

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematische Statistik

# Über die Konvergenz des Longstaff-Schwartz-Algorithmus

## Diplomarbeit

Juni 2011

vorgelegt von

Daniel Werner

betreut von

PD Dr. Volkert Paulsen

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
3	Die Lernregel für das statistische Lernproblem	5
4	Fehlerbetrachtung	8
5	Überdecken von VC-Klassen	11
6	Die Deckungszahl der Verlustklasse	19
7	Der Schätzfehler für positive überdeckbare Funktionenklassen	22
8	Der Schätzfehler für überdeckbare Funktionenklassen	26
9	Konvergenzsätze	33
10	Diskussion und Ausblick	37
A	Zulässigkeit	40

# 1 Einleitung

Eines der wichtigsten Forschungsgebiete der Finanzmathematik ist die Bewertung amerikanischer Optionen. Selbst im bekanntesten Finanzmarktmodell, dem Black-Scholes-Modell, existiert keine geschlossene Formel für die Wertbestimmung bestimmter Optionen, wie zum Beispiel der amerikanischen Put-Option mit endlicher Laufzeit. Daher wird versucht, den Wert dieser Optionen mittels numerischer Methoden zu bestimmen. Klassische Verfahren sind z.B. die Finite-Differenzen-Methode oder das CRR-Modell<sup>1</sup>. Ein wesentlicher Nachteil dieser Verfahren ist, dass für komplexere Probleme die Laufzeit zu hoch ist. Insbesondere mit Zunahme der Einflussgrößen kann die Laufzeit exponentiell steigen.

Abhilfe leistet eine andere sehr beliebte Klasse von Verfahren, die unter dem Begriff Monte-Carlo-Simulation zusammengefasst wird. Hierbei wird versucht, den Wert einer Option anhand simulierter Informationspfade zu bestimmen.

Eines dieser Verfahren ist der Longstaff-Schwartz-Algorithmus<sup>2</sup> (LS-Algorithmus), der als Informationsverlauf eine Markovkette voraussetzt. Aufgrund von sehr guten Ergebnissen bei praktischen Problemen der Wertbestimmung von Optionen, die nicht zu weit aus dem Geld sind, erfreut sich dieser Algorithmus zunehmender Beliebtheit. Auch ist dieser Algorithmus auf eine Fülle von Optionen anwendbar, für die klassische Verfahren eine zu lange Laufzeit haben oder überhaupt nicht anwendbar sind<sup>3</sup>. Weiterhin können die benötigten Informationspfade mit einfachen, wenn nötig, parallel rechnenden Computerprogrammen erzeugt werden.

Mathematische Konvergenzaussagen sind allerdings von sehr pessimistischer Natur und liefern nur unter sehr restriktiven Bedingungen praxisrelevante Ergebnisse. Stellt man keine weiteren Bedingungen an die Verteilung der Markovkette, so kann man für den Tsitsiklis-Van-Roy-Algorithmus (TR-Algorithmus) Ergebnisse, mit weitaus besserer Konvergenz bestimmen. Eine Erklärung, warum der LS-Algorithmus in den meisten praktischen Anwendungen trotzdem besser abschneidet, wird im letzten Kapitel gegeben.

Das wichtigste Merkmal des LS-Algorithmus ist, dass dieser zu jedem Zeitpunkt die bestmögliche Approximation des Optionswerts in Abhängigkeit des aktuellen Informationsstandes, d.h. des aktuellen Zustands der entsprechenden Markovkette, mittels Kleinst-Quadrat-Methode zu bestimmen versucht. Dazu muss eine Klasse von Approximationsfunktionen festgelegt werden, aus der eine Lernregel anhand einer gegebenen Stichprobe die beste Funktion auswählt. Die Autoren von [1] konnten für lineare Funktionenräume die Konvergenz und einen zentralen Grenzwertsatz des LS-Algorithmus beweisen. In dieser Arbeit, die dem Paper von D. Egloff [4] folgt, werden Konvergenzsätze für VC-Klassen<sup>4</sup>, die im Allgemeinen nicht linear sind, her-

---

<sup>1</sup>Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell nach [2], auch Binomialmodell, ist ein einfaches diskretes Modell zur Modellierung von Aktienkursen. In jedem Zeitschritt ist dabei eine Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung des Aktienkurses möglich. In diesem Modell kann mithilfe des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes ein Optionswert exakt durch Rückwärtsinduktion berechnet werden. Hierbei müssen alle Zustände des Zustandsraumes zur Berechnung herangezogen werden.

<sup>2</sup>Dieser wurde 2001 in [12] eingeführt.

<sup>3</sup>Unter anderem sind dies exotische Optionen, pfadabhängige Optionen, Jump-Diffusion-Prozesse und Optionen auf hochdimensionalen Zustandsräumen. Siehe [12] für weitere Beispiele.

<sup>4</sup>Für eine Beschreibung von Vapnik-Chervonenkis-Klassen siehe Kapitel 5.

geleitet.

Die Betrachtung eines Zinssatzes größer 0 bietet nur wenig mathematischen Mehrwert, weshalb wir diesen als 0 annehmen.

Ist eine Option in einem bestimmten Zustand nicht im Geld, so ist es nicht notwendig, diesen zur Bestimmung des Optionswertes heranzuziehen, da die Entscheidung, ob verkauft werden soll, in diesem Fall immer negativ ausfällt. In allen praktischen Anwendungen werden diese Zustände ausgeschlossen, da sie nur die Laufzeit erhöhen und dabei die Ergebnisse nicht verbessern. Auf die allgemeinen Konvergenzaussagen hat dies jedoch keinen Einfluss, weshalb wir der Einfachheit halber auf den Ausschluss dieser Zustände verzichten wollen.

Auf Optimierung der Konstanten in den Konvergenzsätzen wird kein besonders großer Wert gelegt, da die Sätze für in der Praxis übliche Stichprobenmengen keine wertvollen Ergebnisse liefern.

Es werden alle Resultate bewiesen, die nicht aus grundlegenden Mathematikvorlesungen bekannt sind oder keine wohlbekannteren Ergebnisse der Mathematik<sup>5</sup> darstellen.

Für das bessere Verständnis des LS-Algorithmus empfiehlt sich die Lektüre eines Beispiels, siehe zum Beispiel Abschnitt 2.2. in [15].

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Die Grundlagen der Optionspreisbestimmung mithilfe des LS-Algorithmus werden in Kapitel 2 beschrieben. In Kapitel 3 wird die Preisbestimmung als statistisches Lernproblem dargestellt. Da es sich um mehrere, sich beeinflussende Lernprobleme handelt, muss anschließend eine Fehlerunterscheidung durchgeführt werden. Kapitel 5 und 6 behandeln VC-Klassen und deren Überdeckungseigenschaften. In Kapitel 7 und 8 werden allgemeine Konvergenzaussagen für statistische Lernprobleme getroffen, bei denen die Approximationsräume gut überdeckt werden können, wobei eine Anwendung der Resultate und die Herleitung von Konvergenzsätzen in Kapitel 9 erfolgen. Kapitel 10 gibt schließlich eine Diskussion der Ergebnisse.

An dieser Stelle gebührt Herrn PD Dr. Volkert Paulsen mein Dank für die gute Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit und die Bereitstellung dieses interessanten Themas.

---

<sup>5</sup>Ohne Beweis verwendet werden das Lemma von Sauer, das Optimalitätsprinzip von Bellmann, der Heiratssatz von Hall, die Hoeffding-Ungleichung und der Satz über das optimale Stoppen bei amerikanischen Optionen aus [8].

## 2 Grundlagen

**Definition 2.1.** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, A, P)$  mit einer Markovkette  $X = (X_0, \dots, X_T)$ , ausgestattet mit der kanonischen Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$ , wobei die  $X_t$  für  $t = 0, \dots, T$  Werte im  $\mathbb{R}^m$  annehmen. Den Startwert der Markovkette  $X_0$  wollen wir als konstant voraussetzen. Wir bezeichnen mit  $\mu_t$  die Verteilung von  $X_t$  auf  $\mathbb{R}^m$  und mit  $\mu$  die Verteilung von  $X$  auf  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^{m(T+1)}$ , d.h.  $\mu = P^X$ . Wir führen den  $L_p$ -Raum

$$L_p(\mathbf{X}) = \{f = (f_0, \dots, f_T) \mid f_t \in L_p(\mathbb{R}^m, \mu_t) \forall t \in \{0, \dots, T\}\}$$

ein und definieren die Norm

$$\|h\|_p := \|h\|_{p, \mu} = \sum_{t=0}^T \|h_t\|_{p, \mu_t}.$$

Zur abkürzenden Schreibweise sei  $\|h\| = \|h\|_1$ .

Wir gehen nun von einem diskreten arbitragefreien  $T$ -Perioden-Finanzmarktmodell aus, wobei der Informationsverlauf durch die Markovkette gegeben sei. Unter den gegebenen Voraussetzungen nennen wir eine messbare Funktion

$$f = (f_0, \dots, f_T) \in L_1(\mathbf{X}) \quad \text{mit } f_i \geq 0$$

*Auszahlungsfunktion.* Eine Betrachtung von negativen Auszahlungen ist nicht erforderlich. Alle unbeschränkten Auszahlungsfunktionen werden in dieser Arbeit durch trunkierte Versionen approximiert, die wiederum ohne Einschränkung positiv<sup>6</sup> gewählt werden können.

**Definition 2.2.** Sei  $f$  eine Auszahlungsfunktion. Eine *amerikanische Option* bietet dem Inhaber die Möglichkeit, diese zu jedem Handelszeitpunkt  $0, \dots, T$  auszuüben, d.h. sie gegen die Auszahlung  $f$  einzutauschen.

Der wahre Wert einer amerikanischen Option zum Zeitpunkt  $t$  ist daher gegeben durch

$$\sup_{\tau, \tau \geq t \text{ ist Stoppzeit}} E[f_\tau(X_\tau) \mid \mathcal{F}_t].$$

Ziel ist es, eine Stoppzeit  $\tau^*$  zu bestimmen, so dass  $E[f_{\tau^*}(X_{\tau^*})]$  maximal ist und somit den Wert der Option bestimmt. Wie solch eine optimale Stoppzeit in unserem Modell gefunden werden kann, sagt der folgende wohlbekanntes Satz 2.4.

**Definition 2.3.** Seien  $f, g$  Auszahlungsfunktionen mit  $f_T = g_T$  und  $t \in \{0, \dots, T-1\}$ . Dann wird mit

$$\tau_{f,g,t} = \tau_{g,t} = \inf\{s \in \{t+1, t+2, \dots\} \mid f_s(X_s) \geq g_s(X_s)\}$$

eine Stoppzeit definiert, die fast sicher spätestens zum Zeitpunkt  $T$  stoppt.

<sup>6</sup>Auf alle beschränkten Auszahlungsfunktionen kann ein konstanter Wert addiert werden, ohne dass dies die Konvergenzaussagen verändert.

**Satz 2.4.** Sei  $f$  eine Auszahlungsfunktion und sei  $q$  gegeben durch  $q_T = f_T$  und

$$q_t(x_t) = E[\max(f_{t+1}(X_{t+1}), q_{t+1}(X_{t+1})) | X_t = x_t] \quad (2.1)$$

für  $t \in \{T-1, \dots, 0\}$ . Dann ist  $\tau_{q,t}$  optimal und es gilt

$$q_t(x_t) = \sup_{\tau, \tau > t \text{ ist Stoppzeit}} E[f_\tau(X_\tau) | X_t = x_t] = E[f_{\tau_{q,t}}(X_{\tau_{q,t}}) | X_t = x_t].$$

Die Funktion  $q$  wird als *continuation value* bezeichnet. Dieser gibt den Wert der amerikanischen Option zum Zeitpunkt  $t$  an unter der Bedingung, nicht in  $t$  zu verkaufen. Der *continuation value* ist ähnlich definiert wie das minimale dominierende Supermartingal (engl. *Snell envelope*, vgl. [8, Kapitel 4]) zu  $f$ , nur dass eine sofortige Ausübung der Option ausgeschlossen wird.

**Definition 2.5.** Seien  $f, h$  Auszahlungsfunktionen,  $t \in \{0, \dots, T\}$  und  $w \in \{0, \dots, T-t-1\}$ . Dann heißt

$$v : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad v_{t,h} = v_{t:w,h}(x) = \sum_{s=t}^{t+w} f_s(x_s) 1_{f_s(x_s) \geq h_s(x_s)} \prod_{r=t}^{s-1} 1_{f_r(x_r) < h_r(x_r)} + h_{t+w}(x_{t+w}) \prod_{r=t}^{t+w} 1_{f_r(x_r) < h_r(x_r)} \quad (2.2)$$

*Cashflowfunktion.*

Die *Cashflowfunktion* ist gerade die Auszahlung, die wir erhalten, wenn wir auf eine Realisation der Markovkette die durch  $f, h$  und  $t$  induzierte Stoppzeit aus Definition 2.3 anwenden. Sollte die Stoppzeit nicht nach spätestens  $w$  Perioden stoppen, so liefert sie den Funktionswert von  $h$  zu diesem Zeitpunkt.

Das nächste Korollar besagt, dass der erwartete *Cashflow* der optimalen Stoppregel gleich dem *continuation value* ist.

**Korollar 2.6.** Sei  $f$  eine Auszahlungsfunktion,  $t \in \{0, \dots, T-1\}$ ,  $w \in \{0, \dots, T-t-1\}$  und  $q$  wie in Satz 2.4. Dann gilt für den *continuation value*

$$q_t(x_t) = E[v_{t+1:w,q} | X_t = x_t].$$

*Beweis.* Für  $w = 0$  folgt die Behauptung direkt aus (2.1), da

$$v_{t+1:0,q}(x) = \max(f_{t+1}(x_{t+1}), q_{t+1}(x_{t+1})).$$

Durch wiederholtes Anwenden von (2.1) folgt diese für alle  $w$ . □

Da der ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, A, P)$  im Folgenden keine Rolle spielt, soll im weiteren Verlauf der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}), \mu)$  betrachtet werden, wobei  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra von  $\mathbf{X}$  ist.

### 3 Die Lernregel für das statistische Lernproblem

Wir gehen davon aus, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette nicht bekannt sein müssen. Lediglich eine Stichprobe von Pfaden  $D = (D_1, \dots, D_n)$  der Markovkette wird vorausgesetzt, d.h.  $D_i$  sind Werte aus  $\mathbf{X}$ , die gemäß  $\mu$  bestimmt wurden. Die Bestimmung des Wertes der Option erfolgt nun in zwei Schritten. Zuerst muss anhand der Daten mithilfe einer Lernregel eine Stoppregel bestimmt werden. Anschließend kann der Wert der Option als gemittelte Auszahlung der auf die Stichprobe angewandten Stoppregel festgelegt werden.

Wir haben in Satz 2.4 gesehen, dass der *continuation value*  $q$  eine optimale Stoppregel liefert. Die Bestimmung von  $q$  stellt ein statistisches Lernproblem dar.

**Exkurs 3.1.** In der statistischen Lerntheorie geht man von einer gegebenen Stichprobe  $D = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  (Trainingsdaten) aus, die bezüglich der gemeinsamen Verteilung zweier Zufallsvariablen  $(X, Y)$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  simuliert wurde. Die erste Komponente  $X_i \in \mathbf{X}$  bezeichnet einen beobachtbaren Wert (beispielsweise verfügbare Marktdaten) und  $Y_i \in \mathbf{Y}$  ein Label (beispielsweise der bestmögliche zu realisierende Erlös einer amerikanischen Option). Während in den Trainingsdaten das Label noch gegeben ist, soll dieses für eine weitere Stichprobe (Testdaten) anhand des beobachtbaren Wertes durch eine Funktion  $g : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  geschätzt werden. Dazu benötigt man eine Klasse von Funktionen, aus der die Funktion  $g$  gewählt werden kann. Als Güte für ein Element  $g$  dieser Klasse wird das Risiko

$$R(g) = \frac{1}{2} \|y - g(x)\|_{p, P(x,y)}$$

verwendet, wobei  $p$  1 oder 2 gewählt wird. Wünschenswert ist es, dass  $g$  als  $g^*(x) := E[Y|X = x]$  gewählt wird. Da die Verteilung aber nicht bekannt ist und  $E[Y|X = x]$  sowie  $R(g)$  nicht berechnet werden können, wird das empirische Risiko eingeführt. Für den Fall  $p = 1$  ist dies definiert als

$$R_{emp}(g) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - g(X_i)| \right).$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, ein geeignetes Element der Klasse zu wählen: Das Prinzip der empirischen und das der strukturellen Risikominimierung, wobei uns nur erstgenanntes Prinzip hier beschäftigen soll. Dabei ist eine Klasse von Funktionen geschickt zu wählen. Als Schätzung wird dann das Element aus der Klasse gewählt, welches das empirische Risiko minimiert.

Es treten dabei zwei Fehler auf. Ist die Klasse nicht groß genug gewählt, so wird sogar das beste Element aus der Klasse eine unzureichende Approximation von  $g^*$  liefern. Dies ist der sogenannte *bias*-Fehler. Ist die Klasse zu komplex, so kann die Differenz aus Risiko und empirischem Risiko (Varianz) sehr groß sein. Die Varianz abzuschätzen, ist eines der Hauptanliegen der statistischen Lerntheorie.

Um eine Funktion  $g$  wie in vorstehender Bemerkung zu finden, benötigt man eine Lernregel.

**Definition 3.2.** Sei  $f \in L_2(X)$  eine Auszahlungsfunktion. Eine Abbildung von  $D \rightarrow H = (H_0, \dots, H_T)$ , wobei

$$H_t \subseteq L_2(\mathbb{R}^m, \mu_t)$$

eine Klasse von Funktionen darstellt, heißt *Lernregel*.

Unter Beachtung von  $q_t(x_t) = E[v_{t+1,q} | X_t = x_t]$  und der Eigenschaft der *Cash-flowfunktion*, nur von  $q_{t+1}, \dots, q_T$  abzuhängen, kann nun mithilfe einer gegebenen Stichprobe  $D$ , einer Lernregel und bereits gegebenen  $q_{t+1}, \dots, q_T$  die Funktion  $q_t$  in Abhängigkeit von  $X_t$  approximiert werden.

Da wir ein Gesamtproblem vorliegen haben (Approximation von  $q$ ), das aus vielen gleichartigen Teilproblemen (Approximation der  $q_t$ ) besteht, möchten wir, motiviert durch das Optimalitätsprinzip von Bellmann<sup>7</sup>, eine weitere Forderung an die Lernregel stellen - die Zulässigkeit.

**Definition 3.3.** Eine Lernregel  $\hat{q}$  heißt zulässig, falls  $\hat{q}_T = f_T$  und  $\hat{q}_t$  nur von den Pfaden der Stichproben ab Zeitpunkt  $t + 1$  abhängt.

**Definition 3.4.** Sei  $H = (H_0, \dots, H_{T-1}) \subseteq L_2(\mathbf{X})$  ein unter der  $L_2$ -Norm abgeschlossener Funktionenraum. Weiterhin sei  $D$  eine Stichprobe und  $w(t) \in \{0, \dots, T - t - 1\}$ . Wir definieren rekursiv  $\hat{q}_T = f_T$  und

$$\hat{q}_{H,D,t} = \hat{q}_t = \arg \min_{g \in H_t} \sum_{i=1, \dots, n} (g(D_{i,t}) - v_{t+1:w, \hat{q}}(D_{i,t}))^2 \quad (3.1)$$

für  $t = T-1, \dots, 0$ . Dann heißt  $\hat{q} = \hat{q}_{H,D} = (\hat{q}_{H,D,0}, \dots, \hat{q}_{H,D,T})$  *empirischer  $L_2$ -Schätzer*. Wir verzichten in der Notation die Abhängigkeit der Lernregel von  $w$ , dem Raum  $H$  und der Stichprobe  $D$  darzustellen, wenn eine Verwechslung nicht möglich ist.

Dieser Schätzer minimiert den gemittelten  $L_2$ -Abstand zum simulierten *Cash-flow* und ist zulässig, wie man sieht. Zu beachten ist, dass  $\hat{q}_{H,D,t}(x)$  einerseits von der zufälligen Stichprobe  $D$ , andererseits aber auch von einem zufällig gemäß  $\mu$  wählbaren  $x \in \mathbf{X}$  abhängt.

Der Parameter  $w$  kann zeitpunktabhängig frei gewählt werden. Dieser gibt an, wie weit der Algorithmus in die Zukunft blickt. Setzen wir  $w(t) = T - t - 1$  maximal, so erhalten wir den LS-Algorithmus, wenn der Optionswert durch Mittelung der Auszahlungen, die durch Anwendung der von  $\hat{q}$  erzeugten Stoppregel auf die Stichprobe bestimmt werden, berechnet wird. Die Wahl von  $w = 0$  entspricht dem TR-Algorithmus. Eine weitere Diskussion erfolgt in Kapitel 10.

<sup>7</sup>Das Optimalitätsprinzip von Bellmann (engl. *dynamic programming principle*) besagt frei übersetzt:

Eine optimale Entscheidungsfolge hat die Eigenschaft, dass, wie auch immer der Anfangszustand war und die erste Entscheidung ausfiel, die verbleibenden Entscheidungen wiederum eine optimale Entscheidungsfolge in Anbetracht jedes späteren Zustands, der aus der ersten Entscheidung resultierte, bilden müssen.



**Bemerkung 3.5.** In dieser Arbeit wird der Beweis geführt, dass der empirische  $L_2$ -Schätzer unter gewissen Voraussetzungen gegen den *continuation value* konvergiert und somit eine entsprechend genaue Wertbestimmung einer amerikanischen Option ermöglicht. In der anschließenden Fehlerbetrachtung möchten wir zeigen, dass es dazu genügt, mithilfe der Stichprobe  $D$  ein  $\hat{q}_t$  zu finden, welches die *Cashflowfunktion* im  $L_2$ -Sinne gut approximiert. Eine sehr ähnliche Forderung ist, wie man vermuten kann, dass für  $n$  neu gezogene Stichproben  $D^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$  der Term

$$R_{D^*}(\hat{q}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1, \dots, n} (\hat{q}_{H,D,t}(D_{i,t}^*) - v_{t+1, \hat{q}}(D_i^*))^2 \quad (3.2)$$

möglichst klein ist.

Nun wissen wir, dass  $R_D$  für den empirischen  $L_2$ -Schätzer gerade minimal wird. Besteht die Funktionenklasse aus nur einem Element, so gibt folgende Überlegung einen Beweisansatz: Da  $D$  und  $D^*$  unabhängig gezogen werden, ist es sehr unwahrscheinlich, dass  $R_D$  gerade sehr klein und  $R_{D^*}$  sehr groß ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür konvergiert exponentiell in  $n$  gegen 0. Enthält die Klasse endlich viele Elemente, können wir die Wahrscheinlichkeiten aufsummieren und erhalten immer noch Konvergenz, solange die Anzahl der Funktionen in der Klasse nicht exponentiell mit Zunahme der Stichprobenmenge  $n$  steigt.

Für normale Funktionenklassen werden wir versuchen, diese zu überdecken (engl. *to cover*), d.h. eine endliche Teilmenge (genannt Deckungsmenge, engl. *Cover*) zu finden, so dass alle anderen Funktionen sich in einem Abstand kleiner als  $\varepsilon$  im  $L_1$ -Sinne bezüglich des empirischen Wahrscheinlichkeitsmaßes von  $D$  und  $D^*$  zu dieser Teilmenge befinden.

Wir möchten nun eine geeignete Klasse von Funktionen wählen. Wie in der statistischen Lerntheorie üblich, ist dabei eine Abwägung bezüglich der Größe der Klasse zu treffen, bekannt als *Bias-Variance-Trade-off*. Auf der einen Seite sollte die Klasse den Raum  $L_2(\mathbf{X})$  gut überdecken (*bias-Fehler*), im besten Fall dicht in  $L_2(\mathbf{X})$  liegen. Auf der anderen Seite sollte die Klasse nicht zu komplex sein, damit die Varianz  $R_{D^*}(\hat{q}) - R_D(\hat{q})$  nicht zu groß wird. Wie bereits erwähnt, wollen wir die Varianz durch eine Überdeckung der Klasse kontrollieren. Klassen, die sich gut überdecken lassen und nicht zu restriktiv im Hinblick auf den *bias-Fehler* sind, sind sogenannte VC-Klassen. Der Fehler  $\varepsilon$ , der durch die Überdeckung auftritt, ist für unsere Zwecke leicht zu kontrollieren, da die Deckungszahlen<sup>8</sup> von VC-Klassen nur polynomiell in  $1/\varepsilon$  wachsen<sup>9</sup>, wir jedoch exponentielle Konvergenz in  $n$ , der Größe der Stichprobenmenge, erhalten werden.

**Definition 3.6.** Sei  $H = (H_0, \dots, H_T - 1) \subseteq L_2(\mathbf{X})$ . Nach den Eingangsüberlegungen werden an die Funktionenklassen  $H_t$  folgende Voraussetzungen gestellt:

1. Die VC-Dimension der Klasse ist beschränkt.
2. Die Funktionen sind positiv und durch  $M$  beschränkt.

<sup>8</sup>D.h. die Mächtigkeit der Deckungsmenge, siehe Definition 5.1.

<sup>9</sup>Dieses Resultat wird in Kapitel 5 bewiesen.

3. Die Klasse ist eine konvexe abgeschlossene Teilmenge des  $L_2(\mathbb{R}^m, \mu_t)$ .
4. Die Klasse ist zulässig.<sup>10</sup>

Die Beschränktheit wird benötigt, um den Fehler abschätzen zu können. Der Wert  $M$  kann jedoch mit Zunahme der Stichprobenmenge  $n$  gegen  $\infty$  konvergieren. Die Konvexität erleichtert die Fehlerbetrachtung. Die Abgeschlossenheit wird benötigt, damit das Infimum einer Folge in  $H_t$  angenommen wird, insbesondere damit die Existenz des empirischen  $L_2$ -Schätzers (3.1) gewährleistet ist. Da wir bei der Auszahlungsfunktion  $f$  von einer  $L_2$ -Funktion ausgehen, ist auch  $q$  eine solche Funktion und es ist nur nötig, Funktionenklassen im Raum  $L_2(\mathbf{X})$  zu betrachten.

## 4 Fehlerbetrachtung

Die Bestimmung von  $\hat{q}_t$  in (3.1) folgt mithilfe der Funktionen  $\hat{q}_{t+1}, \dots, \hat{q}_n$ , die allerdings nur eine Näherung an  $q_{t+1}, \dots, q_n$  darstellen. Da gleich  $T$  Lernprobleme vorliegen, die voneinander abhängen, tritt neben dem Approximationsfehler (*bias*) und dem Schätzfehler (Varianz) auch noch ein Fortpflanzungsfehler auf, den wir zuerst kontrollieren wollen.

Wir können die Fehlertrennung im  $L_2(\mathbf{X})$ <sup>11</sup> mithilfe der  $L_2$ -Norm bezüglich  $\mu$  vornehmen.

**Definition 4.1.** Die Abbildung

$$pr : L_2(\mathbb{R}^m) \rightarrow H_t$$

bezeichnet die Projektion<sup>12</sup> einer Funktion auf die konvexe Funktionenklasse  $H_t$ . Zur abkürzenden Schreibweise sei

$$\hat{q}_t^*(x_t) := pr(E[v_{t+1, \hat{q}} | X_t = x_t]).$$

Dies kann als bestmögliche Funktionen für den empirischen  $L_2$ -Schätzer  $\hat{q}_t$  aufgefasst werden.

**Satz 4.2.** Sei  $f \in L_2(\mathbf{X})$  eine Auszahlungsfunktion und  $H$  wie in Definition 3.6. Sei  $e_t = \|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2 + \|pr(q_t) - q_t\|_2$ . Für alle  $t$  gilt dann

$$\|\hat{q}_t - q_t\|_2 \leq 2^{w+1} \max_{s=t, \dots, t+w+1} (e_s).$$

---

<sup>10</sup>Diese Voraussetzung wird aus Meßbarkeitsgründen gestellt (siehe 7.7 und Anhang für Definition und Erläuterungen). Sie ist nicht sehr restriktiv und braucht uns nicht weiter zu beschäftigen. Ein Zusammenhang zur Zulässigkeit von Lernregeln besteht nicht.

<sup>11</sup>Es sei darauf hingewiesen, dass der Raum  $L_2(\mathbf{X})$  ein Hilbertraum mit dem kanonischen Skalarprodukt ist und die entsprechenden Rechenregeln gelten.

<sup>12</sup>Die Existenz und Wohldefiniertheit der Projektion im  $L_2(\mathbb{R}^m)$  ist aus den Grundvorlesungen bekannt.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\|\hat{q}_t - q_t\|_2 &\leq \|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2 + \|\hat{q}_t^* - pr(E[v_{t+1,q}|X_t = \cdot])\|_2 \\
&\quad + \|\text{pr}(E[v_{t+1,q}|X_t = \cdot]) - q_t\|_2 \\
&\leq \|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2 + \|(E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot]) - (E[v_{t+1,q}|X_t = \cdot])\|_2 \\
&\quad + \|\text{pr}(E[v_{t+1,q}|X_t = \cdot]) - q_t\|_2 \\
&\leq \|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2 + \sum_{i=t+1}^{t+1+w} \|\hat{q}_i - q_i\|_2 \\
&\quad + \|\text{pr}(q_t) - q_t\|_2
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung nutzt die Konvexität der Funktionenräume. Die letzte Ungleichung lässt sich einfach zeigen: Sei eine Realisation  $x$  gegeben. Dann ist der Verlust eines Händlers, der eine Option bezüglich  $\hat{q}$  verkauft nicht größer als der Abstand der tatsächlichen *continuation value* zu  $\hat{q}$ . Unter Bildung des bedingten Erwartungswertes und Normierung bleibt diese Ungleichung erhalten.

Wiederholtes Anwenden der Ungleichung ergibt die Behauptung:

$$\|\hat{q}_t - q_t\|_2 \leq e_t + e_{t+1} + 2e_{t+2} + 4e_{t+3} + \dots + 2^w e_{t+w+1} \leq 2^{w+1} \max_{\{s=t, \dots, t+w+1\}} (e_s)$$

□

**Bemerkung 4.3.** Die Summanden aus der ersten Abschätzung

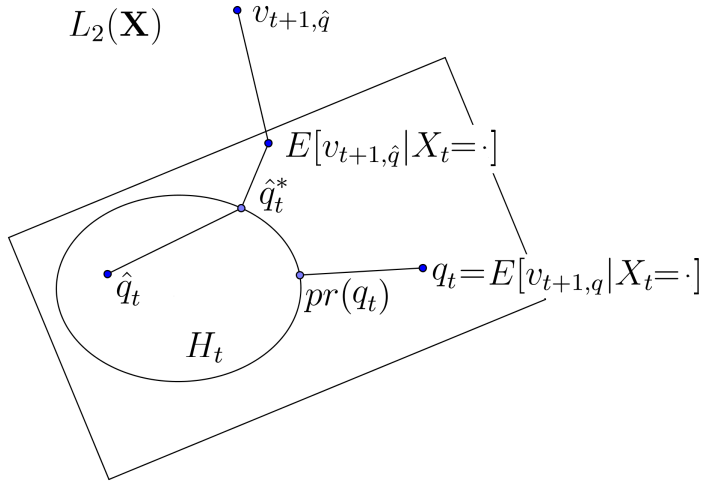
$$\|\hat{q}_t - q_t\|_2 \leq \|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2 + \sum_{i=t+1}^{t+1+w} \|\hat{q}_i - q_i\|_2 + \|\text{pr}(q_t) - q_t\|_2$$

in Satz 4.2 werden *Schätz-, Fortpflanzungs- und Approximationsfehler* genannt.  $\|\hat{q}_t - q_t\|_2$  wird als *Gesamtfehler* bezeichnet.

Wir möchten nun den Schätzfehler durch die Wurzel des Erwartungswertes der sogenannten *zentrierten Verlustfunktion*  $l_t(\hat{q}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$l_t(\hat{q})(x) := (v_{t+1,\hat{q}}(x) - \hat{q}_t(x_t))^2 - (v_{t+1,\hat{q}}(x) - \hat{q}_t^*(x_t))^2$$

abschätzen.



**Definition 4.4.** Sei  $h_t^* := pr(E[v_{t+1,h}|X_t = \cdot])$ . Die Funktionenklasse

$$L_t(H) = \{(v_{t+1,h} - h_t)^2 - (v_{t+1,h} - h_t^*)^2 | h \in H\}$$

heißt *Zentrierte Verlustklasse* (engl. *centered loss class*) oder kurz *Verlustklasse*. Jedes Element der Klasse, welches wir mit  $l_t(h)$  bezeichnen wollen, wird von einem Element  $h \in H$  erzeugt.

Die Funktionen dieser Klasse haben den Vorteil, dass sie auch negative Werte annehmen können. So ist der Erwartungswert bezüglich des durch die Stichprobe  $D$  erzeugten empirischen Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$\sum_{i=0}^n l_t(\hat{q}_{H,D,t})(D_i) \tag{4.1}$$

negativ, was bei einem Blick auf den empirischen  $L_2$ -Minimierer (3.1) ersichtlich wird. Dieser Umstand ermöglicht den Beweis einer besseren Konvergenzgeschwindigkeit bei Anwendung des Ansatzes 3.5 auf die Verlustfunktion. Es folgt die eingangs erwähnte Abschätzung:

**Satz 4.5.** Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2 gilt

$$\|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2^2 \leq E[l_t(\hat{q})].$$

*Beweis.* Die Skizze veranschaulicht diese Aussage. Aufgrund der Orthogonalität des bedingten Erwartungswertes folgt

$$\|\hat{q}_t - E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot]\|_2^2 = \|\hat{q}_t - v_{t+1,\hat{q}}\|_2^2 - \|E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot] - v_{t+1,\hat{q}}\|_2^2$$

und

$$\|\hat{q}_t^* - E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot]\|_2^2 = \|\hat{q}_t^* - v_{t+1,\hat{q}}\|_2^2 - \|E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot] - v_{t+1,\hat{q}}\|_2^2.$$

Aufgrund der Konvexität von  $H_t$  gilt

$$\|\hat{q}_t - E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot]\|_2^2 \geq \|\hat{q}_t - \hat{q}_t^*\|_2^2 + \|\hat{q}_t^* - E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t = \cdot]\|_2^2.$$

Einsetzen der ersten beiden Gleichungen in die dritte Ungleichung ergibt die Behauptung.  $\square$

Abschließend werden noch einige benötigte Eigenschaften der Verlustklasse gezeigt.

**Lemma 4.6.** Sei  $f$  eine Auszahlungsfunktion mit Werten in  $[0, M]$  und  $H$  gemäß Definition 3.6. Für  $l \in L_t(H)$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}), \mu)$  gilt dann:

1.  $E[l] \geq 0$
2.  $|l| \leq M^2$
3.  $E[l^2] \leq 4M^2 E[l]$

*Beweis.* Behauptung (1) folgt direkt aus dem vorstehenden Satz.

Mit  $f$  ist natürlich auch  $v_{t+1,\hat{q}}$  und  $\hat{q}$  nach Voraussetzung durch  $M$  beschränkt und es folgt (2).

Setzen wir

$$\begin{aligned} a &= v_{t+1,\hat{q}} - \hat{q}_t \\ b &= v_{t+1,\hat{q}} - pr(E[v_{t+1,\hat{q}}|X_t]) \\ c &= \hat{q}_t^* - \hat{q}_t, \end{aligned}$$

dann gilt (3) mit Verwendung des vorstehenden Satzes wegen

$$l = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = c(a + b) \Rightarrow E[l^2] \leq E[(a + b)^2 c^2] \leq 4M^2 E[c^2].$$

$\square$

## 5 Überdecken von VC-Klassen

Die Darstellung dieses Kapitels folgt [7]. Wir möchten, wie bereits angedeutet, eine Klasse von Funktionen mit beschränkter VC-Dimension durch eine begrenzte Anzahl von Repräsentanten überdecken, sodass jede beliebige Funktion in ihrer Nähe einen Repräsentanten im Sinne der  $L_1$ -Metrik bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes besitzt. Es werden dazu folgende Begriffe eingeführt:

**Definition 5.1.** Sei  $(M, d)$  ein pseudometrischer Raum und  $U \subseteq M$ . Dann wird die *Deckungszahl* (engl. *covering number*) definiert als

$$N(\varepsilon, U, d) = \min \{n \in \mathbb{N} | \exists x_1, \dots, x_n \in M : \forall x \in U \exists i \leq n d(x_i, x) \leq \varepsilon\}$$

und die eng verwandte *Packzahl* (engl. *packing number*) als

$$M(\varepsilon, U, d) = \max \{n \in \mathbb{N} | \exists x_1, \dots, x_n \in M : d(x_i, x_j) > \varepsilon \forall i, j \leq n i \neq j\}.$$

Die Deckungszahl gibt an, wie viele Repräsentanten man benötigt, damit jedes Element aus  $M$  in  $\varepsilon$ -Nähe eines der Repräsentanten liegt. Die Packzahl dagegen gibt an, wie viele Elemente man wählen kann, sodass keines dieser Elemente einen Abstand kleiner  $\varepsilon$  zu einem anderen besitzt. Als  $\varepsilon$ -Deckungsmenge bzw.  $\varepsilon$ -Packmenge wird dabei die Menge der Repräsentanten bei einem gegebenen Abstand  $\varepsilon$  bezeichnet. Zwischen der Pack- und Deckungszahl besteht ein enger Zusammenhang. In dieser Arbeit wird jedoch nur das folgende Resultat benötigt, welches man sich leicht überlegt. Jede  $\varepsilon$ -Packmenge ist eine  $2\varepsilon$ -Deckungsmenge oder etwas schwächer

$$N(2\varepsilon, U, d) \leq M(\varepsilon, U, d).$$

**Definition 5.2.** Sei  $\mathbb{A}$  eine Klasse von Teilmengen einer Obermenge  $A$ . Seien  $x_1, \dots, x_d$  aus  $A$  paarweise verschieden. Wir sagen, dass  $\mathbb{A}$  die Elemente  $x_1, \dots, x_d$  zerbricht (engl. *to shatter*), wenn es für jeden Vektor  $p = (p_1, \dots, p_d)$  auf  $\{0, 1\}^d$  ein Element  $a_p \in \mathbb{A}$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} x_i &\in a_p \text{ falls } p_i = 1 \\ x_i &\notin a_p \text{ falls } p_i = 0. \end{aligned}$$

Die *VC-Dimension* von  $\mathbb{A}$  ist  $d$  ( $\text{vc}(\mathbb{A}) = d$ ), falls es keine  $x_1, \dots, x_{d+1}$  aus  $A$  gibt, so dass  $\mathbb{A}$  die Elemente  $x_1, \dots, x_{d+1}$  zerbricht und  $d$  maximal gewählt ist.

**Beispiel 5.3.** Sei  $\mathbb{A}$  die Klasse aller offenen Mengen der Form  $(a, b)$  in  $A = \mathbb{R}$ . Dann gibt es für jeweils drei beliebige verschiedene Punkte keine offene Menge, die die äußeren beiden Punkte überdeckt, aber den mittleren nicht. Drei ist maximal gewählt, also  $\text{vc}(\mathbb{A}) = 2$ .

Die Klasse der durch  $n - 1$ -dimensionale Hyperebenen separierten Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  hat VC-Dimension  $n + 1$ .

Die Klasse der konvexen Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  hat VC-Dimension  $\infty$ . Es reicht, für jedes  $n$  eine Menge von Punkten anzugeben, die zerbrochen wird. Das wären beispielsweise die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks.

Es folgt das Lemma von Sauer:

**Lemma 5.4.** Gegeben die Situation von 5.2 gilt für  $n \in \mathbb{N}$  und beliebige Punkte  $x_1, \dots, x_n \in A$ , dass

$$|\{a \cap \{x_1, \dots, x_n\} \mid a \in \mathbb{A}\}| \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \leq (en/d)^d.$$

*Beweis.* Siehe S. 174 in [16]. □

**Definition 5.5.** Wird eine Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem unterhalb des Funktionsgraphen liegenden Unterraum des  $\mathbb{R}^{m+1}$ , also

$$\{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid f(x_1, \dots, x_m) \leq x_{m+1}\}$$

identifiziert, so kann die VC-Dimension auf Klassen von Funktionen von  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ausgeweitet werden.

**Bemerkung 5.6.** Zerbrechen für Funktionenklassen  $\mathbb{F}$  erfolgt dann auf die folgende Weise: Wir sagen, dass  $\mathbb{F}$  die Elemente  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^m$  zerbricht, wenn es  $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{R}$  gibt, sodass es für jeden Vektor  $p = (p_1 \dots p_d)$  auf  $\{0, 1\}^d$  ein Element  $f_p \in \mathbb{F}$  gibt mit

$$f_p(x_i) > r_i \text{ falls } p_i = 1$$

$$f_p(x_i) \leq r_i \text{ falls } p_i = 0.$$

Falls  $d$  maximal gewählt ist, wird  $\text{vc}(\mathbb{F}) := d$  definiert.

Wir möchten nun die Deckungszahl von beschränkten Funktionenklassen endlicher VC-Dimension abschätzen. Der Beweis lässt sich zurückführen auf beschränkte  $[0, 1]$ -wertige Funktionen und unter Ausnutzung der Definition der VC-Dimension ohne weitere Verluste auf  $\{0, 1\}$ -wertige Funktionen. Schließlich reicht es unter Ausnutzung der Eigenschaft, dass das Maximum aller  $x_i$  zur Bestimmung der VC-Dimension fest gewählt werden muss, den  $n$ -dimensionalen Würfel zu betrachten. Dies wird in 5.15 ausführlich beschrieben und soll nun ausschließlich als Motivation dienen. Der Abstand  $\varepsilon$  zweier Funktionen entspricht dabei der Anzahl der unterschiedlichen Werte der Koordinatendarstellung zweier Punkte des  $n$ -dimensionalen Würfels geteilt durch  $n$ .

**Definition 5.7.** Man stelle sich als Klasse  $V$  eine Auswahl von Eckpunkten des  $n$ -dimensionalen Würfels vor. Jedes Element von  $V$  hat somit eine eindeutige  $n$ -dimensionale Koordinatendarstellung. Sei  $E$  die Anzahl der Kanten, d.h. alle Paare (wobei jedes Paar doppelt zählt) von Elementen von  $V$ , die sich nur in einer Koordinate unterscheiden. Wir sagen,  $V$  habe Dimension  $d$  ( $\dim(V) = d$ ), wenn die Projektion  $V_I$  von  $V$ , wobei die Elemente von  $V$  auf eine Teilmenge  $I = \{i_1, \dots, i_{d+1}\}$  projiziert werden, niemals einen Würfel mit allen Ecken der Dimension  $d + 1$  ergibt. Ergibt auf der anderen Seite die Projektion  $V_I$  einen vollen Würfel der Dimension  $d + 1$ , so sagen wir, dass  $I$  von  $V$  zerbrochen wird. Für  $V_{\{i\}}$  schreiben wir auch  $V_i$ . Bei gegebenen  $V$  und einer gegebenen Richtung der Kanten, bezeichne  $\text{out}(v)$  für alle  $v \in V$  die Anzahl der vom Punkt  $v$  wegführenden Kanten aus  $E$ .

**Definition 5.8.** Sei  $\varepsilon = k/n$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Die Klasse  $V$  wird als  $\varepsilon$ -separiert bezeichnet, falls je zwei Elemente von  $V$  sich in mindestens  $\varepsilon n$  Komponenten unterscheiden.

Die  $\varepsilon$ -Separierung entspricht dem Umstand, dass  $V$  eine *Packmenge* auf dem  $n$ -dimensionalen Würfel darstellt. Nehmen wir auf der Klasse  $V$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  an, so kann  $V_i$  als  $\{0, 1\}$ -wertige Zufallsgröße aufgefasst werden. Für diese sei

$$P(V_i = 1) := P(v \in V | v_i = 1).$$

Um die Packzahl zu beschränken wird ausgenutzt, dass aufgrund der VC-Dimension, die Varianz von  $V_{m+1}$  gegeben  $V_1, \dots, V_m$  klein wird. Gleichzeitig wird diese bedingte Varianz bei gegebener  $\varepsilon$ -Separierung auch größer, sofern noch genügend Elemente in  $V$  enthalten sind, die auf den ersten  $m$  Komponenten übereinstimmen. Somit erhält man zwei Ungleichungen für die bedingte Varianz, wobei die zweite von  $|V|$  abhängt. Ein geschickt gewähltes  $m$  liefert auf diese Weise eine Schranke für  $|V|$ .

**Lemma 5.9.** Unter den Bedingungen von Definition 5.7 gilt:

$$|E| \leq d|V|$$

*Beweis.* Wir führen für  $i \in \{1, \dots, n\}$  folgende Shiftabbildung ein:

Jedes  $v \in V$  der Form

$$(v_1, \dots, v_{i-1}, 1, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

wird durch  $v'$  der Form

$$(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

ersetzt, falls dieses Element noch nicht in  $V$  enthalten ist, ansonsten bleibt  $v$  unverändert. Somit erhalten wir eine neue Klasse mit Kanten, die mit  $(S_i(V), S_i(E))$  bezeichnet sei. Es gilt:

1.  $|S_i(V)| = |V|$
2.  $|S_i(E)| \geq |E|$
3.  $\dim(S_i(V)) \leq \dim(V)$
4. Nach endlich vielen Anwendungen der Shiftabbildung für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  erhalten wir ein  $V^*$ , in dem kein Element enthalten ist, in dessen Koordinatendarstellung mehr als  $d$  Einsen vorkommen.

Jedes Element in  $V^*$  besitzt somit maximal  $d$  Kanten. Daher folgt

$$|E|/|V| \leq |E^*|/|V^*| \leq d.$$

(1) ist offensichtlich.

(2) Man kann jeder Kante aus  $E$  eine Kante aus  $S_i(E)$  zuordnen. Seien also  $u, v \in V$  beliebig und  $j$  die Komponente, an der sich  $u$  und  $v$  unterscheiden. Werden beide Vektoren unter  $S_i$  *geshiftet*, bleiben beide unverändert oder ist  $i = j$ , so bleibt die Kante zwischen  $u$  und  $v$  erhalten. Wird  $u$  *geshiftet*, aber  $v$  nicht, dann heißt dies, dass  $v'$  bereits in  $V$  enthalten ist,  $u'$  aber nicht. Die Kante von  $u$  und  $v$  wird in diesem Fall auf die Kante von  $u'$  und  $v'$  abgebildet.

(3) Wir zeigen: Wird eine beliebige Teilmenge  $I$  von  $\{1, \dots, n\}$  durch  $S_i(V)$  zerbrochen, so wird sie auch von  $V$  zerbrochen. Sei o.B.d.A.  $i = 1$  und  $I = \{1, \dots, k\}$ . Aus den Voraussetzungen folgt sofort, dass alle Mengen der Form  $\{1, v_2, \dots, v_k\} \in V$  sein müssen. Folglich müssen nun aber auch alle Mengen der Form  $\{0, v_2, \dots, v_k\} \in V$  sein, da sonst nicht alle Mengen der ersten Form in  $S_i(V)$  liegen würden, da sie *geshiftet* worden wären. Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $I$  durch  $S_i(V)$  zerbrochen wird.

(4) Angenommen es gibt ein  $v$ , dass auf  $d + 1$  Komponenten 1 ist. Dann müssen aber auch alle Vektoren, die auf diesen  $d + 1$  Komponenten andere Werte annehmen, enthalten sein, da  $v$  sonst *geshiftet* werden könnte. Das würde aber bedeuten, dass  $\dim(V^*) \geq d + 1$ . Widerspruch zu (3).  $\square$

**Definition 5.10.**  $V$  heißt *bipartit*, falls sich seine Elemente in zwei disjunkte Teilmengen aufteilen lassen, sodass zwischen den Elementen innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen.



Wir benötigen den Heiratssatz von Hall für bipartite Graphen. Um nicht Begriffe der Graphentheorie einführen zu müssen, erfolgt die Formulierung in angewandter und gleichzeitig sehr verständlicher und einprägsamer Version. Bipartit entspricht dem Umstand, dass es (zumindest in der damaligen Zeit) nicht möglich ist, zwei Personen gleichen Geschlechts miteinander zu verheiraten.

**Satz 5.11.** Es ist möglich jede Frau zu verheiraten, falls es für jede Gruppe von Frauen mindestens ebensoviele Männer gibt, die sich für wenigstens eine der Frauen in der Gruppe interessieren.

*Beweis.* Siehe S.26-30 in [5]. □

**Lemma 5.12.** Gegeben seien die Bedingungen aus Definition 5.7. Dann können die Kanten so ausgerichtet werden, dass  $\text{out}(v) \leq d$ .

*Beweis.* Wir suchen eine bipartite Paarung der Menge der Kanten auf die Menge der anliegenden Ecken, wobei jede Ecke  $d$ -mal zählt. Nach dem Heiratssatz von Hall reicht es aus zu zeigen, dass es für jede Menge von Kanten der Mächtigkeit  $nd$ , mindestens  $n$  Ecken gibt, die zu mindestens einer Kante der Menge gehören. Sei  $V' \subseteq V$  also beliebig mit entsprechenden Kanten  $E'$ . Aus Lemma 5.9 folgt aber, dass  $|E'| \leq d|V'|$  und somit die Behauptung. □

**Lemma 5.13.** Gegeben seien die Voraussetzungen aus Definition 5.7. Sei  $P$  eine beliebige Verteilung auf  $V$ . Für alle  $i \leq k \leq n$  gilt dann

$$\sum_{i=1}^k \text{Var}(V_i | V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_k) \leq d.$$

*Beweis.* Seien  $E_i$  die Kanten, deren zugehörige Punkte sich in der  $i$ -ten Koordinate unterscheiden. Die Kanten für die Eckpunkte  $u$  und  $v$  werden mit  $(u, v)$  bezeichnet. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Var}(V_1 | V_2, \dots, V_n) \\ &= \sum_{v_2, \dots, v_n} P(V_2 = v_2, \dots, V_n = v_n) \text{Var}(V_1 | V_2 = v_2, \dots, V_n = v_n) \\ &= \sum_{(u,v) \in E_1} (P(u) + P(v)) \text{Var}(V_1 | u, v) \\ &= \sum_{(u,v) \in E_1} (P(u) + P(v)) p(1-p) \\ &= \sum_{(u,v) \in E_1} (P(u) + P(v)) \frac{P(u)}{(P(u) + P(v))} \frac{P(v)}{(P(u) + P(v))} \\ &= \sum_{(u,v) \in E_1} \frac{P(u)P(v)}{P(u) + P(v)} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für den Fall  $k = n$  mit Lemma 5.12 aus

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \text{Var}(V_i | V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_n) &\leq \sum_{(u,v) \in E} \frac{P(u)P(v)}{P(u) + P(v)} \\
&\leq \sum_{(u,v) \in E} \min(P(u), P(v)) \\
&\leq \sum_{v \in V} P(v) \text{out}(v) \\
&\leq d.
\end{aligned}$$

Für  $k \leq n$  projizieren wir  $V$  bezüglich  $I = \{1, \dots, k\}$  und definieren die Verteilung  $P_I$  auf kanonische Weise, d.h.

$$P_I(u) = P(v | v_i = u_i \ \forall i \leq k).$$

Da dies die bedingten Varianzen nicht ändert, folgt die Behauptung aus dem Fall  $k = n$ .  $\square$

**Lemma 5.14.** Sei  $P$  die Gleichverteilung auf  $V$  und sei  $V$   $\varepsilon$ -separiert,  $i < n$  beliebig,  $I = \{1, \dots, i\}$  und  $r$  eine Zufallsvariable mit Gleichverteilung auf  $\{i + 1, \dots, n\}$ . Dann gilt

$$E[\text{Var}(V_r | V_1, \dots, V_i)] \geq \frac{\varepsilon n}{2(n-m)} \left(1 - \frac{|V_I|}{|V|}\right).$$

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned}
&E[\text{Var}(V_r | V_1, \dots, V_i)] \\
&= \sum_{v_1, \dots, v_i} P(V_1 = v_1, \dots, V_i = v_i) \text{Var}(V_r | V_1 = v_1, \dots, V_i = v_i) \\
&= \sum_{v_1, \dots, v_i} P(V_1 = v_1, \dots, V_i = v_i) p(1-p) \\
&= \sum_{j=1}^{2^i} P(C_j) \frac{1}{2} P(u \neq w | u_r, w_r \in C_j) \\
&\geq \sum_{j=1 \dots 2^i: |C_j| \geq 1} P(C_j) \frac{\varepsilon n}{2(n-m)} \left(\frac{|C_j| - 1}{|C_j|}\right) \\
&= \frac{\varepsilon n}{2(n-m)} \left(1 - \frac{|V_I|}{|V|}\right)
\end{aligned}$$

Die Mengen  $C_j \in V$  werden entsprechend kanonisch<sup>13</sup> gewählt. Die Varianz einer Bernoulli-verteilten Zufallsgröße ist gleich der Hälfte der Wahrscheinlichkeit, dass zwei unabhängige Realisation verschieden sind. Die Anzahl der Elemente von  $V_I$  entspricht der Anzahl der  $C_j$  von positiver Wahrscheinlichkeit. Da Gleichverteilung vorliegt, folgt die letzte Gleichung.  $\square$

<sup>13</sup>D.h.  $C_1 = \{v \in V | v_1 = 0, \dots, v_i = 0\}$ ,  $C_2 = \{v \in V | v_1 = 1, v_2 = 0, \dots, v_i = 0\}$  usw.

Zusammen ergibt sich so eine Grenze für  $|V|$  in Abhängigkeit von  $d$ . Vorher benötigen wir noch eine Version des Lemmas von Sauer.

**Lemma 5.15.** Für  $V \in \{0, 1\}^n$  mit  $\dim(V) \leq d$  gilt

$$|V| \leq \sum_{i=0}^d \binom{n}{i} \leq (en/d)^d.$$

*Beweis.* Die Dimension von  $V$  kann als VC-Dimension wie in 5.2 mittels folgender Identität aufgefasst werden.

Sei die Obermenge  $A$  gegeben durch  $\{x_{1,0}, x_{1,1}, x_{2,0}, x_{2,1}, \dots, x_{n,1}\}$ . Die Klasse  $\mathbb{A}$  der Teilmengen sei eine Auswahl von Mengen der Form  $\{x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, \dots, x_{n,j_n}\}$  mit  $j_i \in \{0, 1\}$ . Jede dieser Teilmengen kann nun auf kanonische Weise als ein Element in  $V$  aufgefasst werden und  $V$  daher mit  $\mathbb{A}$  identifiziert werden. Es ist nun zu sehen, dass die Definitionen von  $\text{vc}(\mathbb{A})$  und  $\dim(V)$  übereinstimmen. Somit folgt die Aussage aus dem Lemma von Sauer 5.4.  $\square$

**Bemerkung 5.16.** Die Teilmengen der Form  $\{x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, \dots, x_{n,j_n}\}$  im eben geführten Beweis können auch als Realisationen von  $\{0, 1\}$ -wertigen Funktionen  $f, g$  auf den Punkten  $x_1, \dots, x_n$  interpretiert werden. Der Abstand zwischen zwei Elementen auf  $V$  entspricht dann

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1, \dots, n} |f(x_i) - g(x_i)|.$$

**Satz 5.17.** Sei  $V$   $\varepsilon = k/n$ -separiert und  $\dim(V) = d$ . Dann gilt

$$|V| \leq e(d+1) \left( \frac{2e(n+1)}{k+2d+2} \right)^d < e(d+1) \left( \frac{2e}{\varepsilon} \right)^d.$$

*Beweis.* Für alle  $m < n$  wähle  $i_1, \dots, i_{m+1}$  zufällig gleichverteilt aus  $\{1, \dots, n\}$  bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$ . Lemma 5.13 und 5.14 ergeben

$$\begin{aligned} d &\geq E\left[\sum_{j=1}^{m+1} \text{Var}(V_{i_j} | V_{i_1}, \dots, V_{i_{j-1}}, V_{i_{j+1}}, \dots, V_{i_{m+1}})\right] \\ &= (m+1)E[\text{Var}(V_{i_1} | V_{i_2}, \dots, V_{i_{m+1}})] \\ &\geq (m+1) \left( \frac{k}{2(n-m)} \left( 1 - \frac{|V|}{|V|} \right) \right) \\ &\geq (m+1) \left( \frac{k}{2(n-m)} \left( 1 - \frac{(em/d)^d}{|V|} \right) \right). \end{aligned}$$

Die Gleichheit folgt, da die  $i_j$  zufällig gewählt werden. Bei der letzten Ungleichung wurde das Lemma von Sauer angewandt. Sei  $k \geq 3$ , sonst folgt die Aussage direkt aus dem Lemma von Sauer.

Wird

$$m = \frac{(2d+2)(n+1)}{k+2d+2} \leq n$$

gewählt, so erhält man durch elementare Umformungen die Behauptung. Auf die Durchführung der Rechenschritte wird an dieser Stelle verzichtet.  $\square$

**Satz 5.18.** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, A, P)$  und eine Klasse  $\mathbb{F}$  von messbaren Funktionen von  $\Omega$  nach  $\{0, 1\}$  mit  $\text{vc}(\mathbb{F}) = d$ . Sei

$$d_P(f, g) = P(x \in \Omega | f(x) \neq g(x)).$$

Dann gilt

$$M(\varepsilon, \mathbb{F}, d_P) \leq e(d+1)(2e/\varepsilon)^d.$$

*Beweis.* Angenommen, es gibt eine größere Packmenge, dann existieren  $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ , sodass für alle verschiedenen Funktionen  $f_k, f_j$  mit  $k, j \in \{1, \dots, e(d+1)(2e/\varepsilon)^d + 1\}$  aus der Packmenge

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1, \dots, n} |f_k(x_i) - f_j(x_i)| \geq \varepsilon$$

gilt. Unter Beachtung der Identität aus dem Beweis von Lemma 5.15 und Bemerkung 5.16 widerspricht dies aber Satz 5.17.  $\square$

**Bemerkung 5.19.** Die Punkte  $x_1, \dots, x_n$  im vorigen Beweis können z.B. einfach als Realisationen von  $P$  gewählt werden. Da

$$P(x \in X | |f_k(x) - f_j(x)| = 1) \geq \varepsilon + \delta$$

folgt die gewünschte Eigenschaft aus dem Gesetz der großen Zahlen.

**Korollar 5.20.** Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, A, P)$  und eine Klasse  $\mathbb{F}$  von messbaren Funktionen von  $\Omega$  nach  $[-M, M]$  mit  $\text{vc}(\mathbb{F}) = d$ . Sei  $d_1(f, g) = \|f - g\|_P$ . Dann gilt

$$N(\varepsilon, \mathbb{F}, d_1) \leq e(d+1)(8eM/\varepsilon)^d.$$

*Beweis.* Für  $f \in \mathbb{F}$  sei

$$\hat{f} : \mathbb{F} \times [0, 1] \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(f, r) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } f(x) > r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $\hat{\mathbb{F}} = \{\hat{f} | f \in \mathbb{F}\}$ . Dann gilt unter Ausnutzung der Definition der VC-Dimension 5.6 für Funktionenklassen

$$\text{vc}(\hat{\mathbb{F}}) \leq \text{vc}(\mathbb{F}).$$

Denn für eine beliebige Wahl der Zerbrechnungsmenge  $(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)$  von  $\hat{\mathbb{F}}$  mit  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_n \in (0, 1)$  beliebig liefert  $x_1, \dots, x_n$  mit  $r_1, \dots, r_n$  eine Zerbrechnungsmenge für  $\mathbb{F}$ .

Nun gilt mit  $\hat{P} = P \otimes \lambda[0, 1]$ :

$$M(\varepsilon, \mathbb{F}, d_{1,P}) = M(\varepsilon, \hat{\mathbb{F}}, d_{1,\hat{P}}) \leq e(d+1)(2e/\varepsilon)^d$$

Die Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass  $d_{1,\hat{P}}(\hat{f}, \hat{g}) = d_{1,P}(f, g)$  für  $f, g \in \mathbb{F}$  gilt. Die Ungleichung folgt aus Satz 5.18. Da jede  $\varepsilon$ -Packmenge eine  $2\varepsilon$ -Deckungsmenge induziert, folgt mit einem Skalierungsargument die Behauptung.  $\square$

## 6 Die Deckungszahl der Verlustklasse

Wir möchten nun die Deckungszahl der Klasse

$$L_t(H) = \{(v_{t+1,h} - h_t)^2 - (v_{t+1,h} - h_t^*)^2 | h \in H\}$$

bestimmen. Im späteren Beweis werden wir als Pseudometrik die  $L_1$ -Norm des empirischen Wahrscheinlichkeitsmaßes, bezeichnet als  $d_{1,\mu_{D,D^*}}$ , von jeweils  $n$  zufälligen unabhängigen Stichproben  $D$  und  $D^*$  benötigen. Zu beachten ist, dass die Deckungsmenge in diesem Fall nicht fix ist, sondern von der Stichprobe abhängt, d.h. die Deckungszahl kann als Zufallsgröße aufgefasst werden. Wir wollen also eine obere Schranke für

$$N(\varepsilon, L_t(H), d_{1,\mu_{D,D^*}})$$

finden. Das heißt, für alle  $l \in L_t(H)$  soll ein  $l^* \in L_t(H)^*$  existieren mit  $|L_t(H)^*| = N(\varepsilon, L_t(H), d_{1,\mu_{D,D^*}})$ , sodass für die Stichprobe  $D_1, \dots, D_n, D_1^*, \dots, D_n^* \in \mathbf{X}$  gilt, dass

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(D_i) - l^*(D_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(D_i^*) - l^*(D_i^*) \right| \leq \varepsilon.$$

Wir haben dabei als Voraussetzung gegeben, dass die VC-Dimension der Klassen  $H_s$  mit  $s = 0, \dots, T-1$  durch  $d$  beschränkt ist. Diesen Umstand wollen wir ausnutzen, um die VC-Dimension der *Cashflowklasse*

$$G_t = \{v_{t+1,h} | h \in H\}$$

und letztendlich der gesamten Verlustklasse als Komposition der *Cashflowklasse* und  $H_t$  abzuschätzen.

**Lemma 6.1.** Seien  $X, Y$  Mengen und  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  VC-Klassen von Teilmengen von  $X, Y$  mit

$$1 \leq \text{vc}(\mathcal{A}), \text{vc}(\mathcal{B}) \leq d.$$

Für  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$  gilt dann

$$\text{vc}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) < 2d \log_2(26).$$

*Beweis.* Angenommen, es sei  $\text{vc}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \geq k = 2d \log_2(26)$ . Dann existieren Punkte  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ , sodass

$$|\{(1_{(A \times B)}(x_i, y_i))_{i=1, \dots, k} | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}| = 2^k.$$

Für festes  $A \in \mathcal{A}$  gilt aber nach dem Lemma von Sauer

$$|\{(1_{(A \times B)}(x_i, y_i))_{i=1, \dots, k} | B \in \mathcal{B}\}| \leq (ek/d)^d$$

und mit einem einfachen Argument<sup>14</sup> folgt

$$\begin{aligned} 2^k &= |\{(1_{(A \times B)}(x_i, y_i))_{i=1, \dots, k} \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}| \\ &\leq (ek/d)^{2d}. \end{aligned}$$

Aber  $k$  ist gerade so gewählt, dass  $2^k > (ek/d)^{2d}$ . Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 6.2.** Aus dem Beweis von Lemma 6.1 folgt die Behauptung auch für  $n \geq 2$  VC-Klassen

$$\text{vc}(\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n) < 2nd \log_2(en),$$

denn es gilt

$$2^k > (ek/d)^{nd} \quad \text{für } k > 2nd \log_2(en).$$

**Bemerkung 6.3.** Diese Eigenschaft kann natürlich auch für Funktionenklassen gezeigt werden. Aufgrund der Eigenschaft der VC-Dimension für Funktionenklassen, die Werte  $r_i$  frei wählen zu können (vgl. Definition 5.2), wird die VC-Dimension nicht größer unter Multiplikation mit einer beliebigen fixen anderen Funktion. Also gilt

$$\text{vc}(\{fg \mid g \in G\}) \leq \text{vc}(G).$$

Mit dieser Bemerkung und einem Blick auf die Definition der *Cashflowfunktion* 2.2 folgt nun unter Anwendung der Beweisidee in 6.1 die Abschätzung der VC-Dimension der *Cashflowklasse*.

**Lemma 6.4.** Sei  $G_t = \{v_{t+1:w,h}(x) \mid h \in H\}$ . Für alle  $s \in \{t, \dots, t+w\}$  sei  $\text{vc}(H_s) \leq d$  und

$$c := c(w) := 2(w+2) \log_2(e(w+2)). \quad (6.1)$$

Dann gilt:

$$\text{vc}(G_t) \leq cd$$

*Beweis.* Die *Cashflowfunktion* (2.2) kann mit  $\bar{h}_s = 1_{f_s \geq h_s}$  verkürzt geschrieben werden als

$$v_{t:w,h}(x) = \sum_{s=t}^{t+w} f_s(x_s) \bar{h}_s(x_s) \prod_{r=t}^{s-1} (1 - \bar{h}_r(x_r)) + h_{t+w}(x_{t+w}) \prod_{r=t}^{t+w} (1 - \bar{h}_r(x_r)).$$

Wegen der vorhergehenden Bemerkungen kann für alle  $s$  zur Betrachtung der VC-Dimension  $f_s(x_s)$  o.B.d.A. 1 gesetzt werden.

<sup>14</sup>Seien  $(x, y) = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$  fest. Angenommen, es gibt mehr als  $(ek/d)^{2d}$  unterschiedliche Vektoren  $p_1, p_2, \dots$  (alle  $p_i$  sollen  $k$ -dimensionale 0,1-Vektoren sein), sodass  $(1_{(A \times B)}(x, y)) = p_j$  für beliebige Mengen  $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Nun gibt es aber nach dem Lemma von Sauer maximal  $(ek/d)^d$  unterschiedliche Vektoren  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots$  mit  $(1_{(A)}(x)) = \hat{p}_j$  für beliebige Mengen  $A \in \mathcal{A}$  und ebenso maximal  $(ek/d)^d$  verschiedene  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots$  mit  $(1_{(B)}(y)) = \bar{p}_j$  für beliebige Mengen  $B \in \mathcal{B}$ . Daraus folgt, dass es maximal  $(ek/d)^{2d}$  unterschiedliche Vektoren  $p_1^*, p_2^*, \dots$  gibt mit  $(1_{(A)}(x))(1_{(B)}(y)) = \bar{p}_i \hat{p}_m = p_j^*$  für beliebige Mengen  $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme.

Sei nun angenommen, die Behauptung gelte nicht. Dann gibt es für  $k \geq cd$  Elemente  $x_1, \dots, x_k$ <sup>15</sup>  $\in \mathbf{X}$  und  $r_1, \dots, r_k$  mit

$$|\{(1_{v_{t:w,h}(x_i) > r_i})_{i=1,\dots,k} | h \in H\}| = 2^k > (ek/d)^{d(w+2)}.$$

Die *Cashflowfunktion* besteht aus  $w + 2$  Summanden, wobei für ein  $x \in \mathbf{X}$  maximal einen Wert größer 0 annimmt. Die ersten  $w + 1$  Summanden sind dabei  $\{0, 1\}$ -wertig. Nach dem Lemma von Sauer kann jedes  $\bar{h}_s$  maximal  $(ek/d)^d$  unterschiedliche Vektoren  $p_{s,1}, p_{s,2}, \dots$ <sup>16</sup> mit  $(1_{\bar{h}_s(x_{i,s}) > r_i})_{i=1,\dots,k} = p_{s,j}$  für beliebige  $h_s \in H_s$  erzeugen. Damit gilt:

$$\begin{aligned} & |\{(1_{v_{t:w,h}(x_i) > r_i})_{i=1,\dots,k} | h \in H\}| \\ & \leq | \{ I \left( \sum_{s=t}^{t+w} p_s \prod_{r=t}^{s-1} (1 - p_r) + h_{t+w}(x_{t+w}) \prod_{r=t}^{t+w} (1 - p_r) > r_i \right) | \\ & \quad h_{t+w} \in H_{t+w}, p_t \in \{p_{t,1}, \dots\}, p_{t+1} \in \{p_{t+1,1}, \dots\}, \dots \} | \end{aligned}$$

Dabei ist  $I$  die Indikatorfunktion. Da fixe Werte für die Betrachtung der VC-Dimension keine Rolle spielen, kann dies weiter abgeschätzt werden durch:

$$\begin{aligned} & (ek/d)^{(w+1)d} \sup_{r^*, p^*} |\{(I(h_{t+w}(x_{i,t+w})p_i^* > r_i^*))_{i=1,\dots,k} | h_{t+w} \in H_{t+w}\}| \\ & \leq (ek/d)^{(w+2)d} \end{aligned}$$

Widerspruch. □

Bis jetzt können wir Korollar 5.20 nur auf die *Cashflowklasse* und  $H_t$  anwenden. Wir benötigen noch folgende einfache Rechenregeln für Deckungszahlen, um die Verlustklasse abzuschätzen.

**Lemma 6.5.** Seien  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{G}$  Funktionenklassen, ausgestattet mit einer Pseudometrik  $d$ . Für  $\mathbb{F} + \mathbb{G} = \{f + g | f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G}\}$  gilt dann

$$N(\varepsilon, \mathbb{F} + \mathbb{G}, d) \leq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathbb{F}, d\right) N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathbb{G}, d\right).$$

Ist  $\mathbb{F}$  durch  $M$  beschränkt, so folgt für  $\mathbb{F}^2 = \{f^2 | f \in \mathbb{F}\}$  :

$$N(\varepsilon, \mathbb{F}^2, d) \leq N\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \mathbb{F}, d\right)$$

*Beweis.* Der Beweis ist offensichtlich. □

**Korollar 6.6.** Es gilt

$$N(\varepsilon, L_t(H), d_1) \leq e^4 (d+1)^2 (cd+1)^2 (64eM^2/\varepsilon)^{2d(c+1)}$$

<sup>15</sup>Dabei sei die Schreibweise  $x_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,T})$  eingeführt.

<sup>16</sup>Dies sind  $k$ -dimensionale  $\{0,1\}$ -wertige Vektoren.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
N(\varepsilon, L_t(H), d_1) &\leq N(\varepsilon, (H_t - G_t)^2 + (H_t - G_t)^2, d_1) \\
&\leq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, (H_t - G_t)^2, d_1\right)^2 \\
&\leq N\left(\frac{\varepsilon}{4M}, H_t - G_t, d_1\right)^2 \\
&\leq N\left(\frac{\varepsilon}{8M}, H_t, d_1\right)^2 N\left(\frac{\varepsilon}{8M}, G_t, d_1\right)^2 \\
&\leq e^2(d+1)^2(8eM8M/\varepsilon)^{2d}e^2(cd+1)^2(8eM8M/\varepsilon)^{2cd}
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt mit Korollar 5.20 und Lemma 6.4.  $\square$

## 7 Der Schätzfehler für positive überdeckbare Funktionenklassen

Die Darstellung dieses Kapitels folgt in den Grundzügen [6].

In Satz 4.5 haben wir gesehen, dass wir statt des Schätzfehlers auch den Erwartungswert der Verlustklasse minimieren können. Um den Ansatz aus 3.5 anzuwenden, müssen wir auf dieser Klasse eine Deckungsmenge finden und eine Abstandsdefinition festlegen. Für die klassische  $L_1$ -Pseudometrik erhalten wir leider nur eine Konvergenz für  $n\varepsilon^2 \rightarrow \infty$  (vgl. in Lemma 7.3 *a* und *v*), wobei  $n$  die Anzahl der Stichproben darstellt und  $\varepsilon$  der Schranke des Erwartungswerts der Verlustklasse entspricht. Nutzt man aus, dass die Summe der Verlustfunktionen sehr nahe bei 0 liegt, erhält man durch ein geschickt gewähltes Abstandsmaß auch Konvergenz des Schätzfehlers für  $n\varepsilon \rightarrow \infty$ .

**Definition 7.1.** Dazu definieren wir für  $v, x, y > 0$

$$d_v(x, y) = \frac{|x - y|}{x + y + v}.$$

Für  $d_v$  gilt die Dreiecksungleichung. Weiterhin seien mit  $D$  und  $D^*$  jeweils  $n$  gemäß  $\mu$  gezogene Stichproben aus  $\mathbf{X}$  gegeben.  $D$  kann als Stichprobe zur Erzeugung des Schätzers (3.1) und  $D^*$  als Kontrollstichprobe angesehen werden.

Wir finden in diesem Kapitel ein Resultat für positive Funktionenklassen. Mit der Eigenschaft, dass sich  $E[f^2]$  durch  $KE[f]$  abschätzen lässt (vgl. Lemma 4.6), können wir im nächsten Kapitel das Resultat auf allgemeine Funktionenklassen wie die Verlustklasse ausweiten.

Um das für den Beweis erforderliche Vertauschen der Stichproben besser formulieren zu können, führen wir für die restlichen Kapitel ein:

**Definition 7.2.**  $P$  sei das  $2n$ -dimensionale Produktmaß von  $\mu$ . Sei  $\sigma$  eine Zufallsgröße, sodass für  $i = 1, \dots, n$  gilt:

1.  $\sigma(i) = i, \sigma(n+i) = n+i$  falls  $U_i = 1$



2.  $\sigma(i) = n + i, \sigma(n + i) = i$  falls  $U_i = -1$

Dabei sind  $U = (U_i)$  unabhängige, identisch verteilte Bernoulli- $\frac{1}{2}$ -Zufallsgrößen bezüglich  $P$  mit Werten in  $\{-1, 1\}$ , die unabhängig von den Stichproben  $D$  und  $D^*$  sind.

Um eine komfortablere Schreibweise zu ermöglichen, sei  $D_{n+i} := D_i^*$ . Somit ist  $D = (D_1, \dots, D_n)$  und  $D^* = (D_{n+1}, \dots, D_{2n})$ .

Es folgen einige vorbereitende Lemmata.

**Lemma 7.3.** Seien  $x_i \in [0, M]$  und  $\beta = \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+i}$ . Dann gilt

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(n+i)})\right| \geq a(nv + \beta)\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2a^2nv}{M}\right).$$

*Beweis.* Unter Verwendung der Hoeffding-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(n+i)}\right| \geq a(nv + \beta)\right) &\leq 2 \exp\left(-\frac{a^2(nv + \beta)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{n+i})^2}\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{a^2(nv + \beta)^2}{2M\beta}\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{2a^2nv}{M}\right) \end{aligned}$$

□

Die Nichtnegativität der  $x_i$  ist dabei eine entscheidende Voraussetzung. Eine ähnliche Rechnung ergibt:

**Lemma 7.4.** Seien  $(Z_i)_{i=1, \dots, n}$  unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen mit Werten in  $[0, M]$ . Dann gilt

$$P\left(\left|d_v\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, EZ_1\right)\right| \geq a\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2a^2nv}{M}\right).$$

Und der Ausdruck wird für  $n > \frac{\ln(2)M}{a^2v}$  kleiner als  $\frac{1}{2}$ .

*Beweis.* Es gilt wie im vorherigen Lemma

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n Z_i - EZ_i\right| \geq a\left(nv + \sum_{i=1}^n Z_i + EZ_i\right)\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2a^2nv}{M}\right).$$

□

Wir möchten nun eine Pseudometrik auf der Funktionenklasse definieren, welche unter  $\sigma$  stabil ist.

**Definition 7.5.** Gegeben sei eine Klasse von Funktionen  $\mathbb{F}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  und eine Stichprobe  $D, D^*$ . Dann wird für deren Elemente  $f, g$  definiert:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{v,D,D^*}(f, g) &= \max_{\sigma} d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_{\sigma(i)}), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(i)}) \right) \\ &\quad + d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(n+i)}), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_{\sigma(n+i)}) \right) \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\hat{d}_{v,D,D^*}$  erfüllt die Dreiecksungleichung und ist eine Pseudometrik auf der Funktionenklasse.

**Lemma 7.6.** Gegeben die Situation von 7.5, sei  $\mathbb{F}^*(D, D^*)$  eine  $\frac{a}{4}$ -Deckungsmenge der Funktionenklasse bezüglich  $\hat{d}_{v,D,D^*}$ . Dann gilt für ein  $g \in \mathbb{F}^*(D, D^*)$ :

$$d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i^*) \right) \leq d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i^*) \right) + a/4$$

*Beweis.* Mit der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i^*) \right) &\leq d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i) \right) \\ &\quad + d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i^*) \right) + d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i^*), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i^*) \right) \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung.  $\square$

Es sei noch einmal daran erinnert, dass die Deckungsmenge  $\mathbb{F}^*(D, D^*)$  der Funktionenklasse  $\mathbb{F}$  von den Stichproben  $D$  und  $D^*$  abhängt.

**Satz 7.7.** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}), \mu)$ , jeweils  $n$  Realisationen  $D$  und  $D^*$  bezüglich  $\mu$  und eine zulässige<sup>17</sup> Klasse  $\mathbb{F}$  von messbaren Funktionen von  $\mathbf{X} \rightarrow [0, M]$ . Weiterhin sei  $\mu_{D,D^*}$  das empirische von  $D, D^*$  erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbf{X}$ . Für alle  $n > \frac{2 \ln(4)M}{a^2 v}$  gilt dann

$$\begin{aligned} P \left( D | \exists f \in \mathbb{F} : \left| d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i), E[f] \right) \right| > a \right) \\ \leq 2 \sup_{D, D^*} N \left( \frac{av}{8}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}} \right) e^{-a^2 vn/8M}. \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Aus Messbarkeitsgründen muss an die Klasse eine milde Voraussetzung gestellt werden, die auf die meisten erdenklichen Klassen von Funktionen zutrifft. Die Definition befindet sich im Anhang sowie Erläuterungen, welche Probleme auftauchen können, wenn Zulässigkeit nicht gefordert wird.

*Beweis.* Für alle  $D, D^*$  und alle  $g \in \mathbb{F}^*(D, D^*)$  mit  $b = 2 \exp(-\frac{2a^2nv}{16M})$  gilt nach Lemma 7.3:

$$\begin{aligned} & P \left( \sigma \mid \left| \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(i)}) - g(D_{\sigma(i+n)}) \right| \geq \frac{a}{4} (nv + \sum_{i=1}^n g(D_i) + g(D_i^*)) \right) \leq b \\ \Rightarrow & P \left( \sigma \mid \exists g \in \mathbb{F}^*(D, D^*) : d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(i)}), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(n+i)}) \right) \geq \frac{a}{4} \right) \\ & \leq b |\mathbb{F}^*(D, D^*)| \end{aligned}$$

Der Wert  $|\mathbb{F}^*(D, D^*)|$  kann durch einen von  $D$  und  $D^*$  unabhängigen Wert abgeschätzt werden. Wird auf beiden Seiten über  $D, D^*$  integriert, so folgt mit der Unabhängigkeit von  $D, D^*$  und  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} & P \left( \sigma, D, D^* \mid \exists g \in \mathbb{F}^*(D, D^*) : d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(i)}), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(n+i)}) \right) \geq \frac{a}{4} \right) \\ & \leq b \sup_{D, D^*} |\mathbb{F}^*(D, D^*)| \end{aligned}$$

Das Vertauschen in der zufällig gewählten Stichprobe ändert die Wahrscheinlichkeit nicht. Also gilt:

$$\begin{aligned} & P \left( D, D^* \mid \exists g \in \mathbb{F}^*(D, D^*) : d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i^*) \right) \geq a/4 \right) \\ & \leq b \sup_{D, D^*} |\mathbb{F}^*(D, D^*)| \end{aligned}$$

Mit Lemma 7.6 folgt nun:

$$\begin{aligned} & P \left( D, D^* \mid \exists f \in \mathbb{F} : d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i^*) \right) \geq a/2 \right) \\ & \leq b \sup_{D, D^*} N(a/4, \mathbb{F}, \hat{d}_{v, D, D^*}) \end{aligned}$$

Die Bedingung an  $n$  garantiert mit Lemma 7.4, dass  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i^*)$  nur mit Wahrscheinlichkeit kleiner  $\frac{1}{2}$  von  $E[f]$  um mehr als  $\frac{a}{2}$  bezüglich  $d_v$  abweicht. Also folgt:

$$P \left( D \mid \exists f \in \mathbb{F} : d_v \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i), E[f] \right) \geq a \right) \leq 2b \sup_{D, D^*} N(a/4, \mathbb{F}, \hat{d}_{v, D, D^*})$$

Zum Schluss müssen wir noch die gewünschte Pseudometrik wiederherstellen. Dazu wird gezeigt, dass

$$N(a/4, \mathbb{F}, \hat{d}_{v, D, D^*}) \leq N(av/8, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}).$$

Sei für beliebige  $f, g \in \mathbb{F}$  der Abstand  $d_{1, \mu_{D, D^*}}(f, g) \leq \frac{av}{8}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{v, D, D^*}(f, g) &= \frac{|\sum_{i=1}^n f(D_{\sigma(i)}) - g(D_{\sigma(i)})|}{vm + \sum_{i=1}^n f(D_{\sigma(i)}) + g(D_{\sigma(i)})} + \frac{|\sum_{i=n+1}^{2n} f(D_{\sigma(i)}) - g(D_{\sigma(i)})|}{vm + \sum_{i=n+1}^{2n} f(D_{\sigma(i)}) + g(D_{\sigma(i)})} \\ &\leq \frac{|\sum_{i=1}^n f(D_{\sigma(i)}) - g(D_{\sigma(i)})|}{vm} + \frac{|\sum_{i=n+1}^{2n} f(D_{\sigma(i)}) - g(D_{\sigma(i)})|}{vm} \\ &\leq \frac{2}{v} d_{1, \mu_{D, D^*}}(f, g) \leq \frac{a}{4} \end{aligned}$$

□

## 8 Der Schätzfehler für überdeckbare Funktionenklassen

In diesem Kapitel soll ein ähnliches Resultat ohne die Voraussetzung der Nichtnegativität der Funktionenklasse gezeigt werden. Die Resultate entstammen eigenen Überlegungen und stellen eine Verbesserung des in [4] verwendeten Theorems 6.12 dar.

**Lemma 8.1.** Seien  $U = (U_i)$  unabhängige, identisch verteilte Bernoulli- $\frac{1}{2}$ -Zufallsvariablen mit Werten in  $\{-1, 1\}$ . Seien  $x_i \in [-M, M]$  und  $\beta := \sum_{i=1}^{2n} x_i^2$ . Dann gilt

$$P\left(\sum_{i=1}^n U_i(x_i - x_{n+i}) \geq a(nv + 3\beta)\right) \leq \exp(-4a^2nv).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n U_i(x_i - x_{n+i}) \geq a(nv + 3\beta)\right) &\leq \exp\left(-\frac{a^2(nv + 3\beta)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{n+i})^2}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{a^2(nv + 3\beta)^2}{3\beta}\right) \\ &\leq \exp(-4a^2nv) \end{aligned}$$

□

Um das Äquivalent zu Lemma 7.4 zu zeigen, benötigen wir folgende Version der Bernstein-Ungleichung:

**Satz 8.2.** Seien  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige Zufallsgrößen mit Erwartungswert 0, die für alle  $k \geq 2$  der Bedingung

$$E[|Y|^k] \leq \frac{EY^2 k! h^{k-2}}{2} < \infty$$

genügen. Für die Summe der  $Y_i$  von 1 bis  $n$  gilt dann

$$P\left(\sum Y_i \geq w\right) \leq \exp\left(-\frac{w^2}{2\sum EY_i^2 + 2hw}\right).$$

*Beweis.* Der Beweis folgt [3]. Für alle  $c$  mit  $1 > c \geq th$  gilt

$$E[e^{tY_i}] = 1 + 0 + \frac{t^2 EY_i^2}{2!} + \frac{t^3 EY_i^3}{3!} + \dots \leq 1 + \frac{t^2 EY_i^2}{2(1-c)} \leq \exp\left(\frac{t^2 EY_i^2}{2(1-c)}\right).$$

Aus der Markov-Ungleichung  $P(X > E[X]e^{\tau^2}) \leq e^{-\tau^2}$  folgt mit  $X = e^{t\sum Y_i}$ , dass

$$P\left(\sum Y_i \geq \frac{t\sum EY_i^2}{2(1-c)} + \frac{\tau^2}{t}\right) \leq e^{-\tau^2}.$$

Wir machen den Ansatz, den rechten Term in der Klammer unter  $t$  zu minimieren. Dieser wird minimal für  $t^2 = \frac{2(1-c)\tau^2}{\sum EY_i^2}$  und es ergibt sich

$$P\left(\sum Y_i \geq \frac{2\tau^2}{t}\right) = P\left(\sum Y_i \geq \tau \left(\frac{2\sum EY_i^2}{1-c}\right)^{1/2}\right) \leq e^{-\tau^2}. \quad (8.1)$$

Wir setzen zur besseren Schreibweise  $w = \tau \left(\frac{2\sum EY_i^2}{1-c}\right)^{1/2}$ . Zu beachten ist, dass dabei die Bedingung  $\frac{2(1-c)\tau^2}{\sum EY_i^2} = t^2 \leq \frac{c^2}{h^2}$  gelten muss. Da

$$\frac{2(1-c)\tau^2}{\sum EY_i^2} = \frac{2}{1-c} \frac{(1-c)^2 \tau^2}{\sum EY_i^2}$$

und alle Werte positiv sind, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\left(\frac{2}{1-c}\right)^{1/2} \frac{h(1-c)\tau}{(\sum EY_i^2)^{1/2}} \leq c$$

und nach Eliminierung von  $1-c$  im Zähler durch kanonische Umformungen äquivalent zu:

$$\frac{hw}{\sum EY_i^2 + hw} \leq c$$

Die Werte  $c$  und  $t$  können daher wie gewünscht gewählt werden, ohne dass die Bedingung  $1 > c \geq th$  verletzt wird. Setze nun  $c = \frac{hw}{\sum EY_i^2 + hw}$ . Aus der Definition von  $w$  folgt, dass

$$\tau^2 = w^2 \frac{1-c}{2\sum EY_i^2} = w^2 \frac{\sum EY_i^2}{(\sum EY_i^2 + hw)2\sum EY_i^2} = \frac{w^2}{2\sum EY_i^2 + 2hw}.$$

Somit ergibt sich die Behauptung mit (8.1).  $\square$

**Lemma 8.3.** Seien  $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit Werten in  $[-M, M]$ ,  $EZ_1 \geq 0$ ,  $EZ_1^2 \leq KEZ_1$  und  $K \geq 1$ . Für alle  $a \leq 1$  gilt dann

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i - EZ_1 \geq a(v + EZ_1)\right) \leq \exp\left(-\frac{3a^2vn}{2(M+3K)}\right)$$

und der Ausdruck wird für  $n > \frac{\ln(4)(M+3K)}{3a^2v}$  kleiner als  $\frac{1}{2}$ .

*Beweis.* Sei  $Y_i = Z_i - E[Z_i]$ . Die Bedingung der Bernstein-Ungleichung an die zentrierten Zufallsgrößen

$$E[|Y_i|^k] \leq \frac{EY_i^2 k! h^{k-2}}{2} \quad \forall k \geq 2,$$

wird für  $h = \frac{M}{3}$  erfüllt. Anwendung von Satz 8.2 mit der Bedingung an  $E[f^2]$  und  $K \geq 1$  ergibt

$$\begin{aligned} P\left(\sum Y_i \geq na(v + E[f])\right) &\leq \exp\left(-\frac{n^2 a^2 (v + E[f])^2}{2nKE[f] + 2hna(v + E[f])}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{na^2v}{2K + \frac{2M}{3}}\right). \end{aligned}$$

□

Es wird noch eine weitere Hilfsaussage benötigt.

**Definition 8.4.** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X}), \mu)$ , jeweils  $n$  Realisationen  $D$  und  $D^*$ , sowie eine Funktionenklasse  $\mathbb{F}$  mit messbaren Funktionen  $f : \mathbf{X} \rightarrow [-M, M]$ . Bezeichne  $\mu_{D, D^*}$  das von  $D$  und  $D^*$  erzeugte empirische Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbf{X}$ . Dann ist

$$\bar{N}\left(7av, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}, \frac{7v}{27K}\right)$$

eine  $E$ -Deckungszahl von  $\mathbb{F}$ , falls eine Menge  $\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)$  mit

$$|\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)| = \bar{N}\left(7av, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}, \frac{7v}{27K}\right)$$

existiert, sodass

$$\forall f \in \mathbb{F} \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : |E[f] - E[g]| \leq \frac{7v}{27K} \text{ und } d_{1, \mu_{D, D^*}}(f, g) \leq 7av.$$

$\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)$  heißt  $\frac{7v}{27K}$ - $E$ -Deckungsmenge.

**Lemma 8.5.** Gegeben sei die Situation von 8.4 und  $\mathbb{F}$  sei zulässig. Dann gilt

$$\begin{aligned} &P\left(D, D^* \mid \exists f \in \mathbb{F} : \sum_{i=1}^n f(D_i) - f(D_i^*) \geq 3an(7v + 9KE[f])\right) \\ &\leq P\left(D, D^* \mid \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^n g(D_i) - g(D_i^*) \geq an(7v + 27KE[g])\right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $f$  beliebig und  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i) - f(D_i^*) \geq 3a(7v + 9KE[f])$ . Da eine  $7av - E$ -Deckungsmenge vorliegt, gibt es ein  $g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)$  mit  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i) - g(D_i^*) + 7av \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i) - f(D_i^*)$  und  $E[f] \geq E[g] - \frac{7v}{27K}$ . Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(D_i) - g(D_i^*) \geq a(7v + 27KE[g]).$$

□

**Satz 8.6.** In der Situation von 8.5 gelte für die Funktionen der Klasse  $\mathbb{F}$ , dass  $E[f] \geq 0$  und  $E[f^2] \leq KE[f]$ .

Für alle  $n > \max\left(\frac{8\ln(2)M^2}{v}, \frac{8\ln(2)(M+3K)}{567a^2v}\right)$  gilt dann:

$$\begin{aligned} & P(D|\exists f \in \mathbb{F} : \sum_{i=1}^n E[f] - f(D_i) \geq an(7v + 27E[f])) \\ & \leq 2 \sup_{D, D^*} \bar{N}\left(\frac{7av}{6}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}, \frac{7v}{6 \cdot 27K}\right) \exp\left(-\frac{4a^2nv}{36}\right) \\ & \quad + 2 \sup_{D, D^*} N\left(\frac{v}{16}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}\right) \exp\left(-\frac{vn}{16M^2}\right) \end{aligned}$$

*Beweis.* Für alle  $D, D^*$ ,  $g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)$  und  $b_1 := \exp(-\frac{4a^2nv}{36})$  gilt nach Lemma 8.1:

$$\begin{aligned} & P\left(\sigma \left| \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(n+i)}) - g(D_{\sigma(i)}) \geq \frac{a}{6} \left( nv + 3 \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 \right) \right.\right) \leq b_1 \\ \Rightarrow & P\left(D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^n g(D_i^*) - g(D_i) \geq \frac{a}{6} \left( nv + 3 \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 \right) \right) \\ = & P\left(\sigma, D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^n g(D_{\sigma(i)}^*) - g(D_{\sigma(i)}) \right. \\ & \left. \geq \frac{a}{6} \left( nv + 3 \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 \right) \right) \leq \sup_{D, D^*} |\bar{\mathbb{F}}_t^*(D, D^*)| b_1 \end{aligned}$$

Unter Hinzunahme einer Bedingung gilt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & P\left(D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^n g(D_i^*) - g(D_i) \geq \frac{a}{6} \left( nv + 3 \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 \right) \right), \\ & \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 \leq \frac{(1 + \bar{a})nE[g^2] + \bar{a}2nv}{1 - \bar{a}} \leq \sup_{D, D^*} |\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)| b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P \left( D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^n g(D_i^*) - g(D_i) \geq \frac{a}{6} \left( nv + 3n \frac{(1+\bar{a})E[g^2] + \bar{a}2v}{1-\bar{a}} \right) \right) \\
&\leq P \left( D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 > \frac{(1+\bar{a})nE[g^2] + \bar{a}2nv}{1-\bar{a}} \right) \\
&\quad + \sup_{D, D^*} |\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)| b_1 \\
&= P \left( D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^{2n} (g(D_i)^2 - E[g^2]) \geq \bar{a} \left( 2nv + \sum_{i=1}^{2n} g(D_i)^2 + E[g^2] \right) \right) \\
&\quad + \sup_{D, D^*} |\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)| b_1 \\
&\leq \sup_{D, D^*} |\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)| b_1 + \sup_{D, D^*} N \left( \frac{\bar{a}v}{8}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}} \right) \exp \left( -\frac{\bar{a}^2 v 2n}{8M^2} \right)
\end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung wurde Satz 7.7 mit der Bedingung  $2n > \frac{2 \ln(4) M^2}{\bar{a}^2 v}$  angewandt. Sei

$$N_2 := \sup_{D, D^*} N \left( \frac{\bar{a}v}{8}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}} \right) \quad \text{und} \quad b_2 := \exp \left( -\frac{\bar{a}^2 v n}{4M^2} \right).$$

Mit der Abschätzung von  $E[g^2]$  und  $\bar{a} = \frac{1}{2}$  folgt

$$\begin{aligned}
&P \left( D, D^* | \exists g \in \bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*) : \sum_{i=1}^n g(D_i^*) - g(D_i) \geq \frac{an}{6} (7v + 9KE[g]) \right) \\
&\leq \sup_{D, D^*} |\bar{\mathbb{F}}^*(D, D^*)| b_1 + N_2 b_2.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 8.5 gilt dann:

$$\begin{aligned}
&P(D, D^* | \exists f \in \mathbb{F} : \sum_{i=1}^n f(D_i^*) - f(D_i) \geq \frac{an}{2} (7v + 27KE[f])) \\
&\leq \sup_{D, D^*} \bar{N} \left( \frac{7av}{6}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}, \frac{7v}{6 \cdot 27K} \right) b_1 + \sup_{D, D^*} N_2 b_2
\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung an  $n$  liefert mit Lemma 8.3, dass  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(D_i^*)$  nur mit Wahrscheinlichkeit kleiner  $1/2$  von  $E[f]$  um mehr als  $\frac{a(7v+27E[f])}{2}$  abweicht. Also folgt

$$\begin{aligned}
&P \left( D | \exists f \in \mathbb{F} : \sum_{i=1}^n E[f] - f(D_i) \geq an(7v + 27E[f]) \right) \\
&\leq 2 \sup_{D, D^*} \bar{N} \left( \frac{7av}{6}, \mathbb{F}, d_{1, \mu_{D, D^*}}, \frac{7v}{6 \cdot 27K} \right) b_1 + 2N_2 b_2.
\end{aligned}$$

□



Wir führen unsere Ergebnisse zusammen und erhalten eine Abschätzung für die  $L_1$ -Norm der Verlustklasse und damit den  $L_2$ -Schätzfehler.

**Definition 8.7.** Zur einfacheren Schreibweise werden für den späteren Gebrauch die von  $v$ ,  $M$  und  $n$  unabhängigen Terme im folgenden Satz zusammengefasst:

$$\begin{aligned} C_1 &= (64e)^{2d(1+c)} e^4 (d+1)^2 (cd+1)^2 \\ C_2 &= 371(30)^{2d(1+c)} \\ C_3 &= 2(16)^{2d(1+c)} \end{aligned}$$

Dabei ist  $c$  wie in (6.1).

**Lemma 8.8.** Sei  $H$  gemäß Definition 3.6 und  $f$  eine Auszahlungsfunktion mit Werten in  $[-M^{1/2}, M^{1/2}]$ . Für die  $E$ -Deckungszahl der Verlustklasse gilt:

$$\bar{N}(\varepsilon, L_t(H), d_{1, \mu_{D, D^*}}, \delta) \leq \frac{2M}{\delta} e^4 (d+1)^2 (cd+1)^2 (64eM^2/\varepsilon)^{2d(c+1)}$$

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $\delta = 1$ . Aus Lemma 4.6 folgt, dass die Verlustklasse Werte in  $[-M, M]$  annimmt. Die Verlustfunktionen können in  $2M$  Klassen bezüglich ihres Erwartungswertes aufgeteilt werden, so dass in jeder Klasse der Abstand der Erwartungswerte der Funktionen kleiner als  $\delta$  ist. Die Gültigkeit von Korollar 6.6 bleibt für kleinere Klassen natürlich erhalten.  $\square$

**Satz 8.9.** Sei  $f$  eine Auszahlungsfunktion mit Werten in  $[-M^{1/2}, M^{1/2}]$  und  $H$  gemäß Definition 3.6. Mit  $c$  wie in Satz 6.4 und für alle

$$n > \max\left(\frac{8 \ln(2) M^2}{v}, \frac{8 \cdot 175 \ln(2) (M + 3K)}{81v}\right)$$

gilt:

$$\begin{aligned} &P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) \\ &\leq C_1 \left(\frac{M^2}{v}\right)^{2d(1+c)} \left(\frac{C_2 M^3}{v} \exp\left(-\frac{vn}{105^2}\right) + C_3 \exp\left(-\frac{vn}{16M^2}\right)\right) \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) = P\left(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > \frac{v + 4E[l_t(\hat{q}_{H,D})]}{5}\right)$$

Wir nutzen aus, dass die Verlustfunktion angewendet auf ihren Erzeuger negativ ist und erhalten:

$$\begin{aligned} &P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) \\ &\leq P\left(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_t(\hat{q}_{H,D})(D_i) > \frac{v + 4E[l_t(\hat{q}_{H,D})]}{5}\right) \\ &\leq P(D|\exists l \in L_t(H) \sum_{i=1}^n El - l(D_i) \geq \frac{n}{5}(v + 4El)) \end{aligned}$$

Setze  $a = \frac{1}{35}$ . Dann folgt mit Satz 8.6:

$$\begin{aligned}
& P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) \\
& \leq P(D|\exists l \in L_t(H) \sum_{i=1}^n (El - l(D_i)) \geq na(7v + 27El)) \\
& \leq 2 \sup_{D,D^*} \bar{N} \left( \frac{7av}{6}, L_t(H), d_{1,\mu_{D,D^*}}, \frac{7v}{6 \cdot 27K} \right) \exp \left( -\frac{4a^2nv}{36} \right) \\
& \quad + 2 \sup_{D,D^*} N \left( \frac{v}{16}, L_t(H), d_{1,\mu_{D,D^*}} \right) \exp \left( -\frac{vn}{16M^2} \right) \\
& \leq 2 \sup_{D,D^*} \frac{324MK}{7v} N \left( \frac{v}{30}, L_t(H), d_{1,\mu_{D,D^*}} \right) \exp \left( -\frac{nv}{105^2} \right) \\
& \quad + 2 \sup_{D,D^*} N \left( \frac{v}{16}, L_t(H), d_{1,\mu_{D,D^*}} \right) \exp \left( -\frac{vn}{16M^2} \right)
\end{aligned}$$

Mit Korollar 6.6 und Lemma 4.6 folgt:

$$\begin{aligned}
& P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) \\
& \leq 2 \frac{324MK}{7v} e^4 (d+1)^2 (cd+1)^2 \left( \frac{64eM^2 \cdot 30}{v} \right)^{2d(1+c)} \exp \left( -\frac{nv}{105^2} \right) \\
& \quad + 2e^4 (d+1)^2 (cd+1)^2 \left( \frac{64eM^2 \cdot 16}{v} \right)^{2d(1+c)} \exp \left( -\frac{vn}{16M^2} \right) \\
& \leq (64eM^2)^{2d(1+c)} e^4 (d+1)^2 (cd+1)^2 \left( \frac{1}{v} \right)^{2d(1+c)} \\
& \quad \left( \frac{371M^3}{v} (30)^{2d(1+c)} \exp \left( -\frac{nv}{105^2} \right) + 2(16)^{2d(1+c)} \exp \left( -\frac{vn}{16M^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

□

Das Resultat kann im Falle  $M > 1$  durch Skalierung der Klasse noch verbessert werden, da  $v$  linear in die Konvergenzgeschwindigkeit eingeht, die Schranke der Funktionenklasse  $M^2$  jedoch quadratisch.

**Korollar 8.10.** In der Situation von 8.9 sei  $f$  eine Auszahlungsfunktion mit Werten in  $[-M, M]$ . Für alle  $n > \max\left\{\frac{8 \ln(2)M^2}{v}, \frac{8 \cdot 175 \ln(2)(1+3K)M^2}{81v}\right\}$  gilt dann:

$$\begin{aligned}
& P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) \\
& \leq C_1 \left( \frac{M^2}{v} \right)^{2d(1+c)} \left( \frac{C_2 M^2}{v} \exp \left( -\frac{vn}{105^2} \right) + C_3 \exp \left( -\frac{vn}{16M^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $\hat{l}$  die um  $M^2$  skalierte Funktion, die nach 4.6 durch 1 beschränkt ist. Dann gilt

$$P(D|E[l_t(\hat{q}_{H,D})] > v) = P(D|E[\hat{l}_t(\hat{q}_{H,D})] > \frac{v}{M^2})$$

und Anwendung von Korollar 8.9 ergibt die Behauptung. □

## 9 Konvergenzsätze

**Satz 9.1.** Gegeben sei die Situation von 2.1. Sei  $(f_n)$  eine Folge durch  $(M_n)$  beschränkter Auszahlungsfunktionen. Weiterhin sei eine aufsteigende Folge von Funktionenklassen  $((H_{n,0}, \dots, H_{n,T}))_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben, deren Limes dicht in  $L_2(\mathbf{X})$  liegt. Die Funktionenklassen seien gemäß Definition 3.6 gewählt und dabei beschränkt durch  $M_n$  und von VC-Dimension kleiner gleich  $d_n$ . Gegeben seien außerdem  $n$  Realisationen von  $\mu$ , bezeichnet mit  $D = (D_1, \dots, D_n)$ .

Sei  $\hat{q}_n = \hat{q}_{n,H_n,D}$  der empirische  $L_2$ -Schätzer (3.1) zu  $f_n$ ,  $H_n$  und  $D$ , sowie  $P$  das  $n$ -dimensionale Produktmaß von  $\mu$ . Falls

$$M_n, d_n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \frac{d_n M_n^2 \ln(M_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (9.1)$$

folgt

$$P(D | \|\hat{q}_{n,H_n,D,t} - q_t\|_2 > v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

sowie

$$E(\|\hat{q}_{n,H_n,D,t} - q_t\|_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Gilt zusätzlich

$$\frac{M_n^2 \ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (9.2)$$

so folgt auch fast sichere Konvergenz:

$$P\left(D \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|q_{n,H_n,t,D} - \hat{q}_t^*\|_2 = 0\right) = 1$$

*Beweis.* Die Annahme der Dichtheit der Folge liefert die Konvergenz des Approximationsfehlers gegen 0. Nach Satz 4.2 genügt es daher, die Konvergenz des Schätzfehlers zu zeigen. Mit Satz 4.5 und Korollar 8.10 gilt

$$\begin{aligned} & P(D | \|\hat{q}_{n,H_n,D,t} - \hat{q}_{n,t}^*\|_2 > v) \\ & \leq P(D | E[l_t(\hat{q}_{n,H_n,D})] > v) \\ & \leq C_1 \left(\frac{M^2}{v}\right)^{2d_n(1+c)} \left(\frac{C_2 M^2}{v} \exp\left(-\frac{vn}{105^2}\right) + C_3 \exp\left(-\frac{vn}{16M_n^2}\right)\right) \\ & = C \exp\left(2d_n(1+c) \ln(M_n^2) - \frac{vn}{16M_n^2}\right), \end{aligned}$$

wobei  $C$  den Term zusammenfasst, der vernachlässigbar für das Konvergenzverhalten ist. Die erste Konvergenzaussage ist nun mit (9.1) offensichtlich. Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt des Weiteren

$$\begin{aligned} E(\|\hat{q}_{n,H_n,D,t} - q_{n,t}\|_2) & \leq E(\|l_t(\hat{q}_{n,H_n,D})\|_1^{1/2}) \\ & \leq \varepsilon + \int_{(\varepsilon, \infty)} P(\|l_t(\hat{q}_{n,H_n,D})\|_1^{1/2} > t) dt \\ & \leq \varepsilon + \int_{(\varepsilon, \infty)} C \exp(2d_n(1+c) \ln((M_n^2)) - \frac{t^2 n}{16M_n^2}) dt \\ & \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \varepsilon. \end{aligned}$$

Und es folgt die zweite Behauptung. Die fast sichere Konvergenz kann mithilfe des Borel-Cantelli-Lemmas gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} P(D|E[l_t(\hat{q}_{n,H_n,D})] \geq v) \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} C_4 \exp(\ln(d_n) + 4(1+c)d_n(\ln(M_n) + \tilde{C}_5) - \frac{nv}{16M_n^2}) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} C_4 n^{\frac{1}{\ln n}(\ln(d_n) + 4(1+c)d_n(\ln(M_n) + C_5) - \frac{nv}{16M_n^2})} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} C_4 (1/n)^{\frac{n}{M^2 \ln n} \left( -\frac{\ln(d_n)M_n^2}{n} - \frac{M_n^2 4(1+c)d_n(\ln M + C_5)}{n} + \frac{v}{16} \right)}
\end{aligned}$$

Dabei sind  $C_4$  und  $C_5$  konstante Terme. Für festes  $v$  und große  $n$  wird der rechte Term größer 0. Falls der Exponent für große  $n$  größer als 2 wird, ist die Summe endlich und es folgt fast sichere Konvergenz aus (9.2).  $\square$

**Satz 9.2.** Gegeben die Situation von 2.1, eine durch  $M$  beschränkte Auszahlungsfunktion  $f$  und ein zulässiger durch  $M$  beschränkter Funktionenraum  $(H_0, \dots, H_T)$  mit jeweils VC-Dimension kleiner gleich  $d$ . Gegeben seien weiterhin  $n$  Realisationen  $D = (D_1, \dots, D_n)$  bezüglich  $\mu$ . Sei  $\hat{q}$  der empirische  $L_2$ -Schätzer (3.1) und  $M \geq 1$ . Dann gilt:

$$E_D(\|\hat{q}_{n,H_n,D,t} - q_t\|_2^2) \leq 2^{w+2} \left( \max_{s=0..T} \left( \inf_{h \in H_s} \|h - q_s\|_2^2 \right) + (w+2) \left( \hat{k} + \frac{2}{n} \right) \right)$$

Der Wert  $\hat{k}$  ist im Beweis definiert und konvergiert mit der Rate  $\ln(n)/n$  gegen 0.

*Beweis.* Aus Korollar 8.10 folgt

$$\begin{aligned}
& E_D[\|l_{\hat{q}_{H,D,s}}\|] \leq k + \int_{k,\infty} P(\|l_{\hat{q}_{H,D,s}}\| > v) dv \\
& \leq k + \int_{k,\infty} C_1 \left( \frac{M^2}{v} \right)^{2d(1+c)} \left( \frac{C_2 M^2}{v} \exp\left(-\frac{vn}{105^2}\right) + C_3 \exp\left(-\frac{vn}{16M^2}\right) \right) dv
\end{aligned}$$

für alle  $n \geq 20M^2/k$ . Somit gilt für  $1/v \leq 1/k \leq \frac{n}{20^2}$ :

$$\begin{aligned}
& E_D[\|l_{\hat{q}_{H,D,s}}\|] \\
& \leq k + \int_{k,\infty} C_1 \left( \frac{n}{20} \right)^{2d(1+c)} \left( C_2 \frac{n}{20} \exp\left(-\frac{vn}{105^2}\right) + C_3 \exp\left(\frac{-nv}{16M^2}\right) \right) dv \\
& \leq k + C_1 \left( \frac{n}{20} \right)^{2d(1+c)} \left( C_2 \frac{105^2}{20} \exp\left(-\frac{kn}{105^2}\right) + C_3 \frac{16M^2}{n} \exp\left(\frac{-nv}{16M^2}\right) \right) \\
& \leq \hat{k} + \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Der Wert  $\hat{k}$  wird gerade so gewählt, dass die Bedingung an  $k$  erfüllt ist und der rechte Term kleiner als  $\frac{2}{n}$  ist:

$$\hat{k} = \max \left\{ \frac{16M^2}{n} \ln \left( C_3 \frac{16M^2}{n} C_1 \left( \frac{n}{20M^2} \right)^{2d(1+c)} n \right), \frac{105^2}{n} \ln \left( C_2 \frac{105^2}{20M^2} C_1 \left( \frac{n}{20M^2} \right)^{2d(1+c)} n \right), \frac{20M^2}{n} \right\}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} & E_D[\|\hat{q}_{n,H_n,D,t} - q_t\|_2^2] \\ & \leq E_D[2^{w+1} \max_s (e_s)^2] \\ & \leq E_D[2^{w+2} \max(\inf_{h \in H_s} \|h - q_s\|_2^2) + \max \|l_{\hat{q}_{H,D,s}}\|_1] \\ & = 2^{w+2} \max(\inf_{h \in H_s} \|h - q_s\|_2^2) + 2^{w+1} E_D[\max_{s=t, \dots, t+w+1} \|l_{\hat{q}_{H,D,s}}\|_1] \\ & \leq 2^{w+2} \max(\inf_{h \in H_s} \|h - q_s\|_2^2) + 2^{w+1} E_D[\sum_{s=t, \dots, t+w+1} \|l_s(q_{s,D,n})\|_1] \\ & \leq 2^{w+2} \max(\inf_{h \in H_s} \|h - q_s\|_2^2) + 2^{w+1} (w+2) \max E_D[\|l_s(q_{s,D,n})\|_1] \\ & \leq 2^{w+2} \max(\inf_{h \in H_s} \|h - q_s\|_2^2) + 2^{w+2} (w+2) (\hat{k} + \frac{2}{n}) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 9.3.** Die Konvergenz kann nun auch für allgemeine quadratintegrierbare Auszahlungsfunktionen  $f$  gezeigt werden. Dazu brauchen wir noch eine Aussage, die im nachstehenden Satz bewiesen wird: Der empirische  $L_2$ -Schätzer für die Kontinuitätswertfunktion der genügend hoch trunkierten Auszahlungsfunktion ist eine gute Approximation der Kontinuitätswertfunktion der Auszahlungsfunktion im  $L_2$ -Sinne.

**Satz 9.4.** Sei  $f \in L_2(\mathbf{X})$  eine Auszahlungsfunktion und  $q_{M_n,t}$  der *continuation value* für die bei  $M_n$  trunkierten Auszahlungsfunktionen. Falls  $M_n \rightarrow \infty$ , dann gilt

$$\|q_t - q_{M_n,t}\|_2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \|q_t - \bar{q}_{M_n,t}\|_2 & \leq \|E[\max(f_{t+1}, q_{t+1})] - E[\max(Tf_{t+1}, \bar{q}_{M_n,t+1})]\|_2 \\ & \leq \|(f_{t+1} - M_n)1_{f_{t+1} > M_n}\|_2 + \|q_{t+1} - \bar{q}_{M_n,t+1}\|_2. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung folgt, dass der erste Summand gegen 0 konvergiert. Durch rekursive Anwendung der Ungleichung folgt die Behauptung. □

Um eine Konvergenzgeschwindigkeit dieses durch Trunkierung entstandenen Fehlers angeben zu können, müssen wir die Existenz höherer Momente annehmen:

**Satz 9.5.** Gegeben sei die Situation von Satz 9.4. Für  $f \in L_p(\mathbf{X})$  mit  $p > 2$  gilt:

$$\|q_t - q_{M_n,t}\|_2 \leq \mathcal{O}(M_n^{(2-p)/2})$$

*Beweis.* Für Zufallsgrößen mit existierendem  $r$ -ten Moment gilt:

$$E[|Y|^r] = r \int_0^\infty y^{r-1} P(|Y| > y) dy$$

Da die Funktionen  $g(x) = |x|^r$  und die Dichte von  $X$  nichtnegative Funktionen darstellen, folgt die Aussage durch Anwendung partieller Integration für das Riemann-Stieltjes-Integral.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} & E[|1_{f_{t+1} > M_n}(f_{t+1} - M_n)|^r] \\ &= r \int_0^\infty y^{r-1} P(|1_{f_{t+1} > M_n}(f_{t+1} - M_n)| > y) dy \\ &= r \int_{M_n}^\infty (y - M_n)^{r-1} P(|1_{f_{t+1} > M_n}(f_{t+1} - M_n)| > y - M_n) dy \\ &\leq r \int_{M_n}^\infty y^{r-1} P(f_{t+1}^p > y^p) dy \\ &\leq r \int_{M_n}^\infty y^{r-1} E[f_{t+1}^p] y^{-p} dy \leq \frac{-r}{r-p} M_n^{r-p} E[f_{t+1}^p] \end{aligned}$$

Aus dem Beweis der vorherigen Satzes folgt nun die Behauptung. □

## 10 Diskussion und Ausblick

Zu Beginn des Kapitels 3 wurde beschrieben, dass die Optionspreisbestimmung in zwei Schritten geschieht: Zuerst wird mithilfe gegebener Daten eine Stopppregel bestimmt und anschließend wird diese Stopppregel auf eine Stichprobe angewendet, so dass durch Mittelung der Auszahlungen der Optionswert approximiert werden kann. Da wir aber bereits beweisen konnten, dass wir eine beliebig genaue Approximation des *continuation values* erhalten, der den Optionspreis direkt angibt, erübrigt sich der zweite Schritt.

Wir stellen also fest, dass wir eine stärkere Aussage als die bloße Konvergenz des LS-Algorithmus bewiesen haben. Dafür hätte es genügt zu zeigen, dass der induzierte *Cashflow* des  $L_2$ -Schätzers  $v_{t+1:w,\hat{q}}$  gegen den *Cashflow*  $v_{t+1:w,q}$  konvergiert. Das Bedauerliche daran ist, dass wir das volle Potential des LS-Algorithmus im Beweis nicht ausschöpfen konnten. Sein Vorteil gegenüber anderen Verfahren besteht gerade darin, dass es bei beschränkter Auszahlungsfunktion für die Konvergenz genügt, dass die symmetrische Differenz  $\mu(\{f > q\} \Delta \{f > \hat{q}\})$  klein wird. Dies ist auch der Grund, warum der LS-Algorithmus in den meisten Anwendungen bessere Resultate liefert als der TR-Algorithmus, auch wenn die Schranke in Korollar 8.10 für den TR-Algorithmus ( $w = 0$ ) minimal ist.

Der TR-Algorithmus wurde entwickelt, um Stoppprobleme mit unendlichem Zeithorizont zu lösen. Auch falls  $\hat{q}_{t+1}$  bereits eine sehr gute Approximation von  $q_{t+1}$  darstellt, so ist der TR-Algorithmus ausreichend, um einen guten Schätzer für  $q_t$  zu finden. In den meisten anderen Fällen liefert der LS-Algorithmus bessere Ergebnisse, da dieser weitaus mehr Informationen in der Berechnung berücksichtigt. Natürlich kann auch zwischen dem LS- und TR-Algorithmus interpoliert werden und  $w$  in Abhängigkeit des Zeitpunktes frei gewählt werden, insbesondere bei einem sehr langen Zeithorizont. Bei Markovketten, die nur langsam ihren Startpunkt verlassen, könnte es zum Beispiel sinnvoll sein,  $w$  für die ersten Zeitpunkte größer zu wählen.

Ein alternativer Beweis für die Konvergenz des LS-Algorithmus könnte darin bestehen, direkt die Konvergenz des induzierten *Cashflows* von  $\hat{q}$  gegen  $v_{t+1:w,q}$  zu zeigen. Als Äquivalent zur Verlustklasse (vgl. 4.4) könnte bei diesem Ansatz die Klasse

$$L_t^*(H) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} = \{v_{t+1,h^*} - v_{t+1,h} | h \in H\}$$

gewählt werden. Auch

$$\sum_{i=1}^n (v_{t+1,\hat{q}_{H,D}^*} - v_{t+1,\hat{q}_{H,D}})(D_i)$$

ist wie (4.1) negativ. Das Problem dabei ist, dass die Funktionen aus der Klasse  $L_t^*(H)$  sehr stark um 0 schwanken können. Für den Beweis wurde jedoch die Voraussetzung benötigt, dass für alle Funktionen der Klasse

$$E[f^2] \leq KE[f]$$

gilt. Dies trifft auf  $L_t^*(H)$  im Allgemeinen nicht zu. Diese Eigenschaft ist jedoch entscheidend, um eine Konvergenz des LS-Algorithmus für  $n\varepsilon \rightarrow \infty$  zeigen zu können. Der Fehler  $\varepsilon$  ist hierbei die Schranke für den Erwartungswert der Verlustfunktion und  $n$  die Stichprobengröße.

Für ein universell besseres Konvergenzresultat wären zusätzliche Annahmen<sup>18</sup> an die Verteilung der Markovkette notwendig. Daher musste der umständliche Weg über die Verlustklasse und die Fehlerabschätzung gegangen werden, mit der Folge, dass wir nur bedingt praxisrelevante Konvergenzresultate zeigen konnten.

In dieser Arbeit wurden keine Forderungen an die Verteilung der Markovkette gestellt. Der erste Konvergenzbeweis für den LS-Algorithmus in [1] hingegen, benötigte die Annahme  $\mu(q = f) = 0$ . In diesem Artikel konnte für lineare Funktionenräume im  $L_2(\mathbf{X})$  mit  $m$  Basisfunktionen<sup>19</sup> die fast sichere Konvergenz von  $\hat{q}$  gegen  $\hat{q}^*$  mit zunehmender Stichprobenmenge gezeigt werden. Mit einer Unabhängigkeits- und Dichtheitsannahme an die Basisfunktionen konnte auch die  $L_2$ -Konvergenz von  $\hat{q}^*$  gegen  $q$  mit zunehmender Anzahl der Basisfunktionen bewiesen werden. Dies kann damit begründet werden, dass der  $L_2$ -Raum als Hilbertraum eine abzählbare Basis besitzt. Die Wahl der Funktionenräume kann als Vektorraum der ersten  $m$  Basisfunktionen erfolgen. Man erhält das Ergebnis, dass der Limes dieser Funktionenräume dicht in  $L_2$  liegt.

Es stellt sich die Frage, ob im Falle von linearen Funktionenräumen der Beweis ohne den Umweg über VC-Klassen geführt werden kann. In der Tat können lineare Räume sehr gut überdeckt werden. Leider kann man die Linearität nicht wie die VC-Dimension auf die *Cashflowklasse* übertragen. Diese ist in der Regel nicht linear und daher kann die Deckungszahl ohne weitere Annahmen nicht polynomiell im Fehler  $\varepsilon$  kontrolliert werden.

Ein weiterer Vorteil des in dieser Arbeit geführten Beweises ist, dass die Voraussetzung der Linearität entspannt wird und die Komplexität der Funktionenklasse simultan mit der Stichprobenmenge erhöht wird.

Es wird nun eine kurze informelle Zusammenfassung des geführten Beweises gegeben. Für den Beweis ist entscheidend, dass  $R_D(\hat{q}) - R_D(\hat{q}^*)$  (vgl. (3.2)) negativ ist. Da  $\hat{q}$  von  $D$  abhängt müssen wir sicherstellen, dass  $\hat{q}$  eine Funktion aus einer kontrollierbaren Klasse ist. In dieser Klasse gibt es also ein Element  $l^*$ , sodass  $R_D(l^*) - R_D(l^*)$  negativ ist. Mit einem Vertauschungs- und Überdeckungsargument können wir nun zeigen, dass für alle Elemente  $l$  der Klasse,  $R_D(l) - R_D(l)$  und auch dessen Erwartungswert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht größer als  $\varepsilon$  ist. Aufgrund der Eigenschaften der Verlustklasse kann durch Einführung der  $d_v$  Metrik sogar eine exponentielle Konvergenz für  $n\varepsilon \rightarrow \infty$  gezeigt werden. Für alle Elemente der Klasse, insbesondere auch  $\hat{q}$  kann somit unter Beachtung von Satz 4.2 der Schätzfehler kontrolliert werden. Um die Verlustklasse kontrollierbar, d.h. polynomiell überdeckbar, zu gestalten, ist es notwendig, die VC-Beschränktheit der Funktionenklasse vorauszusetzen. Denn die VC-Beschränktheit kann auf die *Cashflowklasse* und schließlich auf die gesamte Verlustklasse übertragen werden. Aufgrund der guten Überdeckungseigenschaften von VC-Klassen kann somit der Fehler durch die vorgenommene Überdeckung kontrolliert werden.

Auch wenn der zweite Schritt des LS-Algorithmus für den Konvergenzbeweis unerheblich ist, wird dieser dennoch in den meisten praktischen Anwendungen durch-

<sup>18</sup>Möglich wären zum Beispiel Stetigkeitsannahmen an die Funktion  $f - q$  um den Wert 0.

<sup>19</sup>Als Basisfunktionen werden zum Beispiel trigonometrische Funktionen, Laguerre, Legendre, Chebyshev, Gegenbauer, Jacobi oder einfache Polynome verwendet.



geführt. Ist die Stichprobenmenge nicht groß genug, so wird  $\hat{q}_t$  tendenziell zu hoch geschätzt. Bei einer zu klein gewählten Funktionenklasse ist oft das Gegenteil der Fall. Der zweite Schritt des Algorithmus kann diese Effekte etwas dämpfen. Der zweite Effekt liefert uns auf einfache Weise eine Hilfestellung bei der Wahl der Funktionenklasse. Ist ein linearer Funktionenraum mit endlicher Dimension gegeben, so ist im Limes mit zunehmender Stichprobenanzahl der vom LS-Algorithmus berechnete Optionswert fast sicher kleiner als der wahre Optionswert<sup>20</sup>. Eine genügend große Stichprobenmenge vorausgesetzt, kann die Funktionenklasse nun so lange erweitert werden, wie sich der errechnete Optionswert signifikant ändert. Empirische Versuche in [12] zeigen auf diese Weise, dass in vielen Beispielen bereits sehr wenige Basisfunktionen ausreichen, um den Optionswert mittels LS-Algorithmus sehr gut zu approximieren. Auch nach empirischen Ergebnissen von K. Judd in [9] genügt es, mit Anstieg der Dimension des Zustandsraumes die Anzahl der Basisfunktionen nur polynomiell zu erhöhen um gute Approximationsergebnisse zu erhalten. Dies ist einer der wesentlichen Vorteile des LS-Algorithmus gegenüber klassischen Verfahren, die oft am sogenannten Fluch der Dimensionalität scheitern.

Eine weitere nützliche Eigenschaft des LS-Algorithmus ist, dass dieser ohne Probleme auf pfadabhängige Optionen angewandt werden kann, während klassische Verfahren hierfür nur mit sehr viel Aufwand verwendet werden können. Die pfadabhängige Komponente wird dabei einfach mit in den Zustandsraum der Markovkette aufgenommen. Auch die Übergangswahrscheinlichkeiten dieser neuen Komponenten müssen nicht aufwendig berechnet werden, da der LS-Algorithmus ausschließlich die simulierten Pfade benötigt.

Insgesamt ist der beschriebene Algorithmus auf ein breites Spektrum von Optionen und Funktionenklassen anwendbar. Unter Umständen kann in folgenden Arbeiten versucht werden, die Forderung der Konvexität der Funktionenräume zu lockern. Einige beliebte Verfahren werden durch diese Annahme ausgeschlossen, zum Beispiel Wavelet-Thresholding oder Neuronale Netze.

---

<sup>20</sup>Dieses einleuchtende Resultat wurde bereits in [12], Proposition 1 gezeigt.

## A Zulässigkeit

Es kann ohne Beschränkung angenommen werden, dass eine Funktionsklasse durch eine Indexmenge  $T$  indiziert wird. Ist  $T$  überabzählbar, so können bei einigen Operationen Messbarkeitsprobleme auftauchen. Die Menge

$$\{\omega \mid \sup_{t \in T} f(\omega, t) \geq a\}$$

muss in diesem Fall nicht messbar sein.

Für Klassen von messbaren Funktionen  $f : (\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  definieren wir daher:

**Definition A.1.** Eine Klasse  $\mathbb{F} = \{f_t \mid t \in T\}$  von messbaren Funktionen  $f : (\mathbf{X}, \mathcal{B}(\mathbf{X})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  heißt zulässig, falls gilt:

1.  $f_t(\omega) = f(\omega, t)$  ist  $\mathcal{B}(\mathbf{X}) \otimes \mathcal{B}(T)$  messbar.
2. Es existiert ein kompakter metrischer Raum  $\bar{T}$ , und  $T$  ist ein Element der kleinsten  $\sigma$ -Algebra, die die von der Metrik erzeugten offenen Mengen auf  $\bar{T}$  enthält.

$\mathcal{B}(\mathbf{X}) \otimes \mathcal{B}(T)$  entspricht gerade der kleinsten  $\sigma$ -Algebra, die alle Mengen  $A \times B$  mit  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$  und  $B \in \mathcal{B}(T)$  enthält. Die durch die Metrik erzeugten offenen Kugeln in  $\bar{T}$  erzeugen eine Topologie und eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\bar{T})$ .  $T$  soll nun ein Element dieser  $\sigma$ -Algebra sein. Die Metrik bleibt auf  $T$  erhalten. Auch erbt  $T$  eine  $\sigma$ -Algebra, diese entspricht  $\mathcal{B}(T) = \{B \cap T \mid B \in \mathcal{B}(\bar{T})\}$ .

**Satz A.2.** Gegeben ein messbarer Raum  $(\Omega, \mathbb{A})$  und eine zulässige Klasse  $\mathbb{F} = \{f_t \mid t \in T\}$  von messbaren Funktionen von  $(\Omega, \mathbb{A})$  nach  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , so ist für alle  $a \in \mathbb{R}$  die Menge

$$\{\omega \mid \sup_{t \in T} f(\omega, t) \geq a\}$$

messbar.

*Beweis.* Aus 1. folgt, dass  $H_a = \{(\omega, t) \mid f(\omega, t) \geq a\}$  messbar ist. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist nach [13] auch die Projektion von  $H_a$  auf  $\Omega$  messbar. Dies bedeutet aber gerade, dass alle Mengen  $\{\sup_{t \in T} f(\omega, t) \geq a\}$  messbar sind.  $\square$

## Literatur

- [1] Clement, E., Lamberton, D. und Protter, P.: 2002, An analysis of the Longstaff-Schwartz algorithm for American option pricing, *Finance and Stochastics* 6(4), 449-471.
- [2] Cox, John C., Stephen A. Ross, und Mark Rubinstein: 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* 7, 229-263.
- [3] Craig, C.: 1933, On the Tchebychef inequality of Bernstein. *Annals of Mathematical Statistics*, 4:94-102.
- [4] Egloff, D.: 2005, Monte Carlo algorithms for optimal stopping and statistical learning. *The Annals of Applied Probability* 15, 1-37.
- [5] Hall, P.: (1935), On Representatives of Subsets, *J. London Math. Soc.* 10.
- [6] Haussler, D.: 1992, Decision theoretic generalizations of the PAC model for neural net and other learning applications, *Inform. Comput.*, 100(1):78-150.
- [7] Haussler, D.: 1995, Sphere packing numbers for subsets of the boolean n-cube with bounded Vapnik-Chervonenkis dimension, *Journal of Combinatorial Theory* 69(2), 217-232.
- [8] Irle, A.: 2003, *Finanzmathematik. Die Bewertung von Derivaten*, B.G. Teubner, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden, 2. Edition.
- [9] Judd, K.. 1998, *Numerical Methods in Economics*, MIT Press. Cambridge, Mass.
- [10] Kohler, M.: 2000, Inequalities for uniform deviations of averages from expectations with applications to nonparametric regression, *Journal of Statistical Planning and Inference* 89, 123.
- [11] Lee, W., Bartlett, P. und Williamson, R. C.: 1996, Efficient agnostic learning of neural networks with bounded fan-in, *IEEE Transactions on Information Theory* 42(6), 2118-2132.
- [12] Longstaff, F. A. und Schwartz, E. S.: 2001, Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach, *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No.1, 113-147.
- [13] Pollard, D.: 1984, *Convergence of Stochastic Processes*, New York: Springer-Verlag, Appendix C.
- [14] Rank, J.: 2000, *Numerische Lösungen der Black-Scholes Gleichung*, [http://www.d-fine.de/fileadmin/mediapool/pdf/Vorlesungen/vl\\_jra\\_stoch\\_6.pdf](http://www.d-fine.de/fileadmin/mediapool/pdf/Vorlesungen/vl_jra_stoch_6.pdf), Version vom 1.5.2011.
- [15] Rehmann, S.: 2010, *Der Longstaff-Schwartz-Algorithmus und seine Erweiterung für Multiple Stopping Probleme am Beispiel von Swingoptionen*, Diplomarbeit Universität Leipzig.

[16] Vapnik, V.: 1998, Statistical Learning Theory, New York: John Wiley and Sons.

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, 19. Juni 2011