})}\right] = E\left[\frac{Y}{B(t,\tau_{n+1})}\frac{1}{L(t)}\right] = E[YH(t)].$$

Jetzt wird die stochastische Differentialgleichung für den Prozesses H unter dem Maßes P bestimmt. Hierfür wird zunächst die Dynamik von dem Prozess $\frac{1}{L(t)}$ bezüglich des Maßes P ermittelt. Der Prozess L in (3.6) als ein exponentielles Martingal bezüglich $P_{\tau_{n+1}}$ folgt der Dynamik[42]

$$dL(t) = L(t)\sum_{j=1}^{n} \vartheta_j(t) d\overline{W}_j(t).$$

Damit wird durch Anwenden der Ito-Formel[43] die Entwicklung des Prozesses $\frac{1}{L(t)}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} d\frac{1}{L(t)} &= -\frac{1}{L(t)^2} dL(t) + \frac{1}{2}\frac{2}{L(t)^3} d\langle L(\cdot)\rangle_t \\ &= -\frac{1}{L(t)^2}\left(L(t)\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(t)d\overline{W}_j(t)\right) + \frac{1}{L(t)^3}L(t)^2\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Weiter wird mit der Beziehung $dW_j(t) = d\overline{W}_j(t) - \vartheta_j(t)dt$ aus (3.7) der Maßwechsel zum

[40]Siehe [Pau12].
[41]Siehe [Bjö03], S.440 Proposition B41 und [KS91], Lemma 5.3.
[42]Siehe [Dec06], Kapitel 10, S. 195.
[43]Siehe [KS91], Theorem 3.6.

Maß P durchgefürt:

$$
\begin{aligned}
d\frac{1}{L(t)} &= \frac{1}{L(t)}\Big(\sum_{j=1}^{n} -\vartheta_j(t)\big(dW_j(t) + \vartheta_j(t)dt\big) + \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(t)^2 dt\Big) \\
&= -\frac{1}{L(t)}\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(t)dW_j(t). \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Die Dynamik des Prozesses $\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}$ unter dem Maß P ergibt sich wie folgt aus der Gleichung (3.8) mit der Ito-Formel:

$$
\begin{aligned}
d\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})} &= -\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})^2}dB(t,\tau_{n+1}) + \frac{1}{2}\frac{2}{B(t,\tau_{n+1})^3}d\langle B(\cdot,\tau_{n+1})\rangle_t \\
&= -\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})^2}B(t,\tau_{n+1})\Big(\mu^B(t,\tau_{n+1})dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dW_j(t)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{B(t,\tau_{n+1})^3}B(t,\tau_{n+1})^2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})^2 dt \\
&= \frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}\Bigg(\Big(-\mu^B(t,\tau_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})^2\Big)dt - \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dW_j(t)\Bigg) \\
&\overset{(3.9)}{=} \frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}\Bigg(\Big(-r(t) - \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})\vartheta_j(t)\Big)dt - \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dW_j(t)\Bigg). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die zeitliche Entwicklung des Prozesses H mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse[44] bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
dH(t) &= d\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}\frac{1}{L(t)} = \frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}d\frac{1}{L(t)} + \frac{1}{L(t)}d\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})} + d\Big\langle\frac{1}{B(\cdot,\tau_{n+1})},\frac{1}{L(\cdot)}\Big\rangle_t \\
&= \frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}\Big(-\frac{1}{L(t)}\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(t)dW_j(t)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{L(t)}\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}\Bigg(\Big(-r(t) - \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})\vartheta_j(t)\Big)dt - \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dW_j(t)\Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{L(t)}\frac{1}{B(t,\tau_{n+1})}\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(t)\sigma_j^B(t,\tau_{n+1})dt \\
&= H(t)\Big(-r(t)dt - \sum_{j=1}^{n}\big(\sigma_j^B(t,\tau_{n+1}) + \vartheta_j(t)\big)dW_j(t)\Big).
\end{aligned}
$$

□

[44] Vergleiche [Sch08], Satz 2.3.19.

Formulierung des Portfolioproblems

Es wird ein Investor mit dem Anfangskapital $x > 0$ betrachtet, der durch die Bestimmung der optimalen Portfoliostrategie seinen erwarteten Nutzen aus dem Endvermögen bis zum Investmenthorizont T mit $T < \tau_1$ maximieren möchte. Demnach handelt es sich um das Mertonproblem der Portfoliooptimierung. Dieses Optimierungsproblem wird mit der Martingalmethode gelöst. Diese Methode erlaubt uns die Aufteilung dieses zeitlich dynamischen Optimierungsproblems in ein statisches Optimierungsproblem und in ein Darstellungsproblem. Das statische Problem sowie das Darstellungsproblem werden im Folgenden entsprechend den Formulierungen aus dem Kapitel 2.3.1 für das betrachtete Bondmarktmodell spezifiziert.

Statisches Optimierungsproblem

$$\sup_{X\in\mathcal{B}(x)} E[U(X)], \quad x \in (0,\infty),$$

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ X;\ X \geq 0, X\ \mathcal{F}_T - \text{messbar},\ E\big[U^-(X)\big] < \infty,\ E[H(T)X] \leq \frac{x}{B(0,\tau_{n+1})} \right\}.$$

Darstellungsproblem

Gesucht ist ein progressiv messbarer, selbstfinanzierender und zum $x > 0$ zulässiger, $\mathbb{R}^{n+1}$-wertiger Prozess φ mit der Eigenschaft (2.12), der die folgende Gleichheit erfüllt

$$\overline{E}\left[\frac{X}{B(T,\tau_{n+1})}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{x}{B(0,\tau_{n+1})} + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \varphi_i(u)\, d\left(\frac{B(u,\tau_i)}{B(u,\tau_{n+1})}\right), \tag{3.14}$$

wobei $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes $P_{\tau_{n+1}}$ bezeichnet. Der Portfolioprozess π ergibt sich aus der Darstellung des Prozesses φ durch:

$$\pi_i(t) = \varphi_i(t)B(t,\tau_i), \quad \text{für } i = 1,\ldots,n, \quad \pi_0(t) = V_x^{\pi}(t) - \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t). \tag{3.15}$$

3.2.1 Portfoliooptimierung für die logarithmische Nutzenfunktion

Es sei das vollständige HJM-Bondmarktmodell, in dem ein äquivalentes Martingalmaß existiert und ein Bond als Numéraire dient aus dem Kapitel 3.2 gegeben. In diesem Bondmarktmodell lösen wir das Mertonproblem der Portfoliooptimierung für eine logarithmische Nutzenfunktion

$$U(x) = \log(x), \quad x \in (0,\infty),$$

zum Planungshorizont $T < \tau_1$ mit der Martingalmethode. Dabei bestimmen wir den optimalen Portfolioprozess zuerst im eindimensionalen Fall. Wir nehmen also an, dass der Investor neben dem Numéraire-Bond mit der Fälligkeit τ_2 nur in einen weiteren Bond mit der Fälligkeit $\tau_1 < \tau_2$ investieren kann. Zudem setzen wir voraus, dass die Quelle des Zufalls von einem eindimensionalen Wiener-Prozess getrieben wird. Anschließend verallgemeinern wir dieses Ergebnis auf den n-dimensionalen Fall.

Lösung des statischen Optimierungsproblems im eindimensionalen Fall

In dem Kapitel 2.3.1 wurde die Lösung für das statische Problem mit dem Satz 2.8 in einer allgemeinen Form vorgestellt. Hier wird dieses Ergebnis für das betrachtete Bondmarktmodell und eine logarithmische Nutzenfunkion spezifiziert.

Für eine logarithmische Nutzenfunktion U hat die Funktion $I = (U')^{-1}$ die Gestalt $I(x) = \frac{1}{x}$. Somit ist das optimale Endvermögen nach dem Satz 2.8 entsprechend der Darstellung (2.17) wie folgt bestimmt:

$$X = I(\lambda H(T)) = \frac{1}{\lambda H(T)}.$$

Dabei ist der Prozess H durch (3.10) definiert. Zudem ist der Lagrange-Multiplikator λ so zu wählen, dass die folgende Gleichheit für die Funktion $\mathcal{X}$ aus (2.16) erfüllt ist:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \frac{x}{B(0,\tau_2)}.$$

Da die Funktion $\mathcal{X}$ für eine logarithmische Nutzenfunktion durch

$$\mathcal{X}(\lambda) = E[H(T)I(\lambda H(T))] = E\left[H(T)\frac{1}{\lambda H(T)}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

dargestellt ist, ergibt sich der Lagrange-Multiplikator $\lambda = \frac{B(0,\tau_2)}{x}$. Damit folgt das optimalen Endvermögen für die logarithmische Nutzenfunktion:

$$X = \frac{x}{B(0,\tau_2)H(T)}. \tag{3.16}$$

Lösung des Darstellungsproblems im eindimensionalen Fall

Zur Lösung des Darstellungsproblems muss eine replizierende Handelsstrategie für den diskontierten, optimalen Vermögensprozess bestimmt werden. Es wird also nach einem progressiv messbaren, selbstfinanzierenden und zum $x > 0$ zulässigen, $\mathbb{R}^2$-wertigen Prozess φ mit der Eigenschaft (2.12) gesucht, welcher die folgende Gleichheit entsprechend (2.13) und (3.14) für X aus (3.16) erfüllt

$$\overline{V}(t) := \frac{V_x^{\varphi}(t)}{B(t,\tau_2)} = \overline{E}\left[\frac{X}{B(T,\tau_2)}\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.17}$$

Dabei bezeichnet $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes P_{τ_2}.

Mit dieser Zielsetzung erfolgt die Herleitung der stochastischen Differentialgleichung für den diskontierten, optimalen Vermögensprozess $\overline{V}$. Wir setzen das optimale Endvermögen aus (3.16), sowie die Darstellung (3.10) für den Prozess H in den Erwartungwert (3.17) ein und erhalten die folgende Gestalt für $\overline{V}$:

$$\begin{aligned}\overline{V}(t) &= \overline{E}\left[\frac{X}{B(T,\tau_2)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= \overline{E}\left[\frac{1}{B(T,\tau_2)}\frac{x}{B(0,\tau_2)H(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= \overline{E}\left[\frac{x}{B(0,\tau_2)}L(T)\middle|\mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit der Martingaleigenschaft des Dichtequotientenprozesses L aus (3.6) unter dem Maß P_{τ_2} die Darstellung des diskontierten, optimalen Vermögensprozesses:

$$\overline{V}(t) = \frac{x}{B(0,\tau_2)}\overline{E}[L(T)|\mathcal{F}_t] = \frac{x}{B(0,\tau_2)}L(t). \tag{3.18}$$

Der Prozess L ist entsprechend seiner Darstellung in (3.6) ein exponentielles Martingal unter dem Maß P_{τ_2}, somit ist seine Dynamik bekannt[45]. Damit folgt aus (3.18) die stochastische Differentialgleichung für $\overline{V}$

$$d\overline{V}(t) = \frac{x}{B(0,\tau_2)}dL(t) = \frac{x}{B(0,\tau_2)}L(t)\vartheta(t)d\overline{W}. \tag{3.19}$$

Der diskontierte, optimale Vermögensprozess erfüllt entsprechend (3.14) zugleich auch die folgende stochastische Differentialgleichung

$$d\overline{V}(t) = \varphi(t)d\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}.$$

Diese Differentialgleichung wird im Folgenden genauer bestimmt. Wir gehen von der Dynamik von $\frac{1}{B(t,\tau_2)}$ unter dem Maß P in (3.13) aus und führen ein Maßwechsel zu dem Maß P_{τ_2} mit $dW(t) = d\overline{W}(t) - \vartheta(t)dt$ aus (3.7) durch. Wir erhalten:

$$d\frac{1}{B(t,\tau_2)} = \frac{1}{B(t,\tau_2)}\Big(-r(t)dt - \sigma^B(t,\tau_2)d\overline{W}(t)\Big). \tag{3.20}$$

Jetzt wird mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse die Dynamik von $\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}$ unter

[45]Siehe [Dec06], Kapitel 10, S. 195.

dem Maß P_{τ_2} ermittelt. So ergibt sich mithilfe der Dynamik (3.5) für $B(t,\tau_1)$ und der Dynamik (3.20) für $\frac{1}{B(t,\tau_2)}$:

$$\begin{aligned}
d\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)} &= \frac{1}{B(t,\tau_2)}dB(t,\tau_1) + B(t,\tau_1)d\frac{1}{B(t,\tau_2)} + d\left\langle B(\cdot,\tau_1), \frac{1}{B(\cdot,\tau_2)}\right\rangle_t \\
&= \frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}\Big(\big(r(t) + \sigma^B(t,\tau_2)\sigma^B(t,\tau_1)\big)dt + \sigma^B(t,\tau_1)d\overline{W}(t)\Big) \\
&\quad + \frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}\Big(-r(t)dt - \sigma^B(t,\tau_2)d\overline{W}(t)\Big) - \frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}\sigma^B(t,\tau_1)\sigma^B(t,\tau_2)dt \\
&= \frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)d\overline{W}(t). \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine weitere stochastische Differentialgleichung für den diskontierten, optimalen Vermögensprozess:

$$\begin{aligned}
d\overline{V}(t) &= \varphi(t)d\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)} \\
&= \varphi(t)\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)d\overline{W}(t). \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Der Vergleich der stochastischen Differentialgleichungen (3.19) und (3.22) für den optimalen, diskontierten Vermögensprozess ergibt schließlich die Gestalt der replizierenden Handelsstrategie:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{x}{B(0,\tau_2)}L(t)\vartheta(t)\frac{B(t,\tau_2)}{B(t,\tau_1)}\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)^{-1} \\
&\overset{(3.18)}{=} \frac{V_x^\varphi(t)}{B(t,\tau_1)}\vartheta(t)\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Als Resultat folgt hieraus mit (3.15) der optimale Portfolioprozess:

$$\pi(t) = \varphi(t)B(t,\tau_1) = \frac{\vartheta(t)}{(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2))}V_x^\varphi(t).$$

Dieser optimale Porfolioprozess entspricht dem Resultat von Merton in [Mer69] und [Mer71], obwohl Merton die Methode der dynamischen Programmierung nutzt. Jedoch weicht seine Darstellung ab. Der Grund dafür ist, dass Merton das Geldmarktkonto als Verrechnungsgröße wählt und wir den τ_2-Bond als Numéraire verwenden. Durch das Notieren der Bondpreise in den τ_2-Bond-Anteilen sowie Investition in den τ_2-Bond, hat die Preisänderung dieses Bonds keinen Einfluss mehr auf den optimalen Portfolioprozess. Deshalb wird in seiner Darstellung das Preisänderungsrisiko des τ_2-Bonds reduziert, welches durch die Volatilität $\sigma^B(t,\tau_2)$ ausgedrückt ist.

Lösung des Mertonproblems im mehrdimensionalen Fall

Wir haben das Mertonproblem der Portfoliooptimierung für eine logarithmische Nutzenfunktion im eindimensionalen Fall gelöst. Dieses Ergebniss wollen wir nun auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern. Es seien also die Investitionsmöglichkeiten durch die n Bonds mit den Fälligkeiten $\tau_1 <, \ldots, < \tau_n$ und einem Numéraire Bond mit der Fälligkeit $\tau_{n+1} > \tau_n$ dargestellt. Des Weteren sei die Quelle des Zufalls von einem n-dimensionalen Wiener-Prozess getrieben.

Das optimale Endvermögen kann aus der Lösung im eindimensionalen Fall übernommen werden und ist somit entsprechend (3.16) wie folgt dargestellt:

$$X = \frac{x}{B(0, \tau_{n+1})H(T)}.$$

Zu diesem Endvermögen bestimmen wir nun die replizierende Handelsstrategie. Hierzu wird die stochastische Differentialgleichung für den optimalen, diskontierten Vermögensprozesses $\overline{V}$ im mehrdimensionalen Fall benötigt. Diese Differentialgleichung lässt sich entsprechend dem eindimensionalen Fall herleiten. Zum einen ergibt sich für $\overline{V}$ gemäß (3.18) die Dynamik

$$\begin{aligned} d\overline{V}(t) &= \frac{x}{B(0, \tau_{n+1})} L(t) \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j(t) d\overline{W}_j(t) \\ &= \frac{x}{B(0, \tau_{n+1})} L(t) \vartheta(t)^\top d\overline{W}(t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

und zum anderen resultiert gemäß (3.22) für diesen Prozess die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} d\overline{V}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \frac{B(t, \tau_i)}{B(t, \tau_{n+1})} \sum_{j=1}^{n} \big(\sigma_j^B(t, \tau_i) - \sigma_j^B(t, \tau_{n+1})\big) d\overline{W}_j(t) \\ &= \frac{1}{B(t, \tau_{n+1})} \varphi(t)^\top \operatorname{diag}\big(B(t, \tau)\big) \big(\Sigma(t) - \sigma^B(t, \tau_{n+1}) \mathbf{1}\big)^\top d\overline{W}(t). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dabei wird mit Σ die Volatilitätsmatrix der Bondpreisprozesse aus (3.4) bezeichnet und es werden die folgenden Vektoren $\mathbf{1}$, $B(t, \tau)$ durch $\mathbf{1} \coloneqq (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ und $B(t, \tau) \coloneqq \big(B(t, \tau_1), \ldots, B(t, \tau_n)\big)^\top$ definiert. Zudem stellt $\operatorname{diag}(y)$ eine $n \times n$-Diagonalmatrix dar, welche von einem n-dimensionalen Vektor y erzeugt wird.

Für die Bestimmung der optimalen Handelsstrategie ist die Invertierbarkeit der Matrix Σ (siehe die Annahme 3.1) nicht ausreichend. Deshalb machen wir an dieser Stelle eine weitere Annahme.

Annahme 3.2: *Es sei die Matrix* $\big(\Sigma(t) - \sigma^B(t, \tau_{n+1}) \mathbf{1}\big)^{-1}$ *für alle* $t \leq \tau_n$ *invertierbar.*

Mit dieser Annahme erhalten wir durch den Vergleich der beiden stochastischen Differentialgleichungen (3.23) und (3.24) die folgende Gleichung für die optimale Handelsstrategie:

$$\varphi(t)^\top \operatorname{diag}\big(B(t,\tau)\big) = B(t,\tau_{n+1})\frac{x}{B(0,\tau_{n+1})}L(t)\vartheta(t)^\top\Big(\big(\Sigma(t)-\sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\big)^\top\Big)^{-1}.$$

Aus dieser Gleichung folgt mit (3.15) der optimale Portfolioprozess für die logarithmische Nutzenfunktion im mehrdimensionalen Fall:

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= \operatorname{diag}\big(B(t,\tau)\big)\varphi(t)\\
&= \Big(\varphi(t)^\top \operatorname{diag}\big(B(t,\tau)\big)\Big)^\top\\
&= \Big(\Sigma(t)-\sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\vartheta(t)\frac{x}{B(0,\tau_{n+1})}L(t)B(t,\tau_{n+1})\\
&\overset{(3.18)}{=} \Big(\Sigma(t)-\sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\vartheta(t)V_x^\varphi(t).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2.2 Portfoliooptimierung für die Potenznutzenfunktion

Es sei das vollständige HJM-Bondmarktmodell, in dem ein äquivalentes Martingalmaß existiert und ein Bond als Numéraire dient aus dem Kapitel 3.2 gegeben. In diesem Abschnitt lösen wir das Mertonproblem der Portfoliooptimierung mit der Martingalmethode nun für eine Potenznutzenfunktion

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \qquad x \in (0,\infty), \quad p \in (0,1),$$

zum Planungshorizont $T < \tau_1$. Damit die Martingalmethode im HJM-Modell für diese Nutzenfunktion anwendbar wird (siehe Kapitel 3.1), werden folgende Annahmen getroffen.

Annahme 3.3. *Die Volatilitätsfunktion der Forward-Rate $\sigma(t,\tau)$ sei eine deterministische Funktion von t und von τ für $0 \le t \le \tau \le \hat{T}$.*

Annahme 3.4. *Der Marktpreis des Risikos $\vartheta(t)$ aus dem Korollar 3.4 sei eine deterministische Funktion von t für $0 \le t \le \tau_{n+1}$.*

Somit findet im Folgenden die Lösung des Mertonproblems für eine Potenznutzenfunktion in einem Gaußschen HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos statt. Entsprechend der Portfoliooptimierung für die logarithmische Nutzenfunktion wird der optimale Portfolioprozess zuerst für den eindimensionalen Fall bestimmt und anschließend auf den n-dimensionalen Fall verallgemeinert.

Lösung des statischen Optimierungsproblems im eindimensionalen Fall

Hier wird die Lösung für das statische Optimierungsproblem aus dem Satz 2.8, welche in einer allgemeinen Form gegeben ist, für das betrachtete Bondmarktmodell und eine Potenznutzenfunktion spezifiziert.

Für eine Potenznutzenfunktion U hat die Funktion $I = (U')^{-1}$ die Gestalt $I(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$ für $x \in (0,\infty)$, $p \in (0,1)$. Damit lässt sich das optimale Endvermögen X mit der Darstellung (2.17) für den Prozess H aus (3.10) wie folgt bestimmen:

$$X = I(\lambda H(T)) = (\lambda H(T))^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.26}$$

Dabei ist der Lagrange-Multiplikator λ so zu wählen, dass die folgende Gleichheit für eine Funktion $\mathcal{X}$ aus (2.16) erfüllt ist:

$$\mathcal{X}(\lambda) = \frac{x}{B(0,\tau_2)}.$$

Da die Funktion $\mathcal{X}$ für eine Potenznutzenfunktion durch

$$\mathcal{X}(\lambda) = E[H(T)I(\lambda H(T))] = E\Big[\lambda^{\frac{1}{p-1}} H(T)^{\frac{p}{p-1}}\Big] = \lambda^{\frac{1}{p-1}} E\Big[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\Big]$$

dargestellt ist, ergibt sich der folgende Lagrange-Multiplikator:

$$\lambda = x^{p-1}\Big(E\Big[H(T)^{\frac{p}{p-1}}\Big]\Big)^{1-p}. \tag{3.27}$$

Lösung des Darstellungsproblems im eindimensionalen Fall

Zur Lösung des Darstellungsproblems muss eine replizierende Handelsstrategie φ für den diskontierten, optimalen Vermögensprozess $\overline{V}$ mit

$$\overline{V}(t) := \frac{V_x^{\varphi}}{B(t,\tau_2)} = \overline{E}\left[\frac{X}{B(T,\tau_2)}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

bestimmt werden. Dabei bezeichnet $\overline{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich P_{τ_2}.

Zu diesem Zweck erfolgt im Folgenden die Herleitung der stochastischen Differentialgleichung für den diskontierten, optimalen Vermögensprozess $\overline{V}$. Zunächst bestimmen wir mit dem folgenden Lemma das Forwardmartingalmaß zum Termin T (siehe Lemma 2.12). Mithilfe dieses Maßes werden wir den oberen Erwartungswert so umformen können, dass die Herleitung der stochastischen Differentialgleichung für $\overline{V}$ durchführbar wird.

Lemma 3.7. *Es sei P_T das Forwardmartingalmaß zum Termin T. Dann wird P_T bezüglich des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes P für den Prozess L aus (3.6) durch*

$$\frac{dP_T}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)}\frac{1}{L(t)} := R(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.28}$$

dargestellt. Dabei erfüllt der Dichtequotientenprozess R die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dR(t) = R(t)\nu(t)dW(t), \tag{3.29}$$

$$\nu(t) := \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2) - \vartheta(t). \tag{3.30}$$

Des Weiteren gilt, dass der folgende Prozess ein Wiener-Prozess unter dem Maß P_T ist:

$$dW_T(t) = dW(t) - \nu(t)dt. \tag{3.31}$$

Beweis: Der Dichtequotientenprozess des Forwardmartingalmaßes P_T bezüglich des Maßes P_{τ_2} ist nach dem Lemma 2.12 (für das äquivalente Martingalmaß P_{τ_2} bezüglich des τ_2-Bonds als Numéraire N) auf folgende Weise bestimmt:

$$\frac{dP_T}{dP_{\tau_2}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)} := S(t). \tag{3.32}$$

Damit kann der Dichtequotientenprozess R vom Maß P_T bezüglich des subjektiven Maßes P mit (3.6) wie folgt ermittelt werden:

$$\frac{dP_T}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{dP_T}{dP_{\tau_2}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} \cdot \frac{dP_{\tau_2}}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)} \cdot \frac{1}{L(t)} := R(t).$$

Um die zeitliche Entwicklung des Prozesses R unter dem Maß P zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Dynamik des diskontierten Bondpreisprozesses $\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}$. Die Dynamik dieses Prozesses unter dem Maß P_{τ_2} ist aus (3.22) bekannt. Mit der Beziehung $d\overline{W}(t) = dW(t) + \vartheta(t)dt$ aus (3.7) führen wir einen Maßwechsel zu dem Maß P durch:

$$\begin{aligned} d\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)} &\overset{(3.22)}{=} d\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\Big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\Big)d\overline{W}(t) \\ &= d\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\Big(\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dW(t) + \vartheta(t)\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dt\Big). \end{aligned}$$

Jetzt kann die stochastische Differentialgleichung für den Dichtequotientenprozess R mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse und der Dynamik (3.12) für den Prozess $\frac{1}{L}$ angegeben werden:

$$\begin{aligned}
dR(t) &= \frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)} d\left(\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\frac{1}{L(t)}\right)\\
&= \frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)}\left(\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)} d\frac{1}{L(t)} + \frac{1}{L(t)} d\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)} + d\left\langle \frac{B(\cdot,T)}{B(\cdot,\tau_2)}, \frac{1}{L(\cdot)}\right\rangle_t\right)\\
&= \frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)}\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\frac{1}{L(t)}\Big(-\vartheta(t)dW(t) + \big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dW(t)\\
&\quad + \vartheta(t)\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dt - \vartheta(t)\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dt\Big)\\
&= R(t)\Big(\underbrace{\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2) - \vartheta(t)}_{:=\nu(t)}\Big)dW(t).
\end{aligned}$$

Die Lösung der oberen stochastischen Differentialgleichung ist bekannt[46]. Somit hat der Dichtequotientenprozess R die folgende Darstellung:

$$R(t) = \exp\left(\int_0^t \nu(u)\,dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \nu^2(u)\,du\right).$$

Hieraus ergibt sich mit dem Satz von Girsanov, dass der folgende Prozess ein Wiener-Prozesses unter dem Forwardmartingalmaß P_T ist:

$$dW_T(t) = dW(t) - \nu(t)dt. \qquad \square$$

Die Lösung des Darstellungsproblems wird fortgesetzt. Der diskontierte, optimale Vermögensprozess wird jetzt als bedingter Erwartungswert unter dem Forwardmartingalmaß zum Termin T dargestellt, sodass die Diskontierungsfunktion im Erwartungswert verschwindet. Hierzu verwenden wir den Dichtequotientenprozess S aus (3.32) und wenden den Satz von Bayes an:

$$\begin{aligned}
\overline{V}(t) &= \overline{E}\left[\frac{X}{B(T,\tau_2)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \overline{E}\left[\frac{X}{B(T,\tau_2)}\underbrace{B(T,T)}_{=1}\frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\\
&= \overline{E}[XS(T)|\mathcal{F}_t]\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\\
&\overset{Bayes}{=} E_T[X|\mathcal{F}_t]S(t)\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\\
&= E_T[X|\mathcal{F}_t]\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}.
\end{aligned}$$

[46] Siehe [Dec06], Kapitel 10, S. 195.

Das optimale Endvermögen X wird nun durch den Dichtequotientenprozess R zum Forwardmartingalmaß P_T ausgedrückt, wodurch sich der folgende Erwartungswert ergibt:

$$\begin{aligned}
E_T[X|\mathcal{F}_t] &\overset{(3.26)}{=} E_T\left[(\lambda H(T))^{\frac{1}{p-1}}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&\overset{(3.10)}{=} E_T\left[\left(\frac{B(T,T)}{B(T,\tau_2)}\frac{1}{L(T)}\frac{B(0,\tau_2)}{B(0,T)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\lambda\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Bigg|\mathcal{F}_t\right] \\
&\overset{(3.28)}{=} E_T\left[R(T)^{\frac{1}{p-1}}\Big|\mathcal{F}_t\right]\left(\lambda\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= E_T\left[\left(\frac{R(T)}{R(t)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Bigg|\mathcal{F}_t\right]\left(\lambda\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\right)^{\frac{1}{p-1}} R(t)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \underbrace{E_T\left[\left(\frac{R(T)}{R(t)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]\left(\lambda\frac{B(0,T)}{B(0,\tau_2)}\right)^{\frac{1}{p-1}}}_{:=h(t)} R(t)^{\frac{1}{p-1}}, \qquad \lambda \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Damit erhält der diskontierte, optimale Vermögensprozess für eine deterministische Funktion h die folgende Form:

$$\overline{V}(t) = \frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}h(t)R(t)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.33}$$

Nun kann die stochastische Differentialgleichung für $\overline{V}$ bestimmt werden. Hierzu ermitteln wir die Dynamik des Prozesses $R^{\frac{1}{p-1}}h$. Wir gehen von der Dynamik des Dichtequotientenprozesses R unter dem Maß P in (3.29) aus. Unter Verwendung der Ito-Formel und den Maßwechsel zum Maß P_T mit der Darstellung $dW(t) = dW_T(t) + \nu(t)dt$ aus (3.31) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
dR^{\frac{1}{p-1}}(t) &= \frac{1}{p-1}R(t)^{\frac{1}{p-1}-1}dR(t) + \frac{2-p}{2(p-1)^2}R(t)^{\frac{1}{p-1}-2}d\langle R(\cdot)\rangle_t \\
&= \frac{1}{p-1}R(t)^{\frac{1}{p-1}}\nu(t)dW(t) + \frac{2-p}{2(p-1)^2}R(t)^{\frac{1}{p-1}}\nu(t)^2dt \\
&= \frac{1}{p-1}R(t)^{\frac{1}{p-1}}\nu(t)\big(dW_T(t)+\nu(t)dt\big) + \frac{2-p}{2(p-1)^2}R(t)^{\frac{1}{p-1}}\nu(t)^2dt \\
&= R(t)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{p-1}\nu(t)dW_T(t) + \frac{p}{2(p-1)^2}\nu(t)^2dt\right).
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich die Dynamik des Prozesses $R^{\frac{1}{p-1}}h$ bezüglich des Maßes P_T wie folgt mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse:

$$\begin{aligned} dR(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t) &= R(t)^{\frac{1}{p-1}}dh(t) + h(t)dR(t)^{\frac{1}{p-1}} + \underbrace{d\left\langle R^{\frac{1}{p-1}}(\cdot), h(\cdot)\right\rangle_t}_{=0,\text{ da } h \text{ determ.}} \\ &= R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)'dt + h(t)R(t)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{p-1}\nu(t)dW_T(t) + \frac{p}{2(p-1)^2}\nu(t)^2dt\right) \\ &= h(t)R(t)^{\frac{1}{p-1}}\frac{\nu(t)}{p-1}dW_T(t) + \underbrace{\left(R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)' + h(t)R(t)^{\frac{1}{p-1}}\frac{p\,\nu(t)^2}{2(p-1)^2}\right)}_{=0}dt. \end{aligned}$$

Der Prozess $R^{\frac{1}{p-1}}h$ ist als Erwartungswert ein Martingal. Deshalb ist sein Drift-Term gleich Null. Aus dieser Eigenschaft ergibt sich die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die deterministische Funktion h:

$$h'(t) = -h(t)\frac{p}{2(p-1)^2}\nu^2(t), \quad \text{mit } \ h(T) = a \in (0,\infty).$$

Somit haben wir die Dynamik des Prozesses $R^{\frac{1}{p-1}}h$ unter dem Maß P_T bestimmt. Der Maßwechsel zum Maß P_{τ_2} geschieht mithilfe der Darstellungen $dW_T(t) = dW(t) - \nu(t)dt$ und $dW(t) = d\overline{W}(t) - \vartheta(t)dt$:

$$\begin{aligned} dR(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t) &= R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\frac{\nu(t)}{p-1}dW_T(t) = R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\frac{\nu(t)}{p-1}\Big(dW(t) - \nu(t)dt\Big) \\ &= R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\frac{\nu(t)}{p-1}\Big(d\overline{W}(t) - \big(\nu(t) + \vartheta(t)\big)dt\Big) \\ &\overset{(3.31)}{=} R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\frac{\nu(t)}{p-1}\Big(d\overline{W}(t) - \big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dt\Big). \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich aus der Darstellung (3.33) mit der partiellen Integration für Ito-Prozesse die stochastische Differentialgleichung für den diskontierten, optimalen Vermögensprozess $\overline{V}$ bezüglich des Maßes P_{τ_2}:

$$\begin{aligned} d\overline{V}(t) &= d\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}\Big(R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\Big) \\ &= \frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}d\Big(R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\Big) + R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)d\frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)} + d\left\langle \frac{B(\cdot,T)}{B(\cdot,\tau_2)}, R^{\frac{1}{p-1}}(\cdot)h(\cdot)\right\rangle_t \\ &= \frac{B(t,T)}{B(t,\tau_2)}R(t)^{\frac{1}{p-1}}h(t)\Bigg(\frac{\nu(t)}{p-1}d\overline{W}(t) - \frac{\nu(t)}{p-1}\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dt \\ &\quad + \big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)d\overline{W}(t) + \frac{\nu(t)}{p-1}\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)dt\Bigg) \\ &= \overline{V}(t)\left(\frac{1}{p-1}\nu(t) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\right)d\overline{W}(t). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Der diskontierte, optimale Vermögensprozess erfüllt entsprechend (3.22) zugleich auch die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} d\overline{V}(t) &= \varphi(t) d\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)} \\ &= \varphi(t)\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau_2)}\Big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\Big) d\overline{W}(t). \end{aligned}$$

Der Vergleich der beiden stochastischen Differentialgleichungen für den optimalen, diskontierten Vermögensprozess ergibt schließlich die Gestalt der replizierenden Handelsstrategie:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \overline{V}(t)\frac{B(t,\tau_2)}{B(t,\tau_1)} \cdot \frac{\frac{1}{p-1}\nu(t) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)}{\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)} \\ &= \frac{V_x^\varphi(t)}{B(t,\tau_1)} \cdot \frac{\frac{1}{p-1}\nu(t) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)}{\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)} \\ &\overset{(3.30)}{=} \frac{V_x^\varphi(t)}{B(t,\tau_1)} \cdot \frac{\frac{1}{p-1}\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2) - \vartheta(t)\big) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)}{\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)} \\ &= \frac{V_x^\varphi(t)}{B(t,\tau_1)}\left(\frac{-\vartheta(t) + p\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)}{(p-1)\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)}\right). \end{aligned}$$

Aus seiner Gestalt mit (3.15) resultiert schließlich der optimale Portfolioprozesses:

$$\pi(t) = \left(\frac{1}{(p-1)}\frac{-\vartheta(t)}{\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)} + \frac{p}{(p-1)}\frac{\big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)}{\big(\sigma^B(t,\tau_1) - \sigma^B(t,\tau_2)\big)}\right)V_x^\varphi(t). \quad (3.35)$$

Der optimale Portfolioprozess besteht aus zwei gewichteten Termen, wobei der erste Term dem Resultat von Merton in [Mer69] und [Mer71] gleicht. Wie im Falle der logarithmischen Nutzenfunktion, ist auch hier das Ergebnis an den Bond als Verrechnungsgröße angepasst. In [Mer69] und [Mer71] befasst sich Merton mit einer konstanten Menge an Investitionsmöglichkeiten. Wir betrachten ein Modell in dem die Änderung der Anlagemöglichkeiten zufällig in der Zeit geschieht. Deshalb kann der zweite Term als Hedge gegen die Änderung in den Anlagemöglichkeiten aufgefasst werden[47].

Lösung des Mertonproblems im mehrdimensionalen Fall

Wir haben das Mertonproblem der Portfoliooptimierung für eine Potenznutzenfunktion im eindimensionalen Fall gelöst. Dieses Ergebniss wollen wir nun auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern. Es seien also die Investitionsmöglichkeiten durch die n Bonds mit den Fälligkeiten $\tau_1 <, \ldots, < \tau_n$ und einem Numéraire Bond mit der Fälligkeit $\tau_{n+1} > \tau_n$ dargestellt. Des Weteren sei die Quelle des Zufalls von einem n-dimensionalen Wiener-Prozess getrieben.

[47] Vergleiche [Kra04], S.28.

Das optimale Endvermögen kann aus der Lösung im eindimensionalen Fall übernommen werden und ist somit entsprechend (3.26) für H aus (3.10) wie folgt dargestellt:

$$X = (\lambda H(T))^{\frac{1}{p-1}},$$

wobei der Lagrange-Multiplikator gemäß (3.27) gegeben ist. Wir bestimmen nun die replizierende Handelsstrategie zu diesem Endvermögen. Zu diesem Zweck ist die stochastische Differentialgleichung für den optimalen, diskontierten Vermögensprozesses $\overline{V}$ im mehrdimensionalen Fall erforderlich. Diese Differentialgleichung lässt sich entsprechend dem eindimensionalen Fall herleiten. Es ergibt sich zum einen gemäß (3.34) die Dynamik:

$$\begin{aligned} d\overline{V}(t) &= \overline{V}(t) \sum_{j=1}^{n} \Big(\tfrac{1}{p-1} \nu_j(t) + \sigma_j^B(t,T) - \sigma_j^B(t,\tau_{n+1}) \Big) d\overline{W}_j(t) \\ &= \overline{V}(t) \Big(\tfrac{1}{p-1} \nu(t) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_{n+1}) \Big)^{\top} d\overline{W}(t) \end{aligned} \tag{3.36}$$

und zum anderen gemäß (3.22) die Dynamik:

$$\begin{aligned} d\overline{V}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \frac{B(t,\tau_i)}{B(t,\tau_{n+1})} \sum_{j=1}^{n} \big(\sigma_j^B(t,\tau_i) - \sigma_j^B(t,\tau_{n+1}) \big) d\overline{W}_j(t) \\ &= \frac{1}{B(t,\tau_{n+1})} \varphi(t)^{\top} \mathrm{diag}\big(B(t,\tau)\big) \big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1}) \mathbf{1} \big)^{\top} d\overline{W}(t). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dabei wird mit Σ die Volatilitätsmatrix der Bondpreisprozesse aus (3.4) bezeichnet und es werden die folgenden Vektoren $\mathbf{1}$, $B(t,\tau)$ durch $\mathbf{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$ und $B(t,\tau) := \big(B(t,\tau_1),\dots,B(t,\tau_n)\big)^{\top}$ definiert. Zudem stellt $\mathrm{diag}(y)$ eine $n \times n$-Diagonalmatrix dar, welche von einem n-dimensionalen Vektor y erzeugt wird.

Durch den Vergleich der beiden stochastischen Differentialgleichungen (3.36), (3.37) und zusammen mit der Annahme 3.2 erhalten wir die folgende Gleichung für die optimale Handelsstrategie:

$$\begin{aligned} \varphi(t)^{\top} \mathrm{diag}\big(B(t,\tau)\big) = V_x^{\varphi}(t) \Big(\tfrac{1}{p-1} \nu(t) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_{n+1}) \Big)^{\top} \\ \cdot \Big(\big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1}) \mathbf{1} \big)^{\top} \Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt mit (3.15) der optimale Portfolioprozess für die Potenznutzenfunktion im mehrdimensionalen Fall:

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= \operatorname{diag}\big(B(t,\tau)\big)\varphi(t) \\
&= \Big(\varphi(t)^\top \operatorname{diag}\big(B(t,\tau)\big)\Big)^\top \\
&= \Big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\Big(\tfrac{1}{p-1}\nu(t) + \sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\Big)V_x^\varphi(t) \\
&\overset{(3.30)}{=} \tfrac{1}{p-1}\Big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\big(-\vartheta(t)\big)V_x^\varphi(t) \\
&\quad + \tfrac{p}{p-1}\Big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\Big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\Big)V_x^\varphi(t). \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

3.3 Anwendung auf ein praxisrelevantes Modell

Wir haben die optimale Portfoliostrategie für eine logarithmische Nutzenfunktion in einem allgemeinen HJM-Modell und für eine Potenznutzenfunktion in einem Gaußschen HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos bestimmt. Jetzt wollen wir diese Ergebnisse in einem speziellen, praxisrelevanten Gaußschen HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos anwenden. Hierzu seien das Gaußsche 3-Faktor-HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate aus dem Abschnitt 1.3.2 sowie die Gültigkeit der Annahme 3.2 vorausgesetzt.

Der optimale Portfolioprozess besitzt für die logarithmische Nutzenfunktion gemäß (3.25) für die Matrix Σ aus (3.4) und $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ die folgende Gestalt:

$$\pi(t) = \Big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\vartheta(t)V_x^\varphi(t).$$

Für die Potenznutzenfunktion gilt gemäß (3.38) die folgende Darstellung des optimalen Portfolioprozesses:

$$\begin{aligned}
\pi(t) = &\tfrac{1}{p-1}\Big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\big(-\vartheta(t)\big)V_x^\varphi(t) \\
&+ \tfrac{p}{p-1}\Big(\Sigma(t) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\mathbf{1}\Big)^{-1}\Big(\sigma^B(t,T) - \sigma^B(t,\tau_{n+1})\Big)V_x^\varphi(t).
\end{aligned}$$

Somit ist die Volatilitätsmatrix der Bondpreisprozesse Σ zur Spezifizierung der optimalen Portfoliostrategie notwendig. Diese Matrix wird im Folgenden bestimmt.

Die Volatilitätsfunktion der Forward-Rate für τ_j ist in diesem Modell für die Funktion h aus (1.23) und die Funktion g aus (1.24) durch

$$\sigma(t,\tau_j) = g(t)h(\tau_j)$$

bestimmt. Daraus ergibt sich mit der Beziehung $\sigma^B(t,\tau_j) = \int_t^{\tau_j}\sigma(t,u)\,du$ aus (1.9) die folgende Volatilitätsfunktion des τ_j-Bonds:

$$\sigma^B(t, \tau_j) = g(t) \int_t^{\tau_j} h(u)\, du. \tag{3.39}$$

Wir setzen in die Volatilitätsfunktion (3.39) die Darstellungen (1.23), (1.24) ein und berechnen die Volatilitätsfunktion des τ_j-Bonds:

$$\begin{aligned}
\sigma^B(t,\tau_j) &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t)e^{\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} & \sigma_{12}(t)e^{\int_0^t \varkappa_2(u)\,du} & \sigma_{13}(t)e^{\int_0^t \varkappa_3(u)\,du} \\ \sigma_{21}(t)e^{\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} & \sigma_{22}(t)e^{\int_0^t \varkappa_2(u)\,du} & \sigma_{23}(t)e^{\int_0^t \varkappa_3(u)\,du} \\ \sigma_{31}(t)e^{\int_0^t \varkappa_1(u)\,du} & \sigma_{32}(t)e^{\int_0^t \varkappa_2(u)\,du} & \sigma_{33}(t)e^{\int_0^t \varkappa_3(u)\,du} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_t^{\tau_j} e^{-\int_0^u \varkappa_1(s)\,ds}\,du \\ \int_t^{\tau_j} e^{-\int_0^u \varkappa_2(s)\,ds}\,du \\ \int_t^{\tau_j} e^{-\int_0^u \varkappa_3(s)\,ds}\,du \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \sigma_{1i} \int_t^{\tau_j} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du \\ \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i} \int_t^{\tau_j} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du \\ \sum_{i=1}^3 \sigma_{3i} \int_t^{\tau_j} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Letztlich entsteht daraus die folgende Volatilitätsmatrix der Bondpreisprozesse mit den Fälligkeiten $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$:

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \sigma_{1i} \int_t^{\tau_1} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du & \sum_{i=1}^3 \sigma_{1i} \int_t^{\tau_2} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du & \sum_{i=1}^3 \sigma_{1i} \int_t^{\tau_3} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du \\ \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i} \int_t^{\tau_1} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du & \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i} \int_t^{\tau_2} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du & \sum_{i=1}^3 \sigma_{2i} \int_t^{\tau_3} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du \\ \sum_{i=1}^3 \sigma_{3i} \int_t^{\tau_1} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du & \sum_{i=1}^3 \sigma_{3i} \int_t^{\tau_2} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du & \sum_{i=1}^3 \sigma_{3i} \int_t^{\tau_3} e^{-\int_t^u \varkappa_i(s)\,ds}\,du \end{pmatrix}.$$

4 Fazit

Unsere Fragestellung war die Bestimmung einer optimalen Investitionsstrategie in einem Bondmarktmodell. Hierfür setzten wir uns zum Ziel das Mertonproblem der Portfoliooptimierung in einem HJM-Modell mit der Martingalmethode zu lösen. Während der Lösung dieses Problems verwendeten wir die logarithmische Nutzenfunktion, sowie die Potenznutzenfunktion. Außerdem betrachteten wir den besonderen Fall, dass das Geldmarktkonto nicht zur Verfügung steht und wählten einen Bond als Numéraire.

Im Hinblick auf die Zielsetzung wurde zunächst die Anwendbarkeit der Martingalmethode überprüft. Es stellte sich heraus, dass die Gültigkeit der Anwendung entscheidend von der Art der Nutzenfunktion abhängt. Bei logarithmischer Nutzenfunktion ist die Lösung des betrachteten Problems in einem vom Wiener-Prozess getriebenen, vollständigen Finanzmarktmodell, in dem ein äquivalentes Martingalmaß existiert immer möglich, falls es ein Bondmarktmodell einschließt. Dagegen sind für die Potenznutzenfunktion zusätzliche Forderungen an die Volatilitäten der Bonds bzw. an den Marktpreis des Risikos zu stellen. Wir konnten beweisen, dass für die deterministische Bondpreisvolatilität und den deterministischen Marktpreis des Risikos diese Methode anwendbar ist. Damit zeigten wir, dass die Lösung des Mertonproblems für die Potenznutzenfunktion in einem Gaußschen HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos möglich ist. Zugleich zeigten wir am Beispiel eines CIR-Modells, dass die Portfoliooptimierung mit der Martingalmethode nicht in allen HJM-Modellen durchführbar ist.

Nach der Erörterung der Anwendbarkeit erfolgte die Lösung des Mertonproblems mit der Martingalmethode. Durch die Martingalmethode konnten wir das zeitlich dynamische Optimierungsproblem von Merton aufteilen. Zuerst lösten wir ein statisches Optimierungsproblem, wodurch sich das optimale Endvermögen ergab. Danach bestimmten wir durch die Lösung des Darstellungsproblems eine replizierende Strategie zum optimalen Endvermögen. Diese Strategie stellte letztlich die optimale Investitionsstrategie dar.

Bei der Durchführung wurde deutlich, wie die Betrachtung des Mertonproblems in einem Bondmarktmodell seine Komplexität erweiterte. Bei der Lösung des Darstellungsproblems gestaltete sich die Aufstellung der stochastischen Differentialgleichung für den diskontierten Vermögensprozess aufgrund der stochastischer Zinsstruktur besonders schwierig. Weiterhin wurde ein großer Einfluss der Nutzenfunktionsart auf den Komplexitätsgrad der Lösung festgestellt. Während wir die stochastische Differentialgleichung für den diskontierten Vermögensprozess für die logarithmische Nutzenfunktion relativ einfach ermitteln konnten, wurde ihre Bestimmung für die Potenznutzenfunktion bedeutend komplizierter. Für diese Nutzenfunktion konnten wir die Herleitung dieser stochastischen Differentialgleichung durch einige Umformungen mit dem Forwardmartingalmaß erreichen.

Schließlich bestimmten wir durch die Lösung des Mertonproblems eine optimale Portfoliostrategie, welche unsere ursprüngliche Frage beantwortet. Unter Verwendung einer logarithmischen Nutzenfunktion in einem allgemeinen Mehrfaktor-HJM-Modell erhielten wir einen optimalen Porfolioprozess, der dem Resultat von Merton in [Mer69] und [Mer71] entspricht. Dabei ist seine Form an den Bond als Numéraire angepasst. Bemerkenswert ist, dass wir zu dem selben Ergebnis gelangen, obwohl Merton in [Mer69] und [Mer71] das Portfolioproblem mit der Methode der dynamischen Programmierung löste. Außerdem setzte er eine konstante Menge an Investitionsmöglichkeiten, sowie eine konstante Zinsrate in seiner Arbeit voraus. Für einen Investor mit einer Potenznutzenfunktion lösten wir das Mertonproblem in einem Gaußschen Mehrfaktor-HJM-Modell mit einem deterministischen Marktpreis des Risikos. Unter Verwendung dieser Nutzenfunktion bekamen wir einen optimalen Portfolioprozess, der aus zwei gewichteten Termen besteht. Der erste Term gleicht dem Resultat von Merton in [Mer69] und [Mer71] für eine konstante Menge an Investitionsmöglichkeiten. Der zweite Term kann als Hedge gegen die Änderungen in den Anlagemöglichkeiten aufgefasst werden, da in dem betrachteten Modell die Menge der Anlagemöglichkeiten nicht konstant ist. Diese beiden Ergebnisse wendeten wir zum Schluss in einem praxisrelevanten, Gaußschen Mehrfaktor-HJM-Modell mit Markovscher Short-Rate und gaben zwei konkrete optimale Portfoliostrategien an.

Wir haben die Portfoliooptimierung in einem Bondmarkt durchgeführt, welcher mittels eines HJM-Modells modelliert wurde. Dieses Zinsstrukturmodell gründet auf infinitesimalen Terminzinsen, den augenblicklichen Forward-Raten. Jedoch bilden diese Zinssätze lediglich ein mathematisches Konstrukt und können nicht am realen Markt beobachtet werden. Der Bondmarkt kann auch mit einem Libor-Marktmodell modelliert werden. Dieses Zinsstrukturmodell baut auf den Libor-Zinssätzen, welche am Markt notiert sind. Deshalb wäre es interessant in einer weiteren Untersuchung die Portfoliooptimierung in einem Libor-Marktmodell vorzunehmen. Des Weiteren haben wir im Rahmen dieser Arbeit die Vollständigkeit des Finanzmarktes vorausgesetzt, was der Realität nicht entspricht. Diese Annahme stellt eine notwendige Voraussetzung für die zur Portfoliooptimierung vorgestellte Martingalmethode. Weiterführende Literatur wie z. B. [Sch04] und [KS03] behandelt die Erweiterung dieser Methode auf unvollständige Finanzmarktmodelle. Somit wäre die Umsetzung der Martingalmethode in einem unvollständigen Bondmarktmodell ein interessanter weiterführender Aspekt.

Literatur

[AP10a] Leif B.G. Andersen and Vladimir V. Piterbarg. *Interest Rate Modeling, Volume I: Term Structure Models.* London, New York : Atlantic Financial Press, 2010.

[AP10b] Leif B.G. Andersen and Vladimir V. Piterbarg. *Interest Rate Modeling, Volume II: Term Structure Models.* London, New York : Atlantic Financial Press, 2010.

[Bjö03] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time.* 2. edition. Oxford University Press, 2003.

[BS04] Nicole Branger and Christian Schlag. *Zinsderivate: Modelle und Bewertung.* Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[Dec06] Thomas Deck. *Der Itô-Kalkül: Einführung und Anwendungen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[EK99] Robert J. Elliott and P. Ekkehard Kopp. *Mathematics of Financial Markets.* Springer-Verlag New York, 1999.

[Fil09] Damir Filipovic. *Term-Structure Models: A Graduate Course.* Springer Finance, 2009.

[HJM92] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingents claim valuation. *Econometrica*, 60:77–105, 1992.

[Kar97] Ioannis Karatzas. *Lectures on the Mathematics of Finance, Volume 8.* American Mathematical Society, 1997.

[KK01] Ralf Korn and Elke Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial.* Volume 31. Amerikan Mathematical Society, 2001.

[Kor97] Ralf Korn. *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time.* World Scientific, 1997.

[Kra04] Holger Kraft. *Optimal Portfolios with Stochastic Interest Rates and Defaultable Assets.* Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[KS91] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 1991.

[KS98] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of Mathematical Finance.* Springer New York, 1998.

[KS03] Dmitry Kramkov and Walter Schachermayer. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 13:1504–1516, 2003.

[Küh07] Christoph Kühn. *Finanzmathematik in stetiger Zeit.* Universität Hamburg, 2007. Vorlesungsskript, letzte Aktualisierung 2014.

[Mer69] Robert C. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics*, 51:247–257, 1969.

[Mer71] Robert C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3:373–413, 1971.

[Pau12] Volkert Paulsen. *Höhere Finanzmathemtik.* WWU Münster, SS 2012. Handschriftliche Vorlesungsmitschrift.

[Pau13] Volkert Paulsen. *Ausgewählte Kapitel der Finanzmathemtik.* WWU Münster, WS 2012/2013. Handschriftliche Vorlesungsmitschrift.

[Sch04] Walter Schachermayer. *Portfolio Optimization in Incomplete Financial Markets.* Vienna University of Technology, 2004. Vorlesungsskript.

[Sch05] Thorsten Schmidt. *Zinsstrukturmodelle.* Universität Leipzig, 2005. Vorlesungsskript.

[Sch08] Thorsten Schmidt. *Finanzmathematik.* TU München und Universität Leipzig, 2008. Vorlesungsskript.

[Shr04] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.* Springer Science + Business Media, 2004.