



Sensitivitätsanalyse eines Kreditportfoliomodells

Diplomarbeit

vorgelegt von
Markus Witte

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische-Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Ein Mehrfaktoren-Kreditportfoliomodell	10
1.1 Modellierung	10
1.1.1 Modellierung von Ausfällen	11
1.2 Abhängigkeitsstruktur	12
1.2.1 Zusammenhang Asset-Value und Ausfall-Korrelation	14
1.3 Mehrfaktoren-Modell	15
1.3.1 Modellierung der Faktoren	20
1.3.2 Hauptkomponentenanalyse	21
1.3.3 Klassifikation von Industrien und Regionen	24
1.4 Stochastische LGD	25
2 Zeitdynamisches Kreditportfoliomodell	31
2.1 Mehrperiodigkeit und Ratingmigrationen	31
2.1.1 Bestimmung der Migrationsschranken	40
2.2 Risikomaße	42
2.2.1 Bestimmung der Risikobeiträge	43
3 Sensitivitätsanalyse	46
3.1 Diversifikation in Abhängigkeit von R^2 und Sektorzugehörigkeit . .	47
3.1.1 Diversifikation durch steigende Granularität	47
3.1.2 Konzentrationsrisiken	49
3.1.3 Risikobeitrag in Abhängigkeit von Ausfallwahrscheinlichkeit und Sektorzugehörigkeit	52
3.1.4 Vergleich der Risikobeiträge bestimmt durch Standardabwei- chung und Expected Shortfall	54
3.2 Einfluss stochastischer LGD	56

3.2.1	Einfluss auf Portfolios mit variierender Ausfallwahrscheinlichkeit und LGD	58
3.2.2	Einfluss des systematischen Risikos	61
3.3	Einfluss von Ratingmigrationen	62
3.3.1	Einfluss der Migrationsmatrizen	63
3.3.2	Migrationseffekte und systematisches Risiko	64
3.3.3	Einfluss der Annahmen zum Reinvestment	65
3.4	Realitätsnahes Portfolio	66
3.4.1	Portfoliostruktur	67
3.4.2	Abhängigkeitsstruktur	69
3.4.3	LGD-Stochastik	72
3.4.4	Liquidationszeit	74
3.4.5	Ratingmigrationen	75
3.4.6	Hauptkomponentenanalyse des Mehr-Faktoren-Modells	77
3.4.7	Stress-Szenario	77
4	Kreditportfoliomodell der WestLB AG	79
4.1	Portfolio Manager Plus	79
5	Kritische Würdigung	81
Literaturverzeichnis		83
A	Monte-Carlo-Simulation	84
A.1	Modellierung der Monte-Carlo-Simulation	84
A.2	Parameter der Monte-Carlo-Simulation	86
B	Migrationsmatrizen	88

Abbildungsverzeichnis

1.1	Dichtefunktion $f(x, a, b)$ einer Beta-Verteilung	27
1.2	Verteilungsfunktion mit eingezeichnetem 50%-Quantil	28
2.1	Diskrete Zeitstruktur	31
2.2	Schranken der Ratingklassen bei Starrating j	37
2.3	Schranken der Ratingklassen bei Starrating $C_i(t_0) = 4$	42
3.1	Diversifikationseffekt	48
3.2	Diversifikationseffekt für Regionen und Industrien	50
3.3	Value at Risk in Abhängigkeit von R^2 und Sektorzugehörigkeit . . .	51
3.4	Einzelnamenskonzentrationsrisiko nach Ausfallwahrscheinlichkeit . .	52
3.5	Risikobeitrag in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit	54
3.6	Relativer Risikobeitrag und systematisches Risiko	56
3.7	Einfluss der stochastischen LGD in Abhängigkeit vom Erwartungswert und Diversifikationsgrad	59
3.8	Einfluss der stochastischen LGD in Abhängigkeit von Ausfallwahrscheinlichkeit und Diversifikationsgrad	60
3.9	Stochastische LGD und systematisches Risiko	61
3.10	Einfluss der Liquidationszeit	65
3.11	Value at Risk in Abhängigkeit vom R^2	70
3.12	Portfolioverlustverteilung	71
3.13	Verteilungsfunktionen des Portfolioverlustes	71
4.1	Verlustverteilung bestimmt durch die Monte-Carlo-Simulation . . .	80
B.1	Migrationsmatrix A	88
B.2	Migrationsmatrix B	88
B.3	Migrationsmatrix C	89
B.4	Geschätzte Migrationsmatrix	89

Tabellenverzeichnis

1.1	Klassifikation der Industrien	24
1.2	Klassifikation der Regionen	25
2.1	Schranken der Migrationswahrscheinlichkeiten bei Ausgangsrating BBB	41
3.1	Einfluss des systematischen Risikos auf den Value at Risk	64
3.2	Einzelnamenskonzentration	69
3.3	Sektorkonzentration	69
3.4	Einfluss der Intersektor-Korrelation auf den Value at Risk	72
3.5	Einfluss der LGD-Stochastik auf den Value at Risk	73
3.6	Einfluss des Varianzparameter K der LGD-Stochastik auf den Value at Risk	73
3.7	Einfluss der Liquidationszeit auf den Value at Risk	74
3.8	Einfluss der Migrationsmatrix auf den Value at Risk	76
3.9	Einfluss einer Ratingverschlechterung auf den Value at Risk	77
3.10	Einfluss der Hauptkomponentenanalyse auf den Value at Risk	77
3.11	Einfluss des Stress-Szenarios auf den Value at Risk	78
A.1	Einfluss der Anzahl an Monte-Carlo-Realisationen auf den Value at Risk	86
A.2	Einfluss des Seed der Monte-Carlo-Simulation auf den Value at Risk	87

Einleitung

Jede Bank sollte über ein Verfahren zur Beurteilung ihrer angemessenen Eigenkapitalausstattung im Verhältnis zu ihrem Risikoprofil verfügen. Eine adäquate Bestimmung des Risikoprofils einer Bank ist unabdingbar, sowohl für ihre Steuerung als auch die Kontrolle ihrer Stabilität.

Mit anderen Worten muss eine Bank ausreichend hohe Sicherheiten für die Geschäfte besitzen, die sie tätigt. Dabei stellt sich die Frage, welche Risiken die Bank mit den abgeschlossenen Geschäften eingegangen ist. Die Menge aller laufenden Geschäfte einer Bank wird als ihr Portfolio bezeichnet. In dieser Arbeit wird das Kreditrisiko des Portfolios einer Bank im Mittelpunkt stehen. Das Kreditrisiko ist definiert als das Risiko möglicher Verluste durch Bonitätsveränderungen des Geschäftspartners oder den Ausfall einer vom Geschäftspartner zugesicherten vertraglichen Leistung.

Das erste Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung eines Kreditportfoliomodells, das das Kreditrisiko eines Portfolios bestimmt. Dieses Modell leitet aus den unterschiedlichen Risikoparametern eines Kreditportfolios eine Verteilung von potentiellen Verlusten ab. Genauer wird der Verlustbeitrag eines Kontrahenten auf Basis seines Ratings, d.h. seiner geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeit, sowie der Besicherung des Geschäfts berechnet. Zudem werden Konzentrationen berücksichtigt, die sich auf Basis schon bestehender Transaktionen ergeben.

Es wird in **Kapitel 1** mit einem statischen Modell begonnen und dieses schrittweise erweitert. Die Entwicklung der Unternehmenswerte der Kontrahenten und die Abhängigkeiten innerhalb des Portfolios werden durch ein Mehrfaktoren-Modell dargestellt. Für die Identifikation von Konzentrationen im Portfolio wird in diesem Zusammenhang eine geographische und industrielle Zuordnung der Geschäfte im Portfolio vorgenommen.

In **Kapitel 2** wird das Modell zu einem zeitdynamischen Portfoliomodell erwei-

tert. Es werden die realisierten Verluste des Portfolios über mehrere Perioden zu einem Gesamtverlust summiert. Dabei wird zusätzlich zum Ausfallrisiko eines Kontrahenten auch die Gefahr einer Bonitätsveränderung berücksichtigt. Abschließend werden die Risikoparameter vorgestellt, die anhand der Verteilung von potentiellen Verlusten des Portfolios definiert sind.

Das zweite Ziel dieser Arbeit ist die Identifizierung von zentralen Parametern, die für das Risikoprofil eines Portfolios verantwortlich sind. Dazu wird in **Kapitel 3** eine gründliche Sensitivitätsanalyse des zuvor aufgebauten Portfoliomodells durchgeführt. Dabei wird sowohl der Einfluss von Modellparametern als auch der Einfluss der Struktur des betrachteten Portfolios auf dessen Risikogehalt untersucht. Wichtige Ergebnisse über die Zusammenhänge der Modellparameter werden dabei gewonnen. Zusätzlich werden Portfoliostrukturen erkannt, die ein besonders hohes Kreditrisiko bergen. Es wird mit homogenen Portfolien begonnen und schrittweise zu einem komplexen realitätsnahen Portfolio übergegangen. Damit soll die Brücke zur Bankenpraxis geschlagen werden.

Kapitel 4 stellt das Computer-Programm vor, das der Modellierung der beiden ersten Kapitel folgt und für die Sensitivitätsanalyse des dritten Kapitels verwendet wird. Das Programm heißt *Portfolio Manager Plus* und wird von der WestLB AG genutzt. Die beschriebenen Analysen sind im Rahmen eines halbjährigen Praktikums bei der WestLB AG in Düsseldorf durchgeführt worden. Das wesentliche Ergebnis des Programms ist eine Portfolioverlust-Verteilung, die durch eine Monte-Carlo-Simulation bestimmt wird. Der Ablauf einer solchen Simulation ist im **Anhang** beschrieben.

Ich möchte mich ganz herzlich bei Privatdozent Dr. Volkert Paulsen für die Betreuung dieser Arbeit bedanken, sowie für Durchsicht und Anmerkungen bei Thomas Kochler und Carmen Faust. Der Abteilung *Economic Capital Modelling & Stress-testing* der WestLB AG unter Leitung von Dr. Andre Wilch gilt mein Dank für ihre Unterstützung während meines Praktikums in ihrem Team.

Gemäß § 21 (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, xxx

Markus Witte

Kapitel 1

Ein Mehrfaktoren-Kreditportfoliomodell

1.1 Modellierung

Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , der als Grundlage für die Modellierung der potentiellen Portfolioverluste dient.

Sei $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ ein Portfolio mit $m \in \mathbb{N}$ Positionen¹. Die Positionen des betrachteten Portfolios können als Kreditverträge interpretiert werden, für die folgende Informationen vorliegen. Für Position $P_i \in \mathcal{P}$ (oder kurz $i \in \{1, 2, \dots, m\}$) bezeichne EAD_i den *Exposure at Default*, d.h. die erwartete Höhe der Forderung gegenüber dem Kreditnehmer zum Zeitpunkt des Ausfalls. LGD_i bezeichne den *Loss given Default*, d.h. den Anteil am EAD , der im Falle eines Ausfalls verloren geht. Vergleiche [2], S. 16.

Der Unternehmenswert einer Position i verhalte sich entsprechend dem Asset-Value-Ansatz. (Vergleiche [10] und [3]). Daraus folge für den Unternehmenswert $V_i(t_1)$ einer Position i zum Zeitpunkt t_1 der standardisierte log-Asset-Return $s_i(t_1)$, d.h. es gelte

$$s_i(t_1) \sim N(0, 1). \quad (1.1)$$

¹Position wird als synonyme Bezeichnung für *Finanzgut* verwendet.

1.1.1 Modellierung von Ausfällen

Definition 1.1

Ein Ausfall eines Unternehmens $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tritt zum Zeitpunkt t_1 ein, falls dessen log-Asset-Return $s_i(t_1)$ kleiner oder gleich einer Ausfallschranke $c_i(t_1) \in \mathbb{R}$ ist, also

$$s_i(t_1) \leq c_i(t_1). \quad (1.2)$$

Da $s_i(t_1)$ standardnormalverteilt ist, lässt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i(t_1)$ vom betrachteten Unternehmen folgendermaßen ausdrücken:

$$p_i(t_1) = P(s_i(t_1) \leq c_i(t_1)) = \Phi(c_i(t_1)), \quad (1.3)$$

wobei P das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß und Φ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung bezeichnet.

Da die Ausfallwahrscheinlichkeit durch das Rating bestimmt ist und dies als bekannt vorausgesetzt wird (vergleiche Bemerkung 1.12), lässt sich die Ausfallschranke für das Unternehmen über die inverse Verteilungsfunktion bestimmen:

$$c_i(t_1) = \Phi^{-1}(p_i(t_1)). \quad (1.4)$$

Da es im Laufe dieser Arbeit wichtig sein wird zu wissen, ob die Positionen im Portfolio ausgefallen sind oder nicht, führe einen Prozess $Y = (Y_{t_p})_{t_p \in \mathcal{T}}$ ein, der als Ausfallindikator dienen soll. Y nehme Werte in $\{0, 1\}^m$ an. Dabei bedeutet für $y \in \{0, 1\}^m$:

$$y(i) = \begin{cases} 1, & \text{falls i-te Position ausgefallen ist} \\ 0, & \text{falls i-te Position nicht ausgefallen ist} \end{cases}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (1.5)$$

Der gesamte Portfolioverlust $L_{PF}(t_1)$ in Zeitpunkt t_1 , der gerade die Summe der Verluste $L_i(t_1)$ der Positionen $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ist, ist dann gegeben durch

$$L_{PF}(t_1) = \sum_{i=1}^m L_i(t_1) = \sum_{i=1}^m EAD_i * LGD_i * Y_{t_1}(i). \quad (1.6)$$

1.2 Abhängigkeitsstruktur

Die Annahme, dass es keine Abhängigkeit zwischen den Asset-Returns gibt, würde die Berechnungen im Portfolio-Modell zwar erleichtern, aber eine stochastische Unabhängigkeit aller Asset-Returns wäre weit von der Realität entfernt (Bild zur Motivation folgt analog zu [6], Seite 216). Der Schlüssel zu einer adäquaten Bestimmung des Portfolio-Risikos ist die Modellierung von Ausfall-Korrelationen, denn hohe Portfolioverluste sind wesentlich für die Bestimmung der Risikomaße (siehe Kapitel 2.2) und bedeuten meist den gemeinsamen Ausfall vieler Unternehmen aus dem Portfolio. Ausfallindikator $Y(i)$ und Ausfallwahrscheinlichkeit p_i für $i \in \{1, \dots, m\}$ beziehen sich in diesem Kapitel auf den Zeitpunkt $t_1 \in \mathcal{T}$. Die Abhängigkeit von zwei Ausfällen wird durch ihre Korrelation modelliert:

$$\rho_{ij}^D := \text{Corr}(Y(i), Y(j)).$$

Die Bedeutung von Korrelationen wird deutlich, wenn der unerwartete Verlust betrachtet wird. Damit sind die Verluste gemeint, die über den erwarteten Verlust hinausgehen (vergleiche [2], S. 28).

$$\begin{aligned} UL_{PF}^2 &= \text{Var}(L_{PF}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m L_i\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m EAD_i * LGD_i * Y(i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i * EAD_j * LGD_i * LGD_j * \sqrt{\text{Var}(Y(i))} \\ &\quad * \sqrt{\text{Var}(Y(j))} * \text{Corr}(Y(i), Y(j)) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i * EAD_j * LGD_i * LGD_j * \sqrt{p_i(1-p_i)} * \sqrt{p_j(1-p_j)} * \rho_{ij}^D. \end{aligned}$$

Welche Größen entscheidend eingehen, wird somit durch das ρ_{ij}^D maßgeblich bestimmt. Um verschiedene Werte für ρ_{ij}^D interpretieren zu können, folgt ein Beispiel (siehe [2], S. 30f.):

Beispiel 1.2

Zur Vereinfachung bestehe ein Portfolio aus zwei gleichen Positionen mit $LGD = 100\%$ und $EAD = 1$. $Y(i)$ sei wieder der Ausfallindikator und p_i die Ausfallwahrscheinlichkeit für $i \in \{1, 2\}$. Sei $\rho^D := \text{Corr}(Y(1), Y(2)) = \text{Corr}(Y(2), Y(1))$, somit

ist der unerwartete Verlust:

$$\begin{aligned}
 UL_{PF}^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \underbrace{EAD * EAD * LGD * LGD * \sqrt{p_i(1-p_i)} * \sqrt{p_j(1-p_j)} * \text{Corr}(Y(i), Y(j))}_{=1} \\
 &= p_1(1-p_1) \underbrace{\text{Corr}(Y(1), Y(1)) + 2\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)} \text{Corr}(Y(1), Y(2))}_{=\rho^D} \\
 &\quad + p_2(1-p_2) \underbrace{\text{Corr}(Y(2), Y(2))}_{=1} \\
 &= p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + 2\rho^D \sqrt{p_1(1-p_1)} \sqrt{p_2(1-p_2)}.
 \end{aligned}$$

Nun betrachte drei mögliche Fälle für ρ^D :

- $\rho^D = 0$

In diesem Fall verschwindet der letzte Summand in der letzten Zeile in obiger Gleichung. Die beiden Ausfälle sind nicht korreliert und das Portfolio kann als perfekt diversifiziert bezeichnet werden.

- $\rho^D > 0$

In diesem Fall sind die beiden Positionen so korreliert, dass ein Ausfall der einen Position die Ausfallwahrscheinlichkeit der anderen erhöht. Betrachte dazu die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall von Position 2 gegeben, dass Position 1 bereits ausgefallen ist:

$$\begin{aligned}
 P[Y(2) = 1 | Y(1) = 1] &= \frac{P[Y(1) = 1, Y(2) = 1]}{P[Y(1) = 1]} \\
 &= \frac{E[Y(1)Y(2)]}{p_1} \\
 &= \frac{p_1p_2 + \text{Cov}(Y(1), Y(2))}{p_1} \\
 &= p_2 + \frac{\text{Cov}(Y(1), Y(2))}{p_1} \\
 &= p_2 + \frac{\rho^D}{p_1}.
 \end{aligned}$$

Da $\rho^D > 0$, steigt die Ausfallwahrscheinlichkeit von Position 2, wenn Position 1 bereits ausgefallen ist. Mit anderen Worten hat bei positiver Korrelation der Positionen in einem Portfolio ein Ausfall erheblichen Einfluss auf die Ausfallwahrscheinlichkeit der anderen Positionen.

Im Extremfall von $\rho^D = 1$ spricht man von perfekter Korrelation. Im Fall von

$p := p_1 = p_2$ ist der unerwartete Portfolioverlust die Summe der unerwarteten Verluste der beiden einzelnen Positionen und wird als Konzentrationsrisiko bezeichnet:

$$UL_{PF} = 2\sqrt{p(1-p)}.$$

- $\rho^D < 0$

Dieser Fall ist die gespiegelte Version von $\rho^D > 0$. Deswegen betrachte nur die perfekte Anti-Korrelation für $\rho^D = -1$. Eine Position 2 gleicht den unerwarteten Verlust einer anderen Position 1 vollständig aus, wenn deren Korrelation $\rho^D = -1$ ist und zusätzlich die anderen Eigenschaften (Exposure, Rating, etc.) übereinstimmen. Mit Gleichung (siehe oben) folgt dann $UL_{PF} = 0$.

1.2.1 Zusammenhang Asset-Value und Ausfall-Korrelation

Innerhalb des Kreditportfoliomodells sind Ausfall-Korrelationen durch die Asset-Korrelationen bestimmt. Der Zusammenhang zwischen paarweiser Asset- und Ausfall-Korrelation wird im Folgenden erläutert.

In diesem Kapitel beziehen sich weiterhin der Ausfallindikator $Y(i)$, die Ausfall-wahrscheinlichkeit p_i , die Ausfallschranke c_i und der Asset-Return s_i für $i \in \{1, 2\}$ auf den Zeitpunkt $t_1 \in \mathcal{T}$.

Weiter seien c_i und c_j die gemäß Gleichung 1.4 resultierenden Ausfallschranken:

$$c_i = \Phi^{-1}(p_i) \quad \text{und} \quad c_j = \Phi^{-1}(p_j). \quad (1.7)$$

Die Korrelation der Asset-Returns s_i und s_j werde mit ρ_{ij}^A bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Unternehmen in der betrachteten Periode ausfallen, ist

$$p_{ij} := P(s_i \leq c_i, s_j \leq c_j) = \Phi_2(c_i, c_j, \rho_{ij}^A), \quad (1.8)$$

wobei $\Phi_2(\cdot, \cdot, \rho)$ die Verteilungsfunktion der 2-dimensionalen Standardnormalverteilung mit Korrelation ρ meint.

Die Ausfall-Korrelation ρ_{ij}^D als Korrelation zwischen zwei Ausfall-Ereignissen lässt sich darstellen als:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^D &= \text{Corr}(Y(i), Y(j)) = \frac{\text{Cov}(Y(i), Y(j))}{\sqrt{\text{Var}(Y(i))}\sqrt{\text{Var}(Y(j))}} \\ &= \frac{E[(Y(i) - EY(i))(Y(j) - EY(j))]}{\sqrt{\text{Var}(Y(i))}\sqrt{\text{Var}(Y(j))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(Y(i)Y(j)) - EY(i)EY(j)}{\sqrt{Var(Y(i))}\sqrt{Var(Y(j))}} \\
&= \frac{p_{ij} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}}.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung nutze $E(Y(k)) = p_k$ und $Var(Y(k)) = p_k(1 - p_k)$.

Da $p_{ij} = \Phi_2(c_i, c_j, \rho_{ij}^A)$, lässt sich nun erkennen, dass die Ausfall-Korrelation ρ_{ij}^D komplett durch die Asset-Korrelation ρ_{ij}^A bestimmt wird. Aus diesem Grund werden zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur die Asset-Korrelationen betrachtet. Dies wird im folgenden Kapitel durch ein Mehrfaktoren-Modell umgesetzt.

1.3 Mehrfaktoren-Modell

In diesem Kapitel wird folgende Frage beantwortet: Was bestimmt die Entwicklung des Unternehmenswertes und wie lässt sich diese modellieren?

Der erste Teil der Frage lässt sich direkt beantworten: Die Unternehmenswert-Entwicklung wird von systematischen und idiosynkratischen² Einflüssen bestimmt. Der systematische Einfluss meint das allgemeine Marktumfeld und der idiosynkratische Einfluss wird von unternehmensspezifischen Ereignissen bestimmt. Das allgemeine Marktumfeld beeinflusst offensichtlich alle Unternehmen einer Branche, zwar nicht im gleichen Maße, aber zumindest zum Teil.

Fällt beispielsweise der Preis für Automobile wegen sinkender Nachfrage, dann hat das negative Auswirkungen auf die gesamte Automobil-Industrie, wobei sicherlich einige Automobil-Unternehmen besser auf diese Veränderungen reagieren können als andere.

Aus diesem Grund wird der Asset-Return (genauer der standardisierte log-Asset-Return) in einen systematischen und einen idiosynkratischen Teil getrennt. Der systematische Teil entspricht dem Risiko, dem alle Unternehmen einer bestimmten Industrie oder Region ausgesetzt sind. Der idiosynkratische Teil wird dagegen nur vom spezifischen Unternehmen bestimmt und ist unabhängig vom systematischen Risiko (siehe [2], Seite 41ff.).

Der zweite Teil der Eingangsfrage wird nun in Anlehnung an [7] beantwortet. Modelliere den Asset-Return $s_i(t_1)$ eines Unternehmes i zum Zeitpunkt $t_1 \in \mathcal{T}$ als die Summe einer systematischen Komponente $w_i \bullet V(t_1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} Z_j(t_1)$ und einer

²In der Literatur werden die Begriffe *idiosynkratisch* und *unsystematisch* synonym verwendet.

idiosynkratischen Komponente $\eta_i(t_1)$:

$$s_i(t_1) = w_i \bullet Z(t_1) + \eta_i(t_1). \quad (1.9)$$

Die idiosynkratische Komponente $\eta_i(t_1)$ sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $E(\eta_i(t_1)) = 0$ und stochastisch unabhängig von den Zufallsvariablen $Z_1(t_1), \dots, Z_n(t_1)$. $\eta_i(t_1)$ beschreibt den Teil des Asset-Returns $s_i(t_1)$, für den ausschließlich das betrachtete Unternehmen verantwortlich ist.

$Z_1(t_1), \dots, Z_n(t_1)$ seien ebenfalls normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$E(Z_j(t_1)) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

und Kovarianzmatrix Σ , die sich interpretieren lassen als den systematischen Teil des Asset-Returns eines Unternehmens, d.h. das systematische Risiko, dem alle Unternehmen innerhalb eines bestimmten Sektors ausgesetzt sind. Ein Sektor sei eine Kombination von Industrie und Region, die Anzahl an Sektoren sei mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Die Zufallsvariablen $Z_1(t_1), \dots, Z_n(t_1)$ werden als Sektorvariablen bezeichnet. Jedes Unternehmen $i \in \{1, \dots, m\}$ sei einem oder mehreren Sektoren mit entsprechender Gewichtung

$$w_i = (w_{i1}, \dots, w_{in}) \in [0, 1]^n \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^n w_{ij} = 1 \quad (1.10)$$

zugeordnet. Für eine genaue Klassifizierung der Sektoren vergleiche Kapitel 1.3.3.

Bemerkung 1.3

An dieser Stelle ist wichtig zu erwähnen, dass die Korrelationen der Sektorvariablen $Z(t_1)$ nicht von t_1 abhängig modelliert werden. Es wird angenommen, dass sich die Abhängigkeitsstruktur im betrachteten Zeitraum nicht ändert.

Nun bezeichne R_i^2 die Varianz der systematischen Komponente von $s_i(t_1)$:

$$R_i^2 := \text{Var}(w_i \bullet Z(t_1)) = w_i \bullet \Sigma \bullet w'_i. \quad (1.11)$$

Da $\text{Var}(s_i(t_1)) = 1$ und die systematische und idiosynkratische Komponente stochastisch unabhängig sind, folgt

$$\text{Var}(\eta_i(t_1)) = \text{Var}(s_i(t_1) - w_i \bullet Z(t_1)) = 1 - \text{Var}(w_i \bullet Z(t_1)) = 1 - R_i^2. \quad (1.12)$$

Damit ist gewährleistet, dass gilt:

$$s_i(t_1) = w_i \bullet Z(t) + \eta_i(t_1) \sim N(0, 1). \quad (1.13)$$

Nun betrachte $\frac{w_i \bullet Z(t_1)}{R_i}$ und $\epsilon_i(t_1) := \frac{\eta_i(t_1)}{\sqrt{1-R_i^2}}$. Der Asset-Return aus Gleichung 1.9 lässt sich dann darstellen als:

$$s_i(t_1) = R_i \left(\frac{w_i \bullet Z(t_1)}{R_i} \right) + \epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2}. \quad (1.14)$$

Nach Definition folgen $\frac{w_i \bullet Z(t_1)}{R_i}$ und $\epsilon_i(t_1)$ einer Standardnormalverteilung, weil $s_i(t_1)$ standardnormalverteilt ist.

Die makroökonomischen Tendenzen in verschiedenen Sektoren sind nicht unabhängig voneinander. Jeder Sektor ist in einem bestimmten Ausmaß durch die Weltwirtschaft beeinflusst, da jede Region und jede Industrie abhängig ist von allgemeinen ökonomischen Einflüssen wie dem Ölpreis, von Zinsraten, Rohstoffpreisen, usw. Die Abhängigkeiten unter den Sektorvariablen $Z_1(t_1), \dots, Z_n(t_1)$ werden durch die Kovarianz für jedes Sektor-Paar (j, k) in der Kovarianz-Matrix

$$\Sigma := (\text{Cov}(Z_i(t_1), Z_j(t_1)))_{i,j=1,\dots,n}$$

dargestellt. Mit anderen Worten:

$$Z(t_1) = (Z_1(t_1), \dots, Z_n(t_1)) \sim N(0, \Sigma). \quad (1.15)$$

Nun sei $V := \text{diag}(\Sigma_{11}^{\frac{1}{2}}, \dots, \Sigma_{nn}^{\frac{1}{2}})$ die Standardabweichungs-Matrix der Sektorvariablen und sei

$$\mathcal{C} := (\text{Corr}(Z_i(t_1), Z_j(t_1)))_{i,j=1,\dots,n} \quad (1.16)$$

die Korrelations-Matrix der Sektorvariablen $Z(t_1)$. Dann gilt $\Sigma = V \bullet \mathcal{C} \bullet V$, denn für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\Sigma_{ii}^{\frac{1}{2}} \text{Corr}(Z_i, Z_j) \Sigma_{jj}^{\frac{1}{2}} = \text{Cov}(Z_i, Z_j) = \Sigma_{ij}. \quad (1.17)$$

Außerdem bezeichne die reskalierten Sektorvariablen mit

$$W(t_1) := V^{-1} \bullet Z(t_1).$$

Dann hat W die Verteilung $W \sim N(0, \mathcal{C})$ und die systematische Komponente lässt

sich schreiben als

$$w_i \bullet Z = R_i \left(\frac{w_i \bullet Z}{R_i} \right) = R_i \left(\frac{w_i \bullet V \bullet W}{R_i} \right) = R_i \omega_i \bullet W, \quad (1.18)$$

wobei $\omega_i := \frac{w_i \bullet V}{R_i}$ die reskalierten Sektorgewichte bezeichnen. Eine Komponente des Vektors $\omega_i = (\omega_{i1}, \dots, \omega_{in})$ ist dann

$$\omega_{ij} = \frac{1}{R_i} w_{ij} \Sigma_{jj}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.19)$$

In dieser Notation lässt sich der Asset-Return von Unternehmen $i \in \{1, \dots, m\}$ als Linearkombination von standardnormalverteilten sektor- und unternehmensspezifischen Zufallsvariablen schreiben:

$$s_i(t_1) = R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} W_j(t_1) + \epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2}, \quad (1.20)$$

wobei $R_i^2 (\leq 1)$ die allgemeine Sensitivität von Unternehmen i gegenüber systematischem Risiko repräsentiert. Die Gewichte ω_{ij} sind skalierte Sektorgewichte, um weiterhin die korrekte Varianz zu erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Var}(s_i(t_1)) &= \text{Var} \left(R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} W_j(t_1) \right) + \text{Var} \left(\epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2} \right) \\ &\stackrel{\text{Gleichung 1.18}}{=} \underbrace{\text{Var}(w_i \bullet Z(t_1))}_{=R_i^2} + (1 - R_i^2) \underbrace{\text{Var}(\epsilon_i(t_1))}_{=1} \\ &= R_i^2 + 1 - R_i^2 = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.4

In der Anwendung wird die Korrelationsmatrix \mathcal{C} durch einen Baum-Parameter-Ansatz bestimmt. Diese Baum-Parameter werden in Kapitel 3.4.2 und 3.4.7 verändert und daher soll ihre Bedeutung hier kurz vorgestellt werden. Es wird eine Basis-Korrelation $\rho_{basis} \in [0, 1]$ zwischen den Sektorvariablen $Z(t_1)$ unterstellt. Zusätzlich wird für die Zugehörigkeit zur gleichen Region oder Industrie jeweils ein Zuschlag $\rho_R \in [0, 1]$ oder $\rho_I \in [0, 1]$ addiert. Sollten zwei Unternehmen in der gleichen Industrie und gleichen Region tätig sein, wird angenommen, dass sie dem gleichen systematischen Risiko ausgesetzt sind (d.h. es wird zusätzlich $\rho_{RI} \in [0, 1]$ addiert). Für die Baum-Parameter gilt: $\rho_{basis} + \rho_R + \rho_I + \rho_{RI} = 1$. Wie sensitiv sie auf dieses systematische Risiko sind, entscheidet das unternehmensspezifische R^2 .

Um bei einer Monte-Carlo-Simulation (die genaue Modellierung erfolgt in Anhang A.1) für eine höhere Genauigkeit eine größere Anzahl an Realisationen in gleicher Zeit zu erreichen, werden die Korrelationen nun durch ein Mehrfaktoren-Modell dargestellt und eine Hauptkomponentenanalyse dieser Faktoren durchgeführt. (Vergleiche [2], Seite 44ff.) Bisher besitzt jeder Sektor $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ eine standardnormalverteilte Sektorvariable $W_k(t_1)$, die nicht stochastisch unabhängig von anderen Sektorvariablen ist.

Grundlegendes Ziel der folgenden Hauptkomponentenanalyse ist es, die Sektorvariablen $W(t_1)$, die die systematischen Komponenten des Asset-Returns $s_i(t_1)$ darstellen, durch eine geringere Anzahl an stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen zu approximieren. Dabei soll möglichst wenig Genauigkeit verloren gehen.

Der systematische Teil des Asset-Returns ist wie bekannt

$$W(t_1) = (W_1(t_1), \dots, W_n(t_1))' \sim N(0, \mathcal{C}).$$

Es wird eine Repräsentation von W gesucht, die folgende Gleichung erfüllt:

$$W(t_1) = \Lambda \bullet X(t_1) + S(t_1). \quad (1.21)$$

Dabei sei

$$X(t_1) = (X_1(t_1), \dots, X_n(t_1))'$$

ein Vektor von stochastisch unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen, die als **Faktoren** bezeichnet werden und namensgebend für das Mehrfaktoren-Modell sind. Λ sei eine Matrix von sogenannten Faktorladungen, die die Sensitivität der Sektorvariablen W gegenüber diesen Faktoren beschreiben und S sei ein Vektor von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen, die diejenigen Effekte beinhalten, die nicht in den allgemeinen Faktoren X enthalten sind.

Das beschriebene Ziel wird in zwei Schritten erreicht:

1. Modellierung der Faktoren $X(t_1)$

Finde eine Repräsentation $W \sim \Lambda X$, wobei X ein Vektor von n stochastisch unabhängigen, standardnormalverteilten Faktoren sei, d.h. $X \sim N(0, I_n)$. Dabei bezeichne I_n eine $(n \times n)$ -Einheitsmatrix. W wird dann vollständig durch die mit Einträgen aus Λ gewichtete Summe der n unabhängigen Faktoren dargestellt.

2. Hauptkomponentenanalyse

Die Dimension der Korrelationsmatrix soll reduziert werden, indem sie durch

f allgemeine Faktoren (die wichtigsten Komponenten) und n andere unabhängige sektorspezifische Faktoren approximiert wird.

Starte mit **Schritt 1:**

1.3.1 Modellierung der Faktoren

Durch den Baumparameteransatz (vergleiche Bemerkung 1.4) ist \mathcal{C} positiv definit, daher existiert eine nicht eindeutige Repräsentation der Form

$$\mathcal{C} = \Lambda \Lambda' \quad (1.22)$$

mit einer passenden $(n \times n)$ -Matrix Λ . Dazu seien $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n$ die Eigenwerte von \mathcal{C} und u_1, \dots, u_n die entsprechenden Eigenvektoren. Es gilt daher $\mathcal{C}u_i = \nu_i u_i$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Eigenvektoren als orthogonal angenommen, d.h.

$$u_i' u_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.23)$$

Nun sei $U = (u_1, \dots, u_n)$ eine Matrix mit den (orthogonalen) Eigenvektoren als Zeilenvektoren und $D = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$ bezeichne die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonaleinträge. Daraus folgt

$$\mathcal{C}U = UD. \quad (1.24)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Eigenvektoren gilt $UU' = U'U = I_n$. Es folgt

$$\mathcal{C} = CUU' = UDU'. \quad (1.25)$$

Da \mathcal{C} positiv definit ist, sind die Eigenwerte nicht negativ: $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n \geq 0$. Daher folgt

$$D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\nu_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \nu_n^{\frac{1}{2}}). \quad (1.26)$$

Definiere $\Lambda := UD^{\frac{1}{2}}$ und diese Wahl erfüllt Gleichung 1.22:

$$\Lambda \Lambda' = UD^{\frac{1}{2}}(UD^{\frac{1}{2}})' = U \underbrace{D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})'}_{=D} U' = UDU' \stackrel{\text{Gleichung 1.25}}{=} \mathcal{C}. \quad (1.27)$$

Nun sei $X \sim N(0, I_n)$. Dann ist $\Lambda X \sim N(0, \mathcal{C})$, weil $E(\Lambda X) = 0$ und $Cov(\Lambda X) = \Lambda \Lambda' = \mathcal{C}$. Daraus folgt

$$W \sim \Lambda X, \quad (1.28)$$

wie gefordert.

Als nächstes folgt **Schritt 2**:

1.3.2 Hauptkomponentenanalyse

Die Idee der folgenden Approximation ist es, sich auf die Faktoren mit den größten Eigenwerten zu beschränken, da sie - für sich genommen - bereits zum größten Teil für die Varianz von W verantwortlich sind und die übrigen Faktoren mit sehr geringem Einfluss zu ignorieren.

Dazu sei $D_f = diag(\nu_1, \dots, \nu_f)$ die $(f \times f)$ -Diagonalmatrix mit den f größten Eigenwerten als Diagonaleinträge und entsprechend sei $D_f^{\frac{1}{2}} = diag(\nu_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \nu_f^{\frac{1}{2}})$. Außerdem bezeichne $\Lambda_f = (\lambda_{ij})_{j=1, \dots, f}^{i=1, \dots, n}$ die $(n \times f)$ -Matrix bestehend aus den ersten f Zeilen von Λ . Weiter sei $\mathcal{C} = (\rho_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ und $\mathcal{C}_f = (\rho_{f,ij})_{i,j=1, \dots, n}$. Schließlich definiere

$$\psi_{f,k}^2 = \rho_{kk} - (\Lambda_f \Lambda_f')_{kk} = 1 - \sum_{l=1}^f \lambda_{kl}^2 \quad \text{und} \quad \Psi_f = diag(\psi_{f,1}^2, \dots, \psi_{f,n}^2). \quad (1.29)$$

Beachte, dass $1 = \rho_{kk} = \rho_{f,kk}$, wobei $\rho_{f,kk} = (\Lambda_f \Lambda_f')_{kk} + \psi_{f,k}^2$. Damit sind die Diagonaleinträge von \mathcal{C}_f gleich 1 wie gefordert für eine Korrelationsmatrix.

Dann gilt approximativ

$$\mathcal{C} \approx \mathcal{C}_f = \Lambda_f \Lambda_f' + \Psi_f. \quad (1.30)$$

Die Höhe des Fehlers durch diese Approximation hängt von der Wahl von f ab. Die Anzahl an Faktoren f kann durch folgende Regel festgelegt werden:

Bemerkung 1.5

Sei $\zeta_p := \sum_{i=1}^p \nu_i$ für alle $p \leq n$ die Summe der p größten Eigenwerte. Wähle $f \leq n$ so, dass $\frac{\zeta_f}{\zeta_n} \leq \alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$. Dies lässt sich als die Forderung interpretieren, dass die ersten f Faktoren mindestens zum Anteil α für die Varianz von W verantwortlich sein sollen.

Nun sei $X_f(t_1) = (X_{f,1}(t_1), \dots, X_{f,f}(t_1))'$ ein Vektor von f stochastisch unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen, d.h. $X_f(t_1) \sim N(0, I_f)$. Dies ist die reduzierte Auswahl an unabhängigen Faktoren des Faktoren-Modells.

Außerdem sei $S_f(t_1) = (S_{f,1}(t_1), \dots, S_{f,n}(t_1))'$ ein Vektor von n stochastisch unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianzen $\psi_{f,1}^2, \dots, \psi_{f,n}^2$, d.h. $S_f(t_1) \sim N(0, \Psi_f)$. $S_f(t_1)$ und $X_f(t_1)$ seien paarweise stochastisch unabhängig.

Zuletzt sei der Vektor $W_f(t_1) = (W_{f,1}(t_1), \dots, W_{f,n}(t_1))'$ folgendermaßen bestimmt durch $X_f(t_1)$ und $S_f(t_1)$:

$$W_f = \Lambda_f X_f + S_f. \quad (1.31)$$

Dann ist W_f normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Korrelationsmatrix

$$\mathcal{C}_f = \Lambda_f \Lambda_f' + \Psi_f, \quad (1.32)$$

was approximativ gleich \mathcal{C} ist.

Damit ist die Modellierung des Faktoren-Modells abgeschlossen und der Sektorvariable $W_{f,j}(t_1)$ von Sektor j lässt sich mit Gleichung 1.31 schreiben als

$$W_{f,j}(t_1) = \sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}(t_1) + S_{f,j}(t_1). \quad (1.33)$$

Die Korrelation der Sektorvariablen $W_{f,i}(t_1)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist nun mit Verwendung der stochastischen Unabhängigkeit der $X_{f,k}(t_1)$ mit $k \in \{1, 2, \dots, f\}$, $S_{f,j}(t_1)$ mit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\epsilon_i(t_1)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und damit folgender Unkorreliertheit:

$$\begin{aligned} Corr(W_{f,i}, W_{f,j}) &= \frac{Cov(W_{f,i}, W_{f,j})}{\sqrt{\underbrace{Var(W_{f,i})}_{=1}} \sqrt{\underbrace{Var(W_{f,j})}_{=1}}} \\ &\stackrel{\text{Gleichung 1.33}}{=} Cov\left(\sum_{k=1}^f \lambda_{ik} X_{f,k} + S_{f,j}, W_{f,j}\right) \\ &= \sum_{k=1}^f Cov(\lambda_{ik} X_{f,k}, W_{f,j}) + Cov(S_{f,j}, W_{f,j}) \\ &= \sum_{k=1}^f \lambda_{ik} Cov(X_{f,k}, W_{f,j}) + Cov(S_{f,j}, W_{f,j}) \\ &= \sum_{k=1}^f \lambda_{ik} Cov(X_{f,k}, \sum_{l=1}^f \lambda_{jl} X_{f,l} + S_{f,j}) + Cov(S_{f,j}, \sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k} + S_{f,j}) \\ &= \sum_{k=1}^f \lambda_{ik} \sum_{l=1}^f Cov(X_{f,k}, \lambda_{jl} X_{f,l}) + \underbrace{Cov(X_{f,k}, S_{f,j})}_{=0} + \left(Cov(S_{f,j}, \sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}) + Cov(S_{f,j}, S_{f,j}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^f \lambda_{ik} \sum_{l=1}^f \lambda_{jl} \underbrace{\text{Cov}(X_{f,k}, X_{f,l})}_{=0: k \neq l, =1: k=l} + \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} \underbrace{\text{Cov}(S_{f,j}, X_{f,k})}_{=0} + \underbrace{\text{Cov}(S_{f,j}, S_{f,j})}_{=0: i \neq j, =\text{Var}(S_{f,j}): i=j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^f \lambda_{ik} \lambda_{jk} + \delta_{ij} \text{Var}(S_{f,j}) \\
&= \sum_{k=1}^f \lambda_{ik} \lambda_{jk} + \delta_{ij} \psi_{f,j}^2.
\end{aligned}$$

und für $i = j$ gilt wie gefordert nach Gleichung 1.29:

$$\text{Var}(W_{f,i}) = \text{Cov}(W_{f,i}, W_{f,i}) = \sum_{k=1}^f \lambda_{jk}^2 + \psi_{f,1}^2 = 1. \quad (1.34)$$

Gleichung 1.20 lässt sich mit Gleichung 1.33 nun darstellen als:

$$\tilde{s}_i(t_1) := R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}(t_1) + S_{f,j}(t_1) \right) + \epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2} \quad (1.35)$$

$$\approx R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} W_j(t_1) + \epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2} = s_i(t_1). \quad (1.36)$$

Bezeichne $\tilde{s}_i(t_1)$ in der weiteren Arbeit die Approximation von $s_i(t_1)$ bei Verwendung der Hauptkomponenten des Mehrfaktoren-Modells. $X_{f,k}(t_1)$ für $k \in \{1, 2, \dots, f\}$, $S_{f,j}(t_1)$ für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\epsilon_i(t_1)$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sind alle stochastisch unabhängig voneinander und sind im Rahmen einer Monte-Carlo-Simulation (vergleiche Anhang A.1) zu ziehen.

Bemerkung 1.6

Betrachte die folgenden Sonderfälle:

- (i) $R^2 = 0 \Rightarrow \tilde{s}_i(t_1) = \epsilon_i(t_1)$, d.h. der Asset-Return von Position i ist stochastisch unabhängig von allen anderen eingeführten Prozessen, da $\epsilon_i(t)$ stochastisch unabhängig ist. Dieser Fall tritt bei den Korrelations schätzungen nicht auf und wird nur zu Analysezwecken verwendet.
- (ii) $R^2 = 1 \Rightarrow \tilde{s}_i(t_1) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}(t_1) + S_{f,j}(t_1) \right)$, d.h. der Asset-Return ist vollständig durch systematische Komponenten definiert und wird nicht durch unternehmensspezifische Faktoren beeinflusst. Auch dieser Fall ist eine theoretische Überlegung und tritt bei den Korrelationsschätzungen nicht auf.

1.3.3 Klassifikation von Industrien und Regionen

In diesem Kapitel soll eine adäquate Klassifikation von Industrien und Regionen stattfinden. Dazu führe den schon verwendeten Begriff des *Sektors* ein. Ein Sektor sei eine Kombination von Industrie und Region und die Anzahl an Sektoren sei wie in Kapitel 1.3 mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Jede Position im Portfolio wird einem oder gewichtet mehreren Sektoren zugeordnet. Diese Information steht zur Verfügung (vergleiche Bemerkung 1.12). An dieser Stelle soll zudem auf den Zusammenhang von R^2 und Sektorzugehörigkeit eingegangen werden. Das unternehmensspezifische R^2 wird gemäß Gleichung 1.11 berechnet. Dadurch besitzen alle Positionen, die genau demselben Sektor zugeordnet sind, das gleiche R^2 . Darüber hinaus ist wichtig zu erwähnen, dass das R^2 für Sektoren mit gleicher Industrie und unterschiedlicher Region identisch ist. D.h. es werden Intrasektor-Korrelationen für unterschiedliche Industrien geschätzt und diese dann für alle Sektoren mit der entsprechenden Industrie und allen Regionen verwendet. Tabelle 1.1 zeigt nach welchen Industrien und Tabelle 1.2 nach welchen Regionen dabei unterschieden wird.

Damit entstehen $n = 17$ Industrien * 7 Regionen = 119 Sektoren und für jede

Nummer	Industrie
1	Oil and Gas
2	Materials, Metals and Mining
3	Industrials
4	Construction
5	Business Services
6	Transportation and Trucking
7	Automotive
8	Consumer goods
9	Consumer services
10	Medical services and Pharmaceuticals
11	Financials
12	Real Estate
13	Technology
14	Telecom
15	Utilities
16	Public services
17	without classification

Tabelle 1.1: Klassifikation der Industrien

Position im Portfolio kann die Korrelation zu einer anderen Position mittels der Sektorzugehörigkeit bestimmt werden.

Nummer	Region
1	Nord-Amerika
2	West-Europa
3	Industrialisiertes Asien
4	Ost-Europa + Türkei + Russland
5	Mittlerer Osten + Afrika
6	Amerika Emerging Markets + Brasilien + Argentinien
7	Asien Emerging Markets

Tabelle 1.2: Klassifikation der Regionen**Definition 1.7**

Ein Sektor $k \in \{1, \dots, 119\}$ als eindeutige Kombination von Industrie $i \in \{1, \dots, 17\}$ und Region $j \in \{1, \dots, 7\}$ sei dann über folgende Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} \{1, \dots, 17\} \times \{1, \dots, 7\} &\longrightarrow \{1, \dots, 119\} \\ (i, j) &\longmapsto k = i + (j - 1) * 17. \end{aligned}$$

Beispielsweise bildet die Industrie *Financials* ($i = 11$) in der Region *West-Europa* ($j = 2$) den Sektor $k = 11 + (2 - 1) * 17 = 28$.

1.4 Stochastische LGD

Im folgenden Kapitel wird die Modellierung eines Ausfall-Ereignisses erweitert. Wie bekannt, wird im Falle eines Ausfalls das Produkt von LGD und EAD gebildet und als Verlust zum Portfolioverlust addiert. Dabei ist die LGD bisher als konstant angenommen worden. Im Folgenden wird stattdessen die bereits bekannte LGD als Erwartungswert einer betaverteilten Zufallsvariablen verwendet. Ökonomisch betrachtet wird durch die stochastische LGD die Unsicherheit modelliert, die mit der Liquidation einer ausgefallenen Position verbunden ist. Beispielweise kann ein Rechtsstreit nach dem Ausfall einer Position dazu führen, dass entweder ein sehr großer Teil des EAD bei einem Prozessgewinn oder nur ein sehr kleiner Teil des EAD bei einem Prozessverlust gerettet werden kann. Die erwartete LGD würde in diesem Fall das Niveau widerspiegeln, das dem Streit zugrunde liegt.

Definition 1.8

Die Betaverteilung ist definiert durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x, a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}. \quad (1.37)$$

Außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ wird sie durch $f(x, \cdot, \cdot) = 0$ fortgesetzt. Sie besitzt die reellen Parameter a und b . Um ihre Normierbarkeit zu garantieren, wird $a, b > 0$ gefordert.

Der Vorfaktor $\frac{1}{B(a, b)}$ dient der korrekten Normierung. Der Ausdruck

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (1.38)$$

steht für die Betafunktion, nach der die Verteilung benannt ist. Dabei bezeichnet Γ die Gammafunktion.

Die ersten beiden Momente einer beta-verteilten Zufallsvariable X sind

$$E(X) = \frac{a}{a+b} \quad \text{und} \quad Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}. \quad (1.39)$$

Nun definiere für die beta-verteilte Zufallsvariable \widetilde{LGD} mit

$$E(\widetilde{LGD}) = LGD \quad \text{und} \quad Var(\widetilde{LGD}) = \frac{LGD(1-LGD)}{a+b+1}. \quad (1.40)$$

Definiere weiter $K := a+b+1$ als eine positive Zahl. Die Verteilung von \widetilde{LGD} lässt sich also bestimmen durch ihren Erwartungswert LGD und durch K . Damit lassen sich die Parameter a und b und die Varianz folgern:

$$a = (K-1)LGD \quad , \quad b = (K-1)(1-LGD) \quad \text{und} \quad Var(\widetilde{LGD}) = \frac{LGD(1-LGD)}{K}. \quad (1.41)$$

Die Dichtefunktion $f(x, a, b)$ aus Definition 1.8 ist beispielhaft für verschiedene LGD und K in Abbildung 1.1 dargestellt. Die entsprechenden Werte für a und b sind in der Legende der Grafiken zu finden.

Insgesamt lässt sich die stochastische LGD einer Position $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit Hauptsektor $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ darstellen als:

$$\widetilde{LGD} = F_i^{-1} \circ U_l, \quad (1.42)$$

wobei F_i^{-1} die inverse Verteilungsfunktion einer Betaverteilung mit Parametern a

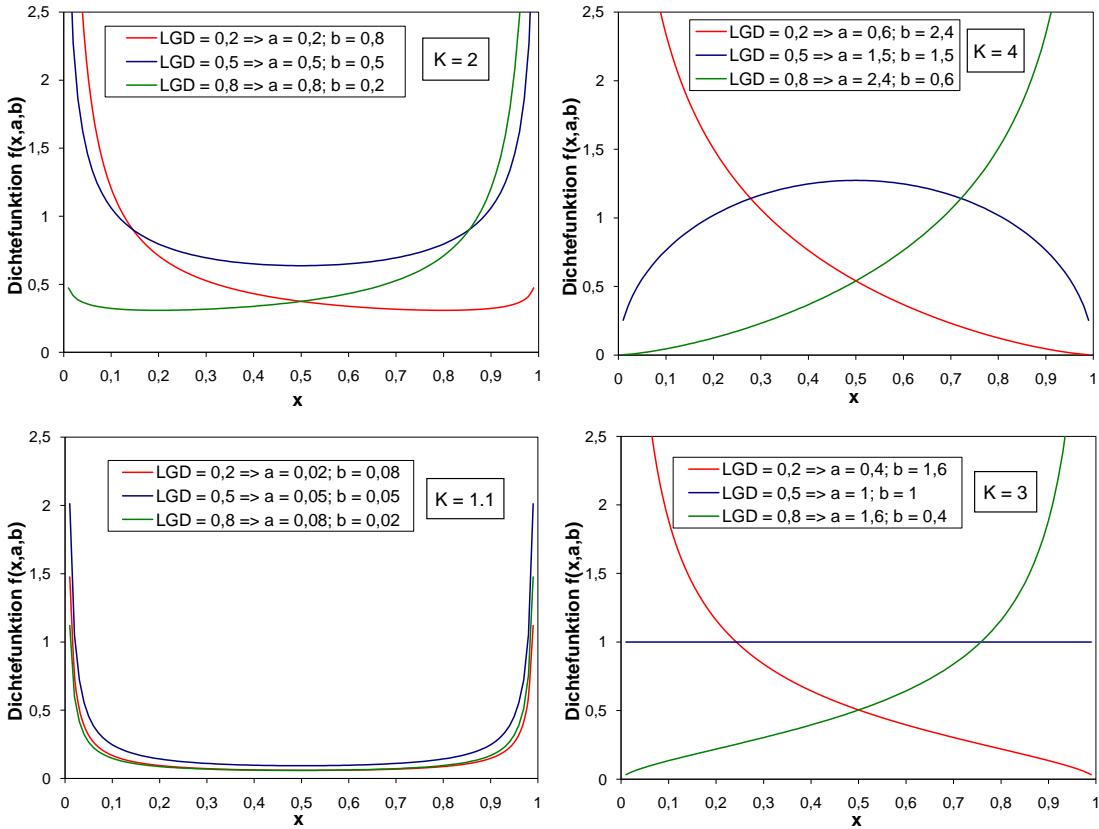


Abbildung 1.1: Dichtefunktion $f(x, a, b)$ einer Beta-Verteilung

und b bezeichne, U_l sei eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$.

Es ist zu erkennen, dass die stochastische LGD von Positionen, die dem gleichen Hauptsektor zugeordnet sind, die gleiche Ziehung der Zufallsvariable U erhalten. Dies führt zu einer starken Abhängigkeit und ist eine konservative Forderung. Die Kovarianz von \widetilde{LGD} für zwei Positionen $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit Hauptsektoren $H(i)$ und $H(j)$ ist dann gegeben durch

$$Cov(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } H(i) \neq H(j) \\ Cov(F_i^{-1} \circ U_l, F_j^{-1} \circ U_l), & \text{falls } H(i) = H(j) = l. \end{cases} \quad (1.43)$$

Beispiel 1.9

Beispielsweise werde $U = 0,5$ gezogen. Für $LGD = 0,5$ und $K = 2$ folgen $a = 0,5$ und $b = 0,5$ und damit $\widetilde{LGD} = 0,5$. Dagegen für $LGD = 0,4$ und $K = 4$ folgen $a = 1,2$ und $b = 1,8$ und damit $\widetilde{LGD} = 0,38$. Siehe Abbildung 1.2.

Bemerkung 1.10

Der unerwartete Verlust, d.h. die Varianz der Verlustverteilung, lässt sich dann

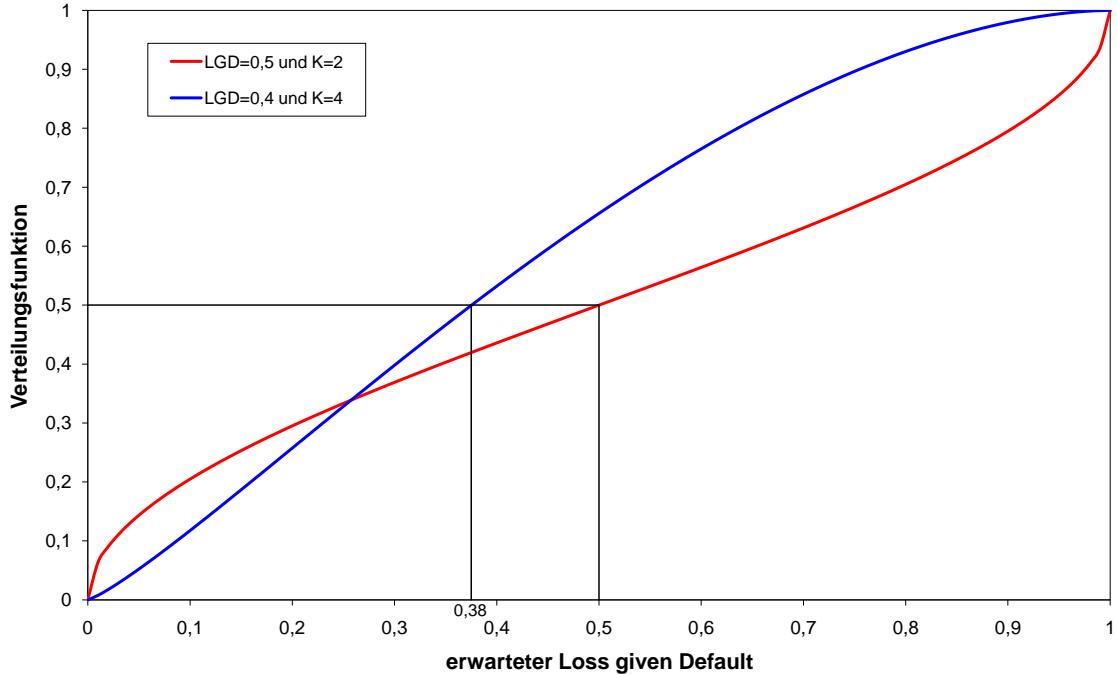


Abbildung 1.2: Verteilungsfunktion mit eingezeichnetem 50%-Quantil

schreiben als

$$\begin{aligned}
 UL_{PF}^2 &= Var(L_{PF}) = Var\left(\sum_{i=1}^m L_i\right) \\
 &= Var\left(\sum_{i=1}^m EAD_i \widetilde{LGD}_i Y(i)\right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i EAD_j Cov\left(\widetilde{LGD}_i Y(i), \widetilde{LGD}_j Y(j)\right) \\
 &= \sum_{i=1}^m EAD_i^2 Var\left(\widetilde{LGD}_i Y(i)\right) + \sum_{i \neq j} EAD_i EAD_j Cov\left(\widetilde{LGD}_i Y(i), \widetilde{LGD}_j Y(j)\right).
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 Var\left(\widetilde{LGD}_i Y(i)\right) &= E\left[\left(\widetilde{LGD}_i Y(i)\right)^2\right] - \left[E\left(\widetilde{LGD}_i Y(i)\right)\right]^2 \\
 &= E\left(\widetilde{LGD}_i^2\right) E(Y(i)^2) - \left[E\left(\widetilde{LGD}_i\right) E(Y(i))\right]^2 \\
 &= \left(Var\left(\widetilde{LGD}_i\right) + LGD_i^2\right) (p_i(1 - p_i + p_i^2)) - LGD_i^2 p_i^2 \\
 &= Var\left(\widetilde{LGD}_i\right) p_i + LGD_i^2 (1 - p_i) p_i
 \end{aligned}$$

$$= \frac{LGD_i(1 - LGD_i)}{K} p_i + LGD_i^2(1 - p_i) p_i$$

und

$$\begin{aligned} & Cov\left(\widetilde{LGD}_i Y(i), \widetilde{LGD}_j Y(j)\right) \\ &= E\left(\widetilde{LGD}_i \widetilde{LGD}_j\right) E(Y(i)Y(j)) - E\left(\widetilde{LGD}_i\right) E\left(\widetilde{LGD}_j\right) E(Y(i))E(Y(j)) \\ &= \left[Cov\left(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j\right) + LGD_i LGD_j \right] [Cov(Y(i), Y(j)) + p_i p_j] \\ &\quad - LGD_i LGD_j p_i p_j \\ &= Cov(Y(i), Y(j)) \left[Cov\left(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j\right) + LGD_i LGD_j \right] \\ &\quad + Cov\left(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j\right) p_i p_j \\ &= (p_{ij} - p_i p_j) \left[Cov\left(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j\right) + LGD_i LGD_j \right] \\ &\quad + Cov\left(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j\right) p_i p_j. \end{aligned}$$

Da die LGD-Stochastik maßgeblich durch den Parameter K beeinflusst wird, beschäftigt sich der folgenden Satz mit dem Einfluss dieses Parameters auf die Varianz einer Verlustverteilung unter ganz bestimmten Voraussetzungen. Die geforderten Voraussetzungen werden von Portfolios aus der Bankenpraxis nicht erfüllt. Daher soll diese theoretische Überlegung nur als Ergänzung verstanden werden.

Satz 1.11

Für ein Portfolio mit $m \in \mathbb{N}$ Positionen mit $EAD_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$ sei jede Position genau einem der $n \in \mathbb{N}$ Sektoren zugeordnet und jeder Sektor erhalte dabei höchstens eine Position (d.h. $m \leq n$).

Seien $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ mit $1 < K_1 < K_2$ die Parameter der LGD-Stochastiken. Der Erwartungswert der LGD-Stochastiken sei für alle Positionen identisch: $LGD_i = LGD_j \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Für $l \in \{1, 2\}$ bezeichne $PF(K_l)$ das Portfolio, in dem jede Position den Parameter K_l für die LGD-Stochastik verwendet. Dann gilt

$$Var(L_{PF(K_1)}) \geq Var(L_{PF(K_2)}). \quad (1.44)$$

Beweis:

Da alle Positionen unterschiedlichen Sektoren zugeordnet sind, sind $\widetilde{LGD}_1, \dots, \widetilde{LGD}_m$ stochastisch unabhängig und es gilt $Cov\left(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j\right) = 0$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$

mit $i \neq j$. Dann gilt mit Bemerkung 1.10 für alle $r \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} Var(L_{PF(K_r)}) &= \sum_{i=1}^m EAD_i^2 \left(\frac{LGD_i(1 - LGD_i)}{K_r} p_i + LGD_i^2(1 - p_i)p_i \right) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} EAD_i EAD_j ((p_{ij} - p_i p_j) + LGD_i LGD_j). \end{aligned}$$

Da $EAD_i, p_i, LGD_i, p_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$, sind alle Summanden nicht negativ und da $1 < K_1 < K_2$ folgt die Behauptung des Satzes aus

$$\frac{LGD_i(1 - LGD_i)}{K_1} \geq \frac{LGD_i(1 - LGD_i)}{K_2}. \quad (1.45)$$

□

Mit anderen Worten ist unter benannten Voraussetzungen die Verwendung eines niedrigen Wertes für den Parameter K eine konservative Wahl verglichen mit einem höheren Wert. Konservativ meint in diesem Zusammenhang, dass ein kleiner K -Wert eine vorsichtige Schätzung ist und die Varianz des Portfolioverlustes dadurch größer ist als bei einer weniger vorsichtigen Schätzung. In Abbildung 1.1 ist die Dichtefunktion $f(x, a, b)$ für unterschiedliche K -Werte aufgezeichnet. Dort lässt sich die gerade getroffene Aussage auch anschaulich überprüfen.

Bemerkung 1.12

Folgende Variablen dieses Kapitels stehen für die Sensitivitätsanalyse als Input zur Verfügung und werden als gegeben angenommen. Betrachte ein Portfolio \mathcal{P} . Für jede Position $i \in \mathcal{P}$ sei bekannt:

- Exposure at Default EAD_i (Kapitel 1.1)
- Loss given Default LGD_i (Kapitel 1.1)
- Ausfallwahrscheinlichkeit p_i (Kapitel 1.1.1)
- Sektorzugehörigkeit ω_i (Kapitel 1.3)

Außerdem bekannt sind die folgenden Modell-Parameter:

- Faktorladungen Λ_f und Faktoren X_f (Kapitel 1.3.2)
- Korrelation innerhalb eines Sektors R^2 (Kapitel 1.3)
- Varianz-Parameter K_i der LGD-Stochastik (Kapitel 1.4)

Kapitel 2

Zeitdynamisches Kreditportfoliomodell

2.1 Mehrperiodigkeit und Ratingmigrationen

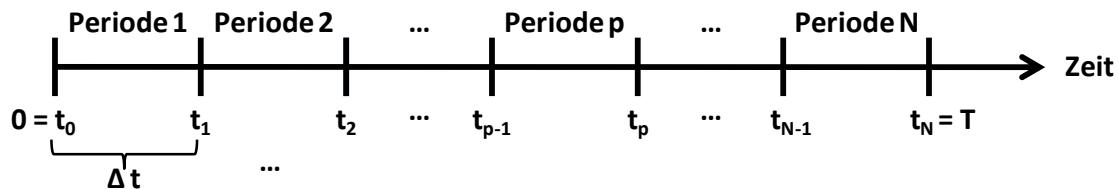


Abbildung 2.1: Diskrete Zeitstruktur

Bisher wurde ein statisches Portfoliomodell betrachtet, d.h. der Zeithorizont bestand aus einer Periode. In diesem Kapitel wird das Modell zu einem zeitdynamischen Kreditportfoliomodell erweitert. Dazu wird der derzeitige Zeitpunkt 0 und endliche Zeithorizont T betrachtet. Das Intervall $[0, T]$ soll in N Intervalle mit der identischen Länge Δt geteilt werden, welche als Perioden interpretiert werden können. Definiere $\Delta t := \frac{T}{N}$, die Anzahl der Intervalle ist dann $N = \frac{T}{\Delta t}$. Die Endpunkte der Intervalle werden mit $t_p := p * \Delta t$ für $p = 1, \dots, N$ bezeichnet. Außerdem sei $t_0 := 0$. Die Menge dieser Punkte definiere als $\mathcal{T} := \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$. Sie bilden die diskreten Handelszeitpunkte des Portfoliomodells. Die Periode $p \in \{1, \dots, N\}$ bestehe aus dem Intervall $(t_{p-1}, t_p]$. Abbildung 2.1 zeigt das Ergebnis dieser Einteilung.

Es gelte:

- Ein Handel finde in diskreter Zeit in den Zeitpunkten t_0, t_1, \dots, t_{N-1} statt.
- Der risikolose Zinssatz sei konstant gleich 0.

- Es fallen keine Transaktionskosten oder Steuern an.
- Ein Ausfall erzeuge keine Abwicklungs- oder Reorganisationskosten.

Bemerkung 2.1

Die Idee einer mehrperiodigen Betrachtung ist eigentlich die Berücksichtigung von unterjährigen Kreditereignissen. Daher wäre eine Annahme von $\tilde{s}_i(t_N) \sim N(0, 1)$ naheliegend. Diese wird jedoch nicht getroffen. Stattdessen wird auch bei mehrperiodiger Simulation jede einzelne Periode als standardnormalverteilt angenommen. Dieses hat den Grund, dass standardnormalverteilte Zufallsvariablen bei einer Monte-Carlo-Simulation einfacher zu verwenden sind. Daher gilt unabhängig von der Anzahl an Perioden:

$$\tilde{s}_i(t_1) \sim N(0, 1). \quad (2.1)$$

Bemerkung 2.2

Die Definition 1.1 eines *Ausfalls* einer Position i im statischen Modell mit nur einer Periode gelte nun für alle Zeitpunkte $t_p \in \mathcal{T}$ der mehrperiodigen Portfoliomodells. D.h. es wird am Ende der Periode festgestellt, ob ein Unternehmen ausgefallen ist. Der Asset-Value-Prozess kann im Laufe der Periode die Ausfallschranke unterschreiten, aber das Unternehmen wird nur als *ausgefallen* bezeichnet, wenn die Schranke auch am Ende der Periode getroffen oder unterschritten ist.

Es gilt nach Gleichung 1.36 für alle $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\tilde{s}_i(t_1) = R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}(t_1) + S_{f,j}(t_1) \right) + \epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2}.$$

Da $X_f(t_1)$, $S_f(t_1)$ und $\epsilon_i(t_1)$ stochastisch unabhängig sind und als Zuwächse von Wiener-Prozessen zu interpretieren sind, gilt wieder mit Gleichung 1.36:

$$\begin{aligned} & \tilde{s}_i(t_1 + \Delta t) - \tilde{s}_i(t_1) \\ &= R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} (X_{f,k}(t_1 + \Delta t) - X_{f,k}(t_1)) + (S_{f,j}(t_1 + \Delta t) - S_{f,j}(t_1)) \right) \\ & \quad + (\epsilon_i(t_1 + \Delta t) - \epsilon_i(t_1)) \sqrt{1 - R_i^2} \\ & \sim R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} (X_{f,k}(\Delta t) - X_{f,k}(0)) + (S_{f,j}(\Delta t) - S_{f,j}(0)) \right) \\ & \quad + (\epsilon_i(\Delta t) - \epsilon_i(0)) \sqrt{1 - R_i^2} \end{aligned}$$

$$= \tilde{s}_i(\Delta t) - \tilde{s}_i(0) = \tilde{s}_i(\Delta t).$$

Und die Intervalle sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt:

$$\tilde{s}_i(\Delta t_p) := \tilde{s}_i(t_p) - \tilde{s}_i(t_{p-1}) \sim \tilde{s}_i(\Delta t), \quad p \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.2)$$

Dann gilt für den Risikohorizont $t_N \in \mathcal{T}$:

$$\tilde{s}_i(t_N) \sim N(0, N). \quad (2.3)$$

Im Rahmen dieser mehrperiodigen Betrachtung soll nun die Einstufung des Asset-Return \tilde{s}_i auf mehrere Zustände erweitert werden.

Bisher ist das Kreditportfoliomodell auf zwei Zustände beschränkt: entweder eine Position im Portfolio ist am Ende der Periode ausgefallen oder nicht. Sofern sie nicht ausgefallen ist, wird keine Wertveränderung berücksichtigt. Diese mögliche Wertveränderung soll nun berücksichtigt werden. Ziel ist, den Einfluss von positiven wie negativen Ratingveränderungen zu modellieren und als Ertrag bzw. Verlust zu interpretieren. Der Portfolioverlust am Ende der Periode ist dann nicht mehr ausschließlich die Summe von $LGD * EAD$ der ausgefallenen Positionen, sondern zusätzlich werden Erträge bzw. Verluste durch Ratingveränderungen der nicht ausgefallenen Positionen addiert.

Zu welchen Zeitpunkten diese Ratingveränderungen als Erträge bzw. Verluste gewertet werden, bestimmt die Liquidationszeit jeder Position. Sie sei ein Zähler, dessen Startwert gegeben ist (vergleiche Bemerkung 2.15). Dieser muss ein Vielfaches der verwendeten Periodenlänge Δt sein, da nur zum Ende einer Periode ein Gewinn bzw. Verlust berücksichtigt werden kann. Sobald die Liquidationszeit abgelaufen ist, wird der entstandene Ertrag bzw. Verlust realisiert.

Nun stellt sich die Frage, wie zum einen mit ausfallenden Positionen und zum anderen mit Positionen mit ablaufener Liquidationszeit umgegangen werden soll. Dies soll in folgender Bemerkung beantwortet werden.

Bemerkung 2.3

Der grundsätzliche Ansatz ist, ein möglichst konstantes Risiko-Level in allen Perioden zu halten. Folgendermaßen wird dieser Ansatz umgesetzt:

1. Ausfallende Positionen

Jeder Ausfall wird am Ende einer Periode festgestellt. Position i falle am Ende von Periode $p - 1$ aus. Um ein konstantes Risiko-Level zu halten, wird die

ausgefallene Position in der nächsten Periode ersetzt und zwar wird Position i in Periode p wieder auf seine Ausgangssituation aus Periode 1 gesetzt. Dieses vorgehen verhindert, dass sich das Risiko-Niveau in Periode p , beispielsweise durch einen in Periode $p-1$ ausgefallenen Hedge, ändert. Kritisch anzumerken ist, dass mehrmaliges Ausfallen einer Position durch dieses Vorgehen möglich wird.

2. Liquidationszeit einer Position

Jede Position besitzt eine feste Liquidationszeit. Diese kann auch als Kapitalbindungsduer interpretiert werden und bezeichnet die Anzahl an Perioden, die die entsprechende Position gehalten wird. Zum Ende der Liquidationszeit einer Position wird angenommen, dass diese verkauft wird. Der Gewinn bzw. Verlust wird zum Portfolioverlust addiert. Nach Ablauf der Liquidationszeit wird die Position direkt mit den identischen Eigenschaften wie zu Beginn der Liquidationszeit neu angelegt. Auch dies dient dem Ziel, ein konstantes Risiko-Level zu halten.

Darüber hinaus wird am Risikohorizont $t_N = T$ unabhängig von der Liquidationszeit für jede Position der entstandene Gewinn bzw. Verlust durch Ratingveränderung oder Ausfall festgestellt und zum Portfolioverlust addiert.

Bemerkung 2.4

Der Portfolioverlust zu einem Zeitpunkt $t_p \in \mathcal{T}$ beinhaltet aufgrund obiger Annahmen ausschließlich realisierte Verluste und stellt keine Bewertung des Portfolios dar. Vor Ablauf der Liquidationszeit einer Position kann sich dessen Rating drastisch verschlechtern, ohne dass sich diese Entwicklung im Portfolioverlust zeigt.

Die Modellierung von Ratingzuständen und der Liquidationszeit wird nun durchgeführt. Dazu führe einen Prozess $C := (C(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}}$ für die Ratingzustände (dieser ersetzt den Prozess der Ausfallindikatoren $Y = (Y_{t_p})_{t_p \in \mathcal{T}}$) und einen Prozess $M := (M(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}}$ für die Liquidationszeit ein. C und M hängen voneinander ab und werden nun definiert:

Definition 2.5

Dazu sei $Q := \{0, 1, \dots, q\}$ die Menge aller möglichen Ratings $0, 1, \dots, q$ in ansteigender Reihenfolge, d.h. 0 bezeichne einen Ausfall, 1 das schlechteste Rating vor

einem Ausfall und q das beste Rating der Skala. Der Ratingprozess

$$C = (C(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}} = (C_1(t_p), \dots, C_m(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}}$$

nehme Werte in $Q^m = \{0, 1, \dots, q\}^m$ an. Also bedeutet für $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$C_i(t_p) = \begin{cases} q, & \text{falls } i\text{-te Position zum Zeitpunkt } t_p \text{ Rating } q \text{ besitzt} \\ \vdots & \vdots \\ 1, & \text{falls } i\text{-te Position zum Zeitpunkt } t_p \text{ Rating 1 besitzt} \\ 0, & \text{falls } i\text{-te Position zum Zeitpunkt } t_p \text{ ausgefallen ist.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Das Rating $C_i(t_p)$ einer Position i zu einem Zeitpunkt t_p hängt ab vom Rating $C_i(t_{p-1})$ zu Beginn der Periode p , dem Asset-Return $\tilde{s}_i(\Delta t_p)$ und der Liquidationszeit $M_i(t_{p-1})$. Dieser Zusammenhang lässt sich für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und rekursiv für alle $t_p \in \mathcal{T}$ ausdrücken als

$$C_i(t_p) := \begin{cases} \varphi_{i,\Delta t_p}(C_i(t_0), \tilde{s}_i(\Delta t_p)) & : C_i(t_{p-1}) = 0 \text{ oder } M_i(t_{p-1}) = m_{i,0} \\ \varphi_{i,\Delta t_p}(C_i(t_{p-1}), \tilde{s}_i(\Delta t_p)) & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Die Abbildung $\varphi_{i,\Delta t_p}$ wird nach der Liquidationszeit definiert:

Definition 2.6

Die Liquidationszeit lässt sich als die Anzahl an Perioden interpretieren, die für einen Verkauf einer Position benötigt werden. Der Prozess

$$M = (M(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}} = (M_1(t_p), \dots, M_m(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}}$$

nehme Werte in $\{1, 2, \dots, N\}^m$ an. $M_i(t_p)$ bezeichnet die Liquidationszeit von Position i zum Zeitpunkt t_p . Definiere für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ den Startwert des Prozesses:

$$M_i(t_0) := m_{i,0} \quad \text{mit} \quad m_{i,0} \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (2.6)$$

Damit definiere für Position $i \in \{1, \dots, m\}$ rekursiv für alle $t_p \in \mathcal{T}$:

$$M_i(t_p) := ((M_i(t_{p-1}) - 1)\mathbb{1}_{\{M_i(t_{p-1}) > 1\}} + m_{i,0}\mathbb{1}_{\{M_i(t_{p-1}) = 1\}}) \mathbb{1}_{\{C_i(t_p) > 0\}} + m_{i,0}\mathbb{1}_{\{C_i(t_p) = 0\}} \quad (2.7)$$

$$= \begin{cases} M_i(t_{p-1}) - 1, & \text{falls } M_i(t_{p-1}) > 1 \text{ und } C_i(t_p) > 0 \\ m_{i,0}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Mit anderen Worten wird die Liquidationszeit um eins nach Ablauf einer Periode gesenkt, wenn die Position nicht ausgefallen ist und die Liquidationszeit vor der betrachteten Periode nicht eins war. Andernfalls wird sie auf den Startwert $m_{i,0}$ gesetzt.

Die Definition der Abbildung $\varphi_{i,\Delta t_p}$ wird nun vorbereitet. Bezeichne $Q = \{0, 1, \dots, q\}$ wieder den Zustandsraum der Ratingklassen. Außerdem bezeichne $c_{i,j,k}(\Delta t)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j, k \in Q$ die Schranken, die den Definitionsbereich \mathbb{R} von $\tilde{s}_i(\Delta t_p)$ in Intervalle entsprechend dem Startrating und den Übergangswahrscheinlichkeiten in die verschiedenen Zielratings teilen. Für das Startrating j sind die Schranken in Abbildung 2.2 eingezeichnet. Die Bestimmung der Schranken wird in Kapitel 2.1.1 durchgeführt.

Bemerkung 2.7

In Kapitel 2.1.1 wird gezeigt, dass die Schranken $c_{i,j,k}(\Delta t)$ mit $j, k \in Q$ für alle Perioden identisch sind.

Definition 2.8

Sei $C_i(t_{p-1}) = j$ für $j \in Q$, dann lässt sich definieren:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,\Delta t_p} : \quad Q \times \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ (j, \tilde{s}_i(\Delta t_p)) &\longmapsto \max(k \in Q | c_{i,j,k}(\Delta t) < \tilde{s}_i(\Delta t_p)). \end{aligned}$$

Da der Zustand 'Ausfall' eine Ratingskala nach unten abschließt, setze $c_{i,j,0}(\Delta t) := -\infty$. Außerdem sei $c_{i,j,q+1}(\Delta t) := \infty$.

Gelte beispielsweise $C_i(t_{p-1}) = j \neq 0$. Dann folgt mit Abbildung $\varphi_{i,\Delta t_p}$ und $k \in \{1, \dots, q\}$:

$$C_i(t_p) = \varphi_{i,\Delta t_p}(j, \tilde{s}_i(\Delta t_p)) = k \quad \text{für} \quad \tilde{s}_i(\Delta t_p) \in (c_{i,j,k}(\Delta t), c_{i,j,k+1}(\Delta t)]. \quad (2.9)$$

Bemerkung 2.9

Der Prozess $(C(t_p), M(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}}$ ist eine zweidimensionale Markovkette. Und zwar ist $(C(t_0), M(t_0))$ gegeben. Dann lässt sich mit Gleichung 2.5 $C(t_1)$ bestimmen. Dieses

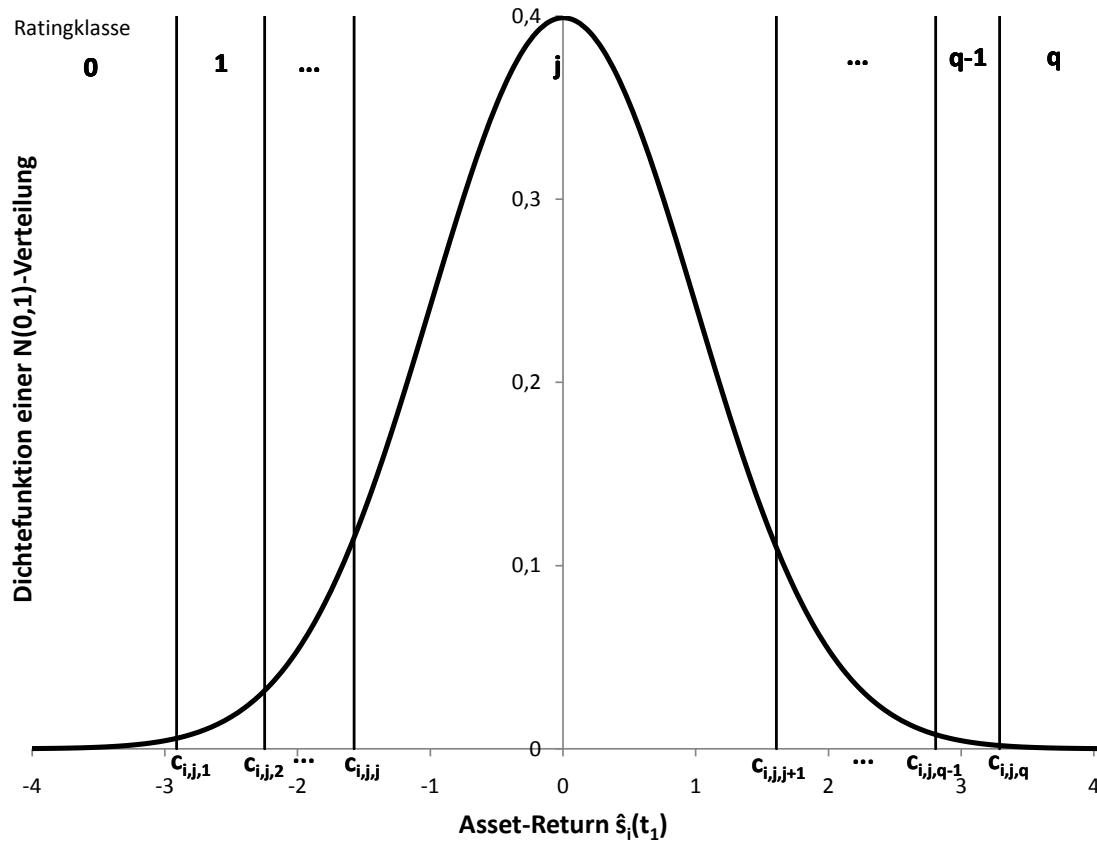


Abbildung 2.2: Schranken der Ratingklassen bei Startrating j

liefert mit Gleichung 2.7 $M(t_1)$. Somit ist $(C(t_1), M(t_1))$ nur durch den Zeitpunkt t_0 bestimmt und rekursiv folgt die Markoveigenschaft für die ganze Kette.

Als nächstes stellt sich die Frage, welche Wertveränderung eine Position durch eine Ratingveränderung widerfährt, d.h. welcher Ertrag bzw. Verlust dadurch entsteht.

Definition 2.10

Dazu definiere den Prozess

$$VG := (VG_{1,t_p}, \dots, VG_{m,t_p})_{t_p \in \mathcal{T}}$$

mit Werten in \mathbb{R}^m . Dabei bezeichne VG_{i,t_p} den Wert von Position i in $t_p \in \mathcal{T}$. Dieser

hängt vom Ratingprozess C ab:

$$VG_{i,t_p}(C_i(t_p)) := \begin{cases} vg_{i,q}, & \text{falls } C_i(t_p) = q \\ \vdots & \vdots \\ vg_{i,1}, & \text{falls } C_i(t_p) = 1 \\ vg_{i,0}, & \text{falls } C_i(t_p) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

mit $vg_{i,0} \leq vg_{i,1} \leq \dots \leq vg_{i,q} \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.11

In dieser Definition wird deutlich, dass keine Diskotierung vorgenommen wird. Ist das Rating einer Position in zwei unterschiedlichen Zeitpunkten identisch, dann ist auch der Wert dieser Position in beiden Zeitpunkten identisch. Sei beispielsweise $C_i(t_{p-3}) = C_i(t_p) = r \leq q$ mit $t_{p-3}, t_p \in \mathcal{T}$, dann gilt

$$VG_{i,t_{p-3}}(C_i(t_{p-3})) = vg_{i,r} = VG_{i,t_p}(C_i(t_p)). \quad (2.11)$$

Der realisierte Verlust L_i von Position $i \in \{1, \dots, m\}$ in $t_p \in \{t_1, \dots, t_{N-1}\}$ wird nun mithilfe des Wertprozesses VG definiert. L_i ist positiv, sofern ein Verlust aufgetreten ist und negativ, wenn Ratingverbesserungen einen Gewinn zum Portfolioverlust beitragen. Es wird definiert:

$$L_i(t_p) := (VG_{i,t}(C_i(t_0)) - VG_{i,t}(C_i(t_p))) \mathbb{1}_{\{C_i(t_p)=0\} \cup \{M_i(t_p)=m_{i,0}\}} \quad (2.12)$$

$$= \begin{cases} (VG_{i,t}(C_i(t_0)) - VG_{i,t}(C_i(t_p))) & \text{falls } C_i(t_p) = 0 \text{ oder } M_i(t_p) = m_{i,0} \\ 0 & \text{falls } C_i(t_p) > 0 \text{ und } M_i(t_p) < m_{i,0} \end{cases} \quad (2.13)$$

und da für $t_p = t_N$ nach Bemerkung 2.3 unabhängig von der Liquidationszeit alle Positionen verkauft werden, gilt

$$L_i(t_N) = (VG_{i,t}(C_i(t_0)) - VG_{i,t}(C_i(t_N))). \quad (2.14)$$

Bemerkung 2.12

Ein *Ausfall* soll bei Verwendung von zwei und $q + 1$ möglichen Zuständen (d.h. der Prozesse Y oder C) den gleichen Verlust verursachen. Bei zwei Zuständen ist der Verlust durch einen Ausfall von Position i gleich $EAD_i * LGD_i$ für $i = 1, 2, \dots, m$. Damit dieses im Fall von $q + 1$ Zuständen ebenfalls so ist, ist für einen Ausfall von

Position i (also $C_i(t_p) = 0$) für $t_p \in \mathcal{T}$ und $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ gegeben:

$$VG_{i,t_p}(C_i(t_p)) = VG_{i,t_p}(0) = vg_{i,0} := VG_{i,t_p}(C_i(t_0)) - EAD_i * LGD_i. \quad (2.15)$$

Fällt eine Position $i \in \{1, \dots, m\}$ in t_p aus, dann entsteht mit Gleichung 2.15 der Verlust

$$\begin{aligned} L_i(t_p) &= (VG_{i,t}(C_i(t_0)) - VG_{i,t}(C_i(t_p))) \\ &= (VG_{i,t}(C_i(t_0)) - VG_{i,t}(0)) \\ &= (VG_{i,t}(C_i(t_0)) - (VG_{i,t_p}(C_i(t_0)) - EAD_i * LGD_i)) \\ &= EAD_i * LGD_i \end{aligned}$$

und die Konsistenz zu einem Ausfall in Kapitel 1 ist sichergestellt.

Die definierten Prozesse bringen eine veränderte Darstellung der Verlustfunktion mit sich. Bezeichne L_{PF} den summierten Portfolioverlust vom Ausgangszeitpunkt t_0 bis zum Risikohorizont t_N . $L_{PF}(t_p)$ sei dann der Portfolioverlust in Periode p , d.h. im Zeitpunkt t_p . Und $L_i(t_p)$ sei der Verlust von Position i im Zeitpunkt t_p . Mit diesen Bezeichnungen und obigen Definitionen gilt folgendes:

$$\begin{aligned} L_{PF} &= \sum_{p=1}^N L_{PF}(t_p) \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^m L_i(t_p) \\ &= \sum_{i=1}^m L_i(t_N) + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m L_i(t_p) \\ &= \sum_{i=1}^m (VG_{i,t}(C_i(t_N)) - VG_{i,t}(C_i(t_{N-1}))) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m (VG_{i,t}(C_i(t_p)) - VG_{i,t}(C_i(t_{p-1}))) \mathbb{1}_{\{C_i(t_p)=0\} \cup \{M_i(t_p)=m_{i,0}\}}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich der summierte Portfolioverlust L_{PF} durch die Markovkette

$$(C(t_p), M(t_p))_{t_p \in \mathcal{T}}$$

und den Wertprozess VG berechnen. Die Bestimmung der Migrationsschranken, die dabei verwendet werden, wird wie angekündigt als nächstes durchgeführt.

2.1.1 Bestimmung der Migrationsschranken

Die Wahrscheinlichkeit für eine Migration von Rating $j \in Q$ nach Rating $k \in Q$ von Position $i \in \{1, \dots, m\}$ in einer Periode werde mit $p_{i,j,k}(\Delta t)$ bezeichnet. Die einperiodige Migrationsmatrix von Position $i \in \{1, \dots, m\}$ sei eine stochastische $(q+1) \times (q+1)$ -Matrix und gegeben durch

$$\mathcal{M}_i(\Delta t) = (p_{i,j,k}(\Delta t))_{j,k \in Q} \quad (2.16)$$

mit

$$p_{i,j,k}(\Delta t) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^q p_{i,j,k}(\Delta t) = 1. \quad (2.17)$$

Bemerkung 2.13

Die Migrationsmatrix $\mathcal{M}_i(\Delta t)$ ist anhand von historischen Ratingmigrationen geschätzt und wird als gegeben angenommen.

Es gilt

$$p_{i,j,k}(\Delta t) = P(C_i(\Delta t) = k | C_i(0) = j) = P(C_i(t_p) = k | C_i(t_{p-1}) = j) =: p_{i,j,k}(\Delta t_p), \quad (2.18)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit für eine Migration von Rating $j \in Q$ nach Rating $k \in Q$ in einer Periode ist für alle Perioden $p \in \{1, \dots, N\}$ identisch.

Bezeichne

$$\mathcal{C}_i(\Delta t) = (c_{i,j,k}(\Delta t))_{j,k \in Q} \quad (2.19)$$

die Matrix der Schranken, die folgendermaßen mit den Migrationswahrscheinlichkeiten verknüpft sind:

$$p_{i,j,k}(\Delta t) = P(\tilde{s}_i(\Delta t_p) \leq c_{i,j,k}(\Delta t)) = \Phi(c_{i,j,k}(\Delta t)), \quad (2.20)$$

wobei Φ wieder die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung bezeichnet.

Damit können die Schranken berechnet werden. Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j, k \in Q$ gilt mit Gleichung 2.18:

$$\begin{aligned} c_{i,j,k}(\Delta t) &= \Phi^{-1}(P(\tilde{s}_i(\Delta t_p) \leq c_{i,j,k}(\Delta t))) = \Phi^{-1}(P(C_i(\Delta t) < k | C_i(0) = j)) \\ &= \Phi^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1} p_{i,j,l}(\Delta t)\right) = \Phi^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1} p_{i,j,l}(\Delta t_p)\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_i(\Delta t)$ beinhaltet also die Schranken, die für alle Perioden $p \in \{1, \dots, N\}$ identisch sind.

Eine Bestimmung von Migrationsschranken wird im folgenden einperiodigen Beispiel gemacht:

Rating k	Letterrating	$p_{i,4,k}(t_1)$	$\sum_{i=0}^k p_{i,4,k}(t_1)$	Schranke
0	D (default)	0.0018	0.0018	$-\infty$
1	CCC-C	0.0024	0.0042	-2.9112
2	B	0.0081	0.0123	-2.6356
3	BB	0.0454	0.0577	-2.2476
4	BBB	0.8883	0.9460	-1.5744
5	A	0.0515	0.9975	1.6072
6	AA	0.0020	0.9995	2.8070
7	AAA	0.0005	1.0000	3.2906

Tabelle 2.1: Schranken der Migrationswahrscheinlichkeiten bei Ausgangsrating BBB

Beispiel 2.14

Setze $q = 7$ und die Identifizierung der Ratings sei wie in Tabelle 2.1 dargestellt den Standard & Poor's-Letteratings entnommen. Zur Interpretation der Letteratings siehe [11]. Für das Ausgangsrating gelte $C_i(t_0) = 4$, was dem Letterating *BBB* entsprechen soll. Die Migrationswahrscheinlichkeiten $p_{i,4,0}(t_1), \dots, p_{i,4,7}(t_1)$ seien geschätzt und sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

Mit diesen Schranken lässt sich $\tilde{s}_i(t_1)$ unterteilen, was in Abbildung 2.3 gezeigt wird.

Bemerkung 2.15

Folgende Variablen von Kapitel 2.1 stehen zusätzlich zu den Variablen aus Kapitel 1 (vergleiche Bemerkung 1.12) für die Sensitivitätsanalyse als Input zur Verfügung und werden als gegeben angenommen. Betrachte ein Portfolio \mathcal{P} . Für jede Position $i \in \mathcal{P}$ sei bekannt:

- Ausgangsrating $C_i(t_0)$
- Migrationswahrscheinlichkeiten $p_{i,j,k}$ für alle Ratingklassen $j, k \in Q$
- Zustände $vg_{i,1}, \dots, vg_{i,q}$ des Preisprozesses $VG_{i,t}$
- Liquidationszeit $M_i(t_0)$

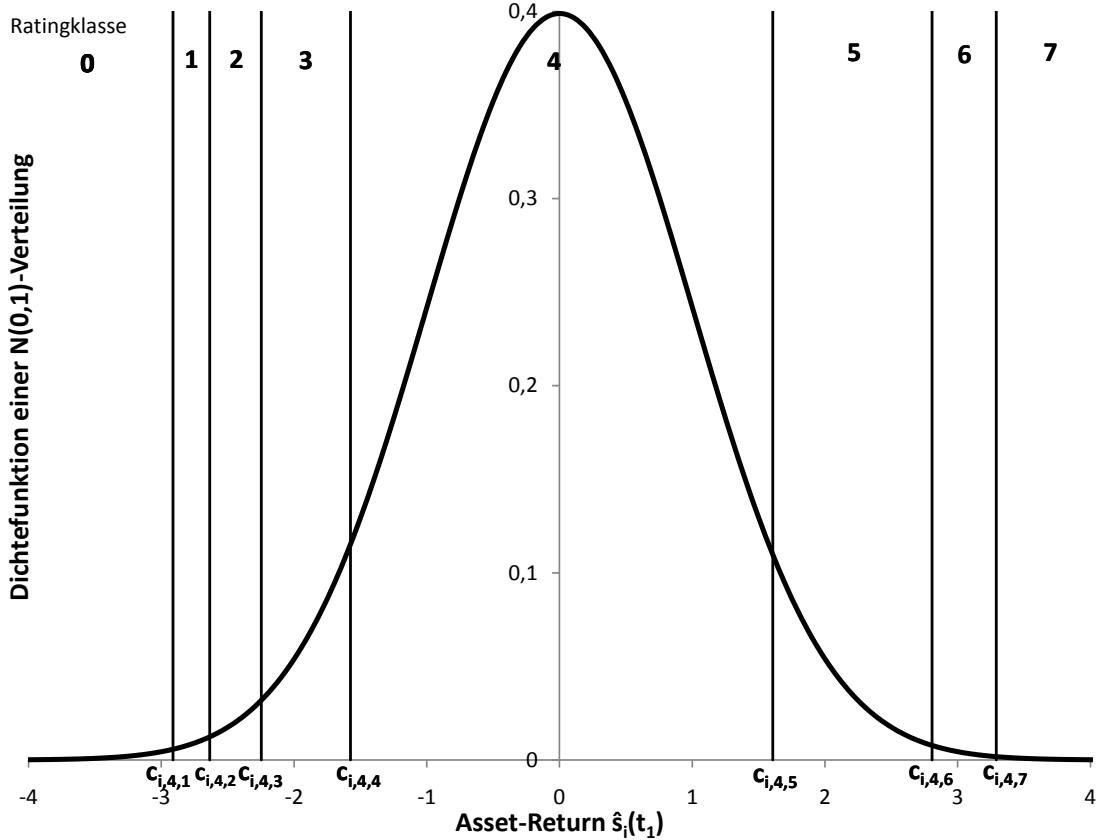


Abbildung 2.3: Schranken der Ratingklassen bei Startrating $C_i(t_0) = 4$

2.2 Risikomaß

Bezeichne $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Menge von endlichen reellen Zufallsvariablen, definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Finanzielles Risiko wird definiert als $\mathfrak{R} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, was als Portfolioverlust über einen bestimmten Zeithorizont T interpretiert werden kann. Ein Risikomaß ist dann jede reelle Abbildung $\gamma : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Ein sehr populäres Risikomaß ist der Value at Risk (nach [9]):

Definition 2.16

Gegeben sei ein Kofidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ und eine Verlustvariable L mit $E(L) < \infty$ und Verteilungsfunktion F_L . Der Value at Risk zum Konfidenzniveau α ist dann definiert als

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(L > x) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\}. \quad (2.21)$$

Mit anderen Worten beschreibt er den Wert x , der höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit α überschritten wird.

lichkeit von $1 - \alpha$ vom Portfolioverlust überschritten wird.

Nun definiere den Expected Shortfall (nach [9]):

Definition 2.17

Für eine Verlustvariable L mit $E(L) < \infty$ ist der Expected Shortfall zu einem Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ definiert als

$$ES_\alpha(L) = E(L|L > VaR_\alpha(L)). \quad (2.22)$$

Bemerkung 2.18

Value at Risk und Expected Shortfall stehen in folgendem Verhältnis zueinander:

$$ES_\alpha \geq VaR_\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.23)$$

Außerdem wird nun das ökonomische Kapital definiert:

Definition 2.19

Gegeben sei ein Kofidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ und eine Verlustverteilung L mit $E(L) < \infty$. Das ökonomische Kapital zum Konfidenzniveau α ist dann definiert als

$$EC_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) - E(L). \quad (2.24)$$

2.2.1 Bestimmung der Risikobeuräge

In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten modelliert, wie der Value at Risk anteilig auf die Positionen im Portfolio zu verteilen ist. Der Anteil am Value at Risk, der einer Position zugeordnet wird, kann als deren Risikobeuräge bezeichnet werden. Genauer sei der Risikobeuräge $RC_\alpha^i \in \mathbb{R}$ einer Position $i \in \{1, \dots, m\}$ ein Anteil am VaR_α mit $\alpha \in (0, 1)$. Die Verteilung dieser Anteile wird zunächst über den Expected Shortfall definiert und anschließend als alternative Variante über die Standardabweichung der Verlustverteilung. Die Rückverteilung über die Standardabweichung wird für den *default-mode* durchgeführt, d.h. es werden ausschließlich Ausfall-Ereignisse für die Verlustfunktion berücksichtigt.

Bestimmung der Risikobeuräge mittels Expected Shortfall:

Im Folgenden wird der ES_α additiv in Summanden zerlegt und dient zur Definition besagter Anteile.

Der Expected Shortfall lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} ES_{\alpha}^{PF}(L) &= E(L_{PF}|L_{PF} > VaR_{\alpha}(L)) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^m L_i | L_{PF} > VaR_{\alpha}(L)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m E(L_i | L_{PF} > VaR_{\alpha}(L)), \end{aligned}$$

wobei $E(L_i | L_{PF} > VaR_{\alpha}(L))$ im Allgemeinen nicht ES_{α}^i , dem Expected Shortfall von Position i zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$, entspricht. Dann wird der Risikobeitrag folgendermaßen definiert:

Definition 2.20

Der Risikobeitrag RC_{α}^i einer Position $i \in \{1, \dots, m\}$ sei ihr Beitrag zum Value at Risk zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$. Dieser Risikobeitrag werde über $ES_{\alpha}^{PF(i)}$ bestimmt:

$$RC_{\alpha}^i = \frac{E(L_i | L_{PF} > VaR_{\alpha}(L))}{ES_{\alpha}^{PF}} VaR_{\alpha}. \quad (2.25)$$

Bestimmung der Risikobeiträge mittels Standardabweichung:

In einem ersten Schritt wird die Standardabweichung $UL_{PF} = \sqrt{Var(L_{PF})}$ der Verlustverteilung additiv in folgende Positionen $i \in \{1, \dots, m\}$ geteilt:

$$UL_i = EAD_i \frac{\partial(UL_{PF})}{\partial(EAD_i)} \implies \sum_{i=1}^m UL_i = UL_{PF}, \quad (2.26)$$

wobei $\frac{\partial(UL_{PF})}{\partial(EAD_i)}$ die partielle Ableitung von UL_{PF} nach EAD_i bezeichnet. Diese lässt sich mit Hilfe von Bemerkung 1.10 bestimmen:

$$\frac{\partial(UL_{PF})}{\partial(EAD_i)} = \frac{1}{UL_{PF}} EAD_i Var\left(\widetilde{LGD}_i Y(i)\right) + \sum_{i \neq j} EAD_j Cov\left(\widetilde{LGD}_i Y(i), \widetilde{LGD}_j Y(j)\right). \quad (2.27)$$

Nun lässt sich der Risikobeitrag durch die Standardabweichung definieren:

Definition 2.21

Der Risikobeitrag $\widetilde{RC}_{\alpha}^i$ einer Position $i \in \{1, \dots, m\}$ sei ihr Beitrag zum Value at Risk zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$. Dieser Risikobeitrag werde über UL_i bestimmt:

$$\widetilde{RC}_{\alpha}^i = \frac{UL_i}{UL_{PF}} VaR_{\alpha}. \quad (2.28)$$

Der Risikobeitrag ist dann mit Gleichung 2.27 und Bemerkung 1.10

$$\begin{aligned}\widetilde{RC}_\alpha^i &= \frac{VaR_\alpha}{UL_{PF}} UL_i = \frac{VaR_\alpha}{UL_{PF}} EAD_i \frac{\partial(UL_{PF})}{\partial(EAD_i)} \\ &= \frac{VaR_\alpha}{UL_{PF}^2} \left[EAD_i^2 \underbrace{Var(\widetilde{LGD}_i Y(i))}_{=:A} + \sum_{i \neq j} EAD_i EAD_j \underbrace{Cov(\widetilde{LGD}_i Y(i), \widetilde{LGD}_j Y(j))}_{=:B} \right]\end{aligned}$$

mit A und B ebenfalls aus Bemerkung 1.10:

$$\begin{aligned}A &= \frac{LGD_i(1 - LGD_i)}{K} p_i + LGD_i^2(1 - p_i) p_i, \\ B &= (p_{ij} - p_i p_j) \left[Cov(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j) + LGD_i LGD_j \right] \\ &\quad + Cov(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j) p_i p_j.\end{aligned}$$

Bemerkung 2.22

Die Risikobeiträge RC_α^i und \widetilde{RC}_α^i für $i \in \{1, \dots, m\}$ hängen vom Konfidenzni-veau $\alpha \in (0, 1)$ ab. Für die relativen Risikobeiträge $\frac{RC_\alpha^i}{VaR_\alpha}$ und $\frac{\widetilde{RC}_\alpha^i}{VaR_\alpha}$ ist das nicht für beide der Fall. Der relative Risikobeitrag, bestimmt mittels Expected Shortfall $\frac{RC_\alpha^i}{VaR_\alpha} = \frac{ES_\alpha^{PF(i)}}{ES_\alpha^{PF}}$, ist vom α -Quantil des Expected Shortfall abhängig. Der relative Risikobeitrag, bestimmt mittels Standardabweichung $\frac{\widetilde{RC}_\alpha^i}{VaR_\alpha} = \frac{UL_i}{UL_{PF}}$, ist dagegen unabhängig von einem Quantil.

Kapitel 3

Sensitivitätsanalyse

Die folgende Sensitivitätsanalyse des Kreditportfoliomodells hat das Ziel, die wesentlichen Parameter auf ihren Einfluss auf den Value at Risk zu untersuchen. Damit findet eine Validierung des Kreditportfoliomodells statt und es wird ein tieferes Verständnis für die sensitivsten Parameter vermittelt. Da viele der untersuchten Parameter geschätzt sind, unterliegen sie einer gewissen Ungenauigkeit. Diesen Schätzungen liegen historische Daten (Migrationsmatrix und Korrelationen), marktimplizite Daten (Wertprozess VG) oder historische LGD-Verteilungen (LGD-Parameter K) zugrunde. Aus diesem Grund ist es von großem Nutzen, die Sensitivität eines Parameters gegenüber dem Value-at-Risk für ein bestimmtes Portfolio zu kennen. Mit diesem Wissen lässt sich der Einfluss von Ungenauigkeiten bei der Bestimmung eines Parameters einordnen. Zudem kann dieses Wissen hilfreich sein, um zu entscheiden, wie lohnenswert die Weiterentwicklung der Bestimmung eines Parameters ist. Des Weiteren ist bei der Definition eines Stress-Szenarios das Wissen um den Einfluss der gestressten Parameter¹ essentiell.

Betrachtet wird in der folgenden Sensitivitätsanalyse zur Risikomessung jeweils der Value at Risk zum Konfidenzniveau $\alpha = 99,9\%$. Um bestimmte Effekte besser erkennen zu können, wird zwischen VaR_{def} , VaR_{mig} und VaR_{full} unterschieden. Der VaR_{def} berücksichtigt ausschließlich Ausfall-Verluste, alle Migrationsverluste werden ignoriert. Entsprechend umgekehrt ist es für den VaR_{mig} der Fall: Es werden nur Migrationsverluste und keine Ausfälle berücksichtigt. VaR_{full} beschreibt den Value at Risk der Verlustverteilung, die sowohl Ausfall- als auch Migrationsverluste beinhaltet.

¹Ein gestresster Parameter sei ein derart veränderter Parameter, wie es ein extrem schlechtes Marktumfeld bewirken würde.

In den Kapiteln 3.1 und 3.2 wird mit homogenen Portfolien begonnen und der Einfluss auf den VaR_{def} untersucht. In beiden Kapiteln findet eine einperiodige Betrachtung ohne Berücksichtigung von Migrationsverlusten statt, d.h. es wird im sogenannten *default mode* simuliert. Der *migration mode* beinhaltet mehrperiodige Ratingmigrationen. Diese sind für ein eher heterogenes Portfolio in Kapitel 3.3 von besonderem Interesse. Folglich werden VaR_{def} , VaR_{mig} und VaR_{full} in den weiteren Analysen beobachtet. Ein realitätsnahes Portfolio liegt Kapitel 3.4 zugrunde und liefert ebenfalls in verschiedenen Analysen wichtige Erkenntnisse für den VaR_{def} , VaR_{mig} und VaR_{full} .

Es wird angenommen, dass eine Bank die verwendeten Portfolien hält. Bei den homogenen Portfolien ist das noch nicht von großer Bedeutung, aber um die Realitätsnähe des Portfolios aus Kapitel 3.4 nachvollziehen zu können, ist dieser Hintergrund wichtig.

3.1 Diversifikation in Abhängigkeit von R^2 und Sektorzugehörigkeit

Im Folgenden soll die Abhängigkeitsstruktur im Portfolio, die in Kapitel 1.2 modelliert wurde, untersucht werden. Der Einfluss der Abhängigkeiten soll möglichst isoliert betrachtet werden. Daher werden zunächst nur Ausfall-Ereignisse berücksichtigt, die Ratingmigrationen werden ignoriert. Außerdem wird keine stochastische LGD verwendet und nicht mehrperiodig simuliert. Grundsätzlich ist aus Kapitel 1.2 bekannt, dass Korrelationen zwischen Positionen innerhalb eines Sektors (sogenannte *Intrasektor-Korrelationen*) durch den sektorspezifischen Parameter R^2 dargestellt werden. Korrelationen zwischen Positionen aus unterschiedlichen Sektoren (sogenannte *Intersektor-Korrelationen*) werden über die Faktorladungen des in Kapitel 1.3 eingeführten Faktoren-Modells abgebildet. Genauer gesagt werden die Intra- und Intersektor-Korrelationen der log-Asset-Returns der Positionen simuliert.

3.1.1 Diversifikation durch steigende Granularität

Begonnen werden soll mit dem Einfluss der Intrasektor-Korrelation auf den Value at Risk bei schrittweiser Diversifikation eines Portfolios. Dazu definiere ein homogenes Portfolio mit zunächst einer Position. Das EAD sei 1 Mrd, die Ausfallwahrscheinlichkeit sei $p = 1,8\%$ und $LGD = 0,3$. Dann wird die Anzahl an Positionen mit

identischer Ausfallwahrscheinlichkeit und LGD schrittweise erhöht. Das EAD wird jeweils gleichmäßig auf alle Positionen verteilt und die besagten Positionen sind ausnahmslos einem Sektor zugeordnet. Der Effekt dieser Diversifikation auf den Value at Risk wird für drei unterschiedliche Intrasektor-Korrelationen R^2 des relevanten Sektors untersucht. In Abbildung 3.1 wird der Value at Risk des Start-Portfolios bestehend aus einer Position als 100% definiert. Die Value at Risk der weiteren Portfolien mit schrittweise steigender Granularität werden mit dem Value at Risk des Start-Portfolios verglichen und entsprechend aufgetragen.

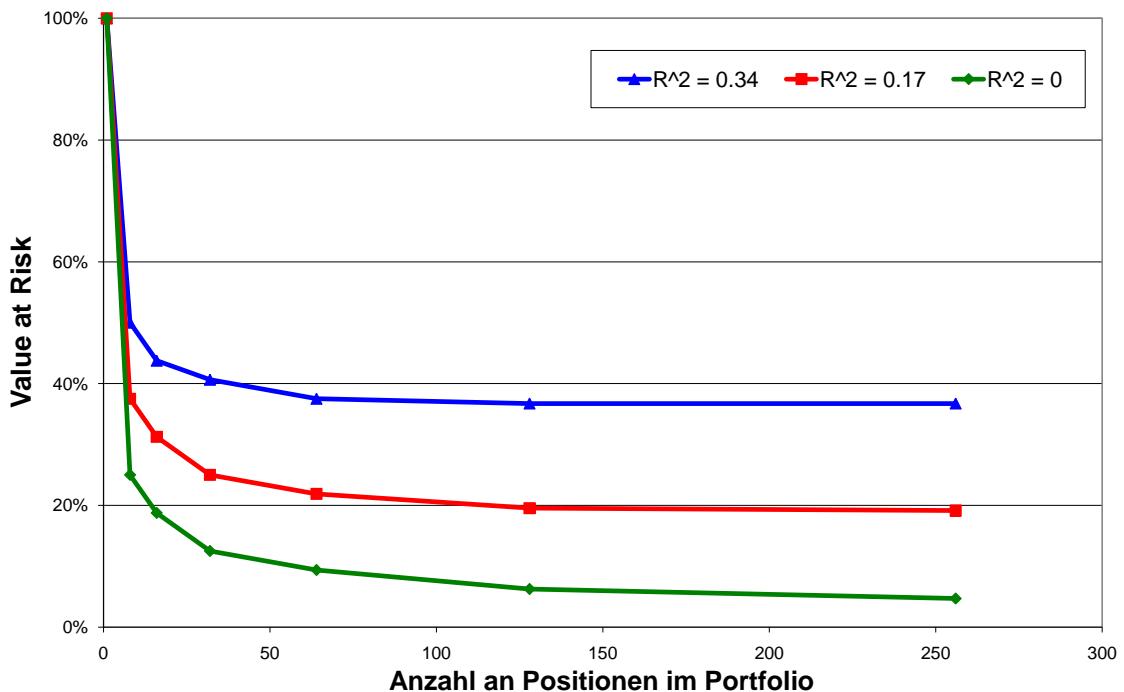


Abbildung 3.1: Diversifikationseffekt

Ergebnis 3.1

Es ist deutlich zu sehen, dass bei zunehmender Diversifikation, d.h. bei steigender Anzahl an Positionen, der Value at Risk für alle betrachteten R^2 abnimmt. Der Grenzwert dieses Prozesses wird durch das R^2 bestimmt.

Betrachte den Fall $R^2 = 0$. Dann existiert keine Intra- und keine Intersektor-Korrelation, da der Asset-Return jeder Position i nur noch vom unternehmens-

spezifischen Risiko abhängt:

$$\tilde{s}_i(t_1) = R_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}(t_1) + S_{f,j}(t_1) \right) + \epsilon_i(t_1) \sqrt{1 - R_i^2} = \epsilon_i(t_1). \quad (3.1)$$

Da die $\epsilon_i(t)$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$ stochastisch unabhängig und damit unkorreliert sind, addiert sich die Standardabweichung der einzelnen Positionen auf.

3.1.2 Konzentrationsrisiken

Die Konzentration von Exposure at Default in einem Portfolio ist ein wichtiger Teil des Kreditrisikos (siehe [1]). Das sogenannte *Konzentrationsrisiko* kann zum einen durch *Sektorkonzentration* und zum anderen durch *Einzelnamenskonzentration* entstehen. Sektorkonzentration bezeichnet die übermäßige Konzentration von Exposure in einem Sektor. Einzelnamenskonzentration meint die Konzentration von Exposure auf wenige einzelne Positionen im Portfolio. Der Einfluss dieser Konzentrationsrisiken auf den Value at Risk soll nun untersucht werden.

Sektorkonzentrationsrisiko

Begonnen wird mit dem Sektorkonzentrationsrisiko. Die Ausgangssituation der Abbildung 3.2 sei folgende: Es seien $m = 2380$ identische Positionen mit $EAD = 100.000$, $p = 1,8\%$ und $LGD = 0,3$ einem einzigen Sektor zugeordnet. Durch Änderung dieser Zuordnung wird eine Diversifikation und eine Abnahme von Sektorkonzentrationen erreicht. Hierbei werden die Positionen zuerst schrittweise und gleichmäßig einer steigenden Anzahl an Industrien zugewiesen, die sich unverändert in einer Region befinden. Im Gegenzug dazu wird bei konstant einer Industrie über eine steigende Anzahl an Regionen diversifiziert. Die Intrasektor-Korrelation R^2 ist für alle Sektoren identisch, für drei verschiedene Werte wird die beschriebene Diversifikation durchgeführt.

Ergebnis 3.2

Es ist zu erkennen, dass die relative Value at Risk-Reduktion bei Diversifikation über Industrien größer ist als bei Diversifikation über Regionen.

Dies lässt sich durch die Korrelationsmatrix \mathcal{C} erklären, die dem Faktoren-Modell in Kapitel 1.3 zugrunde liegt. Eine Diversifikation über zwei Sektoren senkt den

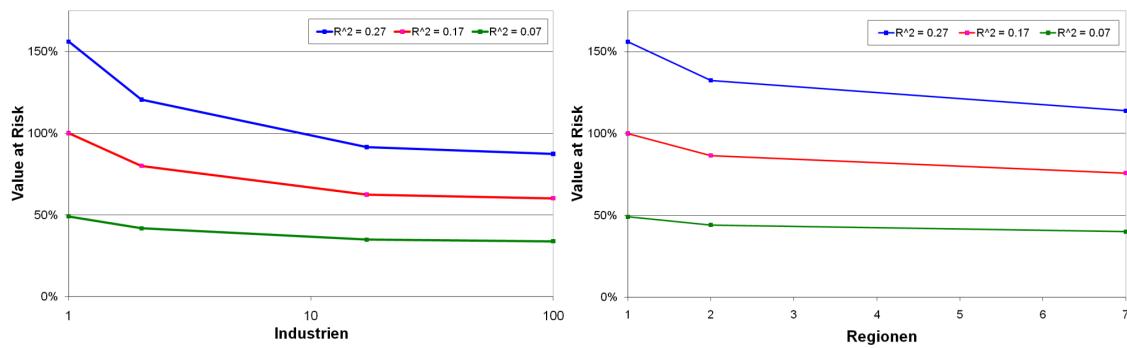


Abbildung 3.2: Diversifikationseffekt für Regionen und Industrien

Value at Risk stärker, wenn die beiden Sektoren weniger stark korreliert sind. Der Korrelationsmatrix \mathcal{C} ist zu entnehmen, dass Sektoren mit gleicher Industrie und unterschiedlicher Region stärker korreliert sind als Sektoren mit gleicher Region und unterschiedlicher Industrie. Außerdem ist Abbildung 3.2 zu entnehmen, dass eine Modellierung von 100 anstatt den gewählten 17 Industrien (siehe Kapitel 1.3.3) keine deutliche Veränderung des Value at Risk mit sich bringt und daher den höheren Rechenaufwand für 100 Industrien nicht rechtfertigt. Die drei unterschiedlichen Werte für das R^2 haben Einfluss auf die Höhe des Value at Risk, die relative Abnahme durch steigende Diversifikation ändert sich dadurch kaum.

Die folgende Abbildung 3.3 ergänzt die gleichzeitige Diversifikation über Regionen und Industrien. Die Prozentangaben beziehen sich auf das nicht diversifizierte Portfolio bei Verwendung des mittleren $R^2 = 0,17$, das dementsprechend als 100% definiert wird.

Ergebnis 3.3

Bei gleichzeitiger Diversifikation über Regionen und Industrien sind alle 119 Sektoren (17 Industrien mal 7 Regionen) mit jeweils $\frac{2380}{119} = 20$ identischen Positionen gefüllt. Erwartungsgemäß ist dann die Abnahme des Value at Risk am größten. Genauer beträgt bei mittlerem $R^2 = 0,17$ der Value at Risk für das über Regionen und Industrien diversifizierte Portfolio nur noch 49% vom Value at Risk des nicht diversifizierten Portfolios. In dem Fall ist das Sektorkonzentrationsrisiko erfolgreich abgebaut worden. Dieses Ergebnis unterstreicht, dass für eine Bank bei einem Neugeschäft die Sektorzuordnung dieser Position von großer Bedeutung ist. Es ist anhand des bestehenden Portfolios zu prüfen, ob durch dieses Neugeschäft Konzentrationsrisiken entstehen.

Einzelnamenskonzentration

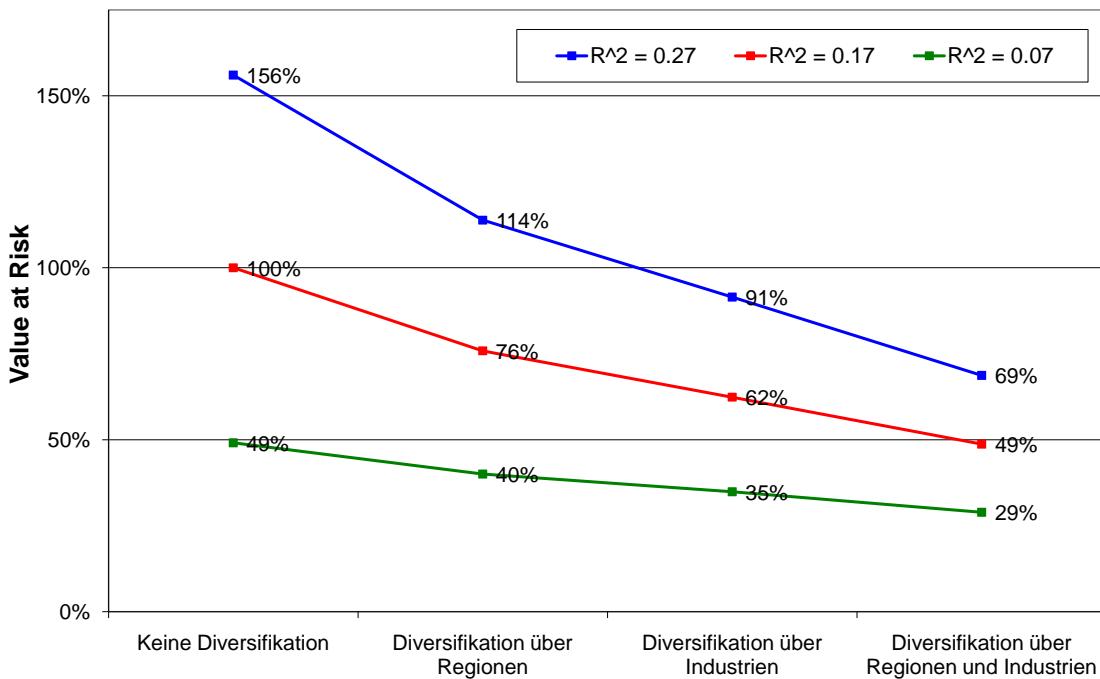


Abbildung 3.3: Value at Risk in Abhängigkeit von R^2 und Sektorzugehörigkeit

Als zweites wird das Risiko einer Einzelnamenskonzentration untersucht. Dazu wird folgendes Portfolio verwendet. Jedem Sektor seien 100 identische Positionen zugeordnet mit $EAD = 100.000$, $p = 1,8\%$ und $LGD = 0,3$. Die Intrasektor-Korrelation sei für alle Sektoren identisch: $R^2 = 0,2$. Nun wird eine einzelne Position folgendermaßen verändert: die Ausfallwahrscheinlichkeit wird für einen ersten Test auf 3% erhöht. Für diesen Wert wird das Exposure der Einzelposition in drei Schritten auf 10 Mio. erhöht. Der gleiche Test wird mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit für die Einzelposition von 0,6% wiederholt. Der relative Risikobeitrag in Abhängigkeit vom relativen EAD-Anteil einer Einzelposition sind in Abbildung 3.4 dargestellt.

Zur Orientierung dient die rote Linie (eine Gerade mit Steigung 1), die einen identischen relativen Risikobeitrag und EAD-Anteil markiert. Der relative Risikobeitrag einer Position wird auch als relativer Standardabweichungs-Anteil bezeichnet. Er ist der relative Anteil am Value at Risk, für den diese Position verantwortlich gemacht wird. Oberhalb dieser Linie ist der relative Standardabweichungs-Anteil (bzw. relative Risikobeitrag) größer als der relative EAD-Anteil, unterhalb dieser Linie ist er kleiner. Da für alle anderen Positionen im Portfolio $p = 1,8\%$ gilt, liegt die Kurve der Position mit $p = 3\%$ oberhalb und die Kurve der Position mit $p = 0,6\%$ unterhalb der roten Geraden. Das Risiko der Einzelnamenskonzentration wird nun deutlich, da für beide p -Werte der relative Standardabweichungs-Anteil überproportional zum relativen EAD-Anteil steigt. Genauer wird das Exposure der

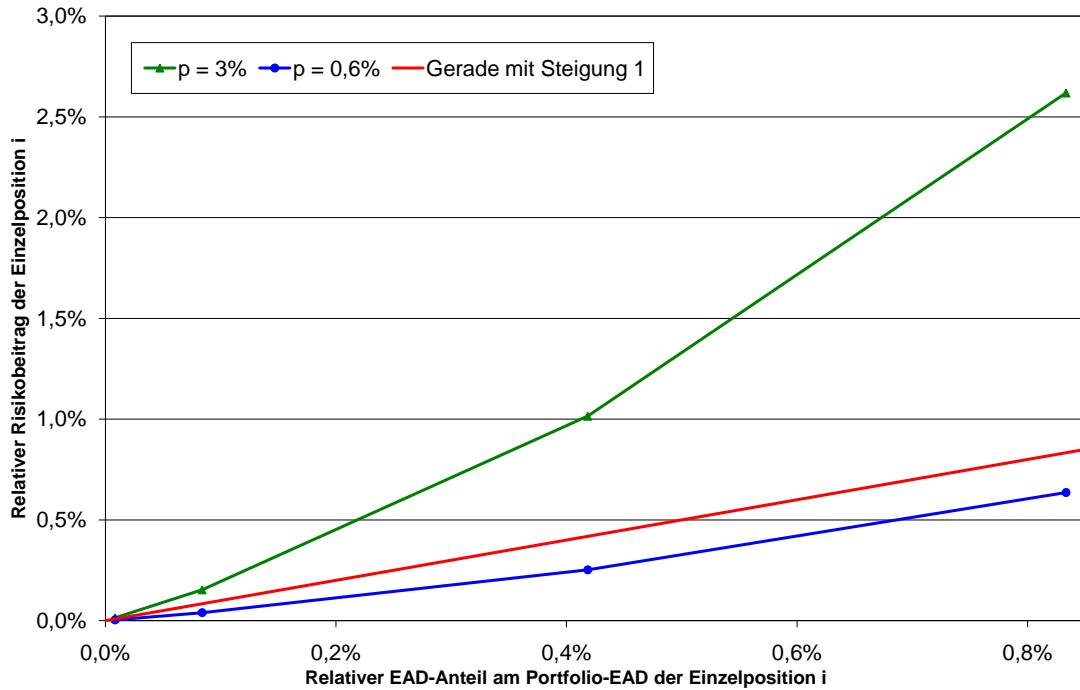


Abbildung 3.4: Einzelnamenskonzentrationsrisiko nach Ausfallwahrscheinlichkeit

Einzelposition durch die letzten beiden Schritte verzehnfacht. Dadurch erhöht sich der Standardabweichungsanteil für $p = 3\%$ auf das 17-fache, für $p = 0,6\%$ auf das 16-fache. Wohlgemerkt ist nach der letzten Exposure-Erhöhung der relative EAD-Anteil der Einzelposition am Portfolio-Exposure immer noch kleiner als 1%. Sollte das Exposure der Einzelposition nochmals verzehnfacht werden auf etwa 7,8% vom Portfolio-Exposure, dann trägt die Einzelposition bereits 56,2% für $p = 3\%$ und 22,9% für $p = 0,6\%$ zur Standardabweichung bei. Diese Erhöhung ist nicht in der Grafik enthalten.

Ergebnis 3.4

Mit anderen Worten setzt dieser Einzelnamens-Konzentrationseffekt, d.h. der überproportionale Anstieg des relativen Risikobrbeitags verglichen mit dem relativen EAD-Anteil, sehr früh ein und wird bei steigender Konzentration immer bedeutsamer. Daher bedarf er bei der Portfoliozusammensetzung besondere Beachtung.

3.1.3 Risikobrbeitag in Abhängigkeit von Ausfallwahrscheinlichkeit und Sektorzugehörigkeit

Bisher wurde zur Vereinfachung für alle Sektoren die gleiche Intrasektor-Korrelation R^2 verwendet. Das soll sich jetzt ändern und im Folgenden werden die nach Bemer-

kung 1.12 bekannten Intrasektor-Korrelationen aller n Sektoren verwendet. Wie in Kapitel 1.3.3 bereits erwähnt, sind die Intrasektor-Korrelationen für Sektoren mit gleicher Industrie unabhängig von der Region identisch. Nun wird der Einfluss der Sektorzugehörigkeit und Ausfallwahrscheinlichkeit einer Position auf deren Risikobeitrag untersucht. Dazu wird ein Portfolio \mathcal{P} aufgesetzt, das jedem Sektor sechs Positionen mit unterschiedlicher Ausfallwahrscheinlichkeit ($p_1 = 0,01\%$, $p_2 = 0,02\%$, $p_3 = 0,03\%$, $p_4 = 0,11\%$, $p_5 = 1,1\%$ und $p_6 = 11,5\%$) zuweist. Definiere das Portfolio

$$\mathcal{P} = \{P_{11}, \dots, P_{16}, P_{21}, \dots, P_{26}, \dots, P_{n1}, \dots, P_{n6}\},$$

wobei für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, 6\}$ Position P_{ij} in Sektor i mit p_j sei. $EAD = 1 \text{ Mrd.}$ und $LGD = 0,4$ seien bei allen Positionen identisch. Aus Definition 2.21 ist die Berechnung der relativen Risikobeiträge mittels des Standardabweichungsanteil der Einzelposition bekannt. Dies wird nun für jede Position P_{ij} durchgeführt:

$$\frac{\widetilde{RC}_{\alpha}^{P_{ij}}}{VaR_{\alpha}} = \frac{UL_{P_{ij}}}{UL_{\mathcal{P}}} = \frac{EAD_{P_{ij}} \frac{\partial(UL_{\mathcal{P}})}{\partial(EAD_{P_{ij}})}}{\sqrt{Var(L_{\mathcal{P}})}}. \quad (3.2)$$

Teile nun das Portfolio \mathcal{P} in disjunkte Teilmengen $\mathcal{P}_j = \{P_{1j}, P_{2j}, \dots, P_{nj}\}$ mit $j \in \{1, \dots, 6\}$, d.h. die Positionen mit gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit werden in einer Teilmenge zusammengefasst. Dann wird der minimale und maximale relative Risikobeitrag aller Positionen jeder Teilmenge bestimmt:

$$\min_{\mathcal{P}_j} := \min\left\{\frac{UL_{P_{1j}}}{UL_{\mathcal{P}}}, \dots, \frac{UL_{P_{nj}}}{UL_{\mathcal{P}}}\right\} \quad \text{und} \quad \max_{\mathcal{P}_j} := \max\left\{\frac{UL_{P_{1j}}}{UL_{\mathcal{P}}}, \dots, \frac{UL_{P_{nj}}}{UL_{\mathcal{P}}}\right\}. \quad (3.3)$$

In Abbildung 3.5 werden für $j \in \{1, \dots, 6\}$ die Teilmengen \mathcal{P}_j auf der X-Achse unterschieden und jeweils auf der logarithmischen Y-Achse das Intervall $[\min_{\mathcal{P}_j}, \max_{\mathcal{P}_j}]$ aufgetragen.

Ergebnis 3.5

Nun ist zu erkennen, dass $\max_{\mathcal{P}_2} > \min_{\mathcal{P}_3}$. Das bedeutet, dass der relative Risikobeitrag einer Position in \mathcal{P}_2 trotz niedrigerer Ausfallwahrscheinlichkeit größer ist als der relative Risikobeitrag einer Position in \mathcal{P}_3 . Da die beiden Positionen sich neben der Ausfallwahrscheinlichkeit nur durch die Sektorzugehörigkeit unterscheiden, wird der Einfluss des systematischen Risikos, d.h. der Intrasektor-Korrelation R^2 , unterstrichen. Da die relativen Standardabweichungs-Abteile auf einer logarithmi-

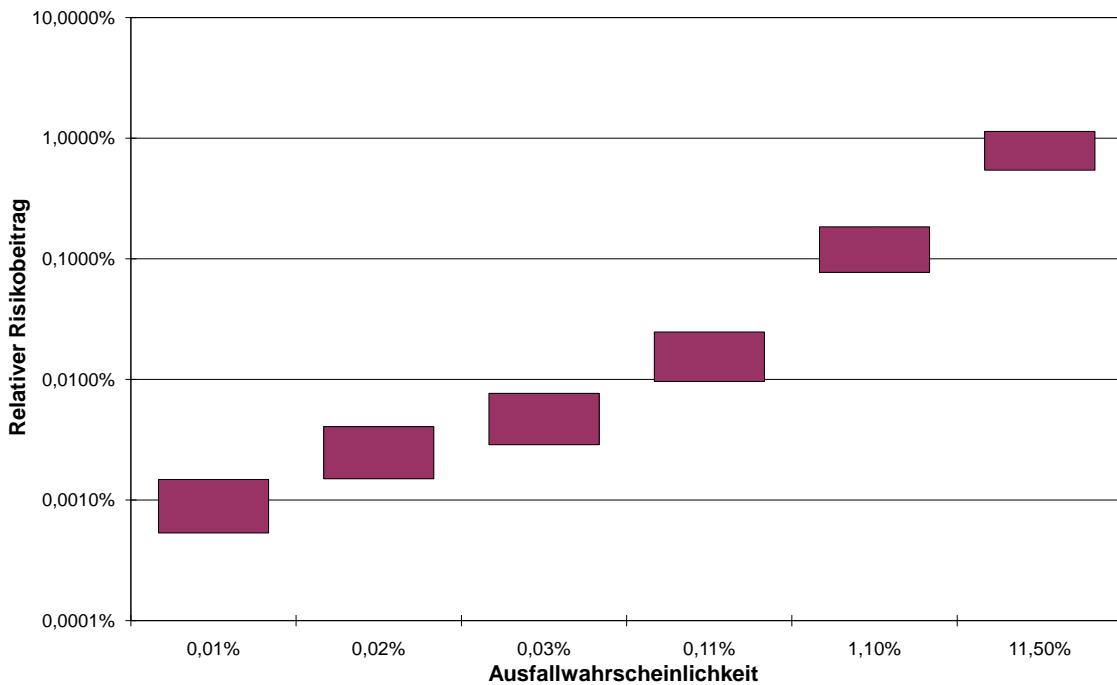


Abbildung 3.5: Risikobeitrag in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit

schen Skala aufgetragen sind, ist zu beachten, dass die Intervalle der Teilmengen für höhere Ausfallwahrscheinlichkeiten deutlich größer sind als für niedrigere, d.h. die Sensitivität einer Position bezüglich der Intrasektor-Korrelation des zugeordneten Sektors ist bei hoher Ausfallwahrscheinlichkeit wesentlich größer als bei niedriger.

Wie groß der Einfluss des systematischen Risikos auf den relativen Risikobeitrag ist, soll als nächstes untersucht werden. Dabei wird nicht nur wie bisher der mittels der Standardabweichung bestimmte Risikobeitrag analysiert, sondern auch der in Definition 2.20 eingeführte Expected Shortfall-basierte Risikobeitrag berücksichtigt.

3.1.4 Vergleich der Risikobeiträge bestimmt durch Standardabweichung und Expected Shortfall

Es wird ein Portfolio \mathcal{P} aufgesetzt, das jedem Sektor drei Positionen mit unterschiedlichem EAD ($EAD_1 = 100.000$, $EAD_2 = 1 \text{ Mio}$ und $EAD_3 = 10 \text{ Mio}$) zuweist. Definiere das Portfolio

$$\mathcal{P} = \{P_{11}, \dots, P_{13}, P_{21}, \dots, P_{23}, \dots, P_{n1}, \dots, P_{n3}\},$$

wobei für $k \in \{1, \dots, n\}$ und $l \in \{1, \dots, 3\}$ Position P_{kl} in Sektor k mit EAD_l sei. $p = 0,4\%$ und $LGD = 0,4$ seien bei allen Positionen identisch. In Definition 2.21 wurden die relativen Risikobeuräge, die mittels Expected Shortfall zum Kondifenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ und mittels Standardabweichung für jede Position P_{kl} bestimmt werden, eingeführt. Anhand folgender Gleichung kann der relative Risikobeuräge für jede Position $P_{kl} \in \mathcal{P}$ mit Hilfe des Expected Shortfall berechnet werden:

$$\frac{RC_{\alpha}^{P_{kl}}}{VaR_{\alpha}} = \frac{E(L_{P_{kl}} | L_{\mathcal{P}} > VaR_{\alpha})}{ES_{\alpha}^{\mathcal{P}}}. \quad (3.4)$$

Die Berechnung des realtiven Risikobeurags jeder Position $P_{kl} \in \mathcal{P}$ anhand der Standardabweichung ist mit folgender Gleichung möglich:

$$\widetilde{\frac{RC_{\alpha}^{P_{kl}}}{VaR_{\alpha}}} = \frac{UL_{P_{kl}}}{UL_{\mathcal{P}}} = \frac{EAD_{P_{kl}} \frac{\partial(UL_{\mathcal{P}})}{\partial(EAD_{P_{kl}})}}{\sqrt{Var(L_{\mathcal{P}})}}. \quad (3.5)$$

Anschließend wird das Portfolio in 17 disjunkte Teilmengen $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}$ mit $i \in \{1, \dots, 17\}$ geteilt. Mit der Notation für die Sektoren aus Kapitel 1.3.3 (Sektor $k=(\text{Industrie } i, \text{Region } j)$) werden der Teilmenge \mathcal{P}_i alle Positionen aus den Sektoren mit Industrie i zugeordnet:

$$\mathcal{P}_i = \bigcup_{j=1}^7 \{P_{(i,j)1}, P_{(i,j)2}, P_{(i,j)3}\}. \quad (3.6)$$

Für jede dieser Teilmengen werden nun die relativen Risikobeuräge bestimmt:

$$\frac{RC_{\alpha}^{\mathcal{P}_i}}{VaR_{\alpha}} = \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^3 \frac{RC_{\alpha}^{P_{(i,j)l}}}{VaR_{\alpha}} \quad \text{und} \quad \widetilde{\frac{RC_{\alpha}^{\mathcal{P}_i}}{VaR_{\alpha}}} = \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^3 \frac{\widetilde{RC_{\alpha}^{P_{(i,j)l}}}}{VaR_{\alpha}}. \quad (3.7)$$

In Abbildung 3.6 werden für $i \in \{1, \dots, 17\}$ die Teilmengen \mathcal{P}_i auf der X-Achse unterschieden und mit der Industrie i bezeichnet. Auf der Y-Achse wird jeweils der relative Risikobeuräge dieser Teilmenge für beide Alternativen der Bestimmung aufgetragen. Zusätzlich wird das R^2 aller Sektoren mit der entsprechenden Industrie eingezeichnet und die Skala auf der rechten Seite der Abbildung angezeigt.

Ergebnis 3.6

Es ist zu erkennen, dass der relative Risikobeuräge, berechnet mittels Expected Shortfall, deutlich stärker vom systematischen Risiko beeinflusst wird als der mittels

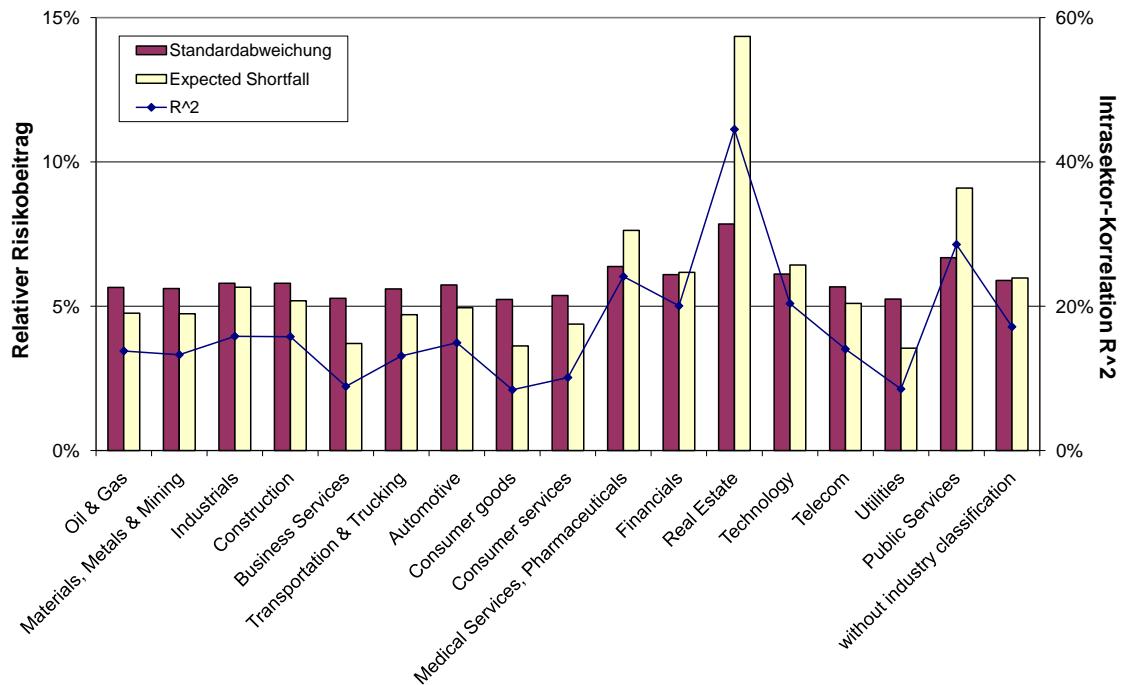


Abbildung 3.6: Relativer Risikobeitrag und systematisches Risiko

Standardabweichung berechnete Risikobeitrag. Obwohl jede Teilmenge mit Ausnahme der Sektorzugehörigkeit identische Positionen enthält, variiert der relative Risikobeitrag je nach Industrie sehr deutlich.

3.2 Einfluss stochastischer LGD

In den bisherigen Sensitivitätsrechnungen wurde für jede Position im Portfolio eine konstante LGD verwendet. Nun soll der Einfluss, der in Kapitel 1.4 eingeführten stochastischen LGD, auf den Value at Risk untersucht werden. Es werden weiterhin nur Ausfall-Ereignisse berücksichtigt (die stochastische LGD hat keinen Einfluss auf die Migrationsverluste), es wird einperiodig simuliert. Im Folgenden wird für verschiedene Portfolios der relative Anstieg des Value at Risk durch das Verwenden der stochastischen LGD verglichen. Dass dieser Anstieg unter bestimmten Voraussetzungen immer positiv ist, zeigt folgender Satz:

Satz 3.7

Für ein Portfolio mit $m \in \mathbb{N}$ Positionen mit $EAD_i \geq 0$ und $LGD_i \in (0, 1) \forall i \in \{1, \dots, m\}$ sei jede Position genau einem der $n \in \mathbb{N}$ Sektoren zugeordnet und jeder Sektor erhalte dabei höchstens eine Position (d.h. $m \leq n$)

Betrachte den einperiodigen Fall und berücksichtige nur Ausfall-Ereignisse für die Verlustverteilung. Sei $K \in \mathbb{N}$ mit $1 < K$ der Parameter aller LGD-Stochastiken, der die Varianz der Beta-Verteilung bestimmt (siehe Gleichung 1.41).

Bezeichne L_{PF} die Verlustverteilung von obigem Portfolio mit stochastischer LGD für den Parameter K und L_{PF}^{const} die Verlustverteilung des gleichen Portfolios mit konstanter LGD. Dann gilt

$$\text{Var}(L_{PF}) > \text{Var}(L_{PF}^{const}). \quad (3.8)$$

Beweis:

Für die Varianz einer stochastischen LGD \widetilde{LGD}_i und einer konstanten LGD LGD_i für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\text{Var}(\widetilde{LGD}_i) = \frac{\text{LGD}_i(1 - \text{LGD}_i)}{K} > 0 = \text{Var}(LGD_i). \quad (3.9)$$

Da alle Positionen unterschiedlichen Sektoren zugeordnet sind, sind $\widetilde{LGD}_1, \dots, \widetilde{LGD}_m$ stochastisch unabhängig und es gilt $\text{Cov}(\widetilde{LGD}_i, \widetilde{LGD}_j) = 0$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$. Da $EAD_i, p_i, LGD_i, p_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$, gilt dann mit Bemerkung 1.10 die Behauptung des Satzes:

$$\begin{aligned} \text{Var}(L_{PF}) &= \sum_{i=1}^m EAD_i^2 \left(\frac{\text{LGD}_i(1 - \text{LGD}_i)}{K} p_i + \text{LGD}_i^2(1 - p_i)p_i \right) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} EAD_i EAD_j ((p_{ij} - p_i p_j) + \text{LGD}_i \text{LGD}_j) \\ &> \sum_{i=1}^m EAD_i^2 (0 * p_i + \text{LGD}_i^2(1 - p_i)p_i) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} EAD_i EAD_j ((p_{ij} - p_i p_j) + \text{LGD}_i \text{LGD}_j) \\ &= \text{Var}(L_{PF}^{const}). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.8

Ökonomisch betrachtet wird durch die stochastische LGD die Unsicherheit modelliert, die mit der Liquidation einer ausgefallenen Position verbunden ist. Beispielweise kann ein Rechtsstreit nach dem Ausfall einer Position dazu führen, dass entweder

ein sehr großer Teil des EAD bei einem Prozessgewinn oder nur ein sehr kleiner Teil des EAD bei einem Prozessverlust gerettet werden können. Die erwartete LGD kann als Erwartungswert aus historisch realisierten Verlusten interpretiert werden. Wird diese Unsicherheit wie oben beschrieben berücksichtigt, d.h. wird die LGD als Zufallsvariable modelliert, dann erhöht sich unter den benannten Voraussetzungen die Varianz des Portfolioverlustes.

Die realisierte LGD kann in der Realität effektiv negativ sein (bspw. durch Erhalt von Verzugszinsen oder Strafzahlungen), aber kann auch größer als eins sein (bspw. durch Prozesskosten bei Totalverlust). Da dies nur sehr selten passiert, wird es im vorliegenden Modell nicht berücksichtigt.

3.2.1 Einfluss auf Portfolios mit variierender Ausfallwahrscheinlichkeit und LGD

In einer ersten Analyse soll der Einfluss der stochastischen LGD für unterschiedliche Erwartungswerte in Abhängigkeit vom Diversifikationsgrad untersucht werden. Dazu definiere neun Portfolien. Jedes der neun Portfolien besitze 1904 Positionen (16 Positionen * 119 Sektoren = 1904 Positionen) mit $EAD = 100.000$ und $p = 1,8\%$. Drei unterschiedliche erwartete LGD ($E(\widetilde{LGD}_1) = 0,05$, $E(\widetilde{LGD}_2) = 0,3$, $E(\widetilde{LGD}_3) = 0,9$) für alle Positionen des betrachteten Portfolios und drei Diversifikationgrade (gleichmäßige Verteilung der Positionen auf einen, vier bzw. alle 119 Sektoren) ergeben besagte neun Portfolien. Nun wird für jedes Portfolio der Value at Risk bestimmt, wenn die erwartete LGD konstant ist. Anschließend wird der Value at Risk bei Verwendung der stochastischen LGD berechnet und der prozentuale Anstieg in Abbildung 3.7 eingetragen.

Bei den Ergebnissen in Abbildung 3.7 fällt sofort auf, dass für Portfolien, die über viele Sektoren diversifiziert sind, der Anstieg des Value at Risk deutlich geringer ist als für Portfolien, die in wenigen Sektoren konzentriert sind. Zu erklären ist diese Beobachtung folgendermaßen: Bei einem in ein oder vier Sektoren konzentriertes Portfolio kommen nur ein oder vier Quantils-Ziehungen für die LGD-Stochastik zum Tragen. Ein hohes gezogenes Quantil erhöht somit eine große Anzahl an Verlusten von ausgefallenen Positionen. Bei 119 Quantils-Ziehungen fallen einzelne hohe Quantile nicht so stark ins Gewicht. Eine Ausnahme für diese Beobachtung sind die Portfolien mit einer sehr hohen erwarteten LGD von 0,9. In diesem Fall ist der Anstieg des Value at Risk durch die LGD-Stochastik nur sehr gering und kaum vom Diversifikationsgrad abhängig, da eine Erhöhung einer erwarteten LGD von 0,9 die

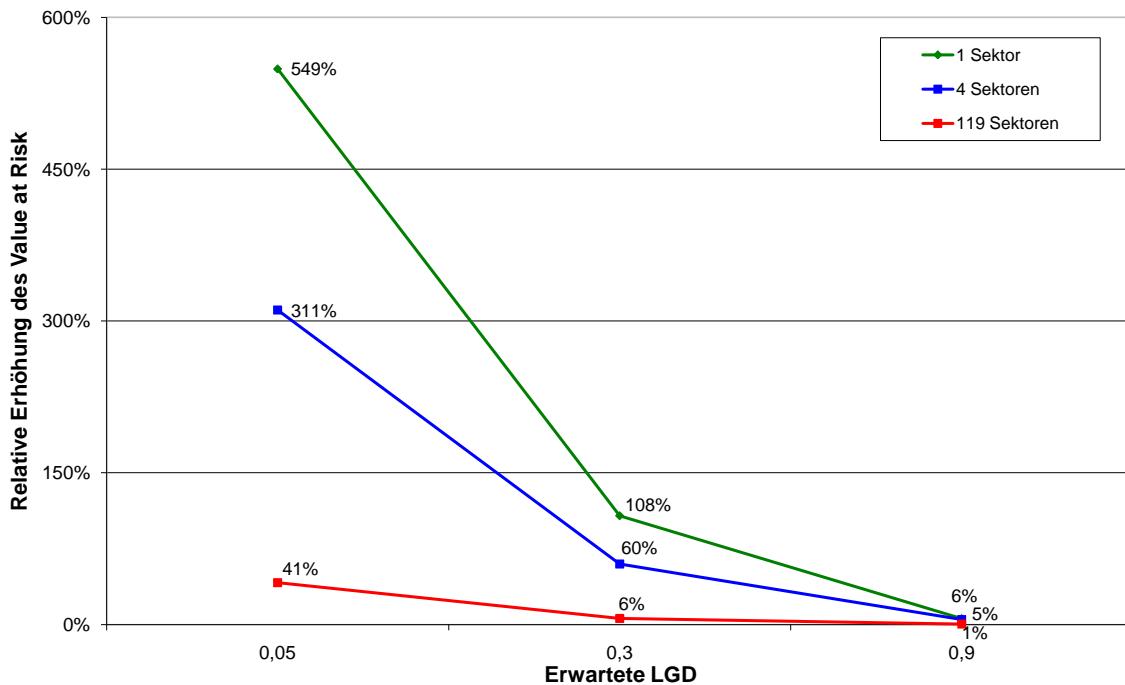


Abbildung 3.7: Einfluss der stochastischen LGD in Abhängigkeit vom Erwartungswert und Diversifikationsgrad

entsprechenden Verluste kaum erhöht.

Ergebnis 3.9

Zusammenfassend ist zu sagen, dass der Einfluss der LGD-Stochastik bei zunehmender Diversifikation und steigender erwarteter LGD abnimmt.

In einer zweiten Analyse soll der Einfluss der stochastischen LGD für unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Diversifikationsgrad untersucht werden. Dazu werden wieder neun Portfolien betrachtet. Jedes der neun Portfolios besitze 1904 Positionen mit $EAD = 100.000$ und $E(\widetilde{LGD}) = 0,3$. Drei unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten ($p_1 = 0,01\%$, $p_2 = 1,8\%$, $p_3 = 10\%$) für alle Positionen des betrachteten Portfolios und die drei bekannten Diversifikationgrade ergeben besagte neun Portfolien. Nun wird wieder für jedes Portfolio der Value at Risk bestimmt, wenn die erwartet LGD konstant ist. Anschließend wird wie in Abbildung 3.7 der Value at Risk bei Verwendung der stochastischen LGD berechnet und der prozentuale Anstieg berechnet.

Die Ergebnisse, zu sehen in Abbildung 3.8, haben einen höheren Erklärungsbedarf. Bei einer sehr niedrigen Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,01% spielt die Diversifikation nur eine untergeordnete Rolle. Dieses hat folgenden Grund: Bei 1904 Positionen

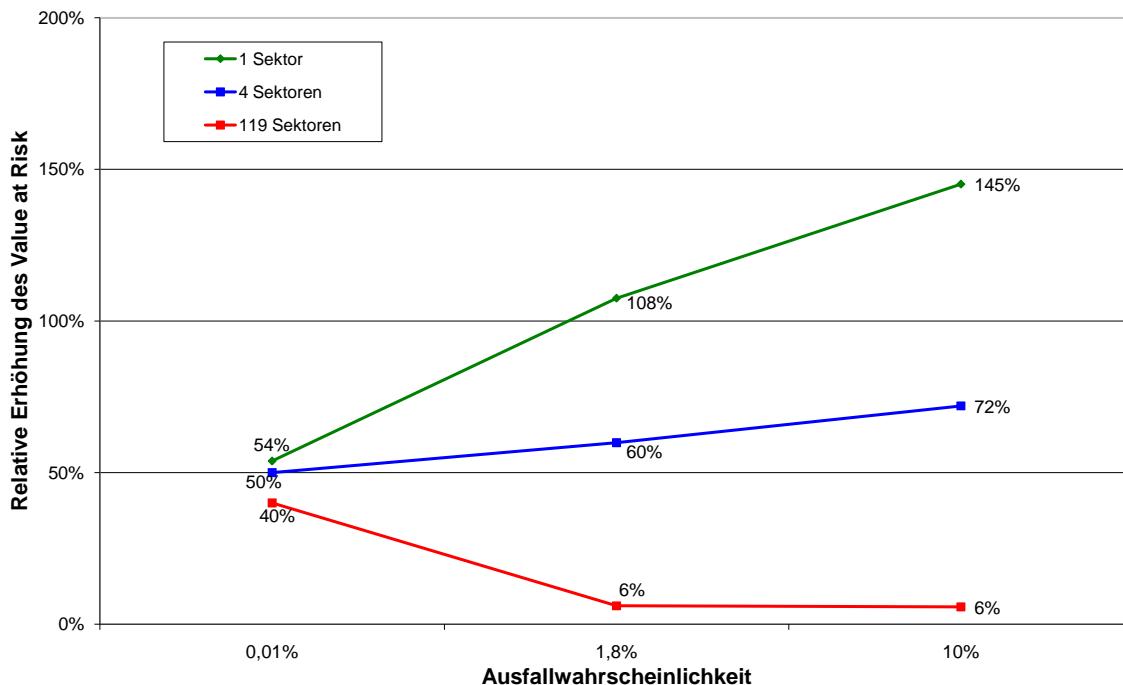


Abbildung 3.8: Einfluss der stochastischen LGD in Abhängigkeit von Ausfallwahrscheinlichkeit und Diversifikationsgrad

im Portfolio mit dieser Ausfallwahrscheinlichkeit ist die erwartete Anzahl an ausgefallenen Positionen lediglich $1904 * 0,01\% = 0,1904$. D.h. auch im Verteilungsende² der Verlustverteilung setzt sich ein hoher Portfolioverlust nur aus einigen wenigen Ausfällen zusammen und die Sektorzugehörigkeit hat geringen Einfluss. Bei höheren Ausfallwahrscheinlichkeiten zeigt sich ein zweigeteiltes Bild. Für konzentrierte Portfolien steigt der Einfluss der LGD-Stochastik mit zunehmender Ausfallwahrscheinlichkeit an. Bei stark diversifizierten Portfolien ist der Einfluss der LGD-Stochastik deutlich niedriger als für konzentrierte Portfolien und sinkt mit zunehmender Ausfallwahrscheinlichkeit.

Ergebnis 3.10

Als Ergebnis dieses Kapitels lässt sich festhalten, dass der Value at Risk für konzentrierte Portfolien deutlich sensibler auf die Anwendung einer stochastischen LGD reagiert als für stark diversifizierte Portfolien.

²Das Verteilungsende wird auch als *Tail* bezeichnet.

3.2.2 Einfluss des systematischen Risikos

Als nächstes soll der Einfluss der LGD-Stochastik auf den Value at Risk in Abhängigkeit vom systematischen Risiko untersucht werden. Dazu wird ein heterogenes Portfolio mit 16 Positionen in jedem der 119 Sektoren definiert. Das Kreuzprodukt von vier Ausfallwahrscheinlichkeiten (0, 1%, 0,5%, 1,8%, 3%) und vier LGD (0, 1, 0,4, 0,6, 0,9) führt zu den 16 verschiedenen Positionen je Sektor. Ein EAD von 1 Mio. sei für alle identisch. Nun wird das R^2 , das für alle Sektoren identisch sei, in 10%-Schritten von 0% auf 100% erhöht. Für jeden Schritt wird die relative Value at Risk-Erhöhung durch die LGD-Stochastik bestimmt (roter Graph in Abbildung 3.9 mit Skala auf der linken Seite). Mit anderen Worten wird angeben, wieviel Prozent der Value at Risk bei Verwendung der stochastischen LGD größer ist als bei Verwendung einer konstanten LGD. Außerdem werden die absoluten Werte für den Value at Risk bei angewandter LGD-Stochastik für jeden Schritt eingezeichnet (blauer Graph in Abbildung 3.9 mit Skala auf der rechten Seite).

Dabei ist direkt ersichtlich, dass der Value at Risk linear im R^2 steigt. In Bemer-

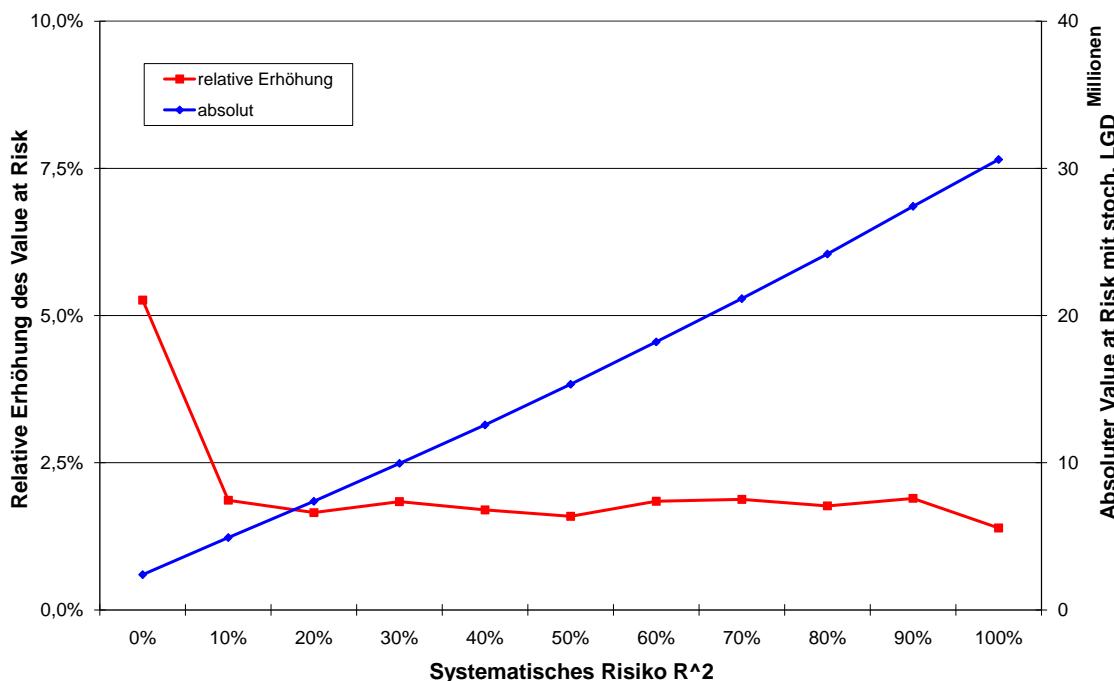


Abbildung 3.9: Stochastische LGD und systematisches Risiko

kung 1.6 ist der Asset-Return für $R^2 = 0$ und $R^2 = 1$ gegeben. In Abbildung 3.9 ist nun zu beobachten, wie der Value at Risk aufgrund der höheren Intrasektor-Korrelation steigt, wenn sich das Gewicht vom idiosynkratischen Teil des Asset-

Return für $R^2 = 0$ schrittweise auf den systematischen Teil für $R^2 = 1$ verschiebt:

$$s(t_1) = R \underbrace{\sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^f \lambda_{jk} X_{f,k}(t_1) + S_{f,j}(t_1) \right)}_{\text{systematischer Teil}} + \underbrace{\epsilon_i(t_1)}_{\text{idiosynkratischer Teil}} \sqrt{1 - R^2}. \quad (3.10)$$

Ergebnis 3.11

Die relative Value at Risk-Erhöhung hängt kaum vom Level des systematischen Risikos, d.h. dem R^2 , ab. Einzige Ausnahme ist die VaR-Erhöhung für $R^2 = 0$, d.h. wenn der Asset-Return einer Position nur von ihrem idiosynkratischen Teil bestimmt wird und stochastisch unabhängig ist.

Durch die Verwendung der LGD-Stochastik wird eine gewisse Korrelation zwischen Positionen mit gleichem Hauptsektor geschaffen, selbst wenn die beiden Positionen ohne LGD-Stochastiken unabhängig sind. Die Abhängigkeit zwischen LGD-Stochastiken ist in Gleichung 1.43 dargestellt. Dadurch beträgt die relative Erhöhung für $R^2 = 0$ etwa 5,3% und ist etwas höher als für $R^2 \geq 10\%$. Der Korrelationseffekt durch die LGD-Stochastik ist für $R^2 \geq 10\%$ nicht mehr zu erkennen, da er durch Intrasektor-Korrelation überlagert wird. Die relative Value at Risk-Erhöhung liegt für $10\% \leq R^2 \leq 100\%$ zwischen 1,4% und 1,9%.

3.3 Einfluss von Ratingmigrationen

Das nächste Kapitel soll sich den Ratingmigrationen widmen, die in Kapitel 2.1 modelliert wurden. Dazu werden nicht wie bisher ausschließlich Ausfall-Ereignisse für die Verlustverteilung berücksichtigt, sondern zusätzlich Wertveränderungen durch Ratingmigrationen. Insbesondere die Sensitivität des Value at Risk gegenüber Veränderungen an den Migrationswahrscheinlichkeiten soll untersucht werden. In einem weiteren Schritt wird der Einfluss von Ratingmigrationen in Abhängigkeit von Laufzeit-Annahmen bei mehrperiodiger Simulation betrachtet. Damit sich nicht mehrere Effekte überlagern, wird in diesem Kapitel mit einer konstanten LGD gerechnet.

Für eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird für das ganze Kapitel folgendes heterogene Portfolio verwendet: 100 Positionen seien jedem der 119 Sektoren zugeordnet. Das Kreuzprodukt von 20 Ratings (Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,005% bis 10%) und fünf LGD (0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6) führt zu den 100 verschiedenen

Positionen je Sektor. Damit ist gewährleistet, dass jede Ratingklasse ausreichend viele Positionen enthält und die entsprechende Migrationsmatrix vollständig Verwendung findet. Ein EAD von 10 Mio. ist für alle Positionen identisch. Jeder Sektor besitzt die nach Bemerkung 1.12 bekannte individuelle Intrasektor-Korrelation.

3.3.1 Einfluss der Migrationsmatrizen

Generische Migrationsmatrizen

Um den Zusammenhang von Migrationsmatrix und Value-at-Risk möglichst transparent zu machen, wird mit generischen und klar strukturierten Migrationsmatrizen begonnen. D.h. es werden drei Migrationsmatrizen A, B und C definiert und für das oben eingeführte Portfolio der Value at Risk für die Verlustverteilung bestimmt, wobei nur Verluste durch Ratingmigrationen und keine Ausfälle berücksichtigt werden. Aus diesem Grund sind die Migrationsmatrizen so gestaltet, dass ein Großteil der Ratingklassen eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 0% erhält. Die Migrationsmatrizen sind im Anhang B aufgeführt und sollen hier nur grob skizziert werden. Matrix A hat eine hohe Bleibewahrscheinlichkeit von 90% und nur Migrationen um bis zu drei Ratingklassen haben eine positive Wahrscheinlichkeit. Bei Matrix B wird die Bleibewahrscheinlichkeit um 10%-Punkte gesenkt und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit in eine der drei nächst höheren und niedrigeren Ratingklassen zu migrieren erhöht. Schließlich wird bei Matrix C die Bleibewahrscheinlichkeit nochmals um 10%-Punkte gesenkt und eine Migration in die fünf nächst höheren und niedrigeren Ratingklassen hat nun eine positive Wahrscheinlichkeit.

Wird der Value-at-Risk der Migrationsverluste für alle drei Migrationsmatrizen verglichen, dann ist dieser wie erwartet ansteigend von Matrix A nach C. Hierbei steigt der Value at Risk für Matrix B verglichen mit Matrix A um 55% an, für Matrix C verglichen mit Matrix B nochmals um 80%. Der Anstieg durch Matrix C ist höher, da eine Migration in fünf anstatt wie zuvor in drei benachbarte Ratingklassen möglich ist.

Ergebnis 3.12

Dieses Ergebnis zeigt deutlich, dass der Migrationsmatrix eine zentrale Bedeutung für eine adäquate Risikobestimmung zukommt.

Nach diesen generischen Beispielen soll als nächstes die geschätzte Migrationsmatrix betrachtet werden.

Geschätzte Migrationsmatrix

Für die weiteren Rechnungen in diesem Kapitel und für die Analysen des realitätsnahen Portfolios in Kapitel 3.4 wird eine Migrationsmatrix verwendet, die in Anhang B.4 zu sehen ist. Diese Matrix ist eine Schätzung anhand von historischen Ratingmigrationen und wird als gegeben angenommen. Kapitel 3.4.5 analysiert dessen Sensitivität gegenüber dem Value-at-Risk.

3.3.2 Migrationseffekte und systematisches Risiko

In Kapitel 3.2.2 wurde ein linearer Anstieg des Value-at-Risk für Ausfallverluste bei steigendem R^2 für ein eher heterogenes Portfolio beobachtet. Dieses Verhalten soll nun unter Berücksichtigung von Migrationsverlusten überprüft werden. Dazu wird die geschätzte Migrationsmatrix verwendet und das R^2 für alle Sektoren zuerst auf 0,2 und anschließend auf 0,6 gesetzt. Damit werden jeweils VaR_{def} , VaR_{mig} und VaR_{full} bestimmt. Diese wurden zu Beginn von Kapitel 3 eingeführt. Und zwar berücksichtigt der VaR_{def} ausschließlich Ausfall-Verluste, alle Migrationsverluste werden ignoriert. Entsprechend umgekehrt ist es für den VaR_{mig} der Fall: Es werden nur Migrationsverluste und keine Ausfälle berücksichtigt. VaR_{full} beschreibt den Value at Risk der Verlustverteilung, die sowohl Ausfall- als auch Migrationsverluste beinhaltet. Jetzt werden diese Ergebnisse mit den Value at Risk verglichen, die bei der Verwendung der geschätzten R^2 folgen. Tabelle 3.1 gibt an, wieviele Prozent VaR_{def} , VaR_{mig} und VaR_{full} für $R^2 = 0,2$ und $0,6$ größer sind als für die geschätzten R^2 .

R^2	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
0,2	6,8%	10,3%	7,2%
0,6	77,6%	77,9%	77,2%

Tabelle 3.1: Einfluss des systematischen Risikos auf den Value at Risk

Ergebnis 3.13

Es ist zu erkennen, dass der Value at Risk für Ausfall-, Migrations- und für sämtliche Verluste ähnlich sensiv auf eine Änderung des R^2 reagieren. Dieses folgt aus der Tatsache, dass für eine Position derselbe Asset-Return zur Bestimmung von Migrations- und Ausfallverlusten verwendet wird. Sofern durch ein anderes R^2 dieser Prozess verändert wird, ist die relative Änderung der Verluste ähnlich.

3.3.3 Einfluss der Annahmen zum Reinvestment

Als nächstes sollen die Annahmen zum Reinvestment aus Kapitel 2.3 auf ihren Einfluss auf den Value at Risk untersucht werden. Dazu wird in der folgenden Analyse nicht wie bisher der einperiodige Risikohorizont verwendet, sondern der zwölfperiodige Risikohorizont wird simuliert. Für das in diesem Kapitel verwendete Portfolio wird die Liquidationszeit in Anzahl an Perioden für alle Positionen identisch gesetzt. D.h. für die Liquidationszeit $M_i(t_0) = m_{i,0}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt

$$m_{1,0} = m_{2,0} = \dots = m_{m,0}. \quad (3.11)$$

Die verschiedenen Value-at-Risk für $m_{i,0} = 1, 3, 6$ und 12 sind in Abbildung 3.10 dargestellt.

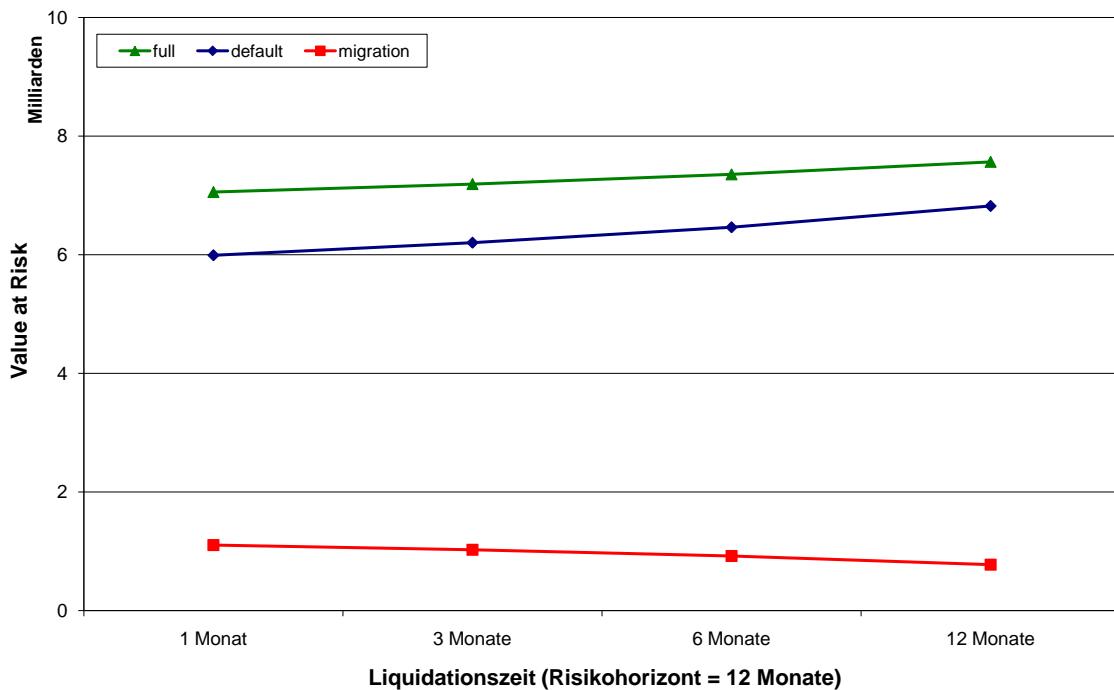


Abbildung 3.10: Einfluss der Liquidationszeit

Zuerst soll festgestellt werden, dass nur für $m_{i,0} = 1$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) die zwölf Perioden stochastisch unabhängig sind. Gilt $m_{i,0} > 1$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, so entstehen Abhängigkeiten zwischen den Perioden, da für alle Position i mit $m_{i,0} > 1$ eine Ratingmigration in der einen Periode Einfluss auf die darauffolgende Periode haben kann. Betrachte zuerst den Value at Risk für reine Ausfallereignisse. Dieser steigt mit ansteigender Liquidationszeit deutlich an, welches mit einer steigenden Ausfallwahrscheinlichkeit begründet werden kann. Für die Wahrscheinlichkeit für

mindestens einen Ausfall von einer Position i mit $m_{i,0} = 1$ in den zwölf Perioden gilt:

$$\begin{aligned} p_i^{m_{i,0}=1} &= P\left(\sum_{p=1}^{12} Y_i(t_p) \geq 1\right) = 1 - P\left(\sum_{p=1}^{12} Y_i(t_p) = 0\right) \\ &= 1 - \prod_{p=1}^{12} (1 - p_i(t_p)) \stackrel{\text{Gleichung 2.1}}{=} 1 - (1 - p_i(\Delta t))^{12} \end{aligned}$$

und ist kleiner als die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall von einer Position i mit $m_{i,0} > 1$ in den zwölf Perioden. Genauer gilt bei Verwendung der Migrationsmatrix aus Anhang B.4 für $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$p_i^{m_{i,0}=1} \leq p_i^{m_{i,0}=3} \leq p_i^{m_{i,0}=6} \leq p_i^{m_{i,0}=12}. \quad (3.12)$$

Diese Aussage ist nicht allgemein gültig, sondern hängt von der zugrunde liegenden Migrationsmatrix ab.

Ergebnis 3.14

Der Value at Risk für reine Ausfallereignisse steigt mit ansteigender Liquidationszeit deutlich an, was mit einer steigenden Ausfallwahrscheinlichkeit (vergleiche Gleichung 3.12) begründet werden kann. Da die Ausfallereignisse den Value at Risk, der alle Verluste berücksichtigt, dominieren, steigt auch dieser mit steigender Liquidationszeit an.

3.4 Realitätsnahe Portfolio

Im folgenden Kapitel soll ein realitätsnahes Portfolio als Grundlage für die weiteren Sensitivitätsanalysen dienen. An dieser Stelle wird die Entstehung des Portfolios beschrieben und die Frage beantwortet, wieso es *realitätnah* ist. Die Struktur des Portfolios wird außerdem in Kapitel 3.4.1 erläutert.

Bei der Definition des Portfolios dienten realen Portfolien als Vorbild. Die Erkenntnisse über Größe und Struktur der Positionen in realen Portfolien waren die Grundlage für die Definition des realitätsnahen Portfolios. Konzentrationen innerhalb des realitätsnahen Portfolios, wie in Abbildung 3.2 und 3.3 dargestellt, wurden geschaffen, da diese auch in realen Portfolien zu finden sind. Insgesamt ist das realitätsnahe Portfolio wesentlich komplexer und heterogener, als die bisher verwendeten Portfolien.

Als nächstes wird ein Benchmark-Lauf definiert, der als Grundlage für die Analysen in diesem Kapitel dient. Es seien die Werte aus den Bemerkungen 1.12 und 2.15 für alle Positionen bekannt. Mit folgender Parametrisierung wird der Benchmark durchgeführt:

- Es wird die Migrationsmatrix aus Anhang B.4 verwendet.
- Es werden vier Perioden simuliert.
- Die Monte-Carlo-Simulation wird mit vier Millionen Realisationen durchgeführt.
- Die LGD-Stochastik wird mit dem Varianzparameter $K = 2$ für alle Positionen verwendet.
- Es gelten die Reinvestment-Annahmen aus Kapitel 2.3 nach denen ein konstantes Risiko-Level gehalten werden soll.
- Als Bauparameter (siehe Bemerkung 1.4) für die Intersektor-Korrelation verwende $\rho_{basis} = 45\%$, $\rho_R = 22\%$, $\rho_I = 22\%$ und $\rho_{RI} = 11\%$.

Mit dieser Parametrisierung werden nun die Value at Risk VaR_{def} , VaR_{mig} und VaR_{full} zum 99,9%-Quantil für die Verlustverteilungen bestimmt. In den anschließenden Analysen werden die relative Veränderungen der drei Value at Risk verglichen mit ihren Entsprechungen aus dem Benchmark-Lauf als Maß für den Einfluss des untersuchten Parameters festgestellt.

3.4.1 Portfoliostruktur

Viele Beobachtungen in den Analysen dieses Kapitels lassen sich auf die Struktur des zugrunde liegenden Portfolios zurückführen. Daher soll eine gründliche Beschreibung der Portfoliostruktur vorangestellt werden. Das realitätsnahe Portfolio umfasst 16550 Positionen. Das Rating der Positionen reicht von *AAA* bis *C* (d.h. eine Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen 0,005% und 40%), die erwartete LGD liegt zwischen 7% und 90%, die Liquidationszeit zwischen einer und vier Perioden. In den bisher verwendeten Portfolien galt immer $EAD > 0$, d.h. es wurden Long-Positionen definiert. In dem realitätsnahen Portfolio sind zusätzlich Short-Positionen möglich ($EAD < 0$), die als Hedge für eine Long-Position fungieren können. Um Durchschnittswerte für Ausfallwahrscheinlichkeit, LGD und Liquidationszeit anzugeben, ist es nicht sinnvoll deren arithmetisches Mittel zu verwenden. Stattdessen werden

Durchschnittswerte gebildet, die mit dem absoluten EAD der einzelnen Positionen gewichtet sind:

$$\begin{aligned}
 p_{PF} &= \frac{\sum_{i=1}^{16650} p_i |EAD_i|}{\sum_{i=1}^{16650} |EAD_i|} = 2,1859\% \\
 LGD_{PF} &= \frac{\sum_{i=1}^{16650} LGD_i |EAD_i|}{\sum_{i=1}^{16650} |EAD_i|} = 40,87\% \\
 M_{PF,0} &= \frac{\sum_{i=1}^{16650} M_{i,0} |EAD_i|}{\sum_{i=1}^{16650} |EAD_i|} = 2,1568 \\
 M_{PF,0}^{long} &= \frac{\sum_{i=1}^{16650} M_{i,0} |EAD_i| \mathbb{1}_{\{EAD_i > 0\}}}{\sum_{i=1}^{16650} |EAD_i| \mathbb{1}_{\{EAD_i > 0\}}} = 2,1425 \\
 M_{PF,0}^{short} &= \frac{\sum_{i=1}^{16650} M_{i,0} |EAD_i| \mathbb{1}_{\{EAD_i < 0\}}}{\sum_{i=1}^{16650} |EAD_i| \mathbb{1}_{\{EAD_i < 0\}}} = 2,1774
 \end{aligned}$$

Darüber hinaus lassen sich bei der EAD-Verteilung Konzentrationsrisiken feststellen. Wie in Kapitel 3.1 eingeführt, liegen *Einzelnamens-* und *Sektorkonzentrationen* vor. Da Ausfallereignisse maßgeblich den Gesamt-Value at Risk bestimmen, soll hier das Konzentrationsrisiko gemeinsamer Ausfälle erläutert werden. Um diese Konzentrationsrisiken besser einschätzen zu können, werden die Positionen des Portfolios folgendermaßen aggregiert: zuerst werde das EAD von Positionen, die mehr als einem Sektor zugeordnet sind, entsprechend geteilt. Danach weist jede Position eindeutig einem Sektor einen Teil seines EAD zu. Für die Erklärung von Konzentrationsrisiken ist die Höhe eines Verlustes entscheidend. Daher wird das EAD jeder Position mit dessen erwarteter LGD multipliziert. Nun werden die Positionen aggregiert, die vom gleichen Kunden stammen und bei denen sowohl Sektorzugehörigkeit als auch Rating übereinstimmen, d.h. sie verwenden den gleichen Asset-Return und die gleiche Ausfallschranke. Es findet nur ein Ausfall aller oder keiner dieser aggregierten Positionen statt. Aus 16650 Positionen werden dabei 1416 Aggregationen.

Ergebnis 3.15

Tabelle 3.2 zeigt die zehn größten Aggregationen sortiert nach Höhe des Verlustes bei einem Ausfall. Der Verlust ist als relativer Anteil an der Summe von $|EAD| * LGD$ aller Aggregationen dargestellt. Es liegt eine hohe Einzelnamenskonzentration vor. Für jeden Sektor werden nun die positiven und negativen Aggregationen getrennt zusammengefasst und in Tabelle 3.3 aufgelistet. Dabei wird eine starke Sektorkonzentration in Sektor 28 sichtbar. Dieser lässt sich gemäß Definition 1.7 als *Financials* in *West-Europa* identifizieren.

Aggregation	Sektor	p	rel. EAD*LGD
1	28	0,01%	16,78%
2	28	0,02%	7,90%
3	28	0,01%	6,97%
4	96	0,01%	4,04%
5	28	0,005%	3,50%
6	28	0,11%	2,66%
7	28	0,11%	2,62%
8	28	0,01%	1,93%
9	28	0,005%	1,58%
10	28	0,03%	1,23%

Tabelle 3.2: Einzelnamenskonzentration

Sektor	rel. EAD*LGD
28	59,84%
33	5,35%
96	4,04%
113	2,52%

Tabelle 3.3: Sektorkonzentration

3.4.2 Abhängigkeitsstruktur

Intrasektor-Korrelation

Als nächstes soll der Einfluss der Intrasektor-Korrelation auf den Value at Risk untersucht werden. Da Ausfallereignisse maßgeblich den Value at Risk bestimmen, konzentriert sich die folgende Analyse auf ausgefallene Positionen. Außerdem ist dann ein Vergleich mit der in Abbildung 3.3 dargestellten Untersuchung für ein homogenes Portfolio möglich. In Abbildung 3.3 steigt der Value at Risk abhängig von Diversifikationsgrad um 70% bis 100%, wenn das R^2 für alle Sektoren von 7% auf 17% erhöht wird. Nochmaliges erhöhen auf 27% steigert den Value-at-Risk um weitere 41% bis 56%.

Diese Untersuchung wird jetzt mit dem realitätsnahen Portfolio wiederholt. Es wird, wie in der Einführung von Kapitel 3.4 beschrieben, mehrperiodig simuliert. Zur besseren Vergleichbarkeit wird einmal mit und einmal ohne stochastische LGD gerechnet. Die relative Erhöhung des Value at Risk verglichen mit dem Ergebnis für $R^2 = 7\%$ ist in Abbildung 3.11 aufgeführt.

Es fällt auf, dass die Erhöhung drastisch niedriger ausfällt als für das besagte homogene Portfolio aus Abbildung 3.3 wie gerade erläutert. Diese unerwartet große Diskrepanz soll nun erklärt werden. Der Grund für die vergleichsweise sehr geringe Sensitivität des realitätsnahen Portfolios gegenüber dem R^2 ist dessen besondere

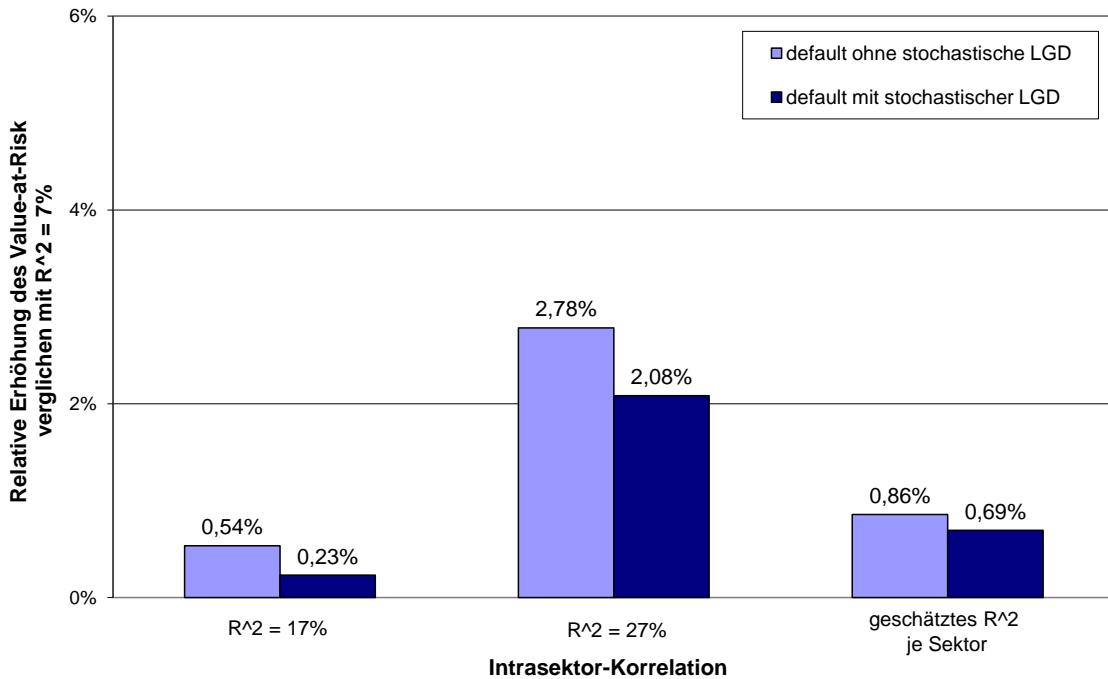


Abbildung 3.11: Value at Risk in Abhängigkeit vom R^2

Struktur. Wie in Tabelle 3.2 aufgelistet, scheint der Value at Risk durch wenige einzelne Positionen dominiert zu sein. Anhand der Verlust- und Verteilungsfunktion des Portfolioverlustes für $R^2 = 7\%$ und 27% soll diese Vermutung bestätigt werden. Abbildung 3.12 zeigt die Verlustverteilung des realitätsnahen Portfolios für $R^2 = 7\%$ und 27% . Der gewählte Ausschnitt konzentriert sich auf den Tail der Verteilung und es lassen sich vier Erhebungen jenseits der beiden eingeziehenen Value at Risk-Schranken erkennen. Da diese Erhebungen Portfolioverluste mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit darstellen, müssen sie in der Monte-Carlo-Simulation entsprechend oft aufgetreten sein. Das lässt darauf schließen, dass dominierende Einzelpositionen aus Tabelle 3.2 für diese hohen Verluste verantwortlich sind.

Abbildung 3.13 zeigt die Verteilungsfunktion des realitätsnahen Portfolios für $R^2 = 7\%$ und 27% . Es wird deutlich, dass die relative Erhöhung des Value at Risk auch vom betrachteten Quantil abhängt. Die Differenz beider Verteilungsfunktionen variiert zwischen den gezeigten 99,9% und 99,95% stark.

Ergebnis 3.16

Damit ist deutlich geworden, dass die Korrelation zwischen einigen wenigen Positionen eine eher untergeordnete Rolle in einem Portfolio mit hoher Einzelnamenskonzentration spielt. Beim homogenen Portfolio dagegen sind alle Positionen bis

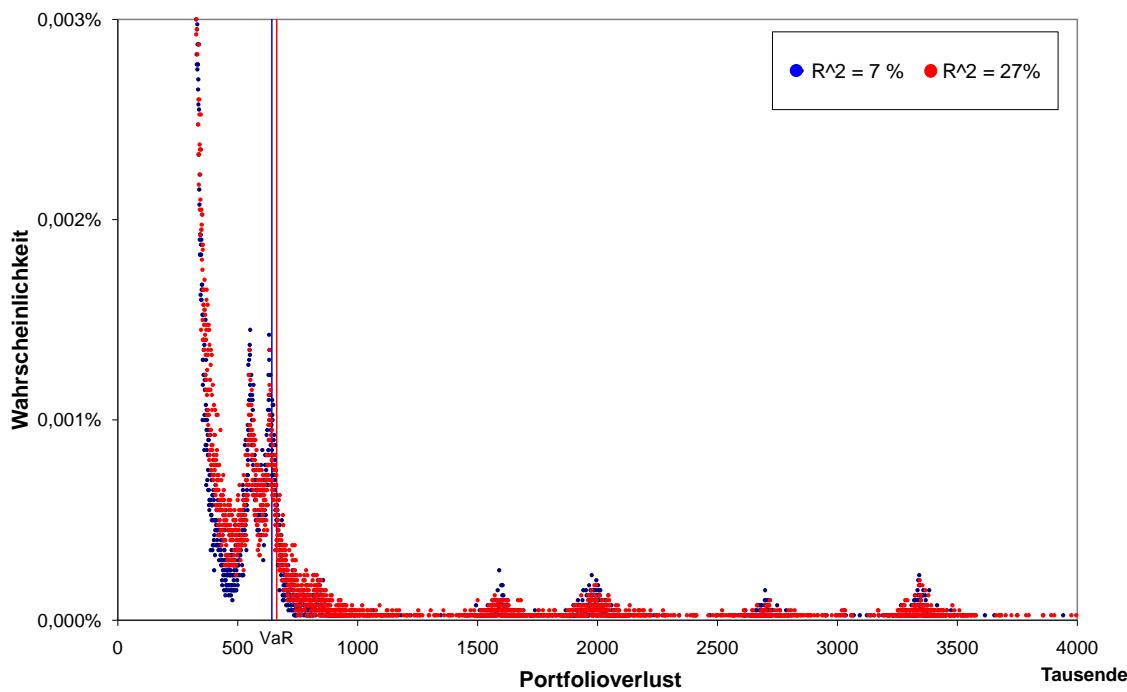


Abbildung 3.12: Portfolioverlustverteilung

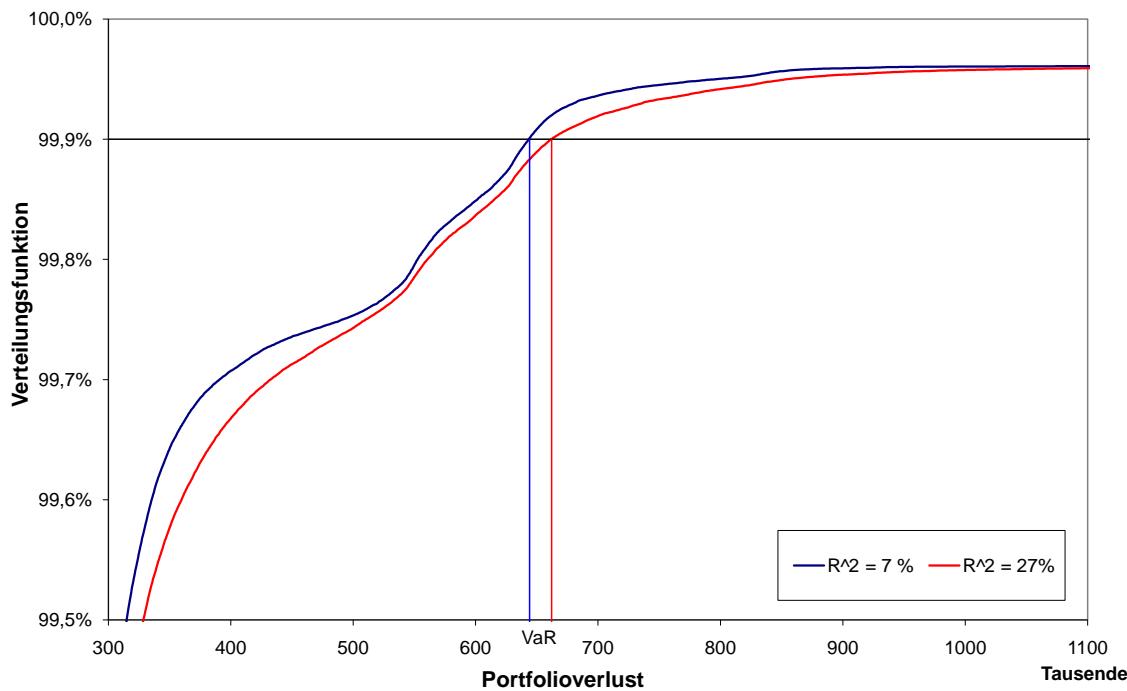


Abbildung 3.13: Verteilungsfunktionen des Portfolioverlustes

auf ihre Sektorzugehörigkeit identisch. Zum Value-at-Risk tragen sehr viel mehr Positionen bei, wodurch die Intrasektor-Korrelation einen weitaus größeren Einfluss hat.

Intersektor-Korrelation

Der zweite Teil der modellierten Abhängigkeitsstruktur sind die Intersektor-Korrelationen zwischen den sektorspezifischen Faktoren, die anschließend ins Faktormodell einfließen (siehe Kapitel 1.3). Die Intersektor-Korrelationen werden wie in Bemerkung 1.4 beschrieben in einem Baumparameter-Ansatz dargestellt. Jetzt soll die Intersektor-Korrelation deutlich erhöht werden. Dazu wird die Basiskorrelation aus der Einführung von Kapitel 3.4 erhöht und die anderen Baumparameter entsprechend angepasst:

$$\rho_{basis} = 61\%, \rho_R = 16\%, \rho_I = 19\% \text{ und } \rho_{RI} = 5\% \quad (3.13)$$

Die Erhöhung der Value at Risk durch diese Modifikation verglichen mit dem Benchmark-Lauf lässt sich in Tabelle 3.4 ablesen.

Trotz der deutlichen Erhöhung der Basiskorrelation ρ_{basis} von 45% auf 61% ist die

	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
Erhöhung	1,07%	1,34%	1,38%

Tabelle 3.4: Einfluss der Intersektor-Korrelation auf den Value at Risk

Erhöhung des Value at Risk sehr niedrig. Diese Beobachtung lässt sich abermals mit der Struktur des realitätsnahen Portfolios erklären. Tabelle 3.3 zeigt eine hohe Sektor-Konzentration. Für die Korrelation zwischen Positionen innerhalb eines Sektors ist die Höhe der Baumparameter unerheblich, da deren sektorspezifische Faktoren als perfekt korreliert modelliert sind.

Ergebnis 3.17

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Abhängigkeitsstruktur des realitätsnahen Portfolios weitaus weniger Einfluss auf den Value at Risk hat als für den Spezialfall in Kapitel 3.1 festgestellt. Es wurden die Einzelnamens- und Sektor-Konzentrationen des realitätsnahen Portfolios als Grund für diese unterschiedliche Sensitivität angeführt. Eine Analyse der Verlustverteilungen bestätigte diese Behauptung.

3.4.3 LGD-Stochastik

In Kapitel 3.2 wurde der Einfluss einer stochastischen LGD für homogene Portfolien untersucht. Je nach Portfoliostruktur war die Sensitivität der homogenen Portfolien sehr stark. Inwieweit sich das für das realitätsnahe Portfolio ebenfalls beobachten lässt, soll nun geklärt werden. Außerdem wird der Varianzparameter K näher be-

trachtet. Er bestimmt die Varianz der Beta-Verteilung, dabei wird untersucht, wie groß sein Einfluss auf den Value at Risk ist. In beiden Analysen sollte der Value at Risk der Migrationsverluste VaR_{mig} durch Veränderungen an der LGD unverändert bleiben.

LGD-Stochastik

Durch die Verwendung einer konstanten LGD sinkt der Value at Risk, wie in Tabelle 3.5 zu sehen, für Default-Verluste um 27,82% und für Default- und Migrationsverluste um 11,93%. Der Value at Risk für Migrationsverluste ohne Default-Verluste sollte sich nicht ändern und die Erhöhung von 0,58% ist mit dem statistischen Fehler der Monte-Carlo-Simulation zu begründen. Die besagten Konzentrationen im realitätsnahen Portfolio führen, wie in Ergebnis 3.10 erläutert, zu dieser hohen Sensitivität gegenüber der LGD-Stochastik.

LGD-Stochastik	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
konstant	-27,82%	0,58%	-11,93%

Tabelle 3.5: Einfluss der LGD-Stochastik auf den Value at Risk

Varianz-Parameter K

Der Varianzparameter K hat großen Einfluss auf die LGD-Stochastik und damit auf den Value at Risk. Hier soll die Tendenz gezeigt werden, die eine Änderung an dem in Kapitel 3.4 aufgeführten Wert von K=2 zur Folge hat. Dazu wird K in zwei Testläufen einmal um 0,1 gesenkt und anschließend erhöht. Die Auswirkung auf den Value at Risk ist in Tabelle 3.6 zu sehen. Für erhöhte K-Werte sinkt die Varianz der Betaverteilung und der Value at Risk sinkt ebenfalls, für verringerte K-Werte steigen Varianz und Value at Risk entsprechend. Unter bestimmten Voraussetzungen wurde dazu eine Aussage in Satz 1.11 gezeigt. Vergleicht man den von KMV vorgeschlagenen Wert von K=4 und die hier verwendeten K=2, dann kann letztere Wahl als konservativer gegenüber der KMV-Empfehlung bezeichnet werden.

LGD-Stochastik	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
mit K=1,9	1,15%	0%	0,69%
mit K=2,1	-1,00%	0%	-0,69%

Tabelle 3.6: Einfluss des Varianzparameter K der LGD-Stochastik auf den Value at Risk

3.4.4 Liquidationszeit

In Kapitel 3.4.1 wurden die mit dem absoluten EAD gewichteten durchschnittlichen Liquidationszeiten für die Long- und Short-Positionen berechnet: $M_{PF,0}^{long} = 2,1425$ und $M_{PF,0}^{short} = 2,1774$. Nun wird die Sensitivität gegenüber der Liquidationszeit untersucht. Dazu wird die Liquidationszeit aller Positionen einmal um eins erhöht, sofern sie nicht schon vier Perioden beträgt und einmal um eins gesenkt, sofern sie nicht schon eine Periode beträgt: $\min\{M_{i,0} + 1, 4\} \forall i \in \{1, \dots, 16650\}$ und $\max\{M_{i,0} - 1, 1\} \forall i \in \{1, \dots, 16650\}$. Die Auswirkungen dieser Veränderung auf den Value at Risk sind sehr gering, da Long- und Short-Positionen simultan geändert werden. In Tabelle 3.7 ist daher außerdem das Ergebnis eines Laufs zu sehen, bei dem die Liquidationszeit aller Short-Positionen auf eins und die aller Long-Positionen auf vier gesetzt ist: $M_{i,0} = 1 * \mathbb{1}_{\{EAD_i \leq 0\}} + 4 * \mathbb{1}_{\{EAD_i > 0\}} \forall i \in \{1, \dots, 16650\}$. Tabelle 3.7 gibt wieder an, wieviel Prozent die Value at Risk jeweils vom Value at Risk des Benchmark-Laufs (vergleiche Einführung von Kapitel 3.4) abweichen.

Liquidationszeit ($\forall i \in \{1, \dots, 16650\}$)	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
$\min\{M_{i,0} + 1, 4\}$	0,08%	0,77%	0,34%
$\max\{M_{i,0} - 1, 1\}$	-0,77%	-0,19%	-0,69%
$M_{i,0} = 1 * \mathbb{1}_{\{EAD_i \leq 0\}} + 4 * \mathbb{1}_{\{EAD_i > 0\}}$	432,64%	26,49%	356,41%

Tabelle 3.7: Einfluss der Liquidationszeit auf den Value at Risk

Ergebnis 3.18

In Kapitel 3.3.3 wurde für Long-Positionen ein Anstieg des Value at Risk bei steigender Liquidationszeit festgestellt. Dies lässt sich bei dem realitätsnahen Portfolio bestätigen und entsprechend sinkt der Value at Risk für Short-Positionen. Werden nun die Liquidationszeiten von Long- und Shortpositionen unterschiedlich geändert, so hat dieses sehr großen Einfluss auf den Value at Risk.

Der VaR_{full} ist in diesem Fall auf etwa 356% höher als beim Benchmark-Lauf. Dieser enorme Anstieg ist in dieser Höhe nicht zu erwarten gewesen und bedarf einer Erklärung. Im realitätsnahen Portfolio des Benchmark-Laufs haben Long- und Short-Positionen einen sich ausgleichenden Effekt in der Verlustverteilung. Dieser Ausgleich findet mit geänderten Liquidationszeiten nur noch teilweise statt. Hohe Verluste auf Long-Positionen werden nicht mehr größtenteils durch Short-Positionen aufgefangen. Daher ist der Anstieg des Value at Risk für Ausfall-Ereignisse mit

432,64% auch maßgeblich für einen Anstieg des VaR_{full} verantwortlich, da der Value at Risk für Migrationsverluste nur um vergleichsweise geringe 26,49% steigt. In dieser Analyse wird die hohe Bedeutung der Liquidationszeit deutlich und dessen Änderung ist im Rahmen von Stress-Szenarien üblich. Für das realitätsnahe Portfolio wird ein Stress-Szenario in Kapitel 3.4.7 definiert.

3.4.5 Ratingmigrationen

In diesem Kapitel soll der Einfluss von Ratingmigrationen inklusive der Migration in den Ausfall-Zustand auf den Value-at-Risk untersucht werden. Dazu wird sich zunächst der Migrationsmatrix gewidmet. Diese wird modifiziert und der resultierende Einfluss beobachtet und interpretiert. Außerdem wird anstatt der Migrationsmatrix das Rating aller Positionen verschlechtert und die Auswirkungen aufgezeigt.

Migrationsmatrix

Die geschätzte Migrationsmatrix (siehe Anhang B.4) wird auf drei verschiedene Arten modifiziert. Begonnen wird mit einem symmetrischen Shift: Ein Prozentpunkt wird von der Hauptdiagonalen jeweils zur Hälfte sofern möglich auf die beiden Nebendiagonalen verteilt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Migration in den Ausfall-Zustand wird nicht geändert. Als Ergebnis ist in der Zeile *symmetrisch* in Tabelle 3.8 zu erkennen, dass der Value at Risk der Ausfallverluste VaR_{def} wegen der unveränderten Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht vom Benchmark-Lauf abweicht. Der Value at Risk für die Migrationsverluste VaR_{mig} steigt leicht an und insgesamt ist dadurch ein geringer Anstieg von 0,76% im VaR_{full} zu beobachten. In Anhang 3.3.1 wurde eine generische Matrix auf ähnliche Weise verändert. Obwohl dort mit 10 Prozentpunkten mehr von der Diagonalen genommen wurde, ist der Anstieg des Value-at-Risk von Matrix A nach B um 55% um ein Vielfaches größer als hier beobachtet. Diese Diskrepanz ist dadurch zu erklären, dass wie in Kapitel B zu sehen bei den Matrizen A und B nur die drei schlechtesten Ratingklassen eine nicht-negative Ausfallwahrscheinlichkeit haben und der Anteil von Migrationsverlusten am Value at Risk dadurch wesentlich größer ist.

Nun wird in einer zweiten Modifikation anstatt eines symmetrischen Shifts die Migrationswahrscheinlichkeit in die untere Dreiecksmatrix zugefügt. Das Ergebnis ist in der Zeile *upshift* in Tabelle 3.8 zu sehen. Es wird wieder ein Prozentpunkt von der Diagonalen, d.h. der Bleibewahrscheinlichkeit, genommen und gewichtet nach den Wahrscheinlichkeiten für eine Migration in eine bessere Ratingklasse zu diesen Wahrscheinlichkeiten addiert. Da damit die Wahrscheinlichkeit für Erträge aus

Ratingverbesserungen, die andere Verluste reduzieren, steigt, sinkt der Value at Risk für Migrationsverluste leicht um 0,58%. Der Value at Risk für Ausfallverluste sinkt ebenfalls minimal um 0,15%, da die Ausfallwahrscheinlichkeit in einer besseren Ratingklasse etwas geringer ist und diese in einer vierperiodigen Simulation für einige Positionen von Bedeutung sein kann. Insgesamt sinkt der VaR_{full} um 0,41%. Dieser sehr geringe Einfluss auf den Value at Risk ist überraschend, da auch Wahrscheinlichkeiten für eine Migration um mehrere Ratingklassen erhöht wurden. Die resultierenden Erträge scheinen verglichen mit den Verlusten nur minimalen Einfluss auf den Value-at-Risk zu haben.

In einer dritten Modifikation der Migrationsmatrix wird ähnlich wie in der zweiten Modifikation vorgegangen. Das Ergebnis ist in der Zeile *downshift* zu sehen. Hierbei wird der Prozentpunkt von der Diagonalen auf die Migrationswahrscheinlichkeit in die schlechteren Ratingklassen inklusive der Ausfallwahrscheinlichkeit verschoben. Der Prozentpunkt wird, gewichtet nach den Wahrscheinlichkeiten in der oberen Dreiecksmatrix ohne die Diagonale, verteilt. Der Einfluss auf den Value at Risk ist wesentlich größer als bei der zweiten Modifikation. Der Value at Risk für Ausfallverluste steigt um 17,62% und der für Migrationsverluste um 14,01%. Insgesamt steigt der VaR_{full} um 19,17%. Der deutliche Anstieg der Ausfallverluste lässt sich damit erklären, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit mit sinkender Ratingklasse exponentiell ansteigt.

Migrationsmatrix	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
symmetrisch	0%	3,07%	0,76%
upshift	-0,15%	-0,58%	-0,41%
downshift	17,62%	14,01%	19,17%

Tabelle 3.8: Einfluss der Migrationsmatrix auf den Value at Risk

Ergebnis 3.19

Es lässt sich folgern, dass das realitätsnahe Portfolio wesentlich sensitiver auf Änderungen der Migrationswahrscheinlichkeiten in schlechtere als in bessere Ratingklassen reagiert. Diese Erkenntnis kann bei der Schätzung der Migrationsmatrix von Bedeutung sein.

Ratingverschlechterung

Nun bleibt die Migrationsmatrix unverändert und stattdessen wird das Rating jeder Position um eine Ratingklasse sofern möglich gesenkt. Durch die neue Ratingklasse steigt die Ausfallwahrscheinlichkeit an. In Tabelle 3.9 ist zu erkennen, dass dadurch

der VaR_{def} um 24,90% steigt. Die Auswirkungen auf die Migrationsverluste sind nur sehr gering und es ist insgesamt für den VaR_{full} ein Anstieg von 24,90% zu beobachten. Von der veränderten Ratingklasse sind sowohl Long- wie auch Short-Positionen betroffen. Dennoch können die Short-Positionen die erhöhten Ausfall-Verluste nicht auffangen und der Anstieg des Value at Risk ist wie gerade geschildert sehr deutlich. Im nächsten Kapitel wird eine Ratingverschlechterung aller Positionen im Portfolio als Bestandteil eines Stress-Szenarios verwendet.

Rating	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
Abwertung eine Stufe	24,90%	-0,96%	24,90%

Tabelle 3.9: Einfluss einer Ratingverschlechterung auf den Value at Risk

3.4.6 Hauptkomponentenanalyse des Mehr-Faktoren-Modells

In Kapitel 1.3 wurde die Methodik des Mehr-Faktoren-Modells erläutert. Nun wird der Einfluss der Hauptkomponentenanalyse auf den Value at Risk für das realitätsnahe Portfolio untersucht. Die Zeitersparnis durch die verringerte Anzahl an Faktoren bei der Monte-Carlo-Simulation mit vier Millionen Simulationen beträgt knapp 25%. Dafür erhöht sich der VaR_{full} wie in Tabelle 3.10 zu sehen um 1,86%.

	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
Erhöhung	2,53%	0,19%	1,86%

Tabelle 3.10: Einfluss der Hauptkomponentenanalyse auf den Value at Risk

3.4.7 Stress-Szenario

Ein Stresstest ergänzt die Instrumente des Risikomanagements und untersucht die Auswirkungen bestimmter krisenhafter Marktentwicklungen (beispielsweise gesamtwirtschaftliche Rezession) auf den Wert eines Portfolios (siehe [5]). Daher sollen nun die Erkenntnisse aus den Sensitivitätsanalysen in ein Stress-Szenario einfließen. Es werden folgende Parameter nicht wie bisher einzeln geändert, sondern gleichzeitig:

- Die Liquidationszeit wird wie in Kapitel 3.4.4 um eine Periode erhöht. Es wird angenommen, dass die Zeit bis zum Verkauf einer Position in einer gestressten Situation zunimmt.
- Die erwartete LGD aller Positionen wird um zehn Prozentpunkte erhöht.

- Die Ratingklassen werden wie in Kapitel 3.4.5 um eine Stufe verschlechtert.
- Ein Anstieg von Inter- und Intrasektor-Korrelationen wie in Kapitel 3.4.2, d.h. R^2 wird für alle Sektoren um 10 Prozentpunkte erhöht und die Baumparameter mit erhöhter Basis-Korrelation verwendet. Ein Anstieg von Korrelationen in Krisenzeiten ist plausibel nach [4].

	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
Stress-Szenario	53,18%	9,02%	58,90%

Tabelle 3.11: Einfluss des Stress-Szenarios auf den Value at Risk

In Tabelle 3.11 sind die Ergebnisse des Stress-Tests zu sehen. Der VaR_{mig} steigt mit 9,02% deutlich weniger stark an als der VaR_{def} mit 53,18%. Insgesamt ist eine Erhöhung von 58,90% des VaR_{full} zu beobachten.

Ergebnis 3.20

Die geänderte Ratingklasse und die damit verbundene erhöhte Ausfallwahrscheinlichkeit zusammen mit dem erhöhten erwarteten LGD sind für dieses Ergebnis maßgeblich verantwortlich. Wie in Kapitel 3.4.5 gesehen, reagieren die Migrationsverluste weniger sensitiv auf die schlechtere Ratingklasse. Die Liquidationszeit hat nach Kapitel 3.4.4 kaum Einfluss auf den Value at Risk solange Long- und Short-Positionen simultan geändert werden. Auch der Einfluss der Korrelationserhöhung ist nach Kapitel 3.4.2, verglichen mit der Ratingänderung, gering.

Kapitel 4

Kreditportfoliomodell der WestLB AG

4.1 Portfolio Manager Plus

Der *Portfolio Manager Plus* ist ein Kreditportfoliomodell der WestLB AG. Diesem Programm liegt eine Modellierung zugrunde, die in Kapitel 1 durchgeführt wurde. Die Sensitivitätsanalyse in Kapitel 3 wurde mit dem Portfolio Manager Plus durchgeführt.

Die Verlustverteilung eines Portfolios wird durch eine Monte-Carlo-Simulation geschätzt und ist wesentliches Ergebnis des Programms. Der Ablauf der verwendeten Monte-Carlo-Simulation folgt in Anhang A. Zur Veranschaulichung wird die Verlustverteilung des realitätsnahen Portfolios (Benchmark-Lauf) aus Kapitel 3.4 für 4 Mio. Monte-Carlo-Realisationen in Abbildung 4.1 dargestellt. Auf der X-Achse sind die möglichen Portfolioverluste aufgetragen und auf der Y-Achse ist zu erkennen, wie oft die jeweiligen Portfolioverluste als Ergebnis auftraten.

Durch negatives EAD in dem realitätsnahen Portfolio kann der Portfolioverlust negativ sein. Der Value at Risk zum 99,9%-Quantil ist als senkrechte Linie eingezeichnet.

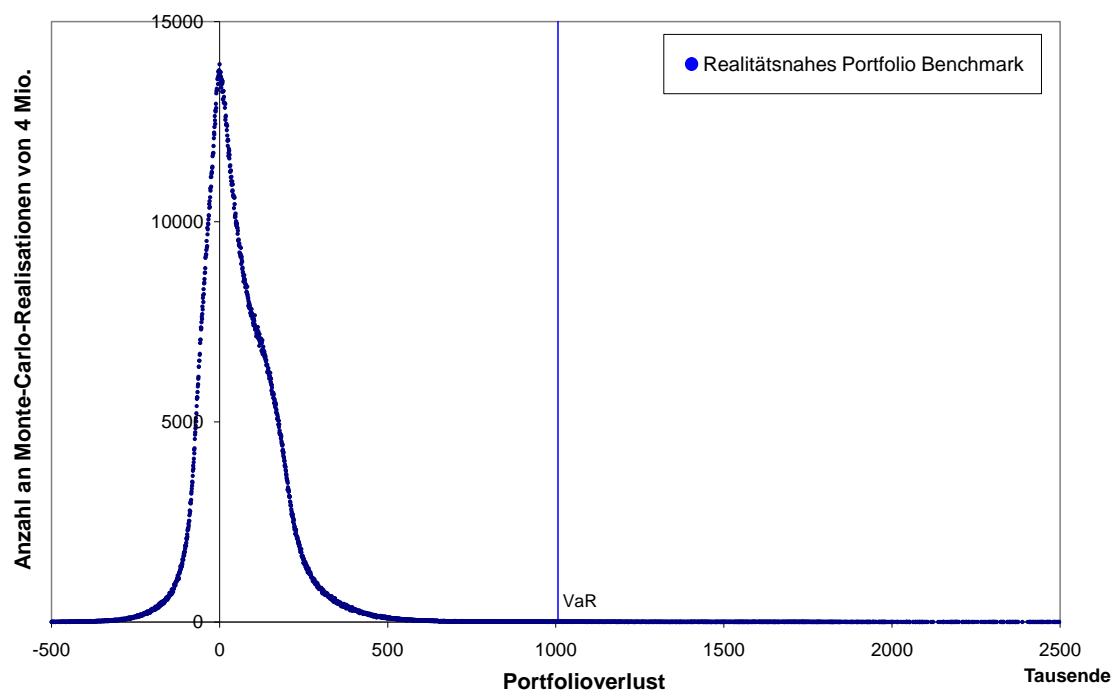


Abbildung 4.1: Verlustverteilung bestimmt durch die Monte-Carlo-Simulation

Kapitel 5

Kritische Würdigung

Eine adäquate Bestimmung des Kreditrisikos eines Portfolios einer Bank ist unabdingbar sowohl für ihre Steuerung als auch die Kontrolle ihrer Stabilität. Aus dieser Motivation wurde ein Kreditportfoliomodell aufgebaut, das eine Aussage über die möglichen Verluste macht, die durch Ausfall oder Bonitätsänderungen von Positionen im Portfolio entstehen. Bei der Modellierung ist der Unterschied von systematischen Risiken, denen in gewissem Umfang alle Marktteilnehmer ausgesetzt sind, und idiosynkratischen Risiken, die die einzelne Position birgt, berücksichtigt worden. Ein Mehrfaktoren-Modell wurde aufgebaut unter anderem um die Abhängigkeiten zwischen den Positionen im Portfolio abzubilden.

Darüber hinaus wurde der Verlust, der tatsächlich durch den Ausfall einer Position entsteht, um eine zufällige Komponente erweitert. Dies spiegelt den unsicheren Charakter einer geschätzten Verlustquote (LGD) für ein Geschäft wieder. In einem nächsten Schritt wurde eine mehrperiodige Simulation des Modells aufgebaut, die die realisierten Portfolioverluste im Zeitverlauf aufzeichnet. Die Definition von Risikoparametern hat die Modellierung des Portfoliomodells abgeschlossen.

Die anschließende Sensitivitätsanalyse hat die Funktionsweise des Portfoliomodells überprüft und Zusammenhänge von Modellparametern offen gelegt. Bei dieser Analyse ist gezeigt worden, dass der Einzelnamens-Konzentrationseffekt zu einem unerwarteten Anstieg des Portfoliorisikos führen kann. Und zwar darf bei der Prüfung von Neugeschäften, die zu einem Portfolio hinzugefügt werden sollen, nicht einzig die Ausfallwahrscheinlichkeit der Position im Mittelpunkt stehen. Es wurde gezeigt, dass eine Position mit vergleichsweise hoher Ausfallwahrscheinlichkeit ohne einen Konzentrationseffekt hervorzurufen das Portfoliorisiko weniger stark steigen lassen

kann als eine Position mit sehr niedriger Ausfallwahrscheinlichkeit mit Konzentrationseffekt. Eine ausreichende Diversifikation eines Portfolios ist teilweise wichtiger als eine niedrige Ausfallwahrscheinlichkeit der Einzelpositionen.

Im Rahmen der Sensitivitätsanalysen hat sich die Vermutung bestätigt, dass der Migrationsmatrix eine zentrale Bedeutung für das Portfoliorisiko zukommt. Der hohe Aufwand bei der Schätzung dieser Migrationswahrscheinlichkeiten lässt sich aus diesem Grund als äußerst berechtigt bezeichnen.

Die Erkenntnisse über die Sensitivitäten des Kreditportfoliomodells, die in dieser Arbeit gewonnen wurden, lassen sich für die Definition und Umsetzung von Stresstests nutzen. Da für einen Stresstest das makroökonomische Szenario, das simuliert werden soll, in Parameteränderungen übersetzt werden muss, ist die Kenntnis über die Sensitivität des Portfoliomodells gegenüber diesen Parametern essentiell. An diese Arbeit könnte die Umsetzung und Anwendung von verschiedenen marktökonomischen Szenarien anknüpfen.

Literaturverzeichnis

- [1] Basel Committee on Banking Supervision (2006). *Studies on credit risk concentration: An overview of the issues and a synopsis of the results from the Research Task Force project*; in: Working Paper No. 15
- [2] Blum, C. / Overbeck, L. / Wagner, C. (2003). *An Introduction to Credit Risk Modeling*; Chapman and Hall / CRC
- [3] Crosbie, P. / Bohn, J. (2003). *Modeling Default Risk: Modeling Methodology*; Moody's KMV
- [4] Ho, M. (2010). *Mitigating Downside Risks from Market Shocks*; Mellon Capital Management
- [5] Kaminsky, Ch. / Kuzmenkova, N. / Kuklok, O. (2007). *Stresstests als Bestandteil des Risikomanagements*; in: Risiko Manager, vol. 15
- [6] Lando, D. (2004). *Credit Risk Modeling: Theory and Applications*; Princeton University Press
- [7] von Lieres, C. und Tschiersch, P. (2008). *Credit Portfolio Model: Portfolio Manager Plus*; interne Dokumentation WestLB
- [8] Matsumoto, M. / Nishimura, T. (1998). *Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator.*; in: ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, vol. 8, 3-30
- [9] McNeil, A. / Frey, R. / Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*; Princeton University Press
- [10] Merton, R.C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*; in: Bell Journal of Economics and Management Science, vol. 4, 141-183
- [11] Standard & Poor's (2009). *Understanding Standard & Poor's Rating Definitions*

Anhang A

Monte-Carlo-Simulation

A.1 Modellierung der Monte-Carlo-Simulation

Im Folgenden wird der Ablauf einer Monte-Carlo-Simulation in Anlehnung an [7] modelliert. Sie dient dazu die Verlustverteilung zu bestimmen und damit wichtige Risikomaße zum vorliegenden Portfolio ableiten zu können. Ein entscheidener Parameter bei einer Monte-Carlo-Simulation ist die Anzahl $k \in \mathbb{N}$ an Realisationen. Sowohl Genauigkeit wie auch Rechenzeit nehmen bei steigender Anzahl an Realisationen zu, daher ist ein Kompromiss nötig. Eine Untersuchung des Einflusses dieses Parameters folgt in Anhang A.2.

Füge für L_{PF} , $L_{PF}(t_p)$ und $L_i(t_p)$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $p \in \{1, \dots, N\}$ aus Kapitel 2.1 eine Bezeichnung $r \in \{1, \dots, k\}$ für die Realisation aus der Monte-Carlo-Simulation hinzu:

$$L_{PF}^r = \sum_{p=1}^N L_{PF}^r(t_p) = \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^m L_i^r(t_p). \quad (\text{A.1})$$

Jetzt wird der Ablauf einer Realisation $r \in \{1, \dots, k\}$ einer Monte-Carlo-Simulation dargestellt:

1. Initialisiere Realisation r :
 - (a) Setze Portfolioverlust von Realisation r als $L_{PF}^r = 0$
 - (b) Initialisiere Positionen $i = 1, \dots, m$:
Setze Anfangsrating $C_i(t_0) = C_{i,0}$ und Restlaufzeit $M_i(t_0) = m_{i,0}$
2. Schleife über die Perioden ($p = 1, \dots, N$):
Ziehe die allgemeinen Faktoren $X_k(\Delta t)$ für $k = 1, \dots, f$ und die sektorspezi-

fische Faktoren $S_j(\Delta t)$ für $j = 1, \dots, n$ stochastisch unabhängig. Außerdem ziehe die Quantile für die LGD-Stochastik aus den gleichverteilten und stochastisch unabhängigen U_l für $l = 1, \dots, n$.

3. Schleife über alle Positionen des Portfolios ($i = 1, \dots, m$)
 - (a) Ziehe die idiosynkratischen Faktoren $\epsilon_i(\Delta t)$ für $i = 1, \dots, m$ stochastisch unabhängig aus einer Standardnormalverteilung
 - (b) Aktualisiere das Rating, d.h.
 - i. Berechne $s_i(\Delta t)$ von Position i anhand von Gleichung 1.36
 - ii. Bestimme $C_i(t_p)$ abhängig von $C_i(t_{p-1})$ und $s_i(\Delta t)$ mittels Gleichung 2.5
4. Prüfe, ob ein Ausfall vorliegt, d.h. ob $C_i(t_p) = 0$
 - (a) Falls ja, addiere den Verlust $L_i^r(t_p) = EAD_i * \widetilde{LGD}_i$ zum Portfolioverlust $L_{PF}^r(t_p)$ der Periode p und setze Position i zurück: $C_i(t_p) = C_{i,0}$ und $M_i(t_p) = m_{i,0}$
 - (b) Falls nein, prüfe ob die Liquidationszeit abgelaufen ist, d.h. $M_i(t_{p-1}) = 1$, oder der Risikohorizont, d.h. $p = N$, erreicht ist
 - i. Falls ja, addiere die Wertveränderung $L_i^r(t_p) = VG_{i,t}(C_i(t_0)) - VG_{i,t}(C_i(t_p))$ zum Portfolioverlust $L_{PF}^r(t_p)$ der Periode p und setze Position i zurück: $C_i(t_p) = C_{i,0}$ und $M_i(t_p) = m_{i,0}$
 - ii. Falls nein, verringere Liquidationszeit um 1: $M_i(t_p) = M_i(t_{p-1}) - 1$
5. Gehe zur nächsten Position ($i \Rightarrow i + 1$)
 - (a) Falls die letzte Position erreicht ist, gehe wieder zur ersten Position und gleichzeitig zur nächsten Periode ($p \Rightarrow p + 1$)
 - i. Falls die letzte Periode erreicht ist, addiere Verluste $L_{PF}^r(t_p)$ der Perioden $p = 1, \dots, N$ zum Portfolioverlust L_{PF}^r und damit ist die Realisation r abgeschlossen.
 - ii. Sonst fahre fort mit 2.
 - (b) Sonst fahre fort mit 3.

Obige Monte-Carlo-Simulation liefert dann die Portfolioverluste $L_{PF}^1, \dots, L_{PF}^k$, für die sich eine Verteilungsfunktion definieren lässt:

Definition A.1

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen L für $x \in [0, 1]$ sei

$$F_L(x) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mathbb{1}_{[0,x]}(L_{PF}^r). \quad (\text{A.2})$$

A.2 Parameter der Monte-Carlo-Simulation

In Anhang A.1 ist die Methodik der verwendeten Monte-Carlo-Simulation erklärt worden. Der zentrale Parameter in diesem Zusammenhang ist die Anzahl an Szenarien, die simuliert werden. Dessen Einfluss auf den Value at Risk wird untersucht. Anschließend soll die Bedeutung des Seeds für den in der Monte-Carlo-Simulation verwendeten Zufallsgenerators betrachtet werden. Die Abweichung durch den Seed wird als statistischer Fehler bezeichnet.

Es liegt dieser Analyse das realitätsnahe Portfolio aus Kapitel 3.4 zugrunden.

Einfluss der Anzahl an Monte-Carlo-Realisationen

Die verwendete Anzahl an Szenarien bei der Monte-Carlo-Simulation wird von 1 Mio. schrittweise auf 8 Mio. erhöht, die Ergebnisse sind in Tabelle A.1 dargestellt.

Anzahl Szenarien	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
1 Mio.	906,90	360	1006,21
2 Mio.	895,86	360	997,93
4 Mio.	900	359,31	1000
8 Mio.	905,52	360,69	1003,45

Tabelle A.1: Einfluss der Anzahl an Monte-Carlo-Realisationen auf den Value at Risk

Einfluss unterschiedlicher Seeds

Als nächstes wird der statistische Fehler bei der Bestimmung der Verlustverteilungen durch die Monte-Carlo-Simulation abgeschätzt. Dazu wird dieser Zufallsgenerator¹, der innerhalb der Monte-Carlo-Simulation verwendet wird, mit unterschiedlichen Seeds gestartet. Genauer: es werden 15 verschiedene Seeds inklusive des Benchmark-Laufs angewandt, die Ergebnisse sind in Tabelle A.2 aufgetragen. Da alle anderen Einstellungen unverändert bleiben, lässt sich die Abweichung beim Value-at-Risk auf die statistische Schwankung zurückführen. In Tabelle A.2 ist zu erkennen, dass die Standardabweichung für VaR_{def} 1,03% und für VaR_{full} 0,84% des Mittelwerts

¹ Als Zufallsgenerator dient ein Mersenne-Twister. Siehe [8].

beträgt. VaR_{mig} ist noch stabiler und dessen Standardabweichung beträgt lediglich 0,022% vom Mittelwert. Analysen für das realitätsnahe Portfolio, bei denen die Zufallszahlen nicht gleich geblieben sind, müssen daher unter Beachtung dieses statistischen Fehlers betrachtet werden.

	VaR_{def}	VaR_{mig}	VaR_{full}
Benchmark	900	359,31	1000
Mittelwert	910,40	360,80	1004,62
Standardabweichung	9,34	0,79	8,40
Max - Mittelwert	19,26	1,27	18,14
Min - Mittelwert	-13,85	-1,49	-11,51
Max - Min	33,10	2,76	29,66

Tabelle A.2: Einfluss des Seed der Monte-Carlo-Simulation auf den Value at Risk

Anhang B

Migrationsmatrizen

Abbildung B.1: Migrationsmatrix A

Abbildung B.2: Migrationsmatrix B

	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-	CC	C	D
AAA	85.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
AA+	15.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
AA	10.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
AA-	6.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A+	3.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A-	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
BBB+	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
BBB	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
BBB-	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
BB+	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
BB	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
BB-	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
B+	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
B	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%	0.0%
B-	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%	0.0%
CCC+	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%	0.0%
CCC	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%	1.0%
CCC-	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%	2.0%
CC	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%	3.0%
C	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%	4.0%
D	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	70.0%	5.0%

Abbildung B.3: *Migrationsmatrix C*

	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-	CC	C	D
AAA	96.10%	2.32%	0.84%	0.37%	0.16%	0.06%	0.13%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
AA+	3.33%	86.84%	6.95%	1.81%	0.41%	0.41%	0.03%	0.10%	0.10%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
AA	0.18%	1.65%	86.57%	9.14%	1.41%	0.61%	0.19%	0.12%	0.11%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
AA-	0.00%	0.00%	1.84%	85.65%	9.08%	2.26%	0.54%	0.26%	0.17%	0.08%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%
A+	0.00%	0.03%	0.17%	2.74%	86.45%	7.59%	2.01%	0.51%	0.26%	0.13%	0.04%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.03%
A	0.00%	0.12%	0.04%	0.38%	4.06%	85.03%	7.54%	1.79%	0.62%	0.21%	0.10%	0.04%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.05%
A-	0.03%	0.03%	0.06%	0.17%	0.53%	4.85%	81.62%	8.60%	2.94%	0.87%	0.09%	0.05%	0.04%	0.04%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.07%
BBB+	0.03%	0.03%	0.01%	0.10%	0.24%	0.82%	4.41%	82.47%	8.76%	1.96%	0.36%	0.34%	0.07%	0.16%	0.06%	0.03%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.11%
BBB	0.00%	0.00%	0.11%	0.13%	0.14%	0.43%	1.06%	5.44%	82.37%	6.99%	1.50%	1.15%	0.30%	0.13%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.17%
BBB-	0.04%	0.00%	0.01%	0.18%	0.09%	0.34%	0.29%	1.24%	7.43%	78.12%	6.53%	3.31%	1.00%	0.68%	0.15%	0.14%	0.07%	0.02%	0.01%	0.08%	0.00%	0.27%
BB+	0.06%	0.00%	0.00%	0.07%	0.01%	0.14%	0.15%	0.35%	1.71%	8.78%	72.28%	9.23%	3.55%	1.62%	0.68%	0.46%	0.24%	0.10%	0.04%	0.07%	0.04%	0.43%
BB	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%	0.05%	0.26%	0.53%	1.54%	6.57%	74.31%	8.52%	4.47%	1.00%	0.77%	0.74%	0.12%	0.13%	0.17%	0.01%	0.69%
BB-	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.05%	0.09%	0.28%	0.33%	1.39%	5.19%	75.17%	10.61%	3.05%	1.21%	0.74%	0.28%	0.20%	0.29%	0.00%	0.00%	0.10%
B+	0.00%	0.02%	0.00%	0.02%	0.00%	0.03%	0.06%	0.09%	0.12%	0.21%	0.49%	1.19%	5.25%	75.72%	8.23%	3.00%	1.43%	1.07%	0.57%	0.72%	0.01%	1.76%
B	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.16%	0.04%	0.07%	0.03%	0.15%	0.16%	1.01%	7.26%	66.08%	8.67%	5.92%	3.24%	1.65%	2.67%	0.04%	2.82%
B-	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	0.01%	0.13%	0.11%	0.04%	0.24%	0.42%	0.76%	2.72%	5.92%	60.08%	8.63%	6.95%	3.34%	5.99%	0.14%	4.50%
CCC+	0.00%	0.00%	0.00%	0.20%	0.01%	0.02%	0.39%	0.03%	0.06%	0.05%	0.06%	0.80%	1.92%	2.60%	6.65%	49.96%	6.84%	9.15%	13.57%	0.50%	7.20%	
CCC	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.08%	0.36%	0.07%	0.70%	1.37%	3.70%	5.31%	4.33%	50.66%	5.97%	15.77%	0.12%	11.50%	
CCC-	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.02%	0.01%	0.09%	0.05%	0.11%	2.73%	1.89%	1.03%	1.60%	4.44%	3.95%	45.73%	19.80%	0.15%	18.40%	
CC	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.02%	0.03%	0.36%	0.06%	0.07%	0.89%	1.71%	0.97%	5.36%	3.73%	5.34%	3.07%	37.85%	0.54%	40.00%	
C	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.03%	0.01%	0.08%	0.44%	6.83%	0.74%	0.55%	5.92%	0.42%	1.06%	43.92%	40.00%	
D	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Abbildung B.4: *Geschätzte Migrationsmatrix*