Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

# Modellbetrachtungen zur Messbarkeit von Kreditrisiken

**Diplomarbeit**
Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
**Sebastian Vogel**

Sebastian Vogel
Matrikelnummer: 340448
Rotdornweg 2
44532 Lünen

# Inhaltsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Einleitung

Der Duden definiert Risiko als „möglichen negativen Ausgang bei einer Unternehmung, mit dem Nachteile, Verluste, Schäden verbunden sind “. In der Finanzindustrie werden drei Hauptrisikoarten voneinander unterschieden: Marktrisiko, Operationelles Risiko und Kreditrisiko. Man spricht vom *Marktrisiko*, wenn sich der Wert von Finanzprodukten aufgrund von Veränderungen des Underlyings, etwa Aktienkurse, Zinssätze, Wechselkurse oder Rohstoffpreise verringert. *Operationelles Risiko* meint das Verlustpotential durch menschliches Versagen, fehlgeschlagene interne Mechanismen oder externen, nicht zu kontrollierenden Ereignissen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit *Kreditrisiko*, also dem Risiko, dass ein Kreditnehmer ausfällt, und somit vereinbarte Rückzahlungen nicht mehr geleistet werden können, oder seine Kreditwürdigkeit sinkt, und sich somit der Wert des Kredits aus Sicht der Bank verringert. Dabei sind nicht etwa nur Unternehmensanleihen einem Kreditrisiko ausgesetzt. Auch bei over-the-counter Finanzderivaten wie zum Beispiel Swaps besteht dieses Risiko, da der Ausfall einer der beteiligten Handelspartner die Auszahlung des Finanzderivats verändert.

Losgelöst von den unterschiedlichen Abgrenzungen, drückt Risiko Unsicherheit aus, und ist somit vom Zufall abhängig. Dies ermöglicht es, den Begriff des Risikos mit einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Basis auszustatten, die Risiko messbar werden lässt. Das Risiko eines Portfolios aus Finanzprodukten messen zu können, ist für Finanzinstitute, aber auch für den Regulator entscheidend. Wenn eine Bank einen Kredit ausstellt, geht sie schließlich bewusst ein Risiko ein. Ist dieses Risiko messbar, kann die Bank ihr Portfolio optimieren, bestimmte Risiken auswählen, diese tragen und andere an die Finanzmärkte weitergeben. Der Regulator kontrolliert hingegen, ob Banken für die von ihnen eingegangenen Risiken robust genug sind, d.h. Banken genug Kapital für eventuelle unerwartete Verluste bereithalten.

Im Juni 2004 wurden Finanzinstituten durch das Basel II Framework eine Grundlage gegeben, um minimale Kapitalanforderungen für das Marktrisiko, das operationelle Risiko und das Kreditrisiko zu berechnen. Diese minimalen Kapitalanforderungen werden als regulatorisches Kapital bezeichnet. Das regulatorische Kapital sollte dabei möglichst das tatsächliche Velustpotential einer Bank abdecken. Die Berechnungsmethoden des Marktrisikos, die auch schon unter Basel I bestanden, blieben dabei größtenteils unverändert. Grundlage ist ein auf den Value-at-Risk-Ansatz (VaR) basierendes Modell. Neu unter Basel II ist die Berechnung von operationellen Risiko. Die vorliegende Arbeit hingegen beschäftigt sich mit den Factor-Threshold-Modellen, die Grundlage für die Berechnungsmethoden des Kreditrisikos sind. Wann immer in der Folge also von regulatorischen Kapital gesprochen wird, so sind die minimalen Kapitalanforderungen des Regulators gemeint, die Kreditrisiken abdecken sollen.

Kapitel 1 dieser Arbeit stellt das Regulator-Modell vor. Mit diesem lässt sich die Berechnungsmethode für regulatorisches Kapital motivieren. Das Regulator-Modell wird insbesondere als Spezialfall eines Bank-Internal-Modells eingeführt. Anhand dieses Modells können Banken intern die Verteilung ihres Kreditportfolioverlustes bestimmen. Im Gegensatz zum regulatorischen Ansatz ist dieses Verfahren aufwendiger, führt aber dazu, dass das tatsächliche Risiko im Portfolio besser eingefangen wird. Insbesondere werden Diversifikationseffekte berücksichtigt, was speziell für international tätige Banken mit einem breit aufgestellten Portfolio zu einer realitätsnäheren Risikoeinschätzung führt. Risikomaß hierbei ist das ökonomische Kapital, also die Differenz zwischen einem von der Bank bestimmten Quantil und dem Erwartungswert der Verlustverteilung. Das ökonomische Kapital lässt sich mit Hilfe von Expected Shortfall auf Unterportfolios oder sogar auf einzelne Transaktionen allokieren. Eine Bank kann dann ihr Kreditportfolio optimieren, indem es vorallem solche Transaktionen durchführt, die einen hohen Return im Verhältnis zum ökonomischen Kapital, und damit im Verhältnis zum Risiko, aufweisen. Banken sind verpflichtet das regulatorische Kapital vorzuhalten. Übersteigt das intern ermittelte Risiko, also das ökonomische Kapital, aber den Auflagen des Regulators, so halten Banken in der Regel stattdessen mindestens das ökonomische Kapital vor. Es dient dabei als eine Art „Kapitalpuffer“ bei unerwartet eintretenden Verlusten. Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Kalibrierung der beiden vorgestellten Modelle. Dabei geht es in dieser Arbeit ausschließlich um die Schätzung des Korrelationsparameters $R^2$. Die Schätzung geschieht auf Grundlage der Maximum-Likelihood-Methode. In der Berechnungsformel für regulatorisches Kapital wird der Korrelationsparameter vom Regulator vorgeschrieben. Die Qualität dieser Vorgaben lässt sich anhand der Schätzungen überprüfen. Desweiteren kommt es bei den Schätzungen zu großen Unterschieden, jenachdem ob Default-Daten oder Rating-Daten zugrundeliegen. Es wird vermutet , dass eine im Bank-Internal-Modell nicht berücksichtigte Abhängigkeit vom Wirtschaftszykel, und damit eine zeitliche Abhängigkeit, für diese Unterschiede verantwortlich zeichnet. Dies motiviert die Erweiterung des Bank-Internal-Modells zum Bundesbank-Modell, in dem unter Einbeziehung von tatsächlich beobachtbaren Risiko-Faktoren der aktuelle Stand des Wirtschaftzykels berücksichtigt wird. Das Modell wird in Kapitel 3 vorgestellt. Kapitel 4 fasst die Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf die durch die Finanzkrise ab 2007 motivierten Veränderungen der regulatorischen Vorgaben unter Basel III.

# Kapitel 1

# Regulator-Modell

Nach BCBS (2006) können Banken unter Basel II zwischen dem *Standardansatz*, dem *Foundation internal-rating-based Approach* (Foundation IRB Approach) und dem *advanced IRB Approach* entscheiden, um zu ermitteln, wieviel regulatorisches Kapital sie für unerwartete Ausfälle in ihrem Kreditportfolio vorhalten müssen. In allen drei Ansätzen verpflichtet das Basel II Framework Banken dazu, 8% ihrer sogenannten *risiko-gewichteten Assets* (RWA) als regulatorisches Kapital vorzuhalten. Das RWA eines Kredit-Portfolios $\mathcal{P}$ bestehend aus $n$ Transaktionen ist definiert als:

$$\mathrm{RWA}^{(\mathcal{P})} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{RWA}_i$$

mit dem risiko-gewichteten Asset $\mathrm{RWA}_i$ der Transaktion $i$, definiert durch

$$\mathrm{RWA}_i = w_i \cdot \mathrm{EAD}_i.$$

Das *Exposure-At-Default* $\mathrm{EAD}_i$ gibt den Wert der Transaktion $i$ zum Zeitpunkt des Ausfalls an. Statt des Exposures wird direkt das Exposure-At-Default verwendet, da das ökonomische Kapital für Verluste kompensieren soll. Je nach von der Bank gewählten Ansatz, unterscheidet es sich, wie das *Risiko-Gewicht* $w_i$ und das Exposure-At-Default $\mathrm{EAD}_i$ bestimmt wird. Im Standardansatz ist $w_i$ von der Art des Marktteilnehmers $i$ und von dessen Rating abhängig. Der Regulator unterscheidet dabei zwischen ganzen Ländern (*Sovereigns*), regulierten Banken und Unternehmen. Das Rating kommt von externen Ratingangenturen wie Standard & Poor's, Moody's Investors Service oder Fitch Group. Anhand dieser beiden Informationen wird dann das Risiko-Gewicht vorgegeben. Ebenso wird die Ermittlung des Exposure-At-Defaults im Standardansatz vom Regulator bestimmt. Im IRB Approach hingegen können von der Bank interne Methoden eingesetzt werden. Das Risiko-Gewicht ist dann definiert durch:

$$w_i = 0.08^{-1} c \left( \mathrm{LGD}_i \phi \left( \frac{\phi^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i^2}\phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1 - R_i^2}} \right) - p_i \mathrm{LGD}_i \right)$$

mit

$$R_i^2 = 0.12\frac{1-e^{-50p_i}}{1-e^{-50}} + 0.24\left(1 - \frac{1-e^{-50p_i}}{1-e^{-50}}\right), \tag{1.1}$$

wobei $c$ eine vom Regulator festgelegte technische Größe ist, die an dieser Stelle nicht von weiterem Interesse ist. Der *Loss-Given-Default* ($\mathrm{LGD}_i$) gibt an, wie viel Prozent des Exposures der Transaktion $i$ im Falle eines Ausfalls des Marktteilnehmers für die Bank verloren ist. $p_i$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit der Transaktion $i$. Der Parameter $R_i^2 \in (0.12, 0.24)$ kann als *Asset-Korrelation* interpretiert werden, d.h. als Korrelation der den Marktteilnehmern mit gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit zugrundeliegenden Asset-Prozesse. Nach (1.1) nimmt der Regulator diese als mit fallender Ausfallwahrscheinlicheit wachsend an. Der Foundation IRB Approach erlaubt es Banken, die Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i$ intern zu bestimmen. Im advanced IRB Approach gilt dies zusätzlich noch für den Loss-Given-Default $\mathrm{LGD}_i$. Im IRB Approach ist das *regulatorische Kapital* (RC) des Portfolios $\mathcal{P}$ dann festgelegt durch:

$$RC^{(\mathcal{P})} = \sum_{i=1}^{n} c\left(\mathrm{LGD}_i\mathrm{EAD}_i\phi\left(\frac{\phi^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i^2}\phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-R_i^2}}\right) - p_i\mathrm{LGD}_i\mathrm{EAD}_i\right). \tag{1.2}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass der Term $p_i\mathrm{LGD}_i\mathrm{EAD}_i$ den erwarteten Verlust der Transaktion $i$ angibt. Woher kommt diese Formel? Wie genau der Regulator die Berechnungsvorschrift (1.2) ableitet, liegt der Öffentlichkeit nicht vor. Der Basler Ausschuss legt aber ein sogenanntes One-Factor-Threshold-Modell zugrunde, das in Kapitel 1.2 als Spezialfall des dort beschriebenen Bank-Internal-Modells eingeführt wird, und im weiteren Verlauf dann als Regulator-Modell bezeichnet wird. In Kapitel 1.1 werden asymptotische Aussagen über Bernoulli-Mixture-Modelle getroffen, die es erlauben in Kapitel 1.3 die Berechnungsvorschrift (1.2) asymptotisch zu motivieren.

*Bemerkung.* Die Höhe des regulatorischen Kapitals $RC_i$ für eine Transaktion $i$ ist nur von den Eigenschaften des einzelnen Kredits abhängig ($p_i$, $\mathrm{LGD}_i$, $\mathrm{EAD}_i$), und wird insbesondere nicht von der Zusammensetzung des gesamten Portfolios beeinflusst. Bei der Ermittlung des regulatorischen Kapitals auf Portfoliolevel wird einfach die Summe der einzelnen Kapitalanforderungen gebildet. Dadurch bleiben Diversifikationseffekte unberücksichtigt.
Alle bank-internen Berechnungsmethoden müssen vom Regulator geprüft und abgenommen werden. Für die Banken besteht der Vorteil des IRB Approaches darin, dass durch die internen Berechnungsmethoden das benötigte regulatorische Kapital einer Transaktion meist geringer ausfällt als unter Verwendung des Standardansatzes. Gleichzeitig sehen speziell kleinere Banken davon ab, den IRB Approach umzusetzen, da seine Implementierung und Instandhaltung mit erheblichen Kosten verbunden sind.

## 1.1 Asympt. Aussagen für Bernoulli-Mixture-Modelle

Um die Berechnungsvorschrift für regulatorisches Kapital motivieren zu können, müssen asymptotische Aussagen über Bernoulli-Mixture-Modelle getroffen werden. Das Regulator-Modell, also dass der Berechnungsformel in (1.2) zugrundeliegende Modell, ist ein One-Factor-Threshold-Model, auf welches sich die asymptotischen Aussagen insbesondere anwenden lassen. Bevor dies aber in Kapitel 1.3 geschehen kann, werden jetzt zunächst Bernoulli-Mixture-Modelle allgemein eingeführt, und asymptotische Aussagen hergeleitet. Das vorliegende Kapitel orientiert sich dabei an Kapitel 8.3.2 und 8.4 in McNeil et al. (2005).

**Definition 1.1.1** (Threshold-Modell)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W-Raum. Auf diesem sei ein $n$-dimensionaler Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ mit Verteilung $G$ (unter $P$) definiert. $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ sei eine Matrix mit Elementen $c_{k,i}$, so dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$-\infty = c_{r,i} \leq c_{r-1,i} \leq \dots \leq c_{1,i} \leq c_{0,i} = \infty.$$

Der Zufallsvektor $\boldsymbol{S} = (S_1, \dots, S_n)'$ sei definiert durch:

$$S_i = k \iff c_{k,i} < X_i \leq c_{k-1,i}, \qquad k \in \{1, \dots, r\},\ i \in \{1, \dots, n\}.$$

Der Zufallsvektor $\boldsymbol{I} = (I_1, \dots, I_n)'$ sei definiert durch:

$$I_i := \begin{cases} 1 & , \text{falls } S_i = r \\ 0 & \phantom{, \text{falls }} S_i < r \end{cases}.$$

Dann bezeichnet $(\boldsymbol{X}, C)$ ein sogenanntes *Threshold-Modell* für den *Zustandsvektor* $\boldsymbol{S}$. $p_i := P(I_i = 1) = G_i(c_{r-1,i})$ mit $i = 1, \dots, n$ wird als *Ausfallwahrscheinlichkeit* bezeichnet. $G_i$ bezeichnet dabei die $i$-te Randverteilung von $G$.

In der Situation von Definition 1.1.1 stelle man sich ein Kreditportfolio $\mathcal{P}$ mit $n$ Kreditnehmern vor. Der Zufallsvektor $\boldsymbol{X}$ kann dann so verstanden werden, dass er die Assets (d.h. den Wertbestand) der Kreditnehmer angibt. Die *Default-Threshold* $c_{r-1,i}$ kann als Wert der Liabilities (d.h. der Verbindlichkeiten) des Kreditnehmers $i$ interpretiert werden. Nach Definition kommt es zum *Default* $(I_i = 1)$ des Kreditnehmers $i$, wenn $X_i \leq c_{r-1,i}$ gilt. Der Zustandsvektor $\boldsymbol{S}$ gibt das *Rating* der einzelnen Kreditnehmer an.

Im Folgenden wird das Bernoulli-Mixture-Modell definiert, das in dieser Arbeit extra als Threshold-Modell eingeführt wird. In Bernoulli-Mixture-Modellen ist es möglich, asymptotische Aussagen über die Kreditportfolioverlustverteilung großer Kreditportfolios zu treffen. Das Regulator-Modell wird insbesondere ein One-Factor-Bernoulli-Mixture-Modell sein. Dies wird eine asymptotische Motivation für die regulatorischen Kapitalanforderungen in (1.2) erlauben. In einem Mixture-Modell wird davon ausgegangen, dass bestimmte makroökonomische Faktoren, die Rückschlüsse auf den allgemeinen Zustand einer Volkswirtschaft zulassen, einen Einfluss auf das Ausfallrisiko eines Kreditnehmers haben. Ausfälle einzelner Kreditnehmer werden, gegeben Realisationen dieser Faktoren, als stochastisch unabhängig voneinander angenommen.

**Definition 1.1.2** (Bernoulli-Mixture-Modell)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W-Raum. Auf diesem sei durch $(\boldsymbol{X}, C)$ ein Threshold-Modell definiert. Gegeben den $m$-dimensionalen Zufallsvektor $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)'$ mit Verteilung $F$ (unter $P$), folgt der Zufallsvektor $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)'$ mit $m < n \in \mathbb{N}$ einem *Bernoulli-Mixture-Modell* $(\boldsymbol{X}, C)$, wenn gilt:

Es existieren Funktionen $\bar{p}_i : \mathbb{R}^m \to [0,1], 1 \leq i \leq m$, so dass, bedingt auf $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, die Komponenten von $\boldsymbol{I}$ stochastisch unabhängige Benoulli-Zuvallsvariable sind mit $\bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}) = P(I_i = 1 \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi})$.

*Bemerkung.* Für $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)' \in \{0,1\}^n$ gilt dann:

$$P(\boldsymbol{I} = \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i=1}^{n} \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi})^{y_i} (1 - \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}))^{1-y_i},$$

und

$$P(\boldsymbol{I} = \boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{i=1}^{n} \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi})^{y_i} (1 - \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}))^{1-y_i} dF(\boldsymbol{\psi}).$$

Insbesondere ist dann die Ausfallwahrscheinlichkeit des Kreditnehmers $i$ gegeben durch $p_i = P(I_i = 1) = \mathbb{E}[\bar{p}_i(\boldsymbol{\Psi})]$.
Es sei angemerkt, dass es keinesfalls notwendig ist ein Bernoulli-Mixture-Modell als ein Threshold-Modell zu definieren. $\boldsymbol{I}$ hätte demnach ein nicht weiter spezifizierter Zufallsvektor sein können. Da aber in der vorliegenden Arbeit $\boldsymbol{I}$ immer als ein über Thresholds definierter Zufallsvektor von Default-Indikatoren vorkommt, wurde das Bernoulli-Mixture-Modell gleich als Threshold-Modell eingeführt.

Bei der Kalibrierung in Kapitel 2 wird es darauf ankommen, das in Kapitel 1.2 vorgestellte Bank-Internal-Modell, und damit auch das Regulator-Modell, als identisch verteiltes Bernoulli-Mixture-Modell behandeln zu können. Folgende Definition klärt, wann ein Bernoulli-Mixture-Modell als identisch verteilt bezeichnet wird.

**Definition 1.1.3** (identisch verteiltes Bernoulli-Mixture-Modell)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W-Raum. Gegeben den $m$-dimensionalen Zufallsvektor $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)'$ mit Verteilung $F$, folge der Zufallsvektor $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)'$ mit $m < n \in \mathbb{N}$ einem *identisch verteilten* Bernoulli-Mixture-Modell $(\boldsymbol{X}, C)$. Bedingt auf $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, sind dann die Komponenten von $\boldsymbol{I}$ stochastisch unabhängige, identisch verteilte Bernoulli-Zufallsvariable.

*Bemerkung.* Damit sind die Funktionen $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ identisch. Definiere also $\bar{p} := \bar{p}_1$. Bedingt auf $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, ist die Summe $D = \sum_{j=1}^{n} I_j$ (unter $P$) eine binomische Zufallsvariable mit Parameter $\bar{p}(\boldsymbol{\psi}) = P(I_i = 1 | \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi})$. Für $d \in \mathbb{N}$ gilt also:

$$P(D = d) = \binom{n}{d} \int_{\mathbb{R}^m} \bar{p}(\boldsymbol{\psi})^d (1 - \bar{p}(\boldsymbol{\psi}))^{n-d} dF(\boldsymbol{\psi}).$$

Ziel dieses Kapitels ist es, asymptotische Aussagen über die Verlustverteilung eines Kreditportfolios zu treffen. Dafür muss zunächst geklärt werden, wie Verluste innerhalb eines Kreditportfolios überhaupt definiert sind.

**Definition 1.1.4** (Verlust)**.** $(\boldsymbol{X}, C)$ sei ein Threshold-Modell für den Zustandsvektor $\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_n)$. Für jeden Kreditnehmer $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist abhängig vom Rating ein Verlustvektor $(l_{1,i}, \ldots, l_{r,i}) \in \mathbb{R}^r$ mit $l_{1,i} \leq \ldots \leq l_{r,i}$ gegeben, wobei $l_{k,i}$ den Verlust für die Bank darstellt, wenn das Rating des Kreditnehmers $i$ innerhalb eines Jahres nach Rating $k$ wechselt. Die Zufallsvariable $L_i : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, definiert durch

$$L_i := \sum_{k=1}^{r} l_{k,i} \cdot \mathbf{1}_{\{c_{k,i} \,<\, X_i \,\leq\, c_{k-1,i}\}},$$

gibt den Verlust bei Ratingveränderung des Kreditnehmers $i$ an.

Der Portfolioverlust ist bestimmt über die Zufallsvariable $L : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$L := \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} l_{k,i} \cdot \mathbf{1}_{\{c_{k,i} \,<\, X_i \,\leq\, c_{k-1,i}\}}$$

Gilt $r = 2$, so werden Verluste durch Rating-Migration nicht berücksichtigt. Ausschließlich Defaults führen dann zu Verlusten. Diese Situation wird als *Two-State-Mode* bezeichnet. Gilt $r > 2$, so bezeichnet man dies als *Multi-State-Mode*.

*Bemerkung.* In der obigen Situation meinen negative Verluste einen Werthinzugewinn. Dies kann bei Rating-Upgrades eintreten.

Für die weiteren Überlegungen soll von einem Two-State-Mode ausgegangen werden, d.h. $r = 2$. Die Zufallsvariable $L_i$, die den Verlust eines einzelnen Kreditnehmers $i$ angibt, kann dann weiter spezifiziert werden, so dass für den Verlust $L^{(n)}$ eines Portfolios $\mathcal{P}$ mit $n$ Kreditnehmern gilt:

$$L^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{EAD}_i \cdot \mathrm{LGD}_i \cdot I_i,$$

mit

$$I_i := \mathbf{1}_{\{X_i \,\leq\, c_{r-1,i}\}}.$$

Dabei ist $(\mathrm{EAD}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven Exposures, d.h. Kredithöhen. $(\mathrm{LGD}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in $(0,1]$, die den prozentualen Verlust im Falle eines Defaults angeben. $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von zugehörigen Default-Indikatoren. Um schließlich in den kommenden Sätzen asymptotische Aussagen über die Verlustverteilung von großen Kreditportfolios treffen zu können, müssen aus technischen Gründen noch folgende Annahmen getroffen werden:

*Annahme* 1. Es gibt einen $m$-dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{\Psi}$ und Funktionen $l_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ so, dass, bedingt auf $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen ist, wobei $l_i(\boldsymbol{\psi}) = \mathbb{E}(L_i|\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi})$ gelte.

Die stochastische Unabhängigkeit, bedingt auf $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, der Default-Indikatoren $I_1, \ldots, I_n$ in einem Bernoulli-Mixture-Modell (vgl. Definition 1.1.2), wird also ausgeweitet auf die Einzelverluste der Kreditnehmer.

*Annahme* 2. Es existiert eine Funktion $\bar{l} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$, so dass für alle $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(L^{(n)}|\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i(\boldsymbol{\psi}) = \bar{l}(\boldsymbol{\psi}).$$

$\bar{l}(\boldsymbol{\psi})$ wird *asymptotische bedingte Verlustfunktion* genannt.

Bei einer Vergrößerung des Portfolios $\mathcal{P}$ soll dessen grundsätzliche Struktur also erhalten bleiben.

*Annahme* 3. Es existiert ein $C < \infty$ mit $\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{EAD}_i/i)^2 \; < \; C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Annahme 3 stellt sicher, dass die Exposures nicht systematisch mit der Anzahl der Kreditnehmer im Portfolio wachsen.

Der folgende Satz zeigt, dass unter den getroffenen Annahmen der durchschnittliche Verlust im Portfolio im Wesentlichen durch die asymptotische bedingte Verlustfunkion $\bar{l}$ und durch die von $\mathbf{\Psi}$ angenommenen Werte festgelegt ist.

**Satz 1.1.5.** *$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W-Raum. Auf diesem sei durch $(\boldsymbol{X}, C)$ ein Threshold-Modell im Two-State-Mode definiert. Die Folge $\left(L^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch (1.1), erfülle die Annahmen 1 - 3. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} L^{(n)} = \bar{l}(\boldsymbol{\psi}), \qquad P(\;\cdot\;|\;\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) - fast\ sicher.$$

*Beweis.* Nach dem SLLN gilt für eine Folge $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen (bzgl. $P$) mit $\mathbb{E}[Z_i] = 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_i^2]/i^2 < \infty$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \to 0, \qquad P - fast\ sicher.$$

Diese Erkenntnis wird angewendet auf die Zufallsvariable $Z_i := L_i - l_i(\boldsymbol{\psi})$. Nach Annahme 1 ist $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen (bzgl. $P_\psi := P(\,\cdot \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi})$), also auch $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Außerdem gilt:

$$\mathbb{E}_\psi[Z_i] = \mathbb{E}_\psi[L_i] - \mathbb{E}_\psi[\mathbb{E}_\psi[L_i]] = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_\psi[Z_i^2]/i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{EAD}_i^2}{i^2} Var_\psi(\mathrm{LGD}_i I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{EAD}_i}{i}\right)^2 < \infty,$$

wobei die erste Ungleichung aus $0 \leq \mathrm{LGD}_i I_i \leq 1$ folgt. Die zweite Ungleichung folgt aus Annahme 3. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 1.1.5 kann auf die Zufallsvariable $D^{(n)} := \sum_{i=1}^n I_i$ angewendet werden, wenn $\mathrm{LGD}_i = \mathrm{EAD}_i \equiv 1$ gesetzt wird. Es gilt dann:

**Satz 1.1.6.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *sei ein W-Raum. Gegeben den* $m$*-dimensionalen Zufallsvektor* $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)'$ *mit Verteilung* $F$ *(unter* $P$*), folge der Zufallsvektor* $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)'$ *mit* $m < n \in \mathbb{N}$ *einem Bernoulli-Mixture-Modell* $(\boldsymbol{X}, C)$ *im Two-State-Mode. Außerdem gelte* $LGD_i = EAD_i \equiv 1$*. Dann gilt für die Folge von Zufallsvariablen* $\left(D^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{i=1}^n I_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}), \qquad P(\,\cdot \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) - fast\ sicher.$$

*Beweis.* Nach Definition des Bernoulli-Mixture-Modells existieren Funktionen $\bar{p}_i : \mathbb{R}^m \to [0,1], 1 \leq i \leq m$, so dass, bedingt auf $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, die Komponenten von $\boldsymbol{I}$ stochastisch unabhängige Benoulli-Zuvallsvariable sind mit $P(I_i = 1 \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi})$. Die Folge $\left(\sum_{i=1}^n I_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Annahmen 1 - 3, denn:

- zu Annahme 1: Wegen $\mathrm{LGD}_i = \mathrm{EAD}_i \equiv 1$ gilt:

  $$\mathbb{E}(L_i \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \mathbb{E}(I_i \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}).$$

  $\bar{p}_i : \mathbb{R}^m \to [0,1], 1 \leq i \leq m$ sind also die in Annahme 1 geforderten Funktionen.

- zu Annahme 2: Da $\bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}) \in [0,1],\ \forall i \in \mathbb{N}$, existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}) =: \bar{l}(\boldsymbol{\psi})$. Es gilt also:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(L^{(n)} | \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i | \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}\right) =$$
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(I_i | \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}) =: \bar{l}(\boldsymbol{\psi}).$$

  Damit ist Annahme 2 erfüllt.

- zu Annahme 3: Die Reihe $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\right)^2$ konvergiert. Damit ist Annahme 3 erfüllt.

Aus Satz 1.1.5 folgt die Behauptung. □

*Bemerkung.* Folgt $\boldsymbol{I} := (I_1, \ldots, I_n)'$ sogar einem identisch verteilten Bernoulli-Mixture-Modell, so sind die Funktionen $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ identisch. Definiere also $\bar{p} := \bar{p}_1$. Dann gilt sogar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D^{(n)} = \bar{p}(\boldsymbol{\psi}), \qquad P(\,\cdot \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) - \textit{fast sicher}.$$

Liegt sogar ein *One-Factor-Bernoulli-Mixture-Modell* vor, also ein Bernoulli-Mixture-Modell mit eindimensionaler Zufallsvariable $\Psi$, so kann die Aussage nochmal verschärft werden. So klärt der folgende Satz den Zusammenhang zwischen den Quantilen von $L^{(n)}$ und denen von $\Psi$:

**Satz 1.1.7.** *$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W-Raum. Auf diesem sei durch $(\boldsymbol{X}, C)$ ein Bernoulli-Mixture-Modell im Two-State-Mode definiert. Die Folge $\left(L^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch (1.1), erfülle die Annahmen 1 - 3. $\Psi$ aus Annahme 1 sei eindimensional und besitze die Verteilungsfunktion $F$ (unter $P$). Die bedingte asymptotische Verlustfunktion $\bar{l}(\psi)$ aus Annahme 2 sei streng monoton wachsend und rechtsstetig. Für alle $\delta > 0$ gelte $F(q_\alpha(\Psi) + \delta) > \alpha$, wobei $q_\alpha(\Psi)$ so definiert ist, dass $F(\Psi \leq q_\alpha(\Psi)) = \alpha$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_\alpha(L^{(n)}) = \bar{l}(q_\alpha(\Psi)).$$

*Beweis.* Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} P\left(L^{(n)} \leq n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon)\right) &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P\left(L^{(n)} \leq n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon) | \Psi = \psi\right) dF(\psi) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} P\left(L^{(n)} \leq n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon) | \Psi = \psi\right) dF(\psi) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\bar{l}(\psi)\ <\ \bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon/2\}} dF(\psi),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung aus dem Lemma von Fatou folgt, da der Integrand das Glied einer Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P\left(L^{(n)} \leq n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon) | \Psi = \psi\right) \leq 1.$$

Die dritte Ungleichung folgt aus Satz 1.1.5. $\bar{l}$ ist eine streng monoton wachsende Funktion, d.h. falls $\bar{l}(\psi)$ größer (bzw. kleiner) als $\bar{l}(q_\alpha(\Psi))$ ist, so ist auch $\psi$ größer (bzw. kleiner) als $q_\alpha(\Psi)$. Außerdem ist $\bar{l}$ rechtsstetig. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\bar{l}(\psi)\ <\ \bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon/2\}} dF(\psi) \leq F(q_\alpha(\Psi) - \delta).$$

Nach Definition gilt $F(q_\alpha(\Psi) - \delta) < \alpha$.
Analog lässt sich zeigen, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} P\left(L^{(n)} \leq n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) + \varepsilon)\right) > \alpha$$

Damit gilt also für große $n$:

$$n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) - \varepsilon) < q_\alpha(L^{(n)}) < n(\bar{l}(q_\alpha(\Psi)) + \varepsilon).$$

□

*Bemerkung.* Hohe Werte für $\psi$ können als einen schlechten Zustand der Weltkonjunktur interpretiert werden. Ein schlechter Zustand bedeutet dann, dass die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten $\bar{p}_i(\psi)$ relativ hoch sind. Von einer streng monoton wachsenden asymptotischen bedingten Verlustfunktion $\bar{l}(\psi)$ auszugehen, erscheint dann sinnvoll.
Satz 1.1.7 zeigt also, dass bei großen Porfolios der Tail der Kreditportfolioverlustverteilung im Wesentlichen vom Tail von $F$ bestimmt ist.

Der nächste Satz zeigt, wann Threshold-Modelle den Voraussetzungen eines Bernoulli-Mixture-Modells genügen. Zuvor wird noch die bedingte Unabhängigkeitsstruktur eines Zufallsvektors eingeführt:

**Definition 1.1.8.** Der Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ hat eine $m$-dimensionale *bedingte Unabhängigkeitsstruktur* mit bedingenden Zufallsvektor $\boldsymbol{\Psi}$, wenn es einen m-dimensionalen Zufallsvektor $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)'$ so gibt, dass, bedingt auf $\boldsymbol{\Psi}$, die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig sind.

**Satz 1.1.9.** *$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W-Raum. Auf diesem sei durch $(\boldsymbol{X}, C)$ ein Threshold-Modell definiert. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ habe eine $m$-dimensionale bedingte Unabhängigkeitsstruktur mit bedingenden Zufallsvektor $\boldsymbol{\Psi}$. Dann folgt der Zufallsvektor der Default-Indikatoren $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)$ einem Bernoulli-Mixture-Modell.*

*Beweis.* Sei $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)' \in \{0,1\}^n$. Definiere die Menge $B := \{1 \leq\ i\ \leq n\ :\ y_i = 1\}$ und $B^c := \{1, \ldots, n\} \setminus B$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{I} = \boldsymbol{y} | \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) &= P\left(\bigcap_{i\in B}\{X_i \leq c_{r-1,i}\} \bigcap_{i\in B^c}\{X_i > c_{r-1,i}\} \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}\right) \\
&= \prod_{i\in B} P(X_i \leq c_{r-1,i} \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) \prod_{i\in B^c}(1 - P(X_i \leq c_{r-1,i} \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi})) \\
&= P(I_1 = y_1 \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) \cdot \ldots \cdot P(I_n = y_n \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aus der bedingten Unabhängigkeitsstruktur von $\boldsymbol{X}$ folgt. Somit sind, wie in Definition 1.1 gefordert, $I_1, \ldots, I_n$, bedingt auf $\boldsymbol{\Psi}$, stochastisch unabhängige Bernoulli-Zufallsvariable mit $P(I_i = 1 \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) =: \bar{p}_i(\boldsymbol{\psi})$. □

In Kapitel 1.2 wird nun das Regulator-Modell als Spezialfall eines Bank-Internal-Modells eingeführt. Das Regulator-Modell erfüllt insbesondere die Voraussetzungen eines One-Factor-Bernoulli-Mixture-Modells. Die Anwendung von Satz 1.1.7 führt dann zu einer asymptotischen Motivation der Berechnungsformel in (1.2).

## 1.2 Definition des Regulator-Modells

Dieser Abschnitt stellt das Regulator-Modell vor, von dem in dieser Arbeit angenommen wird, dass es dem Regulator als Grundlage dient, um minimale Kapitalanforderungen nach (1.2) an die Banken zu stellen. Zunächst wird das Bank-Internal-Modell eingeführt, so wie es Banken als Grundlage zur Bestimmung ihrer Kreditportfolioverlustverteilung dienen könnte. Dieses ist allgemeiner formuliert, lässt etwa den Multi-State-Mode zu, und benutzt zahlreiche systematische Faktoren, um die Ability-to-Pay-Variable zu beschreiben. Das Regulator-Modell wird dann als Spezialfall eines Bank-Internal-Modells eingeführt. Die Überlegungen und Definitionen des vorliegenden Kapitels sind durch die Kapitel 3.4.1 und 8.2.1 in McNeil et al. (2005), Kapitel 2 in Kalkbrener und Onwunta (2009) und Kapitel 3.1 in Hamerle und Liebig (2003) motiviert.

Kreditrisikomodelle werden intern von Banken benutzt, um die Verlustverteilung ihres Kreditportfolios über einen festgelegten Zeitraum (typischerweise ein Jahr) zu bestimmen. In Kapitel 1.4 wird gezeigt, wie durch diese dann ein Maß (in Form des ökonomischen Kapitals) für das Risiko des Kreditportfolios ermittelt werden kann. Das Risikomaß kann der Bank dann zur Portfoliooptimierung dienen.

Das hier betrachtete Moody's KMV nachempfundene Threshold-Modell gehört zu der Gruppe der strukturellen Modelle. Diese versuchen den Mechanismus zu erklären, der zu einem Kreditausfall führt. Das Modell von Merton (1974) bildet den Prototyp aller strukturellen Modelle. Merton geht davon aus, dass eine Firma ausfällt, wenn der Wert ihrer Assets die Höhe ihrer Verbindlichkeiten unterschreitet. $(A_i(t))_{t\in T}$ sei ein stochastischer Prozess auf dem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zeitparametermenge $T \subset \mathbb{R}$, der den Wert der Assets des Unternehmens $i$ im Zeitverlauf darstellt. Fällt der Asset-Prozess $(A_i(t))_{t\in T}$ unter eine vorgegebene Schranke $D_i$ (wobei man sich die Höhe der Verbindlichkeiten vorstelle), so fällt der Kreditnehmer $i$ aus. In stetiger Zeit (d.h. $T = [0, \infty)$)[1] wird der Asset-Prozess als geometrische Brownsche Bewegung angenommen, für den also gilt:

$$dA_i(t) = \mu_i A_i(t)dt + \sigma_i A_i(t)dB_i(t),$$

wobei $\mu_i \in \mathbb{R}$ und $\sigma_i > 0$ firmen-spezifische Konstanten seien und $(B_i(t))_{t\in T}$ eine Brownsche Bewegung sei. Für die Modellierung der Portfolioverlustverteilung, wobei in der

[1] Die stetige Form des Asset-Prozesses wird unter anderem beim Pricing von Kreditausfallversicherungen verwendet. Deren Wert in $t$ hängt maßgeblich vom Asset-Wert $A_i(t)$ der Firma $i$ ab.

Regel Verluste innerhalb eines Jahres betrachtet werden, wird lediglich eine diskrete Version des stetigen Prozesses benötigt (d.h. $T = \mathbb{N}$), für die also gilt:

$$A_i(t+1) - A_i(t) = \mu_i A_i(t) + \sigma_i A_i(t) W_i(t),$$

wobei $W_i(t)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable sei. Ein Kreditnehmer $i$ fällt also zum Zeitpunkt $k$ aus, wenn $A_i(k) < D_i$ und $A_i(t) \geq D_i, \ \forall\ t < k$ gilt.

Anstatt den Asset-Prozess direkt zu betrachten, ist es üblich den Fokus auf die *Returns*

$$r_i(t+1) = log \frac{A_i(t+1)}{A_i(t)} \tag{1.3}$$

zu richten. Diese sind normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_i$ und Varianz $\sigma_i$. Um die Anzahl der unbekannten Parameter zu verringern, werden überdies hinaus die Returns standardisiert. Im weiteren Verlauf wird also die standardnormalverteilte Zufallsvariable

$$\xi_i(t) = \frac{r_i(t) - \mu_i}{\sigma_i}$$

betrachtet. Diese kann als Veränderung des Asset-Werts zum Zeitpunkt $t$ interpretiert werden. $(\xi_i(t))_{t\in\mathbb{N}}$ wird als *Ability-to-Pay-Prozess*, die Zufallsgröße $\xi_i(t)$ als *Ability-to-Pay-Variable* bezeichnet.

Im weiteren Verlauf wird die Ability-to-Pay-Variable $\xi_i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t$ betrachtet. Man kann $\xi_i(t)$ so interpretieren, dass sie die Zahlungsfähigkeit des Kreditnehmers $i$ nach Ablauf des Jahres $t$ angibt. Weiter wird davon ausgegangen, dass am Anfang eines Jahres jeder im Portfolio befindliche Kreditnehmer ein Rating besitzt. Dies geschieht entweder über ein bank-internes Rating-System, oder über Ratingagenturen. Die Ratingagentur Standard & Poor's etwa verwendet ein Rating-System, das unter anderem die acht Rating-Kategorien AAA ($k$=1), AA ($k$=2), A ($k$=3), BBB ($k$=4), BB ($k$=5), B ($k$=6), CCC ($k$=7) und D ($k$=8) umfasst, wobei von diesen AAA das höchste und CCC das niedrigste Rating der nicht ausgefallenen Kreditnehmer darstellt. Ausgefallene Firmen werden mit D angezeigt. Industriespezifische Übergangsmatrizen geben die Wahrscheinlichkeit an von einem Rating innerhalb eines Jahres in ein anderes Rating zu wechseln. Diese werden über historische Rating-Daten geschätzt. Abhängig vom Rating am Anfang eines Jahres werden für jeden Kreditnehmer $i$ Schranken bestimmt, die dann zu einer *Rating-Migration* führen, d.h. zu einem Upgrade bzw. Downgrade, falls der Wert der Ability-to-Pay-Variable $\xi_i(t)$ die Schranken überschreitet bzw. unterschreitet. Definiere also für jeden Kreditnehmer $i$ die $r \in \mathbb{N}$ Thresholds

$$-\infty = c_{r,i} \leq c_{r-1,i} \leq \ldots \leq c_{1,i} \leq c_{0,i} = \infty, \tag{1.4}$$

mit

$$p_{k,i} = P(c_{k,i} < \xi_i(t) \leq c_{k-1,i}) = \Phi(c_{k-1,i}) - \Phi(c_{k,i}), \qquad k = 1, \ldots, r,$$

wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. $p_{k,i}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Kreditnehmer $i$ am Ende eines Jahres in Rating-Kategorie $k$ befindet. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich einfach aus den Übergangsmatrizen ermitteln. Insbesondere ist $p_{r,i}$ die Ausfallwahrscheinlichkeit des Kreditnehmers $i$. $c_{r-1,i}$ ist demnach die Default-Threshold; bevor der Asset-Prozess in standardisierte Returns transformiert wurde, hätte man im Modell von Merton die Default-Threshold als Höhe der Verbindlichkeiten interpretiert. Im Falle der acht verschiedenen S&P Rating-Kategorien gilt $r = 8$.

Für jeden Kreditnehmer $i$ ist abhängig vom Rating ein Verlustvektor $(l_{1,i}, \ldots, l_{r,i}) \in \mathbb{R}^r$ mit $l_{1,i} \leq \ldots \leq l_{r,i}$ gegeben, wobei $l_{k,i}$ den Verlust für die Bank darstellt, wenn das Rating des Kreditnehmers $i$ innerhalb eines Jahres nach Rating $k$ wechselt. Die Zufallsvariable $L_i(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, definiert durch

$$L_i(t) := \sum_{k=1}^{r} l_{k,i} \cdot \mathbf{1}_{\{c_{k,i} \, < \, \xi_i(t) \, \leq \, c_{k-1,i}\}},$$

gibt also den Verlust bei Ratingveränderung des Kreditnehmers $i$ im Jahr $t$ an.

Bei den bisherigen Überlegungen wurde nur ein einziger Kreditnehmer betrachtet. Jetzt gehe man von einem Kreditportfolio $\mathcal{P}$ aus, das aus Krediten an $n$ verschiedene Kreditnehmer besteht. Unter $P$ besitze der Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))'$ eine $n$-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\mathbf{0}$ und Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$. Auf der Hauptdiagonalen von $\boldsymbol{\Sigma}$ befinden sich sämtlich Einsen. Wenn man nun etwa an Hand von Equity-Zeitreihen die $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ noch unbekannten Einträge in $\boldsymbol{\Sigma}$ schätzte, könnte unter Berücksichtigung der Thresholds in (1.4) mit Hilfe einer Monte Carlo-Simulation die Verteilung der Kreditausfälle eines Jahres bereits geschätzt werden. Der Portfolioverlust ist dabei bestimmt über die Zufallsvariable $L(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$L(t) := \sum_{i=1}^{n} L_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} l_{k,i} \cdot \mathbf{1}_{\{c_{k,i} \, < \, \xi_i(t) \, \leq \, c_{k-1,i}\}}$$

Es ist offensichtlich, dass eine derart umfangreiche Schätzung bei einem großen Portfolio $\mathcal{P}$ schnell an ihre Grenzen stößt. Daher ist es üblich die Anzahl der zu schätzenden Größen über das so genannte Faktor-Modell wesentlich zu verkleinern. Zunächst werden wieder die Returns in (1.3) betrachtet. Diese sollen weitestgehend über $m < n$ systematische Faktoren $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ beschrieben werden.

**Definition 1.2.1** (Faktor-Modell)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Zufallsvektor $\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ folgt einem *m-Faktor-Modell* (bzw. $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ einem *standardisierten m-Faktor-Modell*), wenn für jeden Kreditnehmer $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$r_i(t) = \mu_i(t) + \tilde{\beta}_i \sum_{g=1}^{m} w_{i,g} \Psi_g(t) + \tilde{\nu}_i \varepsilon_i(t), \tag{1.5}$$

wobei

(i) $\mathbf{\Psi}(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_m(t))'$ der $m$-dimensionale standardnormalverteilte Zufallsvektor der systematischen Faktoren ist. $\mathbf{\Psi}(t)$ habe die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$, definiert durch $\Sigma_{g,h} := \mathbb{E}[\Psi_g(t)\Psi_h(t)]$;

(ii) $\boldsymbol{\epsilon}(t) = (\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t))'$ der $n$-dimensionale standardnormalverteilte Zufallsvektor der idiosynkratischen (d.h. unternehmensspezifischen) Faktoren ist. Die Vektorkomponenten sind dabei unkorreliert sowohl untereinander als auch mit den systematischen Faktoren;

(iii) $(\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ der zeitabhängige Erwartungswertvektor der Returns ist;

(iv) $\begin{pmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & \cdots & w_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix konstanter Gewichte ist, und

(v) $(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n)' \in [0,1]^n$ und $(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n)' \in [0,1]^n$ so gewählt sind, dass $(R_1^2, \dots, R_n^2)' \in [0,1]^n$ existiert mit

$$\nu_i := \frac{\tilde{\nu}_i}{\sigma_i} = \sqrt{1 - R_i^2}$$

und

$$Var(\xi_i(t)) = \left(\frac{\tilde{\beta}_i}{\sigma_i}\right)^2 \sum_{g=1}^{m} w_{i,g} \sum_{h=1}^{m} (\Sigma_{g,h} w_{i,h}) + (1 - R_i^2) = 1,$$

mit $\xi_i(t) = \frac{r_i(t) - \mu_i(t)}{\sigma_i}$ und $\sigma_i = Var(r_i(t))$. Es gilt also:

$$\beta_i := \frac{\tilde{\beta}_i}{\sigma_i} = \sqrt{\frac{R_i^2}{\sum_{g=1}^{m} w_{i,g} \sum_{h=1}^{m} (\Sigma_{g,h} w_{i,h})}}. \tag{1.6}$$

Insbesondere gilt:

$$\xi_i(t) = \beta_i \sum_{g=1}^{m} w_{i,g} \Psi_g(t) + \sqrt{1 - R_i^2}\varepsilon_i(t). \tag{1.7}$$

*Bemerkung.* Es sei darauf hingewiesen, dass die Varianz $\sigma_i = Var(r_i(t))$ ausdrücklich als zeitunabhängig angenommen wird. Um Kreditportfolioverluste simulieren zu können, wird angenommen, dass der Zufallsvektor der Returns, die durch (1.3) definiert sind, einem $m$-Faktor-Modell folgt. Dies ist eine starke Annahme. Man hofft also, dass trotz dieser Annahme insbesondere die Abhängigkeitsstruktur bei Kreditausfällen nicht verfälscht wird. Um diese Hoffnung zu erfüllen, wird es wesentlich darauf ankommen eine geeignete Kalibrierung des Faktor-Modells zu finden. Die Zufallsvariable $\xi_i(t)$ kann interpretiert werden als standardisierter Asset-Return des Kreditnehmers $i$ am Ende des Jahres $t$. $\rho_{ij}^A := Corr(\xi_i(t), \xi_j(t))$ wird deshalb als *Asset-Korrelation* bezeichnet. Es gilt:

$$\rho_{ij}^A := Corr(\xi_i(t), \xi_j(t)) = Cov(\xi_i(t), \xi_j(t)) = \beta_i \beta_j \sum_{g,h=1}^{m} w_{i,g} w_{j,h} \Sigma_{g,h}, \tag{1.8}$$

mit

$$\Sigma_{g,h} = Cov(\Psi_g(t), \Psi_h(t)) = \mathbb{E}[\Psi_g(t)\Psi_h(t)].$$

$\beta_i$ ist bereits eindeutig über die Gewichte $w_{i,1}, \ldots, w_{i,m}$ und $R_i^2$ festgelegt. Die Wahl von $R_i^2 \in [0,1]$ legt fest, wie groß der Einfluss der systematischen Faktoren auf die Ability-to-Pay-Variable ist, denn nach (1.7) gilt $\beta_i = Corr(\xi_i(t), \sum_{g=1}^m w_{i,g}\Psi_g(t))$. $R_i^2$ wird als *Korrelationsparameter* bezeichnet. Um die Kovarianzen sämtlicher $n$ Ability-to-Pay-Variablen zu ermitteln, reicht es die $n$ $R^2$s, die $m \cdot n$ Gewichte und die $\frac{m(m-1)}{2}$ Kovarianzen der systematischen Faktoren zu kennen. Da die Anzahl $m$ der systematischen Faktoren typischerweise wesentlich kleiner ist als die Anzahl $n$ der Kreditnehmer, reduziert sich somit der Dateninput von $\frac{n(n-1)}{2}$ auf $n(m+1) + \frac{m(m-1)}{2}$. Bei 45 systematischen Faktoren und 50,000 Kreditnehmern entspricht dies einer Reduktion von ca. 1,250.0 Millionen auf ca 2.3 Millionen Daten.

**Definition 1.2.2** (Bank-Internal-Modell)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ folge einem standardisierten $m$-Faktor-Modell. $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ sei eine Threshold-Matrix mit Einträgen $c_{k,i}$ so, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$-\infty = c_{r,i} \le c_{r-1,i} \le \ldots \le c_{1,i} \le c_{0,i} = \infty.$$

Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zufallsvariable $L(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$L(t) := \sum_{i=1}^{n} L_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} l_{k,i} \cdot \mathbf{1}_{\{c_{k,i} \, < \, \xi_i(t) \, \le \, c_{k-1,i}\}}.$$

Dann wird durch $(\boldsymbol{\xi}(t), C, L(t))$ ein *Bank-Internal-Modell* definiert.

*Bemerkung.* Indem die Threshold-Matrix $C$ als nicht vom Zeitpunkt $t$ abhängig spezifiziert wurde, wird implizit der Erwartungswertvektor der Returns $(\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ aus Definition 1.2.1 (iii) als zeitunabhängig angenommen (vgl. Kapitel 3).

**Definition 1.2.3** (Regulator-Modell)**.** Ein Bank-Internal-Modell $(\boldsymbol{\xi}(t), C, L(t))$ mit $m = 1$ und $r = 2$ wird als Regulator-Modell bezeichnet.

*Bemerkung.* Das Regulator-Modell befindet sich somit im Two-State-Mode, lässt also nur Verluste in Folge von Defaults zu. Außerdem gibt es im Regulator-Modell nur einen einzigen systematischen Faktor.

## 1.3 Motivation der Berechnungsformel für RC

Es wird nun gezeigt, dass Bank-Internal-Modelle, und somit insbesondere das Regulator-Modell, Bernoulli-Mixture-Modelle sind. Da das Regulator-Modell sogar ein One-Factor-Bernoulli-Mixture-Modell ist, gilt das asymptotische Ergebnis aus Satz 1.1.7, und die Berechnungsformel für regulatorische Kapital in (1.2) kann motiviert werden.

**Satz 1.3.1.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *sei ein W'Raum. Auf diesem sei durch* $(\boldsymbol{\xi}, C, L)$ *ein Bank-Internal-Modell definiert. Dann folgt der Zufallsvektor* $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)'$ *mit* $I_i := \mathbf{1}_{\{\xi_i \leq c_{r-1,i}\}}$ *einem Bernoulli-Mixture-Modell. Es gilt:*

$$\begin{aligned}\bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}) = P(I_i = 1 \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) &= P\left(\varepsilon_i \leq \frac{c_{r-1,i} - \beta_i \sum_{g=1}^m w_{i,g}\psi_g}{\sqrt{1-R_i^2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{c_{r-1,i} - \beta_i \sum_{g=1}^m w_{i,g}\psi_g}{\sqrt{1-R_i^2}}\right),\end{aligned}$$

*wobei* $\Phi$ *die Standardnormalverteilung sei.*

*Beweis.* $(\boldsymbol{\xi}, C)$ ist nach Definition ein Threshold-Modell. Da die Komponenten von $\boldsymbol{\epsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ paarweise unkorreliert sind und $\boldsymbol{\epsilon}$ $n$-dimensional normalverteilt ist, sind die Komponenten von $\boldsymbol{\epsilon}$ stochastisch unabhängig. Somit hat der Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ eine $m$-dimensionale bedingte Unabhängigkeitsstruktur mit bedingenden Zufallsvektor $\boldsymbol{\Psi}$. Die Behauptung folgt dann mit Satz 1.1.9. □

**Korollar 1.3.2.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *sei ein W'Raum. Auf diesem sei durch* $(\boldsymbol{\xi}, C, L)$ *ein Regulator-Modell definiert. Dann folgt der Zufallsvektor* $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)'$ *mit* $I_i := \mathbf{1}_{\{\xi_i \leq c_{1,i}\}}$ *einem Bernoulli-Mixture-Modell. Es gilt:*

$$\bar{p}_i(\boldsymbol{\psi}) = P(I_i = 1 \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \Phi\left(\frac{c_{1,i} - \sqrt{R_i^2}\psi}{\sqrt{1-R_i^2}}\right).$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt sofort aus Definition 1.2.3 und Satz 1.3.1. □

**Satz 1.3.3.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *sei ein W'Raum. Auf diesem sei durch* $(\boldsymbol{\xi}, C, L^{(n)})$ *mit* $L^{(n)} = \sum_{i=1}^n EAD_i \cdot LGD_i \cdot I_i$ *ein Regulator-Modell definiert. Das Portfolio ist dabei so zusammengestellt, dass die Folge* $\left(L^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Annahmen 1 - 3 aus Satz 1.1.7 erfüllt. Dann* *gilt:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_\alpha(L^{(n)}) &= \bar{l}(q_\alpha(\Psi)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(L_i \mid \Psi = q_\alpha(\Psi)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} LGD_i \cdot EAD_i \cdot \bar{p}_i(q_\alpha(\Psi)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} LGD_i \cdot EAD_i \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i^2}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-R_i^2}}\right),
\end{aligned}$$

*mit* $\Phi^{-1}(p_i) = c_{1,i}$.

*Beweis.* Folgt aus Satz 1.1.7. □

Gemäß Kapitel 8.4.5 in McNeil et al. (2005) kann also bei großen Portfolios, $c = 1$ und $\alpha = 0.999$ das regulatorische Kapital $RC_i$ in (1.2) als Beitrag zur „Kapitalvorsorge“ für unerwartete Verluste, ausgedrückt durch die Differenz zwischen 99.9%-Quantil und Erwartungswert der Kreditportfolioverlustverteilung, interpretiert werden. Durch die Festlegung auf das 99.9%-Quantil des systematischen Faktors geht der Regulator von einem fixen worst-case Szenario aus.

## 1.4 Allokation von ökonomischen Kapital

Es wurde bisher gezeigt, wie der Regulator Risiko misst. Wie ermittelt aber die Bank selbst das Kreditrisiko einer Transaktion? Banken benutzen das sogenannte ökonomische Kapital als Risikomaß. Um dieses zu ermitteln, ist es wesentlich, die Verlustverteilung des eigenen Kreditportfolios zu kennen. Unter der Annahme eines Bank-Internal-Modells oder eines in Kapitel 3 vorgestellten Bundesbank-Modells kann die Verlustverteilung über eine Monte-Carlo-Simulation geschätzt werden. Im vorliegenden Kapitel soll geklärt werden, was für ein Risikomaß wünschenswerte Eigenschaften sind. Es wird geprüft, ob das weit verbreitete VaR-Maß diese Eigenschaften besitzt. Das ökonomische Kapital auf Portfoliolevel wird definiert, und dieses über das ES-Maß auf Transaktionslevel allokiert. Das vorliegende Kapitel orientiert sich dabei an das Kapitel 6.1 in McNeil et al. (2005) und der Arbeit von Kalkbrener (2005).

Folgende Definition führt Risikomaße ein, und gibt gleichzeitig die sogenannten Kohärenz-Eigenschaften an, die vernünftigerweise von jedem Risikomaß erfüllt werden sollten. Risikomaße, die diese Eigenschaften erfüllen, werden als kohärente Risikomaße bezeichnet.

**Definition 1.4.1** (kohärente Risikomaße). $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. $L^0(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei die Menge aller Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. $\mathcal{M}$ sei ein linearer Unterraum von $L^0(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die Zufallsgrößen in $\mathcal{M}$ können so interpretiert werden, dass sie den Verlust verschiedener zugrundeliegender Kreditportfolios angeben. Für $\mathcal{M}$ gilt also:

(i) $\mathcal{M} \neq \emptyset$

(ii) $\forall\ L_1,\ L_2 \in \mathcal{M},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ und $\lambda L_1 \in \mathcal{M}$.

Reellwertige Funktionen $r$ auf $\mathcal{M}$ werden als *Risikomaße* bezeichnet. $r(L)$ mit $L \in \mathcal{M}$ kann als Kapital interpretiert werden, welches eine Bank für Ausfälle in ihrem Portfolio mit Verlust anzeigender Zufallsgröße $L$ bereithalten sollte, damit sich ein interner oder externer Risiko-Prüfer zufrieden zeigt. Im Folgenden sei ein Portfolio durch seine Portfolioverlustfunktion $L$ bestimmt. Statt vom Portfolio mit Verlust anzeigender Zufallsgröße $L$ zu sprechen, wird also nur noch vom Kreditportfolio $L$ die Rede sein. Folgende Eigenschaften müssen vom Risikomaß erfüllt sein, damit es als *kohärent* bezeichnet werden kann:

*Eigenschaft* 1 (Translationsinvarianz). Für alle $L \in \mathcal{M}$, und jedes $l \in \mathbb{R}$ gilt:

$$r(L + l) = r(L) + l.$$

Die Translationsinvarianz stellt sicher, dass die Interpretation von $r$ als vom Risiko-Prüfer vorgeschlagenes Risiko-Kapital Sinn ergibt. Man stelle sich ein Kreditportfolio $L$ vor. Der Risiko-Prüfer verlangt eine Kapitalhöhe von $r(L)$. Für das Portfolio $\tilde{L} = L - r(L)$ muss dann aus Sicht des Risiko-Prüfers kein Kapital mehr vorgehalten werden. Es gilt also $r(\tilde{L}) = r(L) - r(L) = 0$.

*Eigenschaft* 2 (Subadditivität). Für alle $L_1,\ L_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$r(L_1 + L_2) \leq r(L_1) + r(L_2).$$

Die Subadditivität eines Risikomaßes spiegelt den Diversifikationseffekt in Portfolios wieder. Man geht davon aus, dass durch das Zusammenfügen zweier verschiedener Kreditportfolios, das dadurch entstandene größere Kreditportfolio kein größeres Risiko enthält als die Summe der jeweiligen Risiken beider einzelnen Portfolios.

*Eigenschaft* 3 (positive Homogenität). Für alle $L \in \mathcal{M}$ und $\lambda \geq 0$ gilt:

$$r(\lambda L) = \lambda r(L).$$

Wenn man davon ausgeht, dass die Eigenschaft der Subadditivität vom verwendeten Risikomaß $r$ erfüllt ist, so kann auch die positive Homogenität begründet werden. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nämlich:

$$r(nL) = r(L + \ldots + L) \leq nr(L). \tag{1.9}$$

Da die zusammengeführten Portfolios alle gleich sind, sollte es keinen Diversifikationseffekt geben. In (1.9) sollte demnach Gleichheit gelten.

*Eigenschaft* 4 (Monotonie). Für alle $L_1,\ L_2 \in \mathcal{M}$ mit $P(L_1 \le L_2) = 1$ gilt:

$$r(L_1) \le r(L_2).$$

Für Portfolios, die fast sicher zu größeren Verlusten führen als andere Portfolios, sollte auch mehr Risiko-Kapital gehalten werden als für andere Portfolios.

Bevor spezifische Risikomaße, etwa Value-at-Risk oder der Expected Shortfall, eingeführt werden, soll geklärt werden, wie das gemessene Risiko-Kapital eines Portfolios auf Unterportfolios oder sogar auf einzelne Transaktionen allokiert werden kann.

**Definition 1.4.2** (Kapital-Allokation). $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. $L^0(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei die Menge aller Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. $r$ sei ein Risikomaß auf $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Eine *Kapital-Allokation* $\Lambda$ bezüglich $r$ ist eine reelle Funktion auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, so dass für jedes Portfolio $L \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\Lambda(L, L) = r(L).$$

$\Lambda$ heißt *linear*, falls

$$\Lambda(aL + bY, Z) = a\Lambda(L, Z) + b\Lambda(Y, Z) \qquad \forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ L,\ Y,\ Z \in \mathcal{M}.$$

$\Lambda$ heißt *diversifizierend*, falls

$$\Lambda(L, Y) \le \Lambda(L, L) \qquad \forall\ L,\ Y \in \mathcal{M}.$$

$\Lambda$ heißt *stetig* in $Y \in \mathcal{M}$, falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda(L, Y + \varepsilon Z) = \Lambda(L, Y) \qquad \forall\ Z \in \mathcal{M}.$$

*Bemerkung.* Wird $L_i \in \mathcal{M}$ als Unterportfolio von $L \in \mathcal{M}$ aufgefasst, so bestimmt die Kapital-Allokation $\Lambda(L_i, L)$ das Risiko-Kapital des Unterportfolios $L_i$. Das Risiko-Kapital des Unterportfolios ist also abhängig vom Portfolio $L$, wobei $\Lambda(L, L) = r(L)$ gilt. Aus der Linearität der Kapital-Allokation folgt sofort, dass das Risiko-Kapital eines Portfolios $L \in \mathcal{M}$ der Summe seiner Unterportfolios gleicht, also

$$r(L) = \Lambda(L, L) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Lambda(L_i, L),$$

mit $L = a_1 L_1 + \ldots + a_n L_n$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{M}$.
$\Lambda$ ist diversifizierend. Dies stellt sicher, dass das Risiko-Kapital eines Unterportfolios stets kleiner ist als das Risiko-Kapital desselben Portfolios, wenn es nicht Unterportfolio eines größeren Portfolios ist.
$\Lambda$ ist stetig. Dies stellt sicher, dass kleine Veränderungen am Portfolio auch nur kleine Veränderungen am benötigten Risiko-Kapital bewirken.

Ist eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation stetig in $Y \in \mathcal{M}$, dann ist das Risiko-Kapital $\Lambda(L, Y)$ eines beliebigen Unterportfolios $L$ eindeutig bestimmt. Es ist die Ableitung des zugrundeliegenden Risikomaßes $r$ an der Stelle $Y$ in Richtung des Unterportfolios $L$.

**Satz 1.4.3.** *$\Lambda$ sei eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation bezüglich $r$. Ist $\Lambda$ stetig in $Y \in \mathcal{M}$, so gilt für alle $L \in \mathcal{M}$:*

$$\Lambda(L, Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(Y + \varepsilon L) - r(Y)}{\varepsilon}.$$

*Beweis.* Für $\varepsilon$, $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ gilt

$$\begin{aligned} r(Y + \bar{\varepsilon} L) &\geq \Lambda(Y + \bar{\varepsilon} L, Y + \varepsilon L) \\ &= \Lambda((Y + \varepsilon L) + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) L, Y + \varepsilon L) \\ &= r(Y + \varepsilon L) + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \Lambda(L, Y + \varepsilon L), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus der diversifizierenden Eigenschaft von $\Lambda$ folgt. Die zweite Gleichheit folgt aus der Linearität. Da $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, gilt:

$$\Lambda(L, Y + \varepsilon L) \leq \frac{r(Y + \bar{\varepsilon} L) - r(Y + \varepsilon L)}{\bar{\varepsilon} - \varepsilon} \leq \Lambda(L, Y + \bar{\varepsilon} L).$$

Da $\Lambda$ stetig ist in $Y$, folgt die Behauptung. □

Es wird nun gezeigt, dass eine lineare und diversifizierende Kapital-Allokation $\Lambda$ bezüglich $r$ genau dann existiert, wenn $r$ ein positiv homogenes und subadditives Risikomaß ist. Folgende Definition wird dazu zunächst benötigt:

**Definition 1.4.4.** $\mathcal{M}^*$ sei die Menge aller reellwertigen, linearen Funktionale $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Definiere $H_r$ durch

$$H_r := \{h \in \mathcal{M}^* | h(L) \leq r(L) \text{ für alle } L \in \mathcal{M}\}.$$

Um den nachstehenden Satz beweisen zu können, wird das aus der Funktionalanalysis bekannte Hahn-Banach Theorem benötigt. Aus Vollständigkeitsgründen soll es hier angegeben werden.

**Theorem 1.4.5** (Hahn-Banach)**.** *Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $r : V \to \mathbb{R}$ sei ein subadditives und positiv homogenes Funktional auf $V$. Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ ein reellwertiges, lineares Funktional auf dem linearen Unterraum $U \subset V$. Gilt $f(u) \leq r(u)$, $\forall u \in U$, so existiert ein lineares Funktional $h : V \to \mathbb{R}$ mit*

$$h(u) = f(u) \qquad \text{für alle } u \in U, \qquad h(u) \leq r(u) \qquad \text{für alle } u \in V.$$

*Beweis.* Siehe Satz 6.3 in Meise und Vogt (1992). □

Das Hahn-Banach Theorem dient nun zum Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 1.4.6.** *$r : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sei ein positiv homogenes und subadditives Risikomaß. Dann gilt:*

$$r(L) = \max\{h(L) | h \in H_r\} \qquad \text{für alle } L \in \mathcal{M}.$$

*Beweis.* $\mathcal{M}_Y$ sei der von $Y \in \mathcal{M}$ erzeugte, lineare Unterraum von $\mathcal{M}$. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $f_Y$ auf $\mathcal{M}_Y$ definiert durch $f_Y(aY) := ar(Y)$. Wegen der Subadditivität des Risikomaßes gilt $r(Y) + r(-Y) \geq r(0) = 0$. Somit gilt also $r(-Y) \geq -r(Y)$. Da $r$ positiv homogen ist, gilt für $a \geq 0$:

$$f_Y(aY) = r(aY), \qquad f_Y(-aY) = -ar(Y) \leq ar(-Y) = r(-aY).$$

Somit gilt $f_Y \leq r$ auf $\mathcal{M}_Y$. Aus dem Hahn-Banach Theorem folgt dann, dass es ein Funktional $h_Y \in \mathcal{M}^*$ gibt mit

$$h_Y(L) = f_Y(L) \qquad \text{für alle } L \in \mathcal{M}_Y, \qquad h_Y(L) \leq r(L) \qquad \text{für alle } L \in \mathcal{M}.$$

Somit gilt $h_Y \in H_r$ mit $h_Y(Y) = r(Y)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Im Beweis des Satzes 1.4.6 wurde gezeigt, dass es zu jedem $Y \in \mathcal{M}$ ein Funktional $h_Y \in H_r$ gibt mit $h_Y(Y) = r(Y)$. Es wird nun gezeigt, dass dieses Funktional eine Kapital-Allokation darstellt.

**Satz 1.4.7.**

*(a) Existiert eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation $\Lambda$ bezüglich dem Risikomaß $r$, dann ist $r$ positiv homogen und subadditiv.*

*(b) Ist das Risikomaß $r$ positiv homogen und subadditiv, dann ist $\Lambda_r$, definiert durch $\Lambda_r(L, Y) := h_Y(L)$, eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation bezüglich $r$.*

*Beweis.* zu (a):

Für $a \geq 0$ und $L \in \mathcal{M}$ folgt aus der Linearität und der diversifizierenden Eigenschaft der Kapital-Allokation $\Lambda$:

$$a\Lambda(L, L) = \Lambda(aL, L) \leq \Lambda(aL, aL) = a\Lambda(L, aL) \leq a\Lambda(L, L).$$

Somit folgt die positive Homogenität von $r$, denn es gilt:

$$ar(L) = a\Lambda(L, L) = \Lambda(aL, aL) = r(aL).$$

Für $L$, $Y \in \mathcal{M}$ folgt die Subadditivität durch:

$$r(L+Y) = \Lambda(L, L+Y) + \Lambda(Y, L+Y) \leq \Lambda(L, L) + \Lambda(Y, Y) = r(L) + r(Y).$$

zu (b):

Im Beweis des Satzes 1.4.6 wurde gezeigt, dass es zu jedem $Y \in \mathcal{M}$ ein Funktional $h_Y \in \mathcal{M}^*$ gibt mit $h_Y(L) = f_Y(L)$ für alle $L \in \mathcal{M}_Y$ und $h_Y(L) \leq r(L)$ für alle $L \in \mathcal{M}$. Außerdem gilt $h_Y(Y) = r(Y)$. Betrachte $h_.(\cdot)$ als reelle, lineare Funktion auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Dann definiert $\Lambda_r(L, Y) := h_Y(L)$ eine lineare Kapital-Allokation bezüglich $r$, die überdies diversifizierend ist, denn es gilt

$$\Lambda_r(L, Y) := h_Y(L) \leq r(L) = h_L(L) =: \Lambda_r(L, L).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Im Folgenden wird nun noch gezeigt, wann die Kapital-Allokation $\Lambda_r$ stetig ist. In Satz 1.4.3 wurde bereits gezeigt, dass die Existenz der Ableitungen von $r$ an der Stelle $Y \in \mathcal{M}$ in sämtliche Richtungen $L \in \mathcal{M}$ eine notwendige Bedingung für die Stetigkeit von $\Lambda_r$ in $Y$ ist. Der folgende Satz zeigt, dass diese Bedingung sogar hinreichend ist.

**Satz 1.4.8.** *$r$ sei ein positiv homogenes und subadditives Risikomaß. Für $Y \in \mathcal{M}$ sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

*(a) $\Lambda_r$ ist stetig in $Y$, d.h. für alle $L \in \mathcal{M}$ gilt:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L) = \Lambda_r(L, Y).$$

*(b) Die Richtungsableitung*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(Y + \varepsilon L) - r(Y)}{\varepsilon}$$

*existiert für jedes $L \in \mathcal{M}$.*

*(c) Es existiert genau eine Funktion $h_Y \in H_r$ mit $h_Y(Y) = r(Y)$.*

*Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so gilt wegen Satz 1.4.7 (b) und Satz 1.4.3 für alle $L \in \mathcal{M}$:*

$$\Lambda_r(L, Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(Y + \varepsilon L) - r(Y)}{\varepsilon}.$$

*Beweis.* (a) → (b): Da $r$ ein positiv homogenes und subadditives Risikomaß ist, ist $\Lambda_r$ nach Satz 1.4.7 eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation bezüglich $r$. Nach (a) ist $\Lambda_r$ stetig in $Y$. Nach Satz 1.4.3 folgt somit (b). Außerdem folgt Gleichung (1.4.8).
(b) → (c): Im Beweis des Satzes 1.4.6 wurde gezeigt, dass es in der Situation des Satzes

1.4.8 zu jedem $Y \in \mathcal{M}$ ein $h_Y \in H_r$ gibt mit $h_Y(L) \leq r(L)$, $\forall L \in \mathcal{M}$, und $h_Y(Y) = r(Y)$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathcal{M}$ gilt also:

$$r(Y + \varepsilon L) - r(Y) \geq h_Y(Y + \varepsilon L) - h_Y(Y) = \varepsilon h_Y(L),$$

wobei die Gleichheit aus der Linearität von $h_Y$ folgt. Daraus folgt

$$\lim_{\varepsilon \nearrow 0} \frac{r(Y + \varepsilon L) - r(Y)}{\varepsilon} \leq h_Y(L) \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{r(Y + \varepsilon L) - r(Y)}{\varepsilon}.$$

Da nach (b) der Limes existiert, stimmen die beiden Limiten überein. $h_Y$ ist also eindeutig über den Limes festgelegt.
(c) $\rightarrow$ (a): Für $L \in \mathcal{M}$ gilt

$$r(Y) - r(-\varepsilon L) = r(Y + \varepsilon L - \varepsilon L) - r(-\varepsilon L) \leq r(Y + \varepsilon L) \leq r(Y) + r(\varepsilon L),$$

wobei die beiden Ungleichungen aus der Subadditivität des Risikomaßes folgen. Für den Limes gilt also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r(Y + \varepsilon L) = r(Y). \tag{1.10}$$

Im Beweis des Satzes 1.4.3 wurde gezeigt, dass für eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation $\Lambda_r$ für $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$

$$\Lambda_r(L, Y + \varepsilon L) \leq \Lambda_r(L, Y + \bar{\varepsilon} L)$$

gilt. Damit existieren auch die beiden Limiten

$$\lim_{\varepsilon \nearrow 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L) \text{ und } \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L).$$

$\mathcal{M}_{L,Y}$ sei der von $L$ und $Y$ erzeugte lineare Unterraum von $\mathcal{M}$. Die lineare Funktion $f : \mathcal{M}_{L,Y} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(\alpha Y + \beta L) := \alpha r(Y) + \beta \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L).$$

Aus (1.10) folgt für jedes $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(\alpha Y + \beta L) &= \alpha \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(Y + \varepsilon L, Y + \varepsilon L) + \beta \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(\alpha Y + \beta L, Y + \varepsilon L) + \alpha \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(\alpha Y + \beta L, Y + \varepsilon L) \\
&\leq r(\alpha Y + \beta L),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aus der Linearität und die Ungleichung aus der diversifizierenden Eigenschaft von $\Lambda_r$ folgt. Damit gilt also $f \leq r$ auf $\mathcal{M}_{L,Y}$. Aus dem Hahn-Banach Theorem folgt dann, dass es eine Funktion $h \in \mathcal{M}^*$ gibt mit

$$h(X) = f(X) \text{ für alle } X \in \mathcal{M}_{L,Y}, \qquad h(X) \leq f(X) \text{ für alle } X \in \mathcal{M}.$$

Da $Y \in \mathcal{M}_{L,Y}$, gilt $h(Y) = f(Y) = r(Y)$. Da nach (c) nur ein einziges Element in $H_r$ mit dieser Eigenschaft existiert, muss $h$ bereits dieses Element sein. Da die lineare Kapital-Allokation $\Lambda_r(\cdot, Y)$ dieselbe Eigenschaft erfüllt, ist diese durch $h$ festgelegt. Es gilt also

$$\Lambda_r(L,Y) = h(L) = f(L) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L).$$

$\Lambda_r(L,Y) = \lim_{\varepsilon \nearrow 0} \Lambda_r(L, Y + \varepsilon L)$ kann entsprechend gezeigt werden. Somit ist $\Lambda_r$ stetig in $Y$. □

Jetzt wird der Value-at-Risk eingeführt. Dieses ist ein in der Praxis weitverbreitetes Risikomaß. Weiter wird gezeigt, dass es aber nicht kohärent ist.

**Definition 1.4.9** (Value-at-Risk)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zuvallsvariable $L : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. $F_L$ sei die Verteilungsfunktion von $L$ (unter $P$). Der *Value-at-Risk* (VaR) zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ des betrachteten Portfolios ist dann definiert durch

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

VaR ist also ein Maß für das Risiko eines Portfolios. Es gibt den maximalen Verlust eines Portfolios an, der mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ nicht überschritten wird. Aber ist es auch kohärent? Aus Definition 1.4.9 folgt unmittelbar, dass VaR die Eigenschaft der Translationsinvarianz, der positiven Homogenität, und der Monotonie erfüllt. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass in der Regel die Eigenschaft der Subadditivität nicht erfüllt ist.

**Beispiel 1.4.10.** Portfolio A bestehe aus $n = 100$ Unternehmensanleihen hundert verschiedener Unternehmen. Der aktuelle Wert jeder einzelnen Anleihe sei 100, so dass der aktuelle Wert des Portfolios 10000 betrage. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum. Es wird der Zeitraum eines einzigen Jahres betrachtet. Die einhundert Anleihen haben die gleiche Auszahlungsstruktur. So zahlt die Anleihe $i \in 1, \ldots, n$ am Ende des Jahres 105 aus, sofern das Unternehmen $i$ innerhalb dieses einen Jahres nicht ausgefallen ist (angezeigt durch $I_i = 0$). Fällt das Unternehmen aber doch aus ($I_i = 1$), so gibt es am Ende des Jahres keine Auszahlung. $L_i : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sei die Zufallsgröße, die den durch Halten der Unternehmensanleihe $i$ entstandenen Verlust anzeigt. Es gilt:

$$L_i = 100 I_i - 5(1 - I_i) = 105 I_i - 5.$$

Dabei seien Unternehmensausfälle stochastisch unabhängig voneinander. Desweiteren haben alle Unternehmen das gleiche Rating, das einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 2%

entspricht. Die Familie $(L_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ sei also stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $P(L_i = -5) = 0.98$ und $P(L_i = 100) = 0.02$.
Portfolio B hingegen sei überhaupt nicht deversifiziert. Es bestehe aus $n = 100$ Unternehmensanleihen des selben Unternehmens. Der aktuelle Wert des Portfolios beträgt somit auch 10000. Nach ökonomischer Intuition sollte also das nicht diversifizierte Portfolio B mehr Risiko in sich tragen. Das Risikomaß VaR sollte demnach für Portfolio A kleiner als für Portfolio B sein. Der Verlust von Portfolio A ist gegeben durch die Zufallsgröße $L_A = \sum_{i=1}^{n} L_i$. Der Verlust von Portfolio B ist gegeben durch $L_B = 100L_1$.
Im Folgenden soll zunächst der Value-at-Risk zum Niveau $\alpha = 0.95$ von Portfolio A bestimmt werden. Es gilt:

$$L_A = \sum_{i=1}^{100} L_i = 105 \sum_{i=1}^{100} I_i - 500 = 105\tilde{L}_A - 500,$$

wobei $\tilde{L}_A = \sum_{i=1}^{100} I_i$ gelte. Somit gilt für den Value-at-Risk von Portfolio A Folgendes:

$$VaR_{0.95}(L_A) = 105VaR_{0.95}(\tilde{L}_A) - 500.$$

$\tilde{L}_A$ ist dabei binomialverteilt mit Parameter $n = 100$ und $p = 0.02$. Es gilt

$$\begin{aligned} P(\tilde{L}_A > 5) &= 1 - Bi_{n,p}(5) \approx 0.015 \leq 1 - 0.95 \text{ und} \\ P(\tilde{L}_A > 4) &= 1 - Bi_{n,p}(4) \approx 0.051 \nleq 1 - 0.95. \end{aligned}$$

Daraus folgt also $VaR_{0.95}(\tilde{L}_A) = 5$, und somit $VaR_{0.95}(L_A) = 525 - 500 = 25$.

Nun soll der Value-at-Risk zum Niveau $\alpha = 0.95$ von Portfolio B bestimmt werden. Es gilt:

$$L_B = 100L_1.$$

Somit gilt für den Value-at-Risk von Portfolio B Folgendes:

$$VaR_{0.95}(L_B) = 100VaR_{0.95}(L_1).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &P(L_1 > -5) = 0.02 \leq 1 - 0.95 \text{ und} \\ &P(L_1 > l) = 1 \nleq 1 - 0.95 \qquad \forall l < -5. \end{aligned}$$

Daraus folgt also $VaR_{0.95}(L_1) = -5$, und somit $VaR_{0.95}(L_B) = -500$. Für den Risikoprüfer wäre also selbst bei einer zusätzlichen Belastung des Portfolios für das Risiko im Portfolio ausreichend vorgesorgt. Somit verbraucht nach dem VaR-Risikomaß Portfolio A mehr Risiko-Kapital als Portfolio B. Dies widerspricht der ökonomischen Intuition, die einem diversifizierteren Portfolio weniger Risiko zusprechen würde.

*Bemerkung.* Beispiel 1.4.10 hat gezeigt, dass die Verwendung des VaR-Risikomaßes zu unsinnigen Ergebnissen führen kann. Außerdem ist das VaR-Risikomaß nicht kohärent. Für ein kohärentes Risikomaß würde nämlich Folgendes gelten:

$$r(L_A) = r\left(\sum_{i=1}^{100} L_i\right) \leq \sum_{i=1}^{100} r(L_i) = 100r(L_1) = r(100L_1) = r(L_B).$$

Trotz dieses Nachteils ist der VaR-Ansatz auch die Grundlage für die Ermittlung des ökonomischen Kapitals eines Portfolios. Dieses wird intern von Banken ermittelt, und zeigt an, wieviel Kapital die Bank entsprechend ihres Zielratings für unerwartete Ausfälle in ihrem Kreditportfolio bereithalten sollte. Insbesondere wird das ökonomische Kapital auf der Ebene einzelner Transaktionen zur Portfoliooptimierung genutzt.

**Definition 1.4.11** (Ökonomisches Kapital)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zuvallsvariable $L : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Das *ökonomische Kapital* (EC) zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ des betrachteten Portfolios ist dann definiert durch

$$EC_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) - \mathbb{E}[L].$$

*Bemerkung.* Das ökonomische Kapital $EC_\alpha(L)$ zum Niveau $\alpha$ eines Kreditportfolios lässt sich sehr einfach interpretieren: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ übersteigt der unerwartete Verlust des Portfolios innerhalb eines Jahres die Höhe $EC_\alpha(L)$. Diese Art der Interpretation ist irreführend, und erzeugt ein täuschendes Sicherheitsgefühl. In der Praxis wird die für die Berechnung von $EC_\alpha(L)$ benötigte Verlustverteilung $F_L$ über eine Monte-Carlo-Simulation auf Grundlage eines Bank-Internal-Models geschätzt. Zum einen besteht damit die Gefahr von Schätzfehlern aufgrund der Monte-Carlo-Simulation, zum anderen kann es sein, dass das Modell die realen Gegebenheiten nur unzureichend abbildet. Es liegt dabei in der Natur der Sache, dass Modelle die Wirklichkeit nur unzureichend einfangen. Nichtdestotrotz kommen diese Unzulänglichkeiten gerade bei sehr hohen Niveaus $\alpha$ zum Tragen. Weiterhin spielt in der obigen Interpretation des ökonomischen Kapitals etwa das Liquiditätsrisiko keine Rolle. Ein Markt, in dem der Handel von relativ großen Transaktionen einen starken Einfluss auf die Preise übt, oder in dem es schlichtweg nicht zum Handel kommt, da kein Marktteilnehmer etwa zu einem Kauf bereit ist, wird als illiquide bezeichnet. Das ökonomische Kapital eines Kreditportfolios berücksichtig keine Liquiditätskosten. Vielmehr wird das Liquiditätsrisiko gesondert betrachtet. Wenn davon die Rede ist, dass es mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ zu keinen unerwarteten Verlusten größer als $EC_\alpha(L)$ kommt, sollte man immer berücksichtigen, dass Verluste bedingt durch andere Risikoarten durchaus sehr viel größer ausfallen könnten. $EC_\alpha(L)$ sorgt hier nur für das isolierte Kreditrisiko vor.

Expected Shortfall ist ein zu VaR alternatives Risikomaß. Insbesondere erfüllt dieses die Forderung nach Subadditivität.

**Definition 1.4.12** (Expected Shortfall auf Portfoliolevel)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zuvallsvariable $L : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. $F_L$ sei die Verteilungsfunktion von $L$ (unter $P$). Der *Expected Shortfall* (ES) zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ auf Portfoliolevel ist dann definiert durch

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du.$$

*Bemerkung.* Der Unterschied zu VaR besteht also darin, dass nicht bloß das feste $\alpha$-Quantil von $F_L$ betrachtet wird. Stattdessen wird der Durchschnitt der VaRs zum Niveau $u \geq \alpha$ gebildet. Der Expected Shortfall kann als der erwartete Verlust des Kreditportfolios interpretiert werden, der eintritt, wenn der VaR überschritten wird.

Um zeigen zu können, dass Expected Shortfall ein kohärentes Risikomaß ist, wird zunächst noch folgendes Lemma benötigt.

**Lemma 1.4.13.** *$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $L_i : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sei eine Folge von stochastisch unabhängig, identisch verteilten Zufallsgrößen. $F_{L_i}$ sei die Verteilungsfunktion von $L_i$ (unter $P$). Die Folge kann als unendliche Simulation von Portfolioverlusten verstanden werden. Es gilt dann:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor n(1-\alpha) \rfloor} L_{i:n}}{\lfloor n(1-\alpha) \rfloor} = ES_\alpha(L_1) \qquad P\text{-fast sicher,}$$

*wobei $L_{1:n} \leq \ldots \leq L_{n:n}$ die $n$ nach Verlusthöhe sortierten Simulationen $L_1, \ldots, L_n$ sind. $\lfloor \cdot \rfloor$ meint dabei die unteren Gaußklammern.*

*Beweis.* Der Beweis wird in Propostion 4.1 von Tasche und Acerbi (2002) mit Hilfe von Theorem 3.1 von van Zwet (1980) geführt. □

**Satz 1.4.14.** *Expected Shortfall ist ein kohärentes Risikomaß.*

*Beweis.* Die Eigenschaft der Translationsinvarianz, der positiven Homogenität, und der Monotonie folgen leicht aus Definition 1.4.12. Die Subadditivität (vgl. Eigenschaft 2) ist noch zu zeigen. $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von stochastisch unabhängig, identisch verteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. $L_{1:n} \geq \ldots \geq L_{n:n}$ seien die $n$ nach Verlusthöhe sortierten Realisationen von $L_1, \ldots, L_n$. Für ein beliebiges $m$ mit $1 \leq m \leq n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} L_{i:n} = sup\{L_{i_1} + \ldots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n\}.$$

$(L_i, \tilde{L}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von stochastisch unabhängig, identisch verteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. $F$ sei die zwei-dimensionale Verteilungsfunktion von $(L_i, \tilde{L}_i)$ (unter $P$).

$(L+\tilde{L})_i := L_i + \tilde{L}_i$ gibt die Summe der beiden Zufallsgrößen an. $(L+\tilde{L})_{1:n} \geq \ldots \geq (L+\tilde{L})_{n:n}$ seien die $n$ nach Verlusthöhe sortierten Realisationen von $(L+\tilde{L})_1, \ldots, (L+\tilde{L})_n$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} (L+\tilde{L})_{i:n} &= sup\{(L+\tilde{L})_{i_1} + \ldots + (L+\tilde{L})_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n\} \\ &\leq sup\{L_{i_1} + \ldots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n\} \\ &\qquad + sup\{\tilde{L}_{i_1} + \ldots + \tilde{L}_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} L_{i:n} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{L}_{i:n}.\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.4.13 mit $m = \lfloor n(1-\alpha) \rfloor$ und für $n \to \infty$ folgt dann:

$$ES_\alpha(L_1 + \tilde{L}_1) \leq ES_\alpha(L_1) + ES_\alpha(\tilde{L}_1).$$

□

*Bemerkung.* Expected Shortfall ist also ein Risikomaß, das insbesondere Diversifizierungseffekte berücksichtigt.

Es soll eine Kapital-Allokation bezüglich $ES_\alpha$ angegeben werden. Dazu wird im nächsten Satz zunächst eine alternative Charakterisierung des Expected Shortfalls vorgenommen.

**Satz 1.4.15.** *$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zufallsvariable $L : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. $F_L$ sei die Verteilungsfunktion von $L$ (unter $P$). Für den Expected Shortfall zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ auf Portfoliolevel gilt dann*

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}(\mathbb{E}[L\mathbf{1}_{\{L > q_\alpha(L)\}}] + q_\alpha(L) \cdot (P(L \leq q_\alpha(L)) - \alpha)),$$

*wobei $q_\alpha(L)$ das kleinste $\alpha$-Quantil von $F_L$ sei, und damit gleich dem VaR zum Niveau $\alpha$ von $L$.*

*Beweis.* $U$ sei eine auf dem Einheitsintervall gleichverteilte Zufallsvariable, d.h. es gilt $P(U \leq u) = u$ mit $u \in (0,1)$. Die Zufallsvariable $Z$, definiert durch $Z(w) := q_{U(w)}(L)$, besitzt dann ebenfalls die Verteilungsfunktion $F_L$ (unter $P$). Da $u \mapsto q_u(L)$ monoton wachsend ist, gilt

$$\begin{aligned}\{U > \alpha\} &\subset \{Z > q_\alpha(L)\} \qquad \text{und} \\ \{U \leq \alpha\} \cap \{Z > q_\alpha(L)\} &\subset \{Z = q_\alpha(L)\}.\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\int_\alpha^1 q_u(L)du &= \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{U>\alpha\}}] \\ &= \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>q_\alpha(L)\}}] - \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{U\leq\alpha, Z>q_\alpha(L)\}}] \\ &= \mathbb{E}[L\mathbf{1}_{\{L>q_\alpha(L)\}}] + q_\alpha(L)\cdot(P(L\leq q_\alpha(L))-\alpha).\end{aligned}$$

Wird nun noch auf beiden Seiten durch $1-\alpha$ geteilt, folgt die Behauptung. □

**Satz 1.4.16.** *$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zufallsvariable $L : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Es existiert eine Menge $\mathcal{Q}$ $\sigma$-additiver Wahrscheinlichkeitsmaße mit*

$$ES_\alpha(L) = \max\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L] | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}.$$

*Beweis.* $ES_\alpha$ ist nach Satz 1.4.14 ein kohärentes Risikomaß, d.h. insbesondere positiv homogen und subadditiv. Nach Satz 1.4.7 ist $\Lambda_{ES_\alpha}$ eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation. Aus Theorem 2.3, 7 und 8 in Delbaen (2002) folgt dann die Behauptung. □

**Definition 1.4.17.** Definiere $\mathcal{Q}$ durch

$$\mathcal{Q} := \{\mathbb{Q}_L | L \in \mathcal{M}\}$$

mit

$$\frac{d\mathbb{Q}_L}{dP} := \frac{\mathbf{1}_{\{L>q_\alpha(L)\}} + \beta_L \mathbf{1}_{\{L=q_\alpha(L)\}}}{1-\alpha}$$

und

$$\beta_L := \frac{P(L\leq q_\alpha(L))-\alpha}{P(L=q_\alpha(L))}, \text{ falls } P(L=q_\alpha(L))>0.$$

Die Definition ist sinnvoll, da so das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}_L$ gerade so konstruiert ist, dass nach (1.4.15) und Satz 1.4.16

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_L}[L] = ES_\alpha(L) = \max\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L] | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}$$

erfüllt ist.

Eine Kapital-Allokation bezüglich des Risikomaßes $ES_\alpha$ könnte dann folgendermaßen aussehen:

**Satz 1.4.18.** *Sei $\alpha \in (0, 1)$. $\Lambda_{ES_\alpha}$, für $L$, $Y \in \mathcal{M}$ definiert durch*

$$\Lambda_{ES_\alpha}(L, Y) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_Y}[L] = \left(\int L\cdot\mathbf{1}_{\{Y>q_\alpha(Y)\}}dP + \beta_Y \int L\cdot\mathbf{1}_{\{Y=q_\alpha\}}dP\right)/(1-\alpha),$$

*ist eine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation bezüglich des Risikomaßes $ES_\alpha$.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.4.6 und 1.4.7. □

Statt das Risiko eines Kreditportfolios über den Expected Shortfall zu bestimmen, und dieses über die entsprechende Kapital-Allokation auf Transaktionslevel zu verteilen, wird von Finanzinstituten in der Regel das ökonomische Kapital zur Risikomessung genutzt. Grundlage dazu ist der Value-at-Risk, für den durch das Beispiel 1.4.10 gezeigt wurde, dass er kein subadditives Risikomaß darstellt. Die Diversifizierung eines Portfolios, von der im Allgemeinen ausgegangen wird, dass sie zur Verringerung des Risikos in einem Portfolio beiträgt, kann demnach zu einer Steigerung des Value-at-Risks führen. Der VaR-Ansatz gilt als Industriestandard. Im Folgenden soll deshalb dennoch eine mögliche Kapital-Allokation bezüglich des VaR angegeben werden. Nach Satz 1.4.7 kann es jedoch keine lineare, diversifizierende Kapital-Allokation bezüglich VaR geben. Es wurde aber bereits gezeigt, dass es eine solche Kapital-Allokation bezüglich Expected-Shortfall gibt. Banken ziehen sich auf diese zurück, um den Value-at-Risk zu allokieren:

**Definition 1.4.19** (VaR-Kapital-Allokation)**.** Sei $\alpha \in (0,1)$. Die *VaR-Kapital-Allokation* $\Lambda_{VaR_\alpha}(L,Y)$ auf das Unterportfolios $L \in \mathcal{M}$ eines Kreditportfolios $Y \in \mathcal{M}$ sei definiert durch

$$\Lambda_{VaR_\alpha}(L,Y) := \Lambda_{ES_{\tilde{\alpha}}}(L,Y)$$

mit $\tilde{\alpha} \in (0,1)$ so, dass

$$VaR_\alpha(Y) = ES_{\tilde{\alpha}}(Y) \tag{1.11}$$

gilt.

*Bemerkung.* Die VaR-Kapital-Allokation auf das Unterportfolio $L$ beantwortet die Frage, welches Risiko das Unterportfolio $L$ zum Gesamtrisiko beiträgt, wenn der Portfolioverlust $Y$ eine durch $VaR_{\tilde{\alpha}}(Y)$ vorgegebene unakzeptable Grenze überschreitet. Nach Satz 1.4.18 ist $\Lambda_{ES_{\tilde{\alpha}}}(L,Y)$ eine stetig, diversifizierende Kapital-Allokation bezüglich des Risikomaßes $ES_{\tilde{\alpha}}$. Außerdem stellt (1.11) sicher, dass das durch $\Lambda_{ES_{\tilde{\alpha}}}(\cdot,Y)$ allokierte Risiko von Unterportfolios in der Summe wieder dem Risiko des Portfolios $L$, gemessen durch $VaR_\alpha(Y)$, entspricht.

Eine Kapital-Allokation bezüglich des ökonomischen Kapitals kann dann folgendermaßen aussehen:

**Definition 1.4.20** (EC-Kapital-Allokation)**.** Sei $\alpha \in (0,1)$. Die *EC-Kapital-Allokation* $\Lambda_{EC_\alpha}(L,Y)$ auf das Unterportfolios $L \in \mathcal{M}$ eines Kreditportfolios $Y \in \mathcal{M}$ sei definiert durch

$$\Lambda_{EC_\alpha}(L,Y) := \Lambda_{VaR_\alpha}(L,Y) - \mathbb{E}[L],$$

wobei $\Lambda_{VaR_\alpha}(L,Y)$ der VaR-Kapitalbeitrag von $L$ in $Y$ sei.

# Kapitel 2

# Kalibrierung

Der Regulator verfolgt das Ziel Finanzinstitute so rubust zu machen, dass deren Ausfall äußerst unwahrscheinlich wird. Die verschiedenen Risiken, die zu einem solchen Ausfall führen können, richtig einzuschätzen, ist der Schlüssel, um dieses Ziel zu erreichen. Die vorliegende Arbeit beschäftig sich mit dem Risiko unerwartet hoher Kreditausfälle, die für eine Bank den Bankrott bedeuten können. Damit der Regulator, aber auch die Bank selbst, dieses Risiko richtig einschätzen kann, müssen die Gefahren innerhalb eines Kreditportfolios richtig erkannt werden. Diese Gefahren können etwa exorbitant hohe Kredite an einzelne Kreditnehmer sein. Diese besitzen vielleicht eine geringe Ausfallwahrscheinlichkeit, können aber Banken im Falle eines Ausfalls erheblichen Schaden zufügen. Aber auch moderat hohe Kredite an zahlreiche hochkorrelierte Kreditnehmer, stellen eine solche Gefahr dar. Läuft etwa der Sektor Automobilindustrie äußerst schlecht, so stehen nicht nur die Kredite an Daimler vor dem Ausfall, auch Kredite an Nissan Motors oder an zahlreiche kleinere Zulieferbetriebe sind gefährdet. Um diese zweite Gefahr der hohen Abhängigkeiten in bestimmten Sektoren in einem Kreditportfoliomodell angemessen abbilden zu können, werden Faktor-Modelle benutzt. In diesen bestimmen die systematischen Faktoren den Ability-to-Pay-Prozess zahlreicher Kreditnehmer. So könnte es einen systematischen Faktor Automobilindustrie geben, auf den sowohl Daimler, Nissan Motors, als auch Zulieferbetriebe stark gewichtet sind. Läuft dieser Faktor dann schlecht, stehen gleich zahlreiche Unternehmen vor dem Ausfall. Sowohl Bank-Internal-Modell als auch Regulator-Modell sind standardisierte Faktor-Modelle, wobei das Regulator-Modell aber nur einen einzigen Faktor zulässt. Eine passende Kalibrierung der Modelle, und damit die Festlegung der Abhängigkeitsstruktur von Rating-Migrationen bzw. Defaults, ist ein wesentlicher Bestandteil, um das Kreditrisiko einer Bank richtig abbilden zu können.
Um ihre internen Faktor-Modelle zu kalibrieren, benutzen Banken oft Equity-Daten. Diese stehen für zahlreiche Unternehmen zur Verfügung, kommen von liquiden Märkten und sind von guter Qualität. Equity-Korrelationen lassen sich also gut berechnen. Ihr Nachteil ist, dass sie viele Informationen enthalten, die nur wenig mit der Kreditwürdigkeit eines Unternehmens zu tun haben. Sie repräsentieren beispielsweise auch die Risikobereitschaft von Marktteilnehmern, oder werden durch die Geldpolitik von

Zentralbanken beeinflusst. Desweiteren sollte man sich bewusst sein, dass es bei der Kalibrierung von Faktor-Modellen letztendlich um die Kalibrierung von Ability-to-Pay-Prozessen geht. Grundlage der hier betrachteten Modelle ist das Modell von Merton, in dem ein Unternehmen ausfällt, wenn der Wert seiner Assets die Höhe seiner Verbindlichkeiten unterschreitet. Default-Korrelationen sind somit durch Ausfallwahrscheinlichkeiten und Asset-Korrelationen festgelegt. Im Gegensatz zu Equity-Zeitreihen liegen in der Realität aber Asset-Zeitreihen so nicht vor. Es stellt sich also die Frage, ob es überhaupt legitim ist, zur Kalibrierung anstatt der fehlenden Asset-Zeitreihen Equity-Zeitreihen zu benutzen. So ist man sich in der Wissenschaft über die Beantwortung dieser Frage noch uneinst. Bei historischen Rating- und Default-Daten hingegen stellt sich eine ähnliche Frage nicht. Sie beinhalten kaum Informationen, die nicht mit der Kreditwürdigkeit eines Unternehmens zusammenhängen. Da aber Unternehmensausfälle (speziell für Unternehmen guten Ratings) relativ selten sind, und sich auch das Rating eines Unternehmens meist nur nach längeren Zeiträumen ändert, müssen diese Daten aggregiert werden, um ein Faktor-Modell angemessen genau kalibrieren zu können. Dabei werden meist Daten von Unternehmen gleichen Ratings, gleicher Industrie oder mit Unternehmenssitz im gleichen Land aggregiert. Diese Art der Aggregation findet sich in Form der systematischen Faktoren in dem Bank-Internal-Modell bereits wieder. Es ist also nur konsequent für die Kalibrierung Rating- und Default-Daten zu nutzen. Aufgrund der relativ wenigen Rating- und Default-Daten genügt trotz der Aggregation die Qualität der Kalibrierung häufig nicht den Ansprüchen, weswegen Banken zur genauen Kalibrierung oft sowohl Equity-Daten als auch Rating-Daten nutzen. Da die exakte Kalibrierung des Bank-Internal-Modells jedoch nicht Ziel dieser Arbeit ist, die Kalibrierung lediglich der Motivation des erweiterten Bundesbank-Modells dient, werden im weiteren Verlauf ausschließlich Ergebnisse auf Rating- und Default-Daten basierend vorgestellt. Grundlage der Kalibrierung werden Schätzungen anhand der Maximum-Likelihood-Methode sein. Diese wird in Kapitel 2.1 kurz vorgestellt. Außerdem wird gezeigt, dass unter bestimmten Regularitätsbedingungen der Maximum-Likelihood-Schätzer gegen eine normalverteilte Zuvallsvariable konvergiert. Dieses Ergebnis ermöglicht es leicht etwa Konfidenzintervalle für die Schätzungen anzugeben, und in dem im Kapitel 3 betrachteten Bundesbank-Modell zu entscheiden, welche beobachtbaren Risikofaktoren nötig sind, um Kreditausfälle vollständig durch das Modell erklären zu können. In Kapitel 2.2 wird das Regulator-Modell mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode kalibriert, d.h. die Korrelationsparameter werden abhängig vom Rating der beobachteten Ausfälle geschätzt. Der Regulator gibt über (1.1) abhängig von der Ausfallwahrscheinlichkeit, und damit abhängig vom Rating, Korrelationsparameter vor. Diese Vorgabe kann anhand der geschätzten Parameter überprüft werden. In Kapitel 2.3 und 2.4 wird das Bank-Internal-Modell über Default-Daten und über Rating-Daten kalibriert. Die Korrelationsparameter werden je nach Datengrundlage um den Faktor Zwei voneinander abweichen. Dies wird das in Kapitel 3 vorgestellte Bundesbank-Modell motivieren, das Banken als internes Modell zur Bestimmung ihres ökonomischen Kapitals verwenden könnten, und gleichzeitig ein Vorschlag zur Verbesserung des Regulator-Modells darstellt.

## 2.1 Maximum-Likelihood-Methode

Die in diesem Kapitel vorgestellten Definitionen und Resultate stammen aus Kapitel 2 in Alsmeyer (2006), Anhang A.3 in McNeil et al. (2005) und Kapitel 10.1 in Casella und Berger (2002).

**Definition 2.1.1** (Maximum-Likelihood-Schätzer)**.** Es sei $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)}, (P_\theta^{(n)})_{\theta\in\Theta})$ ein durch $\nu$ dominiertes statistisches Experiment mit Dichten $f_\theta^{(n)} = \frac{dP_\theta^{(n)}}{d\nu}$. Gegeben den Beobachtungswert $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}^{(n)}$, wird die Abbildung $\mathbb{L}(\cdot \mid x) : \Theta \to [0, \infty)$, definiert durch

$$\mathbb{L}(\theta \mid x) = f_\theta^{(n)}(x),$$

als *Likelihood-Funktion* zum Beobachbachtungswert $x$ bezeichnet. Entsprechend heißt $l(\theta \mid x) = log(\mathbb{L}(\theta \mid x))$ *Log-Likelihood-Funktion* zum Beobachtungswert $x$.
Existiert zu $x$ ein Parameterwert $\hat{\theta}(x) \in \Theta$, für den $\mathbb{L}(\cdot \mid x)$ ein Maximum annimmt, so heißt $\hat{\theta}(x)$ *Maximum-Likelihood-Schätzer* (MLS) für $\theta$ auf der Basis von $x$. Existiert $\hat{\theta}(x)$ für $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-fast alle $x \in \mathfrak{X}^{(n)}$, so heißt die Funktion $\hat{\theta}$ einfach Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta$.

*Bemerkung.* Der Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta$ auf der Basis von $x$ bestimmt $\theta$ also so, dass die Beobachtung $x$ die größte Wahrscheinlichkeit zukommt. Die Beobachtung wird somit als typisch angesehen.

Es soll nun die Eigenschaft eines Schätzers betrachtet werden, effizient zu sein. Diese macht eine Aussage über die sogenannte asymptotische Varianz eines Schätzers. Man ist versucht, sich diese folgendermaßen vorzustellen:
Für eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $g_n : \mathfrak{X}^{(n)} \to \Theta$ ein Schätzer für $\theta$ auf dem Stichprobenraum $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ mit zugrundeliegendem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\theta^{(n)}$ sei, erscheint es zunächst sinnvoll, $\lim\limits_{n\to\infty} Var_\theta(g_n)$ als asymptotische Varianz anzunehmen. In vielen Fällen gilt jedoch $\lim\limits_{n\to\infty} Var_\theta(g_n) = 0$. Es braucht eine Folge von Konstanten $(k_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, um einen aussagekräftigen Grenzwert zu erhalten:

**Definition 2.1.2** (Limes der Varianz)**.** $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Schätzern für $\theta$, wobei jedes $g_n$ auf dem Stichprobenraum $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ mit zugrundeliegendem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\theta^{(n)}$ und $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Existiert eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $k_n \in \mathbb{R}$ so, dass für den Limes $\lim\limits_{n\to\infty} k_n Var_\theta(g_n) = \tau^2 < \infty$ gilt, so wird $\tau^2$ als *Limes der Varianz* von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

**Beispiel 2.1.3.** $X_1, \dots, X_n$ seien stochastisch unabhängige $N(\theta, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Der Schätzer $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g_n := \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} nVar_\theta(g_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{n}{n^2} Var_\theta(X_1) = \sigma^2$ der Limes der Varianz von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die folgende Definition führt die asymptotische Varianz ein, die den Fokus verstärkt auf die Wahrscheinlichkeit legt, mit der Schätzwerte abweichen.

**Definition 2.1.4** (Asymptotische Varianz)**.** $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Schätzern für $\theta$, wobei jedes $g_n$ auf dem Stichprobenraum $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ mit zugrundeliegendem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\theta^{(n)}$ und $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Existiert eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $k_n \in \mathbb{R}$ so, dass $k_n(g_n - \theta) \to N(0, \sigma^2)$ für $n \to \infty$ in Verteilung konvergiert, so wird $\sigma^2$ als *asymptotische Varianz* von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

*Bemerkung.* In den meisten Fällen, etwa beim arithmetischen Mittel in Beispiel 2.1.3, stimmt der Limes der Varianz einer Schätzerfolge mit der asymptotischen Varianz überein. Es gibt aber auch Fälle, etwa bei $g_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ analog zu Beispiel 2.1.3, bei denen der Limes der Varianz nicht existiert, die asymptotische Varianz aber sehr wohl existiert. Außerdem ist im Falle der Existenz der Limes der Varianz stets größer oder gleich der asymptotischen Varianz.

**Definition 2.1.5** (Asymptotische Effizienz)**.** $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Schätzern für $\theta$, wobei jedes $g_n$ auf dem Stichprobenraum $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ mit zugrundeliegendem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\theta^{(n)}$ und $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *asymptotisch effizient* für $\theta$, wenn $\sqrt{n}(g_n - \theta) \to N(0, \frac{1}{I(\theta)})$ für $n \to \infty$ in Verteilung konvergiert mit

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial\theta} log f_\theta(x) \right)^2 \right], \tag{2.1}$$

d.h. die asymptotische Varianz von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt die *Rao-Cramér-Schranke* $\frac{1}{I(\theta)}$ an. $I(\theta)$ wird dabei als *Fisher-Information* von $(P_\theta^{(n)})_{\theta\in\Theta}$ bezeichnet.

Im folgenden Theorem soll nun gezeigt werden, dass unter bestimmten Bedingungen, den so genannten Regularitätsbedingungen, jeder MLS asymptotisch effizient ist. Die Bedingungen sind eher technisch, und in den meisten Fällen erfüllt.

**Definition 2.1.6** (Regularitätsbedingungen)**.** Es sei $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)}, (P_\theta^{(n)})_{\theta\in\Theta})$ ein durch $\nu$ dominiertes statistisches Experiment mit Dichten $f_\theta^{(n)} = \frac{dP_\theta^{(n)}}{d\nu}$, wobei $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ . Der Zufallsvektor $X : (\Omega, \mathfrak{A}') \to (\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ gibt die Beobachtungen des statistischen Experimentes an. Die wahre der Beobachtung $X = x$ zugrundeliegende Verteilung sei $P_{\theta_0}^{(n)}$. Folgende Bedingungen werden als *Regularitätsbedingungen* bezeichnet:

(A1) Es gilt $X = (X_1, \ldots, X_n)$. $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}') \to (\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ sind dabei stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit $\frac{dP_\theta^{X_i}}{d\nu} = f_\theta$. Insbesondere gilt also $f_\theta^{(n)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$.

(A2) Der Parameter ist *identifizierbar*; d.h. es gilt:

$$\theta \neq \theta' \Rightarrow f_\theta(x) \neq f_{\theta'}(x).$$

(A3) Die Dichten $f_\theta(x)$ besitzen den gleichen Träger $supp(f_\theta) = \overline{\{x \in \mathfrak{X} | f_\theta(x) \neq 0\}}$ für alle $\theta \in \Theta$.

(A4) Der Parameterraum $\Theta$ enthält eine offene Menge, in der der wahre Parameter $\theta_0$ ein innerer Punkt ist.

(A5) Für jedes $x \in \mathfrak{X}$ ist die Dichte $f_\theta(x)$ dreifach nach $\theta$ differenzierbar. $f_\theta^{(3)}(x)$ ist stetig in $\theta$, und $\int_{x\in\mathfrak{X}} f_\theta(x)dx$ ist dreifach *unter dem Integral differenzierbar*. Einfache Differenzierbarkeit unter dem Integral meint dabei, dass Folgendes gilt:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{x\in\mathfrak{X}} f_\theta(x)dx = \int_{x\in\mathfrak{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x)dx.$$

(A6) Für jedes $\theta_1 \in \Theta$ existiert ein $c > 0$ und eine Funktion $M(x)$ (wobei beide von $\theta_1$ abhängen können) so, dass

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} log f_\theta(x)\right| \leq M(x) \ f\ddot{u}r\ alle\ x \in \mathfrak{X},\ \theta_1 - c < \theta < \theta_1 + c,$$

mit $\mathbb{E}_{\theta_1}[M(X)] < \infty$.

**Satz 2.1.7.** *Es sei $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)}, (P_\theta^{(n)})_{\theta\in\Theta})$ ein durch $\nu$ dominiertes statistisches Experiment mit Dichten $f_\theta^{(n)} = \frac{dP_\theta^{(n)}}{d\nu}$, wobei $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ . Der Zufallsvektor $X : (\Omega, \mathfrak{A}') \to (\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ gibt die Beobachtungen des statistischen Experimentes an. Die wahre der Beobachtung $X = x$ zugrundeliegende Verteilung sei $P_{\theta_0}^{(n)}$. Es gelten die Regularitätsbedingungen. $I(\theta)$ sei die Fisher-Information von $(P_\theta^{X_i})_{\theta\in\Theta}$. Dann gilt:*

$$I(\theta) = -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} log f_\theta(X_i)\right]. \tag{2.2}$$

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} log f_\theta(X_i)\right] &= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log f_\theta(X_i)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(X_i)}{f_\theta(X_i)}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_\theta(X_i)}{f_\theta(X_i)}\right] - \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log f_\theta(X_i)\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Betrachte nun den ersten Term:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f_\theta(X_i)}{f_\theta(X_i)}\right] &= \int_{\mathfrak{X}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f_\theta(x)dx\\ &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{\mathfrak{X}}f_\theta(x)dx\\ &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1)\\ &= 0,\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen auf Grund von (A5) in den Regularitätsbedingungen gilt. Daraus folgt die Behauptung. □

**Theorem 2.1.8** (Asymptotische Effizienz von MLS)**.** *Es sei $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)}, (P_\theta^{(n)})_{\theta\in\Theta})$ ein durch $\nu$ dominiertes statistisches Experiment mit Dichten $f_\theta^{(n)} = \frac{dP_\theta^{(n)}}{d\nu}$, wobei $\Theta \subseteq \mathbb{R}$. Der Zufallsvektor $X : (\Omega, \mathfrak{A}') \to (\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)})$ gibt die Beobachtungen des statistischen Experimentes an. $\hat\theta$ sei der MLS von $\theta$. Unter den Regularitätsbedingungen (A1)-(A6) gilt dann:*

$$\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right),\ n \to \infty,$$

*wobei $\frac{1}{I(\theta)}$ die Rao-Cramér-Schranke ist. $\hat\theta$ ist somit ein asymptotisch effizienter Schätzer für $\theta$.*

*Beweis.* Nach (A1) und Definition 2.1.1 gilt für die Log-Likelihood-Funktion $l(\theta|x) = log(\mathbb{L}(\theta|x)) = \sum_{i=1}^n log(f_\theta(x_i))$. Nach (A5) ist $l(\theta|x)$ dreifach nach $\theta$ differenzierbar. Die erste Ableitung soll nun am wahren Parameter $\theta_0$ nach einer Taylorreihe entwickelt werden:

$$l'(\theta|x) = l'(\theta_0|x) + (\theta-\theta_0)l''(\theta_0|x) + \ldots, \tag{2.3}$$

wobei nach (A6) die Terme höherer Ordnung ignoriert werden können. Wird in (2.3) nun für $\theta$ der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat\theta$ eingesetzt, so erhält man:

$$0 = l'(\theta_0|x) + (\hat\theta-\theta_0)l''(\theta_0|x) \tag{2.4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{n}(\hat\theta-\theta_0) = \sqrt{n}\frac{-l'(\theta_0|x)}{l''(\theta_0|x)} \tag{2.5}$$

$$= -\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}l'(\theta_0|x)}{\frac{1}{n}l''(\theta_0|x)}. \tag{2.6}$$

Für den Zähler $\frac{1}{\sqrt{n}}l'(\theta_0|x)$ in (2.6) gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}l'(\theta_0|x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta(x_i)}{f_\theta(x_i)} = \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n W_i(x), \tag{2.7}$$

mit $W_i := \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(X_i)}{f_\theta(X_i)}$.

Für den Erwartungswert von $W_i$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_0}[W_i] &= \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(X_i)}{f_\theta(X_i)}\right] \\
&= \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} f_{\theta_0}(x)dx \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathfrak{X}} f_{\theta_0}(x)dx \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}(1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit aus der Differenzierbarkeit unter dem Integral nach (A5) folgt.

Für die Varianz von $W_i$ gilt:

$$\begin{aligned}
Var_{\theta_0}(W_i) &= \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log(f_\theta(X_i))\right)^2\right] \\
&= I(\theta_0).
\end{aligned}$$

Nach (A1) sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Dies gilt dann auch für $W_1, \ldots, W_n$. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt dann:

$$\frac{\sum_{i=1}^n W_i}{\sqrt{nI(\theta_0)}} \xrightarrow{d} N(0,1), \qquad n \to \infty,$$

und somit

$$\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n W_i \xrightarrow{d} N(0, I(\theta_0)), \qquad n \to \infty. \tag{2.8}$$

Für den Nenner $-\frac{1}{n}l''(\theta_0|x)$ in (2.6) gilt:

$$-\frac{1}{n}l''(\theta_0|x) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x_i)}{f_\theta(x_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n W_i^2(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_\theta(x_i)}{f_\theta(x_i)}. \tag{2.9}$$

Für den Erwartungswert des ersten Terms in (2.9) gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i^2\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\theta_0}\left[W_i^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var_{\theta_0}(W_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\theta_0) \\
&= I(\theta_0).
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert des zweiten Terms in (2.9) gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_\theta(x_i)}{f_\theta(x_i)}\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_\theta(x_i)}{f_\theta(x_i)}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathfrak{X}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_{\theta_0}(x_i)dx_i \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{\mathfrak{X}} f_{\theta_0}(x_i)dx_i \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit aus der Differenzierbarkeit unter dem Integral nach (A5) folgt.

Nach dem Schwachen Gesetz der Großen Zahlen gilt dann:

$$-\frac{1}{n} l''(\theta_0|X) \xrightarrow{P} I(\theta_0), \qquad n \to \infty. \tag{2.10}$$

Aus (2.4), (2.8) und (2.10) folgt dann:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} Z/I(\theta_0), \qquad n \to \infty,$$

wobei $Z$ eine $N(0, I(\theta_0))$ -verteilte Zufallsvariable sei. $Z/I(\theta_0)$ ist somit $N(0, \frac{1}{I(\theta_0)})$ -verteilt. Daraus folgt die Behauptung.

□

*Bemerkung.* Ist ein Schätzer asymptotisch effizient, so ist dieser auch konsistent. Theorem 2.1.8 zeigt also auch, dass reguläre Maximum-Likelihood-Schätzer, d.h. solche, die die Regularitätsbedingungen erfüllen, konsistent sind. Für ein großes $n$ sollte also in diesem Fall der MLS $\hat{\theta}$ dem wahren Parameter $\theta_0$ sehr nahe kommen. Außerdem zeigt Theorem 2.1.8, dass für eine genügend große Anzahl $n$ von Beobachtungen $Var(\hat{\theta}) \approx 1/(nI(\theta)))$ entspricht. Die in diesem Abschnitt eingeführten Definitionen und Resultate gehen stets von einer ein-dimensionalen Parametermenge $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ aus. Dies muss nicht so sein, und wurde auch hier nur als Vereinfachung angenommen. Geht man indes von einer Parametermenge $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $p > 1$ aus, so führt dies zu einem dem Theorem 2.1.8 ähnlichen Resultat. So ist dann unter entsprechenden Regularitätsvoraussetzungen der MLS $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ von $\boldsymbol{\theta}$ asymptotisch effizient in dem Sinne, dass gilt:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} N_p\left(\mathbf{0}, \frac{1}{I(\boldsymbol{\theta})}\right), \; n \to \infty,$$

wobei $I(\boldsymbol{\theta})$ die *Fisher-Informations-Matrix* ist. Diese ist in Analogie zu (2.1) und(2.2) gegeben durch

$$I(\boldsymbol{\theta})_{i,j} = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i} log f_{\boldsymbol{\theta}}(x) \frac{\partial}{\partial\theta_j} log f_{\boldsymbol{\theta}}(x)\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} log f_{\boldsymbol{\theta}}(x)\right].$$

Für genügend großes $n$ gilt dann also:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N_p\left(\boldsymbol{\theta}, \frac{1}{nI(\boldsymbol{\theta})}\right). \tag{2.11}$$

$I(\boldsymbol{\theta})$ wird oft durch die *empirische Fisher-Informations-Matrix* $\bar{I}(\boldsymbol{\theta})$ approximiert mit

$$\bar{I}(\boldsymbol{\theta})_{i,j} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} log f_{\boldsymbol{\theta}}(x_k)$$

Nach dem Schwachen Gesetz der Großen Zahlen konvergiert $\bar{I}(\boldsymbol{\theta})_{i,j}$ gegen $I(\boldsymbol{\theta})_{i,j}$ in Wahrscheinlichkeit. (2.11) ermöglicht es Konfidenz-Intervalle für den MLS anzugeben. Für genügend großes $n$ gilt nämlich

$$Z := \frac{\hat{\theta}_j - \theta_j}{se(\hat{\theta}_j)} \sim N(0,1), \tag{2.12}$$

wobei $se(\hat{\theta}_j)$ der *asymptotische Standardfehler* sei, definiert durch

$$se(\hat{\theta}_j) = \sqrt{\frac{1}{n\bar{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{j,j}}}.$$

Gleichung (2.12) kann benutzt werden, um die Nullhypothese $H_0 : \theta_j = 0$ gegen die Alternative $H_1 : \theta_j \neq 0$ zu testen. Ein asymptotischer Test zum Niveau $\alpha$ lehnt dann $H_0$ ab, wenn $|Z| \geq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)$. Gegeben den Schätzwert und den asymptotischen Standardfehler, ist also das Niveau $\alpha$, zu dem die Nullhypothese $H_0$ gerade noch abgelehnt wird, gegeben durch:

$$\alpha = 2 - 2\Phi\left(\left|\frac{\hat{\theta}_j}{se(\hat{\theta}_j)}\right|\right). \tag{2.13}$$

Ein asymptotisches $100(1-\alpha)\%$- Konfidenzintervall $C(x) \subseteq \mathbb{R}$ für $\theta_j$ ist gegeben durch

$$C(x) = \left(\hat{\theta}_j - se(\hat{\theta}_j)\phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right), \hat{\theta}_j + se(\hat{\theta}_j)\phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)\right).$$

## 2.2 Regulator-Modell mit Default-Daten

An dieser Stelle sei angenommen, dass für die $n$ Kreditnehmer eines Kreditporfolios Default-Zeitreihen vorliegen. Diese decken die Zeitpunkte $t = 1, \ldots, s$ ab. Man stelle sich wieder Jahre vor. Zu Beginn des Jahres $t$ werden die $n$ Kreditnehmer in disjunkte Mengen unterteilt. Diese Mengen werden als Kohorten bezeichnet. $n^{(k)}(t)$ sei die Anzahl der Kreditnehmer, die sich zu Beginn des Jahres $t$ in Kohorte $k$ befinden. $d^{(k)}(t)$ sei die Anzahl der Kreditnehmer aus Kohorte $k$, die innerhalb des Jahres $t$ ausfallen. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Es wird angenommen, dass die Defaults des Jahres $t$ vollständig durch das Regulator-Modell $(\boldsymbol{\xi}(t), C, L(t))$ mit systematischen Faktor $\Psi(t)$ erklärt werden können, wobei $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))'$ der Vektor der Ability-to-Pay-Variablen zum Zeitpunkt $t$ sei. Außerdem wird davon ausgegangen, dass die Kreditnehmer einer Kohorte $k$ den selben Korrelationsparameter $R_k^2$ und die selbe Default-Threshold $c_{1,k} = \Phi^{-1}(p_k)$ teilen, wobei gelte:

$$p_k := \frac{1}{s}\sum_{t=1}^{s}\frac{d^{(k)}(t)}{n^{(k)}(t)}.$$

$p_k$ ist also die durchschnittliche Rate, mit der Kreditnehmer aus Kohorte $k$ innerhalb eines Jahres ausfallen. Nach Korollar 1.3.2 und Definition 1.1.3 folgt der Zufallsvektor $\boldsymbol{I}^{(k)}(t) = (I_{t^{(k)}(1)}, \ldots, I_{t^{(k)}(n^{(k)}(t))})'$, bedingt auf $\Psi(t) = \psi$, wobei $I_{t^{(k)}(i)} := \mathbf{1}_{\{\xi_{t^{(k)}(i)}(t) \leq c_{1,k}\}}$ der Default-Indikator des $i$-ten Kreditnehmers in der $k$-ten Kohorte des Jahres $t$ sei, einem identisch verteilten Bernoulli-Mixture-Modell mit bedingter Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_k(\psi)$, definiert durch:

$$\bar{p}_k(\psi) = \Phi\left(\frac{c_{1,k} - \sqrt{R_k^2}\psi}{\sqrt{1 - R_k^2}}\right). \tag{2.14}$$

$D^{(k)}(t) := \sum_{j=1}^{n^{(k)}(t)} I_{t^{(k)}(j)}$ gibt die Anzahl der Defaults in Kohorte $k$ innerhalb des Jahres $t$ an. Die Zufallsgrößen $D^{(k)}(1), \ldots, D^{(k)}(s)$, wie auch die systematischen Faktoren $\Psi(1), \ldots, \Psi(s)$, werden als stochastisch unabhängig (bzgl. P) angenommen. Bedingt auf $\Psi(t) = \psi$, ist $D^{(k)}(t)$ die Summe von $n^{(k)}(t)$ stochastisch unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen mit Parameter $\bar{p}_k(\psi)$, und damit eine binomische Zufallsvariable mit Parameter $\bar{p}_k(\psi)$. Wie in (1.1) gilt also für $d^{(k)}(t) \in \{0, 1, \ldots, n^{(k)}(t)\}$:

$$P\left(D^{(k)}(t) = d^{(k)}(t)\right) = \binom{n^{(k)}(t)}{d^{(k)}(t)} \int_{\mathbb{R}} \bar{p}_k(\psi)^{d^{(k)}(t)} (1 - \bar{p}_k(\psi))^{n^{(k)}(t) - d^{(k)}(t)} dN(\psi). \quad (2.15)$$

**Satz 2.2.1.** *Durch* $(\mathfrak{X}^{(s)}, \mathcal{P}(\mathfrak{X}^{(s)}), (P^{(s)}_{R^2_k})_{R^2_k \in [0,1]})$ *sei ein durch das Zählmaß* $\nu$ *dominiertes statistisches Modell definiert. Der Stichprobenraum* $\mathfrak{X}^{(s)}$ *sei dabei definiert durch*

$$\mathfrak{X}^{(s)} = \Big\{ \left(\left(n^{(k)}(1), d^{(k)}(1)\right), \ldots, \left(n^{(k)}(s), d^{(k)}(s)\right)\right) \mid n^{(k)}(t) \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ und } d^{(k)}(t) \in \left\{0, 1, \ldots, n^{(k)}(i)\right\} \text{ für alle } t \in \{1, \ldots, s\} \Big\}$$

*und* $\mathcal{P}(\mathfrak{X}^{(s)})$ *sei die Potenzmenge von* $\mathfrak{X}^{(s)}$. $P^{(s)}_{R^2_k}$ *sei definiert durch*

$$\frac{dP^{(s)}_{R^2_k}}{d\nu}(x) = \prod_{t=1}^{s} P(D^{(k)}(t) = d^{(k)}(t))$$

*mit* $P(D^{(k)}(t) = d^{(k)}(t))$ *wie in (2.15). Für die Log-Likelihood-Funktion* $l\left(R^2_k \mid x\right)$ *gilt dann:*

$$l\left(R^2_k \mid x\right) = \sum_{t=1}^{s} log(P(D^{(k)}(t) = d^{(k)}(t))).$$

*Beweis.* Ergibt sich sofort aus Definition 2.1.1. □

Kalkbrener und Onwunta (2009) untersuchen nach dieser Methode den S&P Datensatz CreditPro. Dieser besteht aus monatlichen Ratingdaten von 13,666 Unternehmen im Zeitraum Juli 1981 bis Juni 2009, wobei für die Unternehmen im Durchschnitt Daten über einen Zeitraum von zehn Jahren zur Verfügung stehen. Die betrachteten Unternehmen sind nach den $r = 8$ verschiedenen Ratingkategorien AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC und D bewertet. Außerdem ist jedes Unternehmen einem von dreizehn Industrie-Segmenten zugeordnet. Die betrachteten Kohorten sind die sieben Ratingkategorien, die nicht den Kreditausfall bedeuten. Bei Einführung der Kohorten wurde etwas salopp gesagt, dass diese zu Beginn eines Jahres gebildet werden. Was der Beginn eines Jahres genau meint, soll jetzt präzisiert werden. Der Beginn eines Jahres meint einen festgelegten Monat (der keinesfall der Monat Januar sein muss). Da die Schätzung des Korrelationsparameters $R_k^2$ maßgeblich von der Wahl des Beginns eines Jahres abhängt, werden zwölf Schätzungen durchgeführt, wobei in jeder dieser Schätzungen ein anderer Monat als Beginn eines Jahres gilt. Man erhält also zwölf verschiedene Schätzungen des Korrelationsparameters $R_k^2$ für Kohorte $k$ (etwa Rating-Kategorie A). Der Durchschnitt dieser zwölf Schätzungen dient dann der Kalibrierung des Modells. Die Ergebnisse der Untersuchung können in Tabelle 2.1 abgelesen werden, wobei die dort angegebenen Werte bereits den Durschnitten der zwölf Schätzungen ensprechen.

| Kohorte: | A (k=3) | BBB (k=4) | BB (k=5) | B (k=6) | CCC (k=7) | Durchschnitt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_k^2$ (in %): | 11.8 | 6.2 | 9.5 | 11.1 | 7.9 | 9.3 |

**Tabelle 2.1:** Maximum-Likelihood-Schätzung der rating-spezifischen Korrelationsparameter auf Grundlage des Datensatzes CreditPro für die Kalibrierung des Regulator-Modells.

Im verwendeten Datensatz sind die CCC-Kohorten sehr klein. Da aber verhältnismäßig viele Unternehmen dieser Kohorte im Jahresverlauf ausfallen, ermöglicht der Datensatz eine genügend zuverlässige Schätzung von $R_7^2$. Bei AAA- und AA-Kohorten hingegen fallen nur sehr wenige Unternehmen im Jahresverlauf aus. Die Schätzungen von $R_1^2$ und $R_2^2$ sind nicht zuverlässig genug, weshalb diese auch nicht in Tabelle 2.1 erfasst sind. In dem für die Basel II Richtlinien verwendeten Regulator-Modell ist der Korrelationsparameter von Unternehmen, Staaten und Banken als Funktion angenommen, die bei einem sich verschlechternden Rating fällt (vgl. (1.1)). Die Schätzungen in Tabelle 2.1 widersprechen dieser Annahme. In den Richtlinien des Regulators schwankt der Korrelationsparameter abhängig vom Rating zwischen 12% und 24%. Mit Blick auf die in 2.1 geschätzten Werte ist die Vorgabe des Regulators als eher konservativ anzusehen.

## 2.3 Bank-Internal-Modell mit Default-Daten

In den obigen Schätzungen ist bisher noch nicht eingeflossen, dass im Datensatz CreditPro jedes der 13,666 Unternehmen einem von dreizehn Industrie-Segmenten zugeordnet ist. Dies soll nun bei der Kalibrierung der Korellationsparameter eines Bank-Internal-Modells $(\boldsymbol{\xi}(t), C, L(t))$ genutzt werden. Der W'Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ liege dabei zugrunde und $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))'$ folge einem standardisierten 13-Faktor-Modell (vgl. Definition 1.2.1). Für die Abiltiy-to-Pay-Variable gilt also

$$\xi_i(t) = \beta_i \sum_{g=1}^{m} w_{i,g} \Psi_g(t) + \sqrt{1 - R_i^2}\varepsilon_i(t).$$

Für die Gewichte $\omega_{j,1}, \dots, \omega_{j,13}$ des Kreditnehmers $j$ in (2.3) gilt, dass $\omega_{j,i} = 1$, falls der Kreditnehmer $j$ zum Industrie-Segment $i$ gehört, $\omega_{j,i} = 0$, falls nicht. Es sollen dreizehn vom Rating unabhängige Korrelationsparameter $R_1, \dots, R_{13}$ geschätzt werden. Statt der sieben Rating-Kohorten, werden nun die dreizehn Industrie-Kohorten betrachtet. Um ähnlich wie in Satz 2.2.1 mit Hilfe von (2.15) schätzen zu können, werden zu jeder Industrie-Kohorte $i$ die sieben Unterkohorten $i_1, \dots, i_7$ betrachtet. In der Unterkohorte $i_k$ sammeln sich dann Unternehmen der Industie $i$, die zur Ratingkategorie $k$ gehören. Nach (2.15) gilt also für $d^{(i)}(t) \in \{0, 1, \dots, n^{(i)}(t)\}$:

$$P(D^{(i)}(t) = d^{(i)}(t)) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{7} \binom{n^{(i_k)}(t)}{d^{(i_k)}(t)} \bar{p}_{i_k}(\psi)^{d^{(i_k)}(t)} (1 - \bar{p}_{i_k}(\psi))^{n^{(i_k)}(t) - d^{(i_k)}(t)} dN(\psi),$$

wobei, wie in (2.14), die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_{i_k}(\psi)$ definiert ist durch:

$$\bar{p}_{i_k}(\psi) = \Phi\left(\frac{c_{i_k} - \sqrt{R_i^2}\psi}{\sqrt{1 - R_i^2}}\right)$$

mit Default-Threshold $c_{i_k} = N^{-1}(p_{i_k})$ und

$$p_{i_k} := \frac{1}{27} \sum_{t=1}^{27} \frac{d^{(i_k)}(t)}{n^{(i_k)}(t)}.$$

$p_{i_k}$ ist also die durchschnittliche Rate, mit der Unternehmen aus Industrie-Kohorte $i$ mit Rating $k$ innerhalb eines Jahres ausfallen. Analog zu Satz 2.2.1 gilt dann für die Log-Likelihood-Funktion $l(R_i^2 \mid x)$:

$$l(R_i^2 \mid x) = \sum_{t=1}^{27} log(P(D^{(i)}(t) = d^{(i)}(t))). \tag{2.16}$$

Diese kann numerisch, etwa nach der Newton-Raphsonschen Methode, nach $R_i^2$ maximiert werden. Die entsprechenden Ergebnisse von Kalkbrener und Onwunta (2009) können in Tabelle 2.2 abgelesen werden. Beim Vergleich der Tabellen 2.1 und 2.2 fällt auf, dass der durchschnittliche Wert der Korrelationsparamater bei Berücksichtigung der Industriezugehörigkeit deutlich höher ausfällt. Nach (1.8) gibt der Korrelationsparameter die Asset-Korrelation innerhalb einer Kohorte wieder. Eine sehr spezifische Bildung von Kohorten scheint also zu einem erhöhten Korrelationsparameter zu führen. Dabei erscheint die Industriezugehörigkeit spezifischere Informationen zu liefern als die Einordnung in eine Rating-Kohorte.

## 2.4 Bank-Internal-Modell mit Rating-Daten

Die bisherigen Schätzungen der Korrelationsparameter mit Hilfe der Log-Likelihood-Funktion in (2.16) basieren auf beobachteten Defaults. Damit wurden nicht alle Infor-

| Industrie $i$ | $R_i^2$ (in %) |
|---:|---:|
| Aerospace / Automotive: | 8.9 |
| Consumer / Service Sector: | 9.7 |
| Energy & Natural Resources: | 26.2 |
| Financial Institutions: | 15.8 |
| Forest & Building Products: | 17.1 |
| Health Care / Chemicals: | 11.3 |
| High Technology: | 17.7 |
| Insurance: | 10.3 |
| Leisure Time / Media: | 18.0 |
| Real Estate: | 51.0 |
| Telecommunications: | 31.1 |
| Transportation: | 11.2 |
| Utility: | 29.8 |
| Durchschnitt: | 19.8 |

**Tabelle 2.2:** Maximum-Likelihood-Schätzung der industrie-spezifischen Korrelationsparameter auf Grundlage des Datensatzes CreditPro für die Kalibrierung des Bank-Internal-Modells. Hier wurde nur die Default-Information verwendet.

mationen, die der Datensatz CreditPro liefert, vollständig ausgenutzt. Bei der folgenden Kalibrierung des Bank-Internal-Models sollen deshalb zusätzlich zu den beobachteten Defaults die Ratingmigrationen als Informationsquelle dienen. Insbesondere bei der Schätzung innerhalb guter Ratingkategorien sollte sich dieser Informationsgewinn besonders positiv auswirken, da bei guten Ratings in der Regel nur sehr wenige Defaults zu beobachten sind. Durch $(\boldsymbol{\xi}(t), C, L(t))$ auf dem W'Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein Bank-Internal-Modell definiert. Dabei folge $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ einem standardisierten 13-Faktor-Modell. Für die Gewichte $\omega_{\tau,1}, \ldots, \omega_{\tau,13}$ des Kreditnehmers $\tau$ in (2.3) gelte wieder $\omega_{\tau,i} = 1$, falls der Kreditnehmer $\tau$ zum Industrie-Segment $i$ gehört, $\omega_{\tau,i} = 0$, falls nicht. Es sollen dreizehn vom Rating unabhängige industrie-spezifische Korrelationsparameter $R_1, \ldots, R_{13}$ geschätzt werden. Ähnlich wie zuvor bei den Default-Daten werden zu Beginn eines Jahres $t$ die beobachteten Kreditnehmer in verschiedene Kohorten aufgeteilt. Es werden 13 Industrie-Kohorten mit jeweils sieben rating-spezifischen Unterkohorten betrachtet. $n^{(i_k)}(t)$ gibt dann wieder die Anzahl der Kreditnehmer an, die sich zu Beginn des Jahres $t$ in Unterkohorte $i_k$ befinden. $M^{(i_k)}(t) = (M_1^{(i_k)}(t), \ldots, M_r^{(i_k)}(t))$ ist der sogenannte *Rating-Vektor* der Kohorte $i_k$, wobei die Zufallsgröße $M_l^{(i_k)}(t)$ die Anzahl der Kreditnehmer aus Kohorte $i_k$ angibt, die am Ende des Jahres $t$ das Rating $l$ besitzen (d.h. zur Industrie $i$ gehören, und von Rating $k$ nach Rating $l$ migriert sind). Außerdem wird davon ausgegangen, dass die Kreditnehmer einer Kohorte $i_k$ die selben Thresholds

$c_{1,i_k}, \ldots, c_{r-1,i_k}$ teilen, wobei $c_{l,i_k} = N^{-1}(p_{i_k,l})$ mit

$$p_{i_k,l} := \frac{\sum_{t=1}^{s} m_l^{(i_k)}(t)}{\sum_{h=1}^{r} \sum_{t=1}^{s} m_h^{(i_k)}(t)}$$

gilt. $p_{i_k,l}$ ist die durchschnittliche Rate mit der Kreditnehmer aus Kohorte $i_k$ am Ende eines Jahres das Rating $l$ besitzen. Es gilt also $M_l^{(i_k)}(t) = \sum_{\tau=1}^{n^{(i_k)}(t)} I_{t^{(i_k)}(\tau),l}$ mit $I_{t^{(i_k)}(\tau),l} = \mathbf{1}_{\{c_{l,i_k} < \xi_{t^{(i_k)}(\tau)} \leq c_{l-1,i_k}\}}$. Analog zu Satz 1.3.1 folgt der Zufallsvektor $(I_{t^{(i_k)}(1),l}, \ldots, I_{t^{(i_k)}(n^{(i_k)}(t)),l})'$ dann, bedingt auf $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, einem Bernoulli-Mixture-Modell mit Parameter

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{i_k,l}(\boldsymbol{\psi}) = P(I_{t^{(i_k)}(\tau),l} = 1 \mid \mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) &= P\left(\varepsilon_\tau \leq \frac{c_{l-1,i_k} - \sqrt{R_i^2}\psi}{\sqrt{1-R_i^2}}\right) - P\left(\varepsilon_\tau \leq \frac{c_{l,i_k} - \sqrt{R_i^2}\psi}{\sqrt{1-R_i^2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{c_{l-1,i_k} - \sqrt{R_i^2}\psi}{\sqrt{1-R_i^2}}\right) - \Phi\left(\frac{c_{l,i_k} - \sqrt{R_i^2}\psi}{\sqrt{1-R_i^2}}\right) \\
&=: \tilde{p}_{i_k,l}(\psi),
\end{aligned}$$

wobei ein beliebiger Kreditnehmer $\tau$ aus Kohorte $i_k$ betrachtet worden ist. Bedingt auf $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}$, gilt dann für $j = (j_1, \ldots, j_r)$ mit $\sum_{l=1}^{r} j_l = n^{(i_k)}(t)$:

$$\begin{aligned}
P(M^{(i_k)}(t) = j \mid \mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) &= P(M^{(i_k)}(t) = j \mid \Psi_k = \psi) \\
&= \binom{n^{(i_k)}(t)}{j_1} \binom{n^{(i_k)}(t) - j_1}{j_2} \cdot \ldots \cdot \binom{j_r}{j_r} \prod_{l=1}^{r} \tilde{p}_{i_k,l}(\psi)^{j_l} \\
&= \frac{n^{(i_k)}(t)!}{(n^{(i_k)}(t) - j_1)!\, j_1!} \cdot \frac{(n^{(i_k)}(t) - j_1)!}{(n^{(i_k)}(t) - j_1 - j_2)!\, j_2!} \cdot \ldots \cdot 1 \prod_{l=1}^{r} \tilde{p}_{i_k,l}(\psi)^{j_l} \\
&= \frac{n^{(i_k)}(t)!}{\prod_{l=1}^{r} j_l!} \prod_{l=1}^{r} \tilde{p}_{i_k,l}(\psi)^{j_l}.
\end{aligned}$$

Die unbedingte Verteilung von $M^{(i_k)}(t)$ ist dann gegeben durch:

$$P(M^{(i_k)}(t) = j) = \frac{n^{(i_k)}(t)!}{\prod_{l=1}^{r} j_l!} \int_{\mathbb{R}^{13}} \prod_{l=1}^{r} \bar{p}_{i_k,l}(\boldsymbol{\psi})^{j_l} dN_{13}(\boldsymbol{\psi}),$$

wobei $N_{13}$ die 13-dimensionale Normalverteilung mit Erwarungswertvektor $\mathbf{0}$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ bezeichnet. Es wird nun analog zu Satz 2.2.1 eine Log-Likelihood-Funktion aufgestellt.

**Satz 2.4.1.** *Durch* $(\mathfrak{X}^{(s)}, \mathcal{P}(\mathfrak{X}^{(s)}), (P_{R_i^2}^{(s)})_{R_i^2 \in [0,1]})$ *sei ein durch das Zählmaß* $\nu$ *dominiertes* *statistisches Modell definiert. Der Stichprobenraum* $\mathfrak{X}^{(s)}$ *sei dabei definiert durch*

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}^{(s)} = \Big\{ \ \big(\big(n^{(i)}(1), m^{(i)}(1)\big), \ldots, \big(\big(n^{(i)}(s), m^{(i)}(s)\big)\big) \ \mid \ & n^{(i)}(t) = \big(n^{(i_1)}(t), \ldots, n^{(i_{r-1})}(t)\big) \in \\ & \{0,1,\ldots,n\}^{r-1} \ \textit{und} \\ & m^{(i)}(t) = \big(m^{(i_1)}(t), \ldots, m^{(i_{r-1})}\big) \ \textit{mit} \\ & m^{(i_k)}(t) = \Big(m_1^{(i_k)}(t), \ldots, m_r^{(i_k)}(t)\Big) \in \\ & \big\{0,1,\ldots,n^{(i_k)}(t)\big\}^r \ \textit{und} \\ & \sum_{l=1}^{r} m_l^{(i_k)}(t) = n^{(i_k)}(t) \ \textit{mit} \\ & \sum_{k=1}^{r-1} n^{(i_k)}(t) = \sum_{k=1}^{r-1} \big(n^{(i_k)}(t-1) \\ & -m_r^{(i_k)}(t-1)\big) \ \textit{und} \ \sum_{k=1}^{r-1} n^{(i_k)}(1) = n \\ & \textit{für alle } k \in \{1,\ldots,r-1\} \ \textit{und} \\ & t \in \{1,\ldots,s\} \ \Big\}\end{aligned}$$

*und* $\mathcal{P}(\mathfrak{X}^{(s)})$ *sei die Potenzmenge von* $\mathfrak{X}^{(s)}$. $P_{R_i^2}^{(s)}$ *sei definiert durch*

$$\frac{dP_{R_i^2}^{(s)}}{d\nu}(x) = \prod_{t=1}^{s}\prod_{k=1}^{r-1} P(M^{(i_k)}(t) = m^{(i_k)}(t))$$

*mit* $P(M^{(i_k)}(t) = m^{(i_k)}(t))$ *wie in (2.15). Für die Log-Likelihood-Funktion* $l\left(R_i^2 \mid x\right)$ *gilt dann:*

$$l\left(R_i^2 \mid x\right) = \sum_{t=1}^{s}\sum_{k=1}^{r-1} log(P(M^{(i_k)}(t) = m^{(i_k)}(t))). \tag{2.17}$$

*Beweis.* Ergibt sich sofort aus Definition 2.1.1. □

*Bemerkung.* Den Maximum-Likelihood-Schätzer für $R_i^2$ auf der Basis von $x$ erhält man, wenn (2.17) numerisch nach $R_i^2$ maximiert wird.

Die entsprechenden auf den Datensatz CreditPro basierenden Ergebnisse von Kalkbrener und Onwunta (2009) können in der zweiten Spalte von Tabelle 2.3 abgelesen werden. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, sind in der dritten Spalte nochmal die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 abgetragen, für deren Schätzung ausschließlich die Default-Information verwendet wurde. Es fällt auf, dass die auf Rating-Daten basierend geschätzten Korrelationsparamater im Durchschnitt halb so groß sind wie die in Kapitel 2.3 auf Default-Daten basierend geschätzten Korrelationsparameter.

| Industrie $i$ | $R_i^2$ (in %) Rating | Default |
|---|---|---|
| Aerospace / Automotive: | 5.5 | 8.9 |
| Consumer / Service Sector: | 3.0 | 9.7 |
| Energy & Natural Resources: | 11.4 | 26.2 |
| Financial Institutions: | 13.4 | 15.8 |
| Forest & Building Products: | 5.9 | 17.1 |
| Health Care / Chemicals: | 5.0 | 11.3 |
| High Technology: | 5.4 | 17.7 |
| Insurance: | 13.9 | 10.3 |
| Leisure Time / Media: | 9.8 | 18.0 |
| Real Estate: | 29.0 | 51.0 |
| Telecommunications: | 10.3 | 31.1 |
| Transportation: | 7.6 | 11.2 |
| Utility: | 6.1 | 29.8 |
| Durchschnitt: | 9.7 | 19.8 |

**Tabelle 2.3:** Maximum-Likelihood-Schätzung der industrie-spezifischen Korrelationsparameter auf Grundlage des Datensatzes CreditPro für die Kalibrierung des Bank-Internal-Modells. Die zweite Spalte gibt die Schätzungen unter Berücksichtigung der Migrationen an. Die dritte Spalte basiert ausschließlich auf der Default-Information.

## 2.5 Kritik

Damit Banken die Berechnungsformel für regulatorisches Kapital in (1.2) auf einfachem Wege verwenden können, wird der Korrelationsparameter $R^2$ über (1.1) regulatorisch festgelegt. Dabei ist $R^2$ umso höher, desto besser das Rating des betrachteten Kreditnehmers ist. $R^2$ liegt dabei stets zwischen 12% und 24%. Die wahren Asset-Korrelationen der Kreditnehmer eines bestimmten Ratings werden anscheinend nicht berücksichtigt. So widersprechen die in Tabelle 2.1 geschätzten Werte den regulatorischen Vorgaben.
Die Kalibrierung des Bank-Internal-Modells in Kapitel 2.3 hat gezeigt, dass Kreditnehmer einer Industrie-Kohorte höhere Asset-Korrelationen aufweisen als Kreditnehmer einer Rating-Kohorte. In den Vorgaben des Regulators spielt aber bei der Festlegung von $R^2$ die Industriezugehörigkeit keine Rolle.
Das Bank-Internal-Modell berücksichtigt die Information der Industriezugehörigkeit. Dennoch kommt es zu einem Phänomen, dass eine Erweiterung des Bank-Internal-Modells zum im Kapital 3 vorgestellten Bundesbank-Modell nötig macht. So sind die in Kapital 2.4 auf Rating-Daten basierend geschätzten Korrelationsparamater im Durchschnitt halb so groß wie die in Kapitel 2.3 auf Default-Daten basierend geschätzten Korrelationsparameter. Dieser vehemente Unterschied motiviert das im anschließenden Kapital vorgestellte Bundesbank-Modell. Kern der Überlegung ist, dass Default-Ereignisse im

Gegensatz zu Rating-Migrationen nicht durch Ratingagenturen beeinflussbar sind. Unabhängig von den Statuten einer Ratingagentur fällt ein Unternehmen aus, wenn es Konkurs anmeldet. Klar ist auch, dass in wirtschaftlich schlechten Zeiten Unternehmen vermehrt Konkurs anmelden müssen, als es in einer wirtschaftlichen Boomphase der Fall ist. Solche Phasen des wirtschaftlichen Aufschwungs oder Abschwungs halten in der Regel länger an als ein Jahr. In dem hier zur Schätzung angenommenen Bundesbank-Modell wird aber eine zeitliche Unabhängigkeit der systematischen Faktoren vorausgesetzt, d.h. $\mathbf{\Psi}(1), \ldots, \mathbf{\Psi}(27)$ sind stochastisch unabhängig (bzgl. P). Bei Rating-Migrationen hingegen zielen Rating-Agenturen oft darauf ab, Kreditnehmer *through-the-cycle*, d.h. losgelöst vom Wirtschaftszykel, zu bewerten. Untersuchungen haben zwar gezeigt, dass dieses Ziel oft nicht erreicht wird, und die kurzfristige Weltwirtschaftslage sehr wohl Anlass eines Up- bzw. Downgrades bietet. S&P etwa nimmt bereits offiziell Abstand vom reinen Through-The-Cycle-Ansatz. Dennoch versuchen Rating-Agenturen noch immer ihre Ratings nicht völlig von der aktuellen Weltwirtschaftlage abhängig zu machen. Es stellt sich also die Frage, ob das Bank-Internal-Modell so erweitert werden kann, dass der Wirtschaftszykel Berücksichtigung findet. Das nächste Kapitel beantwortet diese Frage.

# Kapitel 3

# Bundesbank-Modell

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie das Regulator-Modell bzw. das Bank-Internal-Modell erweitert werden kann, um der zeitlichen Abhängigkeit von Ability-to-Pay-Prozessen und Ausfallwahrscheinlichkeiten gerecht zu werden. Insbesondere berücksichtigt das Modell die zu dem jeweiligen Zeitpunkt aktuelle Information über den Stand des Wirtschaftszykels. Die Hoffnung ist, dass so der Unterschied zwischen der auf Default- und der auf Rating-Daten basierenden Kalibrierung reduziert werden kann. Kapitel 3.1 führt das Bundesbank-Modell ein. Dieses stellt eines um beobachtbare Risiko-Faktoren erweitertes Bank-Internal-Modell dar. In Kapitel 3.2 wird das ein-dimensionale Bundesbank-Modell kalibriert, d.h. der rating-spezifische Korrelationsparameter wird geschätzt. Außerdem wird ermittelt, welche beobachtbaren Risiko-Faktoren nötig sind, damit das Model die aufgetretenen Kreditausfälle vollständig erklärt.

## 3.1 Definition des Bundesbank-Modells

In einem Regulator-Modell $(\boldsymbol{\xi}(t), C, L(t))$ mit $n$ Kreditnehmern wird der Ability-to-Pay-Prozess insbesondere über eine standardnormalverteilte Zufallsgröße, dem systematischen Faktor $\Psi(t)$, modelliert. Nach Definition 1.2.1 gilt

$$\xi_i(t) = \sqrt{R_i^2}\Psi(t) + \sqrt{1 - R_i^2}\varepsilon_i(t), \tag{3.1}$$

wobei

$$\xi_i(t) = \frac{r_i(t) - \mu_i(t)}{\sigma_i}$$

mit $\mu_i(t) = E[r_i(t)]$ und $\sigma_i = Var(r_i(t))$. Für $r_i(t)$ gilt nach Definition 1.2.1:

$$r_i(t) = \mu_i(t) + \tilde{\beta}_i\Psi(t) + \tilde{\nu}_i\varepsilon_i(t).$$

Bei der Kalibrierung des Modells liegen keine Realisationen des systematischen Faktors, etwa in Form einer historischen Zeitreihe, vor. $\Psi(t)$ soll deshalb im weiteren Verlauf genauer als *latenter systematischer Faktor* bezeichnet werden. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kreditnehmers $i$, definiert durch

$$p_i = P(\xi_i(t) \leq c_{r-1,i}) = P\left(\frac{r_i(t) - \mu_i(t)}{\sigma_i} \leq c_{r-1,i}\right) = \Phi(c_{r-1,i}),$$

hängt insbesondere nicht vom Zeitpunkt $t$ ab, an dem der Ability-to-Pay-Prozess betrachtet wird. $\Phi$ bezeichnet dabei wie üblich die Standardnormalverteilung. Die Erweiterung zum Bundesbank-Modell wird nun nötig, wenn diese Annahme nicht mehr zu halten ist, d.h. die Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i$ sehr wohl zeitabhängig ist, namentlich im Sinne einer Abhängigkeit vom aktuellen Stand des Wirtschaftzykels. Um diese Abhängigkeit zu erreichen, muss die Default-Threshold $c_{r-1,i}$ genauer spezifiziert werden. Unterschreitet der Ability-to-Pay-Prozess $(\xi_i(t))_{t\in\mathbb{N}}$ die Default-Threshold $c_{r-1,i}$ zu einem gewissen Zeitpunkt $s$ zum ersten Mal, so fällt der Kreditnehmer $i$ im Zeitpunkt $s$ aus. $\alpha_{r-1,i}$ sei nun diejenige Schranke, unter die der entsprechende Return $r_i(s)$ liegen muss, um den Kreditnehmer $i$ ausfallen zu lassen. $\alpha_{r-1,i}$ sei als *Return-Default-Threshold* bezeichnet. Dies ermöglicht es nun eine zeitliche Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i$ zu spezifizieren:

$$p_i(t) = P(\xi_i(t) \leq c_{r-1,i}(t)) = P\left(\frac{r_i(t) - \mu_i(t)}{\sigma_i} \leq \frac{\alpha_{r-1,i} - \mu_i(t)}{\sigma_i}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha_{r-1,i} - \mu_i(t)}{\sigma_i}\right),$$

wobei $c_{r-1,i}(t)$ somit nun eine genauere Beschreibung der Default-Threshold $c_{r-1,i}$ darstellt. Indem bisher $c_{r-1,i}$ stets als zeitunabhängig vorgeben wurde, wurde implizit auch der erwartete Return $\mu_i(t)$ der Assets eines Kreditnehmers $i$ als zeitunabhänging angenommen, und damit $\mu_i(t) = \mu_i$ für alle $t$ vorausgesetzt. Da weiterhin der Asset-Prozess nicht beobachtet werden kann, und sich damit der Stand des Wirtschaftszykels ohne weitere Daten nicht angemessen im erwarteten Return $\mu_i(t)$ wiederspiegelt, müssen zusätzlich zum latenten systematischen Faktor sogenannte *beobachtbare Risiko-Faktoren* mit in das Modell einbezogen werden. $\boldsymbol{X}_i(t)$ bezeichnet dabei einen Vektor von idiosynkratischen, beobachtbaren Risiko-Faktoren, $\boldsymbol{Z}(t)$ bezeichnet einen Vektor von systematischen, beobachtbaren Risiko-Faktoren. Sie unterscheiden sich vom latenten systematischen Faktor dahingehend, dass sie beobachtet werden können, d.h. Realisierungen als historische Zeitreihen vorliegen. Diese voranstehenden Überlegungen motivieren die Einführung des Bundesbank-Modells, das eine Erweiterung des Bank-Internal-Modells darstellt:

**Definition 3.1.1** (Bundesbank-Modell)**.** $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei ein W'Raum. Der Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ folge einem standardisierten $m$-Faktor-Modell, wobei die Bedingung an die Returns in (1.5) erweitert wird zu:

$$r_i(t) = g_{0,i} + \boldsymbol{\gamma}'_{1,i}\boldsymbol{X}_i(t) + \boldsymbol{\gamma}'_{2,i}\boldsymbol{X}_{i,t-1} + \boldsymbol{g}'_{1,i}\boldsymbol{Z}(t) + \boldsymbol{g}'_{2,i}\boldsymbol{Z}_{t-1} + \tilde{\beta}_i \sum_{g=1}^{m} w_{i,g}\Psi_g(t) + \tilde{\nu}_i\varepsilon_i(t), \quad (3.2)$$

wobei $\boldsymbol{X}_i(t)$ der $l$-dimensionale von $i$ unabhängig verteilte Vektor von idiosynkratischen, beobachtbaren Risiko-Faktoren ist. $\boldsymbol{Z}(t)$ ist der $q$-dimensionale Vektor von systematischen, beobachtbaren Risiko-Faktoren. $\boldsymbol{X}_{i,t-1}$ bzw. $\boldsymbol{Z}_{t-1}$ bezeichnet dabei einen Vektor von vergangenen Realisationen des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}_i$ bzw. $\boldsymbol{Z}$. Der Index $t-1$ meint dabei beliebige Punkte in der Vergangenheit, also auch mehr als nur eine Periode aus der Vergangenheit. $g_{0,i}$, $\boldsymbol{\gamma}_{1,i}$, $\boldsymbol{\gamma}_{2,i}$, $\boldsymbol{g}_{1,i}$ und $\boldsymbol{g}_{2,i}$ seien geeignete Parameter. Desweiteren sei $A \in \mathbb{R}^{r\times n}$ eine Threshold-Matrix mit Einträgen $\alpha_{k,i}$ so, dass für jedes $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

$$-\infty = \alpha_{r,i} \leq \alpha_{r-1,i} \leq \ldots \leq \alpha_{1,i} \leq \alpha_{0,i} = \infty.$$

Der Portfolioverlust sei bestimmt über die Zufallsvariable $L(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$L(t) := \sum_{i=1}^{n} L_i(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r} l_{h,i} \cdot \mathbf{1}_{\left\{c_{h,i}(t) \,<\, \xi_i(t) \,\leq\, c_{h-1,i}(t)\right\}}$$

mit

$$c_{h,i}(t) = \frac{\alpha_{h,i} - \mu_i(t)}{\sigma_i}.$$

Dann wird durch $(\boldsymbol{\xi}(t), A, L(t), \boldsymbol{X}_i(t), \boldsymbol{Z}(t))$ ein *$m$-dimensionales Bundesbank-Modell* definiert.

*Bemerkung.* Im Gegensatz zum Bank-Internal-Modell ist nun der Erwartungswertvektor der Returns eindeutig als zeitabhängig charakterisiert, denn es gilt:

$$\mu_i(t) = E[r_i(t)] = g_{0,i} + \boldsymbol{\gamma}'_{1,i}E[\boldsymbol{X}_i(t)] + \boldsymbol{\gamma}'_{2,i}\boldsymbol{X}_{i,t-1} + \boldsymbol{g}'_{1,i}E[\boldsymbol{Z}(t)] + \boldsymbol{g}'_{2,i}\boldsymbol{Z}_{t-1}.$$

## 3.2 Kalibrierung mit Default-Daten

Hamerle und Liebig (2003) kalibrieren (3.1) und (3.2) eines ein-dimensionalen Bundesbank-Modells mit Hilfe eines S&P Default-Datensatzes, der die Jahre 1982 bis 1999 abdeckt. Kreditnehmer sind dabei stets durch ihr Rating ausgezeichnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit definiere den Vektor $\boldsymbol{W}_{i,t} := (\boldsymbol{X}_i(t), \boldsymbol{X}_{i,t-1}, \boldsymbol{Z}(t), \boldsymbol{Z}_{t-1})$ und $\boldsymbol{\delta}_i := (\boldsymbol{\gamma}_{1,i}, \boldsymbol{\gamma}_{2,i}, \boldsymbol{g}_{1,i}, \boldsymbol{g}_{2,i})$. Es wird angenommen, dass Kreditnehmer des gleichen Ratings $k$ homogen sind, d.h. sie teilen sich den gleichen Korrelationsparameter $R_k^2$, die gleichen Parameter $\tilde{\beta}_k$, $\tilde{\nu}_k$ und $\boldsymbol{\delta}_k$, besitzten den gleichen Erwartungswert des Asset-Returns $\mu_k(t)$, die gleiche Varianz $\sigma_k$ und haben die gleiche Default-Threshold $c_{r-1,k}(t)$. Die Bedingung, Kreditnehmern einer Rating-Kohorte $k$ den gleichen erwarteten Asset-Return $\mu_k(t)$ und die gleiche Varianz $\sigma_k$ zukommen zu lassen, macht es nötig für $\boldsymbol{X}_i(t)$ eine von $i$ unabhängige Verteilung zu fordern. Analog zu Kapitel 2.2 wird die Log-Likelihood-Funktion $l\left(\sqrt{R_k^2}, \tilde{\alpha}_{r-1,k}, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_k \mid \left(\left(n^{(k)}(1), d^{(k)}(1)\right), \ldots, \left(n^{(k)}(18), d^{(k)}(18)\right)\right)\right)$ gleichzeitig nach $\sqrt{R_k^2}$, $\tilde{\alpha}_{0,k}$ und $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_k$ maximiert (vgl. Satz 2.2.1 und Gleichung (2.15)). Die Log-Likelihood-Funktion ist dabei definiert durch:

$$
\begin{aligned}
&l\left(\sqrt{R_k^2}, \tilde{\alpha}_{r-1,k}, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_k \mid \left(\left(n^{(k)}(1), d^{(k)}(1)\right), \ldots, \left(n^{(k)}(18), d^{(k)}(18)\right)\right)\right) \\
&= \sum_{t=1}^{18} log(P(D^{(k)}(t) = d^{(k)}(t)))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

mit

$$
P(D^{(k)}(t) = d^{(k)}(t)) = \binom{n^{(k)}(t)}{d^{(k)}(t)} \int_{\mathbb{R}} \bar{p}_k(\boldsymbol{\omega}_{i,t}, \psi)^{d^{(k)}(t)} (1 - \bar{p}_k(\boldsymbol{\omega}_{i,t}, \psi))^{n^{(k)}(t) - d^{(k)}(t)} dN(\psi)
$$

und

$$
\begin{aligned}
\bar{p}_k(\boldsymbol{\omega}_{i,t}, \psi) &= P(\xi_i(t) \leq c_{r-1,k}(t) \mid \boldsymbol{W}_{i,t} = \boldsymbol{\omega}_{i,t}, \Psi(t) = \psi) \\
&= P\left(\frac{r_i(t) - (g_{0,k} + \boldsymbol{\delta}_k' \boldsymbol{W}_{i,t})}{\sigma_k} \leq \frac{\alpha_{r-1,k} - (g_{0,k} + \boldsymbol{\delta}_k' \boldsymbol{W}_{i,t})}{\sigma_k} \mid \boldsymbol{W}_{i,t} = \boldsymbol{\omega}_{i,t}, \Psi(t) = \psi\right) \\
&= P\left(\frac{\tilde{\beta}_k \Psi(t) + \tilde{\nu}_k \varepsilon_i(t)}{\sigma_k} \leq \frac{\alpha_{r-1,k} - (g_{0,k} + \boldsymbol{\delta}_k' \boldsymbol{W}_{i,t})}{\sigma_k} \mid \boldsymbol{W}_{i,t} = \boldsymbol{\omega}_{i,t}, \Psi(t) = \psi\right) \\
&= P\left(\varepsilon_i(t) \leq \left(\frac{\alpha_{r-1,k} - (g_{0,k} + \boldsymbol{\delta}_k' \boldsymbol{W}_{i,t})}{\sigma_k} - \frac{\tilde{\beta}_k}{\sigma_k}\Psi(t)\right) \Big/ \frac{\tilde{\nu}_k}{\sigma_k} \mid \boldsymbol{W}_{i,t} = \boldsymbol{\omega}_{i,t}, \Psi(t) = \psi\right) \\
&= \Phi\left(\left(\frac{\alpha_{r-1,k} - (g_{0,k} + \boldsymbol{\delta}_k' \boldsymbol{\omega}_{i,t})}{\sigma_k} \Big/ \frac{\tilde{\nu}_k}{\sigma_k}\right) - \frac{\sqrt{R_k^2}}{\sqrt{1 - R_k^2}}\psi\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\alpha_{r-1,k} - g_{0,k}}{\tilde{\nu}_k} - \frac{\boldsymbol{\delta}_k' \boldsymbol{\omega}_{i,t}}{\tilde{\nu}_k} - \frac{\sqrt{R_k^2}}{\sqrt{1 - R_k^2}}\psi\right) \\
&= \Phi\left(\tilde{\alpha}_{r-1,k} + \tilde{\boldsymbol{\delta}}_k' \boldsymbol{\omega}_{i,t} - \frac{\sqrt{R_k^2}}{\sqrt{1 - R_k^2}}\psi\right),
\end{aligned}
$$

wobei $\tilde{\alpha}_{r-1,k} = \frac{\alpha_{r-1,k} - g_{0,k}}{\tilde{\nu}_k}$ und $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_k = -\frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\tilde{\nu}_k}$ gelte. Die fünfte Gleichheit ergibt sich dabei aus (1.6). Da durch vorliegende Zeitreihen $\boldsymbol{\omega}_{i,t}$ bekannt ist, ist insbesonder die Form der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_k(\boldsymbol{\omega}_{i,t}, \psi)$ des Kreditnehmers $i$ mit Rating $k$ sinnvoll. Bei der Schätzung wird die Threshold $\tilde{\alpha}_{0,k}$ also direkt bei der Maximierung der Log-Likelihood-Funktion gewonnen. Zusätzliche idiosynkratische Risiko-Faktoren $\boldsymbol{X}_k(t)$ und $\boldsymbol{X}_{k,t-1}$ liegen dabei nicht vor, d.h. die Parameter $\gamma_{1,k}$ und $\gamma_{2,k}$ verschwinden jeweils. Als zusätzliche systematische Risiko-Faktoren dienen Daten des U.S. Census Bureau, der OECD und der Deutschen Bundesbank. Dabei handelt es sich um Datensätze über die Veränderung der Industrial Production und time-lagged Datensätze des Real Services Sector Value Added, der Federal Funds Rate und der Unemployment Rate (vgl. Tabelle 3.2). Die Industrial Production (oder Industrieproduktion) ist ein Maß für den Output des Industriesektors einer Volkswirtschaft. Industriesektor meint dabei die Fertigungsindustrie, den Bergbau und die Energiewirtschaft. Die Industrial Production reagiert besonders sensitiv auf Veränderungen der Zinsen und der Konsumentennachfrage. Real Services Sector Value Added ist die Differenz von Preisen und Kosten sowohl im Industriesektor als auch im Dienstleistungssektor. Die Federal Funds Rate ist der Zinssatz, zu dem sich US-amerikanische Banken kurzfristig gegenseitig Kredit geben, um den Mindestreserveanforderungen der Federal Reserve Bank gerecht zu werden. Die Veränderung der Federal Funds Rate schlägt sich mittelfristig auch auf die Kreditzinsen für Unternehmen nieder, und beeinflusst dadurch etwa Investitionsentscheidungen. Tabelle 3.1 zeigt zunächst das Ergebnis der Kalibrierung, wenn keine zusätzlichen Risiko-Faktoren in die Schätzung miteinbezogen werden. Die fünfte Spalte

| Rating $k$ | Parameter | Schätzung ($\hat{\theta}_j$) | Std.fehler ($se(\hat{\theta}_j)$) | Pr > \|t\| | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| alle Kreditnehmer | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.1978 | 0.03582 | <.0001 | <.0001 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k}$ | -2.2490 | 0.05177 | <.0001 | <.0001 |
| BB | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.2458 | 0.06908 | 0.0024 | 0.0004 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k}$ | -2.2894 | 0.08119 | <.0001 | <.0001 |
| B | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.2125 | 0.04358 | 0.0001 | <.0001 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k}$ | -1.6406 | 0.05870 | <.0001 | <.0001 |
| CCC | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.2636 | 0.08082 | 0.0046 | 0.0011 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k}$ | -0.8320 | 0.08512 | <.0001 | <.0001 |

**Tabelle 3.1:** Maximum-Likelihood-Schätzung der rating-spezifischen Parameter in einem Bundesbank-Modell mit verschwindenen zusätzlichen Risikofaktoren auf Grundlage eines S&P Default-Datensatzes, der die Jahre 1982 bis 1999 abdeckt.

($Pr > |t|$) gibt das Signifikanzniveau der Schätzung an, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der zu schätzende Parameter $\theta_j$ nicht von Null verschieden ist. Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 5% so spricht man gemeinhin von einem signifikant von Null verschiedenen Parameter $\theta_j$. Sowohl die Schätzung unter Berücksichtigung aller Kreditnehmer als auch die Schätzungen basierend auf vorgegebene Kreditrating-Kohorten weisen einen Parameter $\sqrt{R_k^2}$ auf, der signifikant von Null verschieden ist. Die Asset-

Korrelation $\rho_{ij}^A = Corr(\xi_i(t), \xi_j(t)) = R_k^2$ liegt zwischen 3.9% und 6.9%. Dabei ist die Asset-Korrelation von Kreditnehmern innerhalb einer beliebigen Rating-Kohorte deutlich höher als die Asset-Korrelation bei Berücksichtigung des gesamten Kreditportfolios. Dies ist sinnvoll, da sich in gewissen Rating-Kohorten vermehrt Unternehmen ähnlicher Art sammeln. So sind Finanzinstitute häufig mit einem sehr guten Rating ausgestattet. Die verborgenen Asset-Prozesse zwischen Finanzinstituten sind also vermutlich stärker korrelliert als etwa zwischen Finanzinstituten und kleineren Start-Ups, die eher einer schlechteren Rating-Kohorte zuzuordnen sind. Es sei an dieser Stelle noch einmal angemerkt, dass durch die Annahme des verschwindenden $\boldsymbol{\delta}_k$ die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_k(\boldsymbol{\omega}_{i,t}, \psi)$ eines Kreditnehmers $i$ als zeitunabängig, und damit als unabhängig vom Stand des Wirtschaftszykels angenommen wurde.
Hamerle und Liebig (2003) geben weder explizit an, welches Schätzverfahren ihrer Arbeit zugrundeliegt, noch wie das Signifikanzniveau $Pr > |t|$ ermittelt wurde. Es wird aber davon ausgegangen, dass die in (3.3) beschriebene Log-Likelihood-Funktion numerisch maximiert wurde. Legt man nämlich die in Kapitel 2.1 entwickelte Theorie über Maximum-Likelihood-Schätzer zugrunde, führt dies zu sehr ähnlichen Ergebnissen. So lässt sich aus der asymptotischen Effizienz des Maximum-Likelihood-Schätzers das Signifikanzniveau $\alpha$ der Schätzung über

$$\alpha = 2 - 2\Phi\left(\left|\frac{\hat{\theta}_j}{se(\hat{\theta}_j)}\right|\right)$$

approximieren (vgl. (2.13)). Tabelle 3.1 und später Tabelle 3.2 zeigen deutlich die Gemeinsamkeit von $\alpha$ und $Pr > |t|$. Es liegt also durchaus nahe von einer Maximum-Likelihood-Schätzung basierend auf einer (3.3) ähnlichen Log-Likelihood-Funktion auszugehen.

Tabelle 3.2 zeigt nun die Ergebnisse der Kalibrierung, wenn ausgewählte zusätzliche Risiko-Faktoren in die Schätzung miteinbezogen werden, und damit der Stand des Wirtschaftszykels berücksichtigt wird. Anhand der Schätzungen über alle Kreditnehmer in Tabelle 3.2 erkennt man, dass im Vergleich zum Regulator-Modell (vgl. Tabelle 3.1) durch das Bundesbank-Modell mit zwei zusätzlichen systematischen beobachtbaren Risiko-Faktoren der Paramter $\sqrt{R_k^2}$ von ungefähr 0.2 auf 0.1 reduziert werden konnte. Die Asset-Korrelation $\rho_{ij}^A = Corr(\xi_i(t), \xi_j(t)) = R_k^2$ reduziert sich somit von ungefähr 4% auf 1%. Da $\sqrt{R_k^2}$ aber weiterhin signifikant von 0 verschieden ist ($\alpha \leq 0.05$), erklären die beiden Risiko-Faktoren $DSER_2$ und $IND\_IP$, und damit der Stand des Wirtschaftszykel, die beobachteten Kreditausfälle nicht vollständig. Ein zufälliger Effekt bleibt über den latenten systematischen Faktor $\Psi(t)$ bestehen. Das gesamte Kreditportfolio scheint also nicht homogen genug, um allein von zwei beobachtbaren Risiko-Faktoren erklärt werden zu können. Basieren die Schätzungen hingegen auf eine vorgegebene Kreditrating-Kohorte, so zeigt Tabelle 3.2, dass gewisse systematische beobachtbare Risiko-Faktoren gefunden werden können, die die Kreditausfälle vollständig erklären.

| Rating $k$ | Parameter | Schätzung ($\hat{\theta}_j$) | Std.fehler ($se(\hat{\theta}_j)$) | Pr > \|t\| | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| alle Kreditnehmer | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.0967 | 0.02569 | 0.0017 | 0.0002 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k,t}$ | -2.2145 | 0.03461 | <.0001 | <.0001 |
| | $DSER_2$ | 0.0980 | 0.03337 | 0.0097 | 0.0033 |
| | $IND\_IP$ | -0.1733 | 0.03923 | 0.0004 | <.0001 |
| BB | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.0821 | 0.08969 | 0.3728 | 0.3600 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k,t}$ | -2.2529 | 0.05610 | <.0001 | <.0001 |
| | $FEDR_1$ | 0.2319 | 0.04779 | 0.0001 | <.0001 |
| B | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.0636 | 0.04410 | 0.1684 | 0.1493 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k,t}$ | -1.6025 | 0.03848 | <.0001 | <.0001 |
| | $UNEM_2$ | -0.0391 | 0.03655 | 0.3007 | 0.2847 |
| | $DSER_2$ | 0.0753 | 0.03935 | 0.0738 | 0.0557 |
| | $IND\_IP$ | -0.2155 | 0.04427 | 0.0002 | <.0001 |
| CCC | $\sqrt{R_k^2}$ | 0.0724 | 0.1485 | 0.6321 | 0.6259 |
| | $\tilde{\alpha}_{0,k,t}$ | -0.8569 | 0.05653 | <.0001 | <.0001 |
| | $UNEM_1$ | -0.2749 | 0.06705 | 0.0007 | 0.0004 |

**Tabelle 3.2:** Maximum-Likelihood-Schätzung der rating-spezifischen Parameter in einem Bundesbank-Modell auf Grundlage eines S&P Default-Datensatzes, der die Jahre 1982 bis 1999 abdeckt.
DSER: Prozentuale Veränderung von *Real Services Sector Value Added*
IND_IP: Veränderunge der *Industrial Production*
FEDR: *Federal Funds Rate*
UNEM: *Unemployment Rate*
1: einjahres Time-Lag
2: zweijahres Time-Lag

In jeder dieser so betrachteten Kohorten wurde das $\sqrt{R_k^2}$ im Vergleich zum Regulator-Modell (vgl. Tabele 3.1) reduziert, und ist insbesondere nicht mehr signifikant von Null verschieden ($\alpha > 0.05$). In Rating-Kohorte B werden drei zusätzliche Risiko-Faktoren benötigt, um dies zu erreichen. Zwei dieser Risiko-Faktoren sind time-lagged. Um also Kreditausfälle etwa in der nächsten Periode abschätzen zu können, muss lediglich der Stand des Risiko-Faktors $IND\_IP$ in der betrachteten Periode vorhergesagt werden. In Rating-Kohorte BB und CCC hingegen ist jeweils nur ein einziger zusätzlicher Risiko-Faktor vonnöten, um Defaults vollständig, also losgelöst von zufälligen Ereignissen, erklären zu können. Die notwendigen Risiko-Faktoren sind in dem Fall sogar time-lagged. Zeitnahe Vorhersagen von Defaults kommen für diese Rating-Kohorten also völlig ohne Simulationen bzw. Modellierung der zusätzlichen Risiko-Faktoren aus. Nach Tabelle 3.2 führt in Rating-Kohorte BB eine Steigerung der Federal Funds Rate zu einer Erhöhung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_k(\boldsymbol{\omega}_{i,t}, \psi)$. Die Schätzung erscheint somit sinnvoll, da höhere Funds Rates zu höheren Kreditzinsen führen können. Dies erschwert die Refinanzierung von Unternehmen, was vermehrte Ausfälle nachsichziehen kann. In Rating-Kohorte CCC führt eine erhöhte Arbeitslosenquote zu einer Verringerung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit. Dies kann dadurch erklärt werden, dass Firmen im Zuge von Rationalisierungsmaßnahmen Angestellte entlassen. Dies führt zu geringeren Kosten, und somit zu einer geringeren bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit. Außerdem führt ein Anstieg der Arbeitslosigkeit häufig zu einer verstärkten Investitionstätigkeit des Staates. Dies kann auch zur Verringerung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit beitragen.

Wie auch Hamerle und Liebig (2003) korrekt anmerken, dürfen die herangezogenen zusätzlichen Risiko-Faktoren lediglich als Vertreter der eigentlichen, verborgenen Mechanismen, die zu Unternehmensausfällen führen, verstanden werden. Es soll also keineswegs gesagt werden, dass etwa eine erhöhte Fund Rate tatsächlich für Unternehmensausfälle verantwortlich zeichnet. Die wahren Gründe des Ausfalls werden aber durch diese gut abgebildet. Die in diesem Kapitel stattgefundene Kalibrierung des Bundesbank-Modells in Abhängigkeit von unterschiedlichen Rating-Kohorten basiert auf dem Kreditportfolio, das dem hier verwendeten S&P Default-Datensatz zugrundeliegt. Damit fängt die Kalibrierung ausschließlich die Risikostruktur dieses zugrundeliegenden Kreditportfolios im Rahmen des verwendeten Modells optimal ein. Die Risikostruktur in Kreditportfolios von Banken kann eine ganz andere sein, die eine andere Kalibrierung nötig macht. Außerdem kann angezweifelt werden, ob die Verwendungen eines bloß ein-dimensionalen Bundesbank-Modells ausreichend ist, um die Risikostruktur eines Portfolios, und damit die Asset-Korrelationen, ausreichend beschreiben zu können. So wäre die Einbeziehung von Industriezugehörigkeiten, wie bei Kalkbrener und Onwunta (2009) (vgl. Kapitel 2.2), sicherlich hilfreich.

# Kapitel 4

# Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Banken und Regulator gleichermaßen haben ein Interesse daran, das Kreditrisiko von Transaktionen richtig einschätzen zu können. Der Regulator leitet dabei seine unter dem IRB-Approach in Basel II geltende Berechnungsformel für regulatorisches Kapital,

$$\begin{aligned} RC^{(\mathcal{P})} &= \sum_{i=1}^{n} RC_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} c \left( \mathrm{LGD}_i \mathrm{EAD}_i \phi \left( \frac{\phi^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i^2}\phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-R_i^2}} \right) - p_i \mathrm{LGD}_i \mathrm{EAD}_i \right), \end{aligned}$$

aus asymptotischen Aussagen über das Regulator-Modell ab. Dieses ist ein One-Factor-Threshold-Modell, welches Verluste nur in Folge von Defaults zulässt. Der Korrelationsparameter $R_i^2 \in (0.12, 0.24)$ wird regulatorisch als Funktion abhängig vom Rating vorgegeben (vgl. (1.1)). Innerhalb des Regulator-Modells kann dieser als Korrelation der den Marktteilnehmern mit gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit zugrundeliegenden Asset-Prozesse interpretiert werden. Nach Vorgaben des Regulators ist $R_i^2$ dabei umso größer, desto besser das Rating des betrachteten Kreditnehmers ist. Dies mag damit begründet werden, dass etwa Marktteilnehmer mit sehr guten Ratings starke Ähnlichkeit aufweisen. So besitzen viele Banken ein sehr gutes Rating. Folgt man dieser Argumentationsweise, so müssten sich in schlechten Rating-Klassen dagegen viele unterschiedliche Marktteilnehmer sammeln, deren Asset-Prozesse dann nicht mehr so stark korrelieren. Im Kapitel 2.2 wurden Korrelationsparameter mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode über Default-Daten geschätzt. Dies ermöglicht es, die Vorgaben des Regulators zu überprüfen. So zeigt Tabelle 2.1 Schätzungen von $R_i^2$ abhängig vom Rating auf Grundlage des Datensatzes CreditPro. Die Schätzungen widersprechen den Vorgaben des Regulators deutlich. So liegt $R_i^2$ im Durchschnitt bei 9.3%, und damit viel niedriger als vom Regulator angenommen. Außerdem findet sich der positive Zusammenhang zwischen Rating und Höhe des Korrelationsparameters nicht bestätigt.

In Satz 1.3.3 wurde gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen der erste Teil der Berechnungsformel für regulatorisches Kapital als 99.9%-Quantil der Portfolioverlustverteilung aufgefasst werden kann. Damit ist das regulatorische Kapital dem in Definition 1.4.11 eingeführten ökonomischen Kapital, welches gerade als Differenz zwischen $\alpha$-Quantil und Erwartungswert der Verlustverteilung definiert wurde, sehr ähnlich. Das ökonomische Kapital wird von Banken ermittelt, um intern das Kreditrisiko ihres Portfolios einschätzen zu können. $\alpha$ hängt dabei vom selbstbestimmten Zielrating der Bank ab. Die Deutsche Bank AG setzt sich zum Beispiel ein Zielrating von AA+. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit 0.02%, dass die Deutsche Bank innerhalb eines Jahres ausfällt (also $\alpha = 99.98$). Um Investoren Stärke zu vermitteln, aber auch um die Kosten einer Insolvenz zu vermeiden, setzen Banken sich in der Regel ein sehr gutes Zielrating. Um über das ökonomische Kapital das wahre im Portfolio liegende Risiko optimal einfangen zu können, versuchen Banken möglichst realitätsnah ihre Kreditportfolioverlustverteilung zu bestimmen. Statt das relativ einfache Regulator-Modell als Grundlage zur Ermittlung der Verlustverteilung zu verwenden, benutzen Banken deshalb oft „feinere“ Modelle, um Kreditausfälle zu simulieren. So ist das Bank-Internal-Modell eine Verallgemeinerung des Regulator-Modells. Für jenes kann es mehr als einen systematischen Faktor geben. Auch Verluste in Folge von Rating-Migrationen sind zugelassen. Tabelle 2.2 zeigt die entsprechenden Schätzungen der industrie-spezifischen Korrelationsparameter. Diese liegen im Durchschnitt bei 19.9%, und sind damit wesentlich höher als der Durchschnitt der geschätzten rating-spezifischen Korrelationsparameter. Eine Berücksichtigung der Industriezugehörigkeit bei den regulatorischen Vorgaben zu $R^2$ könnte also zu einer akurateren Kreditrisikoeinschätzung führen.

Bei der Kalibrierung des Bank-Internal-Modells kommt es zu dem Phänomen, dass jenachdem ob zusätlich zu den Default-Daten Rating-Migrationen bei den Schätzungen berücksichtigt werden, sich die jeweiligen Korrelationsparameter im Durchschnitt um den Faktor Zwei unterscheiden. Es wird vermutet, dass dies auf die fehlende zeitliche Abhängigkeit im Bank-Internal-Modell zurückzuführen ist. Während einer Rezession treten vermehrt Unternehmensausfälle auf als während einer wirtschaftlichen Boomphase. Die systematischen Faktoren können zwar dahin interpretiert werden, dass sie jeweils das wirtschaftliche Umfeld einer bestimmten Branche bewerten, dies geschieht aber stets für den Zeitraum eines Jahres. Insbesondere sind die systematischen Faktoren über die Zeit stochastisch unabhängig. Das heißt in einem Folgejahr kann der jeweilige systematische Faktor die wirtschaftliche Lage einer Branche schon wieder völlig gegenteilig bewerten. Wirtschaftszykel dauern aber wesentlich länger an als ein Jahr. Diese im Bank-Internal-Modell nicht berücksichtigte zeitliche Abhängigkeit vom Wirtschaftszykel resultiert in erhöhten Schätzungen der Korrelationsparameter. Werden hingegen Rating-Migrationen in die Schätzungen miteinbezogen, so relativiert sich dieser Effekt wieder. Ratingagenturen verfolgen häufig die Strategie Unternehem through-the-cycle, also losgelöst vom Wirtschaftszykel, zu bewerten. Entsprechende Schätzungen der Korrelationsparameter sollten demnach zu geringeren Werten führen. Um der zeitlichen Abhängigkeit vom

Wirtschaftszykel gerecht zu werden, wurde das Bank-Internal-Modell zum Bundesbank-Modell erweitert. In diesem fließt die Information über den Stand des Wirtschaftszykels über beobachtbare Risiko-Faktoren mit ein. Bei der Kalibrierung wird von einem Modell mit bloß einem latenten systematischen Faktor ausgegangen. Beobachtbare Risiko-Faktoren sind die Veränderung der Industrial Production und time-lagged Datensätze des Real Services Sector Value Added, der Federal Funds Rate und der Unemployment Rate. Sind die beobachtbaren Risiko-Faktoren dem Modell zugefügt, so führt dies zu wesentlich geringeren Schätzwerten für den rating-spezifischen Korrelationsparamter $R^2$. In manchen Fällen verschwindet der latente systematische Faktor sogar vollständig, so dass die aufgetretenen Kreditausfälle allein durch die beobachtbaren Risiko-Faktoren, und somit mit dem Stand des Wirtschaftszykels, erklärt werden können. Die Schätzungen in Kapitel 3 basieren auf Default-Daten. Da der eigentliche Datensatz nicht vorliegt, konnte nicht überprüft werden, ob Schätzungen basierend auf Rating-Daten zu ähnlich starken Abweichungen führen, wie es im Bank-Internal-Modell beobachtet wurde. Das Bundesbank-Modell stellt aber in jedem Fall eine Modellerweiterung dar, die zu einer realitätsnäheren Einschätzungen des Kreditrisikos führen sollte.

Als Konsequenz der im Jahre 2007 einsetzenden Wirtschafts- und Finanzkrise hat sich das unter Basel III (vgl. BCBS (2010)) bekannte Reformpaket für die bestehende Bankenregulierung entwickelt. Mit Übergangsregelungen haben Banken bis Ende 2019 Zeit, Basel III vollständig zu implementieren. Bis zum Jahr 2007 hatte sich bei den Banken zahlreicher Länder eine übermäßige Fremdfinanzierung aufgebaut. Gleichzeitig hatte sich die Höhe und Qualität des Eigenkapitals vieler Banken verringert. Auch das Liquiditätspolster war unzureichend angelegt, um die sich ergebenden Handels- und Kreditverluste aus dem Zusammenbruch des Subprime-Marktes in den USA absorbieren zu können. Die Krise wurde dadurch verschärft, dass Banken sich wegen Regulierungsanforderungen gezwungen sahen, Vermögenswerte zu verkaufen, um so das Verhältnis von Eigenkapital und Fremdfinanzierung stabil zu halten. Der Verkauf von Vermögenswerten führte zu einem Preisverfall, der eine Abwärtsspirale in Gang setzte. Aufgrund einer damit einhergehenden Austrocknung des Kreditangebots und der Systemrelevanz einzelner Kreditinstitute musste über die massive Zufuhr staatlicher Gelder die Krise abgewendet werden. Noch immer drohen dem Steuerzahler dadurch hohe Verluste. Um ein weiteres Engagement der öffentlichen Hand zu vermeiden, muss der Bankensektor durch strengere regulatorische Vorgaben robuster gemacht werden. Wesentlich dabei ist es, die Qualität der regulatorischen Eigenkapitalbasis zu verbessern, d.h. sie muss Ansprüchen der Liquidität und Werthaltigkeit gerecht werden. Eine übermäßige Fremdfinanzierung von Banken soll über eine Höchstverschuldungsquote verhindert werden. Diese bietet auch einen Schutz vor Modellrisiken. Weitere Vorschläge umfassen eine von Banken intern umgesetzte Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten, die aber unter der Bedingung eines wirtschaftlichen Abschwungs vorgenommen werden. Im Gespräch sind aber auch konjunkturabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten, die antizyklisch auf das benötigte regulatorische Kapital wirken könnten. So stiegen die Kapitalanforderungen bei übermäßigen Kreditwachstum, wären aber eher gering bei einer drohenden Kreditklemme. In Bezug auf die Ergebnisse dieser Arbeit, lässt sich eine unter Basel III vorgenommene Änderung ausmachen, die direkt den Korrelationsparamter $R^2$ betrifft. Der in (1.1) durch

$$R_i^2 = 0.12 \frac{1 - e^{-50 p_i}}{1 - e^{-50}} + 0.24 \left( 1 - \frac{1 - e^{-50 p_i}}{1 - e^{-50}} \right),$$

vom Regulator vorgegebene Korrelationsparameter wird nach Basel III mit dem Faktor 1.25 multipliziert, sofern der Marktteilnehmer $i$ ein Finanzinstitut ist. Damit reagiert der Regulator auf die Systemrelevanz von Banken, und unterstellt dabei, dass Kreditausfälle im Finansektor stärker miteinander korrelieren als Kreditausfälle von Marktteilnehmern anderer Art. Wünschenswert wäre jedoch eine Vorgabe an den Korrelationsparameter, bei der das Rating und die Industriezugehörigkeit eines Marktteilnehmers Einfluss auf die Korrelation nehmen, wobei die Aufteilung in Industrien feiner wäre, als bloß den Finanzsektor von allen anderen Industrien zu unterscheiden.

# Literaturverzeichnis


Alsmeyer, G. (2006). *Mathematische Statistik*. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 36. Institut für Mathematische Statistik, Fachbereich Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, Münster.

BCBS (2006). *Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen*, Kapitel 3, Seiten 58–135. BIS, Basel.

BCBS (2010). *Basel III: Ein globaler Regulierungsrahmen für widerstandsfähigere Banken und Bankensysteme*, Kapitel 1-5, Seiten 1–72. BIS, Basel.

Casella, G. und Berger, R. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury - Thomson Learning, Pacific Grove.

Delbaen, F. (2002). Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. In *Advances in Finance and Stochastics*, Seiten 1–37. Springer, Berlin.

Elizalde, A. und Repullo, R. (2007). Economic and Regulatory Capital in Banking: What is the Difference? *International Journal Of Central Banking*.

Falkenstein, E. (1997). Accounting for Economic and Regulatory Capital in RAROC Analysis. *Bank Accounting and Finance*.

FRBNY (1998). *Economy Policy Review*, Seiten 163–168. FRBNY, New York. Alan Greespan's speech regarding the role of capital in optimal banking supervision and regulation.

Frey, R., McNeil, A., und Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ. Concepts, techniques and tools.

Hamerle, A. und Liebig, T. (2003). Credit Risk Factor Modeling and the Basel II IRB Approach. *Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Supervision No 02/2003*.

Kalkbrener, M. (2005). An axiomatic approach to capital allocation. *Math. Finance*, 15(3):425–437.

Kalkbrener, M. und Onwunta, A. (2009). Validating Structural Credit Portfolio Models. *COMISEF WORKING PAPERS SERIES*.

McNeil, A., Frey, R., und Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ. Concepts, techniques and tools.

Meise, R. und Vogt, D. (1992). *Einführung in die Funktionalanalysis*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Merton, R. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance(29: 449-470)*.

Petrov, V. (1975). *Sums of Independent Random Variables*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Tasche, D. und Acerbi, C. (2002). On the coherence of Expected Shortfall. *International Journal Of Central Banking*.

van Zwet, W. (1980). A strong law for linear functions of order statistics. *Ann. Probab.*, 8(5):986–990.

Vondra, K. und Weiser, H. (2004). Basel II: Was wirklich hinter der Asset Return Correlation und ihren Auswirkungen auf die Prozyklizität steckt. *Working Papers des Bundesministeriums für Finanzen*.

# Erklärung der Urheberschaft

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form in keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum　　　　　　　　　　Unterschrift