

Universität Siegen
Fachbereich Mathematik
Walter Flex Str. 3
57068 Siegen

SS 2006

Diplomarbeit

Ein heterogenes Gesamtbankmodell zur Bewertung operationeller Risiken

Christian Strunk

19. Juli 2006

Betreuer und Gutachter.

PD Herr Dr. Paulsen (Universität Siegen, Kiel)

PD Herr Dr. Kaufmann (Universität Siegen)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1. Basel II und operationelles Risiko	1
1.1. Die elementaren Ansätze	2
1.1.1. Basisindikatoransatz	2
1.1.2. Standardansatz	2
1.2. Fortgeschrittene Ansätze	3
1.3. Verlustverteilungsansatz	5
2. Homogene Portfoliosichtweise	9
2.1. Modellannahmen	10
2.2. Schadenanzahlverteilung	11
2.3. Schadenhöhenverteilung	12
2.4. POT Methode	14
2.5. Geeignete Verteilungen im Tail. logNV und GPD	16
2.5.1. Mean Excess Funktion	16
2.5.2. Tailverhalten	19
2.5.3. Maximum Likelihood Schätzung	19
2.6. Geeignete Verteilungen im Zentrum. logNV und Weibull	20
2.6.1. Maximum Likelihood Schätzung	21
2.7. Bestimmung einer geeigneten Schwelle	22
2.8. Value at Risk	24
2.8.1. Value at Risk Schätzung	25
2.8.2. Value at Risk Berechnung	27
2.9. Vollständiges POT Modell	28
2.10. Bewertung operationeller Schäden. Beispieldatensatz	29
3. Heterogene Portfoliosichtweise. Bivariater Fall	37
3.1. Modellannahmen	39
3.2. Copulas	40
3.3. Beispielcopulas zur Modellierung von Abhängigkeiten	43
3.4. Abhängigkeitsmaße	46
3.4.1. Nachteile des linearen Korrelationskoeffizienten	46
3.4.2. Kendalls tau	47
3.4.3. upper tail dependence	49
3.5. Maximum Likelihood Schätzer	51
3.6. Generierung von Copula Realisationen	52

3.6.1. Gauß-Copula	52
3.6.2. Archimedische Copulas	53
3.7. Bivariate Goodness of Fit Statistiken	55
3.7.1. Kolmogorov-Smirnov und Anderson-Darling Teststatistik	56
3.7.2. Chi-Quadrat Test	57
3.8. Value at Risk	58
3.9. Bewertung operationeller Risiken. Beispiel	60
4. Heterogene Portfoliosichtweise. Trivariater Fall	65
4.1. Modellannahmen	66
4.2. Trivariate Copulas	67
4.3. Kalibrierung der Copulas	69
4.3.1. Anpassen einer Gauß-Copula mittels Kendalls tau	69
4.3.2. Anpassen einer Copula mittels Maximum Likelihood Schätzer	69
4.4. Trivariate Goodness of Fit Statistik	71
4.5. Bewertung operationeller Risiken. Beispiel	74
5. Risikoinventur	79
5.1. Methodische Überlegungen	80
5.2. Mathematische Fakten	82
5.2.1. Quantilschätzer	82
5.2.2. GPD Parameter	82
5.2.3. Parameter des Zentrums	83
5.3. Algorithmus zur Kalibrierung des Modells	84
6. Ein heterogenes Gesamtbankmodell	85
6.1. Modellanpassung auf Zellenebene	87
6.1.1. Anteil der Schadendaten	87
6.1.2. Anteil der Risikoinventur	88
6.1.3. Zusammensetzen der Anteile Echtdaten und Risikoinventur	88
6.2. Zusammensetzung der Subportfolioverluste	89
6.2.1. Abhängigkeitsstruktur mittels Gauß-Copula	89
6.2.2. Bestimmung des opVaR	92
Zusammenfassung	93
A. Erläuterungen zu den entwickelten R-Funktionen	97
B. Dichten der den Copulas zugrundeliegenden Verteilungsfunktionen	105
Literaturverzeichnis	109
Eidesstattliche Erklärung	113

Einleitung

Die zentrale Aufgabe im Risikomanagement ist das Bewerten von Risiken. Risiko ist dabei die Gefahr, daß Verlust in einem bestimmten Geschäftsbereich auftritt. Die für Banken relevanten Risikoklassen sind Kredit- und Marktrisiko sowie operationelles Risiko. Eine quantitative Bewertung von Risiken in diesen Klassen ist von besonderem Interesse, d.h. die Ermittlung einer Kennzahl, welche die benötigte Sicherheitsunterlegung des Instituts für einen folgenden Zeitabschnitt widerspiegelt.

In diesem Zusammenhang taucht oft der Begriff Basel II auf. Das erste Baseler Abkommen (Basel I) für Bankenaufsicht von 1988 schlägt internationale Richtlinien im Umgang mit Risiken vor. Das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf Kreditrisiko – die damals wichtigste Quelle von Risiken in der Bankenwirtschaft. Jedoch sind die vorgeschlagenen Methoden zur Bewertung der Risiken relativ elementar und erlauben keine institutspezifische Arbeitsweise.

Im Laufe des folgenden Jahrzehnts werden weitere Verfahren zur Bewertung von Markt- und Kreditrisiko entwickelt, die einem Institut eine individuelle Vorgehensweise ermöglichen. Dabei wird u.a. das Risikomaß Value at Risk (VaR) als Maß zur institutspezifischen Arbeitsweise mit Risiken als Industriestandard vorgeschlagen. Die individuellen Verfahren zur Bewertung von Markt- und Kreditrisiko erhalten im zweiten Baseler Abkommen (Basel II) von 2001 Einzug – etwa der InternalRatingsBased Ansatz für Kreditrisiko (McNeil et al., 2005). Ein weiteres Merkmal des Basel II Abkommens ist die Einführung einer neuen Risikoklasse **operationelles Risiko**. Darunter ist zu verstehen (Baseler Komitee für Bankenaufsicht):

“Gefahr von Verlusten, die infolge einer Unzulänglichkeit oder des Versagens von internen Verfahren, Menschen und Systemen oder infolge externer Ereignisse eintreten.“

Die Bewertung operationeller Risiken findet gemäß Basel II entweder über elementare Ansätze oder sogenannte fortgeschrittene Meßansätze statt. Die fortgeschrittenen Meßansätze erlauben eine institutspezifische Bewertung von operationellen Risiken anhand der individuellen Schadenvergangenheit und benötigen dafür aufwendige regulatorische Maßnahmen. So muß jeder Schaden eines operationellen Risikos genau protokolliert werden – Eintrittszeit, Höhe und spezielle Zuordnung in einer Untergruppe operationeller Risiken. Neben der **Quantifizierung** müssen die Schäden auch **qualitativ** erfaßt werden. Dazu zählen beispielsweise die Aussagekraft der einzelnen Schadenhöhen (...sind Schäden zusammengefaßt worden?) sowie eine mögliche Rekonstruktion des Schadenhergangs.

Eine institutspezifische Bewertung operationeller Risiken ist aufgrund der aufwendigen Rahmenbedingungen kostenintensiv und daher Großbanken und mittelständischen Banken vorbehalten. Die derzeitigen Diskussionen zu diesem Thema zeigen, daß knapp 60

deutsche Geldinstitute ab dem 1.1.08 (BaFin / Deutsche Bundesbank, 2005) die Bewertung operationeller Risiken mit einem fortgeschrittenen Meßansatz durchführen möchten. Jedoch sind die mathematischen Anforderungen eines solchen Verfahrens noch weitgehend ungelöst.

Diese Arbeit konzentriert sich auf den Verlustverteilungsansatz als einen möglichen fortgeschrittenen Meßansatz und ist daher als Beitrag zu diesem Thema zu sehen. Die Ergebnisse des Projekts “Bewertung operationeller Risiken der HSH Nordbank“ vom 1.9.05 bis 28.2.06 werden in die mathematischen Ausführungen eingebunden. Es wird stets kritisch reflektiert, ob die angesprochenen Verfahren für die Institute durchführbar sind und ob eine individuelle Arbeitsweise möglich ist.

In der folgenden Bearbeitung werden zunächst die gängigen Verfahren zur Bewertung operationeller Risiken vorgestellt (Kapitel 1). Das vorgeschlagene statistische LDA Modell – eine Untergruppe der fortgeschrittenen Meßansätze – sieht eine Einteilung operationeller Schäden in kategorische Subportfolios vor. Es folgt eine Analyse der einzelnen Subportfolios und eine abschließende geeignete Synthese.

Auf der Stufe der datengestützten Analyse einzelner Subportfolios (Kapitel 2) wird univariate Extremwertstatistik verwendet. Indem verschiedene Abhängigkeitsstrukturen zwischen Subportfolios betrachtet werden, von denen z.B. die Gauß-Copula eine individuelle Abhängigkeitsintensität zwischen je zwei Subportfolios bewirkt, kann ein multivariates Modell (Kapitel 3 bis 4) entwickelt werden.

Zusätzlich zu einem datengestützten Anteil aus internen und externen Daten sieht das Gesamtbankmodell die Integration einer auf Expertenwissen basierenden Risikoinventur vor. Die Bewertung der Informationen der Risikoinventur ist in Kapitel 5 beschrieben und die Zusammensetzung der Bestandteile interne Daten, externe Daten sowie Informationen der Risikoinventur zu einem heterogenen Gesamtbankmodell in Kapitel 6. Das nach diesen Methoden entwickelte Modell genügt den Rahmenbedingungen des Basel II Regelwerks und ermöglicht die Ermittlung einer unternehmensspezifischen Sicherheitsunterlegung.

Kapitel 1.

Basel II und operationelles Risiko

Eine Bank steht aufsichtsrechtlich in der Pflicht, für verschiedene Arten von Risiken finanzielle Sicherheiten zurückzustellen – zum Beispiel Kredit- und Marktrisiko. Neben Schäden, die dem Markt- bzw. Kreditrisikobereich zuzuordnen sind, gibt es die Klasse von operationellen Schäden. Als Beispiel sei folgendes Szenario genannt:

In einem Gebäude der Bank sei ein Brand ausgebrochen, in dem eine Abteilung mit 50 Angestellten untergebracht sei. Durch den Brand seien die Räumlichkeiten nicht mehr benutzbar. Es müssen in kurzer Zeit geeignete Ausweich-Arbeitsräume aufgebaut werden. Dort seien evtl. Hardware- und Netzwerksysteme noch nicht eingerichtet. Der resultierende Arbeits- und Systemausfall der Abteilung von etwa einem halben bis einem ganzen Tag verursache einen enormen Schaden.

In diesem Fall ist ein Schaden entstanden, der sich sowohl in menschliches als auch technisches Risiko einordnen läßt – aber weder Markt- noch Kreditrisiko. Quantitativ ist zu vermuten, daß dieser Schaden einen in rund 20 Jahren vorkommenden Extremschaden darstellt. Neben diesem Extremfall gebe es im technischen Bereich viele Ausfälle mit geringem Verlust – zum Beispiel Komplikationen einiger Terminals mit dem Server, die innerhalb einer Stunde behoben werden können. Auch in diesem Fall ist eine Schadenhöhe zu ermitteln, die sich als relativ niedrig vermuten läßt. Es ist anzunehmen, daß derartige Schäden einen zwar kleinen aber signifikanten Teil im Vergleich zu allen Schäden ausmachen. Daher ist es notwendig, die Klasse der operationellen Risiken einzuführen und dort Bewertungen durchzuführen.

Eine neue Risikoklasse

Operationelles Risiko stellt eine weitere Risikoklasse dar, für die Geldinstitute nach dem Basel II Regelwerk eine Sicherheitsunterlegung bereitstellen müssen. Zur Ermittlung der Eigenkapitalhinterlegung werden vom Komitee drei Möglichkeiten genannt. Im weiteren Verlauf werden die **elementaren Ansätze** erläutert. Dazu gehören der Basisindikatoransatz (BIA) und als Verfeinerung dessen der Standardansatz (SA). Das Hauptaugenmerk liegt jedoch auf dem dritten Ansatz – dem **Fortgeschrittenen Meßansatz** (AMA).

1.1. Die elementaren Ansätze

Die elementaren Ansätze benötigen keine Schadenfalldatenbanken und statistische Analysen zur Berechnung der Eigenkapitalhinterlegung, denn die Ansätze orientieren sich anhand des **Bruttoertrages**. Die folgenden Formeln stammen aus McNeil et al. (2005).

1.1.1. Basisindikatoransatz

In diesem Ansatz berechnet sich die Eigenkapitalhinterlegung zum Jahre t anhand des mittleren Bruttoertrags der letzten drei Jahre multipliziert mit einem festen Faktor α . Die Formel lautet

$$\text{EK}_{\text{BIA}}^t(\text{OR}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha \text{GI}^{t-i}.$$

Dabei steht GI^s für den Bruttoertrag des Jahres s ("gross income"). Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht schlägt den Faktor $\alpha = 15\%$ vor. Ein offensichtlicher Nachteil dieses Verfahrens ist, daß die Eigenkapitalhinterlegung an dem Bruttoertrag und nicht an den internen Schadendaten gemessen wird. Steigt der Ertrag, so steigt auch die Eigenkapitalhinterlegung. Damit wird vorausgesetzt, daß ein größerer Ertrag ein höheres operationelles Risiko nach sich zieht und einer gesteigerten Eigenkapitalhinterlegung bedarf.

1.1.2. Standardansatz

Die Aktivitäten einer Bank werden hier in 8 *Regulatorische Geschäftsfelder* aufgeteilt: Unternehmensfinanzierung und Beratung; Handel; Zahlungsverkehr und Abwicklung; Depot- und Treuhandgeschäfte; Firmenkundengeschäft; Privatkundengeschäft; Vermögensverwaltung; Wertpapierprovisionsgeschäft. In jedem der 8 Geschäftsfelder wird der Bruttoertrag der letzten drei Jahre ermittelt. Anstelle des Integranden in der BIA Formel steht nun die Summe der Bruttoerträge aus den 8 Geschäftsfeldern aus dem Jahre i skaliert mit geschäftsspezifischen Beta-Faktoren (s. Tabelle 1.1). Die Formel lautet

$$\text{EK}_{\text{SA}}^t(\text{OR}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^8 \beta_j \text{GI}_j^{t-i}.$$

Durch die Aufteilung in die Geschäftsfelder ist dieser Ansatz eine Verfeinerung des BIA und es wird eine Unterscheidung der Risiken vorgenommen. Dennoch bleibt der in 1.1.1 angesprochene Nachteil bestehen. Ein weiterer Nachteil ist die fehlende Möglichkeit, individuelle Abhängigkeiten zwischen den Geschäftsfeldern einzusetzen.

Bemerkung (Nachteile der elementaren Ansätze SA,BIA).

- (i) Ein höherer Bruttoertrag bedeutet nicht unbedingt ein höheres operationelles Risiko.
- (ii) Die Eigenkapitalhinterlegung wird nicht anhand eines internen Risikomeßsystems berechnet.
- (iii) Abhängigkeiten zwischen den Subportfolios operationeller Schäden werden bei dem Standardansatz nicht berücksichtigt.

Die vom Baseler Ausschuß festgesetzten Beta-Faktoren lauten:

Geschäftsfeld	Beta-Faktor (β_j)
Unternehmensfinanzierung und Beratung	18%
Handel	18%
Zahlungsverkehr und Abwicklung	18%
Depot- und Treuhandgeschäfte	15%
Firmenkundengeschäft	15%
Privatkundengeschäft	12%
Vermögensverwaltung	12%
Wertpapierprovisionsgeschäft	12%

Tabelle 1.1. Geschäftsfelder mit Beta-Faktoren. (McNeil et al., 2005)

1.2. Fortgeschrittene Ansätze

Ein AMA Modell ermittelt die Eigenkapitalhinterlegung anhand eines internen Risikomesssystem, das den Rahmenbedingungen des Basel II Regelwerks genügt. Während BIA und SA explizite Formeln zur Berechnung der Sicherheitsunterlegungen vorgeben, gibt es im Falle des AMA nur allgemein zu erfüllende Richtlinien. So heißt es gemäß des Baseler Komitees für Bankenaufsicht (2004):

“Given the continuing evolution of analytical approaches for operational risk, the Committee is not specifying the approach for distributional assumptions used to generate the operational risk measure for regulatory capital purposes. However, a bank must be able to demonstrate that its approach captures potentially severe ‘tail’ loss events. Whatever approach is used, a bank must demonstrate that its operational risk measure meets a soundness standard comparable to that of the internal ratings-based-approach for credit risk (comparable to a one year holding period and the 99.9 percent confidence interval).“

Bemerkung. Die Rahmenbedingungen zur Entwicklung eines AMA Modells können wie folgt formuliert werden (McNeil et al., 2005):

In einem AMA Modell werden die operationellen Verluste nach Geschäftsfeld (s. SA) und zusätzlich nach den folgenden 7 Ereigniskategorien eingeteilt: Abwicklung, Vertrieb und Prozeßmanagement; Geschäftsunterbrechungen und Systemversagen; Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten; Externer Betrug; Interner Betrug; Beschäftigungspraxis und Arbeitsplatzsicherheit; Sachschäden. Eine Schadenfalldatenbank muß jeden Schaden genau einer Ereigniskategorie bzw. einem Geschäftsfeld zuordnen. Zusätzlich muß zu jedem Schaden die Eintrittszeit, Schadenhöhe und evtl. eine Verbindung zu anderen Schäden eingetragen werden. Aus der Schadenfalldatenbank läßt sich die zugehörige Schadenmatrix

mit den 56 Subportfolios bzw. Zellen aus Geschäftsfeld / Ereigniskategorie ermitteln, in der die Anzahl der Schäden eingetragen sind (siehe dazu auch Abbildung 1.1).

Es wird von den Banken erwartet, daß interne Schadendaten gesammelt und den entsprechenden Zellen zugeordnet werden. Die Zellen, in denen wenige Einträge zu finden sind, sollen mit externen Daten aufgefüllt werden. Ein weiterer Grund für externe Daten ist die Integration extremer Schadenfälle in die Datenbank, die in dem Institut noch nicht vorgekommen sind (“... 'tail' loss events ...”).

Neben einer datenbasierten Analyse soll zusätzlich mit den Informationen einer Risikoinventur ein auf Expertenwissen gestütztes Risikomodell angepaßt werden (s. Kapitel 5). Die Analyse der drei Ebenen **Interne Schadendaten**, **Externe Schadendaten** und **Risikoinventur** soll geeignet zusammengesetzt werden. Es bleibt den Instituten überlassen, wie stark die unterschiedlichen Ebenen gewichtet und in welcher Weise sie genau zusammengesetzt werden. Es bietet sich z.B. an

- pro Zelle ein homogenes Risikomodell anzupassen und zwar einmal **datengestützt** (interne und externe Daten) und ein weiteres Mal gestützt auf die Risikoinventur
- danach pro Zelle die beiden Risikomodelle zusammenzusetzen
- und zum Schluß die 56 Zellen mit Hilfe einer angemessenen Abhängigkeitsstruktur zusammenzufügen.

Laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) stellen die meisten Institute die internen Schadendaten in den Vordergrund. Nur wenige Institute verwenden ein auf ausschließlich externen Daten bzw. der Ebene Risikoinventur basierendes AMA Modell.

Es müssen Abhängigkeiten zwischen den Zellen angemessen dargestellt werden. Ist keine genaue Abhängigkeitsstruktur vorhanden, so muß die Sicherheitsunterlegung für die Zellen einzeln berechnet und addiert werden (Das ist der sogenannte **komonotone** Verlustfall, in dem angenommen wird, daß die Risiken gleichzeitig eintreten.). Es ist jedoch möglich, daß in diesem Fall die berechnete Eigenkapitalhinterlegung deutlich zu hoch ist.

Soll dagegen eine Abhängigkeitsstruktur in das Modell integriert werden, die nicht dem komonotonen Fall entspricht, so muß diese in der Regel von außen durch Experten vorgegeben werden. Das liegt daran, daß in den Schadendatenbanken keine Tupel abhängiger Schäden erfaßt sind und somit eine statistische Schätzung von Korrelationen nicht möglich ist.

Das nach den vorgestellten Rahmenbedingungen entwickelte Modell ist ein internes Meßinstrument zur Bewertung operationeller Risiken. Das Modell basiert sowohl auf den Informationen interner Schadendaten als auch auf den Informationen der Risikoinventur. Die vom Baseler Ausschuß vorgeschriebene Sicherheitsunterlegung ist das 99.9% Vertrauensniveau der dem Modell zugrundeliegenden Verteilung bei einer zu betrachtenden Periode von einem Jahr.

Beispiel. Eine fiktive Schadenmatrix ist die folgende Abbildung:

Operationelle Schadenfälle ab 2000 EUR Bruttoschaden	Ereigniskategorie (Basel II)							
Geschäftsfeld (Basel II)	Abwicklung, Vertrieb und Prozessmanagement	Geschäftsunterbrechungen und Systemversagen	Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten	Externer Betrug	Interner Betrug	Beschäftigungspraxis und Arbeitsplatzsicherheit	Sachschäden	Gesamtergebnis
Unternehmensfinanzierung, -beratung	13	14	45	17	17			
Handel	34	7	1	18	45			
Zahlungsverkehr und Abwicklung	12	6	4	35	23			
Depot- und Treuhandgeschäfte	3	7	12	13	23			
Firmenkundengeschäft	16	21	45	11	34			
Privatkundengeschäft	3	9	13	2				
Vermögensverwaltung	12	10	54					
Wertpapierprovisionsgeschäft	23	12						
Gesamtergebnis								

Abbildung 1.1. Tabelle operationeller Schadenfälle. Die Anzahl von 614 Schadendaten ist laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) wesentlich höher als die der meisten Geldinstitute. Jedoch sind viele Zellen gar nicht oder gering gefüllt. Daran ist zu erkennen, daß Institute auf externe Datenquellen angewiesen sind, um die Basel II Rahmenbedingungen zu erfüllen.

Laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) wenden die deutschen Institute momentan noch die elementaren Ansätze an (BIA, SA). Insgesamt 58 (deutsche) Institute haben sich das Ziel gesetzt, zum 1.1.08 ihre Eigenkapitalberechnung auf einen AMA umzustellen. Momentan werden interne AMA Modelle entwickelt und die Berechnungen der Sicherheitsunterlegung mit denen der elementaren Ansätze verglichen.

1.3. Verlustverteilungsansatz

Im Mittelpunkt des LDA Modells steht der als stochastische Zufallsgröße zu betrachtende Verlust L . Gemäß den Rahmenbedingungen für AMA Modelle soll L den (zufälligen) Verlust des Instituts bei einem Zeitabschnitt von einem Jahr widerspiegeln. Ist das Gesamtbankmodell mit Hilfe der Ebenen interne Schadendaten, externe Schadendaten und Risikoinventur fixiert, so läßt sich die Verlustverteilung (F_L) berechnen. Dabei gibt $F_L(x)$ die Wahrscheinlichkeit p an, daß der zufällige Verlust des folgenden Jahres unterhalb einer Schranke x bleibt. Wird daher der Betrag x zurückgestellt, so werden mit Wahrscheinlichkeit p die eintretenden Schäden des folgenden Jahres damit abgedeckt. Der Wert x ist das p -Quantil der Verteilung von L und wird häufig als Value at Risk zum Vertrauensniveau p bezeichnet.

Nach den Basel II Rahmenbedingungen ist die Eigenkapitalhinterlegung im LDA Modell der Value at Risk von L zum Niveau 0.999, d.h.

$$\begin{aligned} \text{EK}_{\text{LDA}}(\text{OR}) &= \text{VaR}_{0.999}(L) \\ &= F_L^{-1}(0.999). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Das Vorgehen zur Entwicklung eines LDA Modells soll bereits an dieser Stelle angesprochen werden. Es ist sinnvoll, sich dabei auf ein datengestütztes Modell zu beschränken. Das die drei Ebenen umfassende Gesamtbankmodell wird in Kapitel 6 behandelt.

Bemerkung. Die Rahmenbedingungen zur Entwicklung eines datengestützten LDA Modells können gemäß der Vorgehensweise bei AMA Modelle wie folgt formuliert werden:

Es soll die Eigenkapitalhinterlegung bestimmt werden. Daher wird angenommen, daß eine angemessene Anzahl Schadendaten vorhanden ist. Das können z.B. interne und (skalierte) externe Daten sein. Die Schadendaten haben folgende Struktur:

$$\{(t_k^{b,r}, x_k^{b,r}) : b = 1 \dots 8; r = 1 \dots 7; k = 1 \dots n^{b,r}\}$$

Es ist $x_k^{b,r}$ der k te Schaden im b ten Geschäftsbereich und der r ten Risikokategorie, $n^{b,r}$ die Anzahl an Schäden des b ten Geschäftsbereichs und der r ten Risikokategorie. $t_k^{b,r}$ ist die zu dem Schaden $x_k^{b,r}$ zugehörige Schadeneintrittszeit.

Da operationelle Risiken bereits 2001 im Basel II Abkommen verankert sind, sollte der Erfassungszeitraum der Schadendatenbank mindestens 5 Jahre betragen. Es werden nur Schäden aufgenommen, die oberhalb einer unteren Erfassungsgrenze l liegen. Es kann z.B. $l = 2000$ Euro als untere Erfassungsgrenze gelten.

Die Schadendaten werden verwendet, um die Verteilung L zu schätzen, wobei L den zufälligen Verlust für das folgende Jahr beschreibt. Daraus läßt sich die benötigte Eigenkapitalhinterlegung nach Gleichung (1.1) ermitteln. Da die exakte Verteilungsfunktion von L i.a. nicht analytisch umkehrbar ist, muß die Ermittlung des Value at Risk modifiziert werden: Es werden Realisationen von L erzeugt, daraus die empirische Verteilungsfunktion berechnet und von dieser Funktion das 0.999 Quantil genommen. Das ist nicht mehr der exakte Value at Risk, sondern der sogenannte durch Realisationen näherungsweise bestimmte Value at Risk.

Der Verlust L setzt sich dabei aus den zufälligen Einzelverlusten der 56 Subportfolios zusammen,

$$L = \sum_{b=1}^8 \sum_{r=1}^7 L^{b,r}.$$

In dieser Formel wird implizit vorausgesetzt, daß die Abhängigkeitsstruktur der 56 Subportfolios bekannt ist. Gemäß dem Vorschlag zur Vorgehensweise der Entwicklung eines AMA Modells kann z.B. zwischen den einzelnen Subportfolioverlusten eine Abhängigkeitsstruktur eingesetzt werden. In dieser Arbeit wird eine Gauß-Copula als Abhängigkeitsstruktur zwischen den Einzelverlusten eingesetzt. In dem dritten und vierten Kapitel wird

näher auf Copulas eingegangen und im letzten Kapitel die Simulation des Verlustes L bei abhängigen Einzelverlusten dargestellt. Ist dagegen keine Abhängigkeitsstruktur fixiert, so müssen nach den Basel II Richtlinien die Value at Risk der Einzelverluste getrennt berechnet und addiert werden.

Die Einzelverluste lassen sich ihrerseits durch ein kollektives Modell der Risikothorie beschreiben,

$$L^{b,r} = \sum_{i=1}^N X_i$$

mit einer zufälligen Anzahl N an Schäden pro Jahr der zufälligen Höhe $X_1, \dots, X_N$. Als Verteilung für N wird i.a. eine Poissonverteilung mit konstanter Jahresintensität verwendet. Die Intensität wird aus den Schadeneintrittszeiten der zugehörigen Zelle mit Hilfe des Maximum-Likelihood Schätzers ermittelt. Die Schäden einer Zelle weisen dabei i.a. folgende Eigenschaften auf (Demoulin et al., 2005):

- Es existieren viele kleine und mittlere Schäden sowie wenige große Schäden.
- Den Schadenhöhen liegt eine Verteilung zugrunde, welche die Wahrscheinlichkeit extremer Schäden nicht unterschätzt (*heavy tailed*).

Als gemeinsame Verteilung der Schadenhöhen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer Zelle ist eine **Mischung** aus zwei Verteilungen anzusetzen, da damit die Zweiteilung der Schäden angemessen abgebildet wird. Zusätzlich wird mit einer Mischung eine bessere Anpassung an die Schäden erreicht als z.B. nur einer Verteilung. Wie bei der Schadenzahlverteilung werden die Parameter der Schadenhöhenverteilung mittels Maximum Likelihood Schätzverfahren aus den Schadendaten ermittelt. Welche Verteilungsfamilien für die beiden Verteilungen in Frage kommen und wie eine gute Anpassung an die Schäden erreicht wird, ist im zweiten Kapitel ausführlich beschrieben.

Besonders die externen Daten sollen die Anpassung einer Verteilung im hohen Schadenbereich (der sogenannte *Tail* der Verlustverteilung) sicherer gestalten. Es kann nicht erwartet werden, daß in einem Erfassungszeitraum von in etwa 5 Jahren genügend Extremschäden in dem Institut aufgetreten sind. Diese werden jedoch benötigt, um eine vertrauenswürdige statistische Anpassung im hohen Schadenbereich und damit einen angemessenen Value at Risk zu gewährleisten.

Das nach den Rahmenbedingungen fertiggestellte Modell ist ein internes Risikomeßsystem. Es wird mit Hilfe der Simulation des (zufälligen) Gesamtverlustes L die Sicherheitsunterlegung als 0.999 Quantil der empirischen Verlustverteilungsfunktion ermittelt. Die Nachteile der elementaren Ansätze treten in diesem Modell nicht auf.

Beispiel (Vorgehensweise zur Entwicklung eines LDA Modells bei der HSH Nordbank).

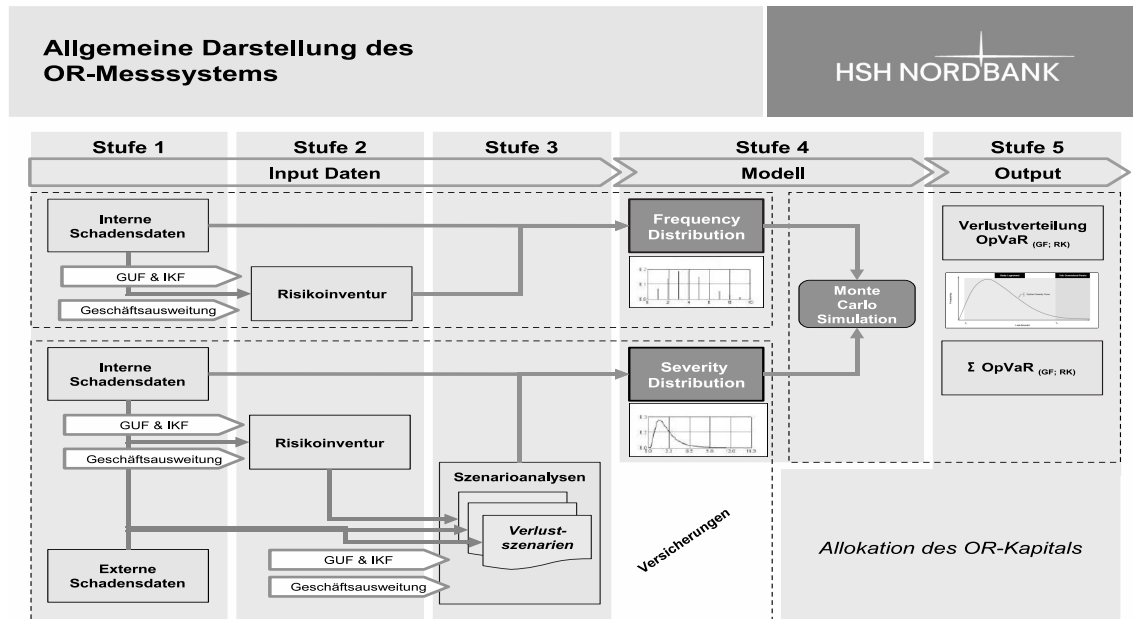


Abbildung 1.2. Die Kalibrierung des Gesamtbankmodells wird mit Hilfe der drei Ebenen Interne Schadensdaten, Externe Schadensdaten und Risikoinventur durchgeführt.

Die bisherigen Vorschläge zur Entwicklung eines LDA Modells werden in dem folgenden Algorithmus zusammengefaßt, der ein Gesamtbankmodell mit den drei Ebenen umfaßt.

Algorithmus 1.1 (Umsetzung eines LDA Modells).

1. Skalierung der externen Schadensdaten.
2. Anpassung eines LDA-Modells für jedes der 56 Subportfolios auf der Ebene Echtdaten (interne und skalierte externe).
3. Anpassung eines homogenen LDA-Modells für jedes der 56 Subportfolios auf der Ebene Schätzdaten der Risikoinventur.
4. Mischung der zwei Ebenen. Das bedeutet Mischung der für jedes Subportfolio angepaßten Verlustverteilungen. Damit ist pro Subportfolio genau eine Verlustverteilung fixiert.
5. Ermittlung der benötigten Korrelationswerte.
6. Zusammensetzung der Verlustverteilungen mittels der durch die Korrelationswerte fixierten Gauß-Copula.
7. Die geforderte Sicherheitsunterlegung ist das 0.999 Quantil der zusammengesetzten Verlustverteilung.

Eine Erläuterung der einzelnen Schritte ist im siebten Kapitel zu finden. Zunächst werden die mathematischen Methoden zur Umsetzung des Algorithmus eingeführt.

Kapitel 2.

Homogene Portfoliosichtweise

Die zentrale Aufgabe in der homogenen Sichtweise ist die Schätzung eines kollektiven Modells der Risikothorie L mit

$$L = \sum_{i=1}^N X_i$$

aus den **internen Schadendaten** der Bank. Die Schadendaten werden dabei nicht auf die 56 Zellen aufgeteilt, sondern zur Anpassung von nur einem kollektiven Modell verwendet. Mit dieser Methode erhält die Bank eine erste Berechnung der Eigenkapitalhinterlegung, die ausschließlich auf internen Daten basiert. Die Anzahl an internen Daten sollte bei dieser Betrachtungsweise ausreichen, um mit statistischen Methoden ein vertrauenswürdiges Modell zu kalibrieren. Ist das Modell fixiert, so wird über Gleichung (1.1) die Eigenkapitalhinterlegung durch Simulationen ermittelt, d.h. es wird

$$\text{VaR}_{0.999} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)$$

näherungsweise berechnet.

Da in der homogenen Sichtweise nicht nach Geschäftsfeld- bzw. Ereigniskategorie differenziert wird, haben die Schadendaten folgende vereinfachte Struktur:

$$\{(t_k, x_k) : k = 1 \dots n\}$$

Die Schadeneintrittszeiten dienen zur Anpassung einer Schadenanzahlverteilung und die zugehörigen Schadenhöhen zur Anpassung einer Schadenhöhenverteilung. Die Schadenanzahlverteilung ist schnell fixiert. Bei der Schadenhöhenverteilung betrachte zunächst das Verhalten operationeller Schäden (vergleiche 1.4 für das kollektive Modell).

Bemerkung 2.1. Die explorative Analyse operationeller Schadendaten der HSH und anderen Beispieldatensätzen (z.B. 'danish', 'nidd.thresh' aus R) zeigt bezüglich der homogenen Sichtweise folgende Eigenschaften:

- Es sind viele Schäden mit niedriger bis mittlerer Schadenhöhe vorhanden.
- Es existieren einige wenige Schäden mit großer Schadenhöhe.
- Den Schadenhöhen liegt eine Verteilung zugrunde, die die Wahrscheinlichkeit extremer Schäden nicht unterschätzt (*heavy tailed*).

Um der Zweiteilung der Schäden in viele mit kleiner bis mittlerer Höhe und einige mit großer Schadenhöhe gerecht zu werden, sollte eine Mischung aus zwei Verteilungen als Schadenhöhenverteilung verwendet werden. Dabei wird eine Verteilung an die '**normalen Schäden**' im Bereich $[l, u]$ und eine weitere an die '**extremen Schäden**' im Bereich (u, ∞) jeweils mit Hilfe des Maximum Likelihood Schätzverfahrens angepaßt. Diese werden als Zentrums- bzw. Tailverteilung bezeichnet. Den Trennpunkt u der disjunkten Bereiche $[l, u]$ und (u, ∞) heißt **kritische Schwelle**. Aufgrund der Mischung läßt sich die zufällige Schadenhöhe X_i schreiben als

$$X_i \stackrel{d}{=} Z \cdot 1_{\{U=1\}} + W \cdot 1_{\{U=0\}} \quad (2.1)$$

mit den Eigenschaften

- U, Z, W sind unabhängige Zufallsvariable.
- U ist die mischende Zufallsvariable mit $U \sim B(1, F(u))$, wobei $F(u) = P\{X_i \leq u\}$.
- Die Verteilung von Z ist die Verteilung von X_i bedingt danach, daß der Schaden in den Bereich $[l, u]$ fällt.
- Die Verteilung von W ist die Verteilung von X_i bedingt danach, daß der Schaden größer als u ist.

Die Identität (2.1) läßt sich durch Bedingen nach U und den angegebenen Eigenschaften über U, Z, W zeigen. Dabei wird auch die folgende Identität entdeckt

$$P\{X \leq x\} = F(u) P(X \leq x \mid X \leq u) + \bar{F}(u) P(X \leq x \mid X > u),$$

mit der Zentrums- und Tailverteilung zu der Verteilungsfunktion der Schadenhöhen zusammengesetzt werden. Häufig wird an die normalen Schäden eine (bedingte) logNormalverteilung und an die extremen Schäden eine verallgemeinerte Paretoverteilung angepaßt. Welche Verteilungen für Zentrums- bzw. Tailverteilung sonst noch in Frage kommen, wird in den nächsten Sektionen geklärt.

Die homogene Portfoliosichtweise ist eine starke Vereinfachung der Realität. Andererseits werden nur in diesem Modell die internen Schadendaten der Bank in den Vordergrund gerückt. In einem heterogenen Gesamtbankmodell sind nämlich i.a. externe Daten einzusetzen und es ist fraglich, ob diese skalierten Daten die Situation der Bank angemessen darstellen und zusätzlich, ob diese die geringen internen Daten nicht übertünchen.

2.1. Modellannahmen

Die durch operationelle Risiken entstandenen Schäden lassen sich über eine Zufallsvariable L beschreiben. Dieser Verlust L kann durch ein kollektives Modell der Risikotheorie dargestellt werden, d.h. als Summe einer zufälligen Anzahl N von Schäden pro Jahr der zufälligen Höhe $X_1, X_2, \dots, X_N$,

$$L = \sum_{i=1}^N X_i$$

mit den Annahmen:

Annahme 2.2 (Kollektives Modell).

- (i) N und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind stochastisch unabhängig.
- (ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind *iid* nach einer Verteilungsfunktion F .
- (iii) Die Schadenhöhen liegen oberhalb einer unteren Erfassungsgrenze $l > 0$,
d.h. $P\{X_i \in [l, \infty[) = 1$.

Bemerkung 2.3. Die Verteilungsfunktion zu L ist $P\{L \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N = k\} F^{*k}(x)$. F^{*k} bezeichnet die k -fache Faltung der Schadenhöhenverteilung. Es ist zu erkennen, daß die Umkehrfunktion dieser Verteilungsfunktion nicht analytisch berechenbar ist. Daher muß die vom Baseler Ausschuß vorgeschriebene Sicherheitsunterlegung (1.1) anders ermittelt werden. Eine gängige Methode ist die Simulation, die in 2.8 beschrieben wird.

In den nächsten Sektionen wird erläutert, aus welchen Familien die Schadenanzahl- bzw. Schadenhöhenverteilung gewählt werden sollten.

2.2. Schadenanzahlverteilung

In dieser Sektion wird an den Datensatz Schadeneintrittszeiten $(t_i)_{i=1 \dots n}$ eine geeignete Schadenanzahlverteilung angepaßt.

Überlegung. Die Schadenanzahlverteilung N kann über einen Zählprozeß $\tilde{N}$ erklärt werden. Es sei $\tilde{N}$ ein Zählprozeß auf dem Zeitintervall $[0, T]$ mit $T \geq 1$ und $\tilde{N}(t)$ gebe die zufällige Anzahl an Schäden bis zum Zeitpunkt $t < T$ an. Dann läßt sich N über $N = \tilde{N}(1)$ identifizieren. Durch die Wahl von $\tilde{N}$ wird gleichzeitig die Verteilung von N festgelegt.

Annahme 2.4. Der Zählprozeß $\tilde{N}$ verfüge über:

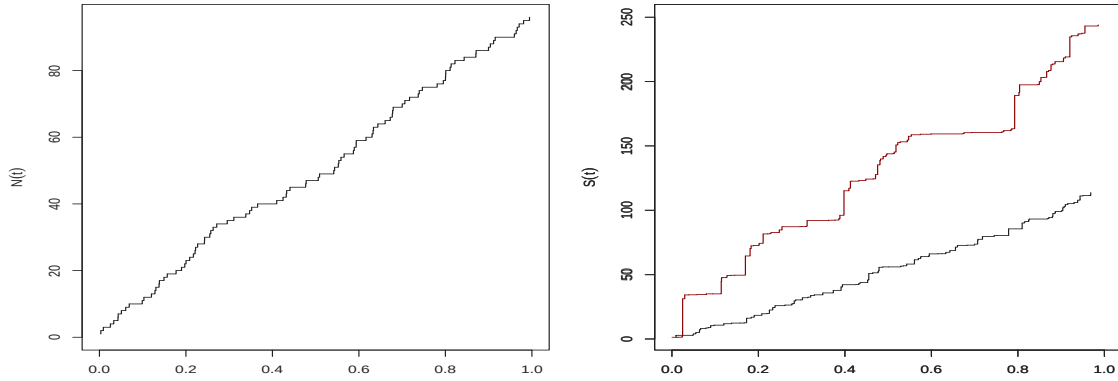
Unabhängige Zuwächse $\tilde{N}[s_0, s_1], \dots, \tilde{N}[s_{n-1}, s_n]$ unabh. für $s_0 < s_1 < \dots < s_n$.

Stationarität $\tilde{N}[s, t] \stackrel{d}{=} \tilde{N}[s+c, t+c]$ für eine Konstante $c > 0$.

Gerade diese beiden Eigenschaften charakterisieren (u.a.) einen homogenen Poisson Prozeß. Daher liegt es nahe, $\tilde{N}$ als homogenen Poisson Prozeß auf $[0, T]$ mit Intensität λ festzulegen. Daraus ergibt sich N als poissonverteilt zum Parameter λ .

Bemerkung 2.5 (Schätzer für λ). Unter der Voraussetzung einer poissonverteilten jährlichen Schadenanzahl N zum Parameter λ wähle als einen konsistenten Schätzer für λ den Maximum-Likelihood-Schätzer. Die Schadenanzahlintensität pro Jahr läßt sich aus dem Datensatz $(t_i)_{i=1 \dots n}$ schätzen als

$$\hat{\lambda} = \frac{\text{Anzahl Schäden}}{\text{Beobachtungszeitraum (Mon.)}} \cdot 12. \quad (2.2)$$



(a) $\tilde{N}(t) = \sum_{i=1}^{\tau} 1_{\{T_i \leq t\}}$. Poisson Prozeß auf $[0,1]$ mit *iid* gleichverteilten Eintrittszeiten T_i und $\text{Poi}(\lambda)$ verteilter Zählvariable τ .

(b) $S(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}(t)} X_i$. Zugehöriger Schadensummenprozeß auf $[0,1]$ mit $\text{Exp}(1)$ (schwarz) und $\text{GPD}(0.7)$ verteilten Schadenhöhen (rot).

Abbildung 2.1. Pfad eines homogenen Poisson Zählprozeß $\tilde{N}$ und Pfad des zugehörigen Schadensummenprozeß S mit Intensität $\lambda = 95$.

Bemerkung. Laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) wenden die Institute die Poisson- oder NegativBinomialverteilung als Schadenszahlverteilung an. Der NegativBinomial Prozeß ist als Mischung aus homogenen Poisson Prozessen und einer gammaverteilten Zufallsvariable als mischende Variable darstellbar (Embrechts et al., 1997). Der so identifizierte Prozeß erfüllt die Stationarität aber nicht die Bedingung der unabhängigen Zuwächse, da die Zuwächse über die mischende Zufallsvariable voneinander abhängen. Die Poissonverteilung ist zudem handlicher, so daß N als poissonverteilt festgesetzt wird.

2.3. Schadenhöhenverteilung

Es sind die Kandidaten zur Anpassung an den Datensatz $(x_i)_{i=1 \dots n}$ operationeller Schäden einzugrenzen. Dazu ist es erforderlich, Verteilungen anhand ihres Verhaltens im hohen Schadenbereich in Klassen einzuteilen. Die Aussagen stammen aus Embrechts et al. (1997).

Definition 2.6 (Klassifizierung Verteilungen anhand des Tailverhaltens).

- (i) Eine Verteilung F heißt subexponentiell, falls gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}^{*2}(t)/\bar{F}(t) = 2$.
- (ii) Die Flanke $\bar{F}$ einer Verteilungsfunktion F heißt regulär variierend in ∞ mit Index $-\alpha$, falls $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(tx)/\bar{F}(x) = t^{-\alpha}$, $t > 0$ erfüllt ist.
- (iii) Die Verteilungsfunktion F hat einen Power Tail mit Index $\alpha > 0$, falls $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} L(tx)/L(x) = 1$, $t > 0$ gilt. L heißt dabei langsam variierend.

Lemma 2.7 (Zusammenhang der verschiedenen Tailverhalten).

- (i) Eine Verteilung F hat einen Power Tail mit Index $\alpha \iff \bar{F}$ ist regulär variierend in ∞ mit Index $-\alpha$.
- (ii) Ein Power Tail einer Verteilung F impliziert, daß diese subexponentiell ist.

Bemerkung. Die definierten Begriffe charakterisieren die Verteilungen für große x -Werte. Subexponentiell bedeutet, daß die Flanke $1 - F$ deutlicher langsamer gegen 0 konvergiert als die Exponentialverteilung. Das heißt für operationelle Risiken, daß bei Annahme einer subexponentiellen Schadenhöhenverteilung die Wahrscheinlichkeit von Schäden im hohen Schadenbereich **nicht unterschätzt** wird. Ein Power-Tail mit Index α sagt über die Verteilung F aus, daß sich die Flanke für große x -Werte wie das **Polynom** $x^{-\alpha}$ multipliziert mit einer langsam variierenden Funktion verhält. Je näher α an 0 ist, desto langsamer konvergiert die Flanke gegen 0 und umso stärker ist der Tail.

Beispiel 2.8. Folgende Verteilungen mit rechtem Trägerpunkt $\omega(F) = \infty$ sind

Power-Tail Verteilungen	Paretoverteilung, GPD($\xi > 0$), Cauchyverteilung, log-Gammaverteilung und die Fréchetverteilung.
subexp., kein Power-Tail	logNV, Weibullverteilung($0 < s < 1$).
nicht subexponentiell	Normalverteilung, Exponentialverteilung Weibullverteilung($s \geq 1$), Gammaverteilung.

Bemerkung. Die Schadenhöhenverteilung sollte nach Bemerkung 2.1 eine *heavy tailed* Verteilung sein (d.h. subexponentiell bzw. regulär variierend). Diese Eigenschaft überträgt sich auf den gesamten Verlust, denn es gilt in diesem Fall

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{L > x\}}{P\{X_i > x\}} = E(N)$$

(Demoulin et al., 2005). Die Sicherheitsunterlegung wird gerade bei operationellen Risiken maßgeblich durch den Tail der Verlustverteilung bestimmt und nach dieser Gleichung durch den Tail der Schadenhöhenverteilung. Eine gute Anpassung der Tailverteilung an die wahre Verteilung der Schadendaten ist daher notwendig, damit das gesamte angepaßte Modell nah an der wahren Verlustverteilung liegt, woraus wiederum eine angemessene Sicherheitsunterlegung folgt. Der folgende Algorithmus ist für diese Zwecke geeignet:

Algorithmus 2.9 (Kalibrierung einer Schadenhöhenvert. anhand Daten $(x_i)_{i=1 \dots n}$).

1. Wähle geeignete Familien für die Verteilung oberhalb bzw. unterhalb einer kritischen Schwelle aus (d.h. für die Tail- bzw. Zentrumsverteilung).
2. Bestimme die kritische Schwelle u , die normale von extremen Schäden trennt.
3. Bestimme mit dem Maximum-Likelihood Schätzverfahren die Parameter der Tail- bzw. Zentrumsverteilung.
4. Setze beide Teile der Verteilung zusammen und erhalte F .

Überlegung 2.10. Das Problem der Bestimmung einer geeigneten Schwelle ist eng mit dem des Anpassens einer geeigneten Tailverteilung verknüpft – erstens sollte jeder Schaden oberhalb der Schwelle als Extremschaden gelten. Zweitens müssen genügend Daten oberhalb der Schwelle zur Verfügung stehen, ansonsten ist eine statistische Anpassung nicht aussagekräftig. Drittens sollte die Wahl der Schwelle eine gute Approximation der kalibrierten Tailverteilung an die wahre Verteilung bieten. Es stellt sich daher folgende Frage:

Existiert eine Verteilungsfunktion, die sich für eine hohe Schwelle als natürlicher Grenzwert der (den Daten zugrundeliegende) wahren Verteilungsfunktion oberhalb dieser Schwelle ergibt?

Diese Grenzwertverteilung sollte eine gute Approximation darstellen. Die Frage wird mit Hilfe der POT Methode ('PeaksOverThreshold') aus dem Gebiet der Extremwerttheorie beantwortet. Genauer zu diesem Thema ist in Embrechts et al. (1997) zu finden.

2.4. POT Methode

Die Verteilung einer Schadenhöhe X mit (wahrer) Verteilungsfunktion F kann durch Bedingungen aufgeteilt werden in

$$F(x) = F(u) P(X \leq x \mid X \leq u) + \bar{F}(u) P(X \leq x \mid X > u).$$

Für $x \geq u$ ergibt sich

$$F(x) = F(u) + \bar{F}(u) P(X \leq x \mid X > u).$$

Um Aussagen über eine Verteilung oberhalb einer Schwelle u bzw. den zugehörigen Grenzwert (hier: $u \rightarrow \infty$) zu machen, muß die Funktion

$$F_u(x) := P(X \leq x \mid X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x > u$$

genauer untersucht werden.

Definition 2.11. Die Verteilungsfunktion $F_u(x) = P(X \leq x \mid X > u)$, $x > u$ heißt *Exzedentenfunktion* zur Schwelle u . Die Verteilungsfunktion $F_{(u)}(x) = F_u(x + u)$, $x > 0$ heißt *Exzessfunktion* oder *Überschreitungsfunktion* zur Schwelle u .

Das am häufigsten verwendete stochastische Modell für Exzedentenverteilungen bez. einer hohen Schwelle u ist die verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD).

Definition (GPD). Die Verteilungsfunktion einer GPD mit Gestaltenparameter $\xi \in \mathbb{R}$, Lokationsparameter μ und Skalenparameter $\beta > 0$ ist erklärt als

$$G_{\xi, \mu, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi(x - \mu)/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-(x - \mu)/\beta) & \xi = 0. \end{cases}$$

Bemerkung. Der für operationelle Risiken relevante Fall ist $\xi > 0$, denn in den Fällen $\xi < 0$ bzw. $\xi = 0$ ist $G_{\xi, \mu, \beta}$ nicht *heavy tailed*. Daher werden die Fälle nicht näher betrachtet. Im Fall $\xi > 0$ ist der Träger (μ, ∞) und die Momente sind i.a. nicht endlich. Es gilt für $X \sim G_{\xi, \mu, \beta}$ gerade $E(X^k) < \infty$, falls $\xi < 1/k$. Für $\xi = 1/2$ ist bereits die Varianz unendlich, der Erwartungswert ist noch endlich. Für $\xi \geq 1$ ist auch der Erwartungswert unendlich. Die angepaßte Verteilung an operationelle Schäden besitzt oftmals eine unendliche Varianz. Im Datensatz "danish" und im HSH Datensatz wurden beispielsweise Schadenhöhenverteilungen mit $\xi \in (0.5, 1)$ ermittelt.

Der folgende Satz beantwortet die Frage in Überlegung 2.10. Es wird der Grenzwert der Exzedentenverteilung für $u \rightarrow \infty$ gebildet.

Satz (Pickands-Balkema-de Haan). *Liegt F im Anziehungsbereich einer verallgemeinerten Extremwertverteilung H_ξ für ein $\xi \geq 0$ mit $\omega(H_\xi) = \infty$, so existiert eine positiv meßbare Funktion $\beta(u)$ mit:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < \infty} |F_u(x) - G_{\xi, u, \beta(u)}(x)| = 0.$$

Bemerkung. Die Anziehungsbereiche verallgemeinerter Extremwertverteilungen lassen sich in drei Klassen $\xi > 0$, $\xi = 0$, $\xi < 0$ einteilen [i.Z. $\text{MDA}(H_\xi)$]. Für operationelle Risiken sind die Klassen $\xi > 0$, $\xi = 0$ (mit Trägerpunkt $\omega(F) = \infty$) relevant. Die Power-Tail Verteilungen bilden gerade die Klasse zu $\xi > 0$. In der Klasse zu $\xi = 0$ [$\text{MDA}(H_0)$] sind neben nichtsubexponentiellen Verteilungen (Exponential- und Normalverteilung) auch subexponentielle Verteilungen wie die logNV und die Weibullverteilung ($0 < s < 1$) vorhanden.

Korollar 2.12. Der Satz von Pickands-Balkema-de Haan legt die Approximation der Exzedentenfunktion bez. einer hohen Schwelle u durch eine verallgemeinerte Paretoverteilung $G_{\xi, u, \beta(u)}$ nahe, d.h. $F_u \approx G_{\xi, u, \beta(u)}$ für $u \rightarrow \infty$. Dabei ist $\beta := \beta(u)$ ist der in Abhängigkeit von u zu betrachtende Skalenparameter der GPD. Die Parameter ξ, β sind zu vorgegebenen u bei einem Datensatz mittels Maximum Likelihood Schätzmethode zu bestimmen.

Falls mittels Maximum Likelihood Methode niedrige Gestaltenparameter $\xi \approx 0$, $\xi > 0$ geschätzt werden, so wird nach Pickands angenommen, daß der Tail der Schadenhöhenverteilung sich fast wie der einer Exponentialverteilung verhält. Das widerspricht der Annahme 2.1, bei der operationellen Schäden eine heavy tailed Verteilung unterstellt wird. Zusätzlich ist zu vermuten, daß in diesem Fall der zugehörige Value at Risk zu gering ist. Niedrige Gestaltenparameter werden jedoch durchaus geschätzt (z.B. HSH Datensatz ohne den Maximalschaden). Daher bietet es sich an, einen weiteren Kandidaten als Exzedentenverteilung zu wählen, so daß der Tail der Schadenhöhenverteilung heavy tailed ist und sich stets deutlich von dem einer Exponentialverteilung unterscheidet. Zusätzlich sollte eine gute Anpassung an die Daten erfüllt sein. Das gewährleistet die bedingte logNormalverteilung, d.h. $F_u \approx P(X \leq \cdot | X > u)$ mit $X \sim \text{logNV}_{\mu, \sigma}$ für $u \rightarrow \infty$.

Definition (logNV). Die Dichte $f_{\mu, \sigma}$ der $\text{logNV}_{\mu, \sigma}$ mit Lokationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalenparameter $\sigma > 0$ ist gegeben durch

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad x > 0.$$

Überlegung 2.13 (Schätzer für die Schadenhöhenverteilung oberhalb der Schwelle). Durch Korollar 2.12 werden folgende Kandidaten vorgeschlagen:

– Im GPD(ξ, u, β)-Modell

$$\hat{F}(x) = \hat{F}(u) + \hat{\hat{F}}(u) G_{\xi, u, \beta}(x).$$

– Im (bedingte) logNV(μ, σ)-Modell

$$\hat{F}(x) = \hat{F}(u) + \hat{\hat{F}}(u) \frac{\log \text{NV}_{\mu, \sigma}(x) - \log \text{NV}_{\mu, \sigma}(u)}{1 - \log \text{NV}_{\mu, \sigma}(u)}.$$

Bemerkung. Die logNV ist praktikabel und in der Klasse der subexponentiellen Verteilungen ohne Power-Tail hat sie den “härtesten” Tail. Die logNV verfügt im Gegensatz zur GPD($\xi > 0$) stets über endliche erste und zweite Momente. Darüber hinaus hat sich die logNV bei den bisherigen Datensätzen (HSH, danish) als Tailverteilung bewährt.

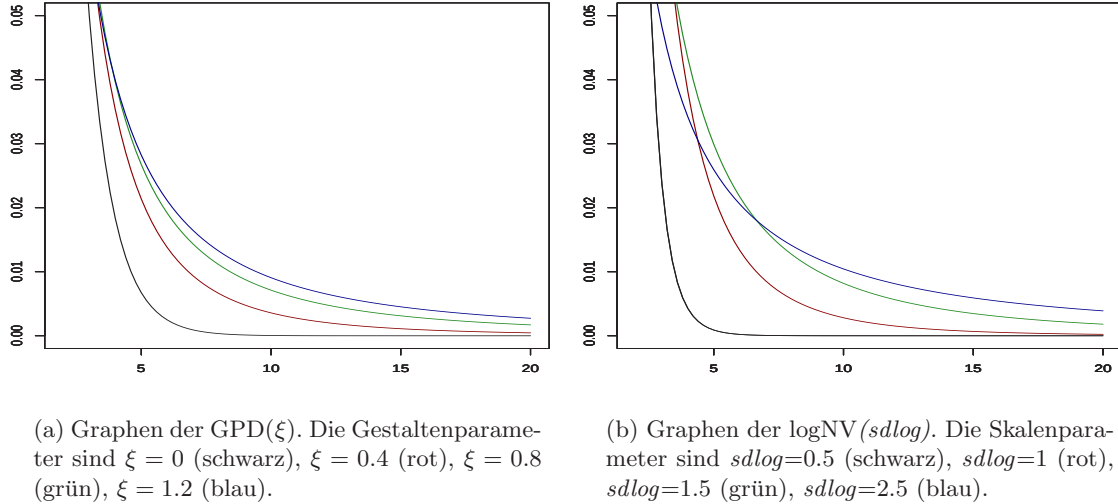


Abbildung 2.2. Graphen zur GPD(ξ) bzw. logNV($sdlog$)

2.5. Geeignete Verteilungen im Tail. logNV und GPD

Die Familien von logNV und GPD sind Kandidaten für die Tailverteilung. Betrachte daher **mean excess Funktion**, **Tailverhalten** und **Maximum Likelihood Schätzer**, die für die Analyse eines Datensatzes wichtig sind. Zur Definition, Arten und Eigenschaften von Schätzern bietet Behnen und Neuhaus (2003) einen guten Einstieg.

2.5.1. Mean Excess Funktion

Definition 2.14. Die mean excess Funktion e einer ZV X mit endlichem Erwartungswert ist erklärt als

$$e(u) = E(X - u \mid X > u).$$

Bemerkung 2.15. Die empirische mean excess Funktion, d.h. die mean excess Funktion von F_n bez. eines Datensatzes $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit der Anordnung $x_{1:n} \geq x_{2:n} \geq \dots \geq x_{n:n}$ berechnet sich zu

$$e(u) = 1/k \sum_{i=1}^k (x_{i:n} - u),$$

wobei $k = |C|$ und $C = \{x_i : x_i > u, i = 1 \dots n\}$. Der zugehörige Plot heißt *mean excess Plot*. Bei einer angemessenen Datenanzahl im Tail verläuft die empirische in etwa wie die tatsächliche mean excess Funktion. So ist ein erster Eindruck über die Kandidaten der Tailverteilungen zu erhalten.

Die mean excess Funktion beschreibt den Erwartungswert von $F_{(u)}$ als eine **Funktion in u** , d.h. sie ist i.a. abhängig von u . Für die Analyse eines Datensatzes ist die Kenntnis der mean excess Funktionen von logNV und GPD wichtig, da durch einen Vergleich mit der empirischen mean excess Funktion beurteilt werden kann, ob die Funktionen als Tailverteilung in Frage kommen. Weitere mean excess Funktionen (Weibull, Gamma, Pareto, Exp) inklusive Graphen sind in Embrechts et al. (1997) zu finden. Dort ist zu erkennen, daß ein positiver Anstieg der Mean Excess Kurve eine *heavy tailed* Verteilung signalisiert.

Die Verteilung $F_{(u)}$ ist nach Def. 2.11 erklärt als $F_{(u)}(x) = P(X - u \leq x \mid X > u)$, wobei für die ZV X gilt:

$$X \sim G_{\xi, \beta} \quad (\text{im GPD-Modell})$$

$$X \sim \text{logNV}_{\mu, \sigma} \quad (\text{im logNV-Modell})$$

Satz 2.16. Es sei X verteilt nach einer $\text{GPD}(\xi, \beta)$ bzw. $\text{logNV}(\mu, \sigma)$. Es gelte $\xi \in [0, 1)$. Dann lauten die zugehörigen mean excess Funktionen:

$$(i) \quad e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad (\text{im GPD-Modell}).$$

$$(ii) \quad e(u) \sim \frac{\sigma^2 u}{\ln u - \mu} \quad (\text{im logNV-Modell, für } u \rightarrow \infty).$$

Beweis. Betrachte zunächst das GPD-Modell, d.h. $X \sim G_{\xi, \beta}$. Hier ist leicht nachzurechnen, daß gilt

$$F_{(u)}(x) = G_{\xi, \beta(u)}, \quad \beta(u) = \beta + \xi u.$$

Der Erwartungswert einer ZV X mit $X \sim \text{GPD}(\xi, \beta)$ für $\xi \in [0, 1)$ ist nach Embrechts et al. (1997) gerade $E(X) = \beta/(1 - \xi)$. Daraus folgt für die Funktion e

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}.$$

Daher gilt (i). Zur Berechnung der mean excess Funktion des logNV-Modells betrachte folgende drei Hilfssätze: Es ist zunächst ein Grundresultat bez. $\text{MDA}(H_0)$ zu nennen (Embrechts et al., 1997), da $\text{logNV} \in \text{MDA}(H_0)$:

Satz 2.17 (Charakterisierung der Funktionen aus $\text{MDA}(H_0)$).

Die Verteilungsfunktion F mit rechtem Trägerendpunkt $\omega(F) \leq \infty$ gehört zu $\text{MDA}(H_0)$ dann und nur dann, falls ein $z < \omega(F)$ existiert, so daß F die Darstellung

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < \omega(F)$$

besitzt. Dabei ist c eine meßbare Funktion mit $c(x) \rightarrow c$ für $x \uparrow \omega(F)$, und $a(x)$ ist eine positive, absolut stetige Funktion mit Dichte $a'(x)$ und $\lim_{x \uparrow \omega(F)} a'(x) = 0$. Eine mögliche Wahl für die Funktion a ist

$$a(x) = \int_x^{\omega(F)} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt, \quad x < \omega(F).$$

Lemma 2.18 (Zusammenhang von a und e). *Die Wahl der Funktion a in Satz 2.17 ist gerade die mean excess Funktion.*

Beweis. $e(u) = \frac{1}{1-F(u)} \int_u^\infty (x-u) dF(x) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{1-F(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x) dx \stackrel{\text{s.Satz}}{=} a(u)$ $\square$

Lemma 2.19 (Darstellung Flanke von F mittels Hazardrate h). *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f . Die Hazardrate von F ist erklärt als $h(z) = f(z)/\bar{F}(z)$. Dann besitzt F die Darstellung*

$$\bar{F}(x) = \exp \left(- \int_{-\infty}^x h(z) dz \right).$$

Beweis von Satz 2.16:

Es ist eine Darstellung wie in Satz 2.17 für die logNV zu entwickeln. Dazu beachte

$$Y \sim \text{logNV}_{\mu,\sigma} \iff \frac{\ln(Y) - \mu}{\sigma} \sim \Phi. \quad (2.3)$$

Unter Verwendung von Lemma 2.19 und Gleichung (2.3) ergibt sich für die logNV:

$$1 - \text{logNV}_{\mu,\sigma}(x) = \exp \left(- \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}(\ln(x) - \mu)} \frac{\varphi(t)}{1 - \Phi(t)} dt \right) = \exp \left(- \int_0^x \frac{\varphi(\frac{1}{\sigma}(\ln z - \mu))}{1 - \Phi(\frac{1}{\sigma}(\ln z - \mu))} \frac{1}{\sigma z} dz \right)$$

Anwendung von Satz 2.17 liefert $z = 0$, $c(x) = 1$, $\omega(F) = \infty$ und

$$a(x) = \sigma x \frac{1 - \Phi(\frac{1}{\sigma}(\ln x - \mu))}{\varphi(\frac{1}{\sigma}(\ln x - \mu))} \xrightarrow[\text{(L'Hospital)}]{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma x}{\frac{1}{\sigma}(\ln x - \mu)}$$

was nach Lemma 2.18 mit $e(x)$ (asymptotisch) übereinstimmt. Daher gilt (ii). $\square$

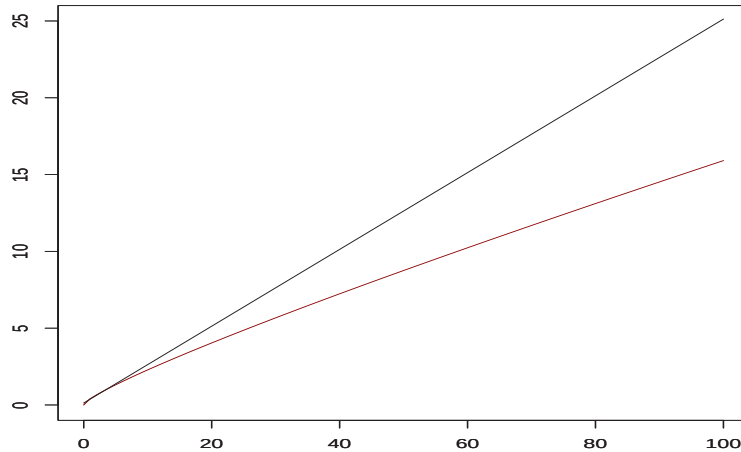


Abbildung 2.3. Graphen der Mean Excess Funktion. $\text{logNV}(-3, 1.1)$ (rot) und $\text{GPD}(0.2, 0.1)$ (schwarz). Der Plot zur GPD stellt eine Gerade mit positiven Anstieg dar und der Plot zur logNV eine positiv ansteigende konkave Kurve. Die Graphen sehen recht ähnlich aus. Der empirische Mean Excess Plot wird daher keine eindeutige Entscheidung zwischen logNV und GPD erlauben.

2.5.2. Tailverhalten

- (i) Zunächst wird das Tailverhalten der GPD besprochen:
Die Verteilungsfunktion F einer GPD($\xi > 0$) hat einen Power-Tail mit Index $1/\xi$,
 $\bar{F}(x) = x^{-1/\xi} L(x)$, $L(x) = x^{1/\xi}(1 + \xi x)^{-1/\xi}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$, $t > 0$.
- (ii) Die logNV besitzt dagegen keinen Power-Tail, was dazu äquivalent ist, daß die Flanke nicht regulär variierend ist (da $F \in \text{MDA}(H_0)$). Die Verteilungsfunktion F einer logNV(μ, σ) ist jedoch subexponentiell. In Embrechts et al. (1997) ist für $F \in \text{MDA}(H_0)$ ein praktisches Kriterium zum Nachweis 'F subexponentiell' zu finden:

Kriterium. Falls die auxiliary Funktion a nichtfallend ist und ein $t > 1$ existiert, so daß gilt $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{a(tx)}{a(x)} > 1 \Rightarrow F$ subexponentiell.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die auxiliary Funktion der logNV (s. Satz 2.16) monoton steigend ist. Für große Werte x ersetze a durch $\tilde{a}(x) = \frac{\sigma^2 x}{\ln x - \mu}$. Es ergibt sich $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{a(tx)}{a(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\tilde{a}(tx)}{\tilde{a}(x)} = \sigma^2 t^2$, für $t > \sigma^{-1/2}$ ist der Ausdruck > 1 .

2.5.3. Maximum Likelihood Schätzung

Der Maximum Likelihood Schätzer zur Schätzung eines Modellparameters ϑ der Verteilungsfamilie $\{F_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ benötigt die Dichte von F_ϑ sowie einen Datensatz mit Realisationen von *iid* Zufallsvariablen. Es wird unterstellt, daß die Zufallsvariablen die gemeinsame Verteilungsfunktion F_ϑ für ein ϑ besitzen. Daher kann mit dieser Annahme der unbekannte Parameter ϑ anhand des Datensatzes geschätzt werden.

Realisationen. Der Schadendatensatz $x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in (l, \infty)$ besteht nach Annahme 2.2 aus Realisationen von *iid* ZV mit Verteilungsfunktion F . Zur vorgegebenen Schwelle u bezeichne die Elemente des Datensatzes größer als u mit $y_1, \dots, y_k$ (d.h. die Exzedenten der x_i bez. u). Es folgt, daß die Daten

$$y_1, \dots, y_k \quad \text{mit } y_i \in (u, \infty)$$

ebenfalls Realisationen von *iid* ZV $Y_1, \dots, Y_k$ sind. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist die Exzedentenverteilungsfunktion F_u . Als gemeinsame Verteilungsfunktion der $(Y_i)_{i=1 \dots k}$ wird im GPD-Modell die Familie

$$\{ G_{\xi, u, \beta}(\cdot) \mid \xi \in \mathbb{R}, \beta > 0 \}$$

und im logN die Verteilungsfamilie

$$\{ (\log \text{NV}_{\mu, \sigma}(\cdot) - \log \text{NV}_{\mu, \sigma}(u)) / (1 - \log \text{NV}_{\mu, \sigma}(u)) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \}$$

unterstellt. Die Verteilungsfamilien hängen von dem unbekannten Parameter $\vartheta = (\xi, \beta)$ im GPD-Modell und $\vartheta = (\mu, \sigma)$ im logNV-Modell ab, der aus dem Datensatz zu schätzen ist.

Maximum Likelihood Gleichung. Die Dichte beider Verteilungen läßt sich leicht berechnen. Bezeichne f_{ϑ} die Dichte der Exzedentenverteilung, so ist der Schätzer $\hat{\vartheta}$ das Maximum der folgenden log-Likelihood Funktion:

$$\ln L(\vartheta; y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=1}^k \ln f_{\vartheta}(y_i).$$

Im GPD-Modell $f_{\vartheta}(x) = 1/\beta(1 + \xi/\beta(x - u))^{-1/\xi-1}$

$$\ln L(\xi, \beta; y_1, \dots, y_k) = -k \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \xi \frac{y_j - u}{\beta}\right).$$

Im logNV-Modell $f_{\vartheta}(x) = f_{\mu,\sigma}(x)/(1 - \log NV_{\mu,\sigma}(u))$, $f_{\mu,\sigma}$ Dichte der logNV.

$$\ln L(\mu, \sigma; y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{f_{\mu,\sigma}(y_i)}{1 - \log NV_{\mu,\sigma}(u)} \right).$$

Das Maximum ist die (eindeutige) Nullstelle des Gradienten von $\ln L$. Die Parameter müssen in beiden Modellen simultan geschätzt werden. Dafür stehen numerische Verfahren zur Verfügung. In der Programmiersprache R kann im GPD-Modell die Funktionen **gpd** bzw. **fpot** aus dem Paket *evir* bzw. *evd* verwendet werden. Im logNV-Modell ist die Funktion **fitdistr** aus dem Paket *MASS* zu benutzen. Hier müssen noch Startwerte vorgegeben werden. Als Startwerte für μ, σ können z.B. die Maximum-Likelihood Schätzer bez. der unbedingten logNV eingesetzt. Diese sind in Behnen und Neuhaus (2003) zu finden.

2.6. Geeignete Verteilungen im Zentrum. logNV und Weibull

Die operationellen Schadendaten haben unterhalb der kritischen Schwelle erfahrungsgemäß folgende Struktur (vgl. Bemerkung 2.1)

- es gibt viele Schäden mit kleiner bis mittlerer Schadenhöhe
- die Schadenhöhen sind nach unten durch eine Erfassungsgrenze $l > 0$ beschränkt

Daher sollte im Zentrum keine Verteilung mit Power-Tail (z.B. GPD oder Paretoverteilung) angepaßt werden. Andererseits hat sich bei dem Datensatz "danish", und dem HSH Datensatz gezeigt, daß nichtsubexponentielle Verteilungen (*light tailed*) wie z.B. die Gamma-verteilung sich nicht an die Daten anpassen lassen. Das (numerische) Maximum-Likelihood Schätzverfahren konvergiert nicht. Daher sind fürs Zentrum Verteilungen zu wählen, die keinen Power-Tail besitzen aber subexponentiell sind.

Neben der (bedingten) logNormalverteilung wähle als weiteren Kandidaten fürs Zentrum die (bedingte) Weibullverteilung. Die Weibullverteilung ist wie die logNV praktikabel und wird auch laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) im Bereich operationeller Risiken angewendet. Bezeichne die Weibullverteilung mit $WB_{s,b}$ bzw. WB.

Definition. Die Dichte der unbedingten Weibullverteilung zu den Parametern $s, b > 0$ lautet

$$f_{s,b}(x) = s b x^{s-1} \exp(-b x^s), \quad x > 0.$$

Bemerkung. Die Weibullverteilung ist für Parameter $s < 1$ subexponentiell und für $s \geq 1$ ist sie *light tailed*. Die Verteilung ist wie die logNormalverteilung nicht regulär variierend und hat endliche erste und zweite Momente.

2.6.1. Maximum Likelihood Schätzung

Realisationen. Der Schadendatensatz $x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in (l, \infty)$ besteht nach Annahme 2.2 aus Realisationen von *iid* ZV mit Verteilungsfunktion F . Zur vorgegebenen Schwelle u bezeichne die Elemente kleiner als u mit $y_1, \dots, y_m$. Es gilt, daß die Daten $y_1, \dots, y_m$ mit $y_i \in [l, u]$ ihrerseits auch Realisationen von *iid* ZV $Y_1, \dots, Y_m$ sind. Die gemeinsame Verteilungsfunktion G lautet

$$G(x) = P(X \leq x \mid X \leq u) = \frac{P\{X \in [l, x]\}}{P\{X \in [l, u]\}}, \quad x \in [l, u].$$

Als Verteilungsfunktion der $(Y_i)_{i=1 \dots m}$ wird im logNV-Modell die Familie

$$\{ (\log NV_{\mu,\sigma}(\cdot) - \log NV_{\mu,\sigma}(l)) / (\log NV_{\mu,\sigma}(u) - \log NV_{\mu,\sigma}(l)) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \}$$

und im Weibull-Modell die Verteilungsfamilie

$$\{ (WB_{s,b}(\cdot) - WB_{s,b}(l)) / (WB_{s,b}(u) - WB_{s,b}(l)) \mid s > 0, b > 0 \}$$

unterstellt. Die Verteilungsfamilien hängen von dem unbekannten Parameter $\vartheta = (\mu, \sigma)$ im logNV-Modell bzw. $\vartheta = (s, b)$ im WB-Modell ab, der aus dem Datensatz zu schätzen ist.

Maximum Likelihood Gleichung. Die Dichte der beiden Verteilungsfamilien läßt sich leicht ermitteln. Bezeichne f_{ϑ} die Dichte von Y_1 . Der gesuchte Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$ ist das Maximum der folgenden log-Likelihood Funktion.

$$\ln L(\vartheta; y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m \ln f_{\vartheta}(y_i).$$

Im logNV-Modell $f_{\vartheta}(x) = f_{\mu,\sigma}(y_i) / (\log NV_{\mu,\sigma}(u) - \log NV_{\mu,\sigma}(l))$, $f_{\mu,\sigma}$ logNV-Dichte

$$\ln L(\mu, \sigma; y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{f_{\mu,\sigma}(y_i)}{\log NV_{\mu,\sigma}(u) - \log NV_{\mu,\sigma}(l)} \right).$$

Im WB-Modell $f_{\vartheta}(x) = f_{s,b}(x) / (WB_{s,b}(u) - WB_{s,b}(l))$, $f_{s,b}$ WB-Dichte

$$\ln L(s, b; y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{f_{s,b}(y_i)}{WB_{s,b}(u) - WB_{s,b}(l)} \right).$$

Das Maximum ist die (eindeutige) Nullstelle des Gradienten von $\ln L$. Die Nullstelle kann in beiden Modellen nicht analytisch bestimmt werden. Im logNV-Modell verfähre analog zu Kapitel 2.5.3. Im Weibull-Modell verwende die Funktion **fitdistr** mit geeigneten Startwerten für s, b . Als Startwerte sind z.B. die Maximum Likelihood Schätzer $\hat{s}, \hat{b}$ der unbedingten Weibullverteilung möglich. Diese sind ohne Vorgabe von Startwerten in R mit der gleichen Funktion **fitdistr** erhältlich.

Die Kandidaten für die Anpassung der Daten im Zentrum (logNV, WB) und im Tail (GPD, logNV) sind festgelegt. Es fehlt noch:

Bestimme eine angemessene Schwelle u , die alle drei Kriterien aus Überlegung 2.10 erfüllt – hohe Schwelle, gute Anpassung, genügend Daten oberhalb u .

Im folgenden Abschnitt wird dieses Problem für praktische Anwendungen mit den *goodness of fit* Statistiken gelöst.

2.7. Bestimmung einer geeigneten Schwelle

goodness of fit Statistiken. Eine goodness of fit Statistik T macht eine quantitative Aussage über die Anpassungsgüte einer hypothetischen Verteilungsfunktion an einen Datensatz $x = (x_1, \dots, x_n)$ von *iid* ZV. Die Statistiken stammen aus Chernobai et al. (2005). Der vollständige Kolmogorov-Smirnov Test ist in Behnen und Neuhaus (2003) zu finden.

Die hier verwendeten goodness of fit Statistiken sind Supremums-Statistiken und gehen i.a. auf den folgenden Hauptsatz der Statistik zurück:

Satz (Glivenko-Cantelli). *Es bezeichne F_n die empirische Verteilungsfunktion zu Daten $x_1, \dots, x_n$. Die Realisationen $x_1, \dots, x_n$ stammen von iid ZV mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Dann gilt*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad Pf.s.$$

Bemerkung 2.20. Es bezeichne F_0 die angepaßte Verteilung und $\|\cdot\|$ die Supremums-Norm. Es sei n hinreichend groß und es gelte $\|F_0 - F_n\| < \epsilon_1$ für ϵ_1 nahe 0. Der Hauptsatz liefert wegen n groß die Abschätzung $\|F - F_n\| < \epsilon_2$ mit ϵ_2 nahe 0. Daraus folgt über die Dreiecksungleichung

$$\|F - F_0\| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{<} \|F_n - F_0\| + \|F_n - F\| < \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Daher gilt: Die angepaßte Verteilungsfunktion F_0 liegt nahe an der 'wahren' Verteilungsfunktion, falls eine gute Anpassung von F_0 an F_n gewährleistet ist. Somit ist eine gute Anpassung von angepaßter an empirischer Verteilung von großer Bedeutung.

Die Grenzwertverteilung der für den Tail ausschlaggebenden Statistik (AD Supremums-Statistik) ist in der Literatur nicht zu finden. Im Falle der Kolmogorov-Smirnov Statistik ist die Grenzwertverteilung bekannt und es kann ein vollständiger Test angegeben werden.

Definition 2.21 (Für operationelle Risiken geeignete goodness-of-fit Statistiken).

- (i) Die Kolmogorov-Smirnov Statistik (KS) ist erklärt als Supremum des vertikalen Abstandes aus empirischer (F_n) und angepaßter stetiger Verteilungsfunktion (F_0).

$$\mathbf{KS} = \sqrt{n} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|.$$

Test. Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $\mathbf{KS}$ die Kolmogorov-Smirnov Teststatistik. Es gilt für den Grenzwert:

$$\mathbf{KS} \xrightarrow{\text{in Vert.}} L(x) := \left(1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \exp(-2i^2 x^2)\right) 1_{\{x>0\}}$$

Dann ist $\Psi : [0, 1]^n \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\Psi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 0 : & \mathbf{KS} < (L)^{-1}(1 - \alpha) \\ 1 : & \mathbf{KS} \geq (L)^{-1}(1 - \alpha) \end{cases}$$

ein Test zum Niveau α zur Hypothese H_0 mit H_0 : ' $F_0 = F$, wobei F die den Daten zugrundeliegende wahre Verteilungsfunktion sei.' (beachte $L(1.36) \approx 0.95$)

- (ii) Bei der Anderson-Darling Supremums-Statistik (AD) wird eine Kolmogorov-Smirnov Statistik mit $(F_0(x)(1 - F_0(x)))^{-1/2}$ gewichtet.

$$\mathbf{AD} = \sqrt{n} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{F_n(x) - F_0(x)}{\sqrt{F_0(x)(1 - F_0(x))}} \right|.$$

Bemerkung 2.22. Die Kolmogorov-Smirnov Statistik ist für die Überprüfung der Anpassungsqualität im Zentrum geeignet. Für eine Überprüfung im Tail verwende eine andere Statistik, da ansonsten Abweichungen im Tail wie im Zentrum gleichermaßen "betrifft" würden. Die zweite Statistik ist für eine Überprüfung im Tail aussagekräftiger: Die Zahl $(F_0(1 - F_0))^{-1/2}$ wird für Werte ($x \geq u$) sehr groß, da dort $F_0(x)$ nahe 1 und $1 - F_0(x)$ nahe 0 ist. Daher gibt die Statistik für Werte $x > u$ einen hohen Wert aus, sofern die Anpassung im Tail nicht ausgesprochen gut ist. Eine gute Anpassung ist im Tail gefordert und daher diese Statistik zur Überprüfung der Anpassungsqualität auszuwählen.

Algorithmus (Praktische Umsetzung der Teststatistiken).

Es sei ein Datensatz $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit der Anordnung $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ sowie eine Verteilungsfunktion F_0 gegeben. Zu dem Paar $(\mathbf{x}, F_0)$ werden die Teststatistiken ermittelt. Beachte, daß die empirische Verteilungsfunktion rechtsseitig stetig, monoton steigend und als Treppenfunktion auf $]x_{(i-1)}, x_{(i)}]$ konstant ist. Die angepaßte Funktion F_0 ist stetig und streng monoton steigend. Daher werden die Statistiken über das Maximum des Abstandes an den Stellen $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ zwischen F_0 und F_n ermittelt. Es bezeichne $z_j := F_0(x_{(j)})$, $j = 1 \dots n$. Dann können die Statistiken wie folgt programmiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{KS} &= \sqrt{n} \max \left\{ \max_{j=1 \dots n} \left| \frac{j}{n} - z_j \right|, \max_{j=1 \dots n} \left| z_j - \frac{j-1}{n} \right| \right\} \\ \mathbf{AD} &= \sqrt{n} \max \left\{ \max_{j=1 \dots n} \left| \frac{\frac{j}{n} - z_j}{\sqrt{z_j(1 - z_j)}} \right|, \max_{j=1 \dots n} \left| \frac{z_j - \frac{j-1}{n}}{\sqrt{z_j(1 - z_j)}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Der folgende Algorithmus sucht in vorgegebenen Grenzen die Schwelle u , so daß eine gute Anpassung einer GPD an die empirische Verteilungsfunktion im Tail gewährleistet ist. Die GPD ist für operationelle Schäden der natürliche Grenzwert der Exzedentenverteilung und insofern die maßgebende Verteilung. Ist die Anpassung der GPD an die Daten gut, so ist auch eine akkurate Abbildung des Tails und damit des gesamten Verlustes zu erwarten. Ein weiterer Gesichtspunkt ist die maximal mögliche Anzahl an Daten im Tail, denn ein guter AD-Wert ist bei z.B. 50 Daten im Tail aussagekräftiger als bei nur z.B. 20 Daten. Durch die Suche nach der Schwelle im hohen Quantilbereich der empirischen Schadenhöhenverteilung ist die Bedingung ' $u \rightarrow \infty$ ' im Satz von Pickands-Balkema-de Haan gewährleistet. Damit sind alle drei Kriterien aus Überlegung 2.10 erfüllt.

Algorithmus 2.23 (Auffinden einer geeigneten Schwelle im GPD Modell).

1. Setze die linke und rechte Grenze des Intervalls, in dem die Schwelle zu suchen ist. Bezeichne das Intervall mit $[a, b]$ (z.B. das 0.9 und 0.95 Quantil).
2. Zerlege $[a, b]$ in 200 äquidistante Intervalle.
3. Nimm die 201 sich ergebenden Randpunkte der Intervalle als Kandidaten für die Schwelle. Bezeichne einen Vertreter mit u .
4. Schätze für jeden Kandidaten die Parameter der $GPD(\xi, \beta)$ aus den Daten größer als u mittels Maximum-Likelihood Schätzverfahren. Bezeichne diese mit $\hat{\xi}, \hat{\beta}$.
5. Für jede der möglichen 201 Schwellen u berechne die AD-Statistik aus angepaßter Verteilungsfunktion und empirischer Verteilungsfunktion (oberhalb u). Bezeichne diese mit $s(u)$.
6. Bestimme u_0 mit dem minimalen AD-Wert, d.h. $s(u_0) = \min_u s(u)$.
7. Bestimme unter allen möglichen Schwellen u mit

$$s(u) \leq (1 + \epsilon) s(u_0), \quad \epsilon = 0.1$$

das $\tilde{u}$, für welches die Anzahl an Daten oberhalb $\tilde{u}$ maximal ist.

8. Dieses $\tilde{u}$ ist dann die 'perfekte Schwelle'.

2.8. Value at Risk

Die Sicherheitsunterlegung ist in der homogenen Sichtweise als das 0.999 Quantil der angepaßten Verlustverteilung von L erklärt, d.h.

$$EK_{LDA}(OR) = F_L^{-1}(0.999),$$

wobei F_L die Verteilung von L ist. Das Quantil kann durch eine Simulation von L näherungsweise berechnet werden. Eine andere Methode ist die Schätzung durch ein Quantil der zugehörigen Schadenhöhenverteilung, die als erstes besprochen wird.

2.8.1. Value at Risk Schätzung

Der folgende Satz beinhaltet VaR-Schätzformeln im Falle von heavy tailed Schadenhöhenverteilungen, die asymptotisch (d.h. für ein Vertrauensniveau $\alpha \rightarrow 1$) gültig sind.

Es wird nur der zweite und dritte Teil des Satzes bewiesen. Für den ersten Teil werden Abschätzungen für subexponentielle Schadenhöhenverteilungen benötigt, die in der Literatur nicht zu finden sind. Dennoch sollte auch der erste Teil zur Vervollständigung genannt werden, da dieser plausibel erscheint und die Ergebnisse der VaR-Schätzung in 2.10 diesen zumindest quantitativ rechtfertigen.

Satz 2.24. Sei L ein kollektives Modell der Risikotheorie mit subexponentieller Schadenhöhenverteilung F und Schadenanzahl N . Setze $\lambda := E(N)$. Die Quantilfunktion von L besitzt folgende asymptotische Äquivalenzen für $\alpha \rightarrow 1$:

(i)

$$\text{VaR}_\alpha(L) \sim F^{-1}\left(1 - \frac{1 - \alpha}{\lambda}\right).$$

(ii) Ist $\bar{F}$ zusätzlich regulär variierend mit Index $-\rho$ für ein $\rho > 0$, so gilt:

$$\text{VaR}_\alpha(L) \sim \lambda^{1/\rho} F^{-1}(\alpha).$$

(iii) Ist F eine Mischung mit einer GPD(ξ, u, β) als Tailverteilung auf (u, ∞) , so folgt:

$$\text{VaR}_\alpha(L) \sim u + \frac{\beta}{\xi} \left\{ \left(\frac{1 - \alpha}{\lambda \bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right\}. \quad (2.4)$$

Beweis. Es wird zunächst (ii) gezeigt:

Definiere H als Summenverteilung bez. der Schadenanzahl N und der Schadenhöhenverteilung F . Um später ein hohes α -Quantil von H durch die Quantilfunktion von F zu schätzen, führe Funktionen U, V ein mit

$$U(x) = \frac{1}{\bar{H}(x)}, \quad V(x) = \frac{1}{\bar{F}(x)}$$

für $x > 0$. Dann sind U, V monoton steigende Funktionen. Es können die verallgemeinerten Linksinverse definiert werden,

$$U^{\leftarrow}(y) = \inf\{x > 0 : U(x) \geq y\}, \quad V^{\leftarrow}(y) = \inf\{x > 0 : V(x) \geq y\}$$

für $y > 0$. Es gilt

$$U^{\leftarrow}(y) = H^{\leftarrow}(1 - 1/y), \quad V^{\leftarrow}(y) = F^{\leftarrow}(1 - 1/y).$$

Da $\bar{F}$ regulär variierend zum Index $-\rho$ ist, so ist nach Resnick (1987) V regulär variierend zum Index ρ . Aus der Risikotheorie ist für $x \rightarrow \infty$ die Asymptotik

$$\bar{H}(x) \sim \lambda \bar{F}(x)$$

bekannt. Daher ist $\bar{H}$ regulär variierend zum Index $-\rho$ und nach Resnick (1987) U regulär variierend zum Index ρ . Zusätzlich folgt die asymptotische Äquivalenz von U und $\frac{1}{\lambda}V$, d.h.

$$U(x) \sim \frac{1}{\lambda} V(x).$$

Da U, V beide regulär variierend mit Index $-\rho$ sind, so gilt nach Resnick (1987) weiter für die verallgemeinerten Linksinversen die Asymptotik

$$U^{\leftarrow}(y) \sim \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{\rho}} V^{\leftarrow}(y) = \lambda^{\frac{1}{\rho}} V^{\leftarrow}(y).$$

Das führt zu

$$1 = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{U^{\leftarrow}(y)}{\lambda^{\frac{1}{\rho}} V^{\leftarrow}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{H^{\leftarrow}(1 - 1/y)}{\lambda^{\frac{1}{\rho}} F^{\leftarrow}(1 - 1/y)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{H^{\leftarrow}(\alpha)}{\lambda^{\frac{1}{\rho}} F^{\leftarrow}(\alpha)},$$

d.h. der Value at Risk läßt sich bei einer Power Tail Schadenhöhenverteilung F abschätzen durch $H^{\leftarrow}(\alpha) \sim \lambda^{1/\rho} F^{\leftarrow}(\alpha)$, d.h. es gilt (ii).

Es wird Teil (iii) mit den Bezeichnungen wie in (ii) bewiesen. Dazu wird die asymptotisch äquivalente Umkehrfunktion von U mit $U = 1/\bar{H}$ bestimmt, wobei H die Summenverteilung wie in (ii) beschreibe. Danach wird $U^{\leftarrow}(y) = H^{\leftarrow}(1 - 1/y)$ verwendet:

Beachte, daß sich die Flanke von F bei (iii) schreiben läßt als

$$\bar{F}(x) = P(X > u) P(X > x \mid X > u) = \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

d.h. $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-1/\xi$. Weiter gilt nach der Risikotheorie

$$\bar{H}(x) \sim \lambda \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

und daher gilt für den Kehrwert die Asymptotik

$$\frac{1}{\bar{H}(x)} \sim \frac{1}{\lambda_u} \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{\frac{1}{\xi}},$$

wobei $\lambda_u := \lambda \bar{F}(u)$ gesetzt wurde. Die asymptotisch äquivalente Umkehrfunktion von $1/\bar{H}$ (und damit von U), d.h. die Umkehrfunktion von $G(x) := 1/\lambda_u (1 + \xi(x - u)/\beta)^{1/\xi}$ ist

$$G^{-1}(y) = u + \frac{\beta}{\xi} \left((y \lambda_u)^{\xi} - 1 \right).$$

Wegen $U^{\leftarrow}(y) = H^{\leftarrow}(1 - 1/y)$ folgt

$$H^{\leftarrow}(1 - 1/y) \sim G^{-1}(y)$$

bzw. für $\alpha := 1 - 1/y$

$$H^{\leftarrow}(\alpha) \sim G^{-1}\left(\frac{1}{1 - \alpha}\right) = u + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{\lambda_u}{1 - \alpha}\right)^{\xi} - 1 \right) = u + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{1 - \alpha}{\lambda_u}\right)^{-\xi} - 1 \right).$$

Daher gilt (iii). □

Die Schätzformeln benötigen keine aufwendige Simulationen der Verlustverteilung und können z.B. zur Kontrolle der näherungsweisen VaR-Berechnungen eingesetzt werden.

2.8.2. Value at Risk Berechnung

Bei der näherungsweisen VaR-Berechnung werden eine angemessene Anzahl an Realisationen von L erzeugt. Damit wird die empirische Verlustverteilung gebildet und davon das α -Quantil als Sicherheitsunterlegung verwendet, wobei $\alpha = 0.999$ gemäß Basel II festgesetzt ist. Dafür müssen u.a. Realisationen von F generiert werden – z.B. mittels der bekannten Tatsache

$$F^{-1}(U) \sim F \text{ für } U \sim \mathcal{R}(0, 1).$$

Daher soll F^{-1} bestimmt werden: Es seien F_1 die Zentrumsverteilung auf $(l, u]$ und F_2 die Tailverteilung auf (u, ∞) . Setze $a := F(u)$. Dann läßt sich F schreiben als

$$F(x) = \begin{cases} a \cdot F_1(x) & x \leq u \\ a + (1 - a) \cdot F_2(x) & x > u. \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist hier stetig sowie auf (l, ∞) streng monoton steigend und damit insbesondere bijektiv. Die Umkehrfunktion lautet

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} F_1^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) & y \leq a \\ F_2^{-1}\left(\frac{y-a}{1-a}\right) & y > a \end{cases}$$

und so können effizient Realisationen von F erzeugt werden. Die restlichen Anforderungen des folgenden Algorithmus können (mit R) leicht gelöst werden.

Algorithmus 2.25 (Näherungsweise Berechnung des VaR mittels Simulation).

- Generiere Realisationen $l_1, l_2, \dots, l_m$ nach $L = \sum_{i=1}^N X_i$ wie folgt:
 1. Erzeuge Schadenanzahl k nach $Poi(\lambda)$
 2. Erzeuge Schadenhöhen $x_1, \dots, x_k$ nach der Verteilung F .
 3. Setze $l_j = \sum_{i=1}^k x_i$.
 4. Führe die Schritte 1 bis 3 für $j = 1, \dots, m$ durch.
- Aus $l_1, \dots, l_m$ bilde die empirische Verlustverteilung $F_{L,m}$.
- Der (empirische) VaR zum Niveau α ist $F_{L,m}^{-1}(\alpha)$.
- Für $\alpha = 0.999$ ist das die Sicherheitsunterlegung der homogenen Sichtweise.

Die Anzahl an Realisationen m sollte so lange gesteigert werden, bis die Ergebnisse der VaR-Berechnungen zu verschiedenen Durchläufen dicht beieinander liegen.

Beispiel (GPD). Der Tail der $GPD(\xi, u, \beta)$ wird durch den Gestaltenparameter ξ bestimmt. Bei Annahme einer $GPD(\xi, u, \beta)$ als Tailverteilung beeinflußt der **Gestaltenparameter** ξ den zufälligen Portfolioverlust und damit den VaR maßgeblich. Die Analyse der HSH Datensätze hat sogar gezeigt, daß bei Weglassen oder Hinzufügen 'extremer' Schäden sich der Gestaltenparameter deutlich und damit auch der opVaR, jedoch die beiden anderen Parameter u, β nur geringfügig veränderten. In Demoulin et al. (2005) wird dargelegt, wieviel des insgesamt Verlustes L durch individuelle Schäden bei Annahme eines entsprechenden Gestaltenparameters bestimmt wird: Bei $\xi = 0.7$ verursachen 20% der Schäden 80% des insgesamt Verlustes L . Bei $\xi = 0.99$ sind es sogar nur 0.1% der einzelnen Schäden, die 95% des insgesamt Verlustes L verursachen.

2.9. Vollständiges POT Modell

Zur Komplettierung der praktischen Methoden sei das vollständige POT Modell genannt. Eine mathematisch exakte Erklärung der folgenden Aussagen würde tiefer in die Theorie der Punktprozesse und die dortigen Konvergenzsätze (Kallenberg Theorem) eingehen. Der Leser möge sich daher an den Ausführungen in Embrechts et al. (1997) orientieren.

Bemerkung 2.26 (Vollständiges POT Modell).

- (a) Die Überschreitungen einer *iid* Folge von ZV zu einer hohen Schwelle u treten gemäß eines homogenen Poisson-Prozeß ein.
- (b) Die Exzedenten zu u sind unabhängig und haben eine gemeinsame $GPD(\xi, u, \beta)$
- (c) Schadenhöhe und Eintrittszeiten der Exzedenten sind stochastisch unabhängig.

Es wird angenommen, daß die Schäden gemäß eines homogenen Poisson-Prozeß eintreten. Daraus folgt, daß der ausgedünnte Punkt-Prozeß der Exzedenten-Eintrittszeiten wiederum ein homogener Poisson-Prozeß ist. Daraus ergibt sich (a). Die Hintergründe zu (b) sind in 2.4 dargestellt. Die Aussage (c) ist bez. eines Grenzwertübergangs für Stichprobenumfang $\rightarrow \infty$ zu verstehen. Näheres ist dazu in Leadbetter (1991) zu finden.

Kriterium 2.27. Es gelten die Aussagen und Bezeichnungen in 2.26. Definiere λ_u die Intensität des Exzedenten-Punktprozesses. Die Exzedenten seien mit $Y_1, \dots, Y_k$ und die zugehörigen Schadeneintrittszeiten mit $T_1, \dots, T_k$ bezeichnet. Dann gilt für die

Schadeneintrittszeiten	Die Wartezeiten vom $i - 1$ bis zum i ten Exzess $W_i = T_i - T_{i-1}$ sind <i>iid</i> exponentialverteilt zum Parameter λ_u . Daher sind die Residuen Z_i mit
	$Z_i = \lambda_u \cdot W_i$
	standardexponentialverteilt.

Schadenhöhen	Die Exzedenten sind <i>iid</i> $GPD(\xi, u, \beta)$ verteilt. Daraus folgt, daß die Residuen $\tilde{W}$ mit
	$\tilde{W}_i = \frac{1}{\xi} \ln \left(1 + \xi \frac{Y_i - u}{\beta} \right)$
	<i>iid</i> standardexponentialverteilt sind.

Algorithmus 2.28. Mit den Bezeichnungen aus 2.27 kontrolliere, ob für die Schadeneintrittszeiten bzw. Schadenhöhen folgendes erfüllt ist:

- SEZ 1. Residuen $Z_i = \lambda_u \cdot W_i$ sind *iid* standardexp.verteilt $\rightarrow$ Test durch QQ-Plot
 2. Die Jahresintensität an Überschreitungen ist konstant, d.h. die Wartezeiten zwischen den Exzedenten sind in ihrer Abfolge im Durchschnitt konstant $\rightarrow$ Test durch Scatterplot (i, W_i) mit zugehöriger *smoothed mean value curve*
- SH 1. Mean-Excess-Funktion (linear, positive Stg.) $\rightarrow$ Test durch Mean-Excess Plot
 2. Residuen $\tilde{W}_i$ sind *iid* standardexponentialverteilt $\rightarrow$ Test durch QQ-Plot
 3. Die Schadenhöhe der Exzedenten bleibt im Durchschnitt gleichhoch, d.h. die Residuen sollten in ihrer Abfolge im Mittel gleichhoch sein $\rightarrow$ Test durch Scatterplot $(i, \tilde{W}_i)$ mit zugehöriger *smoothed mean value curve*

Die Bedeutung der *smoothed mean value curve* für die Schadeneintrittszeiten und Schadenhöhen der Überschreitungen ist in Embrechts et al. (1997) und McNeil and Saladin (1998) ausführlich dargestellt und wird anhand des Beispieldatensatzes näher erklärt.

2.10. Bewertung operationeller Schäden. Beispieldatensatz

Methodische Überlegungen

Der vorliegende Datensatz eines fiktiven Geldinstituts besteht aus 1008 operationellen Schäden. Der Zeitraum der Datenerfassung ist 1. Januar 2001 bis 29. Dezember 2005. Die untere Erfassungsgrenze liegt bei $l = 2000$ EUR. Der Maximalschaden beträgt 3.292 Mio. EUR und der Mittelwert 27670 EUR. Bei einer mittleren Schadenintensität pro Jahr von 201 ergibt das einen mittleren Verlust von 5.58 Mio. EUR pro Jahr. Das (empirische) 0.9-Quantil entspricht hier als Kandidat für die Schwelle ca. 53000 EUR. Betrachte in den Abbildungen 2.4 den zeitlichen Schadenverlauf $\{(t_i, x_i) \mid i = 1 \dots 1008\}$.

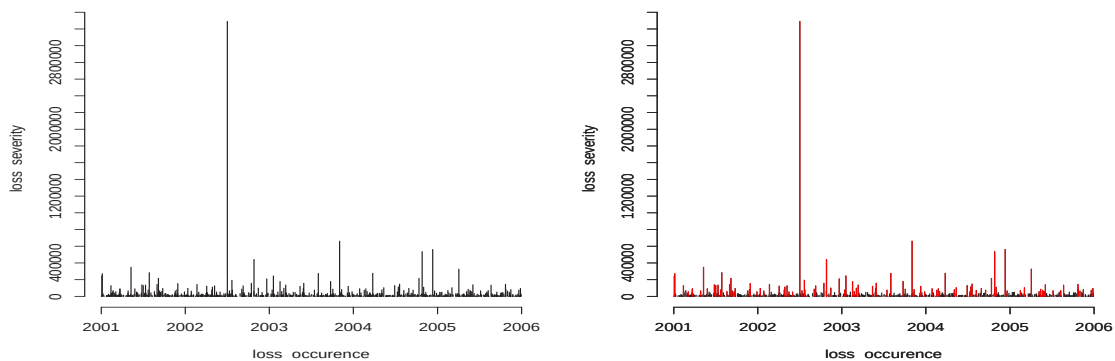


Abbildung 2.4. Empirische Datenanalyse. Rechts: Schäden oberhalb des 0.9 Quantils sind rot markiert. Die kritische Schwelle sei das 0.9 Quantil und die rot markierten Schäden die Extremschäden. So gibt die Abbildung die vermutete Zweiteilung der Schäden in viele kleine und wenige große wieder.

Gemäß der Modellannahme verhalten sich die Schadeneintrittszeiten wie die eines homogenen Poisson Prozeß mit unbekannter Jahresintensität. Hieraus ist zu folgern, daß die Schadenzahlen pro Monat stochastisch unabhängige, identisch poissonverteilte ZV definieren. Die Schätzung für die Jahresintensität ergibt sich aus dem Stichprobenmittel der monatlichen Schadenzahlen und durch Multiplikation mit 12 die unbekannte Jahresintensität λ . Damit wende (2.2) an und erhalte $\hat{\lambda} = 201.6$ bei einem betrachteten Zeitraum von 60 Monaten. Der zeitliche Verlauf der Schadenzahlen ist in den Abbildungen 2.5 zu sehen.

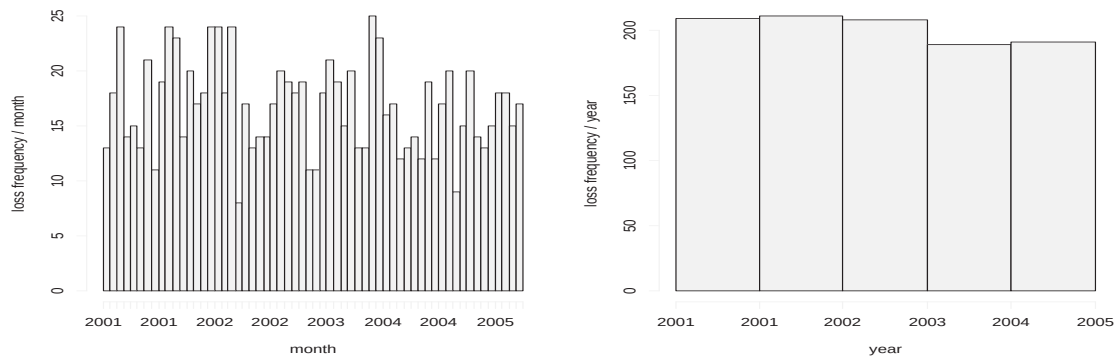


Abbildung 2.5. Schadenanzahlanalyse. Links: zeitliche Verlauf der monatlichen Schadenzahlen. Rechts: Verlauf der jährlichen Schadenzahlen. Während die Monatszahlen deutlich um den Mittelwert von $201.6/12$ schwanken, weichen die jährlichen Jahreszahlen nur geringfügig vom Mittelwert 201.6 ab.

Bei der Schadenhöhenanalyse ist zunächst zu zeigen, daß eine subexponentielle (bzw. Power Tail-) Verteilung angepaßt werden sollte. Das wird mit dem QQ-Plot und mean excess Plot in den Abbildungen 2.6 gezeigt.

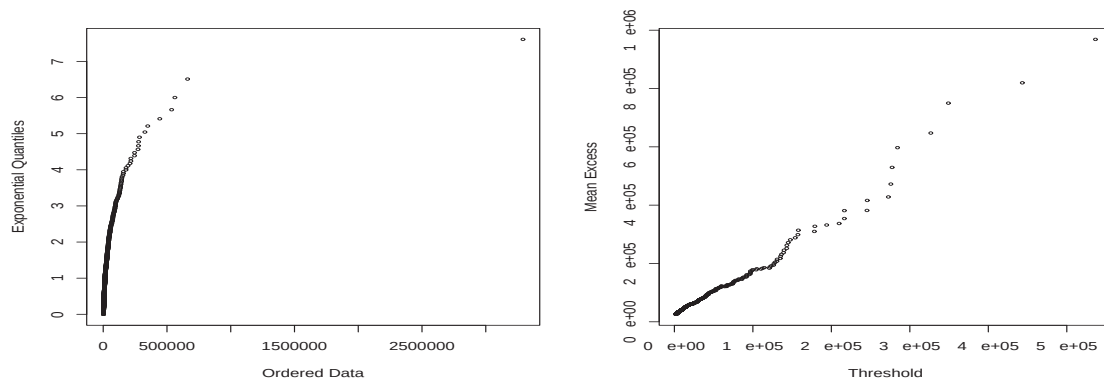


Abbildung 2.6. Schadenhöhenanalyse. Der konkave Verlauf des QQ-Plots zu exponentiellen Quantilen (links) zeigt, daß die gesamten Schadenhöhen keiner exponentiellen Verteilung genügen – weder im Tail noch im Zentrum. Der mean excess Plot (rechts) zeigt einen deutlichen Anstieg und spricht damit auch für eine subexponentielle Schadenhöhenverteilung. Es ist nicht genau zu erkennen, ob der Verlauf des Graphen dem einer Geraden oder dem einer konkaven Kurve entspricht.

Quantitative Modelle

Passen drei verschiedene Modelle an die Schadenhöhen an:

- Modell 1 Power Tail Modell. Mischung aus GPD (Tail) und bedingter logNV *oder* bedingter Weibullverteilung (Zentrum)
- Modell 2 Anpassung einer bedingten logNV an alle Schadenhöhen
- Modell 3 Mischungsmodell aus zwei bedingten logNV

Es wird gezeigt, daß erstens ein Mischungsmodell zur Anpassung an die Daten notwendig ist. Zweitens wird deutlich, daß das Modell mit Power Tail einen besseren goodness of fit Wert (im Tail) als das Modell aus zwei bedingten logNV erhält. Den Trennpunkt u zwischen normalen und extremen Schäden wird mit dem Algorithmus 2.23 ermittelt. Bei Modell 3 verwende ebenfalls den in Modell 1 ermittelten Trennpunkt. Zunächst gehe die Modelle einzeln durch und stelle die Ergebnisse vor. Zum Schluß vergleiche die drei Modelle anhand der ermittelten Sicherheitsunterlegung sowie geeigneter Plots.

Schadenhöhenanalyse Modell 1. Es wird mit Algorithmus 2.23 über die AD-Statistik eine geeignete Schwelle zwischen 52742 und 94107 EUR gesucht. Das entspricht dem 0.9 und 0.95 Quantil der (empirischen) Schadenhöhenverteilung bzw. 105 und 51 Überschreitungsdaten. Der Verlauf der Kolmogorov-Smirnov bzw. Anderson-Darling Statistik ist in den Abbildungen 2.7 dargestellt.

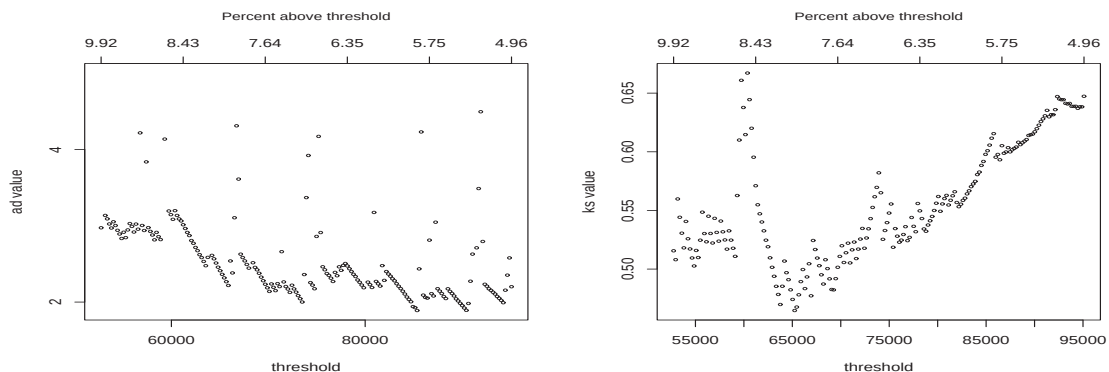


Abbildung 2.7. Schadenhöhenanalyse. Verlauf der AD-Statistik (links) und der KS Statistik (rechts). Der Algorithmus mit der AD-Statistik schlägt eine Schwelle bei 73501 EUR vor mit einer Anpassungsgüte von $AD=2.00$. Bei Verwendung der KS-Statistik wird die Schwelle $u = 65241$ EUR vorgeschlagen. Beides sind angemessene Schwellen. Es wird die Schwelle $u = 73501$ EUR verwendet, da die resultierende Schadenhöhenverteilung die bessere AD-Statistik im Tail aufweist als bei $u = 65241$.

Mit Hilfe der AD-Statistik im Algorithmus wird eine geeignete Schwelle $u = 73501$ ermittelt. Das entspricht dem empirischen 0.93 Quantil und der Vorstellung einer hohen Schwelle gemäß Korollar 2.12. Die Anzahl der Exzedenten ist mit 73 hoch genug. Es ergeben sich die folgenden Parameter für die GPD im Tail

threshold (u)	shape (ξ)	scale (β)	AD-Wert	KS-Wert
73501.02	0.614	49206	2.00	0.56

und im Zentrum für die bedingte logNV (links) bzw. Weibullverteilung (rechts):

mlog (μ)	sdlog (σ)	KS-Wert	shape (s)	scale (b)	KS-Wert
8.61	1.56	0.44	0.536	5021	0.53

Die logNV weist im Zentrum einen besseren KS-Wert auf. Daher ist die angepaßte Schadenhöhenverteilung F eine Mischung aus $\text{GPD}(\xi, u, \beta)$ und bedingter logNV(μ, σ). Die Verteilung F lautet

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq l \\ F(u) \cdot \frac{\log\text{NV}(x) - \log\text{NV}(l)}{\log\text{NV}(u) - \log\text{NV}(l)} & x \leq u \\ \bar{F}(u) \cdot \text{GPD}(x) + F(u) & x > u. \end{cases}$$

Die folgende Tabelle enthält einen Überblick über mögliche Schwellen und zugehörige Kennzahlen.

threshold (u)	shape (ξ)	scale (β)	AD-Wert	Anz. Exed.	opVaR _{99,9}
30000	0.6234867	27666.60	1.791550	201	32.93
35000	0.6018675	31943.63	1.973015	168	28.11
40000	0.5900155	35927.24	3.635524	143	25.91
45000	0.5264535	43823.22	2.691494	121	16.87
50000	0.5220825	46850.00	2.741009	108	16.40
55000	0.5174294	50032.55	2.786317	97	15.96
60000	0.4867105	56204.31	3.136169	86	13.25
65000	0.5582324	50287.74	2.415767	83	20.41
70000	0.5901656	49661.29	2.165947	77	24.90
73501	0.614	49206	2.00	73	28.96
75000	0.5960948	52009.95	2.929610	70	25.83
80000	0.5919539	55055.22	3.077562	64	25.09
85000	0.6252366	54058.01	1.953063	60	30.71
90000	0.6252437	56944.89	1.958310	55	30.64
95000	0.6380587	58368.97	3.042186	51	33.04
100000	0.5444674	75303.05	2.445491	44	19.39
105000	0.5714212	73449.13	2.277802	42	22.44
110000	0.6671949	62009.64	1.781926	42	38.61
115000	0.6739604	64450.24	1.923022	39	40.17
120000	0.8263492	50682.33	1.201242	39	100.97

Tabelle 2.1. Bandbreite möglicher Schwellen. Die vom Algorithmus gewählte Schwelle $u = 73501$ ist markiert. Die vorgeschlagene Schwelle 73501 erfüllt unter den aufgelisteten Schwellen am ehesten die drei Kriterien aus Überlegung 2.10 – hohe Schwelle, gute Anpassung, genügend Daten. Die zugehörigen VaR Werte zum vorgeschriebenen 99.9% Quantil sind mittels VaR-Schätzformel (2.4) bestimmt.

Schadenhöhenanalyse Modell 2. Passe eine bedingte logNV an alle Schadendaten an. Das Maximum Likelihood Schätzverfahren führt zu

mlog (μ)	sdlog (σ)	AD-Wert (im Tail)	KS-Wert (im Tail)
8.58	1.60	31.24	7.95

Erwartungsgemäß ist die Anpassungsgüte deutlich schlechter als im Modell mit Power-Tail. Die Schadenhöhenverteilung F lautet

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq l \\ \frac{\log NV(x) - \log NV(l)}{1 - \log NV(l)} & x > l. \end{cases}$$

Schadenhöhenanalyse Modell 3. Das zweite Modell wird verbessert. Es wird oberhalb der ermittelten Schwelle $u = 73501$ eine zweite bedingte logNV an die Schadendaten angepaßt. Die Schätzwerte des Maximum Likelihood Verfahrens ergeben sich im Tail (links) bzw. im Zentrum (rechts) zu

mlog (μ)	sdlog (σ)	AD-Wert	KS-Wert	mlog (μ)	sdlog (σ)	KS-Wert
-19.78	4.57	2.07	0.57	8.60	1.56	0.44

Durch die Mischung aus zwei bedingten logNV ist eine deutliche Verbesserung des AD-Werts im Vergleich zum zweiten Modell zustande gekommen. Das erste Modell bietet auch nach dieser Modifizierung eine etwas bessere Anpassung im Tail, denn der AD-Wert ist niedriger. Allerdings ist ein Unterschied wie in diesem Datensatz von 0.07 nicht überzeugend. Bei Echtdateen wie dem HSH Datensatz waren dagegen die Unterschiede zugunsten des ersten Modells deutlicher.

Es sei $\log NV_Z$ die angepaßte logNV im Zentrum und $\log NV_T$ die angepaßte logNV im Tail. Dann lautet die Schadenhöhenverteilung F im dritten Modell:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq l \\ F(u) \cdot \frac{\log NV_Z(x) - \log NV_Z(l)}{\log NV_Z(u) - \log NV_Z(l)} & x \leq u \\ \bar{F}(u) \cdot \frac{\log NV_T(x) - \log NV_T(u)}{1 - \log NV_T(u)} + F(u) & x > u. \end{cases}$$

Modellvergleich

Vergleiche die angepaßten Schadenhöhenverteilungen in einem Plot sowie simulierten und geschätzten VaR. Die Verteilungen werden im Quantil-Bereich $(F_n(u), 1)$ bzw. $(0.8, 1)$ geplottet. Die Verteilungen sind dabei logarithmisch aufgetragen, so daß die **vertikalen Abstände** zwischen empirischer und angepaßter Schadenhöhenverteilung deutlich werden.

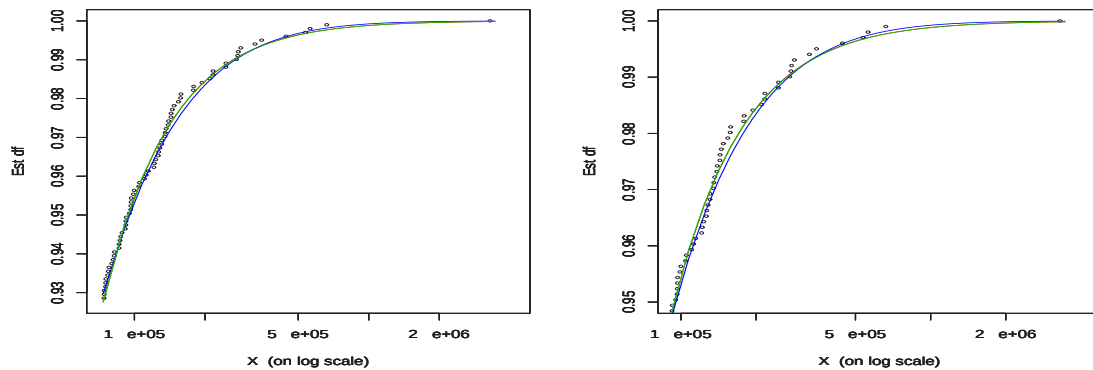


Abbildung 2.8. Angepaßte Schadenhöhenverteilungen im kritischen Bereich. Dabei ist Modell 1 (rot), Modell 2 (blau), Modell 3 (grün) und die empirische Verteilung (gepunktet). Die Kurven zu Modell 1 und Modell 3 liegen in Übereinstimmung mit den goodness of fit Werten sehr dicht beieinander. Obwohl die Anpassung von Modell 2 graphisch nicht wesentlich schlechter als die Anpassung der beiden anderen Modelle zu sein scheint, befinden die goodness of fit Statistikwerte das Modell 2 für wenig geeignet.

Aufgrund der AD-Werte sollte durch Annahme von Modell 1 und Modell 3 die Sicherheitsunterlegung angemessen sein. Wegen der etwas besseren Anpassung von Modell 1 erscheint die so berechnete Sicherheitsunterlegung vertrauenswürdiger.

Niveau	Mod. 1	Mod. 3	Mod. 2	Niveau	Mod. 1	Mod. 3	Mod. 2
0.990	12.7	12.3	8.9	0.990	7.03	6.66	3.12
0.991	13.1	12.7	9.1	0.991	7.50	7.00	3.25
0.992	13.7	13.2	9.2	0.992	8.07	7.52	3.40
0.993	14.4	13.8	9.4	0.993	8.76	8.17	3.57
0.994	15.2	14.6	9.6	0.994	9.63	8.99	3.79
0.995	16.3	15.6	9.9	0.995	10.77	9.78	4.05
0.996	17.9	16.9	10.2	0.996	12.35	11.20	4.40
0.997	20.3	18.9	10.7	0.997	14.74	13.37	4.88
0.998	24.4	22.3	11.4	0.998	18.92	17.27	5.64
0.999	34.1	29.9	12.8	0.999	28.96	23.66	7.17

Tabelle 2.2. Mittels Simulationen (links) und Schätzformel (rechts) bestimmter opVaR in Mio. EUR. In allen drei Modellen liegen simulierter und geschätzter opVaR gleich nah beieinander. Das zumindest spricht für die asymptotische Äquivalenz in Satz 2.24, Teil (i).

Eine Verteilung besitzt in einem GPD Modell eine schwerere Flanke als im logNV Modell. Deshalb ist die Eigenkapitalanforderung in Modell 1 konservativer als in Modell 3. Weiterhin ist die Anpassungsgüte in Modell 1 am besten, was dessen Bedeutung für die Modellierung unterstreicht.

Kontrolle POT Modell nach Algorithmus 2.28

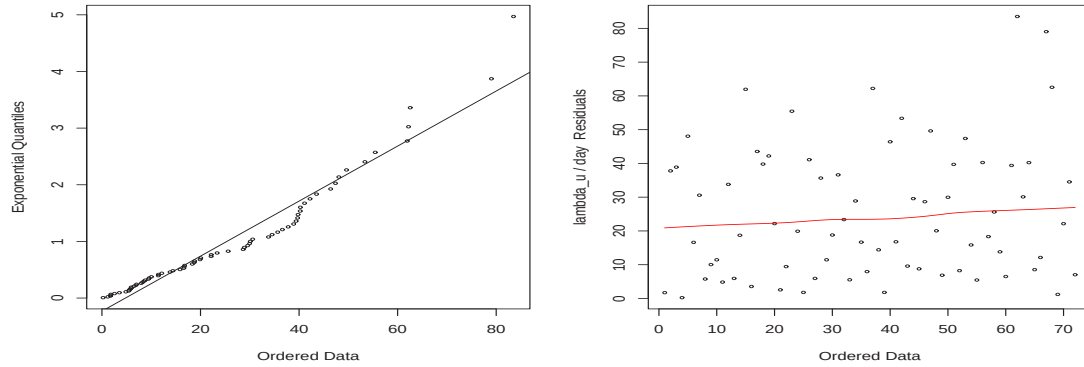


Abbildung 2.9. Kontrolle POT Modell. Schadeneintrittszeiten. Der QQ-Plot zu den Tages-Wartezeiten w_i der Exzedenten (links) spricht nicht gegen die Annahme eines homogenen Poisson-Prozess. Im rechten Plot sind die Tages-Wartezeiten $(i, w_i)_{i=1 \dots 73}$ in der Reihenfolge ihres Eintretens sowie die zugehörige (geglättete) Mittelwertkurve (rot) geplottet. Durch die Mittelwertkurve wird dargestellt, ob sich die Wartezeit zwischen den Exzedenten im Durchschnitt verändert. Da eine konstante Jahresintensität an Exzedenten ($\lambda_u = 14.6$) angenommen wurde, sollte die Mittelwertkurve bei 25 liegen (Mittelwert Tages-Wartezeit der Exzedenten = $25 \Rightarrow \lambda_u^{\text{Jahr}} = 1/25 \cdot 365 = 14.6 \equiv \lambda_u$). Das ist hier auch in etwa erfüllt. Zum Ende der Serie steigt die Mittelwertkurve etwas. Das bedeutet, die Wartezeiten zwischen den Exzedenten werden größer und es treten weniger Exzesse ein. Beide Plots sprechen nicht gegen die Annahme eines homogenen Poisson-Prozess.

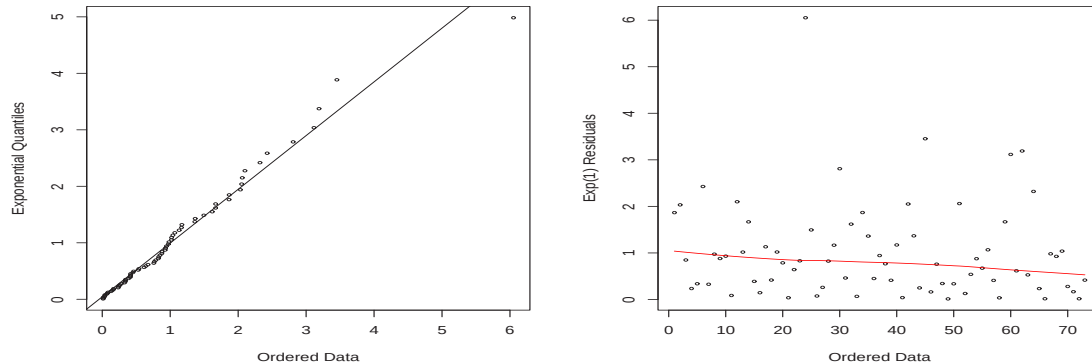


Abbildung 2.10. Kontrolle POT Modell. Schadenhöhenverteilung. Der QQ-Plot zu den Residuen $\tilde{w}_i$ (links) widerspricht nicht der Annahme einer GPD Tailverteilung. Der rechte Plot $(i, w_i)_{i=1 \dots 73}$ testet, ob die Schadenhöhe der 73 Exzedenten in der Reihenfolge ihres Eintretens im Durchschnitt gleichhoch bleibt. Da angenommen wird, daß $\tilde{w}_i$ Realisationen von *iid* standardexponentialverteilten ZV $\tilde{W}_i$ sind, sollte die geglättete Mittelwertkurve (rot) in etwa bei 1 liegen. Gegen Ende der Serie sinkt die Mittelwertkurve etwas unter 1. Das bedeutet, daß auch die mittlere Schadenhöhe der Exzedenten zum Ende kleiner wird. Insgesamt sprechen beide Plots für das GPD Modell.

Das POT Modell wird durch die zugehörigen Plots nicht abgelehnt. In McNeil and Saladin (1998) werden in drei verschiedenen Versuchen zusätzlich Gestaltenparameter, Überschreitungsintensität und Skalenparameter in **Abhängigkeit von der Zeit** betrachtet. Dadurch sollen Trends berücksichtigt werden. Das ist hier weggelassen, da der den Schaden-

banken zugrundeliegenden Erfassungszeitraum laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) wenige Jahre beträgt. Trends werden jedoch erst bei einer wesentlich größeren Datenhistorie sichtbar. Ein weiterer Grund dagegen ist, daß ein multivariates Gesamtbankmodell damit wesentlich komplizierter wird.

Zum Schluß werden die tatsächlichen Parameter und Verteilungen genannt, mit denen der Datensatz erzeugt wurde ('erzeugende Parameter') und mit den geschätzten Parameter des ersten Modells ('geschätzte Parameter') verglichen. Dabei ist zu beachten, daß die Daten mit dem ersten Modell erzeugt wurden und bei der Analyse auch Modell 1 als das tauglichste wieder ausgegeben wurde.

	erzeugende Parameter	geschätzte Parameter
Intensität λ	200	201.5
Tailverteilung	GPD(0.6, 50000, 50000)	GPD(0.61, 73501, 49206)
Quantil (u)	0.9	0.93
Zentrumsverteilung	logNV(8.5, 1.4)	logNV(8.6, 1.5)

Tabelle 2.3. Qualität der Parameterschätzung.

Statistisch gesehen ist die Datenzahl 1008 und die Exzedentenzahl 73 für verlässliche Aussagen ausreichend. Die bedeutsamen Parameter ξ, σ der erzeugten und angepaßten Schadenhöhenverteilung stimmen in etwa überein. Die vorgegebene Schwelle weicht etwas von der geschätzten ab. Die Zentrumsverteilungen stimmen recht genau überein, was bei einer Schadenzahl von 935 im Zentrum verständlich ist.

In Paulsen und Strunk (2005), Sektion 5 ist dazu folgende Faustregel zur benötigten Datenzahl zu erkennen: Wird ein Datensatz operationeller Schäden bez. eines Gestaltenparameters von $\xi = 0.7$ erzeugt, so reichen in etwa 1000 Daten aus, damit ähnliche Parameterwerte (v.a. ξ, u, β) bei der Anpassung wieder ausgegeben werden. Bei einem Gestaltenparameter von $\xi = 0.9$ sind bereits in etwa 10000 Daten notwendig. Ist die Schwelle in beiden Fällen das 0.9 Quantil, so werden im ersten Fall in etwa 100 und im zweiten Fall in etwa 1000 Exzedenten zur Anpassung verwendet.

Fazit Homogene Portfoliosichtweise

Die Bewertungsmethoden operationeller Risiken bei homogener Portfoliosichtweise sind vorgestellt worden. Die Ergebnisse können in einem Fazit zusammengefaßt werden:

- (i) Ein Mischungsansatz zur adäquaten Beschreibung operationeller Risiken ist notwendig.
- (ii) Die Datenanzahl von 1008 ist für verlässliche Aussagen ausreichend.
- (iii) Die AD-Statistik ist i.a. geeignet, um eine Entscheidung zwischen Power-Tail Modell und dem logNV-logNV Modell zu treffen.

Kapitel 3.

Heterogene Portfoliosichtweise. Bivariater Fall

In der heterogenen Sichtweise wird angenommen, daß sich die operationellen Risiken auf mehrere Subportfolios aufteilen lassen. Die zufälligen Einzelverluste der Subportfolios lassen sich ihrerseits wieder durch ein kollektives Modell der Risikothorie beschreiben. Diese sogenannten Randverteilungen können daher mit den Methoden der homogenen Portfoliosichtweise bestimmt werden.

Im Vordergrund steht in der heterogenen Sichtweise die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen den Subportfolios. Dazu muß untersucht werden, welche Abhängigkeitsstrukturen praktikabel sind und wie sich die Subportfolios damit in Beziehung setzen lassen.

Mit Hilfe der Abhängigkeitsstruktur und den Randverteilungen wird die verbundene Verteilung der Einzelverluste fixiert, d.h. die Verteilung von $(L_1, L_2, \dots, L_d)$. Die Kenntnis der verbundenen Verteilung von $(L_1, \dots, L_d)$ ist notwendig zur Bestimmung der Verteilung des zufälligen Gesamtverlustes L mit $L = \sum_{i=1}^d L_i$.

Die vorgeschriebene Sicherheitsunterlegung ist das 0.999 Quantil der Verteilung von L . Die Verteilung von L kann nicht analytisch bestimmt werden, so daß der Value at Risk durch Simulation der Verteilung von L bestimmt wird, d.h. es wird

$$\text{VaR}_{0.999}\left(\sum_{i=1}^d L_i\right)$$

näherungsweise berechnet.

Der einfachste Fall ist dabei der bivariate Fall, in dem die operationellen Risiken auf zwei Subportfolios von Risiken aufgeteilt werden – z.B. auf das Subportfolio menschliche Risiken und das Subportfolio technische Risiken. Zu den menschlichen Risiken gehören u.a. 'unbefugte Handlungen und Betrug' (zugehörig zu den Ereigniskategorien Externer Betrug; Interner Betrug); 'Geschäftspartner' (Abwicklung, Vertrieb und Prozeßmanagement); 'Unzulässige Geschäftspraktiken' (Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten). Als technische Risiken zählen z.B. 'Systeme' (Geschäftsunterbrechungen und Systemausfälle); 'Produktfehler' (Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten); 'System-sicherheit' (Externer Betrug). Es erscheint plausibel, daß eine Abhängigkeit zwischen menschlichen und technischen Risiken und damit zwischen den Schäden besteht. Betrachte dazu folgende Beispiele:

Das in Abschnitt 1 dargestellte Einführungsbeispiel Gebäudebrand wäre ein sogenannter *common underlying effect*, der Schäden in beiden Risikoarten erzeugt. Ein Gebäudebrand würde nicht nur Systemausfälle nach sich ziehen, sondern hätte auch einen enormen

Arbeitsausfall zur Folge. Bestimmte Projekte für Kunden könnten nicht mehr zum vereinbarten Zeitpunkt fertig gestellt werden und würden storniert. Daher sind in beiden Risikoarten Schäden entstanden ausgehend von einem Gebäudebrand aus der Risikoart technisches Risiko. Neben einem solchen Schadenhergang kann auch eine Situation entstehen, in der ein Schaden der einen Risikoart einen weiteren in der anderen Art erzeugt. Ein Beispiel dafür wäre ein unbefugter Datentransfer labiler Daten von einem Terminal zu weiteren Terminals. Das System der einzelnen Terminals komme mit dem Bearbeiten der Daten nicht zurecht und stürze ab. Der Speicher werde gelöscht und damit sei ein bestimmter Teil der geleisteten Tagesarbeit verloren. In diesem Fall erzeugt ein Schaden aus dem Bereich menschliche Risiken einen Schaden aus dem Bereich technische Risiken.

Der Idealzustand einer Bank zur Bewertung operationeller Schäden im bivariaten (bzw. multivariaten) Fall sieht folgendermaßen aus: Durch die Sammlung einer angemessenen Anzahl abhängiger Schäden ist zu erwarten, daß eine vertrauenswürdige Abhängigkeitsstruktur mit statistischen Methoden ermittelbar ist. Nach Rücksprache mit Experten kann die Abhängigkeitsstruktur modifiziert werden und sollte in etwa mit der tatsächlichen Abhängigkeitsstruktur übereinstimmen. Die ermittelte Abhängigkeitsstruktur sieht i.a. von einer Komonität der Risiken ab und sorgt so für einen wesentlich niedrigeren Value at Risk als ohne Kenntnis einer Abhängigkeitsstruktur – in dem Fall müßten gemäß Basel II die Value at Risk der Subportfolios einzeln berechnet und addiert werden.

Der Istzustand der Institute ist jedoch nach BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) der, daß viele Geldinstitute noch keine Vorgehensweisen zur Modellierung von Abhängigkeiten dokumentiert haben. Einige Institute wenden zur Ermittlung eines Gesamtbank VaR entweder Unkorreliertheit oder Komonität zwischen den einzelnen Zellen bzw. Subportfolios an. Andere Institute setzen als Abhängigkeitsstruktur eine Gaußsche Copula zwischen den zufälligen Schadenszahlen ein und nehmen die Schadenhöhen als unabhängig an. Weder in BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) noch in Committee of European Banking Supervisors (2006) oder Crama, Chapelle et al. (2004) werden Angaben dazu gemacht, mit welchen Techniken außer statistischen Verfahren und Expertenwissen Abhängigkeiten zwischen den Schadenszahlen bzw. Schadenhöhen geschätzt werden können. Die Schaden-datenbanken stellen keine Bezüge zu anderen Schäden her. Das und die Tatsache der geringen Datenmenge insgesamt (laut BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) i.a. deutlich weniger als 500 interne Daten) gestalten es schwierig, eine Abhängigkeitsstruktur mit statistischen Methoden an die Daten anzupassen. Die Fixierung einer Abhängigkeitsstruktur ist daher auf die Einschätzung von Experten angewiesen.

In diesem Kapitel sollen wider den momentan Möglichkeiten der Institute statistische Methoden zur Anpassung einer Abhängigkeitsstruktur an empirische Schadenpaare dargestellt werden. Dazu werden verschiedene **Copulas** als Kandidaten für Abhängigkeitsstrukturen ausgewählt (Copulas werden im nächsten Abschnitt ausführlich vorgestellt.). Bivariate goodness of fit Statistiken sollen helfen, die geeignete Copula auszuwählen. Mit Hilfe der Copula und den Randverteilungen kann der insgesamte Portfolioverlust näherungsweise durch Simulationen berechnet werden. Die gesuchte Sicherheitsunterlegung ist das 0.999 Quantil dieser empirischen Verlustverteilung. Ein Algorithmus zur Umsetzung des Zwei-Subportfolio Falls sei bereits an dieser Stelle genannt:

Algorithmus 3.1 (Generelle Umsetzung Zwei-Subportfolio Fall).

- (1) Mit den Methoden aus Kapitel 2 ermittle die Randverteilungen; passe hierbei eine Mischung aus GPD und bedingter logNV an die Daten der beiden Subportfolios an.
- (2) Wähle eine praktikable Copulafamilie als Abhängigkeitsstruktur zwischen den operationellen Schäden.
- (3) Ermittle aus den Schadenpaaren die Parameter der Copula.
- (4) Führe die Schritt Nr. 2 und 3 für verschiedene Copulafamilien durch. Teste, welche Copula die beste Anpassung an die Abhängigkeitsstruktur der Schadenpaare bietet.
- (5) Setze die ermittelte Copula mit den Randverteilungen zusammen und erhalte damit die Verlustverteilung des Zwei-Subportfolio Falls.

3.1. Modellannahmen

Die operationellen Schäden lassen sich auf zwei Subportfolios aufteilen. Der zufällige Gesamtverlust L aus operationellen Schäden ist die Summe der Einzelverluste L_1 und L_2 , die sich jeweils durch ein kollektives Modell der Risikothorie darstellen lassen. Daher kann L erklärt werden als

$$L = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_2} X_i^{(2)}.$$

Annahme 3.2 (Annahmen Zwei-Subportfolio Fall).

- (i) Die zufälligen Subportfolioverluste sind erklärt als $L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^{(1)}$ und L_2 analog.
- (ii) Die zufälligen Schadenzahlen N_1, N_2 sind poissonverteilt mit Intensitäten λ_1, λ_2 .
- (iii) N_1 und $(X_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ sind stochastisch unabhängig. $(X_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ haben eine gemeinsame Schadenhöhenverteilung F_1 . Analog für das zweite Subportfolio mit $(X_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ identisch verteilt nach F_2 .
- (iv) Die Schadenhöhenverteilungen sind Mischungen aus einer logNV für das Zentrum und einer GPD für den Tail.

Bemerkung 3.3. Es können zwischen folgenden Objekten Abhängigkeiten auftreten:

- (a) nur zwischen den Schadenzahlen
- (b) zwischen den Schadenzahlen und den Schadenhöhen
- (c) nur zwischen den Schadenhöhen
- (d) direkt zwischen den Einzelverlusten

Die Simulationsergebnisse in Strunk (2006a), Sektion 4 haben gezeigt, daß bei einer GPD als Tailverteilung die Abhängigkeiten zwischen den Schadenzahlen einen nur geringfügigen Effekt auf den Gesamtverlust haben. Im Falle unabhängiger Schadenhöhen zwischen den Subportfolios wurde auch bei enormer Abhängigkeit zwischen den Schadenzahlen kein

deutlicher Effekt erreicht, d.h. die so berechneten Value at Risk lagen nah an dem Value at Risk bez. unabhängiger Schadenzen. Daher wird (a) hier nicht durchgeführt.

Im Falle abhängiger Schadenhöhen und abhängiger Schadenzen war dagegen durch Variieren der Parameter der Abhängigkeitsstruktur eine Bandbreite an Value at Risk möglich, die den komonotonen und unabhängigen Verlustfall nahezu abdeckte. Werden Abhängigkeiten nur zwischen den Schadenhöhen modelliert, so ist durch Variieren der Parameter auch eine Bandbreite an Value at Risk wie bei (b) möglich. Zusätzlich ist die Umsetzung des Algorithmus zu (c) wesentlich effizienter, so daß die Möglichkeit (c) der Möglichkeit (b) vorzuziehen ist. Ein weiterer Grund gegen Möglichkeit (b) ist das Problem, Abhängigkeiten zwischen den Schadenzen zu erfassen. Bisher ist in der Literatur nichts darüber zu finden, wie das geschehen kann. Daher wird Möglichkeit (c) in diesem Kapitel verwendet. Bei dieser Methode wird für die Schätzung vorausgesetzt, daß die abhängigen Schadenpaare in der Form

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

gegeben sind. Die zufälligen Schadenzen N_1, N_2 werden als unabhängig angenommen. In Abschnitt 3.8 ist ein Algorithmus zu finden, wie der Value at Risk bei abhängigen Schadenhöhen näherungsweise berechnet wird.

Bei Möglichkeit (d) wird durch Variieren der Parameter der Abhängigkeitsstruktur eine etwas größere Bandbreite an Value at Risk als bei (b) und (c) möglich, so daß die Grenzfälle komonotone und unabhängige Verluste erreicht werden. Bei der Entwicklung des heterogenen Gesamtbankmodells in Kapitel 6 wird diese Möglichkeit angewendet, da mit dieser Methode im Gegensatz zu (a), (b), (c) ein praktikables Gesamtbankmodell erstellt werden kann. In Abschnitt 6.2 ist ein Algorithmus zu finden, wie der Value at Risk bei abhängigen Einzelverlusten näherungsweise berechnet wird.

3.2. Copulas

In dieser Arbeit werden als Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Subportfolios die Copulas verwendet. Die Bemerkung 3.3 legt für dieses Kapitel eine Copula zwischen den Schadenhöhen fest.

Das Ziel dieses Kapitels ist daher die Schätzung einer Copula C , so daß die zugrundeliegende Abhängigkeitsstruktur der Schadenpaare $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ angemessen modelliert wird. Mit Hilfe der angepaßten Copula C und den Schadenhöhenverteilungen der beiden Subportfolios – F_1 und F_2 – wird die verbundene Schadenhöhenverteilung F über das Sklars Theorem festgelegt. Mit der Kenntnis der verbundenen Schadenhöhenverteilung F läßt sich der zufällige Gesamtverlust L simulieren und die Sicherheitsunterlegung näherungsweise berechnen.

Die folgenden Aussagen stammen aus McNeil et al. (2005) sowie Embrechts et al. (1999) und bieten neben Nelsen (1999) einen guten Einstieg zum Thema Copulas.

Definition (Copula). Eine d -dimensionale Copula C ist eine Verteilungsfunktion auf dem d -dimensionalen Einheitswürfel mit gleichverteilten Randverteilungen.

Bemerkung 3.4. Eine Funktion $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ ist eine Copula, falls gilt

- (1) $C(\mathbf{u}) = 0$, falls eine Komponente von $\mathbf{u}$ identisch 0 ist.
- (2) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, $u_i \in [0, 1]$.
- (3) Für alle $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_i \leq b_i$ gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0, \quad (3.1)$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, d\}$.

Die Eigenschaften (1), (2) sind offensichtliche Eigenschaften multivariater Verteilungsfunktionen mit gleichverteilten Randverteilungen. Eigenschaft (3) stellt die Δ -Monotonie von C sicher, d.h. das Volumen des Quaders $Q =]a_1, b_1] \times \dots \times]a_d, b_d]$ unter dem W-Maß C ist nichtnegativ. Es ist nachzurechnen, daß (3.1) gerade das C -Volumen des d -dimensionalen Quaders ist. Im bivariaten Fall gilt beispielsweise $V_C(Q) = C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2)$.

Das folgende Theorem von Sklar stellt (für $d = 2$) dar, wie aus der Copula und den Schadenhöhenverteilungen F_1 und F_2 der Subportfolios die bivariate Schadenhöhenverteilung F gewonnen wird. Es läßt sich hier auf stetige Randverteilungen beschränken, denn die Schadenhöhenverteilungen F_i sind Mischungen aus logNV und GPD und damit stetige Verteilungsfunktionen. Der Beweis des Sklars Theorem ist in Nelsen (1999) zu finden.

Satz (Sklar 1959). *Sei F eine multivariate Verteilungsfunktion mit (stetigen) Randverteilungen $F_1, \dots, F_d$. Dann existiert genau eine Copula $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, so daß für alle $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (3.2)$$

und C ist eindeutig bestimmt. Andererseits wird durch die Gleichung eine multivariate Verteilungsfunktion F mit Randverteilungen $F_1, \dots, F_d$ definiert, falls C eine Copula und $F_1, \dots, F_d$ univariate Verteilungsfunktionen sind.

Korollar 3.5 (Darstellung multivariater Dichten mittels Copuladichte und Randdichten). Die Lebesgue Dichte f einer multivariaten absolut stetigen Verteilungsfunktion läßt sich über die Lebesgue Dichte c der zugehörigen Copula C und den Dichten $f_1, \dots, f_d$ der Randverteilungen darstellen.

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \quad (3.3)$$

wobei die Dichte c definiert ist als

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}. \quad (3.4)$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist c die λ^d -Dichte von C . Definiere die Funktion g mit $g(x_1, \dots, x_d) := (F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$. Diese Funktion ist bijektiv und stetig differenzierbar. Der Transformationssatz für Lebesgue-Dichten kann auf $C \circ g$ angewendet werden. Die λ^d -Dichte von $C \circ g$ und damit von F lautet daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda(x)^d} F(x) &= (c \circ g)(x_1, \dots, x_d) \cdot |\det Dg(x_1, \dots, x_d)| \\ &= c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \cdot f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_d(x_d). \end{aligned} \quad \square$$

Der nächste Satz stellt dar, wie aus den Randverteilungen und der verbundenen Verteilung die zugehörige Copula bestimmt werden kann.

Satz 3.6. *Falls der Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ eine verbundene Verteilungsfunktion F und Randverteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_d$ hat, dann ist die zugehörige Copula von F (bzw. X) die Verteilung von $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$, d.h.*

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)).$$

Der folgende Satz erklärt ein Invarianzprinzip für Copulas unter streng monoton steigenden Funktion. Das ist z.B. für das Abhängigkeitsmaß Kendalls tau von Bedeutung.

Satz 3.7. *Sei $(X_1, \dots, X_d)$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Copula C . Es seien $T_1, \dots, T_d$ streng monoton steigende Funktionen. Dann ist die zu $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ zugehörige Copula ebenfalls die Copula C .*

Im Verlauf des Kapitels wird die Theorie der Survival-Copulas benötigt. Daher sollen hier kurz die Definition und einige Eigenschaften genannt werden.

Definition 3.8 (Survival und Joint Survival Copula). Sei $U = (U_1, \dots, U_d)$ ein Zufallsvektor mit Copula C .

- (i) Die Copula $\hat{C}$ des Zufallsvektors $(1 - U_1, \dots, 1 - U_d)$ heißt *Survival Copula*.
- (ii) Die Funktion $\bar{C}$ mit $\bar{C}(u_1, \dots, u_d) = \hat{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_d)$ heißt *Joint Survival Copula*.

Bemerkung 3.9. Es ist $\hat{C}$ tatsächlich eine Copula und $\bar{C}$ nicht (McNeil et al., 2005). Für Anwendungen ist es wichtig, daß statistische Verfahren für eine Copula C sich direkt auf die zugehörige Survival Copula $\hat{C}$ übertragen lassen. Durch die offensichtliche Beziehung

$$(U_1, \dots, U_d) \sim C \iff (1 - U_1, \dots, 1 - U_d) \sim \hat{C}$$

ist das möglich. Eine Anwendung der Kettenregel liefert daraus eine Beziehung der entsprechenden Copula-Dichten (c) zu ihren Survival Copula Dichten ($\hat{c}$),

$$\hat{c}(u_1, \dots, u_d) = c(1 - u_1, \dots, 1 - u_d).$$

Als Copula der Schadenhöhenverteilung verwende die drei Copulas **Gauß**, **Gumbel** und **HeavyRightTail**. Die Clayton-Copula ist die Survival Copula der HRT-Copula und muß auch in die Entwicklung statistischer Methoden einbezogen werden. Die folgende Darstellung dieser Copulas stammt aus Embrechts et al. (2001) und McNeil et al. (2005).

3.3. Beispielcopulas zur Modellierung von Abhängigkeiten

Gauß-Copula Sei X die d -dimensionale Normalverteilung mit Mittelwertsvektor $\mathbf{0}$ und Korrelationsmatrix Σ (d.h. Σ symmetrisch und positiv definit). Die zugehörige Copula ist die Gauß-Copula,

$$C_{\Sigma}^{\text{Ga}}(u_1, \dots, u_d) = N_{(0, \Sigma)}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)).$$

Gumbel-Copula Die multivariate Gumbelvert., eine Extremwertverteilung Typ B, besitzt als zugehörige Copula die Gumbel-Copula zum Parameter ϑ ,

$$C_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u_1, \dots, u_d) = \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^{\vartheta} \right)^{1/\vartheta} \right), \quad \vartheta \geq 1.$$

Clayton-Copula Die Clayton-Copula ist die Survival-Copula der multivariaten Paretoverteilung zum Parameter ϑ ,

$$C_{\vartheta}^{\text{Cl}}(u_1, \dots, u_d) = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\vartheta} - d + 1 \right)^{-1/\vartheta}, \quad \vartheta > 0.$$

HRT-Copula Die multivariate Paretoverteilung, eine Extremwertverteilung Typ A, besitzt als zugehörige Copula die HRT-Copula zum Parameter ϑ ,

$$C_{\vartheta}^{\text{HRT}}(u_1, \dots, u_d) = \hat{C}_{\vartheta}^{\text{Cl}}(u_1, \dots, u_d), \quad \vartheta > 0.$$

Bemerkung (Parameter). Die Copulaparameter geben die Abhängigkeitsintensität zwischen den Subportfolios an. Ein hoher Wert bedeutet auch eine hohe Abhängigkeit.

Bei der Gauß-Copula bestimmen die Einträge Σ_{ij} der Korrelationsmatrix Σ , wie stark die zufälligen Schadenhöhen des i ten und j ten Subportfolios korreliert sind. Σ wird im bivariaten Fall durch einen Parameter $\rho \in (-1, 1)$ bestimmt, der die Korrelation zwischen beiden Subportfolios festlegt. Bei $\rho = 0$ nimmt man Unabhängigkeit der den Subportfolios zugrundeliegenden Risiken an, für $\rho \rightarrow 1$, daß sie gleichzeitig eintreten und für $\rho \rightarrow -1$, daß sie sich gegenseitig ausschließen. Im trivariaten Fall sind drei Parameter ρ_1, ρ_2, ρ_3 zur Fixierung von Σ zu bestimmen (Es sind drei verschiedene Paare von Subportfolios zu bilden.). Hier muß bei einer Vorgabe der Parameter darauf geachtet werden, daß die daraus resultierende Matrix positiv definit ist. Unter diesen Voraussetzungen erlaubt die Gauß-Copula auch bei einer großen Anzahl Subportfolios (z.B. 56 gemäß Basel II) den Einsatz einer praktikablen Abhängigkeitsstruktur.

Die drei anderen Copulas hängen dagegen nur von einem Parameter ab, der für die Abhängigkeit zwischen allen d Subportfolios steht, d.h. das ist die Situation eines *common underlying effect*. Im Falle der Gumbel-Copula wird für $\vartheta = 1$ die Unabhängigkeit der d Subportfolios unterstellt. Die Unabhängigkeit wird im Falle der HRT- und Clayton für einen Grenzwertübergang $\vartheta \rightarrow 0$ erreicht (Der Wert 0 liegt hier nicht in der Definitionsmenge von ϑ). Der komonotone Fall wird bei den drei Copulas für $\vartheta \rightarrow \infty$ angenommen.

Einparametrische Copulas werden in der Praxis laut McNeil et al. (2005) zur Darstellung bi- und trivariater Probleme eingesetzt aber i.a. nicht für hochdimensionale. Die Modellierung von Abhängigkeiten (gemäß Basel II) sollte daher z.B. mittels Gauß-Copula stattfinden.

Beispiel 3.10 (Bivariate Copulas und zugehörige Copuladichten).

Gauß-Copula Die Integral-Darstellung der Gauß-Copula kann anhand der Integral-Darstellung der bivariaten Normalverteilung mit Korrelationsmatrix $\Sigma = ((1, \rho)^t, (\rho, 1)^t)$ gezeigt werden. (Σ ist für $|\rho| < 1$ pos. def.). Es gilt

$$C_{\rho}^{\text{Ga}}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} e^{\left(\frac{-(s^2-2\rho st+t^2)}{2(1-\rho^2)}\right)} ds dt,$$

wobei $\rho \in (-1, 1)$. Die Dichte der Copula berechnet sich über (3.3) als

$$c_{\rho}^{\text{Ga}}(u, v) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} e^{\left(\frac{\rho}{1-\rho^2}\Phi^{-1}(u)\Phi^{-1}(v) - \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}(\Phi^{-1}(u)^2 + \Phi^{-1}(v)^2)\right)}.$$

Gumbel-Copula

$$C_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u, v) = \exp\left(-[(-\log u)^{\vartheta} + (-\log v)^{\vartheta}]^{1/\vartheta}\right), \quad \vartheta \geq 1.$$

Die Dichte berechnet sich wie die der Clayton- und HRT-Copula über partielles Ableiten (3.4) und lautet

$$c_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u, v) = C_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u, v) u^{-1} v^{-1} [(-\ln u)^{\vartheta} + (-\ln v)^{\vartheta}]^{-2+2/\vartheta} [\ln u \ln v]^{\vartheta-1} \times \{1 + (\vartheta - 1)[(-\ln u)^{\vartheta} + (-\ln v)^{\vartheta}]^{-1/\vartheta}\}.$$

Clayton-Copula

$$C_{\vartheta}^{\text{Cl}}(u, v) = \left(u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1\right)^{-1/\vartheta}, \quad \vartheta > 0$$

mit Dichte

$$c_{\vartheta}^{\text{Cl}}(u, v) = (1 + \vartheta)(u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta+2} (uv)^{-\vartheta-1}.$$

HRT-Copula Mit der Beziehung in Bemerkung 3.9 gilt

$$C_{\vartheta}^{\text{HRT}}(u, v) = u + v - 1 + \left((1-u)^{-\vartheta} + (1-v)^{-\vartheta} - 1\right)^{-1/\vartheta}, \quad \vartheta > 0$$

mit Dichte

$$c_{\vartheta}^{\text{HRT}}(u, v) = (1 + \vartheta) [(1-u)^{-\vartheta} + (1-v)^{-\vartheta} - 1]^{-1/\vartheta-2} [(1-u)(1-v)]^{-1-\vartheta}.$$

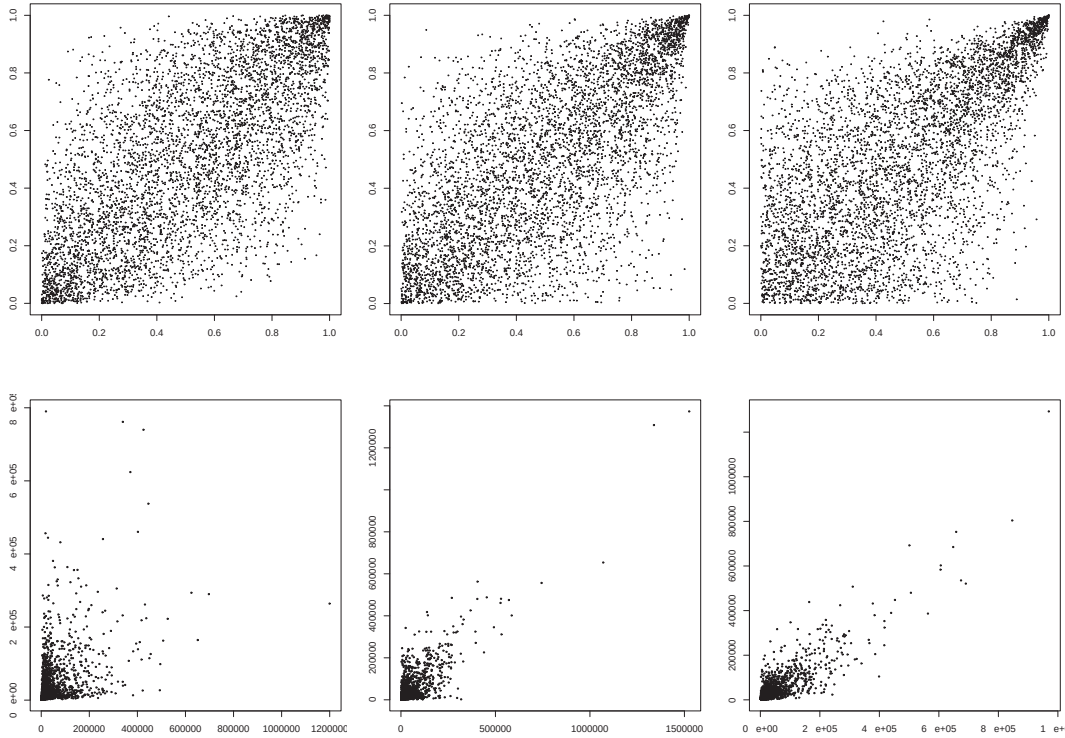


Abbildung 3.1. 5000 simulierte Daten bivariater Copulas bzw. Verteilungsfunktionen. Obere Reihe. Gauß (links) mit Korrelation $\rho = 0.7$; Gumbel (Mitte) mit Parameter $\vartheta = 1.97$ und HRT (rechts) mit $\vartheta = 1.94$. Untere Reihe. Bivariate Verteilungen mit den Randverteilungen $F_1 = F_2$ und den darüberstehenden Copulas. Dabei ist F_i eine Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(\mu = 8.5, \sigma = 1.5)$ und $\text{GPD}(\xi = 0.2, u = 5 \cdot 10^4, \beta = 7 \cdot 10^4)$ mit $F(u_i) = 0.9$.

Bemerkung 3.11. Die drei oberen Plots in Abbildung 3.1 stellen die Realisationen möglicher Abhängigkeitsstrukturen der Schadenhöhen im Zwei-Subportfolio Fall dar. In allen drei Fällen verfügen die Daten in etwa über die empirische Korrelation 0.7. Die drei unteren Plots sind Realisationen bivariater Verteilungsfunktionen aus den darüberstehenden Copulas und den Randverteilungen F_1, F_2 . Die Randverteilungen sind gemäß der Modellannahme Mischungen aus $\log\text{NV}$ und GPD .

Das linke Bild zeigt Realisationen der Schadenhöhenverteilung F mit der Gauß-Copula. Es ist zu erkennen, daß die Schäden im extremen Schadenbereich scheinbar unkorreliert sind. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, daß im ersten und zweiten Subportfolio zur selben Zeit extreme Schäden eintreten, ist verschwindend gering. Wird nur weit genug in den extremen Schadenbereich beider Subportfolios gegangen, so treten die Schäden unabhängig voneinander ein. Das mittlere und rechte Bild mit der Gumbel- bzw. der HRT-Copula zeigt dagegen eine gewisse Tendenz, daß die extremen Schäden nicht unabhängig voneinander eintreten (Als Beispiel könnte der Gebäudebrand aus Kapitel 3, Anfang genannt werden.). Eine solche Eigenschaft heißt *upper tail dependent*. Die Gauß-Copula besitzt daher eine *upper tail independence*.

In der HSH wird angenommen, daß die extremen Schäden unabhängig voneinander eintreten. Es soll jedoch auch die Reaktion einer Abhängigkeitsstruktur mit Abhängigkeit in den Schadenhöhen-Tails auf den zusammengesetzten Verlust beobachtet werden. Daher wird neben der Gauß-Copula auch die HRT- und die Gumbel-Copula für den bi- und trivariaten Fall eingesetzt. Da die beiden Copulas zusätzlich verschiedenen Klassen bez. der zugrundeliegenden Extremwertverteilung angehören (Gumbel: Typ B; HRT: Typ A), könnte auch ein signifikanter Unterschied in ihrer beiden Wirkung vorliegen.

3.4. Abhängigkeitsmaße

Die angesprochenen Abhängigkeitsmaße *upper tail dependence* und *Kendalls tau* werden in diesem Abschnitt behandelt. Die Details sind in Kruskal (1958) und Nelsen (1999) zu finden. Die Aussagen dieses Abschnitts beziehen sich i.a. auf die Abhängigkeit zwischen *nur zwei* Zufallsvariablen X, Y mit stetigen Verteilungsfunktionen F_1, F_2 . Bei Abhängigkeiten zwischen mehr als zwei Zufallsvariablen werden die Aussagen entsprechend modifiziert.

3.4.1. Nachteile des linearen Korrelationskoeffizienten

Definition (Linearer Korrelationskoeffizient). Es seien X, Y ZV mit endlichen ersten und zweiten Momenten und $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$. Dann ist der lineare Korrelationskoeffizient bez. X, Y erklärt als

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{(\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y))^{1/2}}.$$

Der lineare Korrelationskoeffizient ist ein Abhängigkeitsmaß, das den linearen Zusammenhang der ZV X, Y widerspiegelt. Es ist ein normiertes Maß, d.h. $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$. Es ist invariant unter streng monotonen linearen Transformationen. Die Nachteile sind:

- (1) Der lineare Korrelationskoeffizient ist nur berechenbar, falls die ersten beiden Momente von X, Y erklärt und endlich sind.

Gerade in dem Fall GPD verteilter Tailverteilungen sind die ersten zwei Momente häufig nicht endlich.

- (2) Der lineare Korrelationskoeffizient ist invariant nur unter linearen Transformationen. Die lineare Korrelation von (X, Y) ist daher i.a. ungleich zu der linearen Korrelation von $(F_1(X), F_2(Y))$.

- (3) Die Randverteilungen F_1, F_2 und die lineare Korrelation zwischen X, Y bestimmen i.a. nicht die bivariate Verteilung von (X, Y) .

Wähle z.B. G als Verteilungsfunktion der Gammaverteilung $\text{Gamma}(3, 1)$. Dann besitzt (X, Y) zu gleichen Randverteilungen und Korrelation $\rho = 0.7$ zumindest zwei verschiedene mögliche Verteilungsfunktionen $F_{\text{Ga}}, F_{\text{Gu}}$:

$$F_{\text{Ga}}(x, y) = C_{\alpha}^{\text{Ga}}(G(x), G(y)), \quad \alpha = 0.71.$$

$$F_{\text{Gu}}(x, y) = C_{\beta}^{\text{Gu}}(G(x), G(y)), \quad \beta = 0.54.$$

3.4.2. Kendalls tau

Das Abhängigkeitsmaß Kendalls tau (ρ_τ) gehört zu den sogenannten *Rangkorrelationen*. Rangkorrelationen hängen nur von der **Rangfolge** der hypothetischen Beobachtungen ab, nicht aber von der Größe. Um das Maß Kendalls tau zu verstehen, wird der Begriff der *Konkordanz* benötigt.

Definition. Das Datenpaar $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ heißt *konkordant*, falls $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) > 0$. Andernfalls wird es als *diskordant* bezeichnet.

Betrachte im folgenden einen Zufallsvektor (X_1, Y_1) und einen davon unabhängigen Vektor (X_2, Y_2) mit der gleichen bivariaten Verteilung. Konkordanz der beiden Vektoren ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz der Komponenten der zwei hypothetischen bivariaten Beobachtungen *dasselbe* Vorzeichen aufweisen. Diskordanz ist analog zu erklären. Das Abhängigkeitsmaß Kendalls tau bez. X_1, Y_1 ist gerade die Differenz aus der Wahrscheinlichkeit der Konkordanz und Diskordanz.

Definition 3.12 (Kendalls tau). Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$\rho_\tau(X_1, Y_1) = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}.$$

Für Dimensionen $n \geq 3$ ist Kendalls tau als symmetrische, positiv definite $n \times n$ Matrix mit den entsprechenden Kendalls tau Werten zwischen den möglichen Paaren von ZV erklärt.

Beispiel. Für die ZV X_1, Y_1, Z_1 ist Kendalls tau erklärt als $\rho_\tau(X_1, Y_1, Z_1) = ((1, \rho_\tau(X_1, Y_1), \rho_\tau(X_1, Z_1))^t, (\rho_\tau(X_1, Y_1), 1, \rho_\tau(Y_1, Z_1))^t, (\rho_\tau(X_1, Z_1), \rho_\tau(Y_1, Z_1), 1)^t)$.

Bemerkung. Kendalls tau ist ein symmetrisches, normiertes Abhängigkeitsmaß. Das bedeutet insbesondere, daß es nur Werte zwischen $[-1, 1]$ annimmt. $\rho_\tau = 1$ bedeutet die Komonität und $\rho_\tau = -1$ den gegenseitigen Ausschluß der Risiken X_1, Y_1 . Für unabhängige ZV folgt $\rho_\tau = 0$. Darüber hinaus ist ρ_τ invariant unter streng monoton steigenden Transformationen und existiert auch für nicht endliche Momente der ZV. Damit treten die angesprochenen Nachteile des linearen Korrelationskoeffizienten bei Kendalls tau nicht auf und es kann als *robustes Abhängigkeitsmaß* bezeichnet werden.

Satz 3.13 (Schätzer für Kendalls tau). Es seien n unabhängige, zufällige Stichproben $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ des Zufallsvektors (X, Y) gegeben. Definiere

$$t := t((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \text{sign}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j). \quad (3.5)$$

Dann ist t als Differenz aus relativer Häufigkeit der konkordanten und diskordanten Paare ein natürlicher Schätzer für $\rho_\tau(X, Y)$.

Bemerkung 3.14. In der Literatur wird stets dieser Schätzer für Kendalls tau angegeben. Es steht jedoch weder in Kruskal (1958) oder McNeil et al. (2005) etwas dazu, ob dieser Schätzer P-f.s., in W. oder in anderer Form gegen $\rho_\tau(X, Y)$ konvergiert.

Beweis. Es soll nachgerechnet werden, daß t die Differenz aus relativer Häufigkeit der konkordanten und diskordanten Paare ist. Bezeichne die relative Häufigkeit konkordanter Paare in der Stichprobe $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ mit P_c und die der diskordanten mit P_d .

Die maximale Anzahl konkordanter Paare in der Stichprobe ist $n(n-1)$. Daher lautet die relative Häufigkeit gerade

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{\text{Anzahl konkordanter Paare } (X_i, Y_i), (X_j, Y_j), \quad i \neq j}{n(n-1)} \\ &= 2 \cdot \frac{\text{Anzahl konkordanter Paare } (X_i, Y_i), (X_j, Y_j), \quad i < j}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} 1_{\{\text{sign}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0\}}. \end{aligned}$$

Analog bestimme den Schätzer P_d . Unter Beachtung von

$$1_{\{\text{sign}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0\}} - 1_{\{\text{sign}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0\}} = \text{sign}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)$$

berechnet sich die Differenz $P_c - P_d$ weiter zum Schätzer t . □

Um an einen bivariaten Datensatz eine geeignete Copula anzupassen, wird eine Darstellung benötigt, die Kendalls tau zwischen X_1, Y_1 nur anhand ihrer Copula C erklärt.

Satz 3.15. *Es seien X_1, Y_1 stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Dann gilt*

$$\rho_\tau(X_1, Y_1) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1. \quad (3.6)$$

Beweis. Für stetige ZV X_1, Y_1 läßt sich die Definition von Kendalls tau stets schreiben als

$$\rho_\tau(X_1, Y_1) = 2 P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1.$$

Aus der Äquivalenz

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \iff x_1 > x_2 \text{ und } y_1 > y_2 \text{ oder } x_1 < x_2 \text{ und } y_1 < y_2.$$

vereinfacht sich die Definition zu

$$\rho_\tau(X_1, Y_1) = 4 P\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} - 1.$$

Es folgt weiter mit ' $E(Z) = E(E(Z|X))$ '

$$\begin{aligned} P\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= E(P\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2 \mid X_2, Y_2\}) \\ &= \int \int P\{X_1 < x_1, Y_1 < y_1\} d\mathcal{L}(X_2, Y_2)(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Unter Anwendung des Substitutionssatzes auf $u_1 = F_1(x_1), u_2 = F_2(y_1)$ und Beachtung von $C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = P\{X_1 < x_1, Y_1 < y_1\}$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.16 (Kendalls tau). Es seien X_1, Y_1 stetige ZV mit Copula C . Dann berechnet sich Kendalls tau im Falle der folgenden Copulas zu (Embrechts et al., 2001):

- (i) $C_\rho^{\text{Ga}} : \rho_\tau(X_1, Y_1) = 2/\pi \arcsin \rho$
- (ii) $C_\vartheta^{\text{Gu}} : \rho_\tau(X_1, Y_1) = 1 - 1/\vartheta$
- (iii) $C_\vartheta^{\text{HRT}} : \rho_\tau(X_1, Y_1) = \vartheta/(2 + \vartheta)$

Diese Werte können z.B. mit (3.6) berechnet werden.

Kalibrierung. Es wird anhand bivariater Daten

$$(x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n) \text{ mit } (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$$

eine Copula C_ϑ aus der Familie $\{C_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ ausgewählt.

Algorithmus 3.17 (Kalibrierung einer Copula an den Schadendatensatz [Kendall]).

- (1) Berechne den empirischen Schätzer für Kendalls tau nach Satz (3.5). Bezeichne diesen mit t .
- (2) Berechne zu jedem Parameter ϑ das Kendalls tau von C_ϑ . Bezeichne dieses mit $\rho_\tau(\vartheta)$.
- (3) Bestimme das ϑ , so daß die Ergebnisse in (1) und (2) übereinstimmen. In diesem Fall gilt $t = \rho_\tau(\vartheta)$.

3.4.3. upper tail dependence

Die upper tail dependence (λ_U) ist ein Abhängigkeitsmaß zwischen zwei ZV X, Y , das die Stärke der Abhängigkeit im Tail der Verteilung von (X, Y) angibt. Wie Kendalls tau läßt sich die upper tail dependence allein über die (X, Y) zugrundeliegende Copula C beschreiben. Die upper tail dependence ist ein Wert zwischen $[0, 1]$. Ist $\lambda_U = 0$, so werden X, Y als *upper tail independence* bezeichnet. Es bedeutet, daß die hypothetischen Beobachtungen im oberen Quadranten unabhängig voneinander eintreten.

Definition 3.18. Seien X, Y ZV mit Verteilungsfunktionen F_1, F_2 . Der upper tail dependence Koeffizient (λ_U) ist erklärt als

$$\lambda_U := \lambda_U(X, Y) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(Y > F_2^{-1}(q) \mid X > F_1^{-1}(q)).$$

Bemerkung 3.19. Falls F_1, F_2 stetig sind mit Copula C , dann vereinfacht sich die Definition von λ_U zu

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q}.$$

Wird die Regel von L'Hospital angewendet, so läßt sich der Ausdruck reduzieren zu

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} 2 - C_1(q, q) - C_2(q, q), \quad (3.7)$$

wobei C_1 die partielle Ableitung von C nach u und C_2 die partielle Ableitung von C nach v gemäß Beispiel 3.10 bezeichnet.

Satz 3.20. Der upper tail dependence Koeffizient berechnet sich für die folgenden Copulas zu (Embrechts et al., 2001):

- (i) $C_\rho^{\text{Ga}} : \lambda_U = 0$
- (ii) $C_\vartheta^{\text{Gu}} : \lambda_U = 2 - 2^{1/\vartheta}$
- (iii) $C_\vartheta^{\text{HRT}} : \lambda_U = 2^{-1/\vartheta}$

Beweis. Die Berechnungen für die Gumbel- und HRT-Copula folgen leicht über die Berechnung der partiellen Ableitungen und (3.7). Die Kalkulation für die Gauß-Copula ist etwas aufwendiger. Es soll die Gleichung (3.7) angewendet werden. Dabei seien U_1, U_2 gleichverteilte ZV mit gemeinsamer Gauß-Copula C .

Beachte, daß eine Copula C stetig und monoton steigend in jedem Argument ist. Daher kann nach McNeil et al. (2005) der Ausdruck $P(U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1)$ weiterberechnet werden zu

$$P(U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + h, u_2) - C(u_1, u_2)}{h} = \frac{\partial C}{\partial u}(u_1, u_2),$$

was nach der Notation mit $C_1(u_1, u_2)$ übereinstimmt.

Die Gauß-Copula ist symmetrisch (d.h. $C(u, v) = C(v, u)$). Damit folgt bei erneuter Betrachtung der obigen Schritte $C_1(u, u) = C_2(u, u)$. Die Gleichung (3.7) reduziert sich daher zu $\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} 2(1 - C_1(q, q))$.

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist für $(X, Y) \sim N_{(\mathbf{0}, \Sigma)}$ mit Korrelationsmatrix $\Sigma = ((1, \rho)^t, (\rho, 1)^t)$ die Beziehung

$$(Y \mid X = x) \sim N_{(\rho x, 1 - \rho^2)}$$

bekannt. Das läßt sich hier anwenden, da $(\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2)) \sim N_{(\mathbf{0}, \Sigma)}$ und Φ bijektiv ist,

$$\begin{aligned} C_1(u, u) &= P(U_2 \leq u \mid U_1 = u) \\ &= P(\Phi^{-1}(U_2) \leq \Phi^{-1}(u) \mid \Phi^{-1}(U_1) = \Phi^{-1}(u)) \\ &= \Phi_{(\rho x, \sqrt{1 - \rho^2})}(x), \quad \text{mit } x := \Phi^{-1}(u). \end{aligned}$$

Wegen $u \rightarrow 1^- \Leftrightarrow x \rightarrow \infty$ folgt

$$\lambda_U = 2 \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{(\rho x, \sqrt{1 - \rho^2})}(x) \right) = 2 \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x \cdot (1 - \rho) / \sqrt{1 - \rho^2}) \right) = 0. \quad \square$$

Bemerkung. Bisher ist kein Schätzer für λ_U gefunden, der für einen kleinen Stichprobenumfang (< 1000) bereits nahe an dem wahren Wert λ_U liegt. Der Schätzer für λ_U , der sich über den empirischen Schätzer elementarer bedingter Wahrscheinlichkeit berechnet, benötigt z.B. einen immens hohen Stichprobenumfang. Die generelle Entscheidung bez. $\lambda_U = 0$ oder $\lambda_U > 0$ muß daher mittels Scatterplot des bivariaten Schadendatensatz bzw. der Experteneinschätzung getroffen werden.

3.5. Maximum Likelihood Schätzer

Die ML-Schätzung eines Copulaparameters ϑ bez. der Copulafamilie $\{C_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ benötigt eine Dichte von C_ϑ sowie einen Datensatz mit Realisationen von unabhängig, zweidimensional gleichverteilter Zufallsvariable. Die Copula-Dichten stehen bereits in Beispiel 3.10.

Transformation. Die Schadendaten $(x_i, y_i)_{i=1 \dots n}$ sind keine Realisationen (zweidimensional) gleichverteilter Zufallsvariable. Um das zu erreichen, können die zwei Komponenten des Datensatzes (einzeln) transformiert werden.

Überlegung 3.21 (Transformation bivariater Schadendaten).

- (1) Eine erste Methode sieht die Transformation durch die empirische Verteilungsfunktion vor, welche mit $F_{1,n}$ zum Datensatz $(x_i)_{i=1 \dots n}$ bzw. $F_{2,n}$ zum Datensatz $(y_i)_{i=1 \dots n}$ bezeichnet werden. Verahre wie folgt:

$$\text{Subportfolio 1} \quad w_{i,1} := \frac{n}{n+1} \cdot F_{1,n}(x_i)$$

$$\text{Subportfolio 2} \quad w_{i,2} := \frac{n}{n+1} \cdot F_{2,n}(y_i)$$

Dadurch liegen die Realisationen $(w_{i,1}, w_{i,2})$ echt im Einheitsquadrat, was für den AD-Test (3.7) bzw. das Maximum-Likelihood-Schätzverfahren (3.5) wichtig ist.

- (2) Die Transformation im Tail ist nach McNeil et al. (2005) mittels empirischer Verteilungsfunktionen weniger geeignet. Eine Verbesserung geschieht z.B. mit der (angepaßten) Schadenhöhenverteilung, welche mit F_1 bzw. F_2 bezeichnet werden.

$$\text{Subportfolio 1} \quad w_{i,1} := F_1(x_i)$$

$$\text{Subportfolio 2} \quad w_{i,2} := F_2(y_i)$$

Mit beiden Vorgehensweisen sind $(w_{1,1}, w_{1,2}), \dots, (w_{n,1}, w_{n,2})$ Realisationen von (in etwa) zweidimensional gleichverteilter unabhängiger ZV.

Bezeichne c_ϑ die Dichte der Copula und die transformierten Daten mit $w_i := (u_{i,1}, u_{i,2}) \in (0,1)^2, i = 1 \dots n$. Dann ist der Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$ das Maximum der folgenden log-Likelihood Gleichung

$$\ln L(\vartheta; w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n \ln c_\vartheta(w_i). \quad (3.8)$$

Das Maximum kann durch Diskretisieren des Parameterraums Θ numerisch bestimmt werden, da eine exakte analytische Lösung aufwendig zu berechnen ist.

Kalibrierung. Ein zweiter Ansatz zur Kalibrierung einer Copula anhand des bivariaten Schadendatensatzes

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \text{ mit } (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$$

wird mittels Maximum Likelihood Schätzer durchgeführt. Als Abhängigkeitsstruktur des Schadenhöhenvektors $(X_i^{(1)}, X_j^{(2)})$ wird die Familie $\{C_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$ unterstellt. Die Copula C_ϑ hängt von einem unbekannten Parameter ϑ ab, der aus dem Datensatz zu schätzen ist.

Algorithmus 3.22 (Kalibrierung einer Copula anhand des Schadendatensatz [MLS]).

- (1) Transformiere den Schadendatensatz gemäß Überlegung 3.21.
- (2) Berechne die Dichte c_ϑ von C_ϑ .
- (3) Bestimme numerisch den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$ nach (3.8).

3.6. Generierung von Copula Realisationen

Die Simulation des Gesamtverlustes L benötigt Copula-Realisationen. Deswegen werden hier einige effiziente Verfahren behandelt. Die Methoden sind in Aas (2004) zu finden.

3.6.1. Gauß-Copula

Algorithmus 3.23. Sei Σ eine d -dimensionale positiv definite, symmetrische Matrix. Dann existiert eine durch Σ eindeutig bestimmte untere Dreiecksmatrix A mit $AA^t = \Sigma$ (Cholesky Zerlegung). Für $Z_1, \dots, Z_d$ iid nach $N_{(0,1)}$ ist aus der Wahrscheinlichkeitstheorie die Beziehung

$$A(Z_1, \dots, Z_d)^t \sim N_{(\mathbf{0}, \Sigma)}$$

bekannt. Das Verfahren lautet:

- Bestimme die Cholesky Zerlegung A von Σ .
- Generiere $z_1, \dots, z_d$ Realisationen von iid ZV nach $N_{(0,1)}$.
- Setze $(x_1, \dots, x_d) = A(z_1, \dots, z_d)^t$.
- Setze $u_i = \Phi(x_i)$, $i = 1 \dots d$.
- Dann gilt $(u_1, \dots, u_d)^t \sim C_\Sigma^{\text{Ga}}$.

Der Nachweis 'positiv definit' kann mittels Hauptminoren-Kriterium von Jacobi erfolgen. Im Bivariaten ist $A = ((1, \rho)^t, (0, \sqrt{1 - \rho^2})^t)$ die Zerlegung von $\Sigma = ((1, \rho)^t, (\rho, 1)^t)$. Korrelationsmatrix und Cholesky Zerlegung sind für $|\rho| < 1$ definiert. Im trivariaten Fall lautet die Korrelationsmatrix $\Sigma = ((1, \rho_1, \rho_2)^t, (\rho_1, 1, \rho_3)^t, (\rho_2, \rho_3, 1)^t)$. Die Zerlegungsmatrix A berechnet sich zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 \\ \rho_2 & \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} & \sqrt{1 - \rho_2^2 - \frac{(\rho_3 - \rho_1 \rho_2)^2}{1 - \rho_1^2}} \end{pmatrix}$$

mit Definitionsmenge $\Theta_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}$ für Σ bzw. A ,

$$\Theta_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}} := \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \mid \rho_1, \rho_2 \in (-1, 1) \text{ und} \\ \rho_3 \in (-[(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)]^{1/2} + \rho_1 \rho_2, [(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)]^{1/2} + \rho_1 \rho_2)\}.$$

3.6.2. Archimedische Copulas

Die Clayton- und Gumbel-Copula gehören zu den *Archimedischen Copulas*. Hier kann mit Hilfe von Laplace Transformationen eine effiziente Generierung d -dimensionaler Realisationen erreicht werden. Durch die Beziehung von Copulas zu ihren Survival-Copulas (3.9) ist weiter eine effiziente Generierung für die HRT-Copula möglich, da die Clayton-Copula deren Survival-Copula ist. Die folgenden Aussagen stammen aus Nelsen (1999).

Satz (Kimberling 1974). *Sei φ eine stetige, streng monoton fallende Funktion auf $[0, 1]$ mit Wertemenge $[0, \infty]$, so daß $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$ gilt. Dann ist C^d mit*

$$C^d(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)) \quad (3.9)$$

eine d -dimensionale Copula $\iff \varphi^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ ist vollständig monoton.

Dabei bedeutet für eine monoton fallende Funktion f vollständige Monotonie auf $[a, b]$, daß

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, t \in (a, b).$$

Bemerkung. Eine Copula heißt *Archimedische Copula*, falls sie der Konstruktion (3.9) genügt. Die Funktion φ heißt in dem Fall *Erzeuger* der Copula.

Lemma 3.24. *Der Erzeuger φ lautet für die Clayton-Copula $\varphi(t) = 1/\vartheta (t^{-\vartheta} - 1)$ und für die Gumbel-Copula $\varphi(t) = (-\ln t)^\vartheta$.*

Beweis. Clayton-Copula: Die Umkehrfunktion zu φ ist $\varphi^{-1}(t) = (\vartheta t + 1)^{-1/\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} f(t)$. Dann gilt: $f^{(k)}(t) = (-1)^k (1/\vartheta + 1)(1/\vartheta + 2) \dots (1/\vartheta + k) \vartheta^{k-1} (\vartheta t + 1)^{-(1/\vartheta + 1)}$.

Offensichtlich erfüllt φ^{-1} die Voraussetzung einer vollständig monotonen Funktion. φ ist zudem stetig, streng monoton fallend auf $[0, \infty]$ und es gilt $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$, da $\vartheta > 0$. Daher wird mit diesem Erzeuger eine d -dimensionale Copula erzeugt.

Gumbel-Copula: Die Umkehrfunktion zu φ lautet $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\vartheta}) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)$. Der Nachweis 'f vollständig monoton' folgt durch ein Kriterium aus Nelsen (1999).

Kriterium. Ist g vollständig monoton und h absolut monoton (d.h. $h^{(k)}(t) \geq 0$), dann ist das Kompositum $h \circ g$ vollständig monoton.

Da $h(x) := \exp(-x)$ und $g(t) := t^{1/\vartheta}$ die Voraussetzungen des Kriteriums erfüllen, ist $h(g(t)) = \exp(-t^{1/\vartheta})$ vollständig monoton. Die anderen Anforderungen an φ^{-1} sind leicht zu verifizieren.

Der Nachweis $C^d(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))$ ist eine elementare Rechnung und führt im Falle des Erzeugers der Gumbel- und Clayton Copula zu den gewünschten Copulas aus Kapitel 3.3.

Daher besitzen die d -dimensionalen Derivate der Gumbel- und Clayton Copula eine Darstellung der Form (3.9). $\square$

Laplace Transformierte. Eine andere Möglichkeit der Charakterisierung Archimedischer Copulas kann mit Laplace Transformationen erreicht werden, woraus der angedeutete effiziente Algorithmus folgt. Die folgenden Aussagen stammen aus Schönbucher (2002).

Definition 3.25. Es sei G eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^+$ mit $G(0) = 0$. Die zu G zugehörige Laplace-Transformierte ($\hat{G}$) ist definiert als

$$\hat{G}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

Bemerkung 3.26. Mit $\hat{G}(\infty) := 0$ zeige, daß $\hat{G} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, streng monoton fallende Funktion mit der Eigenschaft der vollständigen Monotonie ist. Zur Verifikation der vollständigen Monotonie rechne für $k \in \mathbb{N}$ die Definition nach:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{G}(t) = \int_0^\infty x^k \cdot e^{-tx} dG(x). \text{ Dieser Ausdruck ist } \geq 0 \text{ für } t \in [0, \infty], k \in \mathbb{N}.$$

Deswegen kann $\hat{G}$ als mögliche Inverse (φ^{-1}) einer Funktion φ mit φ Erzeuger einer Copula angesehen werden.

Das folgende Theorem beinhaltet den effizienten Algorithmus zur Erzeugung von Realisationen Archimedischer Copulas. Es wird die Theorie der Laplace Transformationen und die der Archimedischen Copulas zusammengeführt.

Satz 3.27 (Marshall / Olkin 1988). *Sei G eine VF auf $\mathbb{R}^+$ mit $G(0) = 0$ und Laplace-Transformierter $\hat{G}$ gemäß (3.10). Setze $\hat{G}(\infty) := 0$. Verfahre nach dem folgenden Algorithmus*

- (1) *Es seien $U_1, \dots, U_d$ iid gleichverteilt auf $[0, 1]$.*
- (2) *Sei Y eine (mischende) ZV mit den folgenden Eigenschaften*
 - *Die Verteilungsfunktion von Y sei G*
 - *Y sei stochastisch unabhängig von $U_1, \dots, U_d$*
 - *Die Laplace Transformierte von Y sei $\hat{G}$*

- (3) *Definiere $X_i := \hat{G}(-\frac{1}{Y} \ln U_i)$, $i = 1 \dots d$*

Dann gilt

$$P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d\} = \hat{G}(\hat{G}^{-1}(x_1) + \dots + \hat{G}^{-1}(x_d)).$$

Daher besitzt der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_d)$ eine d -dimensionale Archimedische Copula mit Erzeuger $\varphi := \hat{G}^{-1}$.

Beweis. Beachte zunächst $P(X_i \leq x_i \mid Y = y) = \exp\{-\varphi(x_i) y\}$, $y \geq 0$, da Y stochastisch unabhängig von $U_1, \dots, U_d$. Der Satz folgt mit den folgenden Schritten

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\} &= E\left(E(1_{\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}} \mid Y)\right) = E\left(\prod_{i=1}^d P(X_i \leq x_i \mid Y)\right) = E\left(\prod_{i=1}^d \exp\{-\varphi(x_i) Y\}\right) \\ &= E\left(\exp\left\{-Y \sum_{i=1}^d \varphi(x_i)\right\}\right) = \hat{G}\left(\sum_{i=1}^d \varphi(x_i)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{G}\left(\sum_{i=1}^d \hat{G}^{-1}(x_i)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Überlegung. Um d -dimensionale Realisationen einer Archimedischen Copula C mit Erzeuger φ zu generieren, wird nach dem Satz von Marshall/Olkin lediglich die genaue Kenntnis der Verteilung von Y benötigt. Die ZV Y muß dabei so gewählt werden, daß die zugehörige Laplace-Transformierte gerade die Umkehrfunktion des Erzeugers φ ist. Dann wende den Algorithmus in Satz 3.27 an und erhalte Realisationen der gewünschten Dimension.

Bemerkung 3.28 (Wahl der mischenden ZV Y für Clayton und Gumbel).

$C_{\vartheta}^{\text{Cl}}$ $Y \sim \text{Ga}(1/\vartheta, 1)$ (d.h. Y gammaverteilte ZV mit Gestaltenparameter $1/\vartheta$ und Skalenparameter 1). Das ist leicht nachzurechnen.

$C_{\vartheta}^{\text{Gu}}$ $Y \sim \text{St}(1/\vartheta, 1, \gamma, 0)$, $\gamma = (\cos(\pi/(2\vartheta)))^{\vartheta}$ und $\vartheta > 1$. Damit ist Y eine *positive Stable Variable*. Der Beweis zur allgemeinen Generierung der Stable Variables wurde erstmals von Weron (1996) vollständig erbracht und die Idee geht auf den Algorithmus von Chambers et al. (1976) zurück. An dieser Stelle sei eine kurze Skizze zur Erzeugung von Y gegeben.

- (1) Für $X \sim \text{St}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ lautet die charakteristische Funktion
 $E \exp(itX) = \exp\left(-\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}(1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2)) + i\delta t\right)$, $\alpha \neq 1$
- (2) Die Laplace Transformierte von X berechnet sich über die Beziehung $E \exp(-tX) = (E(\exp(itX)))^i$, was sich mit elementarer Funktionentheorie für $\beta = 1$ zu $\exp(-t\delta - t^{\alpha}\gamma^{\alpha} \sec(\pi\alpha/2))$ vereinfacht. Setze nun $\delta = 0$ und $\gamma = (\cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha}$, so folgt $E \exp(-tX) = \exp(-t^{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-t^{1/\vartheta})$ was nach Lemma 3.24 gerade die Umkehrfunktion φ^{-1} des Erzeugers der Gumbel-Copula ist. Für dieses spezielle X gilt $X \stackrel{d}{=} Y$.
- (3) Nach Weron (1996) genügt Y der folgenden Darstellung, wobei $\Theta \sim \mathcal{R}(-\pi/2, \pi/2)$ und $W \sim \text{Exp}(1)$:

$$Y = \frac{\sin[1/\vartheta(\pi/2 + \Theta)]}{(\cos \Theta)^{\vartheta}} \left(\frac{\cos[\pi/(2\vartheta) + (1/\vartheta - 1)\Theta]}{W} \right)^{\vartheta-1}, \vartheta \geq 1.$$

3.7. Bivariate Goodness of Fit Statistiken

Ist eine Copula an einen Datensatz angepaßt, so muß die Anpassungsqualität geprüft werden. Dazu dienen multivariate goodness of fit Statistiken. Die hier verwendeten Ideen und Statistiken sind in analoger Form in Junker and May (2005) und Canela and Collazo (2005) zu finden. Neben der Übertragung der univariaten Statistiken ins Bivariate wird ein Chi-Quadrat Test besprochen.

Der zugrundeliegende bivariate Datensatz sei gemäß Überlegung 3.21 angemessen transformiert. Daher können die Daten $(w_{1,1}, w_{1,2}), \dots, (w_{n,1}, w_{n,2}) \in (0, 1)^2$ als Realisationen zweidimensional gleichverteilter unabhängiger ZV angesehen werden.

3.7.1. Kolmogorov-Smirnov und Anderson-Darling Teststatistik

Die bivariate AD-Teststatistik für Copulas ist in Junker and May (2005) zu finden. Die bivariate KS-Teststatistik für Copulas ist leicht aus der multivariaten KS-Teststatistik in Rosenblatt (1952) für allgemeine multivariate Verteilungen zu erhalten.

Definition 3.29. Die empirische Verteilungsfunktion C_n zum transformierten Datensatzes $(w_{1,1}, w_{1,2}), \dots, (w_{n,1}, w_{n,2}) \in (0, 1)^2$ ist definiert als

$$C_n(u, v) = 1/n \sum_{i=1}^n 1_{(0,u]}(w_{i,1}) 1_{(0,v]}(w_{i,2}), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Definition 3.30. Für $S = [0, 1]^2$

- (i) Die Kolmogorov-Smirnov Statistik (KS) ist erklärt als Supremum des vertikalen Abstandes aus empirischer (C_n) und angepaßter Copula (C_0).

$$\mathbf{KS} = \sqrt{n} \cdot \sup_{u \in S} |C_n(u) - C_0(u)|.$$

- (ii) Bei der Anderson-Darling Statistik (AD) wird eine Kolmogorov-Smirnov Statistik mit $(C_0(1 - C_0))^{1/2}$ gewichtet.

$$\mathbf{AD} = \sqrt{n} \cdot \sup_{u \in S} \left| \frac{C_n(u) - C_0(u)}{\sqrt{C_0(u)(1 - C_0(u))}} \right|.$$

Bemerkung 3.31. Die zweite Statistik soll eine gute Anpassung im oberen Quadranten des Einheitsquadrats garantieren und damit auch im oberen Quadranten der Ebene $\mathbb{R}^2$ bez. der aus Copula und Randverteilungen zusammengesetzten Schadenhöhenverteilung. Das ist gefordert, denn die bivariate Schadenhöhenverteilung im Tail ist von enormer Bedeutung für den Gesamtverlust.

Algorithmus (Praktische Umsetzung der Teststatistiken). Es sei $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)$ ein bivariater Datensatz mit den Rangordnungen $u_{(1)} < u_{(2)} < \dots < u_{(n)}$ und $v_{(1)} < \dots < v_{(n)}$ entsprechend. Die empirische Verteilungsfunktion des Datensatzes ist monoton steigend und als Treppenfunktion konstant auf dem Rechteck $[u_{(i-1)}, v_{(i-1)}] \times [u_{(i)}, v_{(i)}]$. Die angepaßte Copula ist strikt Δ -monoton und stetig. Daher werden die Statistiken über das Maximum des Abstandes an den Stellen $(u_{(1)}, v_{(1)}), \dots, (u_{(n)}, v_{(n)})$ zwischen empirischer und angepaßter Copula ermittelt. Bezeichne $w_j := C_0(u_{(j)}, v_{(j)})$, $j = 1 \dots n$ und $\tilde{w}_j := C_n(u_{(j)}, v_{(j)})$, $j = 1 \dots n$. Setze $\tilde{w}_0 := 0$. Dann können die Statistiken wie folgt programmiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{KS} &= \sqrt{n} \max \left\{ \max_{j=1 \dots n} |\tilde{w}_j - w_j|, \max_{j=1 \dots n} |w_j - \tilde{w}_{j-1}| \right\} \\ \mathbf{AD} &= \sqrt{n} \max \left\{ \max_{j=1 \dots n} \left| \frac{\tilde{w}_j - w_j}{w_j(1 - w_j)} \right|, \max_{j=1 \dots n} \left| \frac{w_j - \tilde{w}_{j-1}}{\sqrt{w_j(1 - w_j)}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

3.7.2. Chi-Quadrat Test

Die Idee des bivariaten Tests lautet wie folgt: Zerlege das Einheitsquadrat in N^2 (gleich-
große) Zellen und verteile die transformierten Daten auf die entsprechenden Zellen. Stimmt
die hypothetische Copula C_0 mit der wahren Abhängigkeitsstruktur der Daten in etwa
überein, so sollte auch die relative Häufigkeit der Daten in einer beliebigen Zelle mit dem
 C_0 -Maß der Zelle übereinstimmen. Das C_0 Maß der Zelle ist ein natürlicher Schätzer der
Dichte c_0 und die relative Häufigkeit in der Zelle ein Schätzer der empirischen Dichte.

Der vorgeschlagene Test wird in ähnlicher Form in Canela and Collazo (2005) sowie
Junker and May (2005) erklärt und angewendet:

Algorithmus 3.32 (Bivariater Chi-Quadrat Test).

- Zerlege $[0, 1]^2$ in N^2 Quadrate $Q_{ij} =]\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \times]\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$, $i, j = 1..N$.
- Das C -Maß von Q_{ij} lautet:

$$V_C(Q_{ij}) = C(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) - C(\frac{i-1}{N}, \frac{j}{N}) - C(\frac{i}{N}, \frac{j-1}{N}) + C(\frac{i-1}{N}, \frac{j-1}{N}) =: \hat{c}(i, j)$$
- Der Datensatz $(u_i, v_i)_{i=1..n}$ besitzt die abs. Häufigkeit ν_{ij} in Q_{ij} mit

$$\nu_{ij} = |\{(u_k, v_k) \mid (u_k, v_k) \in Q_{ij}, \quad k = 1 \dots n\}|.$$
- Die Teststatistik X^2 lautet:

$$X^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{(\nu_{ij} - n \cdot \hat{c}(i, j))^2}{n \cdot \hat{c}(i, j)}.$$

In Canela and Collazo (2005) wird als (asymptotische) Testverteilung der Statistik
die $\chi_{(N-1)^2}^2$ Verteilung verwendet. Die Anzahl der Zellen N sollte nach Junker and
May (2005) in der Praxis so gewählt werden, daß $N \approx 2n^{2/5}$ gilt.

Test. Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $X^2 := X^2((U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n))$ die Chi-Quadrat Teststa-
tistik. Dann ist $\Psi : (0, 1)^{2n} \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\Psi((U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)) = \begin{cases} 0 : & X^2 < (\chi_{(N-1)^2}^{-1}(1 - \alpha)) \\ 1 : & X^2 \geq (\chi_{(N-1)^2}^{-1}(1 - \alpha)) \end{cases}$$

ein Test zum Niveau α für H_0 mit H_0 : 'Die Copula C_0 genügt der Abhängigkeits-
struktur des (transformierten) bivariaten Datensatzes'.

Bemerkung. (i) In Canela and Collazo (2005) sowie Junker and May (2005) steht in
der X^2 Statistik im Nenner statt $n \cdot \hat{c}(i, j)$ die absolute Häufigkeit der Zelle, ν_{ij} . Das
führt in der praktischen Ausführung des Tests jedoch zu Schwierigkeiten, da einige
Zellen i.a. nicht belegt sind und im Nenner an dieser Stelle eine '0' steht.

- (ii) Die Distanz von relativer Häufigkeit in der Zelle Q_{ij} und C_0 -Maß von Q_{ij} ist von
entscheidender Bedeutung in X^2 . Gerade im oberen Quadranten (und damit im ho-
hen, bivariaten Schadenbereich) ist der Nenner $n \cdot \hat{c}(i, j)$ relativ klein. Daher wird
 X^2 groß, wenn die hypothetische Abhängigkeitsstruktur die tatsächliche Abhängig-
keitsstruktur des gemeinsamen hohen Schadenbereichs nicht angemessen abbildet.

Schadenhöhenverteilung. Die benötigten Methoden zur Kalibrierung einer Schadenhöhenverteilung an einen bivariaten Schadendatensatz sind genannt worden. Daher kann ein abschließender Algorithmus zur Anpassung angegeben werden.

Algorithmus 3.33 (Kalibrierung der Schadenhöhenverteilung im Zwei-Subportfolio Fall). Es seien operationelle Schadenpaare in der Form $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ gegeben. Dabei sei die Anzahl n angemessen groß (in etwa ≥ 1000). Es gelte $x_i \geq l_1$ und $y_j \geq l_2$ für untere Erfassungsgrenzen $l_1, l_2 > 0$.

- (1) Passe an die Schadenhöhen der zwei Subportfolios eine Randverteilung mit den Methoden aus Kapitel 2 an (F_1, F_2) .
- (2) Wähle geeignete einparametrische Copulafamilien zur Darstellung der Abhängigkeitsstruktur aus (z.B. Gauß, Gumbel, HRT aus Beispiel 3.10).
- (3) Transformiere die Schadenpaare geeignet zu Realisationen bivariater gleichverteilter ZV nach Überlegung 3.21.
- (4) Schätze den Parameter innerhalb jeder einzelnen Copulafamilien mittels Maximum Likelihood Methode (Algorithmus 3.22) oder Kendalls tau Algorithmus 3.17.
- (5) Berechne die Anpassungsgüte der fixierten Copula an die transformierten Schadenpaare, indem z.B. die Chi-Quadrat Teststatistik ausgewertet wird.
- (6) Wähle die Copula mit der besten Anpassungsgüte aus (C) . Die angepaßte Schadenhöhenverteilung lautet dann

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)) \cdot 1_{\{x \geq l_1, y \geq l_2\}}.$$

3.8. Value at Risk

In diesem Abschnitt wird die Simulation des **Gesamtverlustes** (L) und damit die näherungsweise Berechnung des zugehörigen Value at Risk ($\text{VaR}(L)$) erläutert. Betrachte anstelle eines Verlustes aus zwei direkt einen Verlust aus d Subportfolios, wobei sich der i -te Subportfolioverlust (L_i) analog zur Annahme 3.2 schreiben lasse, d.h.

$$L_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_j^{(i)}. \quad (3.11)$$

Die zufällige Schadenzahl N_i sei poissonverteilt zum Parameter λ_i und $(X_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ seien *iid* Schadenhöhen mit gemeinsamer Verteilung F_i . Es gelte, daß $(X_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ und N_i stochastisch unabhängig sind.

Es seien $L_1, \dots, L_d$ Subportfolioverluste mit Darstellung analog zu (3.11). Der Gesamtverlust L läßt sich daher schreiben als

$$L = \sum_{i=1}^d L_i.$$

In der Literatur taucht oft der Begriff 'komonotone Risiken' auf. Daher sollen an dieser Stelle die Definition und einige Eigenschaften aufgelistet werden.

Definition 3.34. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ seien komonotone ZV. Dann existieren eine ZV Z und monoton steigende Funktionen $f_1, \dots, f_n$ mit $Y_i \stackrel{d}{=} f_i(Z)$ für $i = 1 \dots n$.

Bemerkung. Für komonotone ZV $Y_1, \dots, Y_n$ gilt

$$\text{VaR}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VaR}_\alpha(Y_i).$$

Beweis. Nach Voraussetzung existieren monoton steigende Funktionen f_i mit der Eigenschaft $Y_i \stackrel{d}{=} f_i(Z)$ für $i = 1 \dots n$. Setze $f := \sum_{i=1}^n f_i$, was auch eine monoton steigende Funktion ist. Daher ergibt sich

$$\text{VaR}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \text{VaR}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n f_i(Z)\right) = \text{VaR}_\alpha(f(Z))$$

Es sei G die Verteilungsfunktion von Z . Dann hat nach elementarer Rechnung $f(Z)$ die Verteilungsfunktion $G \circ f^{-1}$. Bezeichne diese Eigenschaft mit $(*)$. Daher folgt

$$\text{VaR}_\alpha(f(Z)) \stackrel{(*)}{=} (G \circ f^{-1})^{-1}(\alpha) = f(\text{VaR}_\alpha(Z)) = \sum_{i=1}^n f_i(\text{VaR}_\alpha(Z)).$$

Das läßt sich nach erneutem Anwenden von $(*)$ zu $\sum_{i=1}^n \text{VaR}_\alpha(Y_i)$ vereinfachen. $\square$

Bemerkung 3.35. Der Value at Risk des Gesamtverlustes L bez. operationeller Risiken liegt i.a. zwischen dem Value at Risk *unabhängiger* und dem Value at Risk *komonotoner* Subportfolioverluste. Diese Aussage ist für die hier durchgeführten praktischen Anwendungen plausibel. Es ist jedoch theoretisch möglich, daß der VaR bei 'ungünstiger' Abhängigkeitsstruktur den komonotonen Fall übertreffen kann (siehe Embrechts et al. (1999) für den bivariaten und Embrechts and Pucetti (2005) für den d -dimensionalen Verlustfall).

Überlegung 3.36. Beim komonotonen Verlustfall wird angenommen, daß die einzelnen Risiken gleichzeitig auftreten. Beim unabhängigen Verlustfall wird unterstellt, daß die einzelnen Subportfolioverluste stochastisch unabhängig sind. Damit sind insbesondere die Schadenanzahlen und Schadenhöhen der Subportfolios als unabhängig anzusehen. Es ist weiterhin zu erkennen, daß zur Berechnung des Value at Risk in diesen beiden "Grenzfälle" keine Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Subportfolios benötigt werden.

Es folgt ein Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung des Value at Risk bez. eines Verlustfalls mit abhängigen Schadenhöhen.

Algorithmus 3.37 (Erzeugung abhängiger Schadenhöhen).

Es gelte $F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$. Dann lautet die Generierung:

- (1) Erzeuge $(u_1, \dots, u_d) \sim C$ gemäß Kapitel 3.6
- (2) Dann ist $(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \sim F$.

Algorithmus 3.38 (Berechnung des $\text{VaR}(L)$ bei abhängigen Schadenhöhen).

- (i) Erzeuge eine Realisation l von $L = \sum_{k=1}^d L_k$ mit
 - (1) Erzeuge d unabhängige poissonverteilte Schadenzahlen $n_1, \dots, n_d$ zu Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_d$.
 - (2) Bestimme $n = \max(n_1, \dots, n_d)$.
 - (3) Erzeuge n Realisationen von F mittels Algorithmus 3.37.

$$\begin{aligned} & (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(d)}), \\ & (x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(d)}), \\ & \vdots \\ & (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)}). \end{aligned}$$

- (4) Eine Realisation von L ist dann $l = \sum_{j=1}^{n_1} x_j^{(1)} + \dots + \sum_{j=1}^{n_d} x_j^{(d)}$.

- (ii) Führe Schritt (i) m mal durch, wobei $m \geq 10^6$ sein sollte.
- (iii) Bestimme die empirische Verlustverteilung von L aus den m Realisationen $(F_{L,m})$ und berechne den zugehörigen (empirischen) Value at Risk.

Die in der heterogenen Sichtweise festgesetzte Sicherheitsunterlegung ist $F_{L,m}^{-1}(0.999)$. Wie in der homogenen Sichtweise sollte m solange erhöht werden, bis kein größerer Unterschied in den VaR-Berechnungen zu verschiedenen Durchläufen mehr festzustellen ist.

3.9. Bewertung operationeller Risiken. Beispiel

Modellkalibrierung an Schadendaten

Ein Institut verfüge über eine Schadendatenbank, in der die internen Schadendaten auf zwei Subportfolios aufgeteilt seien. Es seien dabei 1000 abhängige Schadenpaare ermittelt worden.

Die Randverteilungen seien fixiert. Die Transformation des bivariaten Datensatzes zu Realisationen von *iid* zweidimensionalen, gleichverteilten ZV findet über die angepaßten Schadenhöhenverteilungen statt. Es soll diejenige Copula soll ausgewählt werden, die die Abhängigkeiten der Subportfolios am besten widerspiegelt. Die Schadenhöhenverteilungen seien dabei wie folgt geschätzt:

- Subportfolio 1** $X^{(1)}$ Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(8, 1.5)$ auf $[2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^4]$ und $\text{GPD}(0.2, 4 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4)$ auf $(4 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $4 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der SHV F_1 .
- Subportfolio 2** $X^{(2)}$ Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(8.4, 1.4)$ auf $[2 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^4]$ und $\text{GPD}(0.2, 3 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4)$ auf $(3 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $3 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der SHV F_2 .

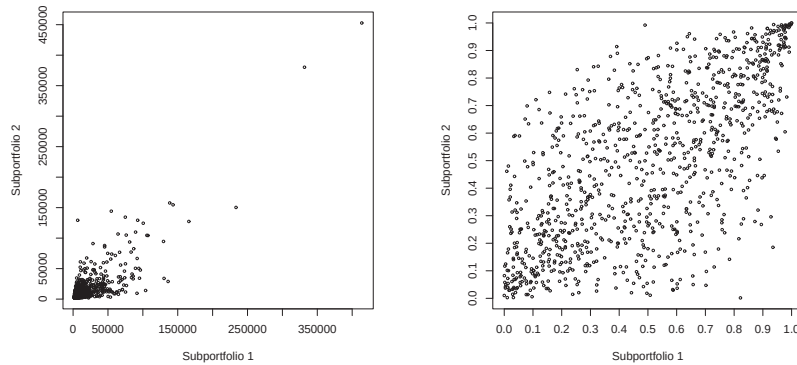


Abbildung 3.2. (Links) Scatterplot der tausend abhängigen Schäden. Die Schäden im hohen Schadenbereich scheinen abhängig voneinander zu sein. Möglicherweise besitzt die “wahre” Abhängigkeitsstruktur eine upper tail dependence. (Rechts) Scatterplot des transformierten Datensatzes, an den eine Copula angepaßt wird. Eine upper tail dependence wird im rechten Plot weniger bestätigt.

Der Wert des Kendalls tau Schätzer ist $t = 0.492$. Es ergeben sich für die drei Copulafamilien folgende Werte ϑ über den Kendalls tau Algorithmus bzw. über den Maximum Likelihood Schätzer:

	$C_{\vartheta}^{\text{Ga}}$	$C_{\vartheta}^{\text{Gu}}$	$C_{\vartheta}^{\text{HRT}}$
Kendall	0.698	1.968	1.936
MLS	0.700	1.962	1.642

Die Parameterwerte der HRT-Copula weichen bez. den zwei verschiedenen Algorithmen deutlich voneinander ab. Dies ist ein Hinweis, daß die “wahre” Copula nicht die HRT-Copula ist.

Zur Identifizierung der geeigneten Copula wird der Abstand zwischen angepaßter und empirischer Copula mit Hilfe des Chi-Quadrat Tests zum Niveau $\alpha = 5\%$ berechnet. Bei $n = 1000$ zu verteilenden Daten ist die Zellenanzahl N^2 mit $N = 10, 11, 12$ angemessen. Bei $N > 12$ sind viele Zellen zu gering belegt und der Test ist nicht mehr aussagekräftig. Es wird die Teststatistik X^2 , das 95% Quantil zu $\chi_{(N-1)^2}$ (i.Z. $q_{0.95}$) sowie der p -Wert ausgegeben.

	$C_{0.7}^{\text{Ga}}$	$C_{1.96}^{\text{Gu}}$	$C_{1.94}^{\text{HRT}}, C_{1.64}^{\text{HRT}}$	$q_{0.95}$	N
X^2	103.72	93.40	> 270	103.1	10
p -Wert	0.045	0.16	0		
X^2	128.89	105.49	> 300	124.3	11
p -Wert	0.02	0.33	0		
X^2	198.1	171.70	> 360	147.67	12
p -Wert	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.001	0		

Die Abhängigkeitsstruktur des Datensatzes wird zufolge der Statistik und des p -Werts am besten von der $C_{1.96}^{\text{Gu}}$ wiedergegeben. Das stimmt mit der tatsächlichen Abhängigkeitsstruktur zur Erzeugung des Datensatzes (C_2^{Gu}) fast überein.

Simulation und Bestimmung des VaR

Es wird der Value at Risk zu der Simulation des Gesamtverlustes L mit $L = L_1 + L_2$ gemäß Modellannahme 3.2 bestimmt. Die Randverteilungen beider Subportfolios seien bestimmt. Es wird keine Modellkalibrierung der Copulas durchgeführt. Stattdessen soll durch Vorgabe verschiedener Copulaparameter eine Bandbreite möglicher Value at Risk erzeugt werden. Simuliere den Value at Risk zu 8 verschiedenen Copulaparametern. Die so erzeugte Bandbreite von Value at Risk soll nach Möglichkeit den unabhängigen und komonotonen Verlustfall abdecken. Da Unterschiede zwischen den drei Copulas Gauß, Gumbel und HRT gezeigt werden sollen, simuliere den Value at Risk zu allen drei Copulas. Die 8 verschiedenen Copulaparameter der drei Copulas werden dabei so gewählt, daß das Abhängigkeitsmaß Kendalls tau für die drei Copulas übereinstimmt. Damit ist ansatzweise die Möglichkeit eines Vergleichs der drei folgenden Value at Risk Tabellen vorhanden. Der Value at Risk wird zu 10 Niveaustufen 0.99, 0.991, ..., 0.999 simuliert. Die (angepaßten) Schadenhöhenverteilungen lauten:

Subportfolio 1 $N_1 \sim \text{Poi}(60)$

$X^{(1)}$ Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(8.5, 1.4)$ auf $[2 \cdot 10^3, 6.5 \cdot 10^4]$ und $\text{GPD}(0.8, 6.5 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4)$ auf $(6.5 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $6.5 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der SHV F_1 .

Subportfolio 2 $N_2 \sim \text{Poi}(35)$

$X^{(2)}$ Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(8.5, 1.4)$ auf $[2 \cdot 10^3, 5.5 \cdot 10^4]$ und $\text{GPD}(0.7, 5.5 \cdot 10^4, 7.5 \cdot 10^4)$ auf $(5.5 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $5.5 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der SHV F_2 .

Die Schadenzahlintensitäten ergänzen sich zu einer Gesamtintensität von 95. Die Simulationenanzahl ist mit $5 \cdot 10^6$ angemessen. Es ergeben sich für den $\text{VaR}(L)$ bei den entsprechenden Abhängigkeiten zwischen den Schadenhöhen die folgenden Ergebnisse (in Mio. EUR).

Niveau \ ρ	ind	0.2	0.4	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99	com
0.990	22.0	21.9	22.1	22.9	23.3	23.3	23.7	23.9	24.1	24.9
0.991	23.5	23.5	23.7	24.5	25.0	24.9	25.4	25.6	25.9	26.6
0.992	25.4	25.3	25.5	26.4	26.9	27.0	27.4	27.7	27.9	28.8
0.993	27.8	27.7	27.9	28.8	29.5	29.4	30.1	30.3	30.6	31.6
0.994	31.0	30.7	30.9	32.0	32.8	32.8	33.4	33.5	34.0	35.1
0.995	35.5	34.7	35.0	36.2	37.2	37.1	37.9	38.1	38.6	40.0
0.996	41.3	40.7	41.0	42.2	43.6	43.2	44.3	44.5	45.3	47.2
0.997	50.7	50.0	50.3	51.8	53.6	52.8	54.2	54.5	55.7	57.9
0.998	67.5	67.7	67.0	69.3	71.7	70.8	72.7	73.7	74.7	77.7
0.999	113.1	114.3	113.8	114.4	119.3	117.6	122.4	123.8	125.4	129.9

Niveau \ ϑ	ind	1.14	1.35	1.97	2.44	2.83	3.48	4.94	11.1	com
0.990	22.0	22.6	23.2	23.8	23.9	24.1	24.1	24.0	24.1	24.9
0.991	23.5	24.2	24.8	25.5	25.6	25.8	25.8	25.7	25.8	26.6
0.992	25.4	26.2	26.8	27.6	27.7	27.9	27.9	27.8	27.9	28.8
0.993	27.8	28.6	29.4	30.2	30.4	30.6	30.5	30.3	30.6	31.6
0.994	31.0	31.8	32.7	33.6	33.8	34.0	33.9	33.7	34.0	35.1
0.995	35.5	36.0	37.1	38.3	38.3	38.6	37.5	38.2	38.5	40.0
0.996	41.3	42.1	43.2	44.7	44.9	45.1	45.1	44.7	45.1	47.2
0.997	50.7	51.6	53.1	54.8	55.0	55.5	55.7	55.3	55.1	57.9
0.998	67.5	68.6	71.0	74.2	73.6	74.7	74.5	74.5	74.1	77.7
0.999	113.1	113.4	119.7	123.7	123.8	123.3	123.8	126.1	123.1	129.9

Niveau \ ϑ	ind	0.29	0.71	1.94	2.88	3.66	4.97	7.89	20.2	com
0.990	22.0	22.4	23.3	23.9	24.0	24.0	24.1	24.2	24.3	24.9
0.991	23.5	24.0	25.0	25.6	25.8	25.7	25.8	25.9	26.0	26.6
0.992	25.4	26.0	27.1	27.7	27.9	27.8	27.9	28.0	28.1	28.8
0.993	27.8	28.4	29.6	30.4	30.6	30.5	30.5	30.7	30.8	31.6
0.994	31.0	31.6	32.8	33.8	34.1	33.9	33.9	34.2	34.2	35.1
0.995	35.5	35.9	37.2	38.3	38.7	38.4	38.5	38.8	38.8	40.0
0.996	41.3	41.9	43.5	44.8	44.9	44.8	45.2	45.3	45.5	47.2
0.997	50.7	51.7	53.6	55.0	55.5	54.9	55.5	55.9	56.0	57.9
0.998	67.5	69.0	72.0	73.6	74.2	73.5	74.4	75.0	75.3	77.7
0.999	113.1	115.4	120.1	123.9	124.9	122.7	124.1	124.7	126.2	129.9

Tabelle 3.1. $\text{VaR}_{\text{Niveau}}(L)$. Erste Tabelle: Gauß-Copula; Zweite Tabelle: Gumbel-Copula; Dritte Tabelle: HRT-Copula. Die Grenzfälle sind der unabhängige Verlustfall (linke Spalte, “ind”) und der komonotone Verlustfall (rechte Spalte, “com”). Dazwischen stehen die VaR mit den entsprechenden Copulaparametern. Die gewählten Parameter erzeugen stets eine ‘positive’ Abhängigkeit. Sowohl der VaR mit HRT als auch Gumbel steigt für korrespondierende ‘niedrige’ Copulaparameter schneller an als der VaR mit der Gauß-Copula. Für ‘hohe’ Copulaparameter gleichen sich die drei VaR-Tabellen. In den Tabellen wird der VaR des komonotonen Verlustfalls für hohe Copulaparameter fast erreicht. Die opVaR-Berechnungen mit Copulas erzeugen einen Unterschied von in etwa maximal 10% zum unabhängigen Verlustfall, d.h. $\text{opVaR}_{\text{Copula}} / \text{opVaR}_{\text{unab}} \leq 1.1$.

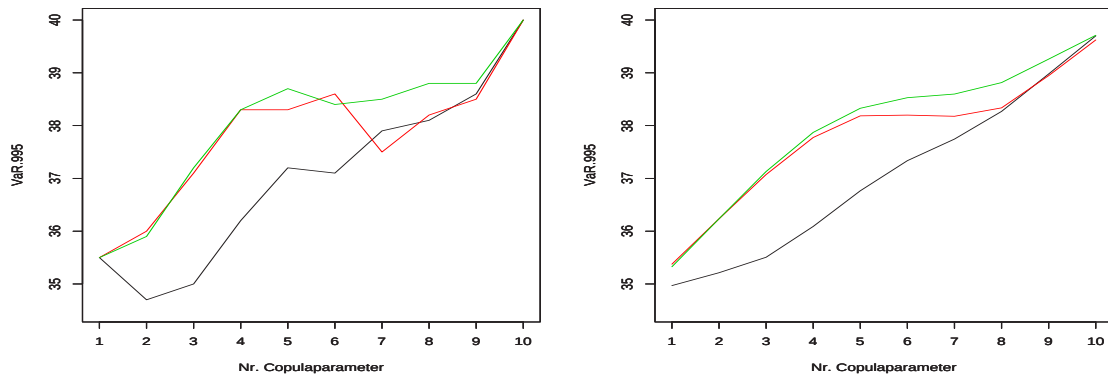


Abbildung 3.3. Vergleich VaR zum Niveau 0.995. Links: 10 Original-VaR.995 aus den drei Tabellen; Die 10 Punkte sind miteinander verbunden. Rechts: Zugehörige *smoothed mean value curve*. Dabei sind Gauß (schwarz), Gumbel (rot), HRT (grün). Deutlich zu sehen ist der im Vergleich zur 'Gauß-Kurve' schnellere Anstieg der 'Gumbel-' und 'HRT-Kurve'. Die Vermutungen bez. Tabelle 3.1 werden nicht widerlegt; allerdings sind 8 Vergleichspunkte recht wenig.

Es ist zu beachten, daß die Gestaltenparameter hier relativ hoch sind. Nach den Beispielen in Embrechts et al. (1999) ist zu vermuten, daß für hohe Gestaltenparameter in $(0.5, 1)$ mit wachsendem Gestaltenparameter der komonotone und unabhängige Verlustfall immer näher zusammenrücken. Bei niedrigen Gestaltenparametern in $(0, 0.5)$ liegen die beiden Extremfälle weiter auseinander. Eine Bestätigung ist anhand der Simulationsergebnisse in Strunk (2006a) zu finden.

Fazit Zwei Subportfolio Fall

Die gängigen Vorgehensweisen zur Bewertung operationeller Risiken im bivariaten Fall sind vorgestellt worden. Daher sollen an dieser Stelle die wichtigsten Erkenntnisse dargelegt werden.

- (i) Der Value at Risk hängt stark von der verwendeten Copula ab.
- (ii) Durch Variieren des Copulaparameters wird eine Bandbreite möglicher Value at Risk erzeugt, die den Bereich zwischen komonotonen und unabhängigen Verlustfall nahezu abgedeckt.
- (iii) Eine upper tail dependent Copula wie Gumbel oder HRT hat einen stärkeren Effekt auf den Value at Risk als eine upper tail independent Copula wie Gauß. Dies wird im mittleren Parameterbereich besonders deutlich.
- (iv) Unterschiede in der Wirkung von Gumbel- und HRT-Copula können empirisch nicht festgestellt werden.

Kapitel 4.

Heterogene Portfoliosichtweise. Trivariater Fall

Die Einteilung operationeller Risiken in menschliche und technische Risiken wird verfeinert. Daher gliedere die Risiken zunächst in externe und interne Risiken. Die internen Risiken bedürfen einer weiteren Unterteilung und werden in menschliche und technische Risiken unterteilt.

Externe Risiken sind 'Diebstahl und Betrug', 'Systemsicherheit' (aus der Ereigniskategorie Externer Betrug); 'Unzulässige Geschäfts- und Marktpraktiken' (Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten). Zu technischen internen Risiken zählen 'Systeme' (Geschäftsunterbrechungen und Systemversagen); 'Produktfehler' (Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten). Menschliche interne Risiken sind u.a. 'unbefugte Handlungen und Betrug' (Interner Betrug); 'Erfassung, Abwicklung und Betreuung von Transaktionen', 'Überwachung und Meldung' (Abwicklung, Vertrieb und Prozeßmanagement).

Die Einteilung wirkt etwas künstlich, da evtl. auch die externen Risiken in menschliche und technische Risiken aufgeteilt werden müßten. Bei der HSH ergeben sich für die drei gewählten Subportfolios in etwa eine übereinstimmende Schadenintensität. So ist die vollzogene Einteilung in die drei Risikoarten quantitativ vertretbar.

Beispiel. Ein Kunde fühle sich von dem Geldinstitut schlecht beraten und habe die finanziellen Mittel, der Bank Schaden zuzufügen. Er lasse ein Virus-Programm anfertigen, daß von den momentanen Schutzprogrammen für Server nicht erkannt werde. Das Virus gelange in den Server und trotz Unregelmäßigkeiten im System lasse der jeweilige Kontrolleur der IT-Abteilung dieses Programm in das interne Netzwerk der Bank gelangen. Der gewünschte Effekt des Kunden trete ein und verursache einen mehrstündigen Systemausfall der einzelnen Terminals. In diesem Beispiel wird ein interner technischer Schaden durch (internes) menschliches Versagen erzeugt. Die Ursache des Schadenverlaufs stammt aus dem Bereich externes Risiko. Anders als in diesem Beispiel können natürlich auch zwischen nur zwei von drei Risikoarten Abhängigkeiten bestehen und entsprechende Schäden entstehen.

Die Vorgehensweise in diesem Kapitel ist ähnlich zu der in dem dritten Kapitel. Es werden die Gauß-, Gumbel- und HRT-Copula als Abhängigkeitsstrukturen zwischen den drei Subportfolios ausgewählt. Die statistischen Methoden für die Copulas sind an geeigneter Stelle zu modifizieren, so daß auch im trivariaten Fall die Kalibrierung einer Abhängigkeitsstruktur anhand eines Datensatzes möglich ist.

4.1. Modellannahmen

Die operationellen Schäden lassen sich auf drei Subportfolios aufteilen. Der zufällige Gesamtverlust L aus operationellen Schäden sei die Summe aus den Einzelverlusten L_1, L_2 und L_3 , die sich jeweils durch ein kollektives Risikomodell beschreiben lassen. Daher kann der Gesamtverlust L folgendermaßen identifiziert werden:

$$L = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_2} X_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{N_3} X_i^{(3)}$$

Für das Modell gelten folgende Annahmen:

Annahme 4.1 (Annahmen Drei-Subportfolio Fall).

- (i) Die einzelnen Subportfolioverluste sind $L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^{(1)}$ und L_2, L_3 analog.
- (ii) Die zufälligen Schadenzahlen N_i sind poissonverteilt mit Intensität λ_i , $i = 1 \dots 3$.
- (iii) $(X_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}, N_j$ sind unabhängig für $j \in \{1, 2, 3\}$.
- (iv) Die zufälligen Schadenhöhen $(X_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ sind unabhängig und identisch verteilt nach einer Schadenhöhenverteilung F_1 . Analog sind $(X_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ iid nach F_2 und $(X_n^{(3)})_{n \in \mathbb{N}}$ iid nach F_3 .
- (v) Die Schadenhöhenverteilungen sind Mischungen aus einer logNV für das Zentrum und einer GPD für den Tail.

Bemerkung 4.2 (Modellierung von Abhängigkeiten).

Analog zum Zwei-Subportfolio Fall wird eine Copula zwischen den Schadenhöhen eingesetzt. Die zufälligen Schadenzahlen N_1, N_2, N_3 werden als unabhängig angenommen. Bei dieser Methode wird für die Schätzung vorausgesetzt, daß die abhängigen Schadentripel in der Form

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$$

gegeben sind.

Bemerkung. Im trivariaten Fall hängen die Gumbel- und HRT-Copula weiterhin von nur einem (eindimensionalen) Parameter ab. Dies hat den Nachteil, daß eine Feinjustierung der Abhängigkeitsstruktur nicht möglich ist. Bei der Verwendung der Gauß-Copula tritt dieses Problem nicht auf, da diese Copula von mehreren Parametern abhängt. Dieser Effekt wird umso deutlicher, je höher die Dimension ist.

Es ist zu erwarten, daß auch im Drei-Subportfolio Fall mittels Copulas eine Bandbreite von Value at Risk möglich ist, die in etwa den komonotonen und unabhängigen Verlustfall abdeckt. In dem Beispiel zu 4.5 werden in etwa gleiche Parameter für die Randverteilungen wie im Zwei-Subportfolio Fall gewählt. Durch die Hinzunahme eines Subportfolios ist anzunehmen, daß eine höhere Differenz zwischen dem VaR komonotoner und unabhängiger Verluste als im Zwei-Subportfolio Fall auftritt, d.h. $\text{opVaR}_{\text{comon}} / \text{opVaR}_{\text{ind}}$ wird größer.

4.2. Trivariate Copulas

Bemerkung 4.3. Eine Funktion $C : [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$ ist eine Copula, falls gilt

- (1) $C(\mathbf{u}) = 0$, falls eine Komponente von $\mathbf{u}$ identisch 0 ist.
- (2) $C(u, 1, 1) = u$, $C(1, v, 1) = v$, $C(1, 1, w) = w$ für alle $u, v, w \in [0, 1]$.
- (3) Für alle $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in [0, 1]^3$ mit $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$, $z_1 \leq z_2$ und $Q :=]x_1, x_2] \times]y_1, y_2] \times]z_1, z_2]$ ist das zugehörige C -Maß nicht negativ, d.h.

$$V_C(Q) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} V_C(Q) = & C(x_2, y_2, z_2) - C(x_1, y_2, z_2) - C(x_2, y_1, z_2) - C(x_2, y_2, z_1) \\ & + C(x_1, y_1, z_2) + C(x_1, y_2, z_1) + C(x_2, y_1, z_1) - C(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Beispiel 4.4 (Trivariate Copulas). Die vier Copulas Gauß, Gumbel, Clayton und HRT haben für $d = 3$ folgende Darstellung:

Gauß-Copula Die Gauß-Copula kann mittels trivariater Normalverteilung $N_{(\mathbf{0}, \Sigma)}$, $\Sigma = ((1, \rho_1, \rho_2)^t, (\rho_1, 1, \rho_3)^t, (\rho_2, \rho_3, 1)^t)$ dargestellt werden. Beachte, daß Σ für $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \Theta_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}$ positiv definit ist.

$$C_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}(u, v, w) = N_{(\mathbf{0}, \Sigma)}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(w))$$

Gumbel-Copula

$$C_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u, v, w) = \exp \left(- \left[(-\log u)^{\vartheta} + (-\log v)^{\vartheta} + (-\log w)^{\vartheta} \right]^{1/\vartheta} \right), \quad \vartheta \geq 1$$

Clayton-Copula

$$C_{\vartheta}^{\text{Cl}}(u, v, w) = \left(u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} + w^{-\vartheta} - 2 \right)^{-1/\vartheta}, \quad \vartheta > 0$$

HRT-Copula

$$C_{\vartheta}^{\text{HRT}}(u, v, w) = \bar{C}_{\vartheta}^{\text{Cl}}(1 - u, 1 - v, 1 - w), \quad \vartheta > 0$$

Die rechte Seite kann mit der Darstellung $\bar{C}(u, v, w) = 1 - u - v - w + C(u, v, 1) + C(u, 1, w) + C(1, v, w) - C(u, v, w)$ ausgeschrieben werden. Für dieses Kapitel reicht jedoch die hier verwendete implizite Darstellung.

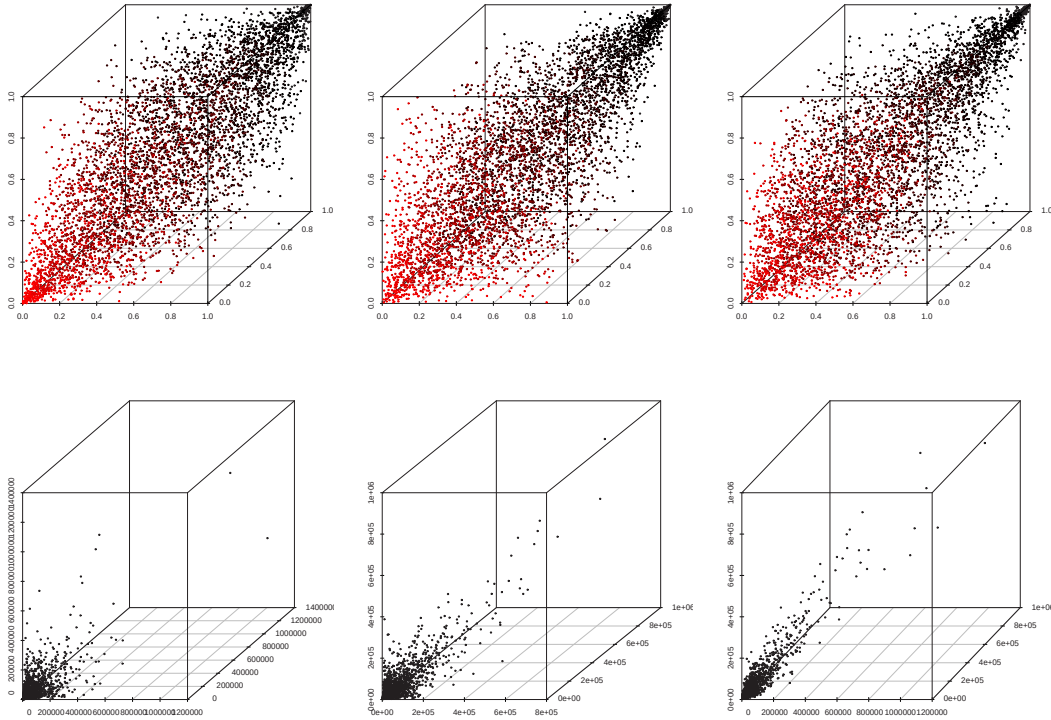


Abbildung 4.1. 5000 simulierte Daten trivariater Copulas. Obere Reihe. Gauß (links) mit Korrelation $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (0.7, 0.7, 0.7)$; Gumbel (Mitte) mit Parameter $\vartheta = 1.97$ und HRT (rechts) mit $\vartheta = 1.94$. Untere Reihe. Bivariate Verteilungen mit den Randverteilungen $F_1 = F_2 = F_3$ und den darüberstehenden Copulas. Dabei ist F_i eine Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(\mu = 8.5, \sigma = 1.5)$ und $\text{GPD}(\xi = 0.2, u = 5 \cdot 10^4, \beta = 7 \cdot 10^4)$ mit $F(u_i) = 0.9$.

Bemerkung 4.5. Die drei oberen Plots in Abbildung 3.1 stellen die Realisationen möglicher Abhängigkeitsstrukturen der Schadenhöhen im Drei-Subportfolio Fall dar. In allen drei Fällen verfügen die drei Daten in etwa über die empirische Korrelation 0.7 (d.h. Korrelationsmatrix mit '1' auf der Hauptdiagonalen, ansonsten stets 0.7). Die drei unteren Plots sind Realisationen trivariater Verteilungsfunktionen aus den darüberstehenden Copulas und den Randverteilungen F_1, F_2, F_3 . Die Randverteilungen sind gemäß der Modellannahmen Mischungen aus $\log\text{NV}$ und GPD . Mögliche Abhängigkeiten von zwei oder allen drei Subportfolios im hohen Schadenbereich sind hier wesentlich schwerer auszumachen, da nur wenige gemeinsame extreme Schäden vorhanden sind (auch durch Drehen des 'Würfels' um 300° ist nicht mehr zu erkennen). Das linke Bild zeigt Realisationen der Schadenhöhenverteilung F mit der Gauß-Copula. Es scheint, daß die Schäden der drei Subportfolios im extremen Schadenbereich unkorreliert sind. Das mittlere und rechte Bild mit der Gumbel- bzw. der HRT-Copula zeigen dagegen, daß die extremen Schäden nicht unabhängig voneinander eintreten. Beim rechten Scatterplot scheint sogar eine gewisse Abhängigkeit aller drei Subportfolios im hohen Schadenbereich zu bestehen (Als Beispiel könnte das eingespeiste Virus-Programm aus Kapitel 4, Anfang angeführt werden.).

4.3. Kalibrierung der Copulas

Es werden geeignete Verfahren zur Anpassung der Gauß-, Gumbel- und HRT vorgestellt. Die Parameter der Gauß-Copula können mittels Kendalls tau geschätzt werden. Bei der Maximum Likelihood Schätzung müssen die drei Copulaparameter simultan geschätzt werden. Mit Kendalls tau ist eine einfachere Kalibrierung möglich. In den Copulafamilien HRT und Gumbel ist der eindimensionale Parameter mit Hilfe des Maximum Likelihood Verfahrens zu schätzen. Die Berücksichtigung eines Kendalls tau Algorithmus ist hier nicht sinnvoll, da dies nur die Abhängigkeit zwischen jeweils zwei Subportfolios beschreibt.

4.3.1. Anpassen einer Gauß-Copula mittels Kendalls tau

Kalibrierung. Kalibriere eine Copula mit Hilfe des trivariaten Schadendatensatz

$$(x_1, y_1, z_1) \dots, (x_n, y_n, z_n) \text{ mit } (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3.$$

Als Abhängigkeitsstruktur des dem Datensatz zugrundeliegende zufälligen Schadenhöhenvektors $(X_i^{(1)}, X_j^{(2)}, X_k^{(3)})$ wird die Copulafamilie $\{(C_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}) \mid (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \Theta_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}\}$ unterstellt. Die Copula hängt von dem unbekannten Parametertripel (ρ_1, ρ_2, ρ_3) ab, welches aus dem Datensatz zu schätzen ist. Die drei Parameter ρ_1, ρ_2, ρ_3 lassen sich folgendermaßen interpretieren: Es steht ρ_1 für den Korrelationswert zwischen den Schadenhöhen des ersten und zweiten Subportfolio, ρ_2 für den bez. des ersten und dritten und ρ_3 für den Wert bez. des zweiten und dritten Subportfolios.

Algorithmus 4.6 (Kalibrierung der Gauß-Copula anhand des Schadendatensatzes).

- (1) Ermittle aus dem trivariaten Datensatz der Schäden die drei Datensätze, welche die in Beziehung stehenden Schadenhöhen-Paare von jeweils zwei Subportfolios enthalten (bezeichne diese mit D_1, D_2, D_3).
- (2) Um das Korrelationstripel (ρ_1, ρ_2, ρ_3) zu bestimmen, können getrennt ρ_1, ρ_2 und ρ_3 geschätzt werden.

ρ_1 Es gilt $\rho_\tau(X_i^{(1)}, X_j^{(2)}) = 2/\pi \arcsin \rho_1$. Daher läßt sich mit dieser Identität und dem bivariaten Datensatz D_1 über den Kendalls tau Algorithmus 3.17 ein Schätzer $\hat{\rho}_1$ für ρ_1 bestimmen.

ρ_2 bzw. ρ_3 Analog mit Datensatz D_2 bzw. Datensatz D_3 .

- (3) Setze die Schätzer für ρ_1, ρ_2, ρ_3 in die Korrelationsmatrix Σ ein.

4.3.2. Anpassen einer Copula mittels Maximum Likelihood Schätzer

Transformation. Der Maximum Likelihood Schätzer zur Schätzung eines Copulaparameters benötigt eine Copula-Dichte sowie einen Datensatz mit Realisationen von unabhängig, dreidimensional gleichverteilten Zufallsvariablen. Die Schadendaten seien deshalb analog zu Überlegung 3.21. transformiert und besitzen so die benötigte Eigenschaft.

Lebesgue Dichten. Die Dichte der trivariaten Gauß-Copula $C_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}$ berechnet sich über die Identität (3.3). Setze $\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ und $x_i := \Phi^{-1}(u_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Die Dichte lautet:

$$c_{\vartheta}^{\text{Ga}}(\mathbf{u}) = \frac{e^{-1/2 \mathbf{x}^t \Sigma^{-1} \mathbf{x}}}{|\Sigma|^{1/2} e^{-1/2 \sum_{i=1}^3 x_i^2}} \quad \text{mit } \mathbf{u} \in (0, 1)^3.$$

Die Umkehrmatrix zur Korrelationsmatrix Σ lautet

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det \Sigma} \begin{pmatrix} \rho_3^2 - 1 & \rho_1 - \rho_2 \rho_3 & \rho_2 - \rho_1 \rho_3 \\ \rho_1 - \rho_2 \rho_3 & \rho_2^2 - 1 & \rho_3 - \rho_1 \rho_2 \\ \rho_2 - \rho_1 \rho_3 & \rho_3 - \rho_1 \rho_2 & \rho_1^2 - 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\det \Sigma = 1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3.$$

Die Dichte der HRT-Copula berechnet sich wegen $\hat{c}(\mathbf{u}) = c(\mathbf{1} - \mathbf{u})$ für $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$ (Bemerkung 3.9) aus der Dichte der Clayton-Copula. Die Dichte der Gumbel- bzw. Clayton-Copula lauten:

$$C_{\vartheta}^{\text{Cl}} \quad c_{\vartheta}^{\text{Cl}}(u, v, w) = (1 + \vartheta)(1 + 2\vartheta)(u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} + w^{-\vartheta} - 2)^{-1/\vartheta-3} (u v w)^{-\vartheta-1}$$

$$C_{\vartheta}^{\text{Gu}} \quad \text{Setze } f_{\vartheta} := (-\ln u)^{\vartheta} + (-\ln v)^{\vartheta} + (-\ln w)^{\vartheta} \text{ sowie } h_{\vartheta} := 1 + (\vartheta - 1)f_{\vartheta}^{-1/\vartheta} \\ \text{und } C_{\vartheta} := C_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u, v, w).$$

Dann berechnet sich die Dichte wie folgt:

$$c_{\vartheta}^{\text{Gu}}(u, v, w) = (-\ln u \ln v \ln w)^{\vartheta-1} 1/(uvw) C_{\vartheta} f_{\vartheta}^{3/\vartheta-3} \\ \times \left([1 + (2\vartheta - 2)f_{\vartheta}^{-1/\vartheta}] h_{\vartheta} + (\vartheta - 1)f_{\vartheta}^{-2/\vartheta} \right).$$

Maximum Likelihood Gleichung. Es sei c_{ϑ} die Dichte der Copula und $w_i := (w_{i,1}, w_{i,2}, w_{i,3})$ mit $w_i \in (0, 1)^3$, $i = 1 \dots n$ die transformierten Daten. Dann ist der Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$ das Maximum der folgenden log-Likelihood Gleichung

$$\ln L(\vartheta; w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n \ln c_{\vartheta}(w_i).$$

Mit Hilfe der Dichte und den transformierten Daten kann numerisch das Maximum bestimmt werden. Bei der HRT- und Gumbel-Copula funktioniert dies wie im bivariaten Fall. Bei der Gauß-Copula ist zu beachten, daß die zugehörige Korrelationsmatrix $\hat{\Sigma}$ des Ergebnistripels $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\rho}_3)$ erklärt sein muß, was äquivalent zu $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \Theta_{(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}^{\text{Ga}}$ ist. Das ist z.B. durch simultane Vorgabe von ρ_1, ρ_2 aus dem Bereich $(-1, 1)$ sowie ρ_3 aus dem von ρ_1, ρ_2 begrenzten Intervall

$$(-[(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)]^{1/2} + \rho_1 \rho_2, [(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)]^{1/2} + \rho_1 \rho_2)$$

zu erreichen.

Algorithmus 4.7 (ML-Verfahren für Gauß, HRT- bzw. Gumbel-Copula).

- (1) Bestimme die transformierten Daten $(w_{i,1}, w_{i,2}, w_{i,3}) \in [0, 1]^3$ gemäß Überlegung 3.21.
- (2) Berechne die Dichte c_ϑ von C_ϑ .
- (3) Bestimme numerisch den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$.

Es sind die möglichen Verfahren zur Anpassung einer Copula aus der Familie Gauß, Gumbel bzw. HRT besprochen. Es bleibt ein effizienter Algorithmus zur Identifizierung derjenigen Copula, die sich am besten an die Abhängigkeitsstruktur der Daten anpaßt.

4.4. Trivariate Goodness of Fit Statistik

Es werde angenommen, daß die Randverteilungen und Copula angepaßt sind. Der zugrundeliegende trivariate Schadendatensatz sei analog zu Überlegung 3.21 angemessen transformiert. Daher können die transformierten Daten $(w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}), \dots, (w_{n,1}, w_{n,2}, w_{n,3})$ als Realisationen dreidimensional gleichverteilter unabhängiger ZV angesehen werden.

Trivariater Chi-Quadrat Teststatistik basierend auf PIT

Die Probability Integral Transformation ('PIT') ist eine populäre Maßnahme in höheren Dimensionen zur Transformation abhängiger Zufallsvariablen zu *iid* gleichverteilten ZV. Daraus läßt sich dann eine effiziente goodness of fit Statistik gewinnen. Die PIT Methode wird z.B. in Breymann et al. (2003) und Rosenblatt (1952) für eine beliebige Dimension erklärt und angewendet.

Die Testdaten werden bei diesem Verfahren zunächst mit PIT transformiert. Danach werden diese in einer Chi-Quadrat Teststatistik eingesetzt. Diese Statistik ist nach Rosenblatt (1952) konsistent. Der Grenzwert der Statistik ist in der Literatur jedoch nicht zu finden, so daß auch hier kein vollständiger Test angegeben werden kann.

Schritt 1: Transformation zu *iid* gleichverteilten ZV

Es sei $(X_1, \dots, X_d)$ ein Zufallsvektor mit absolut stetiger Verteilung F . Es sei $(x_1, \dots, x_d)$ eine Realisation des Zufallsvektors. Dann lautet die Transformation T mit

$$T : \mathbf{R}^d \longrightarrow [0, 1]^d, \quad T(x_1, x_2, \dots, x_d) = (z_1, z_2, \dots, z_d)$$

folgendermaßen:

$$\begin{aligned} z_1 &= P\{X_1 \leq x_1\} \\ z_2 &= P(X_2 \leq x_2 \mid X_1 = x_1) \\ z_3 &= P(X_3 \leq x_3 \mid X_2 = x_2, X_1 = x_1) \\ &\vdots \\ z_d &= P(X_d \leq x_d \mid X_{d-1} = x_{d-1}, \dots, X_1 = x_1). \end{aligned}$$

Dazu gilt der folgende Satz:

Satz (Rosenblatt 1958). *Der Zufallsvektor $(Z_1, \dots, Z_d)$ mit $(Z_1, \dots, Z_d) = T(X_1, \dots, X_d)$ besitzt als Verteilung eine multivariate Gleichverteilung auf dem d -dimensionalen Einheitswürfel. Zusätzlich sind $Z_1, Z_2, \dots, Z_d$ iid gleichverteilt auf $[0, 1]$.*

Als Anwendung des Satz berechne die Transformation T für eine dreidimensionale Copula C . Es sei (u, v, w) ein Datentripel des Datensatzes $(w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}), \dots, (w_{n,1}, w_{n,2}, w_{n,3})$. Die einzelnen Komponenten des Datensatzes stammen von gleichverteilten ZV U, V, W mit gemeinsamer (hypothetischer) Copula C . Die Transformation T des Vektors (u, v, w) lautet:

$$\begin{aligned} z_1 &:= P\{U \leq u\} = u \\ z_2 &:= P(V \leq v \mid U = u) = \frac{\partial C(u, v, 1)}{\partial u} \\ z_3 &:= P(W \leq w \mid U = u, V = v) = \frac{\partial^2 C(u, v, w)}{\partial v \partial u} \bigg/ \frac{\partial^2 C(u, v, 1)}{\partial v \partial u} \end{aligned}$$

Die Rechnungen lassen sich mit den Methoden wie in Beweis zu Satz 3.20 nachprüfen. Nach Rosenblatt sind Z_1, Z_2, Z_3 mit $(Z_1, Z_2, Z_3) = T(U, V, W)$ **unabhängig** und **gleichverteilt**. In Breymann et al. (2003) wird die PIT für Copulas für allgemeine d -dimensionale Copulas formuliert.

Schritt 2: Trivariate Chi-Quadrat Teststatistik

Zerlege den Einheitswürfel in N^3 Zellen. Das Maß des Quaders Q_{ijk} mit

$$Q_{ijk} := \left] \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right] \times \left] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \times \left] \frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right], \quad i, j, k = 1..N.$$

unter der Verteilung von $T(U, V, W)$ ist $1/N^3$, falls die “wahre“ Copula von (U, V, W) gerade C ist.

Die absolute Häufigkeit des Datensatzes $\{(T(w_{i,1}, w_{i,2}, w_{i,3})) \mid i = 1 \dots n\}$ in Q_{ijk} wird mit ν_{ijk} bezeichnet. Ist C die wahre Copula von (U, V, W) , so stammen die transformierten Realisationen des Datensatzes von iid dreidimensional gleichverteilten ZV. Daher sollte die absolute Häufigkeit in jeder Zelle gleich sein und in etwa n/N^3 betragen.

Die Teststatistik X^2 lautet:

$$X^2 = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{(\nu_{ijk} - \frac{n}{N^3})^2}{n/N^3}. \quad (4.1)$$

Da die asymptotische Verteilung der X^2 -Statistik für $n \rightarrow \infty$ in der Literatur nicht zu finden ist, kann der Vergleich der Anpassungsqualität verschiedener Copulas nur über den Wert X^2 erfolgen.

Beispiel 4.8 (PIT für Gumbel- und Gauß-Copula).

Es seien u, v, w Realisationen der ZV U, V, W mit gemeinsamer Copula C . Im Falle der Gumbel-Copula sind die transformierten Daten leicht über die partiellen Ableitungen zu berechnen. Bei der Gauß-Copula ist die Konstruktion von Gauß-Copula Realisationen mit der Cholesky Zerlegung hinzuzuziehen. Es gilt:

$$C_{\vartheta}^{\text{Gu}} \quad \text{Bezeichne } f(u, v, w) := (-\log u)^{-\vartheta} + (-\log v)^{-\vartheta} + (-\log w)^{-\vartheta}$$

Die transformierten Daten lauten:

$$\begin{aligned} z_1 &= u \\ z_2 &= C(u, v, 1) \cdot f(u, v, 1)^{1/\vartheta-1} \cdot (-\log u)^{a-1} 1/u \\ z_3 &= \frac{C(u, v, w) \cdot f(u, v, w)^{2/\vartheta-1} \cdot (1 + (a-1) f(u, v, w)^{-1/\vartheta})}{C(u, v, 1) \cdot f(u, v, 1)^{2/\vartheta-1} \cdot (1 + (a-1) f(u, v, 1)^{-1/\vartheta})} \end{aligned}$$

C_{Σ}^{Ga} Bezeichne $X := \Phi^{-1}(U)$, $Y := \Phi^{-1}(V)$, $Z := \Phi^{-1}(W)$. Dann ist die Verteilung von (X, Y, Z) gemäß der Definition der Gauß-Copula eine trivariate Normalverteilung mit Mittelwertsvektor $\mathbf{0}$ und Korrelationsmatrix Σ . Es seien U_1, U_2, U_3 unabhängige und standardnormalverteilte ZV. Nach der Definition multivariater Normalverteilungen lassen sich die drei Variablen mittels Cholesky Zerlegung schreiben als (vgl. Algorithmus 3.23):

$$\begin{aligned} X &= U_1 \\ Y &= \rho_1 U_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} \cdot U_2 \\ Z &= \rho_2 \cdot U_1 + \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \cdot U_2 + \sqrt{1 - \rho_2^2 - \frac{(\rho_3 - \rho_1 \rho_2)^2}{1 - \rho_1^2}} \cdot U_3 \end{aligned}$$

Über diese Darstellungen ist die Transformation zu ermitteln. Dabei bezeichne $x := \Phi^{-1}(u)$, $y := \Phi^{-1}(v)$, $z := \Phi^{-1}(w)$. Die transformierten Daten lauten:

$$\begin{aligned} z_1 &= u \\ z_2 &= P(Y \leq y \mid X = x) \stackrel{\text{Darst. } X, Y}{=} \Phi\left(\frac{y - \rho_1 x}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}\right) \\ z_3 &= P(Z \leq z \mid X = x, Y = y) \stackrel{\text{Darst. } X, Y, Z}{=} \Phi\left(\frac{z - \rho_2 x - \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1^2} (y - \rho_1 x)}{\sqrt{1 - \rho_2^2 - \frac{(\rho_3 - \rho_1 \rho_2)^2}{1 - \rho_1^2}}}\right) \end{aligned}$$

Das Beispiel mit der Normalverteilung ist in Rosenblatt (1952) für den allgemeinen d -dimensionalen Fall formuliert. Es wird an den beiden Beispielen deutlich, daß der Aufwand zur Anwendung des Chi-Quadrat Tests mit der Dimension deutlich steigt.

Algorithmus 4.9 (Kalibrierung der Schadenhöhenverteilung im Drei-Subportfolio Fall). Die operationellen Schadentripel sind nach Modellannahme in der Form $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ gegeben. Die unteren Erfassungsgrenzen werden mit $l_1, l_2, l_3 > 0$ bezeichnet.

- (1) Passe an die Schadenhöhen der drei Subportfolios eine Randverteilung mit den Methoden aus Kapitel 2 an (F_1, F_2, F_3) .
- (2) Wähle geeignete Copulafamilien zur Kalibrierung der Abhängigkeitsstruktur der drei Subportfolios aus (Gauß, Gumbel, HRT aus Beispiel 4.4).
- (3) Transformiere die Schadentripel geeignet zu Realisationen unabhängiger dreidimensional gleichverteilter ZV analog zu Überlegung 3.21.
- (4) Kalibriere eine Gauß-Copula anhand des Datensatz z.B. mittels Kendalls tau (Algorithmus 4.6). Die beiden anderen Copulas werden über den transformierten Datensatz und dem Maximum Likelihood Schätzverfahren kalibriert (Algorithmus 4.7).
- (5) Berechne die Anpassungsgüte der fixierten Copula an die transformierten Schadenpaare. Wähle dafür den Chi-Quadrat Test.
- (6) Wähle die Copula mit der besten Anpassungsgüte aus (C) . Die angepaßte Schadenhöhenverteilung lautet dann

$$F(x, y, z) = C(F_1(x), F_2(y), F_3(z)) \cdot 1_{\{x \geq l_1, y \geq l_2, z \geq l_3\}}.$$

Die Verfahren zur Anpassung einer Schadenhöhenverteilung an einen Datensatz sind dargestellt worden. Die Berechnung des Value at Risk bez. d Subportfolios ist bereits in Kapitel 3 niedergelegt. Daher kann ein abschließendes Beispiel präsentiert werden.

4.5. Bewertung operationeller Risiken. Beispiel

Modellkalibrierung an Schadendaten

Es seien 5000 abhängige Schadendaten ermittelt. Zu der Abhängigkeitsstruktur der Tripel ist eine geeignete Copula zu bestimmen. Dabei werden die Kandidaten auf die Familie der Gauß- und Gumbel-Copula eingeschränkt. Die Schadentripel seien mit den folgenden (angepaßten) Schadenhöhenverteilungen transformiert:

- Subportfolio 1** $X^{(1)}$ Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(8, 1.5)$ auf $[2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^4]$ und $\text{GPD}(0.2, 4 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4)$ auf $(4 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $4 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der Schadenhöhenverteilung F_1 .
- Subportfolio 2** $X^{(2)}$ Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}(8.4, 1.4)$ auf $[2 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^4]$ und $\text{GPD}(0.2, 3 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4)$ auf $(3 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $3 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der Schadenhöhenverteilung F_2 .
- Subportfolio 3** F_3 sei eine Mischung aus (bedingter) $\log\text{NV}$ und GPD mit den gleichen Parameterwerten wie Subportfolio 2.

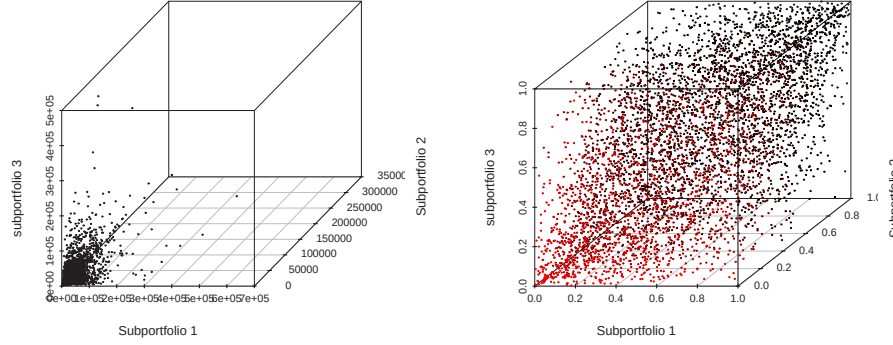


Abbildung 4.2. (Links) Scatterplot der tausend abhängigen Schäden. (Rechts) Scatterplot des transformierten Datensatzes, an den eine Copula angepaßt wird. Beide Plots sprechen gegen eine upper tail dependence Abhängigkeitsstruktur.

Das Tripel des Kendalls tau Schätzer (t_1, t_2, t_3) lautet $(t_1, t_2, t_3) = (0.2, 0.261, 0.356)$. Es ergibt sich für die Gauß-Copula über den Kendalls tau Algorithmus $\hat{\vartheta} = (0.317, 0.409, 0.489)$ und für die Gumbel-Copula über den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta} = 1.3$.

Die Realisationen aus $(0, 1)^3$ werden mit der Probability Integral Transform Methode behandelt, d.h. die Daten werden mit der geschätzten Gauß- bzw. Gumbel-Copula nach Beispiel 4.8 transformiert. Es ergeben sich die folgenden Korrelationsmatrizen bez. Kendalls tau für die Gauß- bzw. Gumbel-Copula :

$$\rho_{\tau}^{\text{Ga}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.018 & 0.001 \\ 0.018 & 1 & -0.018 \\ 0.001 & -0.018 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_{\tau}^{\text{Gu}} = \begin{pmatrix} 1 & -0.045 & 0.087 \\ -0.045 & 1 & 0.155 \\ 0.087 & 0.155 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Korrelationsmatrizen sprechen für die Gauß-Copula, da aus der PIT insbesondere folgt, daß die transformierten Realisationen von paarweise unabhängigen Zufallsvektoren stammen. Im Anschluß wird die Chi-Quadrat Teststatistik X^2 (4.1) für $N = 8, 9, 10$ berechnet. In diesen Fällen sind die Zellen des Einheitswürfels angemessen belegt.

	$C_{(0.317, 0.409, 0.489)}^{\text{Ga}}$	$C_{1.3}^{\text{Gu}}$	N
X^2	518.75	1034.23	8
X^2	745.69	1244.91	9
X^2	985.6	1552.8	10

Die Abhängigkeitsstruktur des Datensatzes wird am besten von der $C_{(0.317, 0.409, 0.489)}^{\text{Ga}}$ wiedergegeben. Das stimmt mit der tatsächlichen Abhängigkeitsstruktur zur Erzeugung des abhängigen Datensatzes ($C_{(0.3, 0.4, 0.5)}^{\text{Ga}}$) fast überein.

Simulation und Bestimmung des VaR

Es wird der Value at Risk zu einem Gesamtverlust L mit $L = L_1 + L_2 + L_3$ gemäß der Modellannahme des Drei-Subportfolio Fall näherungsweise durch Simulation von L berechnet. Die Randverteilungen der Subportfolios seien ermittelt. Als Abhängigkeitsstruktur zwischen den Schadenhöhen verwende die einparametrische HRT- bzw. Gumbel-Copula. Als dritte Struktur wende die dreiparametrische Gauß-Copula an. Hier sind alle drei Parameter gleich zu wählen ($\rho := \rho_i, i = 1, 2, 3$). Simuliere mit den Copulas den Value at Risk zu 8 verschiedenen Copulaparametern. Damit soll eine Bandbreite möglicher Value at Risk nachgewiesen werden, die nach Möglichkeit den unabhängigen und komonotonen Verlust in etwa abdeckt. Die 8 verschiedenen Copulaparameter der drei Copulas werden dabei so gewählt, daß die Kendalls tau Matrix für die drei Copulas übereinstimmt (Daher sind die drei Parameter der Gauß-Copula stets identisch zu wählen.). Der Value at Risk wird zu 10 Niveaustufen $0.99, 0.991, \dots, 0.999$ simuliert. Die Randverteilungen werden folgendermaßen gewählt:

Subportfolio 1 $N_1 \sim Poi(45)$

$X^{(1)}$ Mischung aus (bedingter) $\log NV(8.5, 1.4)$ auf $[2 \cdot 10^3, 6.5 \cdot 10^4]$ und $GPD(0.8, 6.5 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4)$ auf $(6.5 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $6.5 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der Schadenhöhenverteilung.

Subportfolio 2 $N_2 \sim Poi(30)$

$X^{(2)}$ Mischung aus (bedingter) $\log NV(8.5, 1.4)$ auf $[2 \cdot 10^3, 5.5 \cdot 10^4]$ und $GPD(0.7, 5.5 \cdot 10^4, 7.5 \cdot 10^4)$ auf $(5.5 \cdot 10^4, \infty)$. Die Schwelle $5.5 \cdot 10^4$ sei das 0.9 Quantil der Schadenhöhenverteilung.

Subportfolio 3 $N_3 \sim Poi(20)$

Die Schadenhöhenverteilung des dritten und zweiten Subportfolios seien identisch, d.h. $X^{(3)} \stackrel{d}{=} X^{(2)}$.

Die Schadenzahlintensitäten ergänzen sich wieder zu einer Gesamtintensität von 95. Die Schadenhöhenparameter (insbesondere die Gestaltenparameter) sind ähnlich wie im bivariaten Fall gewählt. Es ist ein etwas größerer Unterschied zwischen dem komonotonen und unabhängigen Verlustfall als im bivariaten Fall zu erwarten. Das Zusammenwirken der drei Subportfolios im hohen Schadenbereich sollte einen größeren Einfluß auf den Gesamtverlust haben als bei zwei Subportfolios.

Die Simulationenanzahl ist mit $5 \cdot 10^6$ angemessen. Es ergeben sich für den $VaR(L)$ bei den entsprechenden Abhängigkeiten zwischen den Schadenhöhen die folgenden Ergebnisse (in Mio. EUR).

Niveau \ ρ	ind	0.2	0.4	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99	com
0.990	20.5	20.8	21.1	22.4	23.0	23.3	23.6	23.8	24.3	25.4
0.991	22.0	22.2	22.5	24.0	24.6	25.0	25.3	25.5	26.0	27.2
0.992	23.7	23.9	24.2	25.9	26.6	26.9	27.3	27.6	28.2	29.4
0.993	25.9	26.1	26.4	28.1	29.0	29.3	29.8	30.2	30.8	32.2
0.994	28.6	28.8	29.1	31.1	32.1	32.5	32.9	33.5	34.1	35.7
0.995	32.2	32.5	32.8	35.1	36.3	36.7	37.2	37.9	38.7	40.6
0.996	37.5	37.7	38.3	40.9	42.2	42.7	43.4	44.2	45.2	47.3
0.997	45.5	46.2	46.6	49.8	51.2	51.9	52.8	53.8	55.1	57.7
0.998	60.6	61.1	62.2	66.7	67.9	69.3	70.1	71.3	73.4	76.7
0.999	100.5	100.0	102.5	109.8	110.7	115.0	115.7	117.3	120.5	127.4

Niveau \ ϑ	ind	1.14	1.35	1.97	2.44	2.83	3.48	4.94	11.1	com
0.990	20.5	21.7	22.7	23.7	23.8	24.0	24.0	24.1	24.3	25.4
0.991	22.0	23.2	24.3	25.4	25.6	25.7	25.7	25.8	26.1	27.2
0.992	23.7	25.1	26.3	27.5	27.6	27.8	27.8	27.9	28.2	29.4
0.993	25.9	27.4	28.7	30.0	30.3	30.5	30.4	30.5	30.9	32.2
0.994	28.6	30.4	31.8	33.0	33.6	33.8	33.7	33.8	34.2	35.7
0.995	32.2	34.5	36.0	37.7	38.1	38.2	38.0	38.2	38.9	40.6
0.996	37.5	40.2	42.0	43.9	44.1	44.6	44.3	44.8	45.3	47.3
0.997	45.5	49.2	51.4	53.8	54.3	54.7	54.6	54.4	55.4	57.7
0.998	60.6	65.3	68.7	71.6	72.6	72.7	73.1	72.1	73.7	76.7
0.999	100.5	107.2	114.1	118.3	120.9	120.5	121.8	119.6	123.4	127.4

Niveau \ ϑ	ind	0.29	0.71	1.94	2.88	3.66	4.97	7.89	20.2	com
0.990	20.5	21.6	23.0	25.0	24.2	24.3	24.2	24.2	24.1	25.4
0.991	22.0	23.1	24.6	25.7	25.9	26.1	26.0	26.0	25.9	27.2
0.992	23.7	25.0	26.5	27.8	28.0	28.2	28.0	28.1	28.0	29.4
0.993	25.9	27.3	28.9	30.4	30.7	30.9	30.6	30.7	30.6	32.2
0.994	28.6	30.2	32.0	33.7	34.0	34.4	34.0	34.0	33.9	35.7
0.995	32.2	34.2	36.2	38.1	38.6	38.9	38.5	38.6	38.4	40.6
0.996	37.5	39.8	42.1	44.5	44.9	45.4	45.0	45.0	44.7	47.3
0.997	45.5	48.8	51.3	54.4	55.1	55.7	55.1	54.8	55.1	57.7
0.998	60.6	65.5	68.7	72.0	73.5	74.5	73.4	72.5	74.2	76.7
0.999	100.5	108.4	114.1	120.0	120.8	123.3	122.3	121.3	122.6	127.4

Tabelle 4.1. $\text{VaR}_{\text{Niveau}}(L)$. Erste Tabelle: Gauß-Copula; Zweite Tabelle: Gumbel-Copula; Dritte Tabelle: HRT-Copula. Die Extremfälle sind der unabhängige Verlustfall (linke Spalte, “ind”) und der komonotonen Verlustfall (rechte Spalte, “com”). Dazwischen stehen die VaR mit den entsprechenden Copulaparametern. Die gewählten Parameter erzeugen stets eine ‘positive’ Abhängigkeit. Sowohl der VaR mit HRT als auch Gumbel steigt für korrespondierende ‘niedrige’ Copulaparameter schneller an als der VaR mit der Gauß-Copula. Für ‘hohe’ Copulaparameter gleichen sich die drei VaR-Tabellen. In allen drei Tabellen wird der VaR des komonotonen Verlustfall fast erreicht. Die Distanz zum unabhängigen Verlustfall beträgt mittels Copulas bei einem hohen Parameterwert ca. 20%, d.h. $\text{opVaR}_{\text{Copula}} / \text{opVaR}_{\text{ind}} \leq 1.2$.

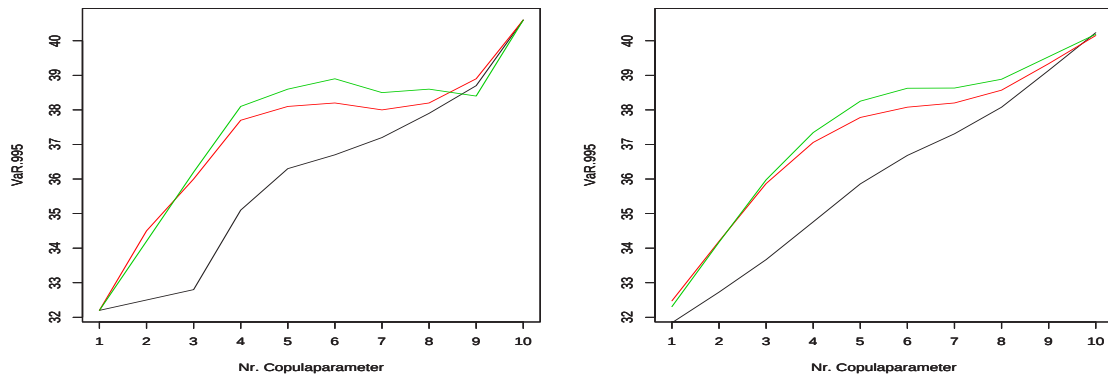


Abbildung 4.3. Vergleich VaR zum Niveau 0.995. Links: 10 Original-VaR.995 aus den drei Tabellen; Die 10 Punkte sind miteinander verbunden. Rechts: Zugehörige *smoothed mean value curve*. Dabei sind Gauß (schwarz), Gumbel (rot), HRT (grün). Deutlich zu sehen ist der im Vergleich zur 'Gauß-Kurve' schnellere Anstieg der 'Gumbel-' und 'HRT-Kurve'. Die Vermutungen bez. Tabelle 4.1 werden nicht widerlegt. Ein deutlicher Unterschied in der Wirkung von Gumbel und HRT ist nicht festzustellen.

Fazit Drei Subportfolio Fall

In dem folgenden Fazit werden nur die Beobachtungen aufgeführt, die sich erst im Drei-Subportfolio Fall ergeben haben. Die einzelnen Punkte des Fazit im Zwei-Subportfolio Fall sind auch für den Drei-Subportfolio Fall gültig.

- (i) Die drei Copulafamilien weisen in den Kalibrierungsmöglichkeiten und den empirischen Voraussetzungen einer Kalibrierung deutliche Unterschiede auf.
 - (a) Bei Copulafamilien mit nur einem (eindimensionalen) Parameter muß eine Copula mittels Maximum Likelihood Schätzer angepaßt werden.
 - (b) Bei der Anpassung einer dreiparametrigen Gauß-Copula ist der Aufwand mittels Kendalls tau deutlich geringer.
- (ii) Der Quotient aus Value at Risk des komonotonen und Value at Risk des unabhängigen Verlustfall beträgt hier in etwa 1.3 und im Zwei-Subportfolio Fall (bei vergleichbaren Parametern) 1.15. Das bedeutet, die relative Distanz beider Grenzfälle vergrößert sich bei Hinzunehmen eines Subportfolios deutlich.

Kapitel 5.

Risikoinventur

Die Risikoinventur ist neben dem datengestützten Teil (Interne Daten, Externe Daten) ein weiterer Bestandteil zur Bewertung operationeller Risiken. Dabei werden von Experten für jedes der nach Geschäftsfeld bzw. Risikokategorie differenzierten Subportfolios einige Kennzahlen geliefert. Das Ziel ist es, mit diesen Informationen für jedes Subportfolios eine Verlustverteilung zu kalibrieren. Dazu wird angenommen, daß sich der Verlust jedes Subportfolio durch ein kollektives Modell der Risikotheorie beschreiben läßt. Die Verlustverteilung eines Subportfolios hängt demnach von den folgenden Parametern ab:

- erwartete Schadenanzahl pro Jahr
- untere Erfassungsgrenze l der Schadenhöhen
- Schwelle u , die normale von extremen Schäden trennt
- Gestaltenparameter ξ und Skalenparameter β der GPD für den Tail der Schadenhöhenverteilung
- μ und σ als Parameter der logNV für das Zentrum der Schadenhöhenverteilung
- $F(u)$ der Funktionswert der Schadenhöhenverteilung an der Stelle u für die Zusammensetzung von Zentrums- und Tailverteilung

Zur Anpassung dieser 7 Parameter stehen die folgenden Informationen für jedes Subportfolio aus der Risikoinventur zur Verfügung:

- erwartete (mittlere) Schadenzahl des kommenden Jahres (λ).
- durchschnittliche Schadenhöhe des nächsten Jahres (m_w).
- maximal erwartete Schadenhöhe in zehn Jahren ($x.q$).
- die untere Erfassungsgrenze (l).

Werden die Subportfolios von 1 bis r durchnummeriert, so ergeben sich als Input die Werte $\lambda_i, m_{w.i}, x_{q.i}, F_i(u_i)$ und l_i für $i = 1 \dots r$.

Daneben sollte für die kommenden Inventuren die zusätzliche Information

- maximal erwartete Schadenhöhe des folgenden Jahres ($x_{\max}$)

für jedes Subportfolio ($x_{\max.i}, i = 1 \dots r$) zur Verfügung stehen. Dadurch könnte mit einer weiteren Strategie ein homogenes Modell für jedes Subportfolio kalibriert werden (diese wird im nächsten Abschnitt gesondert erläutert).

In der nächsten Sektion wird dargelegt, mit welchen Methoden eine Parameteranpassung durchgeführt werden kann. Diese werden durch mathematische Sätze in der dritten Sektion belegt. In der vierten Sektion wird ein abschließender Algorithmus präsentiert, mit dem die Kalibrierung stattfinden kann. Dadurch sind die Anforderungen zur Umsetzung eines LDA Modells (Algorithmus 1.1) auf der Ebene Risikoinventur erfüllt.

5.1. Methodische Überlegungen

Ohne die Information $x_{\max}$

Zunächst ist zu beachten, daß aus zwei Informationen – die durchschnittliche Schadenhöhe des nächsten Jahres sowie die maximal erwartete Schadenhöhe des nächsten Jahres – sechs Parameter der Schadenhöhenverteilung $(\xi_i, u_i, \beta_i, F_i(u_i), \mu_i, \sigma_i)$ ermittelt werden sollen. Die zwei Informationen reichen zur Bestimmung der sechs Parameter nicht aus, so daß zusätzlich die Ergebnisse der Analyse der homogenen Portfoliosichtweise mitverwendet werden müssen. Daneben wird auf mathematische Fakten zurückgegriffen, die sowohl die sechs Parameter als auch die Informationen der Risikoinventur in Beziehung setzen. Dadurch ist es möglich, alle Parameter zu bestimmen.

Vorschläge für die Schwelle. Die Bestimmung einer kritischen Schwelle (u_i) ist für das i te Subportfolio von großer Bedeutung. In den bisherigen Analysen ist das 0.9-Quantil der empirischen Schadenhöhenverteilung stets eine brauchbare Schwelle gewesen. Es gibt daher generell zwei Möglichkeiten zur weiteren Vorgehensweise:

- Es stehen genügend Daten für das i te Subportfolio zur Verfügung. Wähle in diesem Fall u_i als das 0.9 Quantil der empirischen Schadenhöhenverteilung.
- Es sind wenige oder gar keine Daten vorhanden. Hier kann über eine Transformation der Schwelle der **homogenen Portfoliosichtweise** (u) eine geeignete Schwelle für das i te Subportfolio ermittelt werden.

Die Datensätze der HSH und die Angaben in BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) zeigen, daß viele Zellen einer internen Schadenmatrix zu gering belegt sein werden. Daher wird der zweite Fall eher eintreten und es muß dargelegt werden, wie die Transformation aussehen kann. Zunächst ist die Schwelle u als die Schwelle der homogenen Portfoliosichtweise ermittelt worden und damit bekannt. Es ist anzunehmen, daß die Schwelle u maßgeblich von den Schäden desjenigen Subportfolios bestimmt wurde, bei welcher der Risikoinventur nach zu urteilen der Schaden $x_{q,i}$ das Maximum aller $x_{q,i}$ ist. Bezeichne diesen mit $x_{q,\max}$,

$$x_{q,\max} = \max_{i=1\dots r} x_{q,i}$$

und das zugehörige Subportfolio mit $SP_{\max}$. Die Schwelle u_i für das i te Subportfolio kann daher über folgende Transformation der Schwelle u geschätzt werden:

$$u_i = u \cdot \frac{x_{q,i}}{x_{q,\max}}.$$

Für das Subportfolio $SP_{\max}$ wird als Schwelle gerade wieder u ausgegeben.

Vorschläge für den Funktionswert. Der Funktionswert $F_i(u_i)$ zur Zusammensetzung der Schadenhöhenverteilung kann

- bei genügend Daten des i ten Subportfolios mit den Überlegungen zur Schwelle als 0.9 gesetzt werden.
- bei wenigen oder gar keinen Daten mit dem Funktionswert $F(u)$ der **homogenen Sichtweise** identifiziert werden.

Bei wenig Daten ergibt sich somit für Schwelle und Funktionswert des i ten Subportfolios:

$$(u_i, F_i(u_i)) = \left(u \cdot \frac{x_{q,i}}{x_{q,\max}}, F(u) \right).$$

Vorschläge für die Schadenzahl. Die Schadenanzahlintensität setze als die mittlere erwartete Schadenanzahl des nächsten Jahres, d.h. $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$.

Weitere Information. Bei einer Schadenanzahlintensität von λ_i treten in 10 Jahren in etwa $10\lambda_i$ Schäden auf. Der maximal erwartete Schaden in 10 Jahren $x_{q,i}$ entspricht daher in etwa dem $(1 - 1/(10\lambda_i))$ -Quantil der Schadenhöhenverteilung. Mit dieser Überlegung kann der Funktionswert von $x_{q,i}$ folgendermaßen gesetzt werden:

$$(x_{q,i}, F_i(x_{q,i})) = (x_{q,i}, 1 - 1/(10\lambda_i)) \quad (5.1)$$

Die Parameter der GPD und die Parameter der logNV können mit diesen Vorschlägen und den Gleichungen der nächsten Sektion bestimmt werden.

Mit der Information $x_{\max}$

Hier ist eine andere Vorgehensweise zur Bestimmung der Schwelle samt Funktionswert

$$(u_i, F_i(u_i))$$

möglich. Die anderen Parameter werden mit der gleichen Vorgehensweise wie in der vorherigen Teilsektion bestimmt.

Stehen zu wenig historische Schadendaten in der i ten Zelle zur Verfügung, so kann die Schwelle u_i nicht über ein Quantil der empirischen Schadenhöhenverteilung (z.B. das 0.9-Quantil) bestimmt werden. In diesem Fall kann die Information $x_{\max,i}$ genutzt werden. Bei einer Annahme von durchschnittlich λ_i Schäden pro Jahr entspricht $x_{\max,i}$ in etwa dem $(1 - 1/\lambda_i)$ -Quantil der Schadenhöhenverteilung. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden

- Die Anzahl λ_i ist angemessen groß, d.h. in etwa $\lambda_i \geq 10$. In dem Fall ist $x_{\max,i}$ ein α -Quantil mit $\alpha \geq 0.9$ und damit ein plausibler Schwellenwert u_i . Dadurch ist die Schwelle samt Funktionswert für das i te Subportfolio als

$$(u_i, F_i(u_i)) = (x_{\max,i}, 1 - 1/\lambda_i)$$

fixiert.

- Falls λ_i zu klein ist, so ist auch der Wert $x_{\max.i}$ wenig vertrauenswürdig: Ist die erwartete Anzahl an Schäden sehr gering, so kann ein Experte auf wenig historische Informationen zurückgreifen und seine Prognose für $x_{\max.i}$ ist nicht sicher genug. In dem Fall muß die Bestimmung von Schwelle samt Funktionswert wie in der letzten Teilsektion erfolgen.

Die weitere Vorgehensweise verläuft wie im letzten Absatz.

5.2. Mathematische Fakten

Die folgenden Sätze lassen sich auf sämtliche 56 Subportfolios übertragen. Daher sei der Index i für das i te Subportfolio in dieser Sektion weggelassen.

5.2.1. Quantilschätzer

Da die Schadenhöhenverteilung oberhalb der **Schwelle** u als GPD-verteilt angenommen wird, schreibe

$$F(x) = \bar{F}(u)G_{\xi,u,\beta}(x) + F(u), \quad x > u.$$

Die Quantilfunktion zu F läßt sich in diesem Intervall leicht berechnen. Es gilt für $q \in (F(u), 1)$

$$F^{-1}(q) = u + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{1-q}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right). \quad (5.2)$$

5.2.2. GPD Parameter

Die noch zu bestimmenden Parameter der GPD sind ξ, β . Die Schadenhöhenverteilung liegt wegen Annahme eines Power-Tails im Anziehungsbereich einer Fréchet-Verteilung [d.h. $F \in \text{MDA}(H_\xi), \xi > 0$]. Eine wesentliche Eigenschaft der Funktion F ist es, daß die zugehörigen skalierten Exzesse gegen eine GPD($\xi, \xi > 0$) konvergieren.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x \mid X > u\right) = (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Über Darstellungstheoreme der Power-Tail Funktionen folgt die Asymptotik (Embrechts et al., 1997)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{x} = \xi.$$

Das bedeutet, für großes u kann der Parameter β geschätzt werden durch

$$\hat{\beta} = a(u) \approx \xi u. \quad (5.3)$$

Setze für β den Schätzwert $\xi \cdot u$ in die Gleichung (5.2) ein und löse nach ξ auf, so ist für ein gegebenes q -Quantil x_q ($x_q > u$)

$$\hat{\xi} = -\frac{\ln\left(\frac{x_q}{u}\right)}{\ln\left(\frac{1-q}{1-F(u)}\right)}. \quad (5.4)$$

ein Schätzer für ξ . Durch die Gleichung (5.3) kann dann wiederum ein Schätzwert für β ermittelt werden. Um ξ, β zu schätzen, wird nach den bisherigen Überlegungen lediglich die Information $(x_q, F(x_q))$ für ein x_q mit $x_q > u$ benötigt. Das wird z.B. von (5.1) erfüllt. Dadurch sind die Parameter der GPD mit Informationen der Risikoinventur und mit Hilfe der homogenen Portfoliosichtweise angepaßt.

5.2.3. Parameter des Zentrums

Im Zentrum $[l, u]$ wird eine (bedingte) logNV zu den Parametern (μ, σ) angenommen. Eine auf das Intervall $[l, u]$ eingeschränkte logNV besitzt den Erwartungswert

$$E(\log NV) = \exp(\mu + \sigma^2/2) \cdot \frac{\Phi_{(\mu+\sigma^2, s)}(z)|_l^u}{\log NV_{(\mu, \sigma)}(z)|_l^u}.$$

Der unbedingte Erwartungswert weicht in dem Ergebnis wenig davon ab und ist handlicher

$$E(\log NV_{\text{unbed}}) = \exp(\mu + \sigma^2/2).$$

Die GPD(ξ, u, β) hat für $0 < \xi < 1$ den Erwartungswert

$$E(\text{GPD}) = u + \beta/(1 - \xi).$$

Der vollständige Erwartungswert der Verteilung F berechnet sich als

$$E(F) = F(u) \cdot E(\log NV) + \bar{F}(u) \cdot E(\text{GPD})$$

und der Wert m_w der durchschnittlichen Schadenhöhe ist ein Schätzer für $E(F)$. Da unbedingter und bedingter Erwartungswert der logNV nur unwesentlich (im Ergebnis) voneinander abweichen, wähle als modifizierten Erwartungswert für die Schadenhöhenverteilung $E(\tilde{F})$ mit

$$E(\tilde{F}) = F(u) \cdot E(\log NV_{\text{unbed}}) + \bar{F}(u) \cdot E(\text{GPD}). \quad (5.5)$$

Um (μ, σ) berechnen zu können, ist die Identität $\mu = a \cdot \sigma$ für ein $a > 0$ anzunehmen (Dabei ist $a = \mu_h/\sigma_h$ und μ_h, σ_h die Ergebnisse aus der Analyse der homogenen Portfoliosichtweise.). Zusätzlich setze $\mu > 0$ voraus. Die Gleichung (5.5) läßt sich mit $a_1 := F(u)$, $a_2 := \bar{F}(u) \cdot E(\text{GPD})$ und unter der Voraussetzung $E(\tilde{F}) = m_w$ schreiben als

$$m_w = a_1 \cdot \exp\left((a \cdot \sigma) + \frac{\sigma^2}{2}\right) + a_2$$

was zu σ umgeformt gerade

$$\sigma = -a + \left(a^2 + 2\left(\frac{\log(m_w - a_2)}{a_1}\right)\right)^{1/2} \quad (5.6)$$

ergibt. Es ist zu beachten, daß sich nur für $m_w > \exp(-a^2 a_1/2) + a_2$ ein Schätzwert σ berechnen läßt. Im anderen Fall müssen sowohl σ als auch μ von außen gesetzt werden.

5.3. Algorithmus zur Kalibrierung des Modells

Es erfolgt die Schätzung eines kollektiven Modells $(L_i)_{i=1\dots 56}$ mit Hilfe der der Risikoinventur sowie den zusätzlichen Informationen

$$(x_{q,i}, F(x_{q,i})) = (x_{q,i}, 1 - 1/(10\lambda_i)) \quad \text{und} \quad (u_i, F_i(u_i)) = (u \cdot x_{q,i}/x_{q,\max}, F(u)).$$

Dazu werden aus den Daten $m_{w,i}, u_i, x_{q,i}, F_i(u_i), F(x_{q,i})$ die benötigten Parameter der Schadenhöhenverteilung $\xi_i, \beta_i, \mu_i, \sigma_i$ geschätzt. Danach sind alle Parameter (inklusive der Schadenanzahlintensität) zur Beschreibung des iten Verlustes bestimmt.

Parameter der GPD

Folgender Algorithmus dient zur Bestimmung der Parameter ξ_i, β_i .

- Mit der Gleichung (5.4) schätze ξ_i , indem dort die Schwelle mit zugehörigem Funktionswert sowie das Paar $(x_{q,i}, F_i(x_{q,i}))$ eingesetzt werden
- Durch die Gleichung (5.3) schätze β_i aus ξ_i, u_i

Damit sind die Parameter der GPD bestimmt.

Parameter der logNV

Es sind die beiden Parameter (μ_i, σ_i) zu bestimmen. Gehe hier folgendermaßen vor:

- Falls $\xi_i \notin (0, 1)$ verwende für die weitere Analyse die in Kapitel 2 ermittelten Werte des Gesamtbankmodells $(\mu_i, \sigma_i) = (8.6, 1.5)$.
- Im anderen Fall setze den Faktor $a = 6$, den Wert $a_2 = \bar{F}_i(u_i) \cdot E(\text{GPD})$ sowie $a_1 = F_i(u_i)$ und den durchschnittlichen Schaden $m_{w,i}$ in die Gleichung (5.6) ein. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:
 - (i) Der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ, so daß kein Wert berechnet werden kann. Verwende für die weitere Vorgehensweise $(\mu_i, \sigma_i) = (8.6, 1.5)$.
 - (ii) Die Eingabeparameter führen in (5.6) zu einem Schätzwert für den Parameter σ_i . Eingesetzt in die Gleichung $\mu_i = a \cdot \sigma_i$ ergibt sich ein Schätzer für μ_i .

Nach der Durchführung des Algorithmus ist es möglich, die empirische Verlustverteilung für das ite Subportfolio zu bestimmen. Das ist für die 56 Subportfolios gemäß Algorithmus 1.1 auszuführen.

Kapitel 6.

Ein heterogenes Gesamtbankmodell

Die zentrale Aufgabe ist die Fixierung einer Verlustverteilung $F_{L^{(\text{ges})}}$, wobei $L^{(\text{ges})}$ den zufälligen Verlust beschreibt, der sich aus den drei Ebenen **Interne Schadendaten**, **Externe Schadendaten** und **Schätzdaten der Risikoinventur** zusammensetzt. Die Sicherheitsunterlegung gemäß Gleichung (1.1) ist das 0.999 Quantil der Verlustverteilung, d.h.

$$\text{EK}_{\text{LDA}}(\text{OR}) = F_{L^{(\text{ges})}}^{-1}(0.999).$$

Dafür werden die folgenden Bestandteile verwendet:

- Anpassung eines kollektiven Modells der Risikothorie an Schadendaten gemäß Kapitel 2
- Anpassung eines kollektiven Modells der Risikothorie an die Informationen der Risikothorie gemäß Kapitel 5
- Simulation d -dimensionaler abhängiger Zufallsvariablen mit Hilfe einer Gauß-Copula gemäß Kapitel 3

Die Umsetzung des heterogenen Gesamtbankmodells geschieht mit Hilfe von Algorithmus 1.1, an den kurz erinnert sei:

Algorithmus 1.1 (Umsetzung eines LDA Modells).

1. Skalierung der externen Schadendaten.
2. Anpassung eines LDA-Modells für jedes der 56 Subportfolios auf der Ebene Echtdaten (interne und skalierte externe).
3. Anpassung eines homogenen LDA-Modells für jedes der 56 Subportfolios auf der Ebene Schätzdaten der Risikoinventur.
4. Mischung der zwei Ebenen. Das bedeutet Mischung der für jedes Subportfolio angepaßten Verlustverteilungen. Pro Subportfolio ist genau eine Verlustverteilung fixiert.
5. Ermittlung der benötigten Korrelationswerte.
6. Zusammensetzung der Verlustverteilungen mittels der durch die Korrelationswerte fixierten Gauß-Copula.
7. Die geforderte Sicherheitsunterlegung ist das 0.999 Quantil der zusammengesetzten Verlustverteilung, welches durch Simulation bestimmt wird.

Bemerkung 6.2. Der Algorithmus legt die folgenden Aspekte fest:

1. Es werden externe Daten zur Anpassung eines kollektiven Modells an Schadendaten hinzugezogen. Ist das erstens notwendig und zweitens wie kann eine angemessene Skalierung aussehen.

Nach BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) verfügen die Institute i.a. erst über einige hundert Schadendaten und aufgrund der geforderten Aufteilung der Daten auf 56 Subportfolios ist anzunehmen, daß nur in wenigen Zelle ein kollektives Modell kalibriert werden kann. Daher ist die Integration externer Daten notwendig. Eine mögliche Skalierung der externen Daten wird in der nächsten Sektion angegeben.

2. Die internen Daten werden sofort mit den (skalierten) externen Schadendaten zusammengesetzt. Warum werden z.B. nicht die angepaßten Verlustverteilungen der beiden Ebenen gemischt.

Auch hier ist die geringe Anzahl interner Daten der Grund, daß eine Modellkalibrierung basierend auf interne Daten für nur wenige der 56 Zellen möglich ist.

3. Abhängigkeiten werden direkt zwischen den einzelnen Subportfolioverlusten induziert und nicht zwischen den zufälligen Schadenhöhen wie in Kapitel 3 und 4.

Die Handlichkeit des Modells soll im Vordergrund stehen. Falls Abhängigkeiten zwischen den Schadenhöhen der einzelnen Subportfolios induziert werden sollen, so wäre die Zusammensetzung des datengestützten und des auf der Risikoinventur basierenden Anteils wesentlich aufwendiger. Zusätzlich war in Strunk (2006a) deutlich zu sehen, daß beide Methoden – Abhängigkeiten zwischen den Schadenhöhen bzw. Abhängigkeiten zwischen den Einzelverlusten – eine in etwa vergleichbare Wirkung auf den Gesamt-VaR haben.

4. Die Gauß-Copula wird eingesetzt, um die Abhängigkeitsstruktur von 56 Subportfolios abzubilden. Wie kann erstens diese fixiert werden und zweitens existiert eine andere Copulafamilie zur Abbildung der Abhängigkeiten.

Die Gauß-Copula wird fixiert, in dem für alle Paare von Subportfolios eingeschätzt wird, wie stark die beiden korreliert sind. Elliptische Copulas wie die Gauß-Copula verfügen über leicht zu interpretierende Abhängigkeitsparameter, ein breites Spektrum an Abhängigkeiten und eine effiziente Simulation. Daher sollte diese Klasse verwendet werden. Neben der Gauß-Copula steht daher z.B. die t-Copula als Elliptische Copula zur Diskussion. Hier muß jedoch ein Parameter (Anzahl der Freiheitsgrade) mehr als bei der Gauß-Copula geschätzt werden. Zusätzlich verfügt die t-Copula über upper tail dependence, was bei Geldinstituten laut Committee of European Banking Supervisors (2006) i.a. nicht gewünscht ist. Daher verwende eine Gauß-Copula.

In den folgenden Abschnitten wird die Struktur des Algorithmus wiedergegeben und die einzelnen Schritte sowie die Punkte der Bemerkung 6.2 ausführlich erläutert.

6.1. Modellanpassung auf Zellenebene

Das Ziel ist die Anpassung eines homogenen LDA Modells für jede Zelle, das sowohl auf den Informationen der Risikoinventur als auch den Schadendaten basiert. Dazu muß zunächst ein datengestütztes LDA-Modell und ein auf den Informationen der Risikoinventur basierendes LDA-Modell kalibriert werden. Danach sind beide LDA-Modelle zu einem LDA-Modell geeignet zusammenzusetzen.

6.1.1. Anteil der Schadendaten

In einer Zelle können bez. der Datenzahl die folgenden Situationen auftreten:

1. Die Anzahl interner Daten genügt, so daß die Anpassung eines datengestützten homogenen LDA Modells mit den internen Schadendaten erfolgt.
2. Die Anzahl interner Daten ist nicht ausreichend. Es werden (skalierte) externe Daten hinzugefügt, so daß die Anzahl zur Anpassung angemessen ist.
3. Die Gesamtanzahl interner und (skalierter) externer Daten ist nicht ausreichend. In diesem Fall ist keine datengestützte Modellanpassung durchzuführen. Das Modell dieser Zelle besteht daher nur aus den Informationen der Risikoinventur.

Nach BaFin / Deutsche Bundesbank (2005) wird die Anzahl interner Daten auch mittelfristig zu gering sein, um für die Zellen ein auf ausschließlich internen Daten basierendes Modell zu kalibrieren. Die Datenzahl (bei 56 Subportfolios) wird mittelfristig nur zur Kalibrierung eines Modells bei einigen wenigen Zellen ausreichen. Daher wird die erste Situation i.a. nicht zutreffen und die Notwendigkeit zur Integration (skalierter) externer Daten ist deutlich erkennbar. Aus dem gleichen Grund ist es nicht möglich, für jede Zelle und die Ebenen externe und interne Daten separat ein homogenes Modell zu kalibrieren.

Die zweite Situation sollte in den meisten Zellen anzutreffen sein und daher ist die Skalierung näher zu erläutern. Die externen Schadendaten sollen dabei geeignet transformiert und danach wie interne Daten behandelt werden.

Skalierung der Schadenhöhen

In die Transformation fließen die Informationen Bruttoeinkommen / Geschäftsvolumen der externen Datenquelle und des Geldinstituts bez. der jeweiligen Zelle mit ein. Die Art der Transformation ist nicht im Basel II Abkommen festgelegt. Crama, Chapelle et al. (2004) schlagen folgende Skalierung vor

$$x_{\text{scaled}} = x_{\text{raw}} \cdot \left(\frac{\text{GI}_{\text{ext}}}{\text{GI}_{\text{int}}} \right)^a.$$

Dabei bezeichnet x die Schadenhöhe, GI den Bruttoertrag der jeweiligen Zelle und a ist der (geschätzte) Skalierungsfaktor.

Skalierung der Schadenzahlen

Es sei λ der aus allen Schadeneintrittszeiten der externen Daten bezüglich der zu betrachtenden Zelle gewonnene Schätzer der Jahresintensität. Eine geeignete Skalierung von λ

lautet

$$\lambda_{\text{scaled}} = \lambda \cdot s.$$

Der Skalierungsfaktor $s > 0$ kann durch bankinterne Kenngrößen bestimmt werden. Dabei muß geklärt werden, wie sich die Anzahl der Schäden der externen Datenquelle im Vergleich zu dem eigenen Institut verhält.

Nach der Skalierung der externen Daten wird ein homogenes LDA Modell gemäß Kapitel 2 an die Echtdaten (interne und skalierte externe) angepaßt, das den zufälligen Verlust des jeweiligen Subportfolios beschreibt. Bezeichne diesen für die i te Zelle mit $L_i^{(\text{data})}$.

6.1.2. Anteil der Risikoinventur

In Kapitel 5 ist die Anpassung eines homogenen LDA-Modells an die Informationen der Risikoinventur für eine Zelle beschrieben. Dabei sollte der Wert λ ('erwartete Schadenszahl des nächsten Jahres des zu betrachtenden Subportfolios') von den Experten als genügend groß ausgewiesen werden. Dadurch entspräche der maximal erwartete Schaden in 10 Jahren x_q , der als $(1 - 1/(10\lambda))$ -Quantil der (empirischen) Schadenhöhenverteilung angesehen werden kann, auch einem hohen Quantil. Der maximal erwartete Schaden in 10 Jahren sollte einem α -Quantil der Schadenhöhenverteilung mit in etwa $\alpha \geq 0.999$ entsprechen. Das bedeutet, daß $\lambda \geq 10$ gelten sollte. Wird λ von den Experten als deutlich kleiner als 10 angegeben, so sollte überlegt werden, ob in dieser Zelle die Anpassung der Verlustverteilung nur mit Hilfe der Echtdaten stattfindet. Das Ergebnis ist in diesem Schritt die Verteilung des zufälligen Verlustes $L_i^{(\text{inv})}$, die mit Hilfe der Risikoinventur ermittelt wird.

6.1.3. Zusammensetzen der Anteile Echtdaten und Risikoinventur

Zu jeder Zelle sind die Bestandteile $L_i^{(\text{data})}$ und $L_i^{(\text{inv})}$ bestimmt. Die zugehörigen Verteilungen sind bekannt. Im folgenden werden die beiden zufälligen Verluste zu einem gemeinsamen Verlust L_i zusammengesetzt. Dabei soll derjenige Bestandteil in der Verteilung von L_i ein größeres Gewicht einnehmen, welcher vertrauenswürdiger erscheint. Das geschieht z.B. mit Hilfe einer **Mischung** von $L_i^{(\text{data})}$ und $L_i^{(\text{inv})}$ über eine mischende Zufallsvariable M mit

$$M = \begin{cases} 1 & \text{mit W. } p \\ 0 & \text{mit W. } 1 - p \end{cases}$$

Dabei stelle $p \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit bzw. das Vertrauen des Modellierers dar, daß der datengestützte Anteil dem Risikoinventuranteil vorzuziehen ist. Mit diesen Bedingungen kann der Verlust L_i folgendermaßen zusammengesetzt werden:

$$L_i = L_i^{(\text{data})} \cdot 1_{\{M=1\}} + L_i^{(\text{inv})} \cdot 1_{\{M=0\}}.$$

Bei n Realisationen von L_i werden in etwa $p \cdot n$ Realisationen von $L_i^{(\text{data})}$ und $(1 - p) \cdot n$ Realisationen von $L_i^{(\text{inv})}$ genommen. Die Verteilung von L_i berechnet sich zu:

$$P(L_i \leq \cdot) = p \cdot P(L_i^{(\text{data})} \leq \cdot) + (1 - p) \cdot P(L_i^{(\text{inv})} \leq \cdot).$$

6.2. Zusammensetzung der Subportfolioverluste

Für jede Zelle ist eine Zufallsvariable $L_i, i = 1 \dots r$ fixiert, die den Verlust der nach Geschäftsfeld bzw. Risikokategorie differenzierten iten Subportfolios beschreibt. Der Gesamtverlust $L^{(\text{ges})}$ des Instituts setzt sich aus den zufälligen Einzelverlusten zusammen, d.h.

$$L^{(\text{ges})} = \sum_{i=1}^r L_i.$$

Mit Hilfe der Abhängigkeitsstruktur von $(L_1, \dots, L_r)$ kann der zufällige Verlust $L^{(\text{ges})}$ simuliert und dadurch die Sicherheitsunterlegung näherungsweise berechnet werden.

6.2.1. Abhängigkeitsstruktur mittels Gauß-Copula

Die Abhängigkeitsstruktur der Einzelverluste soll durch eine Copula dargestellt werden. Da nach Basel II die Anzahl der abhängigen Einzelverluste $r = 56$ hoch ist, muß die Copula

- handlich sein
- leicht zu interpretierende Parameter besitzen
- ein breites Spektrum an Abhängigkeiten vorweisen können.

Die Gauß-Copula verfügt über diese Eigenschaften. Eine Copula, die auch diese Forderungen erfüllt, wäre z.B. die t-Copula. Jedoch verfügt die t-Copula über upper tail dependence. Dadurch wird angenommen, daß die extremen Schäden nicht unabhängig eintreten, was nach Committee of European Banking Supervisors (2006) wiederum vor der Bankenaufsicht plausibel begründet werden muß. Aus diesen Gründen verwenden die meisten Institute die Gauß-Copula, wenn Abhängigkeiten dargestellt werden sollen.

Die drei Beispiel-Copulas HRT, Gumbel und Gauß besitzen für eine beliebige Anzahl an Dimension einfache Algorithmen zur Simulation. Die HRT- und Gumbel-Copula verfügen jedoch nur über einen Copulaparameter. Daher sind hier Abhängigkeiten mit Hilfe des einen Parameters schwerer zu interpretieren als bei der Gauß-Copula. Dort wird zwischen je zwei Einzelverlusten eine Korrelation eingesetzt und bietet daher eine leichte Erklärung sowie ein breites Spektrum möglicher Abhängigkeiten.

Die Gauß-Copula ist zur Modellierung von Abhängigkeiten geeignet und wird daher als Abhängigkeitsstruktur der Einzelverluste eingesetzt. Eine Kalibrierung anhand Daten ist aufgrund der kurzen Datenhistorie in diesem Fall nicht möglich. Die Korrelationsparameter müssen stattdessen von außen durch Experten gesetzt werden. Für r Subportfolios sind das $r(r-1)/2$ zu bestimmende Parameter. Es ist zu beachten, daß die gewählten Parameter in einem vernünftigen Zusammenhang stehen müssen. Ansonsten ist die Korrelationsmatrix nicht definiert, da sie in diesem Fall nicht positiv definit ist.

Das Ergebnis ist gemäß Basel II die (56×56) Korrelationsmatrix Σ . Der Eintrag Σ_{ij} gibt die Korrelation zwischen dem iten und dem jten Subportfolio an.

Wirkung der Gauß-Copula im bivariaten Fall

Es werden Realisationen der bivariaten Gauß-Copula nach Beispiel 3.10 erzeugt. Dabei ist nur ein Copulaparameter ρ vorzugeben. Dieser stellt die Korrelation der zwei Subportfolios dar.

Ist ρ nahe 1, so bilden die Realisationen von (Subportfolio 1, Subportfolio 2) fast eine Gerade mit Anstieg 1. Dabei wird unterstellt, daß die zufälligen Verluste beider Subportfolios gleichzeitig eintreten (komonotone Verlustfall).

Bei $\rho = 0$ liegen die Punkte willkürlich im Einheitsquadrat zerstreut. Die Verluste werden dabei als unabhängig angenommen, da als Abhängigkeitsstruktur eine Gauß-Copula unterstellt wird (unabhängige Verlustfall).

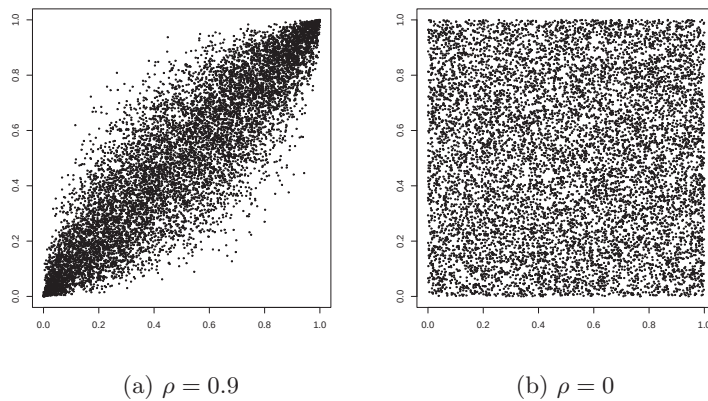


Abbildung 6.1. Scatterplot bivariater Realisationen der Gauß-Copula

Wirkung der Gauß-Copula im trivariaten Fall

Es werden Realisationen der trivariaten Gauß-Copula nach Beispiel 4.4 erzeugt. Hier ist ein Korrelationstriplet (ρ_1, ρ_2, ρ_3) vorzugeben.

Gilt für alle drei Korrelationsparameter $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, so liegen die Punkte im Einheitswürfel willkürlich zerstreut. In diesem Fall wird unterstellt, daß die zufälligen Verluste aller drei Subportfolios unabhängig voneinander eintreten.

Sind alle Korrelationswerte nahe 1, so verlaufen die Realisationen in etwa wie eine Gerade mit Anstieg 1 von $(0, 0, 0)$ zu $(1, 1, 1)$. Bei diesen Korrelationswerten wird angenommen, daß die zufälligen Verluste aller Subportfolios gleichzeitig eintreten, d.h. der komonotone Verlustfall wird damit angenommen.

Ist dagegen nur ein Parameter nahe 1 und die beiden anderen nahe 0, so bilden die Punkte eine Ebene im Einheitswürfel. Das bedeutet, die Verluste der zwei Subportfolios mit dem hohen Korrelationswert treten in etwa gleichzeitig ein und zusätzlich unabhängig von dem 'dritten' Subportfolio.

Es soll noch ein Beispiel genannt werden, so daß die Korrelationsmatrix nicht definiert ist: Falls unterstellt wird, daß z.B. $\rho_1 = \rho_2 = 0.9$ und $\rho_3 = 0$ gilt, so ist die Matrix nicht erklärt. Das hat folgenden Hintergrund: Ist Subportfolio 1 mit Subportfolio 2 und auch mit Subportfolio 3 stark korreliert, so folgt über die Transitivität auch eine starke Korrelation von Subportfolio 2 und Subportfolio 3, d.h. ρ_3 muß auch hoch sein. Daher ist es plausibel, daß in dem Fall die Matrix nicht definiert ist.

So gesehen bedeutet die Aussage “ Σ positiv definit“, daß alle Korrelationswerte in einem vernünftigen Zusammenhang stehen, d.h. die dort angenommenen Abhängigkeiten sind plausibel.

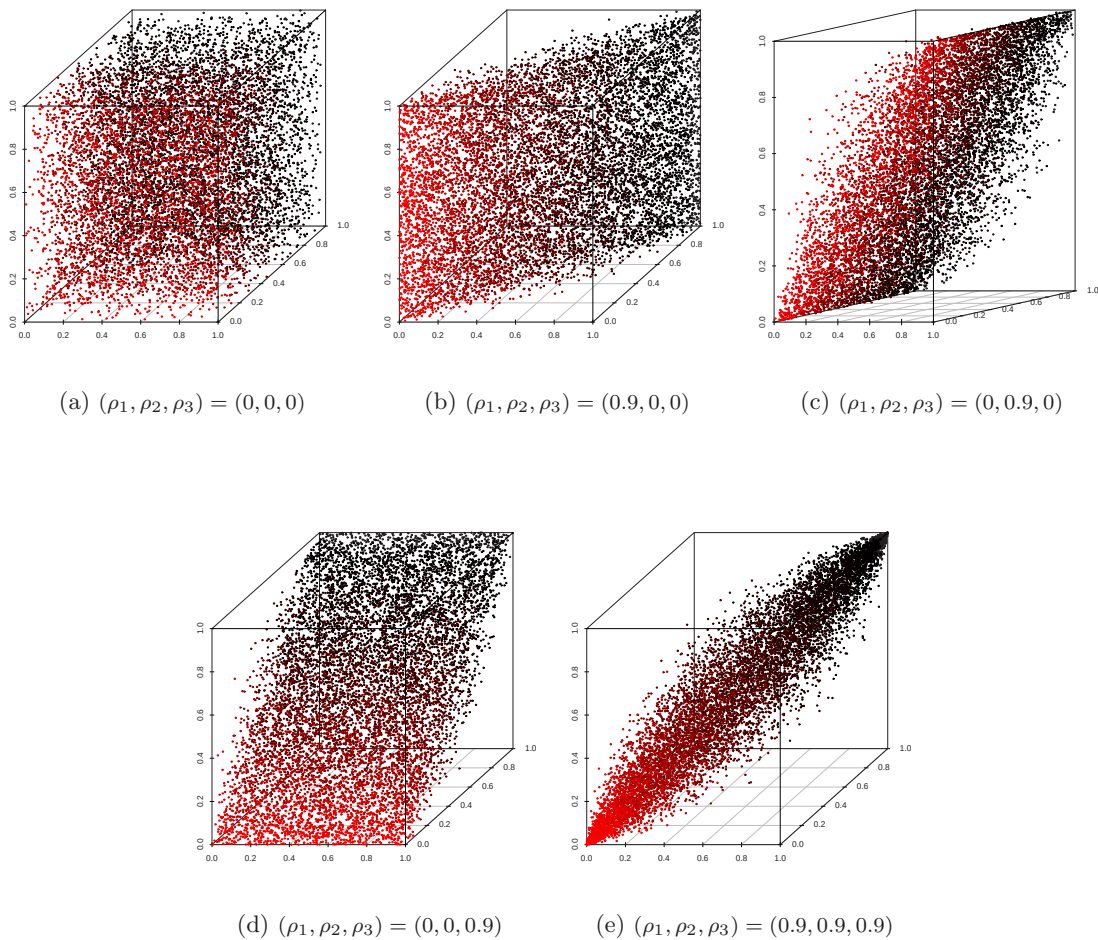


Abbildung 6.2. Scatterplot trivariater Realisationen der Gauß-Copula

6.2.2. Bestimmung des opVaR

Die Verlustverteilungen der Einzelverluste $L_1, L_2, \dots, L_r$ sind fixiert und die zugrundeliegende Abhängigkeitsstruktur ist mit der r -dimensionalen Gauß-Copula C_Σ^{Ga} identifiziert. Es werden Realisationen l von $L^{(\text{ges})}$,

$$L^{(\text{ges})} = \sum_{i=1}^r L_i$$

generiert. Daraus wird die empirische Verteilungsfunktion $F_{L^{(\text{ges})},m}$ berechnet, welche für eine große Anzahl an Realisationen mit der tatsächlichen Verteilung von $L^{(\text{ges})} - F_{L^{(\text{ges})}} -$ in etwa übereinstimmt.

Algorithmus 6.3 (Simulation des Gesamtverlustes bei abhängigen Einzelverlusten).

- (1) Erzeuge Realisation $(u_1, u_2, \dots, u_{56})$ der Gauß-Copula C_Σ^{Ga} nach Algorithmus 3.23.
- (2) Bestimme die empirische Verteilungsfunktion $F_{1,k}$ des ersten Subportfolios über Algorithmus 2.25. k ist die Anzahl der generierten Realisationen von L_1 .
- (3) Verfahre analog mit $L_2, L_3, \dots, L_{56}$ und erhalte $F_{2,k}, F_{3,k}, \dots, F_{56,k}$ als empirische Verteilungsfunktionen von $L_2, L_3, \dots, L_{56}$.
- (4) Eine Realisation l von $L^{(\text{ges})}$ ist dann $l = F_{1,k}^{-1}(u_1) + F_{2,k}^{-1}(u_2) + \dots + F_{56,k}^{-1}(u_{56})$.
- (5) Wiederhole (1) bis (4) m mal und bilde aus den Realisationen die empirische Verteilungsfunktion von $L^{(\text{ges})}$.

Das Ergebnis des LDA Modells ist ein Näherungswert der vom Baseler Ausschuß vorgeschriebenen Sicherheitsunterlegung gemäß Gleichung (1.1). Für eine angemessene Anzahl an Realisationen der Verlustverteilungen ($m \geq k$ und $k, m \geq 10^{10}$) sollten Näherungswert und exakte Sicherheitsunterlegung fast übereinstimmen. In diesem Fall gilt:

$$\text{EK}_{\text{LDA}}(\text{OR}) \approx F_{L^{(\text{ges})},m}^{-1}(0.999).$$

Zusammenfassung

Zum Abschluß der Arbeit wird berichtet, was in den einzelnen Kapiteln geleistet wurde.

Im ersten Kapitel sind die gängigen Methoden zur Bewertung operationeller Risiken vorgestellt worden. Dabei ist der hier verwendete Verlustverteilungsansatz als einer der fortgeschrittenen Bewertungsansätze für die Unternehmen besonders interessant, da damit ein internes Risikomeßsystem zur Verfügung steht und die Ermittlung einer unternehmensspezifischen Sicherheitsunterlegung möglich ist. Der Verlustverteilungsansatz stellt dabei den als stochastische Zufallsgröße zu betrachtenden Verlust in den Vordergrund und orientiert sich hauptsächlich an den vorgefallenen Schäden des Instituts.

Die hier angewendete Strategie schlägt zunächst eine homogene Portfoliosichtweise vor (Kapitel 2), in der die Daten noch nicht auf einzelne Subportfolios aufgeteilt werden. So erhält das Unternehmen eine erste Berechnung der Sicherheitsunterlegung, die ausschließlich auf internen Daten basiert. Dazu wurde eine Verlustverteilung an die Daten angepaßt, die sich aus einer Schadenzahl- und Schadenhöhenverteilung zusammensetzt. Die Parameter der Schadenzahl- als auch der Schadenhöhenverteilung sind dabei mittels Maximum-Likelihood Schätzverfahren anhand der Daten bestimmt worden.

Bei Datensätzen operationeller Schäden hat sich gezeigt, daß es viele Schäden mit kleiner bis mittlerer Schadenhöhe und wenige mit großer Schadenhöhe gibt. Als angemessene Darstellung dieser Zweiteilung der Schäden hat sich hier als Schadenhöhenverteilung eine Mischung aus zwei Verteilungen mit einer heavy tailed Verteilung im oberen Schadenbereich bewährt. Der Satz von Pickands schlägt dabei eine verallgemeinerte Paretoverteilung als Tailverteilung vor. Daneben hat sich auch eine logNormalverteilung bei den Datensätzen als Tailverteilung als geeignet herausgestellt, was durch verschiedene Anpassungsstatistiken wie die Kolmogorov-Smirnov und Anderson-Darling Statistik untermauert wurde.

Nachdem Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilung fixiert worden sind, konnte die Sicherheitsunterlegung durch Simulation der Verlustverteilung näherungsweise bestimmt werden.

Im zweiten Schritt sind die Schäden auf die einzelnen Subportfolios aufgeteilt worden – das ist die sogenannte heterogene Portfoliosichtweise. Diese wurde bez. der Aufteilung auf zwei bzw. drei Subportfolios durchgeführt (Kapitel 3 und 4). Dazu ist zu beachten, daß die Schäden eines einzelnen Subportfolios sich wie in der homogenen Portfoliosichtweise verhalten. Daher können in den homogenen Subportfolios die gleichen Arten von Verlustverteilungen angenommen werden wie in der homogenen Portfoliosichtweise. Somit stand in der heterogenen Sichtweise auf der Auswahl und Kalibrierung einer passenden Abhängigkeitsstruktur im Vordergrund, welche die Subportfolios in Beziehung setzt. Mittels fixierter Abhängigkeitsstruktur und den Randverteilungen der zufälligen Einzelverluste kann die verbundene Verteilung der Subportfolios ermittelt werden. Insbesondere wird

dadurch die Verteilung des zufälligen Gesamtverlustes als Summe der Einzelverluste festgelegt. Die Ermittlung einer Sicherheitsunterlegung findet dabei mit Hilfe der Simulation des Gesamtverlustes statt.

Als Abhängigkeitsstrukturen wurden Copulas ausgewählt und zwar die Familie der Gauß-, Gumbel- und HRT-Copula. Dabei erlaubt die Gauß-Copula zwischen je zwei Subportfolios die Integration einer individuellen Abhängigkeit und ist daher ausgesprochen handlich. Danach wurde diskutiert, zwischen welchen Objekten der Verlustverteilungen Copulas eingesetzt werden sollten – zwischen den Schadenzahlen, den Schadenhöhen oder den Verlusten selber. Die Wahl fiel auf die Schadenhöhen bzw. den Einzelverlusten, da Copulas zwischen den Schadenhöhen bzw. Copulas zwischen den Subportfolioverlusten durch Variieren der Copulaparameter ein großes Spektrum an Abhängigkeiten ermöglichen, was in etwa der Bandbreite vom unabhängigen bis zum komonotonen Verlustfall entsprach. Ist das Gesamtbankmodell ausschließlich datengestützt, so hat sich gezeigt, daß zur Modellierung der Abhängigkeiten eine Copula zwischen den Schadenhöhen eingesetzt werden sollte. Da einige Unternehmen jedoch neben dem datengestützten Anteil noch Informationen der Risikoinventur in das Gesamtbankmodell aufnehmen, sollten hier die Copulas aus Gründen der Handlichkeit direkt zwischen den Subportfolioverlusten eingesetzt werden.

Copulas hängen von Parametern ab, welche die Stärke der Abhängigkeit widerspiegeln. Diese Parameter können durch z.B. das Maximum-Likelihood Verfahren geschätzt werden, in dem eine angemessene Anzahl abhängiger Schäden zur Verfügung steht. Die Anpassungsqualität der angepaßten Copula an die “wahre” Abhängigkeitsstruktur der abhängigen Schäden wird durch eine multivariate Chi-Quadrat Teststatistik überprüft. Über diese Vorgehensweise wird die geeignete Copula ermittelt. Durch Simulation des Gesamtverlustes kann bereits hier die Sicherheitsunterlegung eines ausschließlich datengestützten heterogenen Gesamtbankmodells bestimmt werden.

Neben dem datengestützten Anteil sehen einige Unternehmen wie z.B. die HSH Nordbank vor, eine auf Expertenwissen basierende Risikoinventur in ein Gesamtbankmodell einzubinden (Kapitel 5). Dabei soll wie im datengestützten Teil eine Verlustverteilung für jedes Subportfolio kalibriert werden.

Da die Risikoinventur die Erfahrung der Experten im Umgang mit operationellen Risiken widerspiegelt, konnten auch hier für die einzelnen Subportfolios die gleiche Art Verteilungen angenommen werden wie in der homogenen Sichtweise. Die Kalibrierung eines homogenen Modells für jedes Subportfolio hatte den zusätzlichen Vorteil, daß bei der Kalibrierung des Gesamtbankmodells eine einfache Vorgehensweise zur Zusammensetzung der beiden Bestandteile Risikoinventur und datengestützter Teil möglich war.

Die Kalibrierung der einzelnen Subportfolios mittels Informationen der Risikoinventur findet über eine geeignete Verarbeitung der Kennzahlen statt, welche die Experten zu jedem Subportfolio liefern. Für eine Kalibrierung reichten die Kennzahlen allein jedoch nicht aus, so daß zusätzlich Ergebnisse der datengestützten Analyse miteingebunden werden mußten.

Das heterogene Gesamtbankmodell (Kapitel 6) basiert auf den Informationen der Risikoinventur sowie dem datengestützten Teil – den Bestandteilen interne Schadendaten und externe Schadendaten. Bei dem datengestützten Teil müssen aufgrund des Datenmangels

interner Daten zu jeder Zelle zunächst die entsprechenden (skalierten) externen Daten zu den internen hinzugefügt werden. Erst danach kann ein homogenes LDA-Modell für jedes Subportfolio kalibriert werden.

Die homogenen, datengestützten Bestandteile (aus internen und skalierten externen Daten) und Risikoinventurbestandteile sind für jedes Subportfolio zusammenzumischen. Dabei entscheidet der Modellierer, wie groß der Anteil beider Bestandteile in der resultierenden Verlustverteilung ist. Nach diesem Schritt ist pro Subportfolio ein homogenes LDA-Modell fixiert, das die Informationen aller drei Ebenen trägt – Risikoinventur, interne und externe Daten.

Bei der Zusammensetzung der homogenen Modelle zu einem heterogenen Gesamtbankmodell ist eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den Subportfolios zu wählen. Aus Gründen der Handlichkeit wurde hier eine Gauß-Copula ausgewählt, die direkt zwischen den Einzelverlusten eingesetzt wurde. Die Parameter der Copula müssen dabei von außen vorgegeben werden, da die Unternehmen keine abhängigen Schadendaten vorweisen können und eine Schätzung der Parameter somit nicht möglich ist.

Die Randverteilungen mitsamt der fixierten Gauß-Copula legen die verbundene Verteilung der zufälligen Subportfolioverluste fest und insbesondere die Verteilung des zufälligen Gesamtverlustes. Dadurch ist es möglich, über Simulationen des Gesamtverlustes die Sicherheitsunterlegung näherungsweise zu berechnen. So erhält ein Unternehmen mit dieser Vorgehensweise ein internes Risikomeßsystem und die Berechnung einer unternehmensspezifischen Sicherheitsunterlegung.

A. Erläuterungen zu den entwickelten R-Funktionen

Die zu Paulsen und Strunk (2005); Strunk (2006a,b) entwickelten R-Funktionen sind ausführlich in den zugehörigen Dokumentationen der R-Funktionen erklärt. Hier werden die erstellten R-Funktionen genannt und kurz beschrieben. Falls die entsprechende Funktion in der Arbeit verwendet wurde, so wird das mit Verweis auf die entsprechende Seite/Tabelle/Abbildung vermerkt.

Homogene Portfoliosichtweise

Die zu Kapitel 2 entwickelten Funktionen sind in den .txt Dateien in den Verzeichnissen **Gesamtbank** und **Punktprozesse** zu finden. Die Funktionen werden gemäß der Reihenfolge ihrer Anwendung (s. Kapitel 2.10) aufgelistet.

datumex Berechnet zu einem long (in Sekunden) das entsprechende Datum im POSIXct-Format. Diese Funktion ist zur Analyse der Schadenanzahlverteilung wichtig und geht in der Funktion SA mit ein.

KS Berechnet die Kolmogorov Smirnov Teststatistik zu angepaßter Verteilung und einem Datensatz. Diese Funktion geht in die Funktion findeU ein.

AD Berechnet die Anderson Darling Teststatistik zu angepaßter Verteilung und einem Datensatz. (Weitere univariate goodness of fit Statistiken sind in der Datei GoF-Statistiken.txt zu finden.). Diese Funktion geht in die Funktion findeU.AD ein.

ordnung Ordnet einen Schadendatensatz aus Eintrittszeiten und zugehörigen Schäden nach der Abfolge der Eintrittszeiten. Das mußte bei z.B. nicht nach dem Datum sortierten Datensätzen (z.B. Excel-Schadendatenbanken) durchgeführt werden.

Empirische Datenanalyse.

empirisch Plottet zu Schadeneintrittszeiten und Schadenhöhen den empirischen Verlust sowie den empirischen Verlust mit markierten Schadenhöhen. Damit wurden die beiden Abbildungen zu Abbildung 2.4 geplottet.

empirisch2 Plottet zu Schadeneintrittszeiten und Schadenhöhen den empirischen Verlust.

SA Plottet zu Schadeneintrittszeiten die empirischen Schadenzahlpro Monaten und berechnet die Schadenzahlintensität pro Jahr. Damit wurde die linke Abbildung zu Abbildung 2.5 erstellt.

SA.Jahre Plottet zu Schadeneintrittszeiten die empirischen Schadenzahldaten pro Jahr und berechnet die Schadenzahlintensität pro Jahr. Damit wurde die rechte Abbildung zu Abbildung 2.5 erstellt.

Modell mit Power-Tail.

findeU Berechnet zu Schadenhöhendaten und angegebenen Intervallgrenzen eine Schwelle, so daß bestmögliche Anpassung der GPD im Tail bei maximaler Anzahl an Daten gewährleistet ist. Es werden die geschätzten Parameter der GPD ausgegeben sowie die 20 “besten“ Schwellen gemäß Algorithmus 2.23. Die Berechnungen werden u.a. durch die Abbildungen QQ-Plot (Abbildung 2.6 links), MeanExcessPlot (Abbildung 2.6 rechts), KolmogorovSmirnov-Plot (Abbildung 2.7 links) und den Plot der Tail-Schadenhöhenverteilung (Abbildung 2.8) begleitet. Als Maß für die Güte der Anpassung wird die Kolmogorov Smirnov Statistik verwendet. Diese Funktion ist für die Analyse wichtig und liefert eine Einschätzung über die Härte der Tailverteilung.

findeU.AD Analog zu Funktion findeU, nur daß hier die Anderson Darling Statistik als Maß für die Güte eingesetzt wird. Daher wird mit dieser Funktion der Anderson-Darling Plot (Abbildung 2.7 rechts) erstellt und die Tabelle der Parameter unter Abbildung 2.7 geliefert.

findeZentrum Schätzt mittels Maximum-Likelihood Verfahren zu gegebener Schwelle und Schadenhöhendaten die Parameter der Verteilung, die sich im Zentrum am besten an die Daten anpaßt. Es wird untersucht, ob logNV oder Weibullverteilung die beste Anpassung bietet. Die Parameterwerte und die Werte der Teststatistiken werden in einer Tabelle ausgegeben (s. Seite 31).

SHV Setzt die Schadenhöhenverteilung aus Zentrums- und Tailverteilung zusammen. Die zusammengesetzte Verteilung wird oberhalb verschiedener Quantile geplottet. Zum Schluß wird das Histogramm mitsamt der Dichte (oberhalb der Schwelle) geplottet.

Simulation Simuliert ein opRisk-Szenario zu Schadenzahl und Schadenhöhenverteilung. Die Schadeneintrittszeiten werden dabei als gleichverteilt vorausgesetzt. Schäden oberhalb der Schwelle werden rot markiert.

Verlust Simuliert den operationellen Verlust und Value at Risk zu vorgegebenen Parametern der Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilung. Der VaR wird zu 10 Niveaustufen 0.990, 0.991, ..., 0.999 näherungsweise berechnet. Dazu wird eine Tabelle ausgegeben (Tabelle 2.2 links). Die Value at Risk Kurve wird oberhalb des Niveaus 0.99 geplottet.

Modell ohne Tailanpassung.

findeZentrum.ohneEWS Es wird aus den Verteilungsfamilien logNV und Weibull die Verteilung ausgewählt, die sich am besten an alle Schadenhöhendaten anpaßt. Die

Güte wird graphisch durch einen Plot angepaßter und empirischer Schadenhöhenverteilung demonstriert (Abbildung 2.8). Die Werte der angepaßten Parameter werden in einer Tabelle ausgegeben (s. Seite 33, obere Tabelle).

SHV.ohneEWS Analog zu Funktion SHV.

Simulation.ohneEWS Analog zu Funktion Simulation.

Verlust.ohneEWS Analog zu Funktion Verlust.

Mischungsmodell aus zwei logNV.

findelogNV Es werden zwei logNV an die Schadenhöhendaten zu vorgegebener Schwelle angepaßt. Die geschätzten Parameter des Tails und des Zentrums werden ausgegeben (s. Seite 33, Mitte). Zusätzlich wird die angepaßte Verteilung oberhalb der Schwelle mitsamt der empirischen Verteilung geplottet (Abbildung 2.8).

SHV.logNV Analog zu Funktion SHV.

Simulation.logNV Analog zu Funktion Simulation.

Verlust.logNV Analog zu Funktion Verlust.

Modellvergleich.

Vergleich Es werden die drei Anpassungsmodelle verglichen. Dazu werden sämtliche Ergebnisse der drei Modellanpassungen (Parameterschätzungen, angepaßte Funktionen, VaR-Ergebnisse) übergeben. Es werden die Tailverteilungen verglichen (Abbildung 2.8) als auch die durch Simulation berechneten Value at Risk (Tabelle 2.2).

Kontrolle POT Modell.

SEZ.Trafo Berechnet zu Realisationen aus $(0, T)$ und einem vorgegebenen Anfangsjahr *Jahr1* entsprechende Schadeneintrittszeiten im POSIXct Format aus dem Zeitraum $(Jahr1, Jahr1 + T)$. Das wird benötigt, um einer gleichverteilten Zufallsvariable aus $(0, T)$ genau ein Datum zuweisen zu können. Dadurch können Schadeneintrittszeiten generiert werden, die in dem verwendeten Beispieldatensatz in 2.10 analysiert wurden.

poisson.process.SA Visualisiert den homogenen Poisson Prozeß zu einer vorgegebenen Intensität bez. dem Intervall $(0, T)$. Damit wurde Abbildung 2.1 (links) erstellt.

poisson.process.SS Es wird der Schadenssummenprozeß visualisiert. Der Schadenzahlprozeß wird dabei als homogener Poisson Prozeß angenommen. Es wird die Quantilfunktion der Schadenhöhenverteilung vorgegeben. Damit wurde Abbildung 2.1 (rechts) erstellt.

Excess.size Kontrolliere, ob die Schadendaten oberhalb der Schwelle sich wie die angepaßte GPD verhalten. Es wird ein QQ-Plot und ein die Reihenfolge des Eintretens berücksichtigender Plot ausgegeben (Abbildung 2.10).

Exceedance.times Kontrolliere, ob die Schäden oberhalb der Schwelle gemäß eines homogenen Poisson Prozeß eintreten. Es wird ein QQ-Plot und ein die Reihenfolge des Eintretens berücksichtigender Plot ausgegeben (Abbildung 2.9).

Heterogene Portfoliosichtweise. Bivariater Fall

Die zu Kapitel 3 entwickelten Funktionen stehen in den Verzeichnissen **Copulas**, **SubBivariat**, **Subportfolios** und **Worst VaR Scenarios**.

chisq.unabh Testet mit dem Chi-Quadrat Unabhängigkeitstest (Falk et al., 2004), ob ein bivariater Datensatz mit Realisationen von *iid* zweidimensional gleichverteilten ZV von zwei *unabhängigen* gleichverteilten Komponenten U, V stammt. Es wird die Teststatistik, der Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ und der p-Wert ausgegeben.

Erzeugung bivariater Copula Realisationen.

real.norm.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitswert ρ eine gewünschte Anzahl von Realisationen der Gauß-Copula. Damit wurde der Scatterplot in Abbildung 3.1 (oben, links) erzeugt. Zusätzlich geht diese Funktion in opVaR.Modell4.Gauss ein.

real.t.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitswert ρ und Wert der Freiheitsgrade eine gewünschte Anzahl von Realisationen der t-Copula.

real.frank.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitswert ϑ eine gewünschte Anzahl Realisationen der Frank-Copula.

real.clayton.laplace.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitswert ϑ eine gewünschte Anzahl Realisationen der Clayton-Copula mittels Satz 3.27.

real.gumbel.laplace.cop Analog wie Funktion real.clayton.laplace.cop. Damit wurde der Scatterplot in Abbildung 3.1 (oben, Mitte) erzeugt. Zusätzlich geht diese Funktion in die Funktion opVaR.Modell4.Gumbel ein.

real.HRT.cop Analog wie Funktion real.clayton.laplace.cop. Damit wurde der Scatterplot in Abbildung 3.1 (oben, rechts) erzeugt. Zusätzlich geht diese Funktion in die Funktion opVaR.Modell4.HRT ein.

Schätzung von Copula-Parametern.

spearman Berechnet zu Realisationen unabhängig zweidimensional reellwertig verteilter Zufallsvariable den Schätzer für das Abhängigkeitsmaß Spearmans rho.

kendall Berechnet zu Realisationen unabhängig zweidimensional reellwertig verteilter Zufallsvariable den Schätzer für das Abhängigkeitsmaß Kendalls tau nach Satz 3.5. Das wird z.B. bei der Kalibrierung der Gauß-Copula im trivariaten Fall verwendet.

findeMLS.normalcop Berechnet den analytisch exakten Maximum Likelihood Schätzer zu Realisationen unabhängiger zweidimensional gleichverteilter Zufallsvariable unter

der Annahme, daß die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable die Gauß-Copula ist. Der zugehörige Wert in der Tabelle 3.1 wurde damit berechnet.

findeMLS.frankcop Analog zu Funktion `findeMLS.normalcop`.

findeMLS.gumbelcop Analog zu Funktion `findeMLS.normalcop`. Der zugehörige Wert in der Tabelle 3.1 wurde damit berechnet.

findeMLS.claytoncop Analog zu Funktion `findeMLS.normalcop`.

findeMLS.tcop Berechnet einen Schätzer für die Freiheitsgrade (df) und einen für den Abhängigkeitswert (ρ). Der Wert der Freiheitsgrade wird über das Maximum Likelihood Verfahren durch Diskretisieren des Parameterraums geschätzt und der Parameter ρ über den Kendalls tau Algorithmus 3.17.

findeMLS.HRTcop Berechnet einen Schätzer für den Abhängigkeitswert (ϑ) über das Maximum Likelihood Verfahren durch Diskretisieren des Parameterraums. Der zugehörige Wert in der Tabelle 3.1 wurde damit berechnet.

Anpassungsgüte.

KS.biv Bivariate Kolmogorov Smirnov Statistik zu einem Datenvektor und angepaßter Verteilung. Die Realisationen stammen von einem reellwertigen Zufallsvektor.

KS.biv.cop Kolmogorov Smirnov Statistik zu einem Datenvektor mit Elementen aus $(0, 1)^2$ und angepaßter Copula nach Definition 3.30.

AD.biv.cop Anderson Darling Statistik zu einem Datenvektor und angepaßter Copula nach Definition 3.30.

chisq.anp Chi-Quadrat Anpassungstest nach Algorithmus 3.32. Der Test wird zum Niveau $\alpha = 5\%$ durchgeführt und Teststatistik, p-Wert und Testergebnis ausgegeben. Die Werte der Tabelle auf Seite 62 wurden damit berechnet.

chisq.anp.PIT Chi-Quadrat Anpassungstest mittels PIT nach Rosenblatt (1952).

Worst Value at Risk Szenarios.

VF.szenario Plottet das Worst Szenario zu $L_1 + L_2$ bez. eines Quantils q . Der zugehörige Value at Risk zum Niveau q ist der worst case. Bei der Funktion müssen die Quantilfunktionen der zugehörigen Verlustverteilungen L_1, L_2 angegeben werden.

VF.worst Plottet die Worst Verteilungsfunktion zu $L_1 + L_2$. Die zugehörige Value at Risk Kurve ist der worst case Value at Risk und übertrifft den Value at Risk des komonotonen Verlustfalls i.a. deutlich. Das Szenario (Funktion `VF.Szenario`) berührt in genau einem Punkt die geplottete Kurve. Bei der Funktion müssen die Verteilungsfunktionen der zwei Portfolioverluste L_1, L_2 vorgegeben werden.

VaR.worst Plottet die Kurve des Worst Case Value at Risk. Dazu müssen die Quantilfunktionen der zwei Portfolioverluste vorgegeben werden.

Näherungsweise Berechnung des Value at Risk bei abhängigen Schadenhöhen.

opVaR.Modell.Grenzen Zu den entsprechenden Schadenanzahl- und Schadenhöhenparametern wird der komonotone und unabhängige Verlustfall simuliert und der Value at Risk zu 10 Niveaustufen 0.990, 0.991, ..., 0.999 näherungsweise berechnet. Damit wurden die Werte in Tabelle 3.2 (linke bzw. rechte Spalte) berechnet.

opVaR.Modell4.Gauss Es wird ein Verlustfall simuliert, bei dem als Abhängigkeitsstruktur zwischen den Schadenhöhen eine Gauß-Copula zu vorgegebenen Abhängigkeitsparameter angenommen wird. Damit wurden die Werte in Tabelle 3.2 (oben) berechnet.

opVaR.Modell4.Gumbel Analog zu Funktion opVaR.Modell4.Gauss. Damit wurden die Werte in Tabelle 3.2 (Mitte) berechnet.

opVaR.Modell4.HRT Analog zu Funktion opVaR.Modell4.Gauss. Damit wurden die Werte in Tabelle 3.2 (unten) berechnet.

Heterogene Portfoliosichtweise. Trivariater Fall

Die zu Kapitel 4 entwickelten Funktionen stehen in den Verzeichnissen **Copulas**, **Sub-Trivariat**, **Subportfolios** und **Worst VaR Scenarios**.

Erzeugung trivariater Copula Realisationen.

real.norm.triv.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitsstripel (ρ_1, ρ_2, ρ_3) eine Anzahl von Gauß-Copula Realisationen. Damit wurde der Scatterplot in Abbildung 4.1 (oben, links) erzeugt. Zusätzlich geht diese Funktion in opVaR.Modell4.Gauss.triv ein.

real.t.triv.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitsstripel und Wert der Freiheitsgrade eine gewünschte Anzahl von Realisationen der t-Copula.

real.clayton.triv.cop Erzeugt zu vorgegebenem Abhängigkeitswert ϑ eine gewünschte Anzahl Realisationen der Clayton-Copula mittels Satz 3.27.

real.gumbel.triv.cop Analog wie Funktion real.clayton.laplace.cop. Damit wurde der Scatterplot in Abbildung 4.1 (oben, Mitte) erzeugt. Zusätzlich geht diese Funktion in opVaR.Modell4.Gumbel.triv ein.

real.HRT.triv.cop Analog wie Funktion real.clayton.triv.cop. Damit wurde der Scatterplot in Abbildung 4.1 (oben, rechts) erzeugt. Zusätzlich geht diese Funktion in opVaR.Modell4.HRT.triv ein.

Schätzung von Copula-Parametern.

findeMLS.normalcop.triv Berechnet den Schätzer zum Parametertripel (ρ_1, ρ_2, ρ_3) mit Kendalls tau (Algorithmus 4.6). Damit wurde das Tripel auf Seite 75 berechnet.

findeMLS.tcop.triv Es wird ein Schätzer des Abhängigkeitstripels (ρ_1, ρ_2, ρ_3) und der Freiheitsgrade ausgegeben. Der Schätzer des Parametertripels wird wie bei der Funktion **findeMLS.normalcop.triv** berechnet. Der Wert der Freiheitsgrade wird über Diskretisieren des Parameterraums und mit Hilfe der trivariaten Dichte der t-Copula berechnet.

findeMLS.claytoncop.triv Berechnet einen Schätzer für den Abhängigkeitswert (ϑ) über das Maximum Likelihood Verfahren durch Diskretisieren des Parameterraums.

findeMLS.gumbelcop.triv Analog zu Funktion **findeMLS.claytoncop.triv**. Damit wurde der Parameter auf Seite 75 berechnet.

findeMLS.HRTcop.triv Analog zu Funktion **findeMLS.claytoncop.triv**.

Anpassungsgüte

chisq.anp.triv.PIT Trivariater Chi-Quadrat Anpassungstest mittels PIT nach Rosenblatt (1952). Damit wurden die Werte in der Tabelle auf Seite 75 berechnet.

Worst Value at Risk Szenarios.

VF.worst.triv Plottet zu vorgegebener Verlustverteilungsfunktion F die Worst Verteilungsfunktion zu $L_1 + L_2 + L_3$. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Verteilungsfunktionen der drei Subportfolioverluste identisch sind, d.h. daß $F_{L_1} = F_{L_2} = F_{L_3} = F$ gilt. Die zugehörige Value at Risk Kurve ist der worst case.

Näherungsweise Berechnung des Value at Risk bei abhängigen Schadenhöhen.

opVaR.Modell.Grenzen.triv Simulation des komonotonen und unabhängigen Verlustfalls zu den Schadenanzahl- und Schadenhöhenparametern. Der Value at Risk wird zu 10 Niveaustufen $0.990, 0.991, \dots, 0.999$ näherungsweise berechnet. Die Werte der Tabelle 4.1 (linke und rechte Spalte) wurden damit berechnet.

opVaR.Modell4.Gauss.triv Simulation eines Verlustfalls, bei dem als Abhängigkeitsstruktur zwischen den Schadenhöhen eine Gauß-Copula zu vorgegebenen Abhängigkeitsparameter angenommen wird. Die Werte der Tabelle 4.1 (oben) wurden damit berechnet.

opVaR.Modell4.Gumbel.triv Analog zu Funktion **opVaR.Modell4.Gauss**. Die Werte der Tabelle 4.1 (Mitte) wurden damit berechnet.

opVaR.Modell4.HRT.triv Analog zu Funktion **opVaR.Modell4.Gauss**. Die Werte der Tabelle 4.1 (unten) wurden damit berechnet.

Schätzdaten der Risikoinventur

Die zu Kapitel 5 verwendeten Funktionen stehen im Verzeichnis **Risikoinventur**.

Parameter des Tails.

findeTail.Inv Berechnet zu Schwelle und zugehörigen Funktionswert sowie maximal erwarteter Schaden in 10 Jahren mit zugehöriger Schadenintensität einen Schätzer für den Gestaltenparameter und den Skalenparameter der GPD.

Parameter des Zentrums.

findeZentrum.Inv Berechnet die beiden Parameter der logNV.

Value at Risk.

Verluste.frei Generiert zu einer beliebigen Anzahl von Subportfolios eine geforderte Anzahl von Verlustrealisationen der einzelnen Subportfolios. Das Ergebnis wird in einer Matrix ausgegeben.

opVaR.Modell.frei Berechnet zu einer Matrix von Verlustszenarien näherungsweise den komonotonen und unabhängigen Verlustfall zu 12 Quantilen. Zusätzlich wird zu jedem Subportfolio der opVaR zu den Quantilen 0.99, 0.995, 0.999 berechnet. Beide Ergebnisse werden zusammen in einer Liste ausgegeben.

B. Dichten der den Copulas zugrundeliegenden Verteilungsfunktionen

Gauß. $F(x, y) = \Phi_{(0, \Sigma)}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

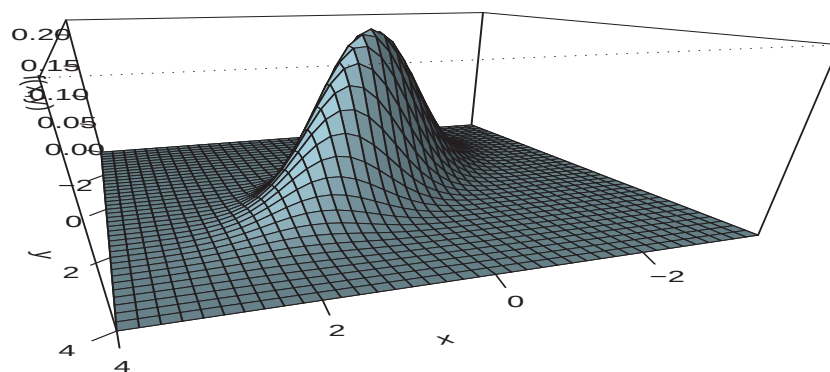
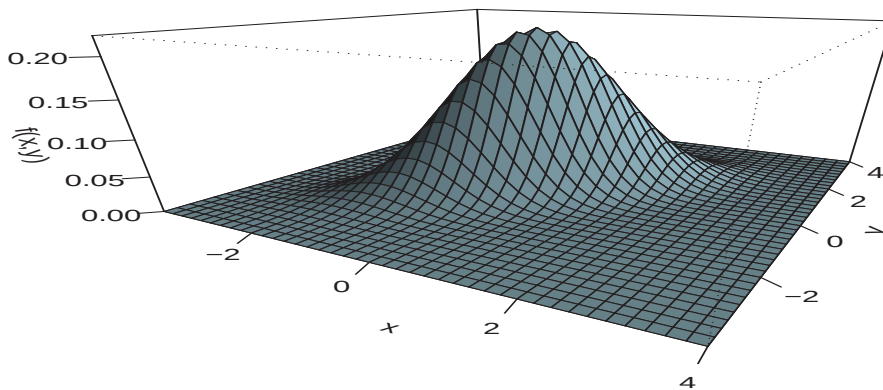


Abbildung B.1. Dichte der bivariaten Gaußverteilung ($\rho = 0.7$). Verschiedene Perspektiven. Die zugehörige Copula ist die Gauß-Copula mit Parameter ρ .

Gumbel. $F(x, y) = \exp\left(-[e^{-\vartheta x} + e^{-\vartheta y}]^{1/\vartheta}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

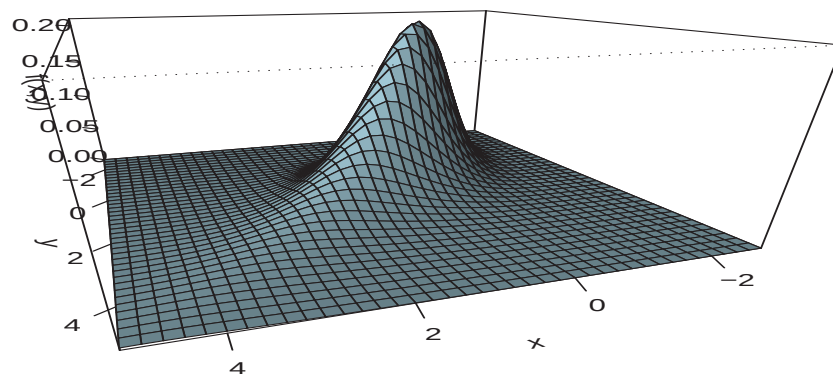
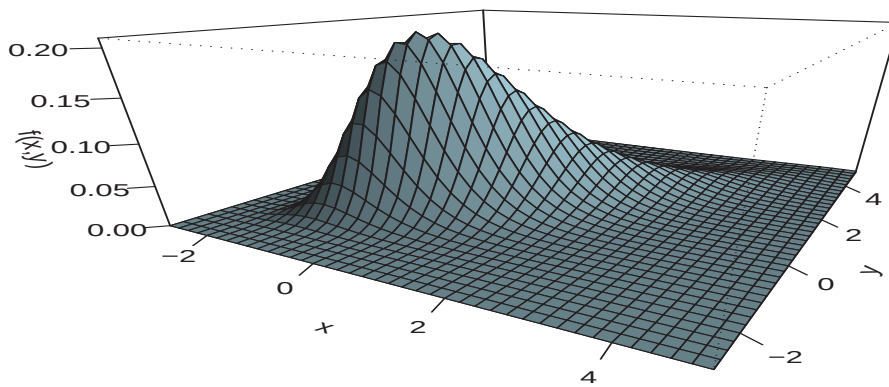


Abbildung B.2. Dichte der bivariaten Gumbelverteilung ($\vartheta = 2$). Verschiedene Perspektiven. Zugehörige Copula ist die Gumbel-Copula mit Parameter ϑ .

Pareto. $F(x, y) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{x+y}{\lambda}\right)^{-\alpha}, \quad x, y \geq 0.$

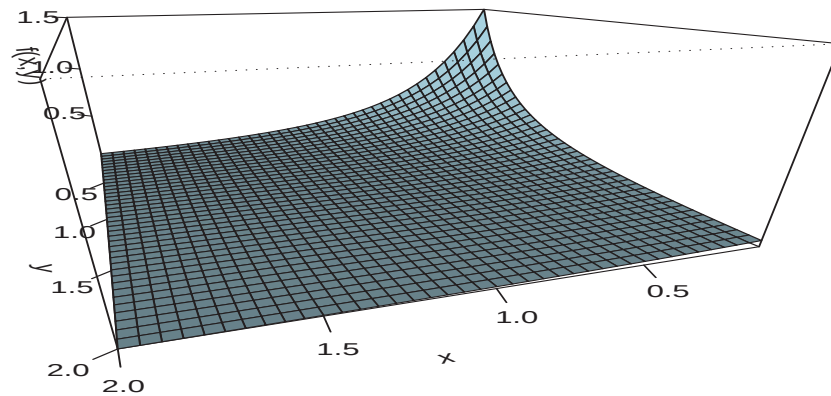
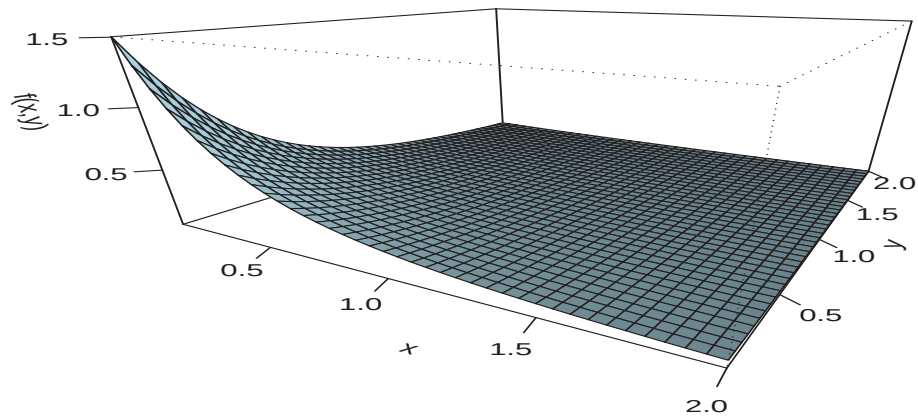


Abbildung B.3. Dichte der bivariaten Paretoverteilung ($\lambda = \alpha = 1$). Verschiedene Perspektiven. Zugehörige Copula ist die HRT-Copula mit Parameter $\vartheta = 1/\alpha$.

Fréchet. $F(x, y) = \exp \left(-x^{-\alpha} - y^{-\alpha} + (x + y)^{-\alpha} \right), \quad x, y \geq 0.$

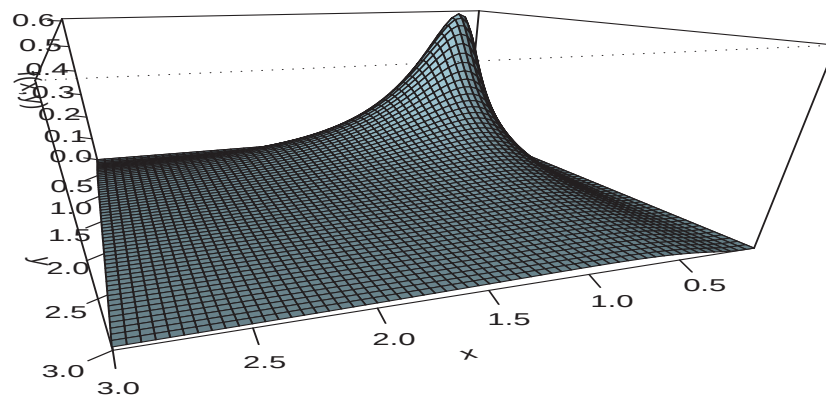
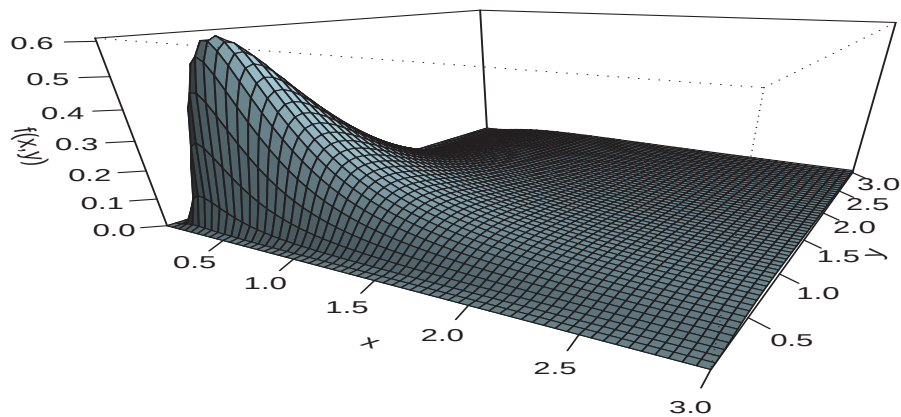


Abbildung B.4. Dichte der bivariaten Fréchetverteilung ($\alpha = 1$). Verschiedene Perspektiven. Zugehörige Copula ist die Galambos-Copula mit Parameter $\vartheta = \alpha$.

Literaturverzeichnis

- AAS (2004). "Modelling the Dependence Structure of Financial Assets: A Survey of four Copulas".
www.nr.no/files/samba/bff/SAMBA2204b.pdf
- BAFIN / DEUTSCHE BUNDESBANK (2005). "Bericht über die Industriearbeit AMA"
www.bundesbank.de/download/bankenaufsicht/pdf/ama/abschlussbericht.pdf
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2003).
www.bis.org/bcbs/
- BAUER (2005). "Quantifizierung von Operationellen Risiken". Bachelorarbeit Mathematik, Universität Siegen (August 2005).
- BEHNEN, NEUHAUS (2003). *Grundkurs Stochastik*. PD Verlag
- BREYMAN, DIAS AND EMBRECHTS (2003). "Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance". *Quantitative Finance* 3:1-14
- CANELA AND COLLAZO (2005). "Modelling Dependence in Latin American Markets using Copula Functions"
wwwtest.aup.edu/lacea2005/system/step2_php/papers/pedreira_eped.pdf
- CHAMBERS, MALLOWS AND STUCK (1976). "A Method for Simulating Stable Random Variables".
Journal of the American Statistical Association, 71, pp. 340-344
- CHERNOBAI, RACHEV AND FABOZZI (2005). "Composite Goodness-of-Fit Tests for left-truncated Loss Samples"
www.pstat.ucsb.edu/research/papers/KSmissing20050604-JFE.pdf
- COMMITTEE OF EUROPEAN BANKING SUPERVISORS (2006).
www.c-ebs.org/
- CRAMA, CHAPPELLE, HÜBNER, PETERS (2004). "Basel II and Operational Risk: Implications for Risk Management and Management in the Financial Sector". *National Bank of Belgium, working paper no 51*
- DEMOULIN, EMBRECHTS AND NESHLEHOVA (2005). "Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, Dependence and Aggregation". *Department of Mathematics, ETH Zürich*
- EMBRECHTS, KLÜPPELBERG AND MIKOSCH (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer
- EMBRECHTS, MCNEIL AND STRAUTMANN (1999). "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls". *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, pp. 176-223
- EMBRECHTS, LINDSKOG AND MCNEIL (2001). "Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management". *Department of Mathematics, ETH Zürich*

- EMBRECHTS AND PUCETTI (2005). "Bounds for Functions of dependent risks". *Finance Stochastics*
- FALK, BECKER UND MAROHN (2004). *Angewandte Statistik*. Springer
- FREES AND VALDEZ (2004). "Understanding Relationships using Copulas". *North American Actuarial Journal* 2, 1, pp. 1–25
- HIPP (2005). "Dependence Concepts in Finance and Insurance: Copulas"
insurance.fbv.uni-karlsruhe.de/rd_download/Copulas.pdf
- JUNKER AND MAY (2005). "Measurement of Aggregate Risk with Copulas". *Econometrics Journal* (2005), volume 8, pp. 428–454
- KRUSKAL (1958). "Ordinal Measures of Association". *Journal of the American Statistical Association* 53:814–861
- LEADBETTER (1991). "On a basis for Peaks over Threshold modeling". *Statist. Probab. Letters* 12, 357–362
- MCNEIL (1997). "Estimating the Tails of Loss Severity Distributions using Extreme Value Theory". *ASTIN Bulletin* 27:117–137
- MCNEIL AND SALADIN (1998). "Developing Scenarios for future extreme Losses using the POT Model". *Extremes and Integrated Risk Management*, pp. 253–167
- MCNEIL (1999). "Extreme Value Theory for Risk Managers". *Department of Mathematics, ETH Zürich*
- MCNEIL, FREY AND EMBRECHTS (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press
- MEDOVA AND KYRIACOU (2001). "Extremes in operational Risk Management"
www.jbs.cam.ac.uk/research/working_papers/2001/wp0105.pdf
- MIKOSCH (2005). "Copulas: Tales and Facts"
www.math.ku.dk/~mikosch/maphysto_extremes_2005/s.pdf
- NELSEN (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer
- NESLEHOVA AND PFEIFFER (2004). "Modelling and generating dependent Risk Processes for IRM and DFA". *ASTIN Bulletin* 34(2): 333–360
- NOLAN (2004). *Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data*
academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf
- PAULSEN UND STRUNK (2005). "Ein homogenes Risikomodell zur Bewertung von Operationellen Risiken bei der HSH Nordbank". *Projektbericht "Operationelles Risiko für die HSH Nordbank"* Teilleistung 1.
- RESNICK (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer
- ROMANO (2002). "Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market".
w3.uniroma1.it/cidem/Files/WPRomanodicembre02.pdf

- ROSENBLATT (1952). "Remarks on a multivariate Transformation". *Annals of Mathematical Statistics*, 23, pp. 470–472
- SCHÖNBUCHER (2002). "Taken to the Limit: Simple and not-so-simple loan Loss Distributions". *Preprint, ETH Zürich and Universität Bonn*
- STRUNK (2006a). "Eine heterogenes Modell zur Bewertung Operationeller Risiken: Der Zwei-Subportfolio Fall". *Projektbericht "Operationelles Risiko für die HSH Nordbank" Teilleistung 2.*
- STRUNK (2006b). "Eine heterogenes Modell zur Bewertung Operationeller Risiken: Kalibrierung anhand Informationen der Risikoinventur". *Projektbericht "Operationelles Risiko für die HSH Nordbank" Teilleistung 2.*
- STRUNK (2006c). "Eine heterogenes Gesamtbank-Modell zur Bewertung Operationeller Risiken: Zusammensetzung der Ebenen interne und externe Schadendaten sowie Informationen der Risikoinventur". *Projektbericht "Operationelles Risiko für die HSH Nordbank" Teilleistung 2.*
- VENTER (2005). "Tails of Copulas"
www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Washington/Venter.pdf
- WERON (1996). "On the Chambers-Mallows-Stuck Method for simulating skewed Stable Random Variables". *Statistics Probability Letters* 28, pp. 165–171

Eidesstattliche Erklärung

Die vorliegende Arbeit habe ich selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet.

Siegen, im Juli 2006