

# **Kohärente Risikomaße zur Risikobewertung von Finanzportfolios**

**Diplomarbeit**  
**am Mathematischen Seminar**  
**der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel**

vorgelegt von  
**Claudia Teichert**

August 2001

Betreuer: Priv. Doz. Dr. V. Paulsen



Ich danke Herrn Priv. Doz. Dr. Volkert Paulsen für die vielen Anregungen und die intensive Betreuung.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Definition von Risiko und kohärenten Risikomaßen</b>	<b>3</b>
1.1	Risiko als Zufallsvariable . . . . .	3
1.1.1	Modellbildung . . . . .	3
1.1.2	Interpretation des Modells . . . . .	3
1.2	Risikomaße und annehmbare Mengen . . . . .	4
1.3	Kohärente Risikomaße . . . . .	5
1.3.1	Definition kohärenter Risikomaße . . . . .	5
1.3.6	Zusammenhang zu anderen Risikomaßen . . . . .	6
1.4	Kohärente Risikomaße und annehmbare Mengen . . . . .	8
1.5	Referenzinstrumente mit zufälligem Endwert . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Drei zur Zeit genutzte Risikomaße</b>	<b>13</b>
2.1	Begriffe aus der Finanzmarkttheorie . . . . .	13
2.2	SPAN . . . . .	14
2.2.1	Modell zur SPAN Berechnung . . . . .	14
2.3	Ein modellfreies Risikomaß: SEC . . . . .	17
2.3.2	Problem der SEC- Methode . . . . .	19
2.3.3	Risikobewertung über den maximalen Verlust . . . . .	19
2.4	Auf Quantilen basierende Risikomaße . . . . .	20
2.4.9	Value-at-Risk und Risikokonzentrationen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Darstellungstheoreme für kohärente Risikomaße</b>	<b>27</b>
3.1	Auf Szenarien basierende kohärente Risikomaße . . . . .	27
3.1.1	Darstellungssatz . . . . .	27
3.1.3	Anwendung bei Versicherungen . . . . .	29
3.1.5	Darstellungssatz bei zufälliger Referenzposition . . . . .	31
3.2	Erweiterung von Risikomaßen . . . . .	31
3.3	Risikomaße bei unterschiedlichen Risikoklassen . . . . .	37
3.4	Zusammenhang von kohärenten Risikomaßen und Preisbewertung . . . . .	40
3.4.6	Kohärente Risikomaße und Claimpreise . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Kohärente Risikomaße und Value-at-Risk</b>	<b>43</b>
4.1	Risikomaß der schlechtesten bedingten Erwartung . . . . .	43

<b>5</b>	<b>Risikomaße bei allgemeinerem Grundraum</b>	<b>49</b>
5.1	Präliminarien . . . . .	49
5.1.2	Satz von Hahn-Banach . . . . .	49
5.1.3	Fortsetzungssatz von Hahn-Banach . . . . .	49
5.2	Anwendung bei Risikomaßen . . . . .	50

# Einleitung

## Wie würden Sie sich entscheiden?

Stellen Sie sich vor, Sie wollen Ihr Kapital vermehren. Sie haben die Wahl zwischen zwei verschiedenen Wertpapieren, in die Sie investieren können. Beide Anlagemöglichkeiten liefern im Mittel den gleichen Ertrag, doch die Varianz des einen Wertpapiers ist größer als die des anderen. Intuitiv ist sofort klar, was in diesem Fall Risiko heißt:

Größere Varianz bedeutet größere Risiko.

Ist man also eher konservativ eingestellt, wird man sich für das erste Wertpapier entscheiden. Ist man hingegen risikofreudig und auf einen „schnellen“ Gewinn aus, wird man sich für die zweite Möglichkeit entscheiden.

Wie kann man Risiken messen?

Wenn man jeder Anlagemöglichkeit eine Zahl zuordnen kann, die ihr Risiko angibt, kann man anhand dieser Werte die Risiken der jeweiligen Positionen vergleichen. Häufig geschieht diese Zuordnung durch Berechnung des mittleren Verlustes. Dazu addiert man einen gewissen Anteil der Varianz. Ist  $X$  die betrachtete Position, so wird das Risiko z.B. durch

$$-E(X) + \alpha \cdot \sqrt{\text{Var}(X)}$$

berechnet, wobei  $\alpha > 0$  ist. Dieses Risikomaß ist aber nicht monoton, d.h. betrachtet man zwei Positionen, bei denen die erste immer einen höheren Gewinn erzielt als die zweite, die damit offensichtlich riskanter ist, so liefert dieses Risikomaß häufig für die zweite Position kein größeres Risiko (vgl. Abschnitt 1.3.6).

In dieser Arbeit wird eine spezielle Klasse von Risikomaßen vorgestellt, die als kohärente Risikomaße bezeichnet werden. Diese werden durch vier Eigenschaften definiert, die natürliche Anforderungen an ein Risikomaß darstellen (Abschnitt 1.3). Weiter werden die in der Praxis genutzten Risikomaße:

- die SPAN-Methode,
- die SEC-Regeln,
- die auf Quantilen basierende Value-at-Risk-Methode,

die ähnliche Eigenschaften wie kohärente Maße aufweisen, untersucht.

Die Value-at-Risk-Messung wird in der Praxis häufig verwendet, z.B. von Banken, weil sie einfach anzuwenden ist. Sie hat jedoch einen großen Nachteil, da sie nicht subadditiv ist, d.h. möchte man das Risiko seiner Gesamtposition abschätzen, kann man dies nicht tun, indem man das Risiko jeder einzelnen unterliegenden Position berechnet. Die Summe der einzelnen Risiken kann kleiner als das Gesamtrisiko sein.

Ähnliche Probleme treten auch bei den beiden anderen oben genannten Risikomaßen auf (Kapitel 2). Die Grundideen dieser Risikomaße werden aber benutzt, um spezielle kohärente Maße zu entwickeln (Kapitel 3). Die erzielten Ergebnisse werden im letzten Kapitel benutzt, um Risikomaße zu konstruieren, die verschiedene Risikoklassen, z.B. Kredit- und Marktrisiken, miteinander verbinden.



# Kapitel 1

## Definition von Risiko und kohärenten Risikomaßen

### 1.1 Risiko als Zufallsvariable

#### 1.1.1 Modellbildung

Sei  $\Omega$  eine endliche Menge. Die Elemente  $\omega \in \Omega$  heißen **states of nature**. Eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Risiko**.  $\mathcal{G}$  bezeichnet die Menge aller Risiken, d.h.

$$\mathcal{G} = \{G \mid G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Da  $\Omega$  endlich ist, folgt mit  $|\Omega| = n$

$$\mathcal{G} \cong \mathbb{R}^n.$$

Eine Abbildung  $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  wird als **Risikomaß** bezeichnet, außerdem werden zu jeder Zufallsgröße  $X \in \mathcal{G}$  die Zufallsvariablen  $X^+$  und  $X^-$  definiert durch

$$X^+ := \max(0, X) \quad \text{und} \quad X^- := \max(-X, 0).$$

Der Kegel<sup>1</sup> der nicht negativen Elemente in  $\mathcal{G}$  sei mit  $L_+$  bezeichnet, der der negativen entsprechend mit  $L_-$ .

Sei  $r \in \mathbb{R}$  die **total rate of return** einer risikofreien Anlage. Diese wird durch den Anfangspreis 1 und den echt positiven Preis  $r$  für jedes  $\omega \in \Omega$  am Ende der Periode modelliert.

#### 1.1.2 Interpretation des Modells

Betrachtet wird der zukünftige zufällige Nettoendwert einer jetzt gehaltenen Position nach *einer* Handelsperiode.

---

<sup>1</sup> $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Kegel, falls für  $x, y \in K, c > 0$  gilt

- (i)  $x + y \in K$ ,
- (ii)  $x \cdot c \in K$ .

- Da angenommen wird, daß nur endlich viele Werte möglich sind, wird  $\Omega$  als endlich vorausgesetzt.
- Der **Nettoendwert** einer Position ist für jedes  $\omega \in \Omega$  durch den Wert

$$X(\omega)$$

gegeben.

- Ist der Endwert immer positiv, ist die Position **risikolos**, ist er immer negativ, handelt es sich auf jeden Fall um eine **riskante Position**. Riskante Positionen können aber auch anders aussehen.
- Es wird angenommen, daß die möglichen Zustände bekannt sind, nicht aber ihre Verteilungen.
- Die Risikobewertung  $p(0) > 0$  kann als Risikokapital interpretiert werden, das in die risikofreie Anlage investiert werden muß, um den Ausgleich des Risikos der Position  $X$  herbeizuführen.
- Ist  $p(X) < 0$ , hat die Position  $X$  überschüssiges Risikokapital, das um  $p(X)$  verringert werden kann.

Die Bewertung eines Risikos, also einer Zufallsvariablen, durch einen reellen Wert bringt in natürlicher Weise einen Informationsverlust mit sich. Dies ist aber zwingend notwendig, um Risiken miteinander zu vergleichen. Auch kann dies zum Auffinden von versteckten Risiken benutzt werden, die ohne Risikobewertung nicht erkannt würden.

## 1.2 Risikomaße und annehmbare Mengen

### 1.2.1 Definition (annehmbare Mengen)

Eine Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$  heißt **annehmbaar**, falls sie die folgenden Axiome erfüllt.

$$(1.1) \quad L_+ \subseteq \mathcal{A},$$

$$(1.2) \quad L_{--} \cap \mathcal{A} = \emptyset \text{ mit } L_{--} := \{X \mid \forall \omega \in \Omega : X(\omega) < 0\}, \text{ dabei gilt } L_- \supseteq L_{--},$$

$$(1.3) \quad \mathcal{A} \text{ ist konvex, d.h. für alle } X, Y \in \mathcal{A} \text{ und } \lambda \in [0, 1] \text{ gilt: } \lambda \cdot X + (1 - \lambda) \cdot Y \in \mathcal{A}$$

$$(1.4) \quad \mathcal{A} \text{ ist ein positiver homogener Kegel } (X \equiv 0 \in \mathcal{A})$$

### 1.2.2 Bemerkung

Eine stärkere Forderung als Axiom (1.2) ist das Axiom

$$(1.2') \quad L_- \cap \mathcal{A} = \{0\},$$

denn  $(L_{--} \cap \mathcal{A}) = L_{--} \cap (L_- \cap \mathcal{A}) \stackrel{(1.2')}{=} L_{--} \cap \{0\} = \emptyset$ , d.h. aus Axiom (1.2') folgt Axiom (1.2).

### 1.2.3 Bemerkung

Eine annehmbare Menge  $\mathcal{A}$  hilft, Risiken abzuschätzen:

- Ist  $0 \leq X$ , so gilt  $X \in \mathcal{A}$ , und die betrachtete Position ist risikolos (Axiom 1.1).
- Ist  $0 \geq X$ , so gilt  $X \notin \mathcal{A}$ , und die betrachtete Position ist riskant (Axiom 1.2).

Ist die Position nicht annehmbar, so versucht man sie durch Investieren in risikofreie Anlagen (z.B. Bonds) geeignet abzuändern. Die laufenden Kosten für diese Investitionen sind ein gutes Maß für das Risiko der ursprünglich unannehmbaren Position.

#### 1.2.4 Definition (Risikomaß $\sim$ annehmbare Menge)

Sei die total rate of return  $r$  gegeben. Das **Risikomaß**, das durch die annehmbare Menge  $\mathcal{A}$  gegeben wird, ist die Abbildung  $p_{\mathcal{A},r} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p_{\mathcal{A},r}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \cdot r \in \mathcal{A}\}$$

#### 1.2.5 Bemerkung

Es gilt  $p_{\mathcal{A},r}(X) \in \mathbb{R}$  für alle  $X \in \mathcal{G}$ .

Beweis:

Sei  $X \in \mathcal{G}$ . Mit Hilfe von Axiom (1.2) folgt  $p_{\mathcal{A},r}(X) \neq -\infty$ . Da  $\Omega$  endlich ist, kann man

$$m = - \min_{\omega \in \Omega} \frac{X(\omega)}{r}$$

betrachten und erhält auch  $p_{\mathcal{A},r}(X) \neq \infty$ . □

#### 1.2.6 Definition (Annehmbare Menge $\sim$ Risikomaß)

Die durch ein Risikomaß  $p$  erzeugte Menge  $\mathcal{A}_p$  von annehmbaren Risiken ist definiert durch

$$\mathcal{A}_p = \{X \in \mathcal{G} \mid p(X) \leq 0\}.$$

Die Menge  $\mathcal{A}_p$  ist nicht annehmbar im Sinne der Definition 1.2.1, wird es aber unter gewissen Voraussetzungen, die in den nächsten Abschnitten behandelt werden (s. insb. Satz 1.4.2).

## 1.3 Kohärente Risikomaße

### 1.3.1 Definition (Kohärentes Risikomaß)

Ein Risikomaß  $p$  auf  $\mathcal{G}$  heißt **kohärent**, wenn es die folgenden Axiome erfüllt:

**T** Translation: Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathcal{G}$  gilt

$$p(X + \alpha \cdot r) = p(X) - \alpha.$$

**S** Subadditivität: Für alle  $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$  gilt

$$p(X_1 + X_2) \leq p(X_1) + p(X_2).$$

**PH** Positive Homogenität: Für alle  $\lambda \geq 0$  und alle  $X \in \mathcal{G}$  gilt

$$p(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot p(X).$$

**M** Monotonie: Für alle  $X, Y \in \mathcal{G}$  mit  $X \leq Y$  gilt

$$p(X) \geq p(Y)$$

### 1.3.2 Bemerkung (zum Axiom T)

Durch das Axiom T gilt

$$p(X + p(X) \cdot r) = 0 \quad \text{für alle } X \in \mathcal{G}.$$

Damit kann  $p(X)$  als Risikokapital interpretiert werden, das in die risikofreie Anlage investiert werden muß, um eine risikoneutrale Position zu erhalten.

### 1.3.3 Bemerkung (zum Axiom S)

- Das Axiom S erlaubt die Bewertung einer Gesamtposition durch die Bewertung von Einzelpositionen: Will eine Firma das Risiko für  $X_1 + X_2$  absichern, würde sie, falls Axiom S verletzt wäre, mit  $p(X_1) + p(X_2)$  zu wenig Risikokapital zurückhalten.
- Falls das Axiom S nicht gilt, könnte das Risiko einer Position durch bloße Aufteilung in Teilpositionen reduziert werden, was nicht sinnvoll ist.

### 1.3.4 Bemerkung (zum Axiom PH)

- Das Axiom PH liefert, daß das Risiko einer Position  $X$  proportional zum investierten Geld ist. Die positive Homogenität stellt

$$p(0) = 0$$

sicher.

- Beeinflußt die Positionsgröße das Risiko, d.h. sind Positionen z.B. so groß, daß die zu ihrer Liquidierung erforderliche Zeit von ihren Größen abhängt, muß man Liquiditätsprobleme bei der Berechnung des zukünftigen Wertes beachten.
- Die Axiome T und PH liefern

$$p(\alpha \cdot (-r)) = \alpha \quad \text{für jedes } \alpha.$$

Beweis:

Es gilt  $p(\alpha \cdot (-r)) = p(0 - \alpha \cdot r) \stackrel{\text{T}}{=} p(0) + \alpha = p(0 \cdot X) + \alpha \stackrel{\text{PH}}{=} 0 \cdot p(X) + \alpha = \alpha.$  □

### 1.3.5 Bemerkung (zum Axiom M)

Je größer der Nettoendwert ist, desto kleiner ist das Risiko der Position.

### 1.3.6 Zusammenhang zu anderen Risikomaßen

- Axiom M schließt das Risikomaß

$$p(X) = -E_P(X) + \alpha \cdot \sigma_P(X)$$

mit  $\alpha > 0$  und der Standardabweichung  $\sigma_P(X)$  von  $X$  unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ , d.h.  $\sigma_P(X) = \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{EX^2 - E^2X}$ , aus.

Beweis:

Betrachte  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\alpha = 1$  und definiere

$$X(\omega_1) = 1, Y(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = Y(\omega_2) = 0.$$

Dann ist  $X \leq Y$ . Definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $\Omega$  mit  $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$  und  $P(\{\omega_2\}) = \frac{3}{4}$ , so folgt

$$E_P(X) = 0,25, E_P(X^2) = 0,25, E_P(Y) = 0,5, E_P(Y^2) = 1, \\ E_P^2(X) = 0,06 \quad \text{und} \quad E_P^2(Y) = 0,25.$$

Damit gilt  $p(X) = 0,18 < 0,37 = p(Y)$  im Widerspruch zu Axiom M. □

- Axiom S schließt das „semi-variance“-Risikomaß aus:

$$p(X) = -E_P(X) + \sigma_P([X - E_P(X)]^-)$$

Beweis:

Betrachte  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$  und definiere

$$X(\omega_1) = 1, Y(\omega_1) = 0, X(\omega_2) = 0, \text{ sowie } Y(\omega_2) = 1.$$

Dann gilt  $(X+Y)(\omega_1) = 1 = (X+Y)(\omega_2)$ . Definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  durch  $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$  und  $P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$ , so folgt  $E_P(X) = 0,5, E_P(Y) = 0,5$  und  $E_P(X+Y) = 1$ . Setze

$$X_1 := [X - E_P(X)]^-, \quad Y_1 := [Y - E_P(Y)]^-.$$

Dann gilt  $X_1(\omega_1) = 0, Y_1(\omega_1) = 0,5, (X_1 + Y_1)(\omega_1) = 0, X_1(\omega_2) = 0,5, Y_1(\omega_2) = 0$  und  $(X_1 + Y_1)(\omega_2) = 0$ . Damit ist

$$E_P(X_1^2) = 0,125 \quad E_P(Y_1^2) = 0,125 \quad E_P((X_1 + Y_1)^2) = 1 \\ E_P^2(X_1) = 0,0625 \quad E_P^2(Y_1) = 0,0625 \quad E_P^2(X_1 + Y_1) = 0,$$

also folgt

$$p(X+Y) = 0 > -0,5 = -0,25 - 0,25 = p(X) + p(Y)$$

im Widerspruch zu Axiom S. □

### 1.3.7 Definition (Axiom R)

Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft für kohärente Risikomaße ist das folgende Axiom

**R** Für alle  $X \in \mathcal{G}$  mit  $X \leq 0, X \neq 0$  gilt

$$p(X) > 0.$$

Dieses Axiom liefert, daß eine Position mit strikt negativem Endwert als riskant erkannt wird, d.h. das Axiom ist notwendig, aber nicht hinreichend, um zu verhindern, daß Risiken nicht entdeckt werden.

### 1.3.8 Bemerkung

Ist  $\lambda > 0$  und erfüllt  $p$  die Axiome S, PH, M und R, so gilt dies auch  $p \cdot \lambda$ . Das gilt nicht für das Axiom T (da als Summand  $\lambda \cdot \alpha$  auftritt und nicht  $\alpha$ ).

## 1.4 Kohärente Risikomaße und annehmbare Mengen

### 1.4.1 Proposition

Erfüllt eine Menge  $B$  die Axiome (1.1),(1.2),(1.3) und (1.4), so ist das Risikomaß

$$p_{B,r} = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \cdot r \in B\}$$

kohärent, und außerdem gilt  $\mathcal{A}_{p_{B,r}} = \overline{B}$ .

Beweis:

Aufgrund der Bemerkung 1.2.5 ist  $p_{B,r}(X)$  endlich.

(T) Wegen

$$\begin{aligned} \inf\{p \mid X + (\alpha + p) \cdot r \in B\} &= \inf\{q - \alpha \mid X + (\alpha + q - \alpha) \cdot r \in B\} \\ &= \inf\{q - \alpha \mid X + q \cdot r \in B\} = \inf\{q \mid X + q \cdot r \in B\} - \alpha \end{aligned}$$

gilt  $p_{B,r}(X + r \cdot \alpha) = p(X) - \alpha$ . Damit erfüllt  $p_{B,r}$  das Axiom T.

(S) Sind  $X + m \cdot r$  und  $Y + n \cdot r \in B$ , so gilt aufgrund der Kegeleigenschaft  $X + Y + (m + n) \cdot r \in B$ .  
Damit folgt

$$p_{B,r}(X + Y) = \inf\{k \mid X + Y + k \cdot r \in B\} \leq m + n \leq p_{B,r}(X) + p_{B,r}(Y).$$

Damit erfüllt  $p_{B,r}$  das Axiom S.

(PH)

- Ist  $m > p_{B,r}(X)$ , so ist  $\lambda \cdot X + \lambda \cdot m \cdot r \in B$  für jedes  $\lambda > 0$ , denn mit Definition 1.2.4 gilt  $X + m \cdot r \in B$ , und mit Axiom (1.4) folgt  $\lambda \cdot (X + m \cdot r) \in B$ . Damit ist wiederum mit der Definition 1.2.4  $p_{B,r}(\lambda \cdot X) \leq \lambda \cdot m$ .
- Ist  $m < p_{B,r}(X)$ , so ist  $X + m \cdot r \notin B$ . Damit gilt  $\lambda \cdot X + \lambda \cdot m \cdot r \notin B$  für alle  $\lambda > 0$ , denn wäre  $\lambda \cdot X + \lambda \cdot m \cdot r \in B$ , so mit Axiom (1.4) auch

$$\frac{1}{\lambda} \cdot [\lambda \cdot X + \lambda \cdot m \cdot r] = X + m \cdot r \in B.$$

Es folgt  $p_{B,r}(\lambda \cdot X) > \lambda \cdot m$ . Insgesamt erfüllt  $p_{B,r}$  das Axiom PH.

(M) Ist  $X \leq Y$  und  $X + m \cdot r \in B$ , so folgt  $Y - X \geq 0$ . Mit Axiom (1.1) gilt dann  $Y - X \in B$ , und mit Axiom (1.3) folgt  $Y - X + (X + m \cdot r) \in B$ . Insgesamt gilt also

$$Y + m \cdot r \in B.$$

Damit folgt  $Y + m \cdot r \in B$  für alle  $m \in \mathbb{R}$  mit  $X + m \cdot r \in B$ , also

$$\{m \mid X + m \cdot r \in B\} \subseteq \{n \mid Y + n \cdot r \in B\}.$$

Mit Definition 1.2.4 erfüllt  $p_{B,r}$  das Axiom M.

Damit ist  $p_{B,r}$  kohärent.

„ $\supseteq$ “ Für jedes  $X \in B$  gilt  $p_{B,r}(X) \leq 0$ . Mit Def. 1.2.6 folgt

$$X \in \mathcal{A}_{p_{B,r}}.$$

Also gilt  $B \subseteq \mathcal{A}_{p_{B,r}}$ . Mit Proposition 1.4.2 und dem bereits Gezeigten folgt, daß  $\mathcal{A}_{p_{B,r}}$  abgeschlossen ist, also gilt  $\overline{B} \subseteq \mathcal{A}_{p_{B,r}}$ .

„ $\subseteq$ “ Ist andererseits  $X \in \mathcal{A}_{p_{B,r}}$ , so gilt  $p_{B,r}(X) \leq 0$ , also

$$M := \inf\{m : X + m \cdot r \in B\} \leq 0.$$

Da  $-M \cdot r \geq 0$  ist, gilt  $-M \cdot r \in L_+$ . Mit den Axiomen (1.1) und (1.3) folgt

$$X = X + M \cdot r - M \cdot r \in B \subseteq \overline{B},$$

also gilt  $X \in \overline{B}$  und somit auch  $\mathcal{A}_{p_{B,r}} \subseteq \overline{B}$ .

□

### 1.4.2 Satz

Ist  $p$  ein kohärentes Risikomaß, so ist die Menge  $\mathcal{A}_p$  abgeschlossen und annehmbar, d.h. sie erfüllt die Axiome (1.1)-(1.4). Zusätzlich gilt

$$p = p_{\mathcal{A}_p,r}.$$

Beweis:

Es gilt für  $\lambda > 0$ ,  $X, Y \in \mathcal{G}$  :

$$p(\lambda \cdot X + (1 - \lambda) \cdot Y) \underset{\text{S}}{\leq} p(\lambda \cdot X) + p((1 - \lambda) \cdot Y) \underset{\text{PH}}{=} \lambda \cdot p(X) + (1 - \lambda) \cdot p(Y).$$

Also ist  $p$  eine konvexe Funktion in  $\mathcal{G}$  und somit stetig ( $\mathcal{G} \cong \mathbb{R}^{|\Omega|}$ ). Da  $(-\infty, 0]$  abgeschlossen ist, folgt, daß

$$\mathcal{A}_p = \{X \in \mathcal{G} | p(X) \leq 0\} = p^{-1}((-\infty, 0])$$

abgeschlossen ist.

(1.1) Sei  $X \in L_+$ . Dann gilt  $X \geq 0$ . Mit dem Axiom M folgt

$$p(X) \leq p(0) = 0.$$

Also ist  $X \in \mathcal{A}_p$  und somit gilt  $L_+ \subseteq \mathcal{A}_p$ .

(1.2) Sei  $X \in L_{--}$ . Dann existiert ein  $\alpha > 0$  mit  $X + \alpha \cdot r \leq 0$ . Aufgrund der Monotonie folgt

$$p(X + \alpha \cdot r) \geq p(0) = 0.$$

Wegen Axiom T gilt  $p(X) - \alpha = p(X + \alpha \cdot r) \geq 0$ . Damit folgt  $p(X) \geq \alpha > 0$ , also  $X \notin \mathcal{A}_p$ . Deshalb ist

$$L_{--} \cap \mathcal{A}_p = \emptyset.$$

(1.3) Sei  $\lambda > 0$  und  $Z = \lambda \cdot X + (1 - \lambda) \cdot Y$  mit  $X, Y \in \mathcal{A}_p$ . Dann gilt

$$p(Z) = p(\lambda \cdot X + (1 - \lambda) \cdot Y) \underset{\text{S, PH}}{\leq} \lambda \cdot p(X) + (1 - \lambda) \cdot p(Y) \leq 0 + 0 = 0.$$

Die letzte Ungleichung folgt mit der Definition 1.2.6. Damit ist  $Z \in \mathcal{A}_p$ , also ist  $\mathcal{A}_p$  konvex.

(1.4) Seien  $X, Y \in \mathcal{A}_p$  und  $\lambda \geq 0$ . Dann gilt  $p(X + Y) \underset{\text{S}}{\leq} p(X) + p(Y)$ , also ist  $X + Y \in \mathcal{A}_p$ .

Außerdem gilt

$$p(\lambda \cdot X) \underset{\text{PH}}{=} \lambda \cdot p(X) \leq 0.$$

Damit ist  $\lambda \cdot X \in \mathcal{A}_p$ . Also ist  $\mathcal{A}_p$  ein positiver homogener Kegel.

Damit ist  $\mathcal{A}_p$  annehmbar.

„ $\leq$ “ Zu jedem  $X$  sei  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $p_{\mathcal{A}_{p,r}}(X) < \delta$ . Dann ist  $X + \delta \cdot r \in \mathcal{A}_p$ , also

$$0 \geq p(X + \delta \cdot r) \stackrel{\text{T}}{=} p(X) - \delta.$$

Es folgt  $\delta \geq p(X)$ . Damit ist  $p(X) \leq p_{\mathcal{A}_{p,r}}(X)$ , also  $p \leq p_{\mathcal{A}_{p,r}}$ .

„ $\geq$ “ Zu jedem  $X$  sei  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $p(X) < \delta$ . Dann ist mit Axiom T

$$p(X + \delta \cdot r) < 0.$$

Damit gilt  $X + \delta \cdot r \in \mathcal{A}_p$ , also  $p_{\mathcal{A}_{p,r}}(X + \delta \cdot r) \leq 0$ . Es folgt  $p_{\mathcal{A}_{p,r}}(X) \leq \delta$  mit Axiom T. Somit ist  $p_{\mathcal{A}_{p,r}}(X) \leq p(X)$ , d.h.  $p_{\mathcal{A}_{p,r}} \leq p$ .

□

### 1.4.3 Proposition

Sei  $B$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{G}$ .

- (i) Erfüllt  $B$  die Axiome (1.1), (1.2'), (1.3) und (1.4), so erfüllt das kohärente Risikomaß  $p_{B,r}$  das Axiom R.
- (ii) Erfüllt ein kohärentes Risikomaß  $p$  das Axiom R, so erfüllt die annehmbare Menge  $\mathcal{A}_{p_{B,r}}$  das Axiom (1.2').

Beweis:

- (i) Sei  $X \in \mathcal{G}$  mit  $X \leq 0$  und  $X \neq 0$ . Also ist  $X \in L_-$ . Aus  $X \neq 0$  und Axiom (1.2') folgt,  $X \notin B$ . Somit ist  $p_{B,r}(X) > 0$  und es gilt Axiom R.
- (ii) Ist  $X \in L_-$  und  $X \neq 0$ , so ist  $X \leq 0$ . Mit Axiom R gilt  $p(X) > 0$ . Es folgt

$$X \notin \mathcal{A}_{p_{B,r}}.$$

Damit ist  $L_- \cap \mathcal{A}_{p_{B,r}} = \{0\}$ , und es gilt Axiom (1.2').

□

## 1.5 Referenzinstrumente mit zufälligem Endwert

Bisher wurden nur Referenzinstrumente mit deterministischem Wertzuwachs  $r > 0$  betrachtet. Dies kann z.B. ein Bankkonto oder eine Staatsanleihe sein. Man kann aber auch u.a. Aktien als Referenzposition betrachten. In diesem Fall wird das Referenzinstrument als Wertpapier mit Anfangswert 1 und strikt positivem, aber zufälligem Endwert

$$\varrho : \Omega \rightarrow (0, \infty)$$

modelliert.

### 1.5.1 Definition

Ein Risikomaß  $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **kohärent bezüglich des Referenzfinanzguts**  $\varrho$ , falls  $p$  kohärent im ursprünglichen Sinn ist, aber anstelle des Axioms T das folgende Axiom  $T'$  erfüllt:



**T'** Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $X \in \mathcal{G}$  gilt

$$p(X + \alpha \cdot \varrho) = p(X) - \alpha.$$

Das Axiom T' wird auch als Translationsbedingung bzgl.  $\varrho$  bezeichnet.

### 1.5.2 Bemerkung

$p(X)$  kann ebenso wie im Abschnitt 1.2 als Risikokapital interpretiert werden, das in das Referenzpapier investiert werden muß, denn mit

$$p(X + p(X) \cdot \varrho) = p(X) - p(X) = 0$$

ist die Position  $X + p(X) \cdot \varrho$  risikoneutral.

Möchte man einen Wechsel im Referenzfinanzgut durchführen, so liefert die folgende Proposition, wie man die kohärente Risikobewertung ändern muß.

### 1.5.3 Proposition

Seien  $\varrho_1, \varrho_2$  strikt positive Zufallsgrößen. Dann gilt für ein Risikomaß  $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$p$  ist kohärent bzgl.  $\varrho_1$  genau dann, wenn  $p_{\varrho_2}$  kohärent bzgl.  $\varrho_2$  ist.

Hierbei ist das Risikomaß  $p_{\varrho_2} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$p_{\varrho_2}(X) = p\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot X\right)$$

Beweis:

Direktes Nachrechnen der Axiome S, PH, M und T bzw T'.

□



# Kapitel 2

## Drei zur Zeit genutzte Risikomaße

In diesem Kapitel werden drei Risikomaße vorgestellt, die in der Praxis angewendet werden. Der Grundgedanke dieser Risikomaße wird nun erläutert und auftretende Nachteile beschrieben. In Kapitel 3 werden dann Möglichkeiten vorgestellt, aus den hier beschriebenen, zum Teil nicht kohärenten Risikomaßen kohärente zu erzeugen. Die im folgenden betrachteten Risikomaße sind:

- (a) SPAN (Standard Portfolio Analysis of Risk) an der Chicago Mercantile Exchange entwickelt,
- (b) Securities Exchange Commission (SEC) Regeln, die von Händlern der National Association of Securities benutzt werden, und ähnliche Regeln, die an der Pacific Exchange und an der Chicago Board of Option Exchange benutzt werden,
- (c) die auf Quantilen basierende Value-at-Risk Methode (VaR).

### 2.1 Begriffe aus der Finanzmarkttheorie

Zunächst werden einige Begriffe aus der Finanzmarkttheorie eingeführt, siehe [Hull].

- Ein **Future** ist ein Kontrakt, ein Handelsgut zu einem heute festgelegten Preis (Erfüllungspreis)  $F$  zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt (Ausübungszeitpunkt)  $T$  zu kaufen bzw. zu verkaufen. Das Handelsgut kann eine Aktie oder ein ähnliches Finanzgut sein, aber auch Waren, wie eine Unze Gold oder ein Doppelzentner Getreide.

Man kann zeigen, daß der faire Erfüllungspreis der auf den Zeitpunkt  $T$  aufdiskontierte Tagespreis ist.

- Eine **Option** gibt dem Käufer das Recht, ein bestimmtes Handelsgut (Underlying) an einem zukünftigen Zeitpunkt (Ausübungszeitpunkt)  $T$  zu einem vereinbarten Preis (Strike)  $K$  zu kaufen oder zu verkaufen. Der Optionskontrakt verpflichtet im Gegensatz zum Future nicht zum Ausüben. Aus diesem Grund ist der Future bei Vertragsabschluß auch kostenlos, die Option hingegen nicht.

- Beim Kaufrecht spricht man von einem **Call**, beim Verkaufsrecht von einem **Put**.

- Der Kauf einer Option wird als **long position** bezeichnet, der Verkauf als **short position**.
- Ein **Spread** setzt sich aus zwei Optionen zusammen. Die in diesem Kapitel betrachteten Spreads bestehen aus dem Kauf eines Calls und dem Verkauf eines zweiten. Die Ausübungszeitpunkte beider Calls sind gleich, die Strikes nicht.

Mit der Berechnung des Optionspreises haben sich F. Black und M. Scholes beschäftigt und 1973 die sogenannte Black-Scholes-Formel entwickelt, siehe [Black,Scholes]. Diese hat sich in der Praxis der Finanzmärkte bewährt.

Der letzte Begriff, der in diesem Kapitel noch wichtig ist, ist der Begriff der **Volatilität**. Diese Größe gibt die unbekannt zukünftige Schwankung des Preises des betrachteten Handelsgutes an. Ist die Volatilität groß, so ist die Wahrscheinlichkeit eines starken zukünftigen Preisanstieges, bzw. -abfalles sehr hoch. Dieser Parameter spielt eine wichtige Rolle in der Preisberechnung von Optionen.

## 2.2 SPAN

### 2.2.1 Modell zur SPAN Berechnung

Die SPAN-Methode dient der Risikobewertung eines Portfolios bestehend aus einem Basisfinanzgut und dessen Call- und Putoptionen. In der Regel wird als Basisfinanzgut ein Future betrachtet. In Deutschland können dies sein:

- Dax-Future als Basisfinanzgut
- Dax-Call und -Put als Optionen

Um die SPAN-Berechnung [SPAN] zu erklären, wird zunächst beschrieben, wie sich das Risiko für einen Call auf einem Futurekontrakt berechnet. Seien dazu

$$0 < T_1 < T_2 < T_3$$

Zeitpunkte und  $\sigma_1 < \sigma_2$  Volatilitäten. Als Basisfinanzgut wird ein Future mit Ausübungszeitpunkt  $T_3$  betrachtet. Sei  $F_0$  dessen gegenwärtiger Preis. Es wird angenommen, daß sich der Futurepreis zum Zeitpunkt  $T_1$  in folgender Art verändert:

$$F_1 = (1 + \delta_i)^{\pm 1} F_0$$

mit  $\delta_i \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$ . Damit erhält man sieben verschiedene Futurepreise zum Zeitpunkt  $T_1$ . Der betrachtete Call auf dem Future hat den Ausübungszeitpunkt  $T_2$  und den Anfangspreis  $C_0$ . Der Preis des Calls zum Zeitpunkt  $T_1$  hängt vom zufälligen Futurepreis  $F_1$  und der angenommenen Volatilität ab. Insgesamt erhält man also vierzehn verschiedene Callpreise. Seien

$$\Pi = \{(1 + \delta_i)^{\pm 1} F_0 | \delta_i \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}\}$$

die Menge der möglichen Futurepreise und  $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$  die möglichen Volatilitäten. Dann ist  $\Omega_0 = \Pi \times \Sigma$  die Menge der states of nature. Dazu kommen noch zwei weitere Zustände, beschrieben durch eine zwei-elementige Menge

$$\Omega_1 = \{(1 + \delta_e)F_0, (\frac{1}{1 + \delta_e})F_0\}$$

mit  $\delta_e \gg 1$ .  $\delta_e$  entspricht einer extremen Futurepreisbewegung, also  $F_1 = (1 + \delta_e)^{\pm 1} F_0$ . Man kann also  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$  setzen. Der zukünftige Preis eines Calls zum Zeitpunkt  $T_1$  ist eine auf  $\Omega$  definierte Zufallsvariable  $C$ . Zur Risikobewertung des Calls wird betrachtet:

$$\sup_{\omega \in \Omega_0} -\frac{C(\omega)}{r}$$

und

$$\left(-\frac{C(\omega_e^+)}{r} - \frac{C(\omega_e^-)}{r}\right) \cdot c + (1 - c) \cdot \left(-\frac{C(\omega_n)}{r}\right)$$

mit  $\omega_e^+ = (1 + \delta_e)F_0$ ,  $\omega_e^- = \frac{1}{1+\delta_e}F_0$  und  $\omega_n = (F_0, \sigma_1)$ .

### Bemerkung

- Der erste Term stellt den maximalen Verlust bei normalem Verlauf der Preise dar.
- Der zweite Term ist eine Mittlung aus dem Verlust bei extremer Preisveränderung und dem Verlust, wenn keine Veränderung des Preises eintritt.
- Das Extremszenario wird mit dem Faktor  $c$  gewichtet. Üblich ist etwa  $c = 0.35$ .
- Als Risikomaß des Calls wird schließlich das Maximum der beiden Werte betrachtet.

Definiert man für alle  $\omega \in \Omega_0$  die Wahrscheinlichkeitsmaße  $P_\omega = 1_{\{\omega\}}$ , so gilt:

$$-\frac{C(\omega)}{r} = E_{P_\omega}\left(-\frac{C}{r}\right).$$

Das bedeutet, daß die SPAN-Berechnung das Eintreten jedes möglichen Ereignisses absichert. Nimmt man aber an, daß jedes Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 1 auftritt, so ist das berechnete Risiko viel zu groß, d.h. man sichert sich zu stark ab. Daher ist es sinnvoll, die möglichen Ereignisse mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen zu gewichten. Dies führt zur folgenden Verallgemeinerung der SPAN-Berechnung:

### 2.2.2 Definition

Das Risikomaß, das durch eine nichtleere Menge  $\mathcal{P}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\Omega$  und den total return  $r$  definiert wird, ist eine Funktion  $p_{\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{G}$  mit

$$p_{\mathcal{P}}(X) = \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] \mid P \in \mathcal{P}\}$$

### Bemerkung

- Der zufällige Endwert wird abdiskontiert. Anschließend wird unter jedem Wahrscheinlichkeitsmaß der Verlust berechnet.
- Jedes  $\omega \in \Omega$  entspricht einem Szenario. Daher heißen die Wahrscheinlichkeitsmaße  $P \in \mathcal{P}$  auch **generalized scenarios**.

Das Problem des so gewonnenen Risikomaßes ist offensichtlich:

Wie ist die Menge  $\mathcal{P}$  zu bestimmen?

Wählt man zu viele Wahrscheinlichkeitsmaße, so ist das berechnete Risiko zu groß, wählt man zu wenige, so ist es zu klein.

### 2.2.3 Bemerkung

Das Risikomaß  $p_{\mathcal{P}}$  ist kohärent, d. h. es erfüllt die Axiome (T),(PH),(S) und (M).

Beweis:

(T) Sei  $\alpha > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{P}}(X + \alpha \cdot r) &= \sup\{E_P[-\frac{X + \alpha \cdot r}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] + E_P[-\alpha] | P \in \mathcal{P}\} \\ &= \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] - \alpha | P \in \mathcal{P}\} = \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] | P \in \mathcal{P}\} - \alpha = p_{\mathcal{P}}(X) - \alpha. \end{aligned}$$

(PH) Sei  $\lambda \geq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{P}}(\lambda \cdot X) &= \sup\{E_P[-\frac{\lambda \cdot X}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = \sup\{\lambda \cdot E_P[-\frac{X}{r}] | P \in \mathcal{P}\} \\ &= \lambda \cdot \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = \lambda \cdot p_{\mathcal{P}}(X). \end{aligned}$$

(M) Seien  $X, Y$  mit  $X \leq Y$ . Dann gilt  $-\frac{X}{r} \geq -\frac{Y}{r}$  und somit

$$E_P[-\frac{X}{r}] \geq E_P[-\frac{Y}{r}] \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P}.$$

Daraus folgt  $p_{\mathcal{P}}(X) = \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] | P \in \mathcal{P}\} \geq \sup\{E_P[-\frac{Y}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = p_{\mathcal{P}}(Y)$ .

(S) Es ist

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{P}}(X_1 + X_2) &= \sup\{E_P[-\frac{X_1 + X_2}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = \sup\{E_P[-\frac{X_1}{r} - \frac{X_2}{r}] | P \in \mathcal{P}\} \\ &\leq \sup\{E_P[-\frac{X_1}{r}] + E_P[-\frac{X_2}{r}] | P \in \mathcal{P}\} \\ &\leq \sup\{E_P[-\frac{X_1}{r}] | P \in \mathcal{P}\} + \sup\{E_P[-\frac{X_2}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = p_{\mathcal{P}}(X_1) + p_{\mathcal{P}}(X_2). \end{aligned}$$

□

### 2.2.4 Proposition

Sei  $\mathcal{P}$  eine nichtleere Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\Omega$  und  $r$  der total return eines Referenzinstrumentes. Das kohärente Risikomaß  $p_{\mathcal{P}}$  aus Definition 2.2.2 erfüllt zusätzlich das Axiom R genau dann, wenn die Vereinigung der Träger der Wahrscheinlichkeitsmaße  $P \in \mathcal{P}$  gleich  $\Omega$  ist.

Beweis:

Zeige zunächst, daß das Axiom R genau dann erfüllt ist, wenn das Negative jeder Indikatorfunktion  $1_{\{\omega\}}$  ein echt positives Risikomaß besitzt.

„ $\Rightarrow$ “ Das Risikomaß  $p_{\mathcal{P}}$  erfüllt das Axiom R. Sei  $\omega \in \Omega$ . Dann ist  $-1_{\{\omega\}} \leq 0$  und  $-1_{\{\omega\}}(\omega) \neq 0$ . Also gilt mit dem Axiom R  $p_{\mathcal{P}}(-1_{\{\omega\}}) > 0$ .

„ $\Leftarrow$ “ Es gelte, daß das Negative jeder Indikatorfunktion  $1_{\{\omega\}}$  ein echt positives Risikomaß hat. Sei  $X \in \mathcal{G}$  mit  $X \leq 0$  und  $X \not\equiv 0$ . Dann existieren endlich viele  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_i < 0$  und

$$X = \sum \alpha_i \cdot 1_{\{\omega_i\}} = \sum -\alpha_i \cdot (-1_{\{\omega_i\}}).$$

Damit gilt  $X < -\alpha_j \cdot (-1_{\{\omega_j\}})$  für jedes  $j$ , und es folgt

$$p_{\mathcal{P}}(X) \underset{\text{M}}{>} p_{\mathcal{P}}(-\alpha_j \cdot (-1_{\{\omega_j\}})) \underset{\text{PH}}{=} -\alpha_j \cdot p_{\mathcal{P}}(-1_{\{\omega_j\}}) > 0,$$

da  $-\alpha_j > 0$  und nach Voraussetzung  $-1_{\{\omega_j\}} > 0$ .

Damit gilt für alle  $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} 0 &\geq p_{\mathcal{P}}(-1_{\{\omega\}}) = \sup\{E_P[\frac{1_{\{\omega\}}}{r}] | P \in \mathcal{P}\} = \sup\{\frac{1}{r} \cdot E_P[1_{\{\omega\}}] | P \in \mathcal{P}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{r} \cdot P(\{\omega\}) | P \in \mathcal{P}\}. \end{aligned}$$

Dieses Supremum ist gleich Null, wenn  $\omega$  zu keinem Träger gehört, und größer als Null, wenn  $\omega$  in einem Träger liegt.  $\square$

## 2.3 Ein modellfreies Risikomaß: SEC

Die SEC-Methode bewertet das Risiko von Portfolios aus Calloptionen. Dies geschieht, indem für bestimmte Portfolios -Basisrisiken genannt- das Risiko festgesetzt wird. Ausgehend von den Basisrisiken wird dann das Risiko für die Calloptionen berechnet. Als Basisrisiken werden Spreads, bestehend aus einem long Call mit Strike  $H$  und einem short Call mit Strike  $K$  und gemeinsamem Ausübungszeitpunkt, betrachtet. Für die Auszahlung eines solchen Spreads ergeben sich zwei Fälle:

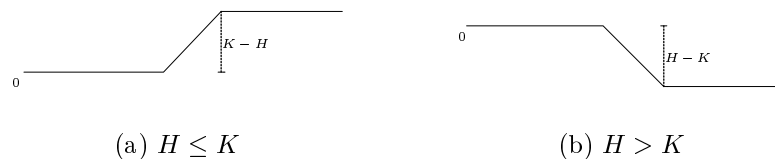


Abbildung 2.1: Auszahlung des Spreads

Damit wird für Basisrisiken mit  $H \leq K$  kein Risikokapital benötigt. Basisrisiken mit  $H > K$  werden mit dem Maximalverlust  $H - K$  bewertet.

Das Risiko eines Portfolios  $A$  aus Calloptionen wird auf folgende Weise abgeschätzt: Dazu bezeichne  $C_H$  einen Call mit Strike  $H$  und Fälligkeit am Ende der Handelsperiode.  $S_{H,K}$  beschreibt einen Spread bestehend aus einem long call  $C_H$  und einem short call  $C_K$ , genauer ist

$$S_{H,K} = C_H - C_K.$$

Existiert ein Portfolio aus Basisrisiken, wobei  $n_{H,K}$  die Anzahl des Spreads  $S_{H,K}$  im Portfolio angibt, mit

$$(*) \quad A \geq \sum_{H,K} n_{H,K} \cdot S_{H,K},$$

so gilt für das Risiko von  $A$

$$p(A) \leq \sum_{H,K} n_{H,K} (H - K)^+.$$

Verallgemeinert bedeutet dies: Betrachtet wird ein Portfolio

$$A = \sum_{H \in \mathcal{H}} a_H \cdot C_H.$$

Dabei ist  $\mathcal{H}$  eine endliche Menge von Strikes und  $a_H \in \mathbb{Z}$  für alle  $H \in \mathcal{H}$ . Um das Portfolio mit Hilfe von Spreads abschätzen zukönnen (vgl. (\*)), muß die Summe der  $a_H$  gleich null sein. Das Risikokapital für ein derartiges Portfolio  $A$  erhält man durch Lösen des Problems:

$$(2.1) \quad \inf_{(n_{H,K})} \sum_{H,K \in \mathcal{H}, H \neq K} n_{H,K} \cdot (H - K)^+$$

unter den Bedingungen: Für alle  $H \neq K$  gilt  $n_{H,K} \geq 0$  und  $A = \sum_{H,K, H \neq K} n_{H,K} \cdot S_{H,K}$ .

### 2.3.1 Beispiel

Zur Berechnungsweise der SEC- Regeln wird das folgende Portfolio  $A$  bestehend aus:

- 2 long calls mit Strike 10
- 3 short calls mit Strike 30
- 2 short calls mit Strike 20
- 4 long calls mit Strike 40
- 1 short call mit Strike 50

betrachtet. Der Ausübungszeitpunkt  $T$  ist bei allen Calls gleich. Hierbei sind

$$\mathcal{H} = \{10, 20, 30, 40, 50\},$$

$a_{10} = 2$ ,  $a_{20} = -2$ ,  $a_{30} = -3$ ,  $a_{40} = 4$  und  $a_{50} = -1$ . Löst man das Problem (2.1), so erhält man

$$\inf_{(n_{H,K}^*)} \sum_{H,K, H \neq K} n_{H,K}^* \cdot (H - K)^+ = 2 \cdot (10 - 20)^+ + (40 - 50)^+ + 3 \cdot (40 - 30)^+ = 30$$

also  $n_{10,20}^* = 2$ ,  $n_{40,50}^* = 1$ ,  $n_{40,30}^* = 3$  und für alle anderen  $n_{H,K}^* = 0$ . Dies liefert den minimalen Absicherungsbetrag von 30 für das Portfolio  $A$ , d.h. das Konto des Investors muß mindestens den aktuellen Wert des Portfolios plus den Risikobetrag der Höhe 30 aufweisen.



### 2.3.2 Problem der SEC- Methode

Bei den SEC-Regeln tritt das Problem auf, daß zu viel Risikokapital berechnet wird. Dies kann man mit Hilfe des eben betrachteten Portfolios  $A$  leicht einsehen:

$S_T$  bezeichne den zufälligen Wert des Underlyings zum Zeitpunkt  $T$ . Dann ist der Wert  $X$  des Portfolios:

$$\begin{aligned} X &= 2(S_T - 10)^+ - 3(S_T - 30)^+ - 2(S_T - 20)^+ + 4(S_T - 40)^+ - (S_T - 50)^+ \\ &= 2(S_T - 10)1_{\{S_T > 10\}} - 3(S_T - 30)1_{\{S_T > 30\}} - 2(S_T - 20)1_{\{S_T > 20\}} \\ &\quad + 4(S_T - 40)1_{\{S_T > 40\}} - (S_T - 50)1_{\{S_T > 50\}} \\ &= 2(S_T - 10)1_{\{10 < S_T \leq 20\}} + 20 \cdot 1_{\{20 < S_T \leq 30\}} + (-3 \cdot S_T + 110)1_{\{30 < S_T \leq 40\}} \\ &\quad + (S_T - 50)1_{\{40 < S_T \leq 50\}}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden sind immer positiv, die letzten beiden nie kleiner als  $-10$ . Daher fällt der Wert des Portfolios nie unter  $-10$ . Es muß also eigentlich nur ein zusätzliches Kapital der Höhe 10 angefordert werden.

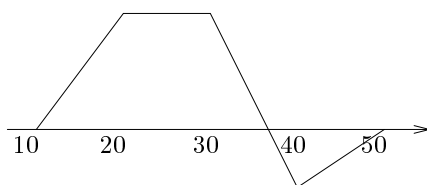


Abbildung 2.2: Das Portfolio  $A$  aus Beispiel 2.3.1

Man erkennt, daß die SEC-Methode zu wenig Basisrisiken verwendet. Es reicht nicht aus, nur den Spreads  $S_{H,K}$  Risikokapital zuzuordnen. Dadurch ist die Abschätzung des Portfolios von Calloptionen durch die Basisrisiken zu grob, und es wird ein zu hohes Risiko berechnet. Im Abschnitt 3.2 wird eine Methode vorgestellt, wie man mit Hilfe der Standardrisiken kohärente Risikomaße erzeugen kann.

### 2.3.3 Risikobewertung über den maximalen Verlust

Man kann das Risiko eines Portfolios über dessen maximalen Verlust berechnen. Als Risikomaß ergibt sich

$$p(X) = \max_{\omega \in \Omega} \left( -\frac{X(\omega)}{r} \right) = -\min_{\omega \in \Omega} \left( \frac{X(\omega)}{r} \right).$$

Dies wurde anhand eines speziellen Portfolios im Beispiel 2.3.1 schon gezeigt. Verallgemeinert bedeutet das: Sei

$$A = \sum_{i=1}^n a_i \cdot C_{H_i}$$

ein Portfolio aus Calloptionen. Dabei sind  $0 < H_1 < \dots < H_n$  die Strikes der einzelnen Calls und  $a_i$  ihre jeweilige Anzahl im Portfolio. Alle Calloptionen haben den gleichen Ausübungszeitpunkt  $T$ .  $S_T$  ist der zufällige Wert des Underlyings zum Zeitpunkt  $T$ . Beschreibt  $X$  den Wert des Portfolios, so gilt unter der Annahme, daß die Summe der  $a_i$

gleich Null ist:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{i=1}^n a_i (S_T(\omega) - H_i)^+ = \sum_{i=1}^n a_i (S_T(\omega) - H_i) 1_{\{S_T(\omega) > H_i\}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i a_j \cdot S_T(\omega) + \sum_{j=1}^i a_j \cdot H_j \right) 1_{\{H_i < S_T(\omega) \leq H_{i+1}\}}. \end{aligned}$$

Da der Wert  $S_T(\omega)$  für jedes  $\omega \in \Omega$  nur in einem der Intervalle  $(H_i, H_{i+1}]$  liegt, ergibt sich mit

$$A_i = \begin{cases} H_i \cdot \sum_{j=1}^i a_j, & \text{falls } \sum_{j=1}^i a_j \geq 0 \\ H_{i+1} \cdot \sum_{j=1}^i a_j, & \text{sonst.} \end{cases}$$

als Maximalverlust des Portfolios:

$$\begin{aligned} & \max_{i=1}^n \left( - \min_{\substack{\omega \in \Omega, \\ H_i < S_T(\omega) \leq H_{i+1}}} \left( \frac{X(\omega)}{r} \right) \right) \\ &= \max_{i=1}^n \left( - \min_{\substack{\omega \in \Omega, \\ H_i < S_T(\omega) \leq H_{i+1}}} \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \sum_{j=1}^i a_j \cdot S_T(\omega) - \sum_{j=1}^i a_j \cdot H_j \right) \right) \right) \\ &= \max_{i=1}^n \left( - \frac{1}{r} \left( \min_{\substack{\omega \in \Omega, \\ H_i < S_T(\omega) \leq H_{i+1}}} \left( S_T(\omega) \cdot \sum_{j=1}^i a_j \right) - \sum_{j=1}^i a_j \cdot H_j \right) \right) = \max_{i=1}^n \left( - \frac{1}{r} \left( A_i - \sum_{j=1}^i a_j \cdot H_j \right) \right). \end{aligned}$$

Damit kann man das Risiko für Portfolios aus Calloptionen durch

$$p(A) = \max_{i=1}^n \left( - \frac{1}{r} \left( A_i - \sum_{j=1}^i a_j \cdot H_j \right) \right),$$

berechnen.

## 2.4 Auf Quantilen basierende Risikomaße

Eine modellabhängige Risikomessung ist die Value-at-risk (VaR)-Methode. Sie ist über die Gewinn/Verlust-Spanne (P/L) definiert und ignoriert somit die Differenz von dem Kapital an einem Tag und dem Kapital an einem anderen Tag. Das ist für kleine Zeitintervalle akzeptabel. Diese Methode verwendet Quantile, d.h. man muß auf Unstetigkeitsstellen achten.

### 2.4.1 Definition

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  gegeben.  $q$  ist ein  $\alpha$ -Quantil von der Zufallsvariablen  $X$  unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$ , wenn eine der drei folgenden Ungleichungen erfüllt ist:

- a)  $P(X \leq q) \geq \alpha \geq P(X < q)$ ,
- b)  $P(X \leq q) \geq \alpha$  und  $P(X \geq q) \geq 1 - \alpha$ ,

c)  $F_X(q) \geq \alpha$  und  $F_X(q-) \leq \alpha$  mit

$$F_X(q-) = \lim_{x \rightarrow q, x < q} F(x),$$

wobei  $F$  die Verteilungsfunktion von  $X$  ist.

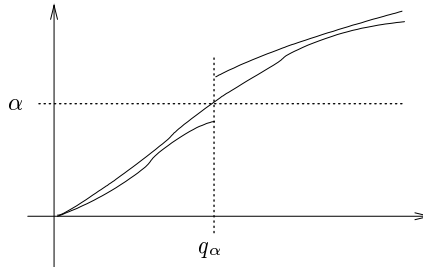


Abbildung 2.3: Das  $\alpha$ -Quantil

### 2.4.2 Bemerkung

- Die drei Ungleichungen sind äquivalent.
- Es existiert ein endlicher linker (bzw. rechter) Endpunkt  $q_\alpha^-$  (bzw.  $q_\alpha^+$ ) mit

$$q_\alpha^- = \inf\{x | P(X \leq x) \geq \alpha\} = \sup\{x | P(X \leq x) < \alpha\} \text{ bzw.}$$

$$q_\alpha^+ = \inf\{x | P(X \leq x) > \alpha\}.$$

- Ist  $\Omega$  endlich, so ist die Verteilungsfunktion von  $X$  eine Treppenfunktion. Damit ist nur im Fall, daß  $\alpha$  eine Unstetigkeitsstelle ist,  $q_\alpha^-$  ungleich  $q_\alpha^+$ , d.h mit Ausnahme von abzählbar vielen  $\alpha$  gilt die Gleichung  $q_\alpha^- = q_\alpha^+$ .
- Die Menge der  $\alpha$ -Quantile ist  $[q_\alpha^-, q_\alpha^+]$ .

### 2.4.3 Definition

Seien  $\alpha \in (0, 1)$  und das Referenzinstrument  $r$  gegeben. Das **Value-at-Risk**  $\text{VaR}_\alpha$ -Risikomaß zum Level  $\alpha$  des Endwertes  $X$  mit der Verteilung  $P$  ist das Negative des Quantils  $q_\alpha^+$  von  $\frac{X}{r}$ , d.h.

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x | P(X \leq x \cdot r) > \alpha\}.$$

Entscheidend für Risikobetrachtungen ist nur der Fall, daß  $X$  negativ ist, denn  $X \leq 0$  bedeutet, daß eine riskante Position vorliegt. Im Idealfall sucht man ein  $x \geq 0$  so, daß  $X + x \cdot r = 0$  ist. Da dieses in nichttrivialen Fällen nicht möglich ist, berechnet man ein  $x$ , für daß die Wahrscheinlichkeit, daß  $X + x \cdot r \leq 0$  ist, höchstens  $\alpha$  beträgt.

Man beachte, daß die hier benutzte Definition des  $\text{VaR}_\alpha$  in Wirklichkeit der Betrag des zusätzlichen Kapitals ist, den eine  $\text{VaR}_\alpha$ -Berechnung liefert, denn nach Definition 2.4.3 besitzt eine riskante Position ein positives Risiko.

### 2.4.4 Bemerkung

$\text{VaR}_\alpha$  erfüllt die Axiome T,PH,M.

Beweis:

(T) Sei  $\beta > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \text{VaR}_\alpha(X + \beta \cdot r) \\ &= -\inf\{x | P(X + \beta \cdot r \leq x \cdot r) > \alpha\} = -\inf\{x | P(X \leq x \cdot r - \beta \cdot r) > \alpha\} \\ &= -\inf\{x | P(X \leq (x - \beta) \cdot r) > \alpha\} = -\inf\{\frac{y}{r} + \beta | P(X \leq y) > \alpha\} \\ &= -\inf\{\frac{y}{r} | P(X \leq y) > \alpha\} - \beta = -\inf\{y | P(X \leq y \cdot r) > \alpha\} - \beta = \text{VaR}_\alpha(X) - \beta. \end{aligned}$$

(PH) Sei  $\lambda > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(\lambda \cdot X) &= -\inf\{x | P(\lambda \cdot X \leq x \cdot r) > \alpha\} \\ &= -\inf\{x | P(\frac{X}{r} \leq \frac{x}{\lambda}) > \alpha\} = -\inf\{y \cdot \lambda | P(\frac{X}{r} \leq y) > \alpha\} \\ &= \lambda \cdot (-\inf\{y | P(\frac{X}{r} \leq y) > \alpha\}) = \lambda \cdot \text{VaR}_\alpha(X) \end{aligned}$$

(M) Sei  $X \leq Y$ . Dann gilt  $P(\frac{X}{r} \leq x) > P(\frac{Y}{r} \leq x)$  und damit

$$\{x | P(\frac{Y}{r} \leq x) > \alpha\} \subseteq \{x | P(\frac{X}{r} \leq x) > \alpha\}.$$

Es folgt  $\inf\{x | P(\frac{Y}{r} \leq x) > \alpha\} \geq \inf\{x | P(\frac{X}{r} \leq x) > \alpha\}$  und somit

$$-\inf\{x | P(\frac{Y}{r} \leq x) > \alpha\} \leq -\inf\{x | P(\frac{X}{r} \leq x) > \alpha\},$$

d.h.  $\text{VaR}_\alpha(Y) \leq \text{VaR}_\alpha(X)$ .

□

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, daß für  $\text{VaR}_\alpha$  das Axiom S - die Subadditivität - verletzt ist:

### 2.4.5 Beispiel

Betrachtet werden zwei Digitale Optionen (cash-or-nothing) auf einer Aktie mit dem gleichen Ausübungszeitpunkt  $T$ .  $S_T$  gibt den zufälligen Wert der Aktie zum Zeitpunkt  $T$  an.

- Die erste Option, Option A mit Anfangspreis  $u$ , zahlt 1000 aus, falls der Aktienpreis bei Fälligkeit größer als  $U$  ist.
- Die zweite Option, Option B mit Anfangspreis  $l$ , zahlt 1000 aus, falls der Aktienpreis bei Fälligkeit kleiner als  $L$  ist, mit  $L < U$ .
- Im jeweils anderen Fall liefern die Optionen keine Auszahlung.

Jetzt wählt man  $L$  und  $U$  so, daß  $P(S_T < L) = P(S_T > U) = 0.008$  ist. Händler 1 verkauft zweimal die Option A und Händler 2 zweimal die Option B. Berechnet wird nun das  $\text{VaR}_{0,01}$  der zukünftigen Nettowerte der Positionen der Händler. Zur Vereinfachung ist  $r = 1$ . Für Händler 1 ist sein Nettoendwert

$$X = 2u - 2000 \cdot 1_{\{S_T > U\}},$$

d.h. falls  $S_T < U$  ist, verliert die Option ihren Wert, und der Händler verdient den Optionspreis im Wert von  $2u$ . Im anderen Fall muß er an der Käufer 2000 bezahlen, hat also einen Gesamtverlust von  $2000 - 2u$ . Es gilt also

$$P(X < 2u - 2000) = 0, P(2u - 2000 \leq X < 2u) = 0.008 \quad \text{und} \quad P(2u \leq X) = 1.$$

Damit ergibt sich  $\text{VaR}_{0,01}(X) = -\inf\{x|P(X \leq x) > 0.01\} = -2u$ . Analog erhält man für Händler  $2 \text{ VaR}_{0,01}(X) = -2l$ . Verkauft man  $A + B$ , so ist der Nettoendwert

$$X = l + u - 1000 \cdot 1_{\{S_T > U \text{ oder } S_T < L\}},$$

d.h. falls  $L < S_T < U$  ist, verliert die Option ihren Wert, und man verdient den Optionspreis  $l + u$ . Anderenfalls muß man 1000 bezahlen, hat also einen Gesamtverlust von  $1000 - l - u$ . Damit gilt

$$P(X < l + u - 1000) = 0, P(l + u - 1000 \leq X < l + u) = 0.016 \quad \text{und}$$

$$P(l + u \leq X) = 1.$$

Für diese Position folgt  $\text{VaR}_{0,01}(X) = -\inf\{x|P(X \leq x) > 0.01\} = 1000 - l - u$ . Damit ist insgesamt:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{0,01}\left(\frac{1}{2} \cdot 2A + \frac{1}{2} \cdot 2B\right) &= \text{VaR}_{0,01}(A + B) = 1000 - l - u \\ &> -l - u = \frac{1}{2} \cdot \text{VaR}_{0,01}(2A) + \frac{1}{2} \cdot \text{VaR}_{0,01}(2B). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß die Menge der bezüglich des Value-at-risk-Maßes annehmbaren Endwerte nicht konvex ist.

### 2.4.6 Bemerkung

Nimmt man jedoch an, daß die Preise normalverteilt sind, dann ist  $\text{VaR}_\alpha$  subadditiv, solange die Wahrscheinlichkeiten der Ausdehnung kleiner als 0,5 sind. Es gilt für beliebige quadratintegrierbare Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \sigma_{X+Y} &= \sqrt{\text{Var}(X + Y)} \\ &= \sqrt{\text{Var}X + \text{Var}Y + 2 \cdot E[(X - EX)(Y - EY)]} \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\text{Var}X + \text{Var}Y + 2 \cdot \sqrt{E[(X - EX)^2]E[(Y - EY)^2]}} \\ &= \sqrt{\text{Var}X + \text{Var}Y + 2 \cdot \sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}} \\ &\stackrel{\text{Binomische F.}}{=} \sqrt{(\sqrt{\text{Var}X} + \sqrt{\text{Var}Y})^2} = \sigma_X + \sigma_Y, \end{aligned}$$

also

$$(*) \quad \sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y.$$

für jedes normalverteilte Paar  $(X, Y)$  von Zufallsvariablen. Für eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  haben wir dann:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -(E_P(X) + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_P(X))$$

Dabei ist  $\Phi$  die Standardnormalverteilungsfunktion mit  $\Phi^{-1}(0.5) = 0$ . Damit ist  $\text{VaR}_\alpha$  subadditiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X + Y) &= -(E_P(X + Y) + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_P(X + Y)) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} -(E_P(X) + E_P(Y) + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot (\sigma_P(X) + \sigma_P(Y))) \\ &= -(E_P(X) + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_P(X)) - (E_P(Y) + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_P(Y)) \\ &= \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y), \end{aligned}$$

da  $\Phi^{-1}(\alpha) \leq 0$  für  $\alpha \leq 0,5$  ist.

### 2.4.7 Bemerkung

Aufgrund der obigen Eigenschaft und der Tatsache, daß Aktienkurse durch geometrisch Brownsche Bewegungen modelliert werden, wird vielfach die Value-at-Risk-Berechnung bei Banken benutzt.

### 2.4.8 Ein weiteres Beispiel für die Nichtsubadditivität

Seien  $\Omega$  unendlich und  $X_1, X_2$  unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte 0.9 in  $[0, 1]$  und 0.05 in  $[-2, 0]$ . Beide Zufallsvariablen repräsentieren einen zufälligen zukünftigen Nettowert mit positivem Erwartungswert. Es gilt

$$\text{VaR}_{0,1}(X_1) = \text{VaR}_{0,1}(X_2) = 0,$$

da  $X_1$  und  $X_2$  mit neunzigprozentiger Wahrscheinlichkeit größer als 0 sind. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 0) &= \int_{-2}^0 P(X_1 + y \leq 0) \cdot \frac{5}{100} dy + \int_0^1 P(X_1 + y \leq 0) \cdot \frac{9}{10} dy \\ &= \frac{5}{100} + \int_{-1}^0 P(X_1 + y \leq 0) \cdot \frac{5}{100} dy + \int_0^1 P(X_1 + y \leq 0) \cdot \frac{9}{10} dy \\ &> \frac{5}{100} + \int_{-1}^0 P(X_1 \leq 0) \cdot \frac{5}{100} dy + \int_0^1 P(X_1 \leq -1) \cdot \frac{9}{10} dy \\ &= \frac{5}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{100} = 0,1 \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{VaR}_{0,1}(X_1 + X_2) > 0$ . Daran ist zuerkennen, daß man nicht von den Risiken der einzelnen Positionen auf das Gesamtrisiko schließen kann.

### 2.4.9 Value-at-Risk und Risikokonzentrationen

Die Value-at-risk-Methode erkennt keine Risikokonzentration. Hierfür liefert Claudio Albanese ein einfaches Beispiel [Alba]:

Die Zinsrate wird gleich Null gesetzt. Betrachtet werden Firmenbonds, die einen Spread von 2% liefern, deren Verfallraten bei 0,01 liegen und unabhängig voneinander sind. Wird nun 1.000.000 zur Zinsrate geliehen und in eine einzige Firma investiert, so gilt für den zukünftigen Nettoendwert  $X$ :

$$P(X = 0) = 0,01 \quad \text{und} \quad P(X = 20.000) = 0,99.$$

Damit ist  $\text{VaR}_{0,05} = -20000$ , also handelt es sich um eine risikolose Investition. Wird dieses Geld aber auf 100 verschiedene Firmen gleichmäßig verteilt, erhält man als Wahrscheinlichkeit, daß mehr als zwei Firmen Verzugsprobleme haben:

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens zwei Firmen haben Probleme}) &\geq P(\text{genau zwei Firmen haben Probleme}) \\ &= \frac{100!}{2 \cdot 98!} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{98} > 0.18. \end{aligned}$$

Dies führt zu einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5%, daß das Portfolio der Bonds einen negativen Endwert aufweist. Das bedeutet, daß durch die Investition in mehrere Firmen das Risiko gestiegen ist, wohingegen ein riskanter Bond einer einzelnen Firma nicht entdeckt wurde.

Insgesamt gilt, daß die Value-at-Risk-Messung nicht sinnvoll ist:

- Value-at-Risk ist nicht subadditiv. Das bedeutet, daß man das Risiko seiner Gesamtposition nicht durch die Risiken der einzelnen Positionen abschätzen kann.
- Risikokonzentrationen werden durch die Value-at-Risk-Messung häufig nicht entdeckt.





# Kapitel 3

## Darstellungstheoreme für kohärente Risikomaße

In diesem Kapitel werden zwei Methoden erläutert, wie kohärente Risikomaße erzeugt werden können. Die erste entspricht der SPAN-Methode aus Abschnitt 2.2, die zweite ist eine Verallgemeinerung der SEC-Regeln aus Abschnitt 2.3.

### 3.1 Auf Szenarien basierende kohärente Risikomaße

Dieser Abschnitt bezieht sich auf Definition 2.2.2. Es wird weiterhin angenommen, daß  $\Omega$ , die Menge der states of nature, endlich ist. Die auf  $\Omega$  betrachtete  $\sigma$ -Algebra sei die Potenzmenge von  $\Omega$ . Anfangs liegt kein spezielles Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  vor.

#### 3.1.1 Darstellungssatz

Gegeben ist der total return  $r$  eines Referenzinstrumentes. Ein Risikomaß  $p$  ist genau dann kohärent, wenn es eine Familie  $\mathcal{P}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\Omega$  gibt mit

$$p(X) = \sup\{E_P(-\frac{X}{r}) \mid P \in \mathcal{P}\}.$$

für alle  $X \in \mathcal{G}$ .

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ gilt nach der Bemerkung 2.2.3 aus dem vorigen Kapitel.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $p$  ein kohärentes Risikomaß. Sei  $\mathcal{P}$  die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße  $P$  auf  $\Omega$  mit

$$E_P(-\frac{X}{r}) \leq p(X) \quad \text{für alle } X \in \mathcal{G}.$$

Zu zeigen ist:  $p(X) = \sup\{E_P(-\frac{X}{r}) \mid P \in \mathcal{P}\}$ , d.h. zu zeigen ist, daß zu jedem  $X_0 \in \mathcal{G}$  ein  $P \in \mathcal{P}$  mit den Eigenschaften  $E_P(-\frac{X}{r}) \leq p(X)$  für alle  $X \in \mathcal{G}$  und  $E_P(-\frac{X_0}{r}) = p(X_0)$  existiert. Sei dazu  $X_0 \in \mathcal{G}$  und

$$U = \{X \in \mathcal{G} : p(-r \cdot X) < 1\}.$$

(1) Beh.: Man kann  $p(-r \cdot X_0) = 1$  annehmen.

Ist  $p(X_0) > 0$ , so folgt für  $\lambda = \frac{1}{p(X_0)}$  aufgrund des Axioms PH die Behauptung. Ist  $p(X_0) < 0$ , so setze  $Y_0 = X_0 + 2 \cdot r \cdot p(X_0)$ . Dann gilt

$$p(Y_0) = p(X_0 + 2 \cdot r \cdot p(X_0)) \stackrel{T}{=} p(X_0) - 2 \cdot p(X_0) = -p(X_0) > 0.$$

Damit folgt die Behauptung analog zum ersten Fall.

(2) Beh.:  $U$  ist offen.

Betrachte die  $\infty$ -Norm auf  $\mathcal{G}$ . Sei  $X \in U$ . Wähle  $\varepsilon < 1 - p(-r \cdot X)$ . Dann gilt:

$$p(-r \cdot (X + \varepsilon)) \stackrel{T}{=} p(-r \cdot X) + \varepsilon < 1.$$

Aufgrund der Monotonie von  $p$  folgt  $p(-r \cdot Y) < 1$  für jedes  $Y$  aus der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $X$ , d.h.  $Y \in U$ . Damit ist  $U$  offen.

(3) Beh.:  $U$  ist konvex.

Seien  $X, Y \in U$ . Dann gilt für alle  $\alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} p(-r(\alpha X + (1 - \alpha)Y)) &\stackrel{S}{\leq} p(-r \cdot \alpha \cdot X) + p(-r \cdot (1 - \alpha) \cdot Y) \\ &\stackrel{PH}{=} \alpha \cdot p(-r \cdot X) + (1 - \alpha) \cdot p(-r \cdot Y) \\ &\stackrel{X, Y \in U}{<} \alpha + 1 - \alpha = 1. \end{aligned}$$

Also gilt  $\alpha X + (1 - \alpha)Y \in U$ .

(4) Da  $p(-r \cdot X_0) = 1$  ist, gilt  $X_0 \notin U$ , d.h. es existiert ein lineares Funktional  $\lambda$ , das  $X_0$  von  $U$  trennt, es gilt also:

$$(*) \quad \lambda(X) < \lambda(X_0) \quad \text{für alle } X \in U.$$

Da  $X \equiv 0 \in U$ , ist  $\lambda(X_0)$  echt positiv. Dadurch kann man  $\lambda$  so normieren, daß  $\lambda(X_0) = 1 = p(-r \cdot X_0)$  gilt. Aus (\*) folgt

$$(**) \quad p(-r \cdot X) < 1 \Rightarrow \lambda(X) < 1,$$

denn ist  $p(-r \cdot X) < 1$ , so ist  $X \in U$ , also  $\lambda(X) < \lambda(X_0) = 1$ .

(5) Beh.: Für alle  $X \in \mathcal{G}$  mit  $X \geq 0$  gilt  $\lambda(X) \geq 0$ :

Sei  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $X \in \mathcal{G}$  mit  $X \geq 0$ . Es gilt  $p(-r \cdot (-c \cdot X)) \stackrel{M}{\leq} p(-r \cdot 0) = p(0) = 0 < 1$ .

Mit (\*\*) folgt

$$\lambda(-c \cdot X) < 1.$$

Da  $\lambda$  linear ist, ergibt sich  $c \cdot \lambda(X) > -1$ , d.h.  $\lambda(X) > -\frac{1}{c}$ . Da  $c$  beliebig gewählt wurde, folgt  $\lambda(X) \geq 0$ .

(6) Beh.:  $\lambda(1) = 1$ .

Ist  $c < 1$ , so ist  $p(-r \cdot c) \stackrel{T}{=} c < 1$ . Also gilt mit (\*\*)  $\lambda(c) < 1$  und damit  $\lambda(1) \leq 1$ . Ist  $c > 1$ , so gilt

$$p(-r(2 \cdot X_0 - c)) \stackrel{T, PH}{=} 2 \cdot p(-r \cdot X_0) - c = 2 - c < 1.$$

Mit (\*\*) ergibt sich

$$1 > \lambda(2 \cdot X_0 - c) = 2 \cdot \lambda(X_0) - c \cdot \lambda(1) = 2 - c \cdot \lambda(1).$$

Daraus folgt  $1 < c \cdot \lambda(1)$ , also  $\lambda(1) > \frac{1}{c}$  für alle  $c > 1$ , also  $\lambda(1) \geq 1$ . Insgesamt gilt  $\lambda(1) = 1$ .

(7) Ist  $0 < p(-r \cdot X) = \alpha$ , so gilt für alle  $\varepsilon > 0$  aufgrund des Axioms PH

$$p\left(-r \cdot \frac{1}{\alpha + \varepsilon} \cdot X\right) < 1.$$

Es folgt  $\lambda\left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon} \cdot X\right) < 1$  aus (\*\*), d.h.  $\lambda(X) < \alpha + \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Also gilt  $\lambda(X) \leq \alpha$ . Ist  $0 > p(-r \cdot X) = \alpha$ , so setze  $Y = X - 2 \cdot \alpha$ . Dann gilt:

$$p(-r \cdot Y) = p(-r \cdot X + 2 \cdot \alpha \cdot r) \stackrel{T}{=} p(-r \cdot X) - 2 \cdot \alpha = -\alpha > 0$$

Damit folgt aus dem ersten Fall  $-\alpha = p(-r \cdot Y) \geq \lambda(Y)$ , also

$$-\alpha \geq \lambda(Y) = \lambda(X) - 2 \cdot \alpha \cdot \lambda(1) \stackrel{(6)}{=} \lambda(X) - 2 \cdot \alpha,$$

d.h.  $\lambda(X) \leq \alpha$ . Insgesamt gilt  $\lambda(X) \leq p(-r \cdot X)$  für alle  $X \in \mathcal{G}$ .

(8) Das gesuchte Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  wird dann definiert durch:

$$P(A) = \lambda(1_A) \quad \text{für alle Teilmengen } A \text{ von } \Omega.$$

(5) und (6) stellen sicher, daß  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Die gewünschten Eigenschaften erfüllt  $P$  durch die Normierung von  $\lambda$  und (7).

□

### 3.1.2 Bemerkung

- Je mächtiger die Menge  $\mathcal{P}$  ist, desto konservativer (d.h. größer) ist das gewonnene Risikomaß.
- Man beachte Proposition 2.2.4. Dort wurde bewiesen, daß das Maß  $p$  das Axiom R genau dann erfüllt, wenn die Vereinigung der Träger der Wahrscheinlichkeitsmaße in  $\mathcal{P}$  ganz  $\Omega$  ergibt.

### 3.1.3 Anwendung bei Versicherungen

Sei  $X \in \mathcal{G}$ . Dann entspricht in der Versicherungsmathematik die Zufallsvariable  $-\frac{X}{r}$  dem abdiskontierten zufälligen Verlust. Der Mittelwertansatz liefert als Prämie den Wert

$$E_P\left[-\frac{X}{r}\right].$$

Aus dem Darstellungssatz folgt  $E_P\left[-\frac{X}{r}\right] \leq p(X)$  für alle  $P \in \mathcal{P}$ . Damit kann  $p$  als absicherndes Anfangskapital (insurance premium principle) gesehen werden. (vgl. [Gerber]) Auf diesen Ansatz wird im Buch von [Hattendorf] näher eingegangen. Im Paragraph 3 auf Seite 5 wird ein Risikomaß für Lebensversicherungen mit dem Namen „mittleres Risiko“ angegeben. Es ist definiert als:

$$p(X) = E_P(-X).$$

$r$  wird 1 gesetzt, da man als  $X$  die abdiskontierte Gesamtzahlung betrachtet. Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  erhält man aus einer -den Versicherungen vorliegenden- Sterbetafel. Dieses Risikomaß ist kohärent. Es erfüllt anstelle der Subadditivität sogar die stärkere Eigenschaft der Additivität.

### Beispiel

Eine Person im Alter  $x$  möchte von heute an eine Rente der Höhe  $R$  jährlich vorschüssig erhalten. Mit  ${}_k p_x$  bezeichnet man die  $k$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person. Diese Wahrscheinlichkeit kann man der Sterbetafel entnehmen.  $T_x$  sei die zufällige Restlebenszeit einer  $x$ -jährigen Person in Jahren, d.h.  $T_x$  ist eine Zufallsvariable in  $\{1, \dots, N\}$ , wobei  $N$  die maximalen Restlebensjahre angibt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $T_x$  ist durch  ${}_k p_x$  gegeben, also

$$P(T_x > k) = {}_k p_x.$$

Die Gesamtzahlung  $X$  der Versicherung, abdiskontiert bei jährlicher Zinsrate  $r$ , ist dann:

$$-X = \sum_{k=0}^{T_x} R \cdot r^k = \sum_{k=0}^N R \cdot r^k \cdot 1_{\{k < T_x\}}$$

Der Barwert dieser Sofortrente wird berechnet als:

$$E_P(-X) = R \cdot \sum_{k=0}^N r^k \cdot {}_k p_x$$

Das Risiko, das eine Versicherung nun hat, ist folgendes:

- Was bewirkt eine Veränderung der Sterbetafel?

Durch medizinische Fortschritte oder biologische Forschung (z.B. Chromosomenentschlüsselung) kann sich die Lebenserwartung erhöhen, somit kann sich die Sterbetafel, die der Prämienberechnung für die Lebensversicherung zugrunde liegt, während der Versicherungsdauer ändern. Bei einer höheren Lebenserwartung führt dies zu einem Verlust beim Versicherungsunternehmen. Indem ein Versicherungsunternehmen nicht nur die aktuelle Sterbetafel betrachtet, sondern auch Abänderungen (z. B. Wahrscheinlichkeiten um einen gewissen Faktor verbessert) in Betracht zieht, kann es eine Risikobewertung durch das Risikomaß

$$p(X) = \sup\{E_P(-X) | P \in \mathcal{P}\}$$

durchführen. Die Menge  $\mathcal{P}$  ist hierbei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße aus den betrachteten Sterbetafeln.

#### 3.1.4 Folgerung

Proposition 3.1.1 zeigt, daß die Idee der Risikomessung aus dem Abschnitt 2.2 sinnvoll ist. Jedes kohärente Risikomaß kann im Rahmen der generalized scenarios durch die Methode des „worst case“ beschrieben werden.

- An diesem Punkt ist es wichtig, daß die Szenarien allen Händlern einer Firma (durch den Manager) oder allen Firmen (durch den Regulator) bekannt gegeben werden.
- Im ersten Fall ist zu bemerken, daß die Verteilung vom Risikomanagement erst nach der Bekanntgabe der Szenarien möglich ist.

### 3.1.5 Darstellungssatz bei zufälliger Referenzposition

Betrachtet man kohärente Risikomaße mit Referenzfinanzgut  $\varrho$  (vgl. Abschnitt 1.5), so kann man für diese Risikomaße einen ähnlichen Darstellungssatz wie 3.1.1 zeigen: Ein Risikomaß  $p$  ist genau dann kohärent bzgl.  $\varrho$ , wenn es eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mathcal{P}$  gibt mit

$$p(X) = \sup\{E_P(-\frac{X}{\varrho}) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ Folgt durch Nachrechnen der Axiome S, PH, M und T'.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $p$  ein kohärentes Risikomaß bzgl.  $\varrho$ . Für  $\hat{\varrho} \equiv 1$  gilt:

$$p_{\hat{\varrho}}(X) := p(\frac{\varrho}{\hat{\varrho}} \cdot X) = p(\varrho \cdot X).$$

Also ist mit Proposition 1.5.3  $p_{\hat{\varrho}}(X)$  kohärent bzgl.  $\hat{\varrho}$ . Damit existiert aufgrund des bisherigen Darstellungssatzes 3.1.1 eine Familie  $\mathcal{P}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\Omega$ , so daß für alle  $X \in \mathcal{G}$  gilt

$$p(\varrho \cdot X) = p_{\hat{\varrho}}(X) = \sup\{E_P(-X) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Also folgt für alle  $Y \in \mathcal{G}$

$$p(Y) = p(\varrho(\frac{Y}{\varrho})) = \sup\{E_P(-\frac{Y}{\varrho}) : P \in \mathcal{P}\}.$$

□

## 3.2 Erweiterung von Risikomaßen

In diesem Abschnitt werden Risikomaße nach den Ideen des Abschnitts 2.3 entwickelt. Der Grundgedanke ist, auf bestimmte Portfolios, Standard- oder Basisrisiken genannt, Absicherungskapitalforderungen festzulegen. Neue Risiken werden durch die Basisrisiken abgeschätzt und ihr absicherndes Kapital aus den Kapitalanforderungen der Standardrisiken errechnet.

### 3.2.1 Definition

Gegeben sei eine Menge  $\mathcal{Y}$  von Funktionen auf  $\Omega$  und  $X \in \mathcal{G}$ . Betrachtet wird eine Familie von nicht negativen Zahlen  $\mu = (\mu_Y)_{Y \in \mathcal{Y}}$ , von denen alle bis auf endlich viele gleich 0 sind. Ein Portfolio  $(\mu, \gamma)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , heißt **riskanter** als  $X$ , falls gilt:

$$X \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r.$$

Ist dies der Fall, so heißt  $(\mu, \gamma)$  auch **absicherndes Portfolio** für  $X$ . Mit  $S_Y(X)$  wird die Menge aller absichernden Portfolios für  $X$  bezeichnet.

**Bemerkung**

- Die Menge  $\mathcal{Y}$  ist die Menge der Standardrisiken.
- $\mu$  beschreibt ein Portfolio, das sich aus den Basisrisiken zusammensetzt.
- $\gamma$  gibt den Anteil an, der in die risikofreie Anlage investiert wird.

Damit ist

$$\left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r$$

der Wert des Basisportfolios.

**3.2.2 Bemerkung**

Da  $\Omega$  endlich ist, existiert zu jedem Risiko  $X$  ein absicherndes Portfolio; man betrachte dazu

$$(\mu, \gamma) = \left( 0, \min_{\omega \in \Omega} \frac{X(\omega)}{r} \right).$$

Das Ziel ist es, ein bestehendes Risikomaß  $\Psi$  auf  $\mathcal{Y}$  zu einem Risikomaß auf ganz  $\mathcal{G}$  zu erweitern.

**3.2.3 Definition**

Gegeben seien eine Menge  $\mathcal{Y}$  von Funktionen auf  $\Omega$  und eine Funktion  $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Psi$  heißt **zulässig**, falls für jedes absichernde Portfolio  $(\mu, \gamma)$  von  $X \equiv 0$  gilt:

$$\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma \geq 0.$$

**Bemerkung**

- $\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma$  ist die Kapitalanforderung für das Basisportfolio.
- Durch die zulässigen Funktionen ist sichergestellt, daß man keinen risikolosen Gewinn erzielen kann, denn betrachtet man eine nicht zulässige Funktion  $\Psi'$ , so existiert ein Portfolio  $(\mu', \gamma')$  mit

$$\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu'_Y \cdot \Psi'(Y) - \gamma' < 0.$$

Das bedeutet, man erhält für die Position  $X \equiv 0$  Geld.

**3.2.4 Bemerkung**

Ist  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von 0, so ist für alle  $c > 0$  auch  $(c \cdot \mu, c \cdot \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von 0.

Beweis:

Seien  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von 0 und  $c > 0$ . Dann gilt

$$X \equiv 0 \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r,$$

also auch  $0 \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} c \cdot \mu_Y \cdot Y \right] + c \cdot \gamma \cdot r$ . Damit ist  $(c \cdot \mu, c \cdot \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(0)$ . □

### 3.2.5 Proposition

Gegeben seien eine Menge  $\mathcal{Y}$  von Funktionen auf  $\Omega$  und eine Funktion  $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann wird durch

$$p_{\Psi}(X) = \inf_{(\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X)} \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma$$

genau dann ein kohärentes Risikomaß  $p_{\Psi}$  definiert, wenn  $\Psi$  zulässig ist.

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ Ist  $\Psi$  nicht zulässig, so existiert ein absicherndes Portfolio  $(\mu, \gamma)$  von 0 mit

$$\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma < 0.$$

Aus Bemerkung 3.2.4 folgt, daß  $(c \cdot \mu, c \cdot \gamma)$  für jedes  $c > 0$  ein absicherndes Portfolio von 0 ist, und es gilt

$$\sum_{Y \in \mathcal{Y}} c \cdot \mu_Y \cdot \Psi(Y) - c \cdot \gamma < 0.$$

Daraus folgt  $p_{\Psi}(0) = -\infty$ , und  $p_{\Psi}$  ist somit nicht kohärent.

„ $\Rightarrow$ “ Da  $\Psi$  zulässig ist, ist sichergestellt, daß für jedes absichernde Portfolio von 0 die zugehörige Kapitalanforderung nicht-negativ ist. Außerdem ist  $(0, 0)$  ein absicherndes Portfolio von  $0 \in \mathcal{G}$ , und es folgt  $p_{\Psi}(0) = 0$ .

(S) Seien  $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$ ,  $(\mu_1, \gamma_1) \in S_{\mathcal{Y}}(X_1)$  und  $(\mu_2, \gamma_2) \in S_{\mathcal{Y}}(X_2)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_{1Y} \cdot Y \right] + \gamma_1 \cdot r + \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_{2Y} \cdot Y \right] + \gamma_2 \cdot r \\ &= \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} (\mu_{1Y} + \mu_{2Y}) \cdot Y \right] + (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot r. \end{aligned}$$

Damit ist  $(\mu_1 + \mu_2, \gamma_1 + \gamma_2) \in S_{\mathcal{Y}}(X_1 + X_2)$ , also gilt

$$(*) \quad S_{\mathcal{Y}}(X_1) + S_{\mathcal{Y}}(X_2) \subseteq S_{\mathcal{Y}}(X_1 + X_2).$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} p_{\Psi}(X_1 + X_2) &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X_1 + X_2) \right\} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X_1) + S_{\mathcal{Y}}(X_2) \right\} \\ &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} (\mu_{1Y} + \mu_{2Y}) \cdot \Psi(Y) \right] - (\gamma_1 + \gamma_2) : \right. \\ &\quad \left. (\mu_1 + \mu_2, \gamma_1 + \gamma_2) \in S_{\mathcal{Y}}(X_1) + S_{\mathcal{Y}}(X_2) \right\} \\ &= p_{\Psi}(X_1) + p_{\Psi}(X_2) \end{aligned}$$

Damit gilt das Axiom S.

(PH) Ist  $\lambda > 0$  so gilt:

$$\begin{aligned} (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X) &\Leftrightarrow X \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r \\ &\Leftrightarrow \lambda \cdot X \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \lambda \cdot \mu_Y \cdot Y \right] + \lambda \cdot \gamma \cdot r \\ &\Leftrightarrow (\lambda \cdot \mu, \lambda \cdot \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(\lambda \cdot X), \end{aligned}$$

das bedeutet  $(\mu, \gamma)$  ist riskanter als  $X$  genau dann, wenn  $(\lambda \cdot \mu, \lambda \cdot \gamma)$  riskanter als  $\lambda \cdot X$  ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 p_\Psi(\lambda \cdot X) &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(\lambda \cdot X) \right\} \\
 &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : \left( \frac{1}{\lambda} \cdot \mu, \frac{1}{\lambda} \cdot \gamma \right) \in S_{\mathcal{Y}}(X) \right\} \\
 &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \lambda \cdot \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \lambda \cdot \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X) \right\} \\
 &= \lambda \cdot \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X) \right\} = \lambda \cdot p_\Psi(X),
 \end{aligned}$$

also gilt das Axiom PH.

(T) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ , und sei  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio zu  $X + \alpha \cdot r$ . Dann gilt:

$$X + \alpha \cdot r \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r,$$

also  $X \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + (\gamma - \alpha) \cdot r$ , d.h.  $(\mu, \gamma - \alpha)$  ist ein absicherndes Portfolio zu  $X$ .

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 p_\Psi(X + \alpha \cdot r) &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X + \alpha \cdot r) \right\} \\
 &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma - \alpha) \in S_{\mathcal{Y}}(X) \right\} \\
 &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - (\gamma + \alpha) : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X) \right\} = p_\Psi(X) - \alpha.
 \end{aligned}$$

(M) Seien  $X, Z \in \mathcal{G}$  mit  $X \leq Z$  und  $(\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X)$ . Dann gilt

$$Z \geq X \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r.$$

Also ist  $(\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(Z)$ , und es gilt

$$(*) \quad S_{\mathcal{Y}}(Z) \supseteq S_{\mathcal{Y}}(X).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 p_\Psi(Z) &= \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(Z) \right\} \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(X) \right\} = p_\Psi(X).
 \end{aligned}$$

□



### 3.2.6 Satz

$p_\Psi$  ist das größte kohärente Maß  $p$  mit  $p \leq \Psi$  auf  $\mathcal{Y}$ .

Beweis:

Seien  $p$  ein kohärentes Risikomaß auf  $\mathcal{Y}$  mit  $p \leq \Psi$  und  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von  $X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(X) &\stackrel{\bar{M}}{\leq} p\left(\left[\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y\right] - \gamma \cdot r\right) \stackrel{\bar{T}}{=} p\left(\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y\right) - \gamma \\ &\stackrel{\bar{S}}{\leq} \sum_{Y \in \mathcal{Y}} p(\mu_Y \cdot Y) - \gamma \quad \stackrel{\bar{P}H}{=} \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot p(Y) - \gamma \leq \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für jedes absichernde Portfolio von  $X$  gilt, folgt  $p(X) \leq p_\Psi(X)$ . Sei  $Y \in \mathcal{Y}$ . Das Portfolio  $(\mu, 0)$  mit  $\mu_Y = 1$  und  $\mu_{Y'} = 0$  für  $Y' \neq Y$  ist riskanter als  $Y$ . Damit ist  $p_\Psi(Y) \leq \Psi(Y)$ . Insgesamt gilt daher für alle  $Y \in \mathcal{Y}$ :

$$p(Y) \leq p_\Psi(Y) \leq \Psi(Y),$$

also die Behauptung. □

### 3.2.7 Bemerkung

Je weniger anfängliche Standardrisiken betrachtet werden, umso konservativer ist das gewonnene kohärente Risikomaß. Dieses Verhalten ähnelt dem der SEC-Regeln. Abschnitt 2.3 hat gezeigt, daß zu wenige Standardrisiken betrachtet wurden.

Ausgehend von  $\Psi$  kann aufgrund der Zulässigkeit ein kohärentes Risikomaß  $p_\Psi$  konstruiert werden.  $p_\Psi$  hat den Nachteil, daß es auf den Basisrisiken nicht mit  $\Psi$  übereinstimmt. Insofern ist  $p_\Psi$  keine Fortsetzung von  $\Psi$ . Damit  $\Psi$  tatsächlich zu einem kohärenten Risikomaß fortgesetzt werden kann, muß eine stärkere Bedingung als die Zulässigkeit an  $\Psi$  gestellt werden:

### 3.2.8 Definition

Gegeben seien eine Menge  $\mathcal{Y}$  von Funktionen auf  $\Omega$  und eine Funktion  $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Psi$  heißt **stark zulässig**, falls für jedes  $Z \in \mathcal{Y}$  und jedes absichernde Portfolio  $(\mu, \gamma)$  von  $Z$  gilt:

$$\Psi(Z) \leq \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma.$$

### Bemerkung

Ist  $\Psi$  stark zulässig, so ist gewährleistet, daß kein  $Z \in \mathcal{Y}$  durch eine Aufteilung in ein Portfolio verbessert werden kann, d.h jedes riskantere Portfolio  $(\mu, \gamma)$  benötigt ein größeres Risikokapital.

- $\Psi(Z)$  gibt das Risikokapital von  $Z$  an,
- $\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma$  ist das Risikokapital des Portfolios  $(\mu, \gamma)$ .

### 3.2.9 Bemerkung

Ist  $\Psi$  stark zulässig, so ist es auch zulässig.

Beweis:

Seien  $\mathcal{Y}$  und  $\Psi$  so gewählt, daß  $\Psi$  zulässig ist. Sei  $Z \in \mathcal{Y}$  sowie  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von  $Z$ , dann gilt

$$\Psi(Z) \leq \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma,$$

also

$$0 \leq \sum_{Y \in \mathcal{Y}, Y \neq Z} \mu_Y \cdot \Psi(Y) + (\mu_Z - 1) \cdot \Psi(Z) - \gamma.$$

Da  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von  $Z$  ist, gilt

$$Z \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r,$$

also  $0 \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}, Y \neq Z} \mu_Y \cdot Y \right] + (\mu_Z - 1) \cdot Z + \gamma \cdot r$ . Somit kann man jedes absichernde Portfolio  $(\mu, \gamma)$  von  $Z$  in ein absicherndes Portfolio  $(\tilde{\mu}, \tilde{\gamma})$  von 0 umrechnen und umgekehrt in der folgenden Weise:

$$\tilde{\mu}_Y = \mu_Y \quad \text{für } Y \neq Z \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}_Z = \mu_Z - 1.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \tilde{\mu}_Y \cdot \Psi(Y) - \tilde{\gamma} &= \sum_{Y \in \mathcal{Y}, Y \neq Z} \tilde{\mu}_Y \cdot \Psi(Y) + \tilde{\mu}_Z \cdot \Psi(Z) - \tilde{\gamma} \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{Y}, Y \neq Z} \mu_Y \cdot \Psi(Y) + (\mu_Z - 1) \cdot \Psi(Z) - \gamma \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\Psi$  zulässig. □

### 3.2.10 Proposition

Gegeben seien eine Menge  $\mathcal{Y}$  von Funktionen auf  $\Omega$  und eine Funktion  $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , die stark zulässig ist. Dann ist das kohärente Risikomaß  $p_\Psi$  die größtmögliche Erweiterung von  $\Psi$  zu einem kohärenten Risikomaß.

Beweis:

(1) Sei  $Z \in \mathcal{Y}$ . Da  $\Psi$  stark zulässig ist, gilt für jedes absichernde Portfolio  $(\mu, \gamma)$  von  $Z$

$$\Psi(Z) \leq \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) - \gamma,$$

also auch

$$\Psi(Z) \leq \inf \left\{ \left[ \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \mu_Y \cdot \Psi(Y) \right] - \gamma = p_\Psi(Z) : (\mu, \gamma) \in S_{\mathcal{Y}}(Z) \right\}.$$

Damit gilt  $\Psi \leq p_\Psi$  auf  $\mathcal{Y}$ . Mit Satz 3.2.6 folgt  $\Psi = p_\Psi$  auf  $\mathcal{Y}$ .

(2) Sei  $p$  ein kohärentes Risikomaß, ebenfalls eine Erweiterung von  $\Psi$ . Da  $p = \Psi$  auf  $\mathcal{Y}$ , also insbesondere  $p \leq \Psi$  auf  $\mathcal{Y}$  ist, liefert Proposition 3.2.6  $p \leq p_\Psi$ . □

### 3.2.11 Satz

Ein Risikomaß  $p$  ist kohärent genau dann, wenn  $p$  von der Form  $p_\Psi$  für eine zulässige Funktion  $\Psi$  ist.

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ Dies ist mit Proposition 3.2.5 für  $p = p_\Psi$  schon bewiesen worden.

„ $\Rightarrow$ “ Setze  $\Psi = p$  und  $\mathcal{Y} = \mathcal{G}$ . Sei  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von  $X$ , also

$$X \geq \left[ \sum_{Y \in \mathcal{G}} \mu_Y \cdot Y \right] + \gamma \cdot r.$$

Dann gilt:

$$p(X) \stackrel{M}{\leq} p\left(\left[\sum_{Y \in \mathcal{G}} \mu_Y \cdot Y\right] + \gamma \cdot r\right) \stackrel{T}{=} p\left(\sum_{Y \in \mathcal{G}} \mu_Y \cdot Y\right) - \gamma \stackrel{S}{\leq} \sum_{Y \in \mathcal{G}} p(\mu_Y \cdot Y) - \gamma$$

Damit ist  $p$  stark zulässig. Da  $\mathcal{Y} = \mathcal{G}$  ist, folgt  $p_\Psi = \psi = p$  aus Proposition 3.2.10. □

### 3.2.12 Folgerung

Ist  $\Psi$  eine zulässige Funktion auf ganz  $\mathcal{G}$ , so kann man die Funktion  $p_\Psi$  mit Hilfe des Darstellungssatzes 3.1.1 auf folgende Weise beschreiben:

$$p_\Psi(X) = \sup\{E_P(-\frac{X}{r}) \mid P \in \mathcal{P}_\Psi\}$$

mit  $\mathcal{P}_\Psi = \{P \mid \text{für alle } X \in \mathcal{G} : E_P(-\frac{X}{r}) \leq \Psi(X)\}$

Beweis:

Sei  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  mit

$$E_P(-\frac{X}{r}) \leq \Psi(X) \quad \text{für alle } X \in \mathcal{G}.$$

Dann gilt  $E_P(-\frac{\bullet}{r}) \leq \Psi(\bullet)$ . Da  $E_P(-\frac{\bullet}{r})$  kohärent ist, folgt mit Satz 3.2.6  $E_P(-\frac{\bullet}{r}) \leq p_\Psi(\bullet)$  und damit die Behauptung. □

## 3.3 Risikomaße bei unterschiedlichen Risikoklassen

Proposition 3.2.10 kann auf irgendeine Menge  $\mathcal{Y}$  von Risiken angewendet werden, auch wenn diese überhaupt keine Struktur besitzt. Es kann die Vereinigung einer Familie

$$(\mathcal{Y}_j)_{j \in J}$$

von Mengen von Risiken sein. Dabei ist für jedes  $j$  eine Funktion  $\Psi_j$  auf  $\mathcal{Y}_j$  mit

$$\Psi_j = \Psi_{j'} \quad \text{auf } \mathcal{Y}_j \cap \mathcal{Y}_{j'}$$

gegeben. Die Funktion  $\Psi$  ist dann definiert als ihre Einschränkung auf jedes  $\mathcal{Y}_j$ . Die verschiedenen Mengen  $\mathcal{Y}_i$  können Börsenrisiken auf der einen Seite und over-the-counter-Risiken auf der anderen Seite sein oder aber auch Markt- und Kreditrisiken. Die Funktionen  $\Psi_j$  können von vorgegebenen Regeln, die von der Börse oder den Regulierern aufgestellt worden sind, kommen ([Basle]).

### 3.3.1 Bemerkung

Angenommen, die  $\Psi_j$  sind stark zulässig. Dann erlaubt einem Proposition 3.2.10, ein kohärentes Risikomaß „mechanisch“ zu berechnen. Dieses erweitert die Familie der  $\Psi_j$  und dominiert jedes andere kohärente von der Börse oder den Regulatoren zur Erweiterung der Familie  $\Psi_j$  gewählte Risikomaß. Es liefert daher ein konservatives kohärentes Werkzeug zum Risikomanagement.

### 3.3.2 Beispiel

Betrachte den Spezialfall  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  mit kohärenten Risikomaßen  $p_i$  auf  $\mathcal{G}_i$ ,  $i = 1, 2$ .  $\mathcal{Y}_i$  seien die Mengen aller Funktionen auf  $\Omega$  der Form

$$f_i \circ pr_i.$$

Dabei ist  $f_i$  eine Funktion aus  $\mathcal{G}_i$  und  $pr_i$  die Projektion von  $\Omega$  auf die  $i$ -te Komponente.  $\Psi_i$  wird auf  $\mathcal{Y}_i$  definiert durch

$$\Psi_i(f_i \circ pr_i) = p_i(f_i).$$

(1)  $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$  besteht nur aus konstanten Funktionen. Damit sind  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  auf  $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$  gleich.

Beweis:

Ist  $g \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ , so existieren Funktionen  $f_1, f_2$  mit  $g = f_1 \circ pr_1 = f_2 \circ pr_2$ . Damit gilt

$$f_1(\omega_i) = f_2(\omega_j) \quad \text{für alle } \omega_i \in \Omega_1, \omega_j \in \Omega_2.$$

Also ist  $f_1 = f_2$  konstant. □

(2)  $\Psi_1, \Psi_2$  definieren eine stark zulässige Funktion  $\Psi$  auf  $\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ .

Beweis:

Seien  $Z \in \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$  und  $(\mu, \gamma)$  ein absicherndes Portfolio von  $Z$ . O. E. ist  $Z \in \mathcal{Y}_1$ . Damit existiert eine Funktion  $f_1 \in \mathcal{G}_1$  mit

$$Z = f_1 \circ pr_1.$$

Dann gilt für alle  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$

$$\begin{aligned} (f_1 \circ pr_1)(\omega_1, \omega_2) = Z(\omega_1, \omega_2) &\geq \left( \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2} \mu_Y \cdot Y + \gamma \cdot r \right)(\omega_1, \omega_2) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot Y(\omega_1, \omega_2) + \sum_{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot Y(\omega_1, \omega_2) + \gamma \cdot r \\ &= \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_1}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_1) + \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_2) + \gamma \cdot r \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle  $(\omega_1, \omega_2)$  aus  $\Omega_1 \times \Omega_2$  gilt, folgt

$$f_1 \geq \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot Y + \sup_{\omega_2 \in \Omega_2} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_2) + \gamma \cdot r.$$

Insgesamt gilt nun:

$$\begin{aligned}
 \Psi(Z) &= \Psi_1(f_1 \circ pr_1) = p_1(f_1) \leq \frac{1}{M} \left( \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot Y + \sup_{\omega_2 \in \Omega_2} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_2) + \gamma \cdot r \right) \\
 &\stackrel{T}{=} p_1 \left( \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot Y \right) - \frac{1}{r} \cdot \sup_{\omega_2 \in \Omega_2} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_2) - \gamma \\
 &\stackrel{S, \overline{P}H}{\leq} \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot p_1(Y) - \frac{1}{r} \cdot \sup_{\omega_2 \in \Omega_2} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_2) - \gamma \\
 &\stackrel{T}{=} \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot p_1(Y) + p_2 \left( \sup_{\omega_2 \in \Omega_2} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot f_Y(\omega_2) \right) - \gamma \\
 &\stackrel{M}{\leq} \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot p_1(Y) + p_2 \left( \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1, \\ Y = f_Y \circ pr_2}} \mu_Y \cdot (f_Y \circ pr_2) \right) - \gamma \\
 &= \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot p_1(Y) + p_2 \left( \sum_{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot Y \right) - \gamma \\
 &\stackrel{S, \overline{P}H}{\leq} \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot p_1(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{Y}_2 \setminus \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot p_2(Y) - \gamma \\
 &= \sum_{Y \in \mathcal{Y}_1} \mu_Y \cdot \Psi_1(Y \circ pr_1) + \sum_{Y \in \mathcal{Y}_2} \mu_Y \cdot \Psi_2(Y \circ pr_2) - \gamma
 \end{aligned}$$

Damit ist  $\Psi$  stark zulässig. □

Auf diese Weise kann man die Funktion  $\Psi$  auch aus beliebig vielen  $\Omega_i$  konstruieren.

Sei  $\mathcal{P}_i$  die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße, die  $p_i$  darstellen, d.h.

$$p_i(X) = \sup \left\{ E_P \left[ -\frac{X}{r} \right] \mid P \in \mathcal{P}_i \right\}.$$

Sei  $\mathcal{P}$  die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\Omega$  mit Komponenten in  $\mathcal{P}_1$  bzw. in  $\mathcal{P}_2$  und

$$p_{\mathcal{P}}(X) = \sup \left\{ E_P \left[ -\frac{X}{r} \right] \mid P \in \mathcal{P} \right\}.$$

Der folgende Satz zeigt, daß das Risikomaß  $p_{\Psi}$ , welches das größte kohärente Risikomaß ist, das  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  erweitert (vgl. Proposition 3.2.10), auf der Menge  $\mathcal{G}$  gleich dem Risikomaß  $p_{\mathcal{P}}$  ist.

### 3.3.3 Satz

Die zwei Risikomaße  $p_{\mathcal{P}}$  und  $p_{\Psi}$  sind gleich.

Beweis:

„ $\leq$ “ Für jede Funktion  $f_i$  auf  $\Omega_i$  gilt:

$$\begin{aligned}
 p_{\mathcal{P}}(f_i \circ pr_i) &= \sup \left\{ E_P \left[ -\frac{f_i \circ pr_i}{r} \right] : P \circ pr_1^{-1} \in \mathcal{P}_1, P \circ pr_2^{-1} \in \mathcal{P}_2 \right\} \\
 &= \sup \left\{ E_{P \circ pr_i^{-1}} \left[ -\frac{f_i}{r} \right] : P \circ pr_i^{-1} \in \mathcal{P}_i \right\} = p_i(f_i) = \Psi_i(f_i \circ pr_i).
 \end{aligned}$$

Also ist die Einschränkung von  $p_{\mathcal{P}}$  auf  $\mathcal{Y}_i$  gleich  $\Psi_i$ . Daraus folgt  $p_{\mathcal{P}} \leq p_{\Psi}$  mit Proposition 3.2.5.

„ $\geq$ “ Im Beweis des Darstellungssatzes 3.1.1 wurde gezeigt

$$p_{\mathcal{P}}(X) = \sup\{E_P[-\frac{X}{r}] : P \in \mathcal{P}\} \quad \text{mit } \mathcal{P} = \{P | E_P[-\frac{X}{r}] \leq p_{\mathcal{P}}(X) \text{ für alle } X \in \mathcal{G}\},$$

$$p_{\Psi}(X) = \sup\{E_Q[-\frac{X}{r}] : Q \in \mathcal{P}_{\Psi}\} \quad \text{mit } \mathcal{P}_{\Psi} = \{Q | E_Q[-\frac{X}{r}] \leq p_{\Psi}(X) \text{ für alle } X \in \mathcal{G}\}.$$

Zu zeigen ist nun  $\mathcal{P}_{\Psi} \subseteq \mathcal{P}$ , denn dann gilt

$$p_{\mathcal{P}} \geq p_{\Psi}.$$

d. h. zu zeigen ist, daß jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  auf  $\Omega$  mit  $E_Q[-\frac{X}{r}] \leq p_{\Psi}(X)$  für alle  $X \in \mathcal{G}$  Komponenten  $Q_1$  und  $Q_2$  in  $\mathcal{P}_1$  bzw. in  $\mathcal{P}_2$  hat. Sei dazu  $Q$  ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann ist  $E_Q[-\frac{f_i \circ pr_i}{r}] = E_{Q_i}[-\frac{f_i}{r}]$ , also gilt

$$E_{Q_i}[-\frac{f_i}{r}] \leq p_{\Psi}(f_i \circ pr_i) = p_{\mathcal{P}}(f_i \circ pr_i) \quad \text{für jedes } f_i \in \mathcal{G}_i.$$

Die letzte Gleichheit wurde beim Beweis der anderen Ungleichung gezeigt. Damit gilt  $Q_i \in \mathcal{P}_i$ . □

## 3.4 Kohärente Risikomaße und Preisbewertung von Derivaten im Einperiodenmodell

Es wird ein arbitragefreier Markt angenommen. Sei  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ . Es werden  $N$  Finanzgüter am Markt gehandelt, deren zufälliger Wert  $S = (S_1, \dots, S_N)$  am Ende der Handelsperiode durch

$$S_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, N\}$$

modelliert wird.  $r$  ist die Zinsrate der risikofreien Anlage.

### 3.4.1 Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  heißt **risikoneutral**, falls gilt:

$$E_Q\left(\frac{S_i}{r}\right) = 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, N\}.$$

### 3.4.2 Bemerkung

Die Menge  $Q_r$  der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße ist nicht leer, konvex und abgeschlossen.

Beweis:

Die Arbitragefreiheit impliziert, daß die Menge  $Q_r$  nicht leer ist. Seien  $Q, P \in Q_r$  und  $\lambda > 0$ . Dann gilt für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ :

$$\begin{aligned} E_{\lambda Q + (1-\lambda)P}\left(\frac{S_i}{r}\right) &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{S_i(\omega)}{r} (\lambda Q(\omega) + (1-\lambda)P(\omega)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{S_i(\omega)}{r} \lambda Q(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \frac{S_i(\omega)}{r} (1-\lambda)P(\omega) \\ &= \lambda + 1 - \lambda = 1. \end{aligned}$$

Damit ist  $Q_r$  konvex. Die Abgeschlossenheit folgt durch ähnliche Rechnungen. □

### 3.4.3 Definition (Claim und Hedge)

Ein **Claim** ist eine Zufallsgröße

$$C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ein Portfolio  $x \in \mathbb{R}^N$  heißt **Hedge**, falls der Wert  $H$  des Portfolios am Ende der Handelsperiode mit dem Wert des Claims bei jeder zufälligen Entwicklung übereinstimmt, d.h.

$$H = x^T S = C.$$

Es wird nicht vorausgesetzt, daß es zu jedem Claim einen Hedge gibt. Ein Claim heißt **hedgbar**, falls ein Hedge existiert.

#### Bemerkung

Ein Claim berechtigt den Inhaber zum Erhalt der im allgemeinen zufälligen Auszahlung  $C$  am Ende der Periode. Claims sind z. B. Optionen oder Futures.

### 3.4.4 Definition (upper und lower hedging)

Sei  $\mathcal{H}$  der Raum der hedgbaren Claims und  $Q$  ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann wird für einen Claim  $C$  der **upper hedging price** definiert durch:

$$s_+(C) := \inf\{E_Q(\frac{H}{r}) \mid H \in \mathcal{H}, H \geq C\}$$

und der **lower hedging price** durch:

$$s_-(C) := \sup\{E_Q(\frac{H}{r}) \mid H \in \mathcal{H}, H \leq C\}.$$

Dabei setzt man  $\inf \emptyset = +\infty$  und  $\sup \emptyset = -\infty$ .

### 3.4.5 Bemerkung

Damit die Arbitragefreiheit des Marktes erhalten bleibt, wird der Preis  $s(C)$  eines hedgbaren Claims zum Zeitpunkt 0 festgesetzt als Preis des Hedges zum Zeitpunkt 0. Mit Hilfe eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  kann man den Preis beschreiben durch (vgl. [Irle]):

$$s(C) = E_Q(\frac{C}{r}).$$

Bei Vorliegen eines nicht hedgbaren Claims  $C$  bleibt die Arbitragefreiheit erhalten wenn

$$s(C) \in [s_-(C), s_+(C)] = \{E_Q(\frac{C}{r}) : Q \in \mathcal{Q}_r\}$$

gilt.

### 3.4.6 Kohärente Risikomaße und Claimpreise

Sei  $p$  ein Risikomaß. Bei der Preisbewertung von Claims wird an Finanzmärkten folgende Eigenschaft gefordert:

**Forderung** Für alle Risikomaße  $p$  und alle Claims  $C$  mit  $p(C) \leq 0$  gilt

$$s(C) \geq 0.$$

#### Bemerkung

Durch dieses Forderung soll verhindert werden, daß man kostenfrei eine Position beliebig oft zu seinem Portfolio hinzufügen kann, ohne zusätzliches Kapital anzufordern.

Sei  $p$  ein kohärentes Risikomaß auf  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{P}$  die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße  $P$  auf  $\Omega$  mit

$$E_P\left(-\frac{C}{r}\right) \leq p(C) \quad \text{für alle Claims } C.$$

Mit dem Darstellungssatz folgt

$$p(C) = \sup\{E_P\left(-\frac{C}{r}\right) \mid P \in \mathcal{P}\}.$$

**Angenommen:** Die Menge  $Q_r$  ist keine Teilmenge von  $\mathcal{P}$ . Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  und ein zukünftiger Nettoendwert  $C$  mit

$$p(C) < E_Q\left(-\frac{C}{r}\right)$$

d.h.  $E_Q\left(\frac{C}{r}\right) + p(C) < 0$ . Das um das Finanzgut  $C$  erweiterte Modell bleibt arbitragefrei, wenn  $s(C) = E_Q\left(-\frac{C}{r}\right)$  gilt. Definiert man  $Z$  durch  $Z = C + p(C) \cdot r$ , so erhält man:

$$p(Z) = p(C + p(C) \cdot r) \stackrel{=}{=} p(C) - p(C) = 0.$$

Also ist  $p(C)$  das erforderliche Risikokapital, damit die Position  $C$  risikoneutral wird. Andererseits gilt

$$s(Z) = E_Q\left(\frac{Z}{r}\right) = E_Q\left(\frac{C}{r} + p(C)\right) = E_Q\left(\frac{C}{r}\right) + p(C) < 0.$$

Damit ist die obige Forderung verletzt.  $\nexists$  Also gilt  $Q_r \subseteq \mathcal{P}$ .

Für alle  $Y \in \mathcal{G}$  folgt

$$p(Y) \geq \sup_{Q \in Q_r} E_Q\left(-\frac{Y}{r}\right).$$

Ist  $Y$  ein hedgebarer Claim, so gilt  $p(Y) \geq s(-Y)$ . Dies ist sinnvoll, da  $-Y$  ein Hedge für  $Y$  ist. Ist der Claim  $Y$  nicht hedgebar, so gilt:

$$p(Y) = \sup_{Q \in Q_r} E_Q\left(-\frac{Y}{r}\right) = s_+(-Y).$$

Das bedeutet, daß das Risikomaß  $p$  für einen nicht hedgebaren Claim genug Risikokapital errechnet, um den besten upper hedging price für  $-Y$  bezahlen zu können. Insgesamt stellt man fest, daß, wenn man die risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße kennt, das kohärente Risikomaß  $p$  eine gute Risikobewertung für jeden Claim  $C$  liefert.



# Kapitel 4

## Kohärente Risikomaße und Value-at-Risk

### 4.1 Risikomaß der schlechtesten bedingten Erwartung

In diesem Kapitel wird mit Hilfe des nicht kohärenten Risikomaßes Value-at-Risk ein kohärentes Maß entwickelt.

#### 4.1.1 Definition (Risikomaße TCE und WCE)

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $\Omega$ , die total rate of return  $r$  des Referenzinstrumentes und ein Level  $\alpha \in (0, 1)$ .

(i) Die **Tail conditional expectation** ist das Risikomaß, definiert durch

$$\text{TCE}_\alpha(X) = -E_P\left[\frac{X}{r} \mid \frac{X}{r} \leq -\text{VaR}_\alpha(X)\right].$$

Dabei gilt:  $\{\frac{X}{r} \leq -\text{VaR}_\alpha(X)\} = \{\omega \in \Omega \mid \frac{X(\omega)}{r} \leq \inf\{x \mid P(\frac{X}{r} \leq x) > \alpha\}\}$ .

(ii) Die **schlechteste bedingte Erwartung** ist das Risikomaß, definiert durch

$$\text{WCE}_\alpha(X) = -\inf\{E_P\left[\frac{X}{r} \mid A\right] : P(A) > \alpha\}.$$

#### 4.1.2 Bemerkung

$\text{WCE}_\alpha$  ist kohärent.

Beweis:

Für  $\alpha > 0$  setze  $\mathcal{P} = \{P_A = P(\cdot \mid A) : A \subseteq \Omega \text{ mit } P(A) > \alpha\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{WCE}_\alpha(X) &= -\inf\{E_P\left[\frac{X}{r} \mid A\right] : P(A) > \alpha\} = \sup\{E_P\left[-\frac{X}{r} \mid A\right] : P(A) > \alpha\} \\ &= \sup\{E_{P_A}\left[-\frac{X}{r}\right] : P_A \in \mathcal{P}\}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{WCE}_\alpha$  aufgrund des Darstellungssatzes 3.1.1 kohärent. □

#### 4.1.3 Proposition

Es gilt  $\text{TCE}_\alpha \leq \text{WCE}_\alpha$ .

Beweis:

Seien  $Y := \frac{X}{r}$  und  $q_\alpha^+(Y)$  das  $\alpha$ -Quantil zu  $Y$ .

1. Fall: Es gilt  $P(Y \leq -\text{VaR}_\alpha(X)) > \alpha$ , d.h. das Infimum wird nicht angenommen. Dann folgt mit

$$M = \{\omega \in \Omega | Y(\omega) \leq -\text{VaR}_\alpha(X)\}$$

$$\text{TCE}_\alpha(X) = -E\left[\frac{X}{r} | M\right] \underset{P(M) > \alpha}{\leq} -\inf\{E_P\left[\frac{X}{r} | A\right] : P(A) > \alpha\} = \text{WCE}_\alpha(X).$$

2. Fall: Es gilt  $P(Y \leq -\text{VaR}_\alpha(X)) = F_Y(q_\alpha^+(Y)) = \alpha$ , wobei  $F_Y$  die Verteilungsfunktion von  $Y$  bzgl.  $P$  ist. Aus der Definition von  $q_\alpha^+$  und der Monotonie von  $F_Y$  folgt, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt :

$$F_Y(\varepsilon + q_\alpha^+(Y)) > \alpha.$$

Definiere  $A_\varepsilon := \{\omega | Y(\omega) \leq \varepsilon + q_\alpha^+(Y)\}$ . Dann ist  $P(A_\varepsilon) > \alpha$  und

$$\text{WCE}_\alpha(X) \geq -E_P[Y | A_\varepsilon] = -\frac{E_P[Y \cdot 1_{A_\varepsilon}]}{P(A_\varepsilon)}.$$

Damit folgt mit der rechtsseitigen Stetigkeit von  $F_Y$  und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(A_\varepsilon) = F_Y(q_\alpha^+(Y))$  sowie  $A_\varepsilon \downarrow A_0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -E_P(Y | A_\varepsilon) = -E_P(Y | A_0) = \text{TCE}_\alpha(X).$$

□

#### 4.1.4 Proposition

Für jedes Risiko  $X$  gilt:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{p(X) | p \text{ kohärent und } p \geq \text{VaR}_\alpha\}.$$

Zum Beweis wird das folgende Lemma benötigt:

#### 4.1.5 Lemma

Sei  $p$  ein kohärentes Risikomaß und  $\mathcal{P}$  die Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus dem Darstellungssatz 3.1.1, d.h.

$$p(X) = \sup\{E_P(-\frac{X}{r}) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $p \geq \text{VaR}_\alpha$ .

(ii) Für alle  $B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) > \alpha$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $Q \in \mathcal{P}$  mit

$$Q(B) > 1 - \varepsilon.$$

Beweis:

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) > \alpha$ . Setze  $X := -r \cdot 1_B$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(-r \cdot 1_B) &= -\inf\{x | P(-r \cdot 1_B \leq x \cdot r) > \alpha\} = -\inf\{x | P(-1_B \leq x) > \alpha\} \\ &= -\inf\{-1\} = 1 \end{aligned}$$

Damit folgt mit Hilfe von (i):

$$1 \leq p(-r \cdot 1_B) \stackrel{3.1.1}{=} \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(1_B) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} Q(B).$$

Also existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $Q \in \mathcal{P}$  mit  $Q(B) \geq 1 - \varepsilon$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $q_\alpha^+(\frac{X}{r})$  das  $\alpha$ -Quantil von  $\frac{X}{r}$ , also  $-q_\alpha^+(\frac{X}{r}) = \text{VaR}_\alpha(X)$ . Dann ist

$$P(X \leq q_\alpha^+(\frac{X}{r}) \cdot r) \geq \alpha.$$

Damit gilt  $P(X \leq (q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot r) > \alpha$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $Q \in \mathcal{P}$  ein nach Voraussetzung existierendes Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$Q(X \leq (q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot r) \geq 1 - \varepsilon.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} E_Q(-\frac{X}{r}) &= \int -\frac{X}{r} dQ = \int_{X \leq (q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot r} -\frac{X}{r} dQ + \int_{X > (q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot r} -\frac{X}{r} dQ \\ &\geq -(q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot Q(X \leq (q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot r) - \sup[\frac{X}{r}] \cdot Q(X > (q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot r) \\ &\geq -(q_\alpha^+(\frac{X}{r}) + \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon) - \sup \frac{X}{r} \cdot \varepsilon \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} -q_\alpha^+(\frac{X}{r}). \end{aligned}$$

Damit existiert ein  $Q \in \mathcal{P}$  mit  $E_Q(\frac{X}{r}) \geq -q_\alpha^+(\frac{X}{r})$ , also gilt  $p(X) \geq -q_\alpha^+(\frac{X}{r})$ . □

Beweis: (von Proposition 4.1.4)

Seien  $0 < \alpha < 1$  und  $X \in \mathcal{G}$ .  $q_\alpha^+(\frac{X}{r})$  bezeichne das  $\alpha$ -Quantil von  $\frac{X}{r}$ . Mit Definition 2.4.1(b) gilt

$$P(\frac{X}{r} \geq q_\alpha^+(\frac{X}{r})) \geq 1 - \alpha.$$

Für jede Menge  $B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) > \alpha$  ist

$$P(B \cap \{X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})\}) > 0,$$

denn wäre  $P(B \cap \{X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})\}) = 0$ , so würde  $1 = P(\Omega) \geq P(B) + P(X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})) > \alpha + 1 - \alpha = 1$  folgen  $\zeta$ . Daher kann man für jedes  $B \subseteq \Omega$  und jedes  $X \in \mathcal{G}$  das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$Q_{B,X} := P(\cdot | B \cap \{X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})\})$$

definieren. Sei  $\mathcal{P}_X := \{Q_{B,X} | B \subseteq \Omega \text{ mit } P(B) > \alpha\}$  und  $p_X$  das durch  $\mathcal{P}_X$  definierte kohärente Risikomaß, also

$$p_X(Y) = \sup\{E_Q(-\frac{Y}{r}) | Q \in \mathcal{P}_X\}.$$

Dann gilt:

(i)  $p_X \geq \text{VaR}_\alpha$  für alle  $X \in \mathcal{G}$ ,

(ii)  $\inf_{X \in \mathcal{G}} p_X = \text{VaR}_\alpha$ .

**zu (i):** Ist  $B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) > \alpha$ , so gilt:

$$Q_{B,X}(B) = P(B | B \cap \{X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})\}) = \frac{P(B \cap \{X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})\})}{P(B \cap \{X \geq r \cdot q_\alpha^+(\frac{X}{r})\})} = 1.$$

Damit folgt (i) aus dem Lemma 4.1.5.

zu (ii): Sei  $Y \in \mathcal{G}$ . Für das kohärente Risikomaß  $p_Y$  folgt  $p_Y(Y) = \text{VaR}_\alpha(Y)$ , denn für alle  $B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) > \alpha$  gilt

$$E_{Q_{B,Y}}\left(-\frac{Y}{r}\right) = E_P\left(-\frac{Y}{r} \mid B \cap \{Y > r \cdot q_\alpha^+\left(\frac{Y}{r}\right)\}\right) \leq -q_\alpha^+\left(\frac{Y}{r}\right) = \text{VaR}_\alpha(Y)$$

Damit ist  $p_Y(Y) \leq \text{VaR}_\alpha(Y)$ . Mit (i) folgt die Gleichheit.

Aus (i) und (ii) folgt die Behauptung. □

#### 4.1.6 Proposition

Sei  $P$  die Laplace-Verteilung auf  $\Omega$ . Ist  $X \in \mathcal{G}$  derart, daß

$$\frac{X(\omega_1)}{r} \neq \frac{X(\omega_2)}{r} \quad \text{für alle } \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ mit } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ gilt,}$$

so folgt  $\text{TCE}_\alpha(X) = \text{WCE}_\alpha(X)$ .

Beweis:

Sei  $\alpha \in (0, 1)$ .  $q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right)$  bezeichne das  $\alpha$ -Quantil von  $\frac{X}{r}$ . Damit gilt

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right).$$

Setze  $Y := \frac{X}{r}$ . Seien  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  die Bilder von  $Y$  unter  $\Omega$ . Dann ist

$$q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right) = \inf\{x \mid P(Y \leq x) > \alpha\} = q_\alpha^+(Y).$$

Sei  $k \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k < n$  und  $\alpha \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ . Zeige zunächst

$$q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right) = y_{k+1}.$$

Für jedes  $u > q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right)$  gilt aufgrund der Laplace-Verteilung  $\alpha < P(Y \leq u) = \frac{\#\{i \mid y_i \leq u\}}{n}$ , also ist die natürliche Zahl  $\#\{i \mid y_i \leq u\}$  echt größer als  $\alpha \cdot n$  und somit, durch die Wahl von  $k$ , mindestens  $k+1$ .

Setzt man  $u = y_{k+1}$ , so folgt  $\#\{i \mid y_i \leq u\} = \min_{v > q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right)} \#\{i \mid y_i \leq v\}$  und damit gilt

$$y_{k+1} = q_\alpha^+(Y) = q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right).$$

Definiert man eine Menge  $B \subseteq \Omega$  durch  $B = \{X \leq q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right) \cdot r\}$ , so gilt

(i)  $Y(B) = \{y_1, \dots, y_{k+1}\}$ ,

(ii)  $\text{TCE}_\alpha(X) = -E\left(\frac{X}{r} \mid X \leq q_\alpha^+\left(\frac{X}{r}\right) \cdot r\right) = -E(Y \mid B) = -\frac{y_1 + \dots + y_{k+1}}{k+1}$  (Laplace-Verteilung),

(iii)  $\text{WCE}_\alpha(X) = -\inf\{E_P\left[\frac{X}{r} \mid A\right] \mid P(A) > \alpha\} = -\inf\left\{\frac{E_P(Y \cdot 1_A)}{P(A)} \mid P(A) > \alpha\right\}$ .

Damit bleibt zu zeigen: Für alle  $A \subseteq \Omega$  mit  $P(A) > \alpha$  gilt

$$\frac{E_P(Y \cdot 1_A)}{P(A)} > \frac{y_1 + \dots + y_{k+1}}{k+1},$$

denn dann gilt  $\text{WCE}_\alpha(X) \leq \text{TCE}_\alpha(X)$ , und mit Proposition 4.1.3 folgt  $\text{WCE}_\alpha(X) = \text{TCE}_\alpha(X)$ . Sei also  $A \subseteq \Omega$  mit  $P(A) > \alpha$ . Dann existiert ein  $\ell \in \{k+1, \dots, n\}$  mit  $|A| = \ell$ . Aufgrund der Laplace-Verteilung und der Definition der  $y_i$  gilt:

$$E_P(Y \cdot 1_A) \geq (y_1 + \dots + y_\ell) \cdot \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{E_P(Y \cdot 1_A)}{P(A)} \geq \frac{y_1 + \dots + y_\ell}{\frac{\ell}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{y_1 + \dots + y_\ell}{\ell} \geq \frac{y_1 + \dots + y_{k+1}}{k+1},$$

denn für reelle Zahlen  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  gilt:  $\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \leq \frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k+1}$  für alle  $1 \leq k \leq n-1$ .  $\square$

#### 4.1.7 Proposition

Sei  $P$  die Laplace-Verteilung auf  $\Omega$  und  $p$  ein kohärentes Wahrscheinlichkeitsmaß, das nur von der Verteilung von  $\frac{X}{r}$  abhängt, d.h. ist  $X \sim Y$ , so gilt  $p(\frac{X}{r}) = p(\frac{Y}{r})$ . Dann gilt:

$$p \geq \text{VaR}_\alpha \Rightarrow p \geq WCE_\alpha.$$

Beweis:

Es gelte  $p \geq \text{VaR}_\alpha$ . Sei  $X$  ein Risiko und  $q_\alpha^+(X)$  das dazugehörige  $\alpha$ -Quantil. Dann gilt

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha^+(X).$$

Seien weiterhin  $Y := \frac{X}{r}$  und  $A = \{\omega | Y(\omega) \leq q_\alpha^+(X)\}$ . Wie im vorigen Beweis gezeigt, gilt  $a = |A| > n \cdot \alpha$ . Mit geeigneter Numerierung ist dann  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_a\}$  mit

$$Y(\omega_i) \leq Y(\omega_{i+1}) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq a-1.$$

Sei  $\sigma$  eine Permutation der ersten  $a$  natürlichen Zahlen. Definiere weitere Zufallsvariablen  $\bar{Y}, Y^\sigma$  durch

$$\bar{Y}(\omega_i) = \begin{cases} Y(\omega_i), & \text{falls } i > a, \\ \frac{Y(\omega_1) + \dots + Y(\omega_a)}{a} = y^*, & \text{falls } i \leq a. \end{cases} \quad Y^\sigma(\omega_j) = \begin{cases} Y(\omega_i), & \text{falls } i > a, \\ Y(\omega_{\sigma(i)}), & \text{falls } i \leq a. \end{cases}$$

- Aufgrund der Laplace-Verteilung und der Definition von  $A$  ist

$$y^* = E(Y | Y \leq q_\alpha^+(X)).$$

Man kann  $\bar{Y}$  auch als Mittel der  $a!$  Zufallsvariablen  $Y^\sigma$  beschreiben.

- $Y$  besitzt dieselbe Verteilung wie  $Y^\sigma$ .

Die Annahme, daß  $p$  nur von der Verteilung von  $\frac{X}{r}$  abhängt, liefert

$$p(r \cdot Y^\sigma) = p(r \cdot Y) = p(X).$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} p(\bar{Y} - Y^\sigma) &= p((\bar{Y} - Y^\sigma)1_{\{\omega_1\}} + \dots + (\bar{Y} - Y^\sigma)1_{\{\omega_n\}}) \\ &\leq \frac{1}{a} p((\bar{Y} - Y^\sigma)1_{\{\omega_1\}}) + \dots + p((\bar{Y} - Y^\sigma)1_{\{\omega_a\}}) \\ &= -\bar{Y}(\omega_1) + Y^\sigma(\omega_1) - \dots - \bar{Y}(\omega_a) + Y^\sigma(\omega_a) = -a \cdot y^* + a \cdot y^* = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $p(r \cdot \bar{Y} - r \cdot Y^\sigma) \leq 0$ . Dies ist gleichbedeutend zu  $p(r \cdot \bar{Y}) \leq p(r \cdot Y^\sigma)$ . Daraus folgt

$$p(r \cdot \bar{Y}) \leq p(X).$$

Die Annahme,  $p \geq \text{VaR}_\alpha$ , liefert:

$$p(r \cdot \bar{Y}) \geq \text{VaR}_\alpha(r \cdot \bar{Y}).$$

Insgesamt gilt also

$$(*) \quad \text{VaR}_\alpha(r \cdot \bar{Y}) \leq p(r \cdot \bar{Y}) \leq p(X).$$

Für alle  $i < a$  ist  $\bar{Y}(\omega_i) \leq Y(\omega_a)$ . Da  $a$  der größte Index mit  $Y(\omega_a) \leq q_\alpha^+(X) = -\text{VaR}_\alpha(r \cdot Y)$  ist, folgt:

$$\text{VaR}_\alpha(r \cdot \bar{Y}) = -y^* = E(-Y|Y \leq q_\alpha^+(X)).$$

Zusammen mit (\*) gilt somit

$$p(X) \geq E\left(-\frac{X}{r} \mid X \leq q_\alpha^+(X) \cdot r\right).$$

Definiere  $\mathcal{M} = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \Rightarrow X(\omega_i) \neq X(\omega_j)\}$ . Da  $\Omega$  endlich ist, ist  $\mathcal{M}$  eine dichte Teilmenge von  $\mathcal{G}$ . Aus Proposition 4.1.6 folgt für alle  $X \in \mathcal{M}$

$$\text{TCE}_\alpha(X) = \text{WCE}_\alpha(X) = E\left(-\frac{X}{r} \mid X \leq q_\alpha^+(X) \cdot r\right),$$

d.h. die Ungleichung  $p(X) \geq \text{WCE}_\alpha(X)$  gilt für eine dichte Teilmenge von  $\mathcal{G}$ . Da sowohl  $p$  als auch  $\text{WCE}_\alpha$  kohärent, also insbesondere stetige Funktionen auf  $\mathcal{G}$  (siehe Beweis zu Prop.1.4.2) sind, folgt  $p \geq \text{WCE}_\alpha$  auf ganz  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Damit ist  $\text{WCE}_\alpha$  das beste kohärente Risikomaß oberhalb von  $\text{VaR}_\alpha$ .

# Kapitel 5

## Risikomaße bei allgemeinerem Grundraum

Mit Hilfe der Funktionalanalysis ist es möglich, den Darstellungssatz 3.1.1 aus einem anderen Blickwinkel herzuleiten. Bislang sind die betrachteten Risikomaße  $p$  nur auf dem endlichdimensionalen Raum  $\mathcal{G}$  definiert.

In diesem Kapitel werden auch nicht-endlichdimensionale Räume betrachtet. Es wird gezeigt, daß die Axiome S, PH und M weiterhin gelten (5.1.1, 5.2.3) und daß man für das Translationsaxiom eine andere, äquivalente Forderung erhält (5.2.9).

### 5.1 Präliminarien

Im folgenden bezeichne  $E$  einen reellen Vektorraum.

#### 5.1.1 Definition (sublineares Funktional)

Eine Abbildung  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **sublinear**, falls gilt:

- (i)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  für alle  $x, y \in E$
- (ii)  $p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x)$  für alle  $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Diese beiden Eigenschaften entsprechen der Subadditivität und der positiven Homogenität.

#### 5.1.2 Satz von Hahn-Banach

Zu jeder sublinearen Abbildung  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es eine lineare Abbildung  $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Phi(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

#### 5.1.3 Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Sei  $L$  ein Teilraum von  $E$ ,  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  sei sublinear und  $\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit

$$\varphi(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in L.$$

Dann gibt es eine Fortsetzung  $\Phi$  von  $\varphi$  auf  $E$  mit  $\Phi \leq p$ , d.h.

$$\Phi|_L = \varphi \quad \text{und} \quad \Phi(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Sei  $E^*$  die Menge der linearen Abbildungen von  $E$  nach  $\mathbb{R}$ .

#### 5.1.4 Folgerung

Sei  $p$  ein sublineares Funktional und  $x_0 \in E$ . Dann gibt es ein  $\Phi \in E^*$  mit

$$\Phi(x_0) = p(x_0) \quad \text{und} \quad \Phi \leq p.$$

#### Beweis:

Sei  $L$  der von  $x_0 \in E$  erzeugte eindimensionale Teilraum, also

$$L = \{\lambda \cdot x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definiere eine lineare Abbildung  $\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot p(x_0) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Subadditivität gilt  $0 = p(x - x) \leq p(x) + p(-x)$ , also  $-p(x) \leq p(-x)$  für alle  $x \in E$ . Somit ist  $\varphi(-x_0) = -p(x_0) \leq p(-x_0)$ , und damit gilt  $\varphi \leq p$  auf  $L$ . Nach dem Fortsetzungssatz existiert ein  $\Phi \in E^*$  mit

$$\Phi|_L = \varphi, \quad \text{und} \quad \Phi \leq p.$$

Also ist  $\Phi(x_0) = \varphi(x_0) = p(x_0)$  und  $\Phi \leq p$ . □

#### 5.1.5 Folgerung

Für jedes sublineare Funktional  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$p = \sup\{\Phi \in E^* : \Phi \leq p\}$$

#### Beweis:

Sei  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$q(x) = \sup_{\Phi \in M} \Phi(x)$$

mit  $M = \{\Phi \in E^* : \Phi \leq p\}$ . Nach Definition gilt  $q(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in E$ . Andererseits gibt es zu jedem  $x \in E$  ein  $\Phi \in M$  mit  $\Phi(x) = p(x)$  (vgl. vorigen Satz). Also ist  $q(x) = p(x)$  und der Beweis erbracht. □

## 5.2 Anwendung bei Risikomaßen

Nun wird der Spezialfall betrachtet, daß  $E$  der Raum der meßbaren reellwertigen Abbildungen eines meßbaren Raumes  $(\Omega, \mathcal{F})$  ist. Definiere dazu

$$E = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid X \text{ ist meßbar bzgl. } \mathcal{F}\}.$$

#### 5.2.1 Definition (antitones Funktional)

Ein sublineares Funktional  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **antiton**, falls für alle  $X \in E$  gilt:

$$X \geq 0 \Rightarrow p(X) \leq 0.$$



### 5.2.2 Lemma

Sei  $p$  ein antitones, sublineares Funktional und  $\Phi \in E^*$  mit  $\Phi \leq p$ . Dann ist  $\Phi$  antiton.

Beweis:

Sei  $X \geq 0$ . Da  $p$  antiton ist, gilt  $0 \geq p(X) \geq \Phi(X)$ . □

### 5.2.3 Bemerkung

Folgende Aussagen sind für ein sublineares Funktional äquivalent:

- (i)  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  ist antiton.
- (ii) Für alle  $X, Y \in E$  gilt:  $X \leq Y \Rightarrow p(X) \geq p(Y)$ .

Beweis:

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $X \leq Y$ , d.h.  $Y - X \geq 0$ . Da  $p$  antiton ist, gilt  $p(Y - X) \leq 0$ . Aus der Sublinearität von  $p$  folgt

$$p(Y) = p(X + (Y - X)) \leq p(X) + p(Y - X) \leq p(X).$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Setze  $X \equiv 0$ . Dann gilt mit (ii) und wiederum mit der Sublinearität von  $p$  für  $Y \in E$

$$0 \leq Y \Rightarrow p(Y) \leq p(0) = 0$$

□

Diese Bemerkung zeigt, daß ein sublineares, antitones Funktional das Axiom M erfüllt.

### 5.2.4 Folgerung

Sei  $p$  ein antitones, sublineares Funktional. Dann gilt:

$$p = \sup\{\varphi \in E^* \mid \varphi \leq p \text{ und } \varphi \text{ ist antiton}\}.$$

Beweis:

Mit Satz 5.1.5 gilt:

$$p = \sup\{\varphi \in E^* \mid \varphi \leq p\}.$$

Sei  $\varphi \leq p$  und  $X \in E$  mit  $X \geq 0$ . Dann gilt  $\varphi(X) \leq p(X) \leq 0$ , da  $p$  antiton ist. Also ist  $\varphi$  ebenfalls antiton, und es folgt die Behauptung. □

### 5.2.5 Lemma

Sei  $L$  ein Teilraum von  $E$  und  $p$  ein sublineares Funktional, so daß  $p|_L$  linear ist. Sei  $\Phi \in E^*$  mit  $\Phi \leq p$ . Dann gilt

$$\Phi|_L = p|_L$$

Beweis:

Sei  $x \in L$ . Dann ist nach Voraussetzung  $\Phi(x) \leq p(x)$ . Andererseits folgt damit und mit der Linearität von  $p$  auf  $L$

$$\Phi(x) = -\Phi(-x) \geq -p(-x) = p(x).$$

□

Es ist  $\langle \mathbf{1} \rangle$  der Raum aller konstanten Funktionen auf  $E$ , d.h. es gilt

$$X \in \langle \mathbf{1} \rangle \iff \exists c \in \mathbb{R} \forall \omega \in \Omega : X(\omega) = c.$$

### 5.2.6 Folgerung

Sei  $p$  ein sublineares antitones Funktional auf  $E$  mit  $p(\lambda \cdot \mathbb{1}) = \lambda \cdot p(\mathbb{1})$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\Phi \in E^*$  mit  $\Phi \leq p$ . Dann gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\Phi(\lambda \cdot \mathbb{1}) = \lambda \cdot p(\mathbb{1})$$

Weiter wird durch

$$\mu_\Phi : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{1}{p(\mathbb{1})} \cdot \Phi(1_A)$$

ein Inhalt auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  definiert. Ist  $\Omega$  endlich, so ist  $\mu_\Phi$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und es gilt:

$$\Phi(X) = p(\mathbb{1}) \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu_\Phi(\{\omega\}) = p(\mathbb{1}) \int X d\mu_\Phi$$

Beweis:

(1) Da  $p$  linear auf  $\langle \mathbb{1} \rangle$  ist, gilt mit Lemma 5.2.5  $p|_{\langle \mathbb{1} \rangle} = \Phi|_{\langle \mathbb{1} \rangle}$ , also

$$\Phi(\lambda \cdot \mathbb{1}) = \lambda \cdot p(\mathbb{1}) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2) Es ist  $\mu_\Phi(\emptyset) = \frac{1}{p(\mathbb{1})} \cdot \Phi(1_\emptyset) = 0$ . Seien  $A, B \in \mathcal{F}$  disjunkt. Aus der Linearität von  $\Phi$  folgt

$$\begin{aligned} \mu_\Phi(A \cup B) &= \frac{1}{p(\mathbb{1})} \cdot \Phi(1_{A \cup B}) = \frac{1}{p(\mathbb{1})} \cdot \Phi(1_A + 1_B) = \frac{1}{p(\mathbb{1})} \cdot (\Phi(1_A) + \Phi(1_B)) \\ &= \mu_\Phi(A) + \mu_\Phi(B). \end{aligned}$$

Damit ist  $\mu_\Phi$  eine Inhaltsfunktion.

(3) Es gilt  $\mu_\Phi(\Omega) = \frac{1}{p(\mathbb{1})} \cdot \Phi(\mathbb{1}) = 1$ . Ist  $\Omega$  endlich, so auch  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Damit ist aufgrund der Linearität von  $\Phi$   $\mu_\Phi$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(4) Sei  $X \in E$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \Phi\left(\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) 1_{\{\omega\}}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Phi(1_\omega) \\ &= p(\mathbb{1}) \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu_\Phi(\{\omega\}) = p(\mathbb{1}) \int X d\mu_\Phi \end{aligned}$$

□

### 5.2.7 Folgerung

Sei  $\Omega$  endlich und  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  ein antitones, sublineares Funktional, das auf  $\langle \mathbb{1} \rangle$  linear ist. Dann gibt es eine Menge  $\mathcal{P}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  mit

$$p(X) = \sup\{p(\mathbb{1}) \cdot E_P X \mid P \in \mathcal{P}\}$$

Beweis:

Sei  $X \in E$ . Mit Satz 5.1.5 gilt

$$p(X) = \sup\{\Phi(X) \mid \Phi \in E^* \text{ mit } \Phi \leq p\}$$

Sei  $M := \{\Phi \in E^* \mid \Phi \leq p\}$ . Dann existiert nach dem vorherigen Satz zu jedem  $\Phi \in M$  genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_\Phi$  mit  $\Phi(X) = p(\mathbb{1}) \int X d\mu_\Phi$ . Setze nun  $\mathcal{P} = \{\mu_\Phi \mid \Phi \in M\}$ . Damit gilt die Behauptung. □

**5.2.8 Spezialfall**

Setze  $r = -\frac{1}{p(\mathbb{1})}$ . Dann ist  $r > 0$ , und Satz 5.2.7 entspricht dem Darstellungssatz 3.1.1.

Die folgende Aussage erhält man insbesondere aus Satz 5.2.7, sie kann aber auch direkt nachgewiesen werden:

**5.2.9 Proposition**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $p$  ist ein kohärentes Risikomaß
- (ii)  $p$  ist ein antitones, sublineares Funktional, das linear auf  $\langle \mathbb{1} \rangle$  ist.

Beweis:

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Ist klar.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Aufgrund der Folgerung 5.2.7 ist nur noch das Axiom T nachzuweisen, d.h. zu zeigen ist:

$$p(X + \lambda \cdot r) = p(X) - \lambda \quad \text{mit } r = -\frac{1}{p(\mathbb{1})}.$$

Aufgrund der Sublinearität von  $p$  und der Linearität von  $p$  auf  $\langle \mathbb{1} \rangle$  gilt

$$p(X + \lambda \cdot r) \leq p(X) + p(\lambda \cdot r) = p(X) - \lambda.$$

Ebenfalls aus der Sublinearität von  $p$  folgt

$$\begin{aligned} p(X) &= p(X + \lambda \cdot r - \lambda \cdot r) \leq p(X + \lambda \cdot r) + p(-\lambda \cdot r) = p(X + \lambda \cdot r) - \lambda \cdot r \cdot p(\mathbb{1}) \\ &= p(X + \lambda \cdot r) + \lambda. \end{aligned}$$

Damit gilt  $p(X + \lambda \cdot r) \geq p(X) - \lambda$ , also insgesamt  $p(X + \lambda \cdot r) = p(X) - \lambda$ .

□



# Literaturverzeichnis

- [Alba] Albanese, C, Credit Exposure, Diversification Risk and Coherent VaR, Department of Mathematics, University of Toronto, 1997
- [AdehII] Artzner, Ph., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, Thinking Coherently, Risk 10, 68-71, 1997
- [AdehI] Artzner, Ph., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, Cohernt Measures of Risk, München, 1998
- [Basle] Basle Committee on Banking Supervision, Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk, Basel, 1996
- [Black,Scholes] Black, F., M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economics 81, 637-654, 1973
- [Cox, Rubinstein] Cox, J., M. Rubinstein, Option Markets, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985
- [Duffie, Pan] Duffie, D., J. Pan, An Overview of Value at Risk, Journal of Derivatives 4, 7-49, 1997
- [EKM] Embrechts, P., C. Klüppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events, Springer, New York, 1997
- [Gerber] Gerber, H., An Introduction To Mathematical Risk Theory, S.S. Hueber Foundation Monograph Series 8, Philadelphia, 1979
- [Hattendorf] Hattendorff, K., ber die Berechnung der Reserven des Risikos bei der Lebensversicherung, Rundschau der Versicherungen 18, 1-18, 1868
- [Huber] Huber, P., Robust Statistics, Wiley, New York, 1981
- [Hull] Hull, J., Options, Futures and Other Derivativ Securities, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996
- [Irle] Irle,AJ., Finanzmathematik, die Bewertung von Derivaten, B. G. Teubner, Stuttgart, 1998
- [Kanner] Kanner, M., Bestimmung des mittleren Risikos bei Lebensversicherungen, Deutsche Versicherungs-Zeitschrift, 1867
- [Risk] Risk Special Supplement, Value at Risk, Risk Magazine, 1996

[Rudd, Schroeder] Rudd ,A., M Schroeder, The Calculation of Minimum Margin, Management Science 28, 1369-1379, 1982

[SPAN] SPAN, Standard Portfolio Analysis of Risk, Chicago Mercantile Exchange, 1995

**Eidesstattliche Erklärung:**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorstehende Diplomarbeit selbständig abgefaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Kiel, den 6. August 2001.