Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Mathematische Statistik

DIPLOMARBEIT

Modellierung und Bewertung von Embedded Options in Kreditverträgen

Britta Speckmann

Thema erhalten von

PD Dr. Volkert Paulsen

7. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeine Einfühung

1.1 Ziele

Kreditinstitute der ganzen Welt begeben Kredite an Privat- und Gewerbekunden mit verschiedensten Kreditkonditionen. Dabei spielen flexible Handlunsmöglichkeiten eine immer bedeutendere Rolle in der Ausgestaltung der Verträge, insbesondere im Hinblick auf die erhebliche Konkurrenz im Bankensektor.

Eine dieser häufig nachgefragten Handlungsflexibiltäten ist die Möglichkeit der Darlehensnehmer, Sondertilgungen zu tätigen, d.h. neben der regelmäßigen Rückzahlung (Tilgung), Extra-Tilgungen vorzunehmen. Auch diese sind in ihrer Ausgestaltung sehr vielfältig, wie wir im weiteren Verlauf sehen werden.

Für die Kreditinstitute bedeutet die Vergabe von Sondertilgungsrechten an die Darlehensnehmer das Eingehen des Risikos der vorzeitigen Rückzahlung des Kredites oder von Teilen des Kredites. Die genaue Beschreibung des Risikos und Ihrer Konsequenzen im Verhalten der Bank wird im Kapitel 3 vorgenommen.

Aus der betriebswirtschaftlichen Betrachtung heraus ist klar, dass die Übernahme des Risikos einen Preis hat. Ziel der Kreditinstitute ist es den Preis dieses Risikos zu ermitteln und unter Berücksichtigung der Konkurrenz- und Marktgegebenheiten an den Darlehensnehmer, den Inhaber des Rechtes, komplett oder teilweise weiterzugeben.

Im Bereich der Praxis wird der Preis für das Sondertilgungsrecht oft pauschal als Aufschlag auf den Zinssatz oder als Einmalzahlung veranschlagt.

In dieser Arbeit wird durch das Aufstellen eines mathematischen Modells ein Ansatz für eine genauere Bepreisung anhand einer Cashflow-Analyse gegeben.

1.2 Definition der Sondertilgungsoption

Durch Kredite stellt das Kreditinstitut dem Darlehensnehmer, egal ob Gewerbe- oder Privatkunde, für eine bestimmte Zeit einen bestimmten Betrag zur Verfügung. **Ökonomisch** wird der Kredit als Überlassung von Kapital bzw. Kaufkraft auf Zeit verstanden[1]. Der Zins stellt dabei das Entgelt für den Nutzungs- bzw. Konsumverzicht des Darlehensgebers dar.

Juristisch wird auf den schuldrechtlichen Charakter des Kredites abgestellt und der Kredit als Gelddarlehen[2] definiert.

Unabhängig von dieser unterschiedlichen Betrachtungsweise beinhaltet der Kreditbegriff Ansprüche auf zukünftige Zahlungen des Kreditgebers an den Kreditnehmer. Ansprüche auf Zahlungen werden auf den Finanzmärkten als Finanztitel bezeichnet.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der finanzmarkttheoretischen oder zahlungsstromorientierten Auffassung des Kredites.

Aus finanztheoretischer Sicht ist der Kredit also ein Finanztitel, der bestimmte Spezifikationen aufweist. So werden vor Vertragsabschluss folgende Kernpunkte des Kreditkontraktes vereinbart:[3]

- Darlehensnehmer
- Darlehensgeber
- Gesamtdarlehensbetrag*
- Zinssatz*
- Zinsart (variabel oder fest)
- Zinsbindungsdauer*
- Vertragslaufzeit*
- Rückzahlungsvereinbarungen (ohne Tilgung, Rate, Annuität etc.)*
- sonstige Kosten (Gebühren etc.)*
- Gesamtkosten *
- zu bestellende Sicherheiten*
- effektiver Jahreszins*

[1]Vgl. dazu [18]

[2]Vgl. KWG §1 und §21, BGB §§607 ff.

[3]Die mit * gekennzeichneten Punkte sind bei einem Verbraucherdarlehensvertrag nach § 492 BGB Mindestbestandteile. Ohne diese Bestandteile ist der Darlehensvertrag unwirksam.

- sonstige Darlehensbedingungen (Sondertilgungsrechte)

Wie bereits in der Auflistung angedeutet, gibt es in der Ausgestaltung des Vertrages einige Wahlmöglichkeiten. Auch die Vergabe von frei vereinbarten Sondertilgungsrechten durch den Kreditgeber an den Kreditnehmer ist eine Option in der Ausgestaltung der Kreditkondition.

Die gesetzlich verankerten Sondertilgungen - beziehungsweise Kündigungsrechte [4] werden im Verlaufe dieser Arbeit nicht weiter betrachtet[5].

Definition 1.2.1 ***Sondertilgungsrecht***

Ein Sondertilgungrecht oder auch Sondertilgungsoption beinhaltet das Recht für den Darlehensnehmer

- *an einem vorher bestimmten Tag (in einem vorher bestimmten Zeitraum)*
- *eine bestimmte Summe oder einen Betrag bis zu einer Maximalsumme*

zusätzlich zur unter Umständen vereinbarten Regeltilgung vorzeitig zurückzuzahlen, um dadurch die Restschuld und somit die Zinsbelastung aus dem Kredit zu verringern.

Ein Kredit kann dabei natürlich auch mehrere solcher Sondertilgungsrechte, oder sogar eine beliebige Rückzahlung des Darlehens zur Folge haben.

1.3 Problemstellung

Bei der Vergabe eines Kredites geht die Bank Kredit- und Zinsänderungsrisiken ein. Das **Kreditrisiko** tritt in der modernen Kreditrisikosteuerung in drei Ausprägungen auf:

Ausfallrisiko: Risiko, dass Darlehensnehmer ihren Zahlungsverpflichtungen nicht mehr nachkommen können

Bonitätsrisiko: Risiko, dass das Ausfallrisiko steigt, Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls steigt, Rating eines Papiers verändert sich ⇒ Barwertveränderungen

Spread-Risiko: Risiko der Ausweitung des Risikoaufschlages

[4] §489 BGB Abs. 1 und 3

[5] Das BGB-Kündigungsrecht des Darlehensnehmers nach Ablauf von 10 Jahren[6] bei Vertragslaufzeit $>$ 10 Jahre kann ähnlich der hier angegebenen Vorgehensweise durch Swaptions bewertet werden. Je nach Rückzahlungsvereinbarung entspricht das Sondertilgungsrecht einer Option mit unterlegtem plain-vanilla oder amortisierenden Swap.

Für diese Arbeit gehen wir abstrahierend davon aus, dass sämtliche Zahlungen der Vertragspartner sicher sind, d.h. nicht von Kreditrisiken beeinflusst werden. Die Auswirkungen von Kreditrisiken müssen in einer gesonderten Arbeit spezifiziert werden.

Das **Zinsrisiko** ergibt sich durch eine mögliche Veränderung der Zinsstruktur. Dahinter verbirgt sich die Eigenschaft, dass die Zinsen über die Zeit keineswegs konstant sind, sondern sich laufend verändern. Unter der Annahme der Arbitragefreiheit[7] kann man zwar implizite Zinssätze für jeden beliebigen Zeitraum in der Zukunft ermitteln, diese sind jedoch seltenst die später für die Zeiträume realisierten Zinssätze.

Die Kreditkonditionen werden jedoch bei Abschluss des Kreditvertrages auf Grundlage der impliziten Zinssätze ermittelt und durch eine Verschiebung der Zinsstruktur können Sondertilgungsoptionen im Zeitablauf von großer Bedeutung für das Kreditinstitut werden.

Durch jede ausgeübte Sondertilgungsoption ergibt sich für das Kreditinstitut der Ausfall von Zinszahlungen in den Perioden nach den Sondertilgungen. Das sind Zahlungsströme, die das Kreditinstitut bei der Refinanzierung oder im abgeschlossenen Hedge, benötigt.

Natürlich kann das Kreditinstitut die zurückgezahlten Beträge am Kapitalmarkt wieder anlegen. Dies wird jedoch kaum zum Zinssatz des Kredites gelingen. Es entstehen somit Zinsdifferenzen, die zu Verlusten bzw. Mindereinnahmen führen und je nach Höhe der Tilgungen und der Restlaufzeiten von erheblichem Volumen sind. Durch die Vergabe der Sondertilgungsrechte übernehmen die Kreditinstitute also Risiken der vorzeitigen Rückzahlung.

Die Kreditinstitute sind daher bestrebt diesen Risiken bzw. Auswirkungen Rechnung zu tragen, d.h. ihre Refinanzierung dementsprechend anzupassen oder einen Hedge abzuschließen. Falls es die Wettbewerbssituation zulässt, werden sie die Hedgekosten bzw. den Preis für die Risikoübernahme den Darlehensnehmern in Rechnung stellen. Dazu wird eine Bewertung des Sondertilgungsrechtes notwendig.

Da der Zeitpunkt der Entscheidung über die Ausübung der Sondertilgungsoption in der Zukunft liegt, sieht man sich bei der Bewertung mehreren stochastischen, zufälligen Komponenten gegenüber. Neben der Unkenntnis über die Marktzustände in der Zukunft, stellt sich die Frage, wann, in welcher Höhe und ob der Darlehensnehmer die Option der Sondertilgung überhaupt ausübt.

Denn der allgemeine Darlehensnehmer handelt in der Realität keineswegs ausschließlich rational. Vielmehr wird durch Informationsasymmetrien und Marktzutrittsbarrieren ein rationales Verhalten erschwert oder sogar verhindert.

[7] Eine Erzielung von risikolosen Gewinnen mit positiver Wahrscheinlichkeit ist ohne Einsatz von Kapital nicht möglich. Vgl. dazu Brigo und Mercurio [5].

In dieser Arbeit werden wir die Sondertilgungsrechte nach rationalen Gesichtspunkten betrachten und preisen. Anschließend werden wir ein Modell zur Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten angeben, um durch Methoden der Statistik zu bestimmen, welcher Anteil für ein Kreditinstitut im Mittel zu hedgen oder in der Refinanzierung zu berücksichtigen wäre.

Bevor wir nun zu einer formalen Definition der Kreditkondition kommen, wird das Marktmodell formuliert und die zur Bewertung relevanten Finanztitel eingeführt.

Kapitel 2

Der Kredit in einem finanzmathematischen Modell

2.1 Das Marktmodell

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein diskreter, arbitragefreier Anleihen- bzw. Bondmarkt unterstellt, auf dem Finanztitel gehandelt werden.

Wir betrachten einen Zeithorizont $[0, T]$, $T < \infty$, mit T Perioden. Im Ausgangszeitpunkt $t = 0$ und am Ende einer jeden Periode $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ findet Handel statt.

Der Markt ist ein Markt unter Unsicherheit. Wir definieren Ω, mit

$$|\Omega| < \infty,$$

als den Zustandsraum, der die Umweltzustände beschreibt. Dabei wird nur ein $\omega \in \Omega$ in jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ realisiert.

Der unterstellte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ mit endlicher Filteration $\mathbf{F}$,

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ \ldots \ \subset \mathcal{F}_T,$$

gewährleistet, dass nur zu diskreten Zeitpunkten gehandelt wird und endlich viele Umweltzustände existieren. Die Sigma-Algebra $\mathcal{F}_t$ wird dabei in üblicher Weise als bis zum Zeitpunkt t eingetretene Ereignisse bzw. aufgetretene Preise interpretiert. Die endliche Filteration bezeichnet man daher auch als Informationsverlauf.

Definition 2.1.1 ***Nullkuponanleihe, Zerobond***

Eine Nullkuponanleihe ist ein Finanztitel P_s, der zum Fälligkeitszeitpunkt $t = s$ in jedem Zustand $\omega \in \Omega$ eine Geldeinheit an den Inhaber der Anleihe auszahlt und für $t \neq s$ keine Zahlungen aufweist.

$$\big(P(s,t)\big)_{s=0,\ldots,T}, \quad P(s,t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei dabei der adaptierte Preisprozess des Zerobonds P_t für den gilt:

$$\begin{aligned} P(s,t) &> 0 \text{ für } 0 \leq s \leq t \leq T, && (2.1)\\ P(t,t) &= 1 \text{ für } 0 \leq t \leq T \text{ und} && (2.2)\\ P(s,t) &= 0 \text{ für } T \geq s > t \geq 0 && (2.3) \end{aligned}$$

Sei nun $P(0,\cdot)$ der Vektor der bekannten, festen Preise in $t = 0$ und $P(s,\cdot)$, $s = 1,\ldots,T$, der Vektor der zufälligen Preise der Nullkuponanleihen in $t = s > 0$:

$$P(0,\cdot) = \begin{bmatrix} P(0,1) \\ P(0,2) \\ \vdots \\ P(0,T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^T, \quad P(s,\cdot) = \begin{bmatrix} P(s,1) \\ P(s,2) \\ \vdots \\ P(s,T) \end{bmatrix} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T.$$

Wir nehmen an, dass die Nullkuponanleihen (Zerobonds) mit Fälligkeiten in den einzelnen Handelszeitpunkten $t = 1,\ldots,T$ als Basisfinanzgüter bereits auf dem Markt gehandelt werden[1]. Der Zerobond mit Fälligkeit in t ist das t-te Basisfinanzgut des Marktes.

Ein Portfolio aus Zerobonds auf diesem Markt ist ein Vekor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^T$$

mit Wert $x^{Tr}P(0,\cdot)$ in $t = 0$ und $x^{Tr}P(s,\cdot)$ in $t = s$. x_i, $i = 1,\ldots,T$, bezeichnet dabei die im Portfolio in den Zerobond P_i investierten Anteile. x^{Tr} ist der transponierte Vektor x.

Der Zerobond mit nur noch einer Periode Restlaufzeit spielt in unserem Modell eine besondere Rolle:

Definition 2.1.2 ***Spot-Bond***

Der Spot-Bond ist in jedem Handelszeitpunkt t der Zerobond P_{t+1} mit nur noch einer Periode Restlaufzeit. Unabhängig vom realisierten Umweltzustand in $t+1$ zahlt der Spot-Bond in $t+1$ eine Geldeinheit aus. Aufgrund der sicheren Auszahlung in $t+1$ wird er als risikolos[2] angesehen.

Der Preis des Spot-Bonds in t ist $P(t,t+1)$.

---

[1]Kann diese Annahmen nicht getroffen werden, so reicht die Annahme der Arbitragefreiheit und der Hedgebarkeit aus, um das Marktmodell um die Nullkuponanleihen zu erweitern.

[2]Risikolos ist hier im Sinne des Preisrisikos gemeint. Bonitätsrisiken werden hierbei nicht berücksichtig.

Satz 2.1.1 ***Existenz einer risikolosen Anlage***

Zu jedem Zeitpunkt existiert die Möglichkeit einer risikolosen Anlage, d.h. für jedes $t = 0, \ldots, T-1$ gibt es ein $\mathcal{F}_t$-meßbares Portfolio

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T$$

mit

$$\mathbb{P}(X_t^{Tr} P(t, \cdot) > 0) = 1, \quad X_t^{Tr} P(t+1, \cdot) = 1.$$

Beweis:

Die risikolose Anlage ist durch den Spot-Bond gegeben, d.h. die Portfolien $\big(X_t\big)_{t=0,\ldots,T-1}$ mit

$$X_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow x_{t+1} \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \in \mathbb{R}^T$$

erfüllen die Bedingungen des Satzes:

$$\mathbb{P}(X_t^{Tr} P(t, \cdot) > 0) \quad = \quad \mathbb{P}(P(t, t+1) > 0) \quad \underbrace{=}_{(2.1)} \quad 1$$

und

$$X_t^{Tr} P(t+1, \cdot) \quad = \quad P(t+1, t+1) \quad = \quad 1$$

$\square$

Definition 2.1.3 ***Geldmarktkonto***

Das Geldmarktkonto ist die thesaurierende Investition in die risikolose Anlage, die in $t = 0$ mit einer Geldeinheit startet. Der adaptierte stochastische Prozess $\mathcal{X}^0 = \big(\mathcal{X}_t^0\big)_{t=0,\ldots,T}$ sei der Wertprozess des Geldmarktkontos.

Der Wertprozess des Geldmarktkontos beschreibt die Anlagestrategie bei der in $t = 0$ eine Geldeinheit in $\frac{1}{P(0,1)}$ Anteile des Spot-Bonds P_1 investiert und in $t = 1$ die Auszahlung $\frac{1}{P(0,1)}$ wieder in $\frac{1}{P(0,1)\,P(1,2)}$ Anteile des Spot-Bonds für den nächsten Zeitraum anlegt. Dieses Vorgehen wiederholt sich in jedem Zeitpunkt $t > 0$, so dass sich für den Wertprozess folgende Entwicklung ergibt:

$$\mathcal{X}_0^0 = 1, \quad \mathcal{X}_t^0 \quad = \quad \prod_{s=0}^{t-1} \frac{1}{P(s, s+1)}, \quad t = 1, \ldots, T \tag{2.4}$$

Definition 2.1.4 ***Diskontprozess***

Der Diskontprozess beschreibt den Kehrwert der Wertentwicklung des Geldmarktkontos.

Wir definieren den Diskontprozess in $t = 0$ *mit* $D_0 = \big(D(0,t)\big)_{t=0,\dots,T}$ *mit*

$$D(0,t) = \frac{1}{\mathcal{X}_t^0}.$$

Dadurch erhält man $D(0,t)$ *wie folgt:*

$$D(0,t) = \prod_{s=0}^{t-1} P(s,s+1) \quad > 0 \tag{2.5}$$

Bemerkung 2.1.1

Betrachtet man den Diskontprozess in einem anderen Zeitpunkt $l \neq 0$ *ergibt sich der Prozess* D_l *analog durch den Kehrwert des Wertprozesses einer Anlage von 1 Geldeinheit in das Geldmarktkonto zum Zeitpunkt* l*. Der Wertprozess dieser Anlage ergibt sich als*

$$(\frac{\mathcal{X}_t^0}{\mathcal{X}_l^0})_{t \geq l}.$$

Damit gilt für den Diskontierungsprozess

$$D(l,t) = \prod_{s=l}^{t-1} P(s,s+1) \quad > 0.$$

Sowohl $D(l,t)$ *als auch* $\mathcal{X}_t^0$, $0 \leq l \leq t \leq T$ *sind per Definition previsible Zufallsvariablen, d.h. sie sind* $\mathcal{F}_{t-1}$*-messbar für alle* $t \in [l,T]$, $0 \leq l \leq T$.

Das Konzept der Portfolioaktualisierungen wollen wir nun formaler angeben:

Definition 2.1.5 ***Handelsstrategie***

Eine Handelsstrategie H *ist ein adaptierter Prozess*

$$H = \big(H_t\big)_{t=0,\dots,T-1},$$

$$H_t = \begin{bmatrix} H_{1,t} \\ H_{2,t} \\ \vdots \\ H_{T,t} \end{bmatrix} : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T.$$

Dabei ist $H_{j,t}$ *der Anteil des Finanzgutes* j *am Portfolio in der Periode* $(t,t+1]$*. Das Portfolio wird im Anschluss an die Informationen, sprich die Kenntnis des Umweltzustandes und damit der Preise und Auszahlungen, in* t *gebildet und bis* $t+1$ *gehalten.*

Der Wertprozess der Handelsstrategie ist definiert durch

$$V = \big(V_t\big)_{t=1,\ldots,T}, \quad V_t = H_{t-1}^{Tr}\, P(t,\cdot).$$

H_{t-1}^{Tr} *bezeichnet dabei den transponierten Vektor* H_{t-1}. *Zur Verdeutlichung wird häufig der Wertprozess auch mit* $V(H)$ *bzw.* $V_i(H)$ *bezeichnet.*

Der zur Handelsstrategie gehörende Entnahmeprozess $\rho = \big(\rho_t\big)_{t=0,\ldots,T}$ *wird definiert durch*

$$\rho_t \quad = \quad H_{t-1}^{Tr}\, P(t,\cdot) - H_t^{Tr}\, P(t,\cdot)$$

Häufig schreibt man auch $\rho(H)$ *bzw.* $\rho_t(H)$. *Es ist*

$\rho_0 = -H_0^{Tr}\, P(0,\cdot)$	–	die zur Bildung des Portfolios benötigte Entnahme
$\rho_t = H_{t-1}^{Tr}\, P(t,\cdot) - H_t^{Tr}\, P(t,\cdot)$	–	der Wert des Portfolios in t abzüglich des reinvestierten Betrages Entnahme in t, $0 \leq t \leq T$
$\rho_T = H_{T-1}^{Tr}\, P(T,\cdot)$	–	der Endwert der Handelsstrategie

Definition 2.1.6 ***Claim***

Ein Claim ist ein adaptierter reelwertiger Prozess $C = \big(C(t)\big)_{t=1,\ldots,T}$, *der dem Inhaber dieses Claims Auszahlungen in Höhe von* $C(t)$ *im Zeitpunkt t erbringt.*

Definition 2.1.7 ***Duplizierbarkeit***

Ein beliebiger Claim C ist duplizierbar, falls eine Handelsstrategie H existiert, die in jedem Zeitpunkt dieselbe Auszahlung leistet wie der Claim, d.h. es gilt

$$C(t) \quad = \quad \rho_t(H) \qquad \text{für } t = 1,\ldots,T.$$

Eine solche Handelsstrategie wird als Hedge bezeichnet. Der Claim heißt dann auch absicherbar (hedgebar).

Ist ein Claim duplizierbar, so ist sein Preis in t auf dem arbitragefreien Markt durch

$$\mathtt{p}_t(C) \quad = \quad H_t^{Tr}\, P(t,\cdot) \tag{2.6}$$

eindeutig festgelegt[3] und der Claim ist zu diesem Preis handelbar. $\mathcal{C}$ sei die die Menge aller auf dem Bondmarkt duplizierbaren und damit handelbaren Finanztitel.

Für den betrachteten Bondmarkt wird Arbitragefreiheit vorausgesetzt, d.h. es gibt neben dem wahren Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ein aquivalentes Martingalmaß[4] Q, so dass der diskontierte Preisprozess $\big(D(0,t)\, P(t,\cdot)\big)_{t=0,\ldots,T}$

[3] Vgl. [17] zur Preisfestsetzung in einem n-Perioden Modell.

[4] Vgl. dazu die Arbeit von Stanley R. Pliska [20]

ein Martingal bzgl. Q ist. Unter diesem Maß ergibt sich daher für die Zerobonds P_t, $t > 0$, mit Claimauszahlung $P_t(t) = 1$ in t:

$$\begin{aligned} P(s,t) &= \frac{1}{D(0,s)}\, \mathbb{E}^Q\big[\, D(0,t)\, P_t(t)|\mathcal{F}_s \,\big] && (2.7)\\ &= \frac{1}{D(0,s)}\, \mathbb{E}^Q\big[\, D(0,t)|\mathcal{F}_s \,\big] && (2.8)\\ &= \mathcal{X}_s^0\, \mathbb{E}^Q\big[\, \frac{1}{\mathcal{X}_t^0}|\mathcal{F}_s \,\big] && (2.9) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq s \leq t \leq T$.

Als Spezialfall beachte man, dass für den Spot-Bond gilt:

$$\begin{aligned} P(t-1,t) &= \mathcal{X}_{t-1}^0\, \mathbb{E}^Q\big[\, \frac{1}{\mathcal{X}_t^0} \,|\, \mathcal{F}_{t-1} \,\big] && (2.10)\\ &= \frac{\mathcal{X}_{t-1}^0}{\mathcal{X}_t^0} && (2.11)\\ &= \frac{D(0,t)}{D(0,t-1)} && (2.12) \end{aligned}$$

Für die weitergehende arbitragefreie Bepreisung von Handelsstrategien und duplizierbaren Claims benötigen wir den folgenden Satz.

Satz 2.1.2
Für eine Handelsstrategie H gilt

$$D(0,s)\, H_s^{Tr}\, P(s,\cdot) \quad = \quad \mathbb{E}^Q\big[\sum_{t=s+1}^{T} D(0,t)\, \rho_t(H)\,|\mathcal{F}_s\,\big], \quad s = 0,\ldots,T-1. \tag{2.13}$$

Das heißt, dass der diskontierte Portfoliowert der Handelsstrategie zum Zeitpunkt s der bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes gebildete Erwartungswert der Summe der abdiskontierten zukünftigen Entnahmen ist.

Einen Beweis zu diesem Satz findet sich im Buch von Albrecht Irle [17], Seite 79[5].

Nun ergibt sich dadurch für den Preis des durch die Handelsstrategie H duplizierbaren Claim C:

$$\mathrm{p}_0(C) = H_0^{Tr}\, P(0,\cdot) = \mathbb{E}^Q\big[\sum_{t=1}^{T} D(0,t)\, \rho_t(H)|\mathcal{F}_0\,\big] = \mathbb{E}^Q\big[\sum_{t=1}^{T} D(0,t)\, C_t|\mathcal{F}_0\,\big]. \tag{2.14}$$

[5]Die Bedingung der Integrierbarkeit ist per Definition von Ω gegeben

bzw.

$$\begin{aligned}
\mathtt{p}_s(C) &= H_s^{Tr}\, P(s,\cdot) \\
&= \frac{1}{D(0,s)}\, \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{t=s+1}^{T} D(0,t)\, \rho_t(H)|\mathcal{F}_s\Big] \qquad (2.15)\\
&= \frac{1}{D(0,s)}\, \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{t=s+1}^{T} D(0,t)\, C_t|\mathcal{F}_s\Big]
\end{aligned}$$

für alle $0 \le s \le T-1$.

Beim Handel mit Nullkuponanleihen muss man dabei beachten, dass die Nullkuponanleihe nach dem Fälligkeitsdatum wertlos ist und wir deshalb den Preisprozess für einen Zeronbond nach seiner Fälligkeit identisch 0 gesetzt haben:

$$P(s,t) = 0 \quad \forall\, 0 \le t < s \le T.$$

Darüber hinaus legen wir fest, dass nur Handelsstrategien H betrachtet werden mit

$$H_{t,s} = 0 \quad \forall\, t = 1,\dots T, \quad s = t,\dots,T.$$

Zur Erinnerung: $H_{t,s}$ ist dabei der Anteil des t-ten Basisfinanzgutes, also des Zerobonds mit Fälligkeit in t, im Portfolio für die Periode $(s, s+1]$.

Durch diese Konventionen haben wir nun ein Bondmarktmodell vorliegen, für das wir annehmen, dass es arbitragefrei ist.

2.2 Diskontierungsfunktion und weitere Definitionen

Zur Beschreibung von Krediten und seinen Zahlungsströmen benötigen wir eine Methode, den Zahlungen des Kredites in der Zukunft einen Wert zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$ zuzuweisen. Zum Zeitpunkt t ist die Familie $\big(P(t,s)\big)_{s>t}$ der Zerobondpreise auf unserem Bondmarkt zu beobachten. Nach Kenntnis des Umweltzustandes in t sind diese Preis fest. Es ist der Wert, den ein Investor in t zahlen würde um in s sicher eine Geldeinheit zu erhalten. Der Preis $P(t,s)$ kann somit auch als der auf t tranformierte Wert für eine Geldeinheit in $s \ge t$ interpretiert werden.

$P(t,\cdot)$ bezeichnet man dann als Diskontierungsfunktion in t und $P(t,s)$ als Diskontierungsfaktor zum Zeitpunkt t für die Restlaufzeit $(s-t)$.

Die Diskontierungsfaktoren $\{P(t,s); 0 \le t < s \le T\}$ transformieren also sichere Zahlungen in der Zukunft in sichere Zahlungen zum Zeitpunkt t. Sie stellen ein Maß zur Beurteilung des Zeitwertes (Barwert) eines zukünftigen Zahlungsstroms dar. Unabhängig vom betrachteten Finanztitel sind die Diskontierungsfaktoren zur Bewertung zukünftiger Zahlungsströme notwendig.

Aus diesem Grund ist die Menge der zum Bewertungsstichtag $t \geq 0$ aktuellen Diskontierungsfaktoren $P(t,s)_{s\in(t,T]}$ von elementarer Bedeutung für die Bewertung der Finanztitel mit Zahlungen in der Zukunft. Zu diesen zählt auch der Kredit.

Betrachten wir nun die Anlage einer Geldeinheit in t in den Zerobond mit Fälligkeit s. In t werden für die eine Geldeinheit $\frac{1}{P(t,s)}$ Anteile des Zerobonds gekauft. Diese haben im Zeitpunkt s, aufgrund der sicheren Auszahlung von 1 pro Anteil, einen Wert von $\frac{1}{P(t,s)}$ Geldeinheiten. Betrachten wir die Verzinsung dieser Anlage so erhalten wir als Rendite pro Periode $Y(t,s)$[6]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P(t,s)} &= (1+Y(t,s))^{s-t} \\
\Leftrightarrow Y(t,s) &= \left(\frac{1}{P(t,s)}\right)^{\frac{1}{s-t}} - 1
\end{aligned}$$

Definition 2.2.1 ***diskrete Zero-Rendite, diskreter Kassazins***[7]

$Y(t,s)$ definieren wir als die in t geltende Rendite[8] eines festverzinslichen Wertpapiers mit Fälligkeit in s. Formal ist die Rendite $Y = \big(Y_t\big)_{t=0,\dots,T}$ ein stochastischer Prozess mit

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y(t,1) \\ Y(t,2) \\ \vdots \\ Y(t,T) \end{bmatrix} : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T.$$

Dabei sei zu beachten, dass die Renditen, analog zu den Zerobondpreisen,

$$Y(t,s) = 0 \qquad \text{für alle } t > s$$

gesetzt werden.

Die Zerorendite bezeichnen wir auch als diskreten Kassa- oder Spotzins. $\big(Y(0,s)\big)_{s=1,\dots,T}$ bezeichnen wir als Anfangskassazinskurve (Anfangsrenditekurve, anfängliche Zinsstrukturkurve). Entsprechend ist $\big(Y(t,s)\big)_{s=t+1,\dots,T}$ die Zinsstrukturkurve in der t-ten Periode.

Bemerkung 2.2.1

In der Praxis werden die Zinsen und auch die Renditen üblicherweise als Jahreszinsen (Zins per anno (p.a.)) angegeben. Bei einer Restlaufzeit von

[6] Hier wird unterstellt, dass die Periode genau eine Zeiteinheit dauert und alle Perioden identisch lang sind.

[7] Zu den unterschiedlichen Verzinsungsarten vergleiche [21] S. 4-5.

[8] Renditen sind nicht eindeutig definiert. Üblicherweise und in dieser Arbeit wird die Zero-Rendite jedoch als konstante Wachstumsrate des Zerobonds pro Periode bis zur Fälligkeit definiert.

$(s-t)$ Jahren und einer l-maligen unterjährigen Aufzinsung, identische Periodenlängen der Jahre und der unterjährigen Perioden vorausgesetzt, erhält man für die Jahresrendite

$$\begin{aligned} P(t,s) &= \left(1+\frac{Y^l(t,s)}{l}\right)^{l\,(s-t)} \\ \Leftrightarrow Y^l(t,s) &= \left(\frac{1}{P(t,s)}\right)^{\frac{1}{l\,(s-t)}}. \end{aligned}$$

Für unterschiedliche Periodenlängen

$$\tau(t_i,t_{i+1}) \neq \tau(t_j,t_{j+1}) \text{ für } i \neq j,\ t \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m = s$$

ausgedrückt als Anteile eines Jahres gemäß der Zinstagekonvention, erfüllt die Rendite per anno folgende Gleichung:

$$P(t,s) = \prod_{i=0}^{m-1} \left(1+\tau(t_i,t_{i+1})\,Y(t,s)\right)$$

Wie die Periodenlänge $\tau(t_i,t_{i+1})$ dabei ausfällt und unter welchen Bedingungen sie ermittelt wird, hängt von der gewählten Zinstagekonvention (Day-Count-Convention) ab.

Definition 2.2.2 ***Zinstagekonvention/ Daycount-Convention***[9]

Die Zinstagekonvention (DC) legt die Länge eines Zeitraumes $(s,t]$ fest. Im Allgemeinen gibt es 3 Zinstagemethoden:

1. *Die deutsche Zinsmethode bzw. 30/360 bedeutet, dass für jeden Kalendermonat, ungeachtet der tatsächlichen Anzahl der Monatstage, 30 Zinstage berücksichtigt werden. Das Jahr wird mit 360 Zinstagen angegeben. Für einen Zeitraum $(s,t]$ bedeutet dies für $DC = 30/360$ einen Anteil $\tau(s,t)_{DC}$ von*

$$\tau(s,t)_{DC} = \frac{(t-s)_{DC}}{360}.$$

$(t-s)_{DC}$ gibt dabei die Anzahl der Zinstage zwischen den Zeitpunkten s und t gemäß Konvention DC an.

2. *Bei der französischen Zinsmethode oder Act/360 werden die Zinstage taggenau, d.h. entsprechend den tatsächlichen Monatstagen ermittelt. Jeder Monat hat also genauso viele Zins- wie Kalendertage. Das Jahr hingegen wird nur mit 360 Kalendertagen berechnet. Somit erhält man für DC = Act/360:*

$$\tau(s,t)_{DC} = \frac{(s-t)_{DC}}{360} = \frac{t-s}{360}.$$

[9] Vgl. auch [21]

3. *Die englische Zinsmethode oder Act/Act berechnet den Zeitraum* $(s,t]$ *sowohl für die Zinstage als auch das Jahr taggenau, d.h. die Anzahl der Zinstage zwischen* s *und* t *entspricht der Anzahl der Kalendertage und das Jahr hat 365 bzw. 366 (Schaltjahr) Tage. Für* $DC = Act/Act$ *ergibt sich somit*[10]*:*

$$\tau(s,t)_{DC} = \frac{(t-s)_{DC}}{365(366)} = \frac{t-s}{365(366)}.$$

Definition 2.2.3 ***Short-Rate, risikoloser Zins***
Als Spot-Rate in t *definieren wir die einperiodige Zerorendite, d.h.*

$$\begin{aligned} Y(t,t+1) &= \frac{1}{P(t,t+1)} - 1 && (2.16)\\ &= \mathcal{X}^0_{t+1}\,\frac{1}{P(t,t+1)\,\mathcal{X}^0_{t+1}} - 1 && (2.17)\\ &= \mathcal{X}^0_{t+1}\,\frac{1}{\mathcal{X}^0_t} - 1 && (2.18)\\ & && (2.19)\end{aligned}$$

Die Short-Rate in t *ist also die Rendite des Geldmarktkontos für die nächste Periode* $(t,t+1]$ *und wird daher auch als risikoloser Zins für diese Periode bezeichnet.*

Definition 2.2.4 ***Forwardkontrakt***
Ein Forwardkontrakt aus Sicht der long Position[11] *mit Abschlussdatum* t *und Fälligkeit* s*,* $t < s$*, auf einen Finanztitel* $X \in \mathcal{C}$ *mit Preisprozess*

$$\mathtt{p}(X) = \big(\mathtt{p}_t(X)\big)_{t=0,\dots,T}$$

ist ein Claim mit einziger Claimauszahlung $(\mathtt{p}_s(X) - \mathtt{f}_t(X,s))$ *in* s*, der zum Abschlusszeitpunkt* t *nichts kostet.* $\mathtt{f}_t(X,s)$ *ist eine* $\mathcal{F}_t$*-messbare Abbildung und bezeichnet den Forwardpreis von* X *für den Zeitpunkt* s*.*

Der Forwardpreis bestimmt sich somit durch

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{D(0,t)}\,\mathbb{E}^Q\big[\,D(0,s)\,(\mathtt{p}_s(X) - \mathtt{f}_t(X,s))|\mathcal{F}_t\,\big]\\ &= \mathtt{p}_t(X) - \mathtt{f}_t(X,s)\,\frac{1}{D(0,t)}\,\mathbb{E}^Q\big[\,D(0,s)|\mathcal{F}_t\,\big]\\ &= \mathtt{p}_t(X) - \mathtt{f}_t(X,s)\,P(t,s).\end{aligned}$$

[10] Die geklammerte 366 gibt die Anzahl der Tage eines Jahres für ein Schaltjahr an.
[11] Käufer des Forwardkontraktes

Also gilt:

$$\mathtt{f}_t(X, s) \quad = \quad \frac{\mathtt{p}_t(X)}{P(t, s)} \tag{2.20}$$

Bezüglich der weiteren Bewertungsmöglichkeiten für die Finanztitel wird in der Literatur[12] die Existenz des sogenannten Forwardmartingalmaßes in einem arbitragefreien Modell erarbeitet.

Definition 2.2.5 ***Forwardmartingalmaß***
Ein zum wahren Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß Q^s, $0 \leq s$, heißt Forwardmartingalmaß, wenn $\left(\mathtt{f}_t(P_i, s)\right)_{0 \leq t \leq s}$, d.h. der Forwardpreisprozess für den Zeitpunkt s, ein Martingal ist für jedes $1 \leq i \leq T$.

Satz 2.2.1
In einem arbitragefreien Modell mit äquivalentem Martingalmaß Q existiert ein Forwardmartingalmaß Q^s für jeden Handelszeitpunkt s, $0 \leq s$. Q^s hat die Q-Dichte

$$\left.\frac{dQ^s}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_s} \quad = \quad \frac{D(0, s)}{P(0, s)}$$

Für die Bewertung eines hedgebaren Claims C mit $C(l) = 0$, für $l \neq s$, $s \in [0, T]$ und

$$\mathbb{P}(C(s) > 0) \quad > \quad 0$$

gilt somit:

$$\mathtt{p}_t(C) \quad = \quad P(t, s)\, \mathbb{E}^{Q^s}\left[\, C(s) | \mathcal{F}_t \,\right] \text{ für alle } 0 \leq t \leq s. \tag{2.21}$$

Definition 2.2.6 ***Forward Short-Rate***
Die Forward Short Rate $f_t(s-1, s)$ ist die sich auf Basis der Informationen in t ergebende Zerorendite für die Periode $(s-1, s]$. Sie ergibt sich analog der Short-Rate als Rendite des Zerobond mit Fälligkeit in s bei Erwerb zum Forwardpreis $\mathtt{f}_t(P_s, s-1)$ in $s-1$:

$$f_t(s-1, s) \quad = \quad \frac{1}{\mathtt{f}_t(P_s, s-1)} - 1 \quad = \quad \frac{P(t, s-1)}{P(t, s)} - 1$$

Für die Forward Short Rate gilt

$$f_{s-1}(s-1, s) = \frac{1}{P(s-1, s)} - 1 = Y(s-1, s),$$

d.h. auf Basis der Informationen in $s-1$ ist die Forward Short-Rate gleich der deterministischen Zerorendite.

[12] Vgl. u.a. [17], S. 222 ff..

Betrachten wir nun diese Rendite als Claimauszahlung in s, so ergibt sich unter dem Forwardmartingalmaß:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{Q^s}\left[\,Y(s-1,s)|\mathcal{F}_t\,\right] \\
&\underbrace{=}_{(*)} \quad \frac{P(0,s)}{P(t,s)\,D(0,t)}\,\mathbb{E}^Q\left[\,Y(s-1,s)\,\frac{1}{P(0,s)}\,D(0,s)|\mathcal{F}_t\,\right] \\
&= \quad \frac{1}{P(t,s)}\,\frac{1}{D(0,t)}\,\mathbb{E}^Q\left[\,\left(\frac{D(0,s-1)}{D(0,s)}-1\right)D(0,s)|\mathcal{F}_t\,\right] \\
&= \quad \frac{1}{P(t,s)}\,(P(t,s-1)-P(t,s)) \\
&= \quad \frac{P(t,s-1)}{P(t,s)}-1 \\
&= \quad f_t(s-1,s).
\end{aligned}
$$

$(*)$ gilt dabei, da

$$
\frac{P(0,s)}{P(t,s)\,D(0,t)} \quad = \quad \frac{1}{\mathbb{E}^Q\left[\frac{D(0,s)}{P(0,s)}\mid\mathcal{F}_t\right]} \quad = \quad 1.
$$

Die Forward Short-Rate $f_t(s-1,s)$ für Periode s ist also die unter dem Forwardmartingalmaß auf Basis der Informationen in t erwartete Short-Rate für diese Periode.

$$
\big(f_t(s-1,s)\big)_{s\geq t+1}
$$

ist die sich auf Basis der Informationen in t ergebende Forward-Short-Rate-Zinskurve für die Perioden $(s-1,s]$, $s>t$.

Bevor wir nun zur Eingliederung des Kredites in diesen Finanzmarkt kommen, führen wir noch zwei der wichtigsten Referenzzinssätze ein, die die Grundlage für eine große Anzahl an Finanzmarktgeschäften bilden.

Definition 2.2.7 ***Libor, Euribor***

Als Libor oder Euribor $L(t,s)$ bezeichnen wir die lineare[13] Rendite für eine Anlage über den Zeitraum $(t,s]$.

$$
L(t,s) := \frac{1\,-\,P(t,s)}{\tau(t,s)\,P(t,s)} \qquad 0\leq t\leq s\leq t. \tag{2.22}
$$

$\big(L(t,s)\big)_{s\geq t+1}$ sei die Liborzinskurve (Euriborzinskurve) zum Zeitpunkt t.

Anschaulich betrachtet entsprechen Libor und Euribor der linearen Rendite per anno einer Anlage in den Zerobond P_s im Zeitpunkt t bis zur Fälligkeit des Bonds.

[13] Zur Definition eines linearen Zinses siehe [21], S.4.

Aus der Definition ergibt sich direkt, dass der Liborzins $L(t,s)$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Durch Umformungen der Gleichung (2.22) erhält man für den Preis in t:

$$1 = P(t,s)\big(1 + L(t,s)\,\tau(t,s)\big) \tag{2.23}$$

$$\Leftrightarrow P(t,s) = \frac{1}{1 + L(t,s)\,\tau(t,s)}. \tag{2.24}$$

Bemerkung 2.2.2 ***Festsetzung von Libor und Euribor in der Praxis***

Der Libor[14] *und der Euribor*[15] *sind Referenzzinssätze im Interbankengeschäft. Sie werden linear verzinst, jeden Tag neu festgelegt und nur für Laufzeiten bis zu einem Jahr quotiert. Dabei wird der Libor jeden Tag um 11 Uhr Ortszeit in London festgelegt und ergibt sich aus den Sätzen, zu denen die wichtigsten international tätigen Banken der British Bankers' Association in London am Markt Gelder von anderen Banken aufnehmen beziehungsweise angeboten bekommen.*

Der Euribor ist im Grunde das Pendant des Libors für den Euroraum. Dort melden bis zu 57 Kreditinstitute, darunter 11 deutsche, ihre Briefsätze für Ein- bis Zwölfmonatsgelder um 11 Uhr Brüsseler Zeit[16] *an einen Informationsanbieter, der Durchschnittssätze ermittelt und diese als Euribor über Informationsdienste veröffentlicht.*

Definition 2.2.8 ***Linearer Forwardzins***

Forwardzinsen beschreiben, basierend auf den Informationen $\mathcal{F}_t$ der Gegenwart t den Zinssatz für einen in der Zukunft liegenden Zinszeitraum $(t+n,s]$, $0 \leq n \leq s-t$. Der Forwardzins $F_t(t+n,s)$ aus Sicht des Zeitpunktes t für den Anlagezeitraum $(t+n,s]$ entspricht der Rendite der Anlage in eine Zerobond P_s zum Forwardpreis $\mathtt{f}_t(P_s,t+n)$ über den Zeitraum $(t+n,s]$:

$$F_t(t+n,s) = \frac{1 - \mathtt{f}_t(P_s,t+n)}{\tau(t+n,s)\,\mathtt{f}_t(P_s,t+n)} \tag{2.25}$$

$$= \frac{1 - \frac{P(t,s)}{P(t,t+n)}}{\tau(t+n,s)\,\frac{P(t,s)}{P(t,t+n)}} \tag{2.26}$$

$$= \frac{P(t,t+n) - P(t,s)}{\tau(t+n,s)\,P(t,s)} \tag{2.27}$$

$$= \frac{1}{\tau(t+n,s)}\left(\frac{P(t,t+n)}{P(t,s)} - 1\right) \tag{2.28}$$

[14] London Interbank Offered Rate

[15] Euro Interbank Offered Rate

[16] Dieses Fixing nennt man auch Fixing B. Ein weiteres Fixing (Fixing B) findet um 12 Uhr Brüsseler Zeit statt.

2.3 Der Kredit

2.3.1 Die allgemeine Kreditkondition

Nachdem wir bisher die Marktumgebung des Kredites definiert haben, kommen wir nun zur Definition der Kreditkondition und der Eingliederung des Kredites in das Marktumfeld. Wir betrachten den Kredit ausschließlich aus der Sicht des Kreditinstitutes.

Für den betrachteten Zeithorizont $[0, T]$ definieren wir $s \in \{0, 1, 2, \dots T\}$ als einen Tag. An jedem der $T+1$ Tage findet Handel statt. Die Periodenlängen $\tau(s,t)_{DC}$ geben den Bruchteil eines Jahres gemäß einer Zinstagekonvention DC an. In der Folge werden wir einen, der jeweiligen Zinstagekonvention entsprechenden, Jahresanteil für die Periode $(s, t]$ nur noch mit $\tau(s,t)$ bezeichnen.

Für die Bewertung des Kredites und der Sondertilgungsoptionen ist die Definition der Zahlungsansprüche, die sich aus der Vergabe des Kredites ergeben von zentraler Bedeutung. Die Bedingungen, die diese Zahlungsansprüche generieren, sind die wesenlichen Eigenschaften eines Kredites.

Dabei definiert die Kreditkondition alle Bedingungen und damit Eigenschaften des Kredites. Während in anderen Fällen die Sondertilgungsoption als Bestandteil der Kreditkondition definiert wird, wird in dieser Arbeit die Sondertilgungsoption von der übrigen Kreditkondition abstrahiert, um sie getrennt zu bewerten.

Definition 2.3.1 ***Kreditkondition***
Die Kreditkondition ist ein stochastischer Prozess $K = \big(K(t)\big)_{t=0,\dots,T}$,

$$K(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

bestehend aus den drei stochastischen Prozessen

$$\begin{array}{llcl} \text{1.) Auszahlungsstrom:} & -A & = & \big(-A(t)\big)_{t=0,\dots,T}, \\ \text{2.) Zinszahlungsstrom:} & Z & = & \big(Z(t)\big)_{t=0,\dots,T}, \\ \text{3.) Tilgungsstrom:} & U & = & \big(U(t)\big)_{t=0,\dots,T}. \end{array}$$

Für die Abhängigkeit dieser Zahlungsströme von K gilt:

$$K = -A + Z + U,$$

d.h.

$$K(t) = -A(t) + Z(t) + U(t) \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

In unserem Bondmarkt ist die Kreditkondition ein Claim mit den Auszahlungen $K(t)$ im Zeitpunkt t, $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.

Für den Nominalwert N des Kredites gilt[17]*:*

$$N \quad = \quad \sum_{t=0}^{T} A(t) \quad = \quad \sum_{t=0}^{T} U(t).$$

Die Zufallsvariabelen $A(t), Z(t)$ und $U(t)$ sind nicht-negativ für alle t, in dem Sinne dass sie $\mathbb{P}$-fast sicher größer oder gleich 0 sind.

Die Prozesse $-A$ und U sind an die Filteration $\mathbf{F}$ adaptierte Prozesse.

Die $n+1$ Zeitpunkte zu denen Zahlungen zwischen Kreditgeber und Kreditnehmer fließen, bezeichnen wir als Zahlungszeitpunkte.

$$\mathcal{T} := \{0, 1, \ldots, T\} \,/\, \{t : \, \mathbb{P}\big(-A(t) = Z(t) = U(t) = 0\big) = 1; t \in [0, T]\}$$

sei somit die Menge der Zahlungszeitpunkte. Der erste Zahlungstermin

$$t_0 \quad := \quad \min\{t : \, t \in \mathcal{T}\}$$

definiert dabei den Laufzeitbeginn, der letzte Zahlungstermin

$$t_n \quad := \quad \max\{t : \, t \in \mathcal{T}\}$$

das Vertragslaufzeitende.

Die Pfade der stochastischen Prozesse ergeben sich durch ihre Abhängigkeiten untereinander.

Nehmen wir für unsere Betrachtungen an, dass der Kreditnehmer das Geld vollständig benötigt. So ergibt sich als Konsequenz die Bedingung

$$\max\{t : A(t)(\omega) > 0\} < \min\{t : U(t)(\omega) > 0\} \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Den Zeitpunkt der ersten Tilgungszahlung definieren wir pfadweise durch

$$t_\lambda(\omega) \quad := \quad \min\{t : U(t)(\omega) > 0\}.$$

Der Zahlungsstrom $K(t)$ besteht also genau genommen nur entweder aus den Zahlungen

$$K(t) \quad = \quad -A(t) + Z(t), \qquad \text{für } t < t_\lambda$$

oder aus

$$K(t) \quad = \quad Z(t) + U(t), \qquad \text{für } t \geq t_\lambda.$$

Die erste Zahlung $K(t_0)$ des Darlehens findet in t_0 statt und besteht nur aus der ersten Auszahlung $-A(t_0)$. Sie generiert gleichzeitig die erste von Null verschiedene Restschuld $N(t_0)$. Der Restschulprozess $NS = \big(N(t)\big)_{t \geq 0}$

[17]Ein Disagio oder Agio in der Auszahlung des Darlehens wird hier nicht berücksichtigt. Eine Erweiterung der Kreditkondition ist aber ohne größeren Aufwand durch Anpassung der ersten Auszahlung möglich

ergibt sich aus dem Auszahlungs- und Tilgungsprozess in der Art und Weise, dass

$$N(t) = \sum_{s=0}^{t} A(s) - U(s).$$

Der Zinsprozess bildet nunmehr also in jedem t die Differenz aus $K(t)$ und $-A(t)$ bzw. $U(t)$:

$$Z(t) = K(t) + A(t) \qquad \text{für } t < t_\lambda$$

und

$$Z(t) = K(t) - U(t) \qquad \text{für } t \geq t_\lambda.$$

Die Zinszahlungen $Z(t_i)$ in den Zahlungszeitpunkten $t_i \in \mathcal{T}$ sind definiert als

$$Z(t_i) \quad = \quad N(t_{i-1})\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, S(t_{i-1}, t_i).$$

Dabei ist $\tau(t_{i-1}, t_i)$ eine deterministische Größe, die die Dauer der Periode gemäß der Zinstagekonvention[18] angibt und $S(t_{i-1}, t_i)$ der für die Periode $(t_{i-1}, t_i]$ geltende Kreditzins. So ergibt sich durch den Zinszahlungs- und den Restschuldprozess der previsible[19] Prozess der Zinsen

$$S = \big(S(t_{i-1}, t_i)\big)_{t_i \in \mathcal{T}/\{t_0\}}, \quad S(t_{i-1}, t_i) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Da der Kredit ein Claim ist, suchen wir für die Bewertung des Kredites eine Handelsstrategie H, die die Claimauszahlungen $K(t)$ dupliziert. Für den Marktwert, Preis, des Kredites in t gilt dann:

$$\mathcal{K}_t \quad := \quad \mathtt{p}_t(K) \quad = \quad H_t^{Tr}\, P(t, \cdot).$$

Bemerkung 2.3.1

Sind die Zahlungsströme des Kredites als deterministische Zahlungen

$$\big(k(t)\big)_{t=0,\dots,T}$$

zum Zeitpunkt des Kreditabschlusses $t = 0$ gegeben, so ergibt sich die Handelsstrategie H als Anlageportfolio mit dem Anteil des t-ten Finanzgutes am Portfolio für die Periode $(s, s+1]$

$$H_{t,s} \quad = \quad \left\{ \begin{array}{lll} k(t) & 0 \leq s < t \leq T, & s,t \in \mathbf{N} \\ 0 & & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Der Entnahmeprozess ρ entspricht dann eben den deterministischen Zahlungen $k(t)$ des Kredites:

$$\rho_t = H_{t-1}^{Tr}\, P(t, \cdot) - H_t^{Tr}\, P(t, \cdot) = \left\{ \begin{array}{ll} k(t)\, P(t,t) = k(t) & t \in \mathcal{T} \\ 0 & t \notin \mathcal{T} \end{array} \right\}.$$

[18] Siehe Definition 2.2.2.

[19] Hier ist previsibel bezüglich des vorangegangenen Zahlungszeitpunktes gemeint.

Als Preis, Wert, des Kredites in t erhalten wir

$$\mathcal{K}_t \quad = \quad \sum_{s \geq t, s \in \mathcal{T}} k(s)\, P(t,s). \tag{2.29}$$

Nach Durchnummerierung und Ordnung der Zahlungszeitpunkte $\mathcal{T}$ in

$$\mathcal{T} \quad = \quad \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$$

ergibt sich für den betrachteten Kredit eine Laufzeit von

$$(t_0, t_n] \subseteq [0, T], \quad 0 \leq t_0 < t_n \leq T.$$

In t_0 wird der erste Teil des Darlehens ausgezahlt, in t_n die Restschuld und die letzte Tilgung zurückgezahlt.

2.3.2 Die Kreditarten

Nachdem wir die Kreditkondition allgemein definiert haben, kommen wir nun zur Ausgestaltung der Konditionen und damit zu weiteren Bedingungen pder 3 Kreditprozesse.

Bei Abschluss des Kreditvertrages in $t = 0$ werden einige Punkte in der Kreditkondition verankert. So ist der Auszahlungsprozess zumeist kein stochastischer Prozess, sondern wird zum Abschlusszeitpunkt deterministisch festgelegt. Die Auszahlungen an den Darlehensnehmer bezeichnen wir dann mit

$$A \quad = \quad \big(a(t)\big)_{t \in \mathcal{T}}, \qquad a(t_i) \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall\, t_i \in \mathcal{T}.$$

Ebenso vereinbaren das Kreditinstitut und der Darlehensnehmer einen Tilgungsbeginn t_λ und ein Vertragslaufzeitende t_n.

Definition 2.3.2 ***Zinsbindung***
Die Zinsbindung gibt bei einem Kredit die Dauer an, für die der Kreditzins nicht verändert wird bzw. für die ein bestimmter, festgesetzter Zins gilt. Die Vertragsparteien sind für diesen Zeitraum an den Zins gebunden.

Die Zinsbindungsdauer kann unabhängig von der Vertragslaufzeit definiert werden.[20]

Man unterscheidet Kredite nach ihren **Verzinsungsarten** und ihren **Rückzahlungsmodalitäten**. Bei den Verzinsungsarten differenziert man zwischen variabel und fest verzinstem Kredit.

Beim **variabel verzinsten Kredit** wird, wie der Name schon vermuten lässt, der Zins in regelmäßigen Abständen verändert. Dies geschieht durch

[20] Vgl. §489 BGB Abs. 1. Danach hat der Darlehensnehmer am Ende jeder Zinsbindung ein gesetzliches Kündigungsrecht.

eine Anpassung an einen Referenzzinssatz[21]. Dieser Referenzzinssatz kann theoretisch jeder am Markt quotierte Zins sein. In der Praxis nimmt man üblicherweise die täglich gefixten Euribor- oder Liborzinsen. Man legt fest zu welchen Zeitpunkten (Resetdates) der Kreditzins an den Referenzzins angepasst wird und welches Fixing[22] man für die Anpassung verwendet.

Zinsbindung liegt also nur jeweils zwischen den Resetdates vor.

Definition 2.3.3 ***variabel verzinster Kredit***

Eine Kreditkondition K^v mit $S^v = S(t_0, t_1)$ und

$$S(t_i, t_j) \quad \neq \quad S^v \quad \text{für mindestens einen Zeitraum } (t_i, t_j], t_i, t_j \in \mathcal{T},$$

nennt man variabel verzinster Kredit beziehungsweise variabel verzinstes Darlehen.

Den Preis des Darlehens im Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $\mathcal{K}_t^v$.

Da mindestens ein Zinssatz bei Abschluss des Darlehens nicht deterministisch ist, ist auch der Zinszahlungsstrom Z nicht deterministisch in mindestens dieser Zahlung[23].

Beim **fest verzinsten Darlehen** wird die Zinsbindungsdauer gleich der Vertragsdauer gesetzt und der Zinssatz S ist für die Vertragslaufzeit fest. Dies sichert den Darlehensnehmer für die Zinsbindungsdauer gegen möglicherweise steigende Zinsen ab, verhindert aber auch die Chance auf evtl. fallende Zinsen und eine damit günstigere Kapitalbeschaffung.

Definition 2.3.4 ***fest verzinster Kredit***

Eine Kreditkondition K^f, bei der über die gesamte Dauer der Vertragslaufzeit die Restschuld mit demselben Zinssatz S verzinst wird, d.h.

$$S(t_i, t_j) \quad = \quad S \quad \forall\, t_i, t_j \in \mathcal{T}$$

heißt fest verzinster Kredit beziehungsweise fest verzinstes Darlehen. Vertragslaufzeit und Zinsbindungsdauer sind hier identisch. Der Zinssatz S wird bei Abschluss des Kredites in $t = 0$ festgelegt.

Den Preis des Darlehens in t bezeichnen wir analog zum variabel verzinsten Darlehen mit $\mathcal{K}_t^f$.

[21] In der Praxis ist es auch üblich aufgrund von Kreditrisiken Aufschläge auf diese Zinssätze zu verlangen. Da wir die Kreditrisiken in dieser Arbeit nicht weiter betrachten, wollen wir hier keine Aufschläge berücksichtigen.

[22] Fixing nennt man den zu einem bestimmten Tageszeitpunkt festgesetzten und veröffentlichten Satz eines speziell definierten Zinses.

[23] Üblicherweise wird der Zins in der Praxis in jedem Zeitpunkt angepasst, so dass höchsten die erste Zinszahlung einen deterministischen Charakter hat.

Bezüglich der **Rückzahlungsmodalitäten** unterscheidet man im Allgemeinen drei Arten:

1. **endfälliges Darlehen**
2. **Ratendarlehen** und
3. **Annuitätendarlehen**.

Wir betrachten die Darlehensarten zunächst ohne Sondertilgungsmöglichkeiten.

Beim **endfälligen Darlehen** werden keine Regeltilgungen vorgenommen. Die gesamte Darlehenssumme wird zum Ende der Laufzeit in einer Zahlung zurückgeführt.

Definition 2.3.5 ***endfälliges Darlehen***
Ein Darlehen $K^{\cdot,E}$, für das gilt

$$\begin{aligned} U(t) &= 0 \quad \forall\, t \neq t_n, t \in [0,T] \text{ und daher} && (2.30)\\ U(t_n) &= N && (2.31)\\ & && (2.32) \end{aligned}$$

nennen wir endfälliges Darlehen.

Den Preis des Darlehens in t definieren wir als $\mathcal{K}_t^{\cdot,E}$.

Die Tilgungen sind mit Abschluss des Kreditvertrages in $t = 0$ bekannt und daher deterministische Größen $\big(u(t)\big)_{t=0,1,\ldots,T}$. Für den Zinszahlungsprozess bedeutet dies

$$Z(t) = \left\{ \begin{array}{ll} N\,\tau(t_{i-1},t_i)\,S(t_{i-1},t_i) & t = t_i \in \mathcal{T} \\ 0 & t \notin \mathcal{T} \end{array} \right\}.$$

Beispiel 2.3.1 ***Endfälliges Darlehen 1***

Der Darlehensnehmer benötigt zum 30.10.2008 ein Darlehen über 2 Millionen Euro. Bis zum Ende der Zinsbindung in 10 Jahren möchte er keine Tilgungen leisten, sondern den Darlehensbetrag am 30.10.2018 in einer Summe zurückzahlen. Für das Darlehen gilt die deutsche Zinsmethode. Bewertungsvaluta ist der 30.09.2008.

Gemäß unserer Bezeichnungen gilt dann:

$$\begin{aligned} t_0 &= 30\\ t_i &= 30 * (i+1) \qquad i = 0,1,\ldots,n\\ \tau(t_{i-1},t_i) &= \frac{30}{360} \qquad i = 1,2,\ldots,n\\ N &= 2.000.000\\ u(t_n) &= 2.000.000 \end{aligned}$$

Entscheidet sich der Darlehensnehmer dazu eine Regeltilgung vorzunehmen, so hat er die Möglichkeit zwischen einer Raten- oder Annuitätenzahlung.

Das **Ratendarlehen** ist dadurch gekennzeichnet, dass die vorgenommene Regeltilgung in jedem Zahlungszeitpunkt des Darlehens gleich ist und sich die verbleibende Restschuld somit von der einen zur anderen Periode um immer denselben Betrag verringert. Die Restschuld am Ende der Laufzeit besteht daher aus dem Nominalbetrag, verringert um ein Vielfaches der Tilgungsrate.

Definition 2.3.6 ***Ratendarlehen***

Gilt für ein Darlehen $K^{\cdot,R}$

$$\begin{aligned} U(t_i) &= u(t_\lambda) \quad \forall\, i \geq \lambda, t_i \in \mathcal{T} && (2.33) \\ U(t_n) &= N - (n-\lambda)\, u(t_\lambda) && (2.34) \end{aligned}$$

so handelt es sich um ein Ratendarlehen.

Die Rate in einem Zahlungszeitpunkt $t_i \in \mathcal{T}$*,* $t_i \geq t_\lambda$*, ist dabei die Summe aus Tilgungs- und Zinszahlungsstrom in* t_i*,* $u(t_\lambda) + Z(t_i)$*. Die feste Tilgung* $u(t_\lambda)$ *wird bei Abschluss des Darlehensvertrages festgesetzt.*

Der Preis des Ratendarlehens in t sei $\mathcal{K}_t^{\cdot,R}$*.*

Für den Restschuldprozess eines Ratendarlehens erhalten wir als Konsequenz der Definition:

$$N(t_i) = N(t_{i-1}) - u(t_\lambda) \quad \forall\, t_i \geq t_\lambda, t_i \in \mathcal{T} \tag{2.35}$$

mit $N(t_{\lambda-1}) = N$. Und dadurch

$$N(t_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=0}^{i} A(t_j) & t_i < t_\lambda, t_i \in \mathcal{T} \\ N - (i+1-\lambda)\, u(t_\lambda) & t_i \geq t_\lambda, t_i \in \mathcal{T} \end{array} \right\}.$$

Wir stellen also fest, dass die Restschulden $N(t)$ für die Zeitpunkte ab der ersten Tilgung, $t \geq t_\lambda$, deterministsche Größen sind. Wir bezeichnen diese deshalb ebenfalls mit Kleinbuchstaben als $\big(n(t)\big)_{t \geq t_\lambda}$.

Beispiel 2.3.2 ***Ratendarlehen 1***

Der Darlehensnehmer eines Kreditinstitutes benötigt für einen Hauskauf 300.000 Euro. Die beiden Vertragsparteien vereinbaren am 30.09.2008 monatliche Ratenzahlung mit einer Tilgungsrate in Höhe von 300 Euro. Auszahlungstermin der Gesamtdarlehenssumme ist der 30.10.2008. Es soll eine 10-jährige Festzinsvereinbarung getroffen werden. Die Zinstagekonvention für dieses Darlehen ist 30/360. Der erste Tilgungstermin ist der 30.11.2008.

Für die Parameter des Ratendarlehen ergeben sich folgende Daten:

$$\begin{aligned}
N &= 300.000 \\
t_0 &= 30 \\
t_i &= 30 * (i+1) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\
n &= 120 \\
\tau(t_{i-1}, t_i) &= \frac{t_i - t_{i-1}}{360} \quad = \quad \frac{1}{12} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
a(t_0) &= 300.000 \\
a(t) &= 0 \quad \forall\, t \neq t_0 \\
\lambda &= 1 \\
t_\lambda &= 60 \\
u(t_\lambda) &= 300 \\
u(t_n) &= N - (120 - 1) * 300 \quad = \quad 264.300 \\
N(t_i) &= N - (i + 1 - 1) * 300 \\
&= 300.000 - i * 300 \qquad i = 0, 1, \ldots, n - 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.3.3 ***Ratendarlehen 2***

In diesem Beispiel handelt es sich eigenlich um die gleiche Ausgangsposition wie in Beispiel 1. Für dieses Ratendarlehen wird allerdings abweichend eine vierteljährliche Ratenzahlung in Höhe von 1.000 Euro vereinbart. Zinsbindung, Zinstagekonvention und Auszahlungsparamter bleiben identisch.

$$\begin{aligned}
t_i &= 30 + 90 * (i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\
n &= 40 \\
\tau(t_{i-1}, t_i) &= \frac{1}{4} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
t_\lambda &= 120 \\
u(t_\lambda) &= 1.000 \\
u(t_n) &= N - (40 - 1) * 1.000 \quad = \quad 261.000 \\
N(t_i) &= N - (i + 1 - 1) * 1.000 \\
&= 300.000 - i * 1.000 \qquad i = 0, 1, \ldots, n - 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.3.4 ***Ratendarlehen 3***

Im dritten Beispiel handelt es sich um ein Darlehen für eine Wohnungsbaugenossenschaft, die zum 30.10.2008 für ein Projekt 5 Mio. Euro benötigt. Die Rückzahlung soll ebenfalls in gleichbleibenden Tilgungsraten erfolgen. Es wird eine Rate von 50.000 Euro vereinbart, die 3-monatlich zuzüglich der Zinsen gezahlt werden soll. Der erste Zinszahlungs- und Tilgungstermin ist der 30.01.2009. Das Zinsbindungsende soll der 30.10.2018 sein. Zur Berechnung der Zinsen wird die *deutsche Zinstagemethode angewand. Der Kreditvertrag wurde am 30.09.2008 geschlossen.*

$$\begin{aligned}
N &= 5.000.000 \\
t_0 &= 30 \\
t_i &= 30 + 90 * (i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\
n &= 40 \\
\tau(t_{i-1}, t_i) &= \frac{1}{4} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
a(t_0) &= 5.000.000 \\
a(t) &= 0 \quad \forall\, t \neq t_0 \\
\lambda &= 1 \\
t_\lambda &= 120 \\
u(t_\lambda) &= 50.000 \\
u(t_n) &= N - (40-1) * 50.000 \quad = \quad 3.050.000 \\
N(t_i) &= N - (i + 1 - 1) * 50.000 \\
&= 5.000.000 - i * 50.000 \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Während die Rate, bestehend auch Zins-und Tilgungszahlung, beim Ratendarlehen keineswegs gleichbleibend ist, sondern sich in jedem Zeitpunkt um den veränderten Zinsbetrag verschiebt, bleibt die Annuität beim gleichnamigen Darlehen über die Laufzeit konstant. Die Annuität setzt sich dabei auch aus dem Zins- und Tilgungsstrom zusammen. Jedoch ist der Tilgungsstrom hier die abhängige Variable, denn der Tilgungsbetrag ergibt sich aus der Differenz zwischen konstanter Annuität und variablem Zinsbetrag.

Definition 2.3.7 ***Annuitätendarlehen***

Werden die Zahlungsströme eines Darlehens $K^{\cdot,A}$ so definiert, dass

$$Z(t_i) + U(t_i) = \Lambda \quad \forall\, i = \lambda, \ldots, n-1, \tag{2.36}$$

$$U(t_n) = N - (n - \lambda)\,\Lambda + \sum_{i=\lambda}^{n-1} Z(t_i) \tag{2.37}$$

gilt, handelt es sich um ein Annuitätendarlehen.

Die Höhe der Annuität Λ kann selbst als Parameter in ihrer Höhe in $t = 0$ gegeben sein, so dass sich die Anfangstilgung $U(t_\lambda)$ als Differenz $(\Lambda - Z(t_\lambda))$ ergibt oder aber aus in $t = 0$ gegebener Anfangstilgung $u(t_\lambda)$ in t_λ und Zinsbetrag $Z(t_\lambda)$ als Summe

$$u(t_\lambda) + Z(t_\lambda) = \Lambda$$

ermittelt werden.

$\mathcal{K}_t^{\cdot,A}$ ist der Preis des Annuitätendarlehens in t.

Beispiel 2.3.5 ***Annuitätendarlehen 1***

Dem Darlehensnehmer in Beispiel 2.3.2 unterbreitet das Kreditinstitut neben dem Ratendarlehen auch die Möglichkeit eines Annuitätendarlehens mit einer Annuität in Höhe von 1.400 Euro.

Die Parameter für das Darlehen ändern sich folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
N &= 300.000 \\
t_0 &= 30 \\
t_i &= 30 * (i+1) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\
n &= 120 \\
\tau(t_{i-1}, t_i) &= \frac{t_i - t_{i-1}}{360} \quad = \quad \frac{1}{12} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
a(t_0) &= 300.000 \\
a(t) &= 0 \quad \forall\, t \neq t_0 \\
\lambda &= 1 \\
t_\lambda &= 60 \\
\Lambda &= 1.400
\end{aligned}
$$

Gehen wir nun zuerst auf die Bewertung des eigentlichen Kreditgeschäftes und die Festlegung eines Festzinssatzes ein, um darüber zur Bewertung der Sondertilgungsoptionen des Darlehensnehmers zu gelangen.

2.4 Bewertung der Kredite

Für die weitere Betrachtung nehmen wir an, dass die Zahlungszeitpunkte der betrachteten Kredtite nicht mehr als ein Jahr auseinander liegen und die Kredite unterjährig linear verzinst werden. Der Auszahlungsstrom $-A$ sei als deterministische Folge $\big(-a(t)\big)_{t=0,1,\ldots,T}$ bei Vetragsabschluss in $t = 0$ gegeben. Zusätzliche zu der Menge aller Zahlungszeitpunkte $\mathcal{T}$ definieren wir nun noch Teilmengen $\mathcal{T}_{\leq j} \subset \mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^{\geq j} \subset \mathcal{T}$:

$$
\mathcal{T}_{\leq j} \quad := \quad \{t : \, t \leq t_j, t \in \mathcal{T}/\{t_0\}\} \tag{2.38}
$$

$$
\mathcal{T}^{\geq j} \quad := \quad \{t : \, t \geq t_j, t \in \mathcal{T}\} \tag{2.39}
$$

Wir werden in den folgenden zwei Abschnitten näher auf die Darlehenspreise eingehen, d.h. den Wert eines Darlehens zu einem beliebigen Zeitpunkt t betrachten. Dabei wird es beim fest verzinsten Darlehen vor allen Dingen um die Bestimmung des Festzinssatzes gehen.

2.4.1 Variabel verzinster Kredit

Bei einer variablen Verzinsung gestaltet sich die Bewertung eines Kredites ohne enthaltene Sonderrechte recht einfach, da im Allgemeinen der Libor-oder Euriborzins als Referenzzins gewählt wird, dessen Anpassungstermine mit denen des Darlehens übereinstimmen. Handelt es sich zum Beispiel um einen Kredit, der vierteljährliche Zahlungszeitpunkte hat, so liegt eine Verwendung des 3-Monats-Euribor nahe.

Sollten die Anpassungstermine des Kredites nicht mit den Zahlungsterminen übereinstimmen, die Zahlungen erfolgen z.B. monatlich, die Zinsanpassung aber dreimonatlich, können wir das Darlehen aufgrund des gesetzlichen Kündigungsrechtes als ein fest verzinstes Darlehen mit Laufzeit bis zum nächsten Anpassungstermin betrachten.

Satz 2.4.1

Sei $K^{v,\cdot}$ ein variabel verzinstes Darlehen mit Nominalbetrag N, Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$, variablem Zins gemäß des Libors

$$L = \big(L(t_{i-1}, t_i)\big)_{t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}}$$

und beliebiger Rückzahlungsmethode. Dann ist

$$S(t_{i-1}, t_i) \quad = \quad L(t_{i-1}, t_i) \quad \text{für } t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}$$

und es gilt

$$\mathcal{K}_t^{v,(\cdot)} \quad = \quad 0 \quad \forall\, t \leq t_0. \tag{2.40}$$

Definition 2.4.1 ***Floating Rate Note***

Bei einer Floating Rate Note (FRN) handelt es sich um ein Wertpapier, das mit variablen Zinsen $\big(L(t,s)\big)_{0 \leq t < s \leq T}$, verzinst wird, die mit dem jeweiligen Libor oder Euribor übereinstimmen, der zur jeweiligen Verzinsungsperiode $(t, s]$ passt. Der Zinssatz wird bei Zahlung des vorangegangenen Kupons festgesetzt[24], d.h. der Zinssatz $L(t, s)$ ist in t bekannt und erfüllt die Bedingungen aus Gleichung (2.22).

Wir definieren $FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}_{\leq n})$ als die Floating Rate Note mit Nominalwert 1, Laufzeit $(t_0, t_n]$ und Zahlungsdates $\mathcal{T}_{\leq n}$. Sie ist ein Claim mit Claimauszahlungen

$$\begin{aligned} FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}^{\geq 1})(t_i) &= 1\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, L(t_{i-1}, t_i) \qquad i \geq 1, i \neq n \\ FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}^{\geq 1})(t_n) &= 1\, \tau(t_{n-1}, t_n)\, L(t_{n-1}, t_n) + 1 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4.1

Der Floater quotiert in jedem Zahlungszeitpunkt unmittelbar nach der Claimauszahlung bei seinem Nennwert. Es gilt also

$$\mathrm{p}_{t_i}(FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}_{\leq n})) \quad = \quad 1.$$

[24]In der Praxis gibt es auch Floater, bei denen der Zinssatz rückwirkend, erst bei Kuponzahlung, festgesetzt wird.

Nehmen wir nämlich eine Handelsstrategie $H \in \mathbb{R}^T$,

$$\begin{aligned} H_{t,s} &= 0 \qquad \text{für alle } s, \quad 0 \le s \le T, \quad t \notin \mathcal{T} \\ H_{t_i,s} &= \frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} \qquad t_i \in \mathcal{T}_{\le n}, \quad t_{i-1} \le s < t_i, \end{aligned}$$

mit Laufzeit $(t_0, t_n]$ *und Entnahmeprozess* ρ,

$$\begin{aligned} \rho_{t_0} &= -H_{t_0}^{Tr} P(0,\cdot) \;=\; -1, \\ \rho_{t_i} &= H_{t_i-1}^{Tr} P(t_i,\cdot) - \underbrace{H_{t_i}^{Tr} P(t_i,\cdot)}_{=1} \\ &= \frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} - 1 \\ &\underbrace{=}_{(2.24)} \tau(t_{i-1}, t_i)\, L(t_{i-1}, t_i) \qquad t_i \in \{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\}, \\ \rho_t &= H_{t-1}^{Tr} P(t,\cdot) - H_t^{Tr} P(t,\cdot) \;=\; 0 \qquad t \notin \mathcal{T}, \\ \rho_{t_n} &= H_{t_n-1}^{Tr} P(t_n,\cdot) \\ &= 1 + \tau(t_{n-1}, t_n)\, L(t_{n-1}, t_n), \end{aligned}$$

die für jede Periode $(t_{i-1}, t_i]$ *ausschließlich in den Zerobond mit Fälligkeit in* t_i, $t_i \in \mathcal{T}_{\le n}$, *investiert und in den Zahlungszeitpunkten 1 Geldeinheit in den nächsten Zerobond umschichtet und den Rest auszahlt.*

Dann dupliziert diese Handelsstrategie die Floating Rate Note mit Nominal 1, Laufzeit $(t_0, t_n]$ *und Zahlungszeitpunkten* $\mathcal{T}_{\le n}$ $(FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}_{\le n}))$ *und*

$$\mathtt{p}_{t_i}(FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}_{\le n})) \;=\; H_{t_i}^{Tr} P(t_i,\cdot) \;=\; 1$$

ist der Preis nach Claimauszahlung im Zeitpunkt $t_i \in \mathcal{T}$. *Der Preis in* $t = t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *für die Floating Rate Note ist also in jedem Zeitpunkt* $t < t_0$ *bekannt, so dass der Forwardpreis der Floating Rate Note ebenfalls bekannt ist:*

$$\mathtt{f}_t\big(FRN(1, (t_0, t_n], \mathcal{T}_{\le n}), t_i\big) \;=\; P(t, t_i).$$

Beweis von Satz 2.4.1:

Betrachten wir nun die Zahlungsströme des variablen Kredites ohne Tilgung oder mit Ratenzahlung und vergleichen sie mit einem Portfolio Φ aus Floating Rate Notes. Bei diesen Darlehen sind die Tilgungszahlungen $\big(u(t)\big)_{t=0,1,\ldots,T}$ deterministisch.

Φ werde in t_0 zusammengestellt und bestehe aus n gekauften Floating Rate Notes $FRN(u(t_i), (t_0, t_i], \mathcal{T}_{\le i})$, $i = 1, \ldots, n$, und n leerverkauften Floating Rate Notes $FRN(a(t_i), (t_0, t_i], \mathcal{T}_{\le i})$, $i = 1, \ldots, n$.

Behauptung: Der Zahlungsstrom von Φ in den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ entspricht dem Zahlungsstrom des variablen Kredites und damit ergibt sich der

Wert des Kredites als Differenz der Entnahme für das Portfolio in t_0, sprich dem Preis für die Zusammenstellung und der Zahlung des Kredites in t_0.

Das Portfolio Φ zahlt in t_i, $i = 1, \ldots, n$, die Zinszahlungen $\tilde{Z}(t_i)$ und die Nominalzahlung $\tilde{u}(t_i)$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}(t_i) &= \sum_{j=i}^{n} (u(t_j) - a(t_j))\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\
&= n(t_{i-1})\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\
&= Z(t_i), \\
\\
\tilde{u}(t_i) &= u(t_i) - a(t_i).
\end{aligned}
$$

Die Zahlungsströme für t_i, $i = 1, \ldots, n$, des Portfolios und des variablen Kredites sind identisch.

Der Kauf des Portfolios Φ dupliziert also die Zahlungen $K(t_i)$, $t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}$. Der Preis des Portfolios in t_0 ist folglich der marktkonforme, arbitragefreie Preis dieser Zahlungen.

Da der Preis des Portfolios in t_0 wegen Bemerkung 2.4.1 nicht vom Umweltzustand ω abhängt und auch die Auszahlung $-a(t_0)$ des Kredites deterministisch ist, ergibt sich der Wert des variablen Kredites in $t \leq t_0$ aus der auf t abgezinsten Summe des Portfoliopreises und der Auszahlung des Kredites $-a(t_0)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_t^{v,(\cdot)} &= \Big(\sum_{i=\lambda}^{n} \mathtt{p}_{t_0}(\mathit{FRN}(u(t_i), (t_0, t_i], \mathcal{T}_{\leq i})) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\lambda-1} \mathtt{p}_{t_0}(\mathit{FRN}(a(t_i), (t_0, t_i], \mathcal{T}_{\leq i})) - a(t_0)\Big)\, P(t, t_0) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n} u(t_i) - a(t_i)\Big)\, P(t, t_0) \\
&= \big(N - N\big)\, P(t, t_0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 2.4.2

Für alle übrigen Zeitpunkte $t > t_0$ ist der Preis des variablen Kredites ebenfalls durch die Hedgestrategie gegeben:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_t^{v,(\cdot)} \\
&= \sum_{\substack{t_i > t; \\ t_i \in \mathcal{T}}} \big[\mathtt{p}_t(\mathit{FRN}(u(t_i), (t_0, t_i], \mathcal{T}_{\leq i})) - \mathtt{p}_t(\mathit{FRN}(a(t_i), (t_0, t_i], \mathcal{T}_i))\big] - n(t)
\end{aligned}
$$

Für jeden Zahlungszeitpunkt $t_i \in \mathcal{T}$ bedeutet dies also einen Preis nach Zinszahlung in t_i von

$$K_{t_i}^{v,(\cdot)} \quad = \quad \sum_{t_j \in \mathcal{T}^{\geq i+1}} \big[u(t_j) - a(t_j)\big] - n(t_i) \quad = \quad 0$$

2.4.2 Fest verzinster Kredit

Nach der Definition eines Festzinsdarlehens, sind die Zahlungen $K(t_i)$, $t_i \in \mathcal{T}$, unabhängig von der Rückzahlungsmethode, als deterministische Größen $k(t_i)$ im Zeitpunkt des Vertragsabschluss, $t = 0$, bekannt. Die Auszahlungen $-a(t_i)$ hatten wir als deterministisch vorausgesetzt, die Tilgungen $u(t_i)$ ergeben sich als deterministisch aus der jeweiligen Rückzahlungsmethode[25]. Da

$$N(t_i) \quad = \quad \sum_{j=i+1}^{n} \left(U(t_j) - A(t_j)\right) \quad \text{für alle } t_i \in \mathcal{T}$$

gilt, sind auch die Restschulden $n(t_i)$ deterministisch und durch den Festzins ergeben sich die Zinszahlungen

$$z(t_i) = n(t_{i-1})\,\tau(t_{i-1}, t_i)\,S, \quad t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}.$$

Während sich in 2.4.1 der Zins durch regelmäßige Anpassung an den Referenzzinssatz ergibt, stellt sich beim festverzinsten Darlehen nun als erstes die Frage: „Wie erhalte ich den "fairen", marktkonformen Festzinssatz S?"

Definition 2.4.2 ***Der faire Festzins***

Der "faire" Zins (Einstandszinssatz) S für ein Festzinsdarlehen ist der Zins bei dem das Darlehen bei Vertragsabschluss in $t = 0$ einen Wert von Null Geldeinheiten aufweist.

In Formeln bedeutet dies gemäß (2.29):

$$\begin{aligned}
& 0 \;=\; \mathcal{K}_t^{f,\cdot} \\
\Leftrightarrow\quad & 0 \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left(-a(t_i) + z(t_i) + u(t_i)\right) P(0, t_i) \\
\Leftrightarrow\quad & 0 \;=\; \sum_{i=0}^{n} (-a(t_i) + u(t_i))\, P(0, t_i) + \sum_{i=0}^{n} n(t_{i-1})\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(0, t_i) \\
\Leftrightarrow\quad & S \;=\; \frac{\sum_{i=0}^{n} (a(t_i) - u(t_i))\, P(0, t_i)}{\sum_{i=0}^{n} n(t_{i-1})\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(0, t_i)}
\end{aligned}$$

[25]Bei endfälligem und Ratendarlehen ergibt sich dies nach Definitionen 2.3.5 und 2.3.6. Beim Annuitätendarlehen durch die Definition der Annuität 2.3.7 und des deterministischen Festzinssatzes 2.3.4

Satz 2.4.2 *Auf einem arbitragefreien Finanzmarkt gelingt ein Vertragsabschluss eines festverzinsten Kredites nur zum "fairen" Zinssatz.*

Beweis:

Die Zahlungen $k(t_i)$ des Kredites in t_i entsprechen einer Anlage in ein Portfolio Φ, das in $t = 0$ zusammengestellt und in der Folge nicht mehr umgeschichtet wird. Φ umfasst dabei $k(t_i)$ Einheiten Zerobond P_{t_i}, $i = 0, \ldots, n$. Ist $k(t_i) < 0$, so bedeutet dies einen Leerverkauf des Zerobonds mit Laufzeit t_i.

Der Zahlungsstrom des Portfolios Φ entspricht dann genau dem Zahlungsstrom $k(t_i)$ in t_i des Kredites $K^{f,\cdot}$. Φ ist das Hedgeportfolio für den Kredit und $\Phi_t\, P(t, \cdot)$ ist damit der arbitragefreie Preis des Kredites in t:

$$\mathcal{K}_t^{f,\cdot} \quad = \quad \Phi_t\, P(t, \cdot) \quad = \quad \sum_{\substack{t_i > t;\\ t_i \in \mathcal{T}}} (u(t_i) - a(t_i))\, P(t, t_i) + \sum_{i=0}^{n} z(t_i)\, P(t, t_i)).$$

Für einen Abschluss in $t = 0$ bedeutet dies:
Wäre die Anfangsentnahme für die Zusammenstellung des Portfolios in $t = 0$ ungleich null, d.h.

$$\Phi_0\, P(0, \cdot) \neq 0,$$

so ergäbe sich eine Arbitragemöglichkeit durch Kombination des Kredites mit Φ. Der Kredit weist nämlich in $t = 0 < t_0$ keinen Zahlungsstrom auf. Für die Zusammenstellung des Portfolios wäre aber in $t = 0$ die Anfangsentnahme fällig. Es ergäbe sich somit ein Zahlungsstrom in $t = 0$ und in allen anderen Zeitpunkten s, $0 < s \leq T$, würden keine Zahlungen stattfinden. Die Realisierung eine risikolosen Gewinnes ohne Kapitaleinsatz wäre möglich.

Das heißt, sowohl das Kreditinstitut zur Anlage als auch der Darlehensnehmer zur Aufnahme würde die für sich günstigere Alternative wählen und ein Kontrakt käme nicht zu Stande.

Für einen Kreditabschluss in $t = 0$ muss also

$$\Phi_0\, P(0, \cdot) = \sum_{t_i \in \mathcal{T}} (u(t_i) - a(t_i))\, P(0, t_i) + \sum_{i=0}^{n} z(t_i)\, P(0, t_i) = 0$$

und daher die Bedingung für den Einstandszinssatz gelten.

□

Bemerkung 2.4.3

Der Wert des Kredites ist über die Laufzeit keineswegs fest. Unmittelbar bei Vertagsabschluss hat das Festzinsdarlehen bei Vereinbarung des Einstandszinssatz den Wert Null. Nach Vertragsabschluss und Festlegung des Festzinssatzes schwanken die zur Bewertung relevanten Zerobondpreise. Das Darlehen hat dann im Allgemeinen einen von Null verschiedenen Barwert.

Beispiel 2.4.1 ***Berechnung der Zerobondpreise und Festzinssätze***

Für die Berechnung des Kreditzinssatzes bei Abschluss der Beispielkredite benötigen wir die Preise der Zerobonds am 30.09.2008. Diese können wir aus der Swapzinskurve[26] *ermitteln. Es sind die Zinsen für die Zeiträume* $(0,t]$ *angegeben, wobei* t *die Anzahl der Zinstage bis* t *nach Zinsmethode 30/360 angibt,*

$$t \in \{1, 7, 30, 60, 90, \ldots, 330, 360, 720, 1080, \ldots, 3600, 3960\}$$

$$= \{\textit{1 Tag, 1 Wo., 1 Mon., 2 Mon., \ldots, 1 Jahr, 2 Jahre, \ldots, 11 Jahre}\}.$$

Man errechnet die Zerobondfaktoren[27] *für diese* t *durch*

$$P(0,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1+\tau(0,t)_{Act/360}Y(0,t)} & t < 360 \\ \left(\frac{1}{1+Y(0,t)}\right)^{\frac{t}{360}} & t \geq 360 \end{array} \right\}.$$

Zinsen für Zinszeiträume, die nicht explizit angegeben sind werden linear, gemäß der Zinstagekonvention in der sie angegeben sind, interpoliert. Deren Diskonfaktor errechnet sich als

$$P(0,t) = \left(\frac{1}{1+Y(0,t)}\right)^{\lfloor\frac{t}{360}\rfloor} \frac{1}{1+(\frac{t}{365(366)} - \lfloor\frac{t}{360}\rfloor)\,Y(0,t)}.$$

$\lfloor\frac{t}{360}\rfloor$ *beschreibt dabei den auf eine natürliche Zahl abgerundeten Wert für* $\frac{t}{360}$*.*
Für die Beispielkredite ergeben sich die im Anhang A angegebenen Tilgungspläne. Die relevanten Diskontfaktoren sind in den Tabellen A.2 und **??** *angegeben. Diskontiert man nun die Zahlungen des einzelnen Kredites* $k(t_i)$ *mit* $P(0,t_i)$ *und setzt die Summe der diskontierten Werte gleich Null, erhält man für die Darlehen die Festzinssätze aus der Tabelle 2.1.*

Darlehen	Zinssatz S
Endfälliges Darlehen 1	4,7590
Ratendarlehen 1	4,7381
Ratendarlehen 2	4,7565
Ratendarlehen 3	4,7506
Annuitätendarlehen 1	4,7380

Tabelle 2.1: Festzinssätze zur Bewertungsvaluta 30.09.2008

[26] Die Swapsätze sind in Tabelle A.1 im Anhang aufgelistet.
[27] Es werden diskrete Zinssätze unterstellt.

Kapitel 3

Arbitragefreie Bewertung der Sondertilgungsrechte

Nachdem wir die Bewertung eines Kredites vorgenommen haben, kommen wir nun zur Bewertung der zwischen den Vertragsparteien frei zu vereinbarenden Sondertilgungsoptionen. Die allgemeine Sondertilgungsoption hatten wir bereits in Definition 1.2.1 eingeführt. Formaler definieren wir nun:

$$ST \quad = \quad \big(ST(t)\big)_{t>t_0}$$

sei der adaptierte Prozess der Sondertilgungen in $t > 0$ mit

$$ST(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Option wird nicht ausgeübt} \\ mt(t) + \Gamma(t)\,(st(t) - mt(t)) & \text{Option wird ausgeübt} \end{array} \right\}.$$

$$mt(t) \in [0, st(t)] \tag{3.1}$$

sei dabei der Betrag, den der Darlehensnehmer bei Sondertilgung mindestens zurückzahlen muss[1], $st(t) \in [mt(t), N]$ der bei Vertagsabschluss festgelegte, maximal mögliche Sondertilgungsbetrag und

$$\Gamma(t) : \Omega \longrightarrow [0,1] \quad \forall\, t > 0 \tag{3.2}$$

eine adaptierte Zufallsvariable.

$\Gamma(t) = 1$ bedeutet die Ausübung in Höhe des maximalen Sondertilgungs betrages $st(t)$, $\Gamma(t) = 0$ die Ausübung in Höhe des Mindestbetrages $mt(t)$. Vereinbaren Kreditinstitut und Darlehensnehmer einen festen Sondertilgungsbetrag $st(t)$ in t, so setzen wir

$$\Gamma(t) \quad = \quad 1 \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

[1] Oftmals wird in der Praxis ein Mindestbetrag eingefordert, um den Bearbeitungsaufwand bei Sondertilgung in ein angemessenes Verhältnis zum Sondertilgungsbetrag zu stellen.

Betrachten wir nun zunächst eine Option in Höhe des feststehenden Betrages $st(\alpha)$ in einem beliebigen Zeitpunkt $\alpha < T$.

Im Falle der Ausübung der Sondertilgungsoption verändert sich der Zahlungsstrom K des Kredites im Anschluss an die Sondertilgungszahlung $st(\alpha)$ in α. Sei

$$t_k \quad := \min\{t_i : t_i \in \mathcal{T}, t_i > \alpha\}. \tag{3.3}$$

Den veränderten Zahlungsstrom bezeichnen wir mit $\tilde{K} = \big(\tilde{K}(t)\big)_{t\geq 0}$ mit

$$\tilde{K}(t) \quad = \quad K(t) \qquad \text{für } 0 \leq t < \alpha$$

und

$$\tilde{K}(t) \quad = \quad K(t) \quad = \quad 0 \qquad \text{für alle } t \notin \mathcal{T}, t \neq \alpha.$$

$-\tilde{A}$, $\tilde{Z}$ und $\tilde{U}$ seien die entsprechenden Auszahlungs-, Zinszahlungs- und Tilgungsprozesse zu $\tilde{K}$ für die gilt:

$$-\tilde{A}(t) \quad = \quad -A(t) \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \tag{3.4}$$

$$\tilde{Z}(t) \quad = \quad Z(t) \qquad \text{für } 0 \leq t < t_k \tag{3.5}$$

$$\tilde{U}(t) \quad = \quad U(t) \qquad \text{für } 0 \leq t < \alpha. \tag{3.6}$$

Die Sondertilgung beeinflusst den Tilgungsstrom in α, durch höhere Tilgung $\tilde{U}(\alpha) = U(\alpha) + st(\alpha)$ und damit gilt auch

$$\sum_{i=k}^{n} U(t_i) - \tilde{U}(t_i) \quad = \quad st(\alpha). \tag{3.7}$$

In dieser Arbeit werden wir nur auf Vertragsmodalitäten eingehen, die eine Gesamttilgung des Darlehens frühestens zum Zinsbindungsende erlauben, d.h. die letzte Tilgung in t_n ist größer null auch wenn alle Sondertilgungsoptionen $st(t)$ vorher ausgenutzt wurden, d.h.

$$\tilde{U}(t_n) \quad = \quad N - \sum_{t=t_0}^{t_n-1} (\tilde{U}(t) + st(t)) \quad > \quad 0.$$

Da wir schon in Abschnitt 2.3.1 angenommen haben, dass der Darlehensnehmer die Kreditsumme vollständig benötigt, sind Sondertilgungen während der Auszahlungsphase $(t_0, \beta]$ des Kredites mit

$$\beta := \max\{t : W(A(t) > 0) > 0\}$$

nicht zu erwarten. Aus diesem Grund betrachten wir im weiteren Verlauf nur Sondertilgungsrechte mit Fälligkeiten $\alpha > \beta$, d.h. es gilt:

$$st(t) \quad = \quad 0 \qquad \text{für alle } t \leq \beta \tag{3.8}$$

Ebenso lassen wir denkbare Anpassungsoptionen der Rückzahlungsmodalitäten in Folge der Sondertilgung unberücksichtigt, da sie weitere und anders geartete Optionalitäten beinhalten und gesondert betrachtet und bewertet werden müssen.

Für den veränderten Tilgungsprozess bedeutet dies zusätzlich zu den obigen Bedingungen, dass für Raten- und endfälliges Darlehen

$$\tilde{U}(t) \quad = \quad U(t) \quad t > \alpha, t \neq t_n \tag{3.9}$$

und dass für das Annuitätendarlehen

$$\tilde{Z}(t) + \tilde{U}(t) \quad = \quad Z(t) + U(t) \quad t > \alpha, t \neq t_n \tag{3.10}$$

ist.

Bezüglich der Sondertilgung ist als erstes herauszustellen, dass das Optionsrecht auf Seiten des Darlehensnehmers liegt. Das Kreditinstitut ist aus dem Darlehensvertag also **nicht** Rechteinhaber (Short Position), sondern muss auf die Entscheidungen des Darlehensnehmers (Long position) reagieren. Wie schon in der Einführung bemerkt, wird das Kreditinstitut dieses Recht am Finanzmarkt duplizieren, um ebenfalls gegenüber einem Dritten das gleiche Recht zu haben (Long Position) und dadurch das Risiko der vorzeitigen Rückzahlung an den Hedgekontrahenten weiterzugeben oder aber sich die Übernahme der Risiken mit dem am Markt ersichtlichen Preis des Hedges bezahlen zu lassen. Die Rechte des Darlehensnehmers gegenüber dem Kreditinstitut können als dieselben wie die des Kreditinstituts gegenüber den Hedgekontrahenten interprtiert bzw. bewertet werden. Beide Pakete müssen aufgrund der Arbitragefreiheit denselben Preis aufweisen.

Wir entwickeln zwei Ansätze, um das Problem des Sondertilgungsrechtes für die Bank zu beschreiben. Wir führen eine Bewertung des Sondertilgungsrechtes über Optionen auf Kuponanleihen und eine Bewertung durch Swaptions durch. Im Abschnitt 3.4 werden wir zu dem Ergebnis kommen, dass beide Ansätze zum selben Ergebnis führen.

Zunächst betrachten wir aber gesondert den variabel verzinsten Kredit $K^{v,\cdot}$.

3.1 Sondertilgungsoption bei einem variabel verzinsten Kredit

Satz 3.1.1 ***Sondertilgungsrecht in einem Zahlungszeitpunkt beim variabel verzinsten Kredit***

Handelt es sich um einen variabel verzinsten Kredit $K^{v,\cdot}$ mit Zahlungszeitpunktmenge $\mathcal{T}$, so haben Sondertilgungsoptionen, deren Ausübungszeitpunkte auf die Zahlungszeitpunkte fallen, unabhängig von der Tilgungsmethode des Kredites, keinen Wert, d.h.

$$\mathcal{ST}_t^{\alpha}(K^v) \quad = \quad 0, \quad 0 \leq t \leq \alpha, \, \alpha \in \mathcal{T}$$

$\mathcal{ST}_t^\alpha(K^v)$ bezeichnet den Wert des Sondertilgungsrechtes in t mit Ausübungszeitpunkt α.

Beweis:

Da der Ausübungstermin der Sondertilgung auf einen Zahlungszeitpunkt des Kredites fällt, gilt hier $\alpha = t_{k-1}$. Die Differenz der Zahlungsströme ergibt sich in jedem Zahlungszeitpunkt $t_i > \alpha$ als:

$$
\begin{aligned}
& K(t_i) - \tilde{K}(t_i) \\
&= -a(t_i) + \tilde{a}(t_i) + Z(t_i) - \tilde{Z}(t_i) + U(t_i) - \tilde{U}(t_i) \\
&\underbrace{=}_{(3.4)} (N(t_{i-1}) - \tilde{N}(t_{i-1}))\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) - \tilde{U}(t_i) + U(t_i) \\
&= \sum_{j=i}^{n} (U(t_j) - \tilde{U}(t_j))\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) - \tilde{U}(t_i) + U(t_i) \\
&\underbrace{=}_{(3.7)} \underbrace{\sum_{j=k-1}^{i-1} (\tilde{U}(t_j) - U(t_j))\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i)}_{(*)} \underbrace{-(\tilde{U}(t_i) - U(t_i))}_{(**)}
\end{aligned}
$$

Das Kreditinstitut kann durch Kauf von $\tilde{U}(t_i) - U(t_i)$ Floating Rate Notes $FRN(1, (t_i, t_n], \mathcal{T}^{\geq i+1})$ mit Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}^{\geq i} := \{t_j : t_j \in \mathcal{T}, t_j \geq t_i\}$, $i = k-1, \ldots, n-1$, im jeweiligen Zeitpunkt t_i den ursprünglichen Zahlungsstrom K wiederherstellen,

$$K(t) = \tilde{K}(t) + (K(t) - \tilde{K}(t)).$$

Der Teil $(*)$ beschreibt die Zinszahlung der schon erworbenen Floating Rate Notes für die vorangegangene Periode $(t_{i-1}, t_i]$, $(**)$ ist der Kauf der weiteren Floating Rate Note in t_i zum Nennwert. Der Erwerb zum Nominalwert ist gemäß Bemerkung 2.4.1 möglich.

Folglich hat die Sondertilgungsoption $ST(\alpha)$ einen Wert von Null, da es für die erhöhte Tilgung eine gleichwertige Anlagemöglichkeit am Markt gibt und die Ausübung der Option somit keine Kapitelverschiebungen für das Kreditinstitut bedeutet, sondern nur eine Umschichtung der Anlage.

$\square$

Für ein Sondertilgungsrecht, das nicht auf einen Zahlungszeitpunkt des Kredites fällt, besteht das Risiko für die Bank, dass ein Anlage nur zu einem geringeren Zins möglich ist. Allerdings besteht dieses Risiko nur für den Zeitraum zwischen dem Ausübungsdatum α und dem nächsten Zahlungszeitpunkt t_k. Für die darauf folgenden Monate ist eine gleichwertige Anlage analog zum vorangegangenen Beweis möglich. Das Risiko ergibt sich also aus der für die Dauer der restlichen Periode bestehende Differenz des Kreditzinses $L(t_{k-1}, t_k)$ und des Anlagezinses für die restliche Periode, $L(\alpha, t_k)$:

$$st(\alpha)\, \left[L(t_{k-1}, t_k) - L(\alpha, t_k)\right]\, \tau(\alpha, t_k)\, P(\alpha, t_k).$$

Für eine Option, die ein rationaler Darlehensnehmer nur bei positivem Wert ausübt, ergäbe sich also in α:

$$\begin{aligned}\mathcal{ST}_\alpha^\alpha(K^{v,\cdot}) &= st(\alpha)\,\max\{0, (L(t_{k-1}, t_k) - L(\alpha, t_k))\,\tau(\alpha, t_k)\,P(\alpha, t_k)\} \\ &= st(\alpha)\,\max\{0, \left[L(t_{k-1}, t_k)\,\tau(\alpha, t_k) + 1\right]\,P(\alpha, t_k) - 1\}\end{aligned}$$

Da das Darlehen aufgrund der Zinsanpassung sowieso in jedem Zahlungszeitpunkt durch den Darlehensnehmer zurückgezahlt werden kann, kann der variable Kredit auch als n Darlehen mit festem Zins und Zinsbindung bis zum nächsten Anpassungstermin angesehen werden, wobei das Darlehen immer wieder zum entsprechenden Libor prolongiert wird. Die Bewertung der Sondertilgungsoption $st(\alpha)$, $t_{k-1} < \alpha < t_k$, kann dann für die Zeitpunkte t, $t_{k-1} \leq t \leq \alpha$, gemäß dem Vorgehen bei Festzinsdarlehen[2] geschehen.

Bemerkung 3.1.1
Generell wird sich der Wert im Verhältnis zum Nominalwert des Kredites auf relativ geringem Niveau befinden, da im Allgemeinen die Differenz der Zinssätze, angegeben per anno, im Bereich von wenigen Basispunkten liegt. Zusätzlich wird die Differenz durch den Zeitraum $\tau(\alpha, t_k) < 1$ und die Abzinsung auf α durch $P(\alpha, t_k) < 1$ verringert. Aus diesen Gründen kommt den Sondertilgungsoptionen bei variabel verzinsten Krediten keine größere Beachtung zu.

3.2 Ansatz 1: Bondoption

Im Folgenden bewerten wir die Sondertilgungsoptionen für die fest verzinsten Darlehen $K^{f,(\cdot)}$. Wir beginnen mit dem vermeintlich natürlicheren Ansatz, der Bewertung durch Optionen auf Kuponanleihen.

Gegeben sei ein fest verzinster Kredit $K^{f,(\cdot)}$ mit Nominalwert N, Laufzeit $[t_0, t_n]$, Zins S und Zahlungszeitpunkt $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Wir betrachten zuerst die Möglichkeit eines einzigen Sondertilgungsrechtes von $st(\alpha)$ Geldeinheiten in einem beliebigen $\alpha \in]t_0, t_n[$. Wie beim variablen Kredit ist

$$t_k \quad := \min\{t_i : t_i \in \mathcal{T}, t_i > \alpha\}.$$

Wird das Sondertilgungsrecht ausgeübt, so ergibt sich die veränderte Rückzahlungsstruktur $\left(\tilde{u}(t_i)\right)_{i=k,\ldots n}$ bis zum Ende der Zinsbindung. Bei Ausübung der Option erhält das Kreditinstitut eine zusätzliche Tilgungszahlung in α in Höhe der Sondertilgung $st(\alpha)$ und die Restschuld nach den Tilgungen in α beträgt

$$\tilde{n}(\alpha) = n(t_{k-1}) - st(\alpha) - \tilde{u}(\alpha) = \sum_{j=k}^{n} \tilde{u}(t_j).$$

[2] Siehe Abschnitte 3.2 und 3.3.

Diese Veränderungen der Zahlungsstruktur bei Ausübungen stehen ebenfalls bei Vertragsabschluss in $t = 0$ fest.

In den auf α folgenden Zeiträumen muss der Darlehensnehmer nur noch auf die geringeren Restschulden Zinsen zahlen. Der Wert des veränderten Zahlungsstroms nach Zahlungen in t ist

$$\widetilde{\mathcal{K}}_t^{f,\cdot} \;=\; \sum_{s>t} (-\tilde{a}(s) + \tilde{z}(s) + \tilde{u}(s)\, P(t,s) \tag{3.11}$$

Dabei gilt nach (3.4), (3.5) und (3.6)

$$\begin{aligned} -\tilde{a}(t) &= -a(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \\ \tilde{z}(t) &= z(t) \quad \text{für } t < t_k \\ \tilde{u}(t) &= u(t) \quad \text{für } t < \alpha. \end{aligned}$$

Für den Darlehensnehmer ist der Wert $\mathcal{VT}_t^{\alpha}(K^{f,(\cdot)})$ einer verbindlichen, nicht optionalen, Sondertilgung $st(\alpha)$ in α zur Bewertungsvaluta $t \leq \alpha$ die Differenz aus dem Ursprungsdarlehen ohne Sondertilgung und dem Darlehen mit verbindlicher Sondertilgung in α, denn die Sondertilgung verursacht eben genau diese Zahlungsdifferenz.

$$\begin{aligned} &\mathcal{VT}_t^{\alpha}(K^{f,(\cdot)}) \\ &\quad= \quad \mathcal{K}_t^{f,(\cdot)} - \tilde{\mathcal{K}}_t^{f,(\cdot)} \\ &\quad\underbrace{=}_{(3.4)-(3.6)} \quad -st(\alpha)\, P(t,\alpha) + \big(n(t_{k-1}) - \tilde{n}(\alpha)\big)\, S\, \tau(\alpha, t_k) P(t, t_k) \\ &\qquad\qquad + \sum_{i=k}^{n-1} \big(n(t_i) - \tilde{n}(t_i)\big)\, S\, \tau(t_i, t_{i+1})\, P(t, t_{i+1}) \\ &\qquad\qquad + \sum_{i=k}^{n} \left(u(t_i) - \tilde{u}(t_i)\right) P(t, t_i) \end{aligned}$$

Aus Sicht des Kreditinstituts ist dies der Wert des Zahlungsstroms, den das Kreditinstitut aufgrund der Sondertilgung im Vergleich zum Darlehen ohne Sondertilgung nicht mehr erhält.

Bei einer optionalen Sondertilgung, bei der der Darlehensnehmer in α über die Ausübung entscheiden kann (Long Position), handelt es sich also um eine Option auf den gerade entwickelten Zahlungsstrom

$$VT^{\alpha} = \big(vt(t)\big)_{t \geq 0}, \quad vt(t) = k(t) - \tilde{k}(t), t \geq 0,$$

in der das Kreditinstitut short ist. Der Darlehensnehmer hat durch die Sondertilgungsoption nämlich das Recht gegen Zahlung des Sondertilgungsbetrages $st(\alpha)$ in α den ursprünglichen Zahlungsstrom K gegen den neuen Zahlungsstrom $\tilde{K}$ zu tauschen. Der Wert dieses Rechtes ergibt sich daher aus der Wahlmöglichkeit in α, die Differenz dieser beiden Zahlungsströme zu realisieren oder nicht.

Zur Duplizierung der Sondertilgungsoption suchen wir einen gehandelten Finanztitel, der genau den Differenz-Cashflow $VT^{\alpha} = (K - \tilde{K}^{\alpha})$ erzielt und damit das Underlying der Option bildet.

Definition 3.2.1 ***Kuponanleihe, Bond***

Bei einer Kuponanleihe $BO(N, (t_0, S, t_n, \mathcal{T}_{\leq n})$ handelt es sich um ein festverzinsliches Wertpapier, dass innerhalb der Laufzeit $(t_0, t_n]$ das Recht auf Kuponzahlungen und Rückzahlung des Nominalbetrages N verbrieft. Die Kuponzahlungen finden dabei zu bestimmten Terminen $\mathcal{T}_{leqn}$, meist in einem bestimmten Rhythmus (z.B. jährlich oder halbjährlich) statt und sind in ihrer Höhe durch den festen Zins S definiert. Am Ende der Laufzeit wird der Nominalbetrag zurückgezahlt.

Sei $BO = \big(bo(s)\big)_{s=0,\ldots,T}$ die Folge der deterministischen Claimauszahlungen der Kuponanleihe und seien $\mathcal{T}_{\leq n} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ die Zahlungszeitpunkte des Bonds, d.h.

$$bo(s) \quad \left\{ \begin{array}{cc} \neq & 0 \quad s \in \mathcal{T}_{\leq n}\} \\ = & 0 \quad \text{sonst.} \end{array} \right\}$$

Der Bond zahlt in t_i, $i = 1, \ldots, n-1$:

$$bo(t_i) \quad = \quad N\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i)$$

aus und in t_n

$$bo(t_n) \quad = \quad N\,(1 + S\,\tau(t_{n-1}, t_n))$$

für einen festen Zins S.

Der Preis des Bonds nach Claimauszahlungen in t ergibt sich durch:

$$\mathcal{BO}_t(N, S, (t_0, t_n], \mathcal{T}_{\leq n}) \quad = \quad \sum_{s=t+1}^{t_n} bo(s)\, P(t,s) \quad \forall\, t \in [0, T]$$

Definition 3.2.2 ***Call- und Putoption***

Die Call- (CO) bzw. Putoption (PO) beinhaltet für den Käufer gegen Zahlung einer Optionsprämie ($\mathcal{CO}$ bzw. $\mathcal{PO}$) das Recht (nicht die Pflicht), zu einem bestimmten Zeitpunkt (europäische Option) oder (zu mehreren Zeitpunkten) innerhalb eines bestimmten Zeitraums (amerikanische Option) einen bestimmten Basiswert (Underlying) zu einem bestimmten Basispreis vom Verkäufer der Option zu kaufen (Call) bzw. an den Verkäufer der Option zu verkaufen (Put).

Das Underlying kann dabei ein derivativer oder nicht-derivativer Finanztitel sein.

Man sagt eine Calloption ist in-the-money, im Geld (ITM), wenn der Basispreis kleiner als der aktuelle Marktpreis des Underlyings ist, at-the-money, am Geld (ATM), wenn die Preise gleich sind und out-of-the-money, aus dem Geld (OTM), wenn der Basispreis größer als der aktuelle Marktpreis ist. Bei einer Putoption verhält es sich genau andersherum.

Nutzt ein Optionsinhaber sein Recht zum Kauf oder Verkauf, so spricht man vom Ausüben der Option. Den Ausübungszeitpunkt bezeichnet man auch als Fälligkeit der Option. Ob eine Option ausgeübt wird oder nicht, hängt entscheidend vom Wert des Underlyings der Option im Ausübungszeitpunkt α ab. Denn nur zu diesem Zeitpunkt kann der Optionsinhaber entscheiden, ob die Option ausgeübt wird oder nicht. Ein rational handelnder Rechteinhaber übt seine Calloption (Putoption) natürlich nur aus, wenn das Underlying in α einen höheren (niedrigeren) Wert als seinen Basispreis (Strikepreis) aufweist, da andernfalls ein Bezug am Kapitalmarkt günstiger wäre. Es gilt also für den Wert eines Calls bzw. Puts im Ausübungszeitpunkt α[3]:

$$\mathcal{CO}_\alpha^\alpha = \max\{0,\ \text{Wert Underlying - Basispreis}\}$$

und

$$\mathcal{PO}_\alpha^\alpha = \max\{0,\ \text{Basispreis - Wert Underlying}\}.$$

Die Sondertilgungsoption verbrieft für den Darlehensnehmer das Recht gegen Zahlung des Sondertilgungsbetrages den alten Zahlungsstrom gegen den neuen, veränderten einzutauschen, anders ausgedrückt den alten zu erhalten, durch die Option glatt zu stellen und nur noch den neuen zu zahlen. Der rationale Darlehensnehmer übt das Sondertilgungsrecht, wie ein Rechteinhaber einer Option, nur aus, wenn die Ausübung für ihn einen Mehrwert generiert. Im Zeitpunkt α entspricht der Wert der Option also:

$$\mathcal{ST}_\alpha^\alpha(K^{f,(\cdot)}) \quad = \quad \max\{0, \mathcal{VT}_\alpha^\alpha\}$$

Die ursprüngliche Rückzahlungsvereinbarung entscheidet über die Form des Zahlungsstroms VT^α.

Satz 3.2.1 ***Sondertilgungsrecht für endfällige Darlehen***

Gegeben sei der endfällige Kredit $K^{f,E}$ mit Nominalwert N, Laufzeit $(t_0, t_n]$, Zins S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$.

Sei $\mathcal{CO}_t^\alpha(1, BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}))$ der Wert/ Preis der Calloption in t auf den Bond $BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$ mit Nennwert 1, Zinssatz S, Laufzeit $(\alpha, t_n]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}^{\geq k} = \{t : t \in \mathcal{T}, t \geq t_k\}$. Der Basispreis

[3] In der Praxis kann entschieden werden, ob man tatsächlich in den unterlegten Kontrakt eintreten will. Oftmals findet, falls ausgeübt wird, bei Fälligkeit der Option lediglich ein Barwertausgleich statt, so dass der Wert der Option in α vom Verkäufer der Option an den Käufer gezahlt wird.

ist 1 und der Ausübungstermin α. Dann ergibt sich der Wert einer Sondertilgungsoption $st(\alpha)$ in α als $st(\alpha)$ Anteile der Calloption auf die Kuponanleihe $BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}))$ mit Basispreis 1:

$$\mathcal{ST}_t^{\alpha}(K^{f,E}) \quad = \quad st(\alpha)\, \mathcal{CO}_t^{\alpha}(1, BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})).$$

Beweis:

Betrachten wir den Zahlungsstrom VT^{α} unter den nach 2.3.5 für das endfällige Darlehen geltenden Bedingungen, um den Wert der Sondertilgungsoption in α gemäß (3.12) zu ermitteln:

$$\mathcal{ST}_{\alpha}^{\alpha}(K^{f,E}) \quad = \quad \max\{0, \mathcal{VT}^{\alpha}\}.$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{VT}^{\alpha} \\
&= -st(\alpha)\, P(\alpha, \alpha) + \big(n(t_{k-1}) - \tilde{n}(\alpha)\big)\, S\, \tau(\alpha, t_k)\, P(\alpha, t_k) \\
&\quad + \sum_{i=k}^{n-1} \underbrace{\big(n(t_i) - \tilde{n}(t_i)\big)}_{= N - (N - st(\alpha))}\, S\, \tau(t_i, t_{i+1})\, P(\alpha, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum_{i=k}^{n} (u(t_i) - \tilde{u}(t_i))\, P(\alpha, t_i) \\
&= -st(\alpha) + st(\alpha)\, S\, \tau(\alpha, t_k)\, P(\alpha, t_k) \\
&\quad + \sum_{i=k}^{n-1} st(\alpha)\, S\, \tau(t_i, t_{i+1})\, P(\alpha, t_{i+1}) + st(\alpha)\, P(\alpha, t_n) \\
&= -st(\alpha) + st(\alpha) \sum_{i=k}^{n} bo(t_i) P(\alpha, t_i).
\end{aligned}$$

Die Zahlungen $bo(t_i)$, $i = k, \ldots, n$, bilden den Zahlungsstrom einer Kuponanleihe $BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$ mit Nominalwert 1, Laufzeit $(\alpha, t_n]$, Zins S und Zahlungszeitpunkte $\mathcal{T}^{\geq k}$. Sie duplizieren den Zahlungsstrom VT^{α} mit Ausnahme der Sondertilgungszahlung in α. Für den Wert der Sondertilgungsoption bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
\mathcal{ST}_{\alpha}^{\alpha}(K^{f,E}) &= \max\{0, -st(\alpha) + st(\alpha)\, \mathcal{BO}(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\} \\
&= st(\alpha)\, \max\{0,\, -1 + \mathcal{BO}(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\} \\
&= st(\alpha)\, \mathcal{CO}_{\alpha}^{\alpha}(1, BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir auf dem arbitragefreien Markt durch die vorgenomme Duplizierung des Differenz-Cashflows die Behauptung.

□

Satz 3.2.2 ***Sondertilgungsrecht für Ratendarlehen***

Sei $K^{f,R}$ der Ratenkredit mit Nominalwert N, Laufzeit $(t_0, t_n]$, Zins S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$.

Unabhängig von der Rate und dem Nominalwert hat eine Sondertilgungsoption in α in Höhe von $st(\alpha)$, analog dem endfälligen Darlehen, im Zeitpunkt t den Wert von $st(\alpha)$ Anteilen der Calloption auf die Kuponanleihe $BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}))$ mit Basispreis 1:

$$\mathcal{ST}_t^{\alpha}(K^{f,R}) \quad = \quad st(\alpha)\, \mathcal{CO}_t^{\alpha}(1, BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})).$$

Beweis:

Die Höhe der Tilgungsraten bleibt gemäß (3.9) in den Zahlungszeitpunkten nach Zahlung der Sondertilgung gleich:

$$u(t_i) \quad = \quad \tilde{u}(t_i) \quad i = k, \ldots, n-1.$$

So ergibt sich, da

$$n(t_i) - \tilde{n}(t_i) \; = \; st(\alpha) \quad i = k, \ldots, n-1$$

analog zum Beweis von Satz 3.2.1,

$$\begin{aligned} \mathcal{VT}_\alpha \quad &= \quad -st(\alpha) + st(\alpha)\, S\, \tau(\alpha, t_k)\, P(\alpha, t_k) \\ &\qquad + \sum_{i=k}^{n-1} st(\alpha)\, S\, \tau(t_i, t_{i+1})\, P(\alpha, t_{i+1}) + st(\alpha)\, P(\alpha, t_n) \\ &= \quad -st(\alpha) + st(\alpha) \sum_{i=k}^{n} bo(t_i) P(\alpha, t_i) \end{aligned}$$

und damit ebenfalls analog zum vorherigen Beweis die Behauptung.

□

Die Bewertung der Sondertilgungsotion bei einem Annuitätendarlehen verläuft etwas anders.

Das Annuitätendarlehen zeichnet sich dadurch aus, dass der Betrag, den der Darlehensnehmer an das Kreditinstitut zahlt, mit der ersten Tilgung in jedem nachfolgenden Zahlungszeitpunkt konstant bleibt, d.h.

$$z(t_i) + u(t_i) \quad = \quad \Lambda \quad \text{für } i = \lambda, \ldots, n-1. \tag{3.12}$$

Nach der Voraussetzung (3.10) bleibt auch nach einer vorgenommenen Sondertilgung in α die Annuitätenhöhe gleich und der Zahlungsstrom für $t > \alpha$, $t \neq t_n$, ist identisch dem ursprünglichen Kredit. Lediglich die Aufteilung der Annuität Λ in den Zins- und Tilgungsanteil verändert sich. Denn durch die Sondertilgung verringert sich der zu verzinsende Restschuldbetrag

$$\tilde{n}(\alpha) \quad = \quad n(t_{k-1}) - st(\alpha)$$

und damit der Zinsanteil

$$\tilde{z}(t_k) \quad = \quad n(t_{k-1})\, S\, \tau(t_{k-1}, \alpha) + \tilde{n}(\alpha)\, S\, \tau(\alpha, t_k).$$

Als Folgerung erhöht sich der Tilgungsanteil $\tilde{u}(t_k)$:

$$\tilde{z}(t_k) < z(t_k) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u}(t_k) > u(t_k)$$

gilt, da

$$\tilde{z}(t_k) + \tilde{u}(t_k) \quad = \quad \Lambda \quad = \quad z(t_k) + u(t_k).$$

Durch die höhere Tilgung ist dann auch der nächste Restschuldbetrag $\tilde{n}(t_k)$ geringer als der ursprüngliche $n(t_k)$ und die Folgerungskette wiederholt sich. Für die Restschuld $\tilde{n}(t_{n-1})$ gilt daher:

$$\tilde{u}(t_n) \quad = \quad \tilde{n}(t_{n-1}) \quad < \quad n(t_{n-1}) \quad = \quad u(t_n).$$

Ein Unterschied in den Zahlungsströmen des Kredites ohne Sondertilgung und dem Zahlungsstrom mit Sondertilgung besteht also nur in den Zeitpunkten der Sondertilgung α und der Rückzahlung t_n. Dadurch ergibt sich:

Satz 3.2.3 ***Sondertilgungsrecht für Annuitätendarlehen***
Für einen Annuitätenkredit $K^{f,A}$ mit Nominalwert N, Laufzeit $(t_0, t_n]$, Zins S und Zahlungszeitpunkt $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ hat ein Sondertilgungsrecht in Höhe von $st(\alpha)$ in α den Wert von $st(\alpha)$ Einheiten Calloption auf

$$(1 + S\,\tau(\alpha, t_k)) \prod_{i=k}^{n-1} (1 + S\,\tau(t_i, t_{i+1}))$$

Zerobonds P_{t_n} mit Ausübungszeitpunkt α und Basispreis 1, d.h.

$$\begin{aligned} &\mathcal{ST}_t^{\alpha}(K^{f,A}) \\ &= \quad st(\alpha)\, \mathcal{CO}_t^{\alpha}\left(1, (1 + S\,\tau(\alpha, t_k)) \prod_{i=k}^{n-1} (1 + S\,\tau(t_i, t_{i+1}))\, P_{t_n}\right) \end{aligned}$$

Beweis:
Wir betrachten die Differenz der Zahlungsströme

$$VT^{\alpha} \quad = \quad \tilde{K} - K \quad = \quad \left(\tilde{k}(t) - k(t)\right)_{t \geq \alpha}.$$

Beim Annuitätendarlehen gilt dann, wie oben schon erwähnt, für $t \geq \alpha > \beta$[4]:

$$\tilde{k}(\alpha) - k(\alpha) \quad = \quad st(\alpha),$$

$$\tilde{k}(t) - k(t) \quad = \quad 0 \qquad \text{für } t > \alpha, t \neq t_n$$

[4]Für die Definition von β siehe (3.8).

und

$$\begin{aligned}
&\tilde{k}(t_n) - k(t_n) \\
&\quad = \tilde{z}(t_n) - z(t_n) + \tilde{u}(t_n) - u(t_n) \\
&\quad = (\tilde{n}(t_{n-1}) - n(t_{n-1}))\ S\,\tau(t_{n-1}, t_n) + (\tilde{n}(t_{n-1}) - n(t_{n-1})) \\
&\quad = (\tilde{n}(t_{n-1}) - n(t_{n-1}))\ (1 + S\,\tau(t_{n-1}, t_n)).
\end{aligned}$$

Wir suchen zur Duplikation des Sondertilgungsrechtes aus Sicht der Long Position also einen Zinstitel X, der in α bei Ausübung der Option eine Zahlung $st(\alpha)$ einfordert und daraufhin in t_n mit Sicherheit

$$x(t_n) \quad = \quad (n(t_{n-1}) - \tilde{n}(t_{n-1}))\ (1 + S\,\tau(t_{n-1}, t_n))$$

auszahlt. Wir ermitteln $n(t_{n-1}) - \tilde{n}(t_{n-1})$ rekursiv:

$$\begin{aligned}
&n(t_{n-1}) - \tilde{n}(t_{n-1}) \\
&\quad = n(t_{n-2}) - u(t_{n-1}) - \tilde{n}(t_{n-2}) + \tilde{u}(t_{n-1}) \\
&\quad = n(t_{n-2}) - \Lambda + z(t_{n-1}) - \tilde{n}(t_{n-2}) + \Lambda - \tilde{z}(t_{n-1}) \\
&\quad = \big(n(t_{n-2}) - \tilde{n}(t_{n-2})\big)\,(1 + S\,\tau(t_{n-2}, t_{n-1})) \\
&\quad = \big(n(t_{n-3}) - \tilde{n}(t_{n-3})\big)\,(1 + S\,\tau(t_{n-3}, t_{n-2}))\,(1 + S\,\tau(t_{n-2}, t_{n-1})) \\
&\quad = \ldots\ldots\ldots \\
&\quad = \big(n(t_k) - \tilde{n}(t_k)\big)\,\prod_{i=k}^{n-2}(1 + S\,\tau(t_i, t_{i-1}))
\end{aligned}$$

Für die Differenz $n(t_k) - \tilde{n}(t_k)$ kann man einen festen Wert ermitteln:

$$\begin{aligned}
&n(t_k) - \tilde{n}(t_k) \\
&\quad = n(t_{k-1}) - \Lambda + n(t_{k-1})\,S\,\tau(t_{k-1}, t_k) - \tilde{n}(t_{k-1}) && (3.13)\\
&\qquad +st(\alpha) + \Lambda - \tilde{n}(t_{k-1})\,S\,\tau(t_{k-1}, t_k) + st(\alpha)\,S\,\tau(\alpha, t_k) && (3.14)\\
&\quad = st(\alpha)\,(1 + S\,\tau(\alpha, t_k)) && (3.15)
\end{aligned}$$

Als Gesamtergebnis ergibt sich somit:

$$x(t_n) = st(\alpha)\,(1 + S\,\tau(\alpha, t_k))\,\prod_{i=k}^{n-1}(1 + S\,\tau(t_i, t_{i+1})) \qquad (3.16)$$

Ein Portfolio mit

$$st(\alpha)\,(1 + S\,\tau(\alpha, t_k))\,\prod_{i=k}^{n-1}(1 + S\,\tau(t_i, t_{i+1}))$$

Zerobonds P_{t_n} erfüllt die Bedingung der sicheren Zahlung $x(t_n)$ in t_n und dupliziert damit den Differenz-Cashflow. Das Sondertilgungsrecht entspricht also einer Option auf den Kauf dieser Zerobonds in α zum Preis $st(\alpha)$ und damit den angegebenen Calloptionen.

□

3.3 Ansatz 2: Swaption

Das Zinsänderungsrisiko beschreibt, wie schon bei der Erläuterung der Problemstellung erwähnt, das Risiko, dass der Darlehensgeber für eine bestimmte Zeit einen festen Zins mit dem Darlehensnehmer vereinbart, sich der "faire" Marktzins bzw. die Diskontfaktoren aber im Laufe der Zeit ständig verändern. So können dem Kreditinstitut erhebliche Zinsverluste entstehen, da es das Geld unter Umständen aufgrund einer Zinsstrukturverschiebung nach Vertragsabschluss zu einem höheren Zins als dem Darlehenszins anlegen könnte – Opportunitätsgedanke – oder sich erheblich teurer refinanzieren muss, da nicht alle Refinanzierungen fristenkongruent geschehen. Aus diesem Grund sind die Kreditinstitute bestrebt, eine möglichst risikoneutrale[5] Position einzugehen.

Eine risikoneutrale Position erreichen sie durch die Umwandlung von festen Zinsen in variable Zinsströme, da sich die variablen Zinsen in regelmäßigen Abständen ändern und sich dadurch nahe dem aktuellen Marktniveau befinden. Je kürzer dabei die Periode zwischen den Anpassungen ist, desto geringer ist das Zinsänderungsrisiko.

Definition 3.3.1 ***Zinsswap***

Der Zinsswap ist ein Finanzmarktinstrument zum Austausch von Zahlungsströmen, die von Zinsen abhängen. Ein Plain vanilla (standard) Zinsswap tauscht während seiner Laufzeit $(t_0, t_n]$ *in* t*, entsprechend der jeweiligen Zinstagekonvention, feste, deterministische* $\big(Sf(t)\big)_{t>t_0}$ *und variable, zufällige Zinszahlungen* $\big(Sv(t)\big)_{t>t_0}$ *auf den Nominalbetrag* N *des Swaps. Es wird die lineare Verzinsungsmethode verwandt*[6]*.*

Der Abschluss eines Receiverswaps RS *bedeutet dabei die Verpflichtung, die variablen Zinszahlungen an den Kontrahenten zu leisten und im Gegenzug die festen Zinszahlungen zu erhalten. Beim Payerswap* PS *erfolgen die Zahlungen genau in die andere Richtung. Dabei beziehen sich die Bezeichnungen Receiver (Erhaltender) und Payer (Zahlender) auf die Festzinsseite des Swaps.*

Ein Receiverswap ist also ein Claim mit Claimauszahlungen

$$RS = \big(RS(t)\big)_{t>t_0} = \big(Sf(t) - Sv(t)\big)_{t>t_0},$$

der Payerswap ein Claim mit Auszahlungen

$$PS = \big(PS(t)\big)_{t>t_0} = \big(Sv(t) - Sf(t)\big)_{t>t_0}.$$

Der feste Zins S *wird bei Vertragsabschluss in* t *festgelegt. Als Swapsatz* $S(t, t_0, t_n)$ *bezeichnet man dabei den Zinssatz, bei dem der Swap in* t *einen Wert von Null aufweist, d.h. die Barwerte der festen und der variablen Seite identisch sind.*

[5]Risikoneutral meint hier risikoneutral bezüglich des Zinsänderungsrisikos.

[6]siehe dazu [21]

Wir bezeichnen den adaptierten Prozess $\left(Sv(t)\right)_{t>t_0}$ als die variable Seite eines Swaps und die Folge $\left(Sf(t)\right)_{t>t_0}$ als die feste Seite des Swaps. Die Zahlungszeitpunkte der variablen Seite

$$\mathcal{T}^v \quad = \quad \{t : W(Sv(t) > 0) > 0, t > t_0\}$$

und der festen Seite

$$\mathcal{T}^f \quad = \quad \{t : W(Sf(t) > 0) > 0, t > t_0\}$$

müssen im Allgemeinen nicht identisch sein. Lediglich der letzte Zahlungszeitpunkt $t_n = t^v_{n^v} = t^f_{n^f}$ und der Laufzeitbegin und damit das erste Resetdate $t_0 = t^v_0 = t^f_0$ sind bei einem Plain Vanilla Swap auf jeden Fall identisch. Wir ordnen und nummerieren die Zahlungszeitpunkte durch und bezeichnen sie mit

$$\mathcal{T}^v \quad = \quad \{t^v_1, t^v_2, \ldots, t^v_{n^v}\}$$

und

$$\mathcal{T}^f \quad = \quad \{t^f_1, t^f_2, \ldots, t^f_{n^f}\}.$$

Nach dieser Definition ergeben sich die Zahlungen des Receiverswaps mit Nominal N, Festzinssatz S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}^v$ und $\mathcal{T}^f$ als

$$\begin{aligned} Sf(t^f_i) &= N\, S\, \tau(t^f_{i-1}, t^f_i) \quad \text{für } t^f_i \in \mathcal{T}^f \\ Sv(t^v_j) &= N\, L(t^v_{j-1}, t^v_j)\, \tau(t^v_{j-1}, t^v_j),\ t^v_j \in \mathcal{T}^v. \end{aligned}$$

Der Wert eines Receiverswaps für den Zeitpunkt $t < t_0$ ergibt sich analog zum Wert des Kredites damit durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{RS}_t &= \sum_{s>t} RS(s)\, P(t,s) \\ &= \sum_{s>t} (Sf(s) - Sv(s))\, P(t,s) \\ &= \sum_{t^f_i \in \mathcal{T}^f} N\, S\, \tau(t^f_{i-1}, t^v_i)\, P(t, t^f_i) \\ &\quad - \sum_{t^v_j \in \mathcal{T}^v} N\, L(t^v_{j-1}, t^v_j))\, \tau(t^v_{j-1}, t^v_j)\, P(t, t^v_j) \\ &\quad + N\, P(t,t_0) - N\, P(t,t_0) - N\, P(t,t_n) + N\, P(t,t_n) \\ &\underbrace{=}_{\text{Satz 2.4.1}} -N\, P(t,t_0) + \sum_{t^f_i \in \mathcal{T}^f} N\, S\, \tau(t^f_{i-1}, t^f_i) P(t, t^f_i) + N\, P(t,t_n) \\ &= \mathcal{K}^{f,E}_t \end{aligned}$$

für einen endfälligen Kredit K mit Nominal N, Laufzeit $(t_0, t_n]$, Festzins S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}^f$. Der Wert des Payerswaps ergibt sich analog und wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{PS}$.

Weicht der vereinbarte Festzins S zum Abschlusszeitpunkt vom Swapsatz ab, so hat der Swap einen von Null verschiedenen Wert, der per Vorabzahlung (Upfrontpayment) zwischen den Parteien ausgeglichen wird. Der variable Zins ist der zum Zahlungsrhythmus der variablen Seite passende Zins, z.B. bei 3-monatiger Zahlung der 3-Monats Euribor. Dieser wird immer zu den Festsetzungsterminen (Resetdates) t_i^v, i=0, …,$n-1$, für die anschließende Periode $(t_i^v, t_{i+1}^v]$ fixiert[7].

Die Gestaltung der Zahlungszeitpunkte der variablen Seite fällt also bei der Bewertung des Swaps nicht weiter ins Gewicht. Daher betrachten wir im Folgenden nur noch Swaps, bei denen die Zahlungszeitpunkte der variablen und der festen Seite identisch sind, d.h. $n^v = n^f = n$ und

$$t_i^v \quad = \quad t_i^f \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Bemerkung 3.3.1

Eine andere Interpretation beschreibt den Wert eines Swaps mit festem Zins S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$ im Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$ als Barwert (Wert der zukünftigen Zahlungsreihe im Bewertungszeitpunkt) der Zinsdifferenz zwischen S und $S(t,t,t_n)$. $S(t,t,t_n)$ ist dabei der Swapsatz für den zu bewertenden Swap, wenn er erst in t abgeschlossen würde. Der Wert dieses Swaps zum Swapsatz $S(t,t,t_n)$ ist offensichtlich Null und es gilt daher

$$\sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(t, t_i) = \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\, S(t,t,t_n)\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(t, t_i).$$

Für einen in $t \in \mathcal{T}$ zu bewertenden Receiverswap mit Nominal N und Festzins S gilt also:

$$\begin{aligned}
\mathcal{RS}_t &= \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\,(S - L(t_{i-1}, t_i))\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(t, t_i) \\
&= \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) P(t, t_i) - \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(t, t_i) \\
&= \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) P(t, t_i) - \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\, S(t,t,t_n)\, \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(t, t_i) \\
&= \sum_{\substack{t_i > t \\ t_i \in \mathcal{T}}} N\,(S - S(t,t,t_n))\, \tau(t_{i-1}, t_i) P(t, t_i)
\end{aligned}$$

Definition 3.3.2 ***amortisierender Swap***

Ein amortisierender Swap ist ein Swap, bei dem die festen und variablen Zinszahlungen nicht auf einen festen Nominalbetrag N berechnet werden, sondern sich an eine bestimmte Restschuldstruktur $NS = \big(n(t)\big)_{t>0}$ anlehnen,

[7] In Deutschland gibt es täglich Fixings um 11.00 und 12.00 Uhr Frankfurter Zeit.

die bei Abschluss des amortisierenden Swap festgelegt wird. Der amortisierende Receiverswap mit dieser Restschuldstruktur, Laufzeit $(t_0, t_n]$*, Festzins* S *und Zahlungszeitpunkten* $\mathcal{T}_{\leq n}$ *ist damit ein Claim mit Claimauszahlungen*

$$RS(t_i) \quad = \quad n(t_{i-1})\,(S - L(t_{i-1}, t_i))\,\tau(t_{i-1}, t_i)$$

in $t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}$*. Der entsprechende Payerswap ergibt sich durch Multiplikation dieser Claimauszahlungen mit -1:*

$$PS(t_i) \quad = \quad -RS(t_i) \qquad \forall\, t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}.$$

Bemerkung 3.3.2

Der Wert eines Swaps mit für die Perioden unterschiedlichen Nominalbeträgen, z.B. eines amortisierenden Swaps, ergibt sich nach der Wertadditivtät durch die Summe mehrere einzelner Swaps. Dieses Vorgehen nennt man Stripping.

Ein Receiverswap $\widetilde{RS}$ *mit Laufzeit* $(t_0, t_n]$*, Zahlungszeitpunkten* $\mathcal{T}_{\leq n}$ *und Nominalstruktur NS mit*

$$n(t_{i-1}) \quad = \quad \sum_{j=i}^{n} u(t_j) - a(t_j)$$

generiert den Zahlungsstrom

$$\begin{aligned}
\widetilde{RS}(t_i) \quad &= \quad N(t_{i-1})\,(S - L(t_{i-1}, t_i))\,\tau(t_{i-1}, t_i) \\
&= \quad \sum_{j=i}^{n} (u(t_j) - a(t_j))\,(S - L(t_{i-1}, t_i))\,\tau(t_{i-1}, t_i) \\
&= \quad \sum_{j=i}^{n} \underbrace{u(t_j)\,(S - L(t_{i-1}, t_i))\,\tau(t_{i-1}, t_i)}_{(*)} \\
&\qquad + \sum_{j=i}^{n} \underbrace{a(t_j)\,(L(t_{i-1}, t_i) - S)\,\tau(t_{i-1}, t_i)}_{(**)}
\end{aligned}$$

$(*)$ *ist der Zahlungsstrom von* $u(t_j)$ *Receiverswaps* RS^j *mit Nominal* 1*, Festzins* S*, Zahlungszeitpunkten* $\mathcal{T}_{\leq j}$ *und Laufzeit* $(t_0, t_j]$ *in* $t_i \leq t_j$*,* $(**)$ *der Zahlungsstrom von* $a(t_j)$ *Payerswaps* PS^j *mit Nominal* 1*, Festzins* S*, Zahlungszeitpunkten* $\mathcal{T}_{\leq j}$ *und Laufzeit* $(t_0, t_j]$ *in* $t_i \leq t_j$*.*

Der Wert des Receiverswaps in $t \leq t_0$ ergibt sich als

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{RS}}_t \\
= & \sum_{t_i \in \mathcal{T}_{\leq n}} \Bigg[\sum_{j=i}^{n} u(t_j)\,(S - L(t_{i-1},t_i))\,\tau(t_{i-1},t_i) \\
& + \sum_{j=i}^{n} a(t_j)\,(L(t_{i-1},t_i) - S)\,\tau(t_{i-1},t_i) \Bigg] P(t,t_i) \\
= & \sum_{j=1}^{n} u(t_j) \sum_{t_i \in \mathcal{T}_{\leq j}} (S - L(t_{i-1},t_i))\,\tau(t_{i-1},t_i)\,P(t,t_i) \\
& + a(t_j) \sum_{t_i \in \mathcal{T}_{\leq j}} (L(t_{i-1},t_i) - S)\,\tau(t_{i-1},t_i)\,P(t,t_i) \\
= & \sum_{j=1}^{n} u(t_j)\,\mathcal{RS}_t^j + a(t_j)\,\mathcal{PS}_t^j
\end{aligned}
$$

Der Receiverswap $\widetilde{RS}$ wird also aus den Receiverswaps RS^j und den Payerswaps PS^j gebildet. Für beliebiges $t \in [0,T]$ erhalten wir somit:

$$
\widetilde{\mathcal{RS}}_t = \sum_{\substack{t_j > t \\ t_j \in \mathcal{T}}} u(t_j)\,\mathcal{RS}_t^j + a(t_j)\,\mathcal{PS}_t^j
$$

Satz 3.3.1

Sei $K^{f,NS}$ der Kredit mit einer bestimmten, bei Vertragsabschluss in $t = 0$ bekannten, Restschuldstruktur $NS = \big(n(t)\big)_{t>0}$, Laufzeit $(t_0, t_n]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$. Dann sind der faire Festzins S des Kredites $K^{f,NS}$ und der Swapzinssatz $S(0,t_0,t_n)$ zu einem Receiverswap mit selber Nominalstruktur, selber Laufzeit und selben Zahlungszeitpunkten identisch.

Beweis:

Ein variabel verzinster Kredit $K^{v,(\cdot)}$, unabhängig von seiner Tilgungsstruktur, hat gemäß Satz 2.4.1 in jedem Zeitpunkt bis zur ersten Valutierung einen Wert von Null. In diesem Fall gilt somit auch

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_0^{v,NS} = & \sum_{i=0}^{n} [-a(t_i) + u(t_i)]\,P(0,t_i) \\
& + \sum_{i=1}^{n} n(t_{i-1})\,L(t_{i-1},t_i)\,\tau(t_{i-1},t_i)\,P(0,t_i) \\
= & \; 0.
\end{aligned}
$$

Betrachten wir einen amortisierenden Receiverswap mit oben genannter Nominalstruktur[8], dann kann man durch Nulladdition des Auszahlungs-

[8]Für amortisierende Swaps mit fester, vorgegebener Restschuldstruktur werden am Markt in der Praxis durchaus Preise gestellt und es findet Handel statt.

und Tilgungsstroms, ähnlich wie schon bei der Definition des Swaps, den Receiverswap als Festzinsdarlehen ausdrücken.

$$\begin{aligned}\mathcal{RS}_0 &= \sum_{i=1}^{n} n(t_{i-1})\,(S - L(t_{i-1},t_i)\,\tau(t_{i-1},t_i)\,P(0,t_i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n} -a(t_i) + a(t_i) + u(t_i) - u(t_i) \\ &= \mathcal{K}_0^{f,NS} - \mathcal{K}_0^{v,NS} \\ &= \mathcal{K}_0^{f,NS}\end{aligned}$$

Folglich entspricht auch der faire Festzinssatz dem Swapsatz.

$$\begin{aligned}\mathcal{RS}_0 &= \mathcal{K}_0^{f,NS} \\ \Leftrightarrow S(0,t_0,t_n) &= S\end{aligned}$$

Dabei ist unerheblich, um welche Art des Swaps es sich handelt, da der Swapsatz für Receiver- und Payerswap identisch sind.

□

Werden auf der Aktivseite Festzinsdarlehen begeben, so schließt das Kreditinstitut Payerswaps mit gleicher Laufzeit und gleichen Zahlungszeitpunkten auf der festen Seite ab, um die vom Darlehensnehmer eingehenden festen Zinsszahlungen an den Swapkontrahenten weiterzureichen und in variable Zinszahlungen umzuwandeln[9]. Durch den Swap wird das Zinsänderungsrisiko auf die kurze Periode des variablen Zinssatzes eingedämmt[10].

Handelt es sich um ein tilgendes Darlehen, so schließt das Kreditinstitut einen amortisierenden Swap ab, bei dem sich der Nominalwert gleich der Restschuld des Darlehens entwickelt.

Die Märkte für Swaps sind sehr liqiuide und ein Abschluss eines solchen Geschäftes ist jederzeit möglich.

Durch die Sicherung gegen das Zinsänderungsrisiko anhand des entsprechenden Payerswaps ergibt sich für das Kreditinstitut aus Kredit und Swap

[9]Zur Eliminierung des Zinsänderungsrisikos ist auch der Abschluss eines passiven Festzinsgeschäftes möglich. Zur getrennten Messung der zinsbedingten Wertveränderungen auf der Aktiv- und der Passivseite werden aber beide Geschäfte durch Swaps bewertet.

[10]Wie bereits erwähnt müssen die Zahlungszeitpunkt der variablen und festen Seite im Allgemeinen nicht identisch sein. Je kürzer die Periode zwischen den Anpassungszeitpunkten auf der variablen Seite, desto dichter liegt die variable Verzinsung am aktuellen Marktzins.

folgender Cashflow in den Zeitpunkten $t_i > t_0$:

$$\begin{aligned} k(t_i) + PS(t_i) &= -a(t_i) + z(t_i) + u(t_i) - Sv^f(t_i) + Sf^v(t_i) \\ &= -a(t_i) + u(t_i) + n(t_{i-1})\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) - n(t_{i-1})\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &\quad + n(t_{i-1})\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &= -a(t_i) + n(t_{i-1})\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) + u(t_i) \end{aligned}$$

Im Saldo bleibt für das Kreditinstitut der gewünschte, risikolose[11] Kredit mit variabler Verzinsung.

Bemerkung 3.3.3

Der Kredit hat also bei gleichzeitigem Abschluss des Kredites und des Swaps zum Swapsatz keinen Wert für das Kreditinstitut. Der Abschluss eines solchen Kredites würde für den Kreditgeber keinen Ertrag, sondern nur Arbeitsaufwand erbringen und daher keinen Sinn machen. In der Praxis wird deshalb oftmals der Swapabschluss nach hinten verschoben, um von evtl. fallenden Marktzinsen zu profitieren und der Kredit wird nicht zum Swapzinssatz sondern einem höheren Zins (Swapsatz + Marge) abgeschlossen. In der Praxis ist solch ein Abschluss u.a. aufgrund von Marktzutrittsbarrieren und Informationsasymmetrien auf Seiten der Darlehensnehmer möglich. Durch den höheren Festzinssatz hat der Swap einen positiven Wert, $\mathcal{PS}_0 > 0$, der dem Kreditinstitut upfront, d.h. bei Vertragsabschluss des Swaps, ausgezahlt wird und damit den Wert des Kredites für das Kreditinstitut beziffert. Neben einer Uprontzahlung ist es auch möglich, dass das Kreditinstitut den Swap zum Swapsatz abschließt und den Vorteil als Zinsgewinn in jedem Zahlungszeitpunkt generiert[12].

Gewährt das Kreditinstitut dem Darlehensnehmer ein Sondertilgungsrecht, so hat es das Zinsänderungsrisiko aus dieser Option gesondert abzusichern.

Hat nun das Kreditinstitut das Zinsänderungsrisiko weitergegeben, so fällt im Falle einer Sondertilgung von $st(\alpha)$ in α auf der Kreditseite der Eingang der Zinsen auf den Sondertilgungsbetrag in $t_i > \alpha$ weg. Es entsteht eine Lücke bei der Bedienung der festen Seite des Swapgeschäftes, denn eine Wiederanlage des Sondertilgungsbetrages am Kapitalmarkt erzielt im Allgemeinen nicht den Zins des Kredites. Eine Anlage wäre zum in α geltenden fairen Zins (Swapzinssatz) oder jeweils zum variablen Zins bis zum Vertragsende möglich. Ausgehend von einem rational handelnden Kreditnehmer, wird dieser nur dann die Sondertilgungsoption ausüben, wenn eine Anlage am Kapitalmarkt ungünstiger für ihn wäre.

[11] Risikolos meint hier risikolos bezüglich des Zinsänderungsrisikos.

[12] Vor allem aus steuerlichen Gründen kann diese Variante von Vorteil sein, da die Gewinne über die Laufzeit verteilt werden.

Um dieses Risiko schon zu Vertragsabschluss zu umgehen, benötigt das Kreditinstitut einen Finanztitel der im Falle der Optionsausübung den Differenzbetrag auf der festen Seite des Swaps ausgleicht.

Definition 3.3.3 ***Swaption***

Eine Swaption ist ein Optionskontrakt der das Recht verbrieft, gegen Zahlung einer Optionsprämie, zu einem bestimmten Zeitpunkt (europäische Swaption), bis zu einem bestimmten Zeitpunkt (amerikanische Swaption) oder zu mehreren bestimmten Zeitpunkten (bermudische Swaption), in einen Zinsswap mit bestimmter Ausstattung einzutreten[13]. *Die Laufzeit und der Zins des Swaps werden bei Abschluss der Swaption festgesetzt.*

Eine Receiver-Swaption beinhaltet dabei einen unterlegten Receiverswap, eine Payer-Swaption analog dazu einen unterlegten Payerswap.

Der Wert einer Swaption im Ausübungszeitpunkt α beträgt:

$$\mathcal{SW}_\alpha^\alpha \quad = \quad \max \quad \{\, 0\,,\ \text{Wert unterlegter Swap in } \alpha \,\}.$$

Sei wie oben

$$t_k \quad := \quad \min\{t_i : t_i \in \mathcal{T}, t_i > \alpha\}.$$

Bemerkung 3.3.4 *Eine Swaption mit Nominal N kann man in N Swaptions mit dem einheitlichen Zinssatz S und Nominal 1 aufteilen, d.h. es gilt für eine Swaption in $t < \alpha$:*

$$\mathcal{SW}_t^\alpha(N, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) \quad = \quad N\, \mathcal{SW}_t^\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$$

denn es gilt im Ausübungszeitpunkt α für einen Receiverswap [Payerswap]

$$RS(N, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) \qquad \big[PS(N, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\big]$$

mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit $(\alpha, t_n]$ und Zahlungszeitpunkten[14] *$\mathcal{T}^{\geq k}$:*

$$\max\{\, 0\,,\ \mathcal{RS}_\alpha(N, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\,\} \;=\; N\, \max\{\, 0\,,\ \mathcal{RS}_\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\,\}.$$

Satz 3.3.2 ***Preis der Sondertilgung für ein endfälliges Darlehen***

Der Cashflow von $st(\alpha)$ Receiverswaptions mit Nominalbetrag 1, Laufzeit $(\alpha, t_n]$, festem Zins S und Fälligkeit im Zeitpunkt der Sondertilgungsoption α dupliziert die Sondertilgungsoption $st(\alpha)$ in α. Die Sondertilgungsoption kann daher durch den Preis der entsprechenden Swaption bewertet werden, d.h.

$$\mathcal{ST}_t^\alpha(K^{f,E}) \quad = \quad st(\alpha)\, \mathcal{RSW}_t^\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}).$$

[13] Es ist in der Praxis durchaus üblich, nicht tatsächlich in den unterlegten Swapkontrakt einzutreten, sondern im Ausübungszeitpunkt den Barwert der Option auszugleichen.

[14] Zur Definition von t_k siehe (3.3). Zur Definition von $\mathcal{T}^{\geq k}$ siehe (2.39).

Beweis:

Betrachten wir eine einfache Sondertilgungsoption zu einem bestimmten Zeitpunkt α, $\alpha \in (t_0, t_n]$. Der Sondertilgungsbetrag sei $st(\alpha)$.

Aus dem Ursprungsdarlehen mit Payerswap ergibt sich der bereits entwickelte Zahlungsstrom $\big(k(t) + PS(t)\big)_{t>0}$:

$k(t) + PS(t)$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} -a(t) + u(t) & t = t_0 \\ -a(t_i) + n(t_{i-1})\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) + u(t_i) & t = t_i \in \mathcal{T}^{\geq 1} \\ 0 & t \notin \mathcal{T} \end{array} \right\}.$$

Im Falle der Ausübung der Sondertilgungsoption in α ändert sich der Kreditzahlungsstrom ab diesem Zeitpunkt. Wir wählen dieselben Bezeichnungen wie in Abschnitt 3.2.

$$\tilde{u}(\alpha) = u(\alpha) + st(\alpha)$$

Für das neue Paket aus Kredit $\tilde{K}$ und Payerswap PS ergibt sich in $t_i \geq t_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{k}(t_i) + PS(t_i) &= -\tilde{a}(t_i) + \tilde{z}(t_i) + \tilde{u}(t_i) + Sv(t_i) - Sf(t_i) \\ &= -\tilde{a}(t_i) + \tilde{u}(t_i) + (\tilde{n}(t_{i-1}) - n(t_{i-1}))\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &\quad + n(t_{i-1})\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &= -\tilde{a}(t_i) + \tilde{u}(t_i) + (\tilde{n}(t_{i-1}) - n(t_{i-1}))\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &\quad - (\tilde{n}(t_{i-1}) - n(t_{i-1}))\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &\quad + \tilde{n}(t_{i-1})\, L(t_{i-1}, t_i) \tau(t_{i-1}, t_i). \end{aligned}$$

In t_k, als erster Zahlungszeitpunkt nach der Sondertilgung, gilt

$$\begin{aligned} \tilde{k}(t_k) + PS(t_k) &= -a(t_k) + u(t_k) + n(t_{k-1})\, L(t_{k-1}, t_k)\, \tau(t_{k-1}, t_k) \\ &\quad - st(\alpha)\, (S - L(\alpha, t_k))\, \tau(\alpha, t_k) - st_\alpha\, L(\alpha, t_k)\, \tau(\alpha, t_k), \end{aligned}$$

so dass sich als auszugleichende Differenz der Pakete für eine verbindliche Sondertilgung in Höhe von $st(\alpha)$ in α der Zahlungsprozess $VT = \big(vt(t)\big)_{t>0}$ ergibt. Für $t = t_i$, $t_i \in \mathcal{T}^{\geq k+1}$ gilt:

$$\begin{aligned} vt(t_i) &= u(t_i) - \tilde{u}(t_i) + st(\alpha)\, S\, \tau(t_{i-1}, t_i) - st(\alpha)\, L(t_{i-1}, t_i)\, \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &\quad + st(\alpha)\, L(t_{i-1}, t_i) \tau(t_{i-1}, t_i) \\ &= \underbrace{st(\alpha)\, (S - L(t_{i-1}, t_i))\, \tau(t_{i-1}, t_i)}_{= st(\alpha)\, RS(t_i)\ ;\ st(\alpha)\ \text{Receiverswaps mit Nominal 1}} + \underbrace{u(t_i) - \tilde{u}(t_i)}_{= \left\{ \begin{smallmatrix} st(\alpha) & \text{für} & i=n \\ 0 & & \text{sonst} \end{smallmatrix} \right\}} \\ &\quad + \underbrace{st(\alpha)\, L(t_{i-1}, t_i) \tau(t_{i-1}, t_i)}_{\text{Zinszahlung der Anlage zum var. Zins}} . \end{aligned}$$

Es gilt weiter in $t = t_k$

$$\begin{aligned} vt(t_k) &= st(\alpha)(S - L(\alpha, t_k))\,\tau(\alpha, t_k) + st(\alpha)\,L(\alpha, t_k)\,\tau(\alpha, t_k) + st(\alpha) - st(\alpha) \\ &= st(\alpha)\,RS(t_k) + \underbrace{st(\alpha)\,L(\alpha, t_k)\,\tau(\alpha, t_k)}_{\text{Zinszahlung zum var. Zins}}, \end{aligned}$$

in $t = \alpha$

$$vt(t) = -st(\alpha)$$

und

$$vt(t) = 0 \qquad \forall\, t \notin \mathcal{T}^{\geq k}.$$

Dabei ist $RS(t_k)$ die Zahlung für einen in α startenden Receiverswap nach der ersten Periode $(\alpha, t_k]$, die u.U. eine kurze[15] erste Periode ist. Wir erhalten also für den Wert einer verbindlichen Sondertilgung VT^α bei einem endfälligen Darlehen:

$$\begin{aligned} &\mathcal{VT}_t^\alpha(K^{f,E}) \\ &= -st(\alpha)\,P(t, \alpha) + st(\alpha)\,L(\alpha, t_k)\,\tau(\alpha, t_k)\,P(t, t_k) \\ &\quad + st(\alpha) \sum_{i=k+1}^{n} L(t_{i-1}, t_i)\tau(t_{i-1}, t_i)\,P(t, t_i) + st(\alpha)\,P(t, t_n) \\ &\quad + st(\alpha)\,\big[(S - L(\alpha, t_k))\,\tau(\alpha, t_k)\,P(t, t_k) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{n} (S - L(t_{i-1}, t_i))\,\tau(t_{i-1}, t_i)\,P(t, t_i)\big] \\ &= -st(\alpha)\,P(t, \alpha) + \mathrm{p}_t\big(FRN(st(\alpha), (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\big) \\ &\quad + st(\alpha)\,\mathcal{RS}_t(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) \\ &\underbrace{=}_{\text{Bem. 2.4.1}} st(\alpha)\,\mathcal{RS}_t(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) \end{aligned}$$

Der Darlehensnehmer übt die Sondertilgungsoption nur aus, wenn die Differenz zwischen dem ursprünglichen K und dem veränderten Zahlungsstrom $\tilde{K}$ im Ausübungszeitpunkt α einen positiven Wert hat, d.h. der Wert der Option ist in α:

$$\begin{aligned} \mathcal{ST}_\alpha^\alpha(K^{f,E}) &= \max\{\,0\,,\, \mathcal{VT}_\alpha^\alpha(K^{f,E})\,\} \\ &= \max\{\,0\,,\, st(\alpha)\,\mathcal{RS}_\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\,\} \\ &= st(\alpha)\,\max\{0, \mathcal{RS}_\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\} \end{aligned}$$

Dies entspricht also in α dem Wert von $st(\alpha)$ Receiverswaptions, die die Option der Sondertilgung duplizieren. Aufgrund der Arbitragefreiheit des Marktes und da aus der Swaption bis α keine Zahlungen fließen, gilt daher in t, $0 \leq t \leq \alpha$ die Behauptung. □

[15] Eine kurze erste Periode heißt, dass sie kürzer ist als der spätere Zahlungsrhythmus, z.B. 3-monatlich, und daher auf der variablen Seite mit einem anderen Libor als z.B. dem 3-Monats-Libor verzinst wird.

Satz 3.3.3 ***Sondertilgungsoption für ein Ratendarlehen***

Der Wert für ein Sondertilgungsrecht in α in Höhe von $st(\alpha)$ Geldeinheiten für ein Ratendarlehen $K^{f,R}$ entspricht, analog zur Sondertilgung für ein endfälliges Darlehen, dem Wert von $st(\alpha)$ Receiverswaptions $RSW(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$.

$$\mathcal{ST}_t^\alpha(K^{f,R}) \quad = \quad st(\alpha)\, \mathcal{RSW}_t^\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) \tag{3.17}$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Satzes 3.3.2, denn auch für das Ratendarlehen gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\alpha) &= u(\alpha) + st(\alpha) \\
\tilde{u}(t_i) &= u(t_i) \quad \text{für alle } t_i \in \mathcal{T}^{\geq k}, t_i \neq t_n \\
\tilde{u}(t_n) &= u(t_n) - st(\alpha).
\end{aligned}$$

□

Fehlt als letzte Kreditart noch das Annuitätendarlehen. Wie auch schon in Abschnitt 3.2 spielen die Zinsen auf die ersparten Zinsen bei der Bewertung des Sondertilgungsrechtes für ein Annuitätendarlehen eine Rolle. Denn die ersparten Zinsen erhöhen den Tilgungsanteil in der Annuität genau um den ersparten Zinsbetrag. Der zusätzliche Tilgungsanteil muss damit über die nächsten Perioden ebenso wir der Sondertilgungsbetrag nicht mehr verzinst werden muss. Andererseits bleibt der Zahlungsstrom in allen Zeitpunkten $t_i \notin \{\alpha, t_n\}$ des Kredites unberührt.

Definition 3.3.4 ***Zero-Coupon-Swap***

Ein Zero-Coupon-Swap $ZS(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$ mit Startnominal 1, Zins S, Laufzeit $(\alpha, t_n]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}^{\geq k}$ ist ein Swap, der auf der festen Seite während der Laufzeit keine Zinszahlungen und nur im letzten Zahlungszeitpunkt t_n eine akkumulierte Zinszahlung leistet (Receiver, RZS) beziehungsweise einfordert (Payer, PZS) während auf der variablen Seite die Zahlungen wie bei einem Plain Vanilla Swap anfallen. Dabei setzt sich die Zahlung der festen Seite in t_n aus den Zinsen und Zinseszinses der einzelnen Perioden zwischen den Zahlungszeitpunkten zusammen:

$$zs^f(t_n) \quad = \quad \big(1 + S\,\tau(\alpha, t_k)\big) \left(\prod_{i=k}^{n-1} \left(1 + S\,\tau(t_i, t_{i+1})\right) \right) - 1.$$

Auf der variablen Seite des Zero-Coupon-Swaps wird wie im Plain Vanilla Swap das Startnominal zum jeweiligen variablen Zinssatz $L(t_i, t_{i+1})$ verzinst und am Ende der jeweiligen Periode $t_i \in \mathcal{T}^{\geq k}$ ausgezahlt:

$$\begin{aligned}
zs^v(t_k) &= L(\alpha, t_k)\, \tau(\alpha, t_k) \\
zs^v(t_i) &= L(t_{i-1}, t_i) \tau(t_{i-1}, t_i) \quad i = k+1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{RZS}_t(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) \\
&= zs^f(t_n)\, P(t, t_n) - L(\alpha, t_k)\, \tau(\alpha, t_k)\, P(t, t_k) \\
&\quad - \sum_{t_i \in \mathcal{T}^{\geq k+1}} L(t_{i-1}, t_i) \tau(t_{i-1}, t_i)\, P(t, t_i)
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

ist der Wert des Receiverzeroswaps.

Satz 3.3.4 ***Sondertilgungsoption für ein Annuitätendarlehen***
Für ein Annuitätendarlehen $K^{f,A}$ mit Zinssatz S, Laufzeit $(t_0, t_n]$, Zahlungszeitpunkte $\mathcal{T}$ und Annuität Λ hat eine Sondertilgungsoption in α für einen Betrag von $st(\alpha)$ den Wert von $st(\alpha)$ Zero-Coupon-Swaptions auf Receiver-Zero-Coupon-Swaps $RZS(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$:

$$
\mathcal{ST}_t^\alpha \quad = \quad st(\alpha) \mathcal{RZSW}_t^\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}). \tag{3.19}
$$

Beweis:
Da durch die gleichbleibende Annuität Λ die Zahlungsströme des Ursprungskredites und des Kredites nach Sondertilgung für alle Zahlungszeitpunkte $t_i \notin \{\alpha, t_n\}$ identisch sind

$$
k(t_i) = -a(t_i) + \Lambda = -\tilde{a}(t_i) + \Lambda = \tilde{k}(t_i),
$$

die Differenz in α

$$
k(\alpha) - \tilde{k}(\alpha) \quad = \quad -st(\alpha)
$$

und in t_n gemäß (3.16)

$$
k(t_n) - \tilde{k}(t_n) \quad = \quad st(\alpha)\, (1 + S\, \tau(\alpha, t_k)) \prod_{i=k}^{n-1} (1 + S\, \tau(t_i, t_{i+1})) \tag{3.20}
$$

ist, gilt für den Wert einer verbindlichen Sondertilgung in Höhe von $st(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{VT}_t^\alpha \quad &= \quad -st_\alpha\, P(t, \alpha) \\
&\quad + st(\alpha)\, (1 + S\, \tau(\alpha, t_k)) \prod_{i=k}^{n-1} \big(1 + S\, \tau(t_i, t_{i+1})\big)\, P(t, t_n) \\
&= \quad -st(\alpha)\, P(t, \alpha) - st(\alpha)\, P(t, t_n) + st(\alpha)\, P(t, t_n) \\
&\quad + st(\alpha)\, (1 + S\, \tau(\alpha, t_k)) \prod_{i=k}^{n-1} \big(1 + S\, \tau(t_i, t_{i+1})\big)\, P(t, t_n) \\
&\quad + st(\alpha)\, L(\alpha, t_k)\, \tau(\alpha, t_k)\, P(t, t_k) \\
&\quad + st(\alpha) \sum_{i=k}^{n-1} L(t_i, t_{i+1})\, \tau(t_i, t_{i+1})\, P(t, t_{i+1}) \\
&\quad - st(\alpha)\, L(\alpha, t_k)\, \tau(\alpha, t_k)\, P(t, t_k) \\
&\quad - st(\alpha) \sum_{i=k}^{n-1} L(t_i, t_{i+1})\, \tau(t_i, t_{i+1})\, P(t, t_{i+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -st(\alpha)\,P(t,\alpha) + st(\alpha)\,P(t,t_n) \\
&\quad + st(\alpha)\,L(\alpha,t_k)\,\tau(\alpha,t_k)\,P(t,t_k) \\
&\quad + st(\alpha)\sum_{i=k}^{n-1} L(t_i,t_{i+1})\,\tau(t_i,t_{i+1})\,P(t,t_{i+1}) \\
&\quad + st(\alpha)\left[(1+S\,\tau(\alpha,t_k))\prod_{i=k}^{n-1}\big(1+S\,\tau(t_i,t_{i+1})\big)-1\right]P(t,t_n) \\
&\quad - st(\alpha)\,L(\alpha,t_k)\,\tau(\alpha,t_k)\,P(t,t_k) \\
&\quad - st(\alpha)\sum_{i=k}^{n-1} L(t_i,t_{i+1})\,\tau(t_i,t_{i+1})\,P(t,t_{i+1}) \\
&= -st(\alpha)\,P(t,\alpha) + st(\alpha)\,\mathtt{p}_t(\mathit{FRN}(1,(\alpha,t_n],\tau^{\geq k}) \\
&\quad + st(\alpha)\,\mathcal{RZS}_t(1,S,(\alpha,t_n],\mathcal{T}^{\geq k})
\end{aligned}
$$

Für die Sondertilgung im Zeitpunkt α bedeutet dies

$$
\begin{aligned}
\mathcal{ST}_\alpha^\alpha &= \max\{\,0\,,\ st(\alpha)\,\mathcal{RZS}_t(1,S,(\alpha,t_n],\mathcal{T}^{\geq k})\,\} \\
&\underbrace{=}_{\text{Bem. 3.3.4}} st(\alpha)\,\mathcal{RZSW}_\alpha^\alpha(1,S,(\alpha,t_n],\mathcal{T}^{\geq k}),
\end{aligned}
$$

da

$$
\mathtt{p}_\alpha(\mathit{FRN}(1,(\alpha,t_n],\mathcal{T}^{\geq k}) \quad = \quad 1.
$$

Aufgrund der Arbitragefreiheit ergibt sich aus dem Duplikationsportfolio, bestehend aus den Swaptions, die Behauptung.

□

Bemerkung 3.3.5 *Die in den vorangegangenen Beweisen geführten Swaptionansätze lassen sich auch aus Sicht des Darlehensnehmer vertreten. Mit seiner freien Liqiudität hat der Darlehensnehmer nämlich außer der Sondertilgung die Möglichkeit, den Sondertilgungsbetrag und die je nach Rückzahlungsmodell entstehenden Tilgungsdifferenzen in den späteren Perioden zum variablen Zins $L(t_i,t_{i+1})$ am Markt anzulegen. Durch die Sondertilgung verzichtet er auf diese Anlage (Opportunitätsgedanke) und erzeugt damit den Zahlungsstrom des Hedgeportfolios.*

Anders argumentiert, hat der Darlehensnehmer auf einem vollkommenen Kapitalmarkt in jedem Zeitpunkt die Möglichkeit der Geldaufnahme zum variablen Zinssatz. Er kann also in den entsprechenden Zeitpunkten den Sondertilgungsbetrag und später die möglichen erhöhten Tilgungsbeträge aufnehmen und sie in t_n zurückzahlen.

3.4 Gleichheit der Ansätze

Im vorangegangenen Kapitel haben wir zwei Ansätze zur Bewertung von Sondertilgungsrechten kennengelernt. Aufgrund der Arbitragefreiheitsannahme liegen eindeutige Preise für die an den Darlehensnehmer vergebenen Optionen vor.

Wir werden nun im Folgenden zeigen, dass die beiden vorgestellten Ansätze zur selben Bewertung führen, d.h. den selben Preis ergeben.

Satz 3.4.1 *Eine Receiverswaption* $RSW(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$ *hat denselben Preis wie ein Call auf eine Kuponanleihe* $CO(1, BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}))$ *und daher ist der Wert der Sondertilgung für endfällige und Ratendarlehen eindeutig:*

$$\begin{aligned} \mathcal{ST}_t^{\alpha}(K^{f,E}) = \mathcal{ST}_t^{\alpha}(K^{f,R}) &= \mathcal{CO}_t^{\alpha}(1, BO(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})) && (3.21) \\ &= \mathcal{RSW}_t^{\alpha}(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) && (3.22) \end{aligned}$$

Beweis:

Aus dem Swaptionansatz ergibt sich für die Sondertilgung für ein endfälliges oder Ratendarlehen im Tilgungszeitpunkt α ein Wert von

$$\begin{aligned} &\mathcal{ST}_\alpha^\alpha \\ &= st(\alpha)\ \max\big\{0\,,\ \mathcal{RS}_\alpha(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})\big\} \\ &= st(\alpha)\ \max\big\{0\,,\ (S - L(\alpha, t_k)\,\tau(\alpha, t_k)\,P(\alpha, t_k) \\ &\qquad\qquad + \sum_{i=k}^{n-1} (S - L(t_i, t_{i+1}))\,\tau(t_i, t_{i+1})\,P(\alpha, t_{i+1})\big\} \\ &= st(\alpha)\ \max\big\{0\,,\ S\,\tau(\alpha, t_k)\,P(\alpha, t_k) + \sum_{i=k}^{n-1} S\,\tau(t_i, t_{i+1})\,P(\alpha, t_{i+1}) \\ &\qquad\qquad - \mathtt{p}_\alpha(FRN(1, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})) + P(\alpha, t_n)\big\} \\ &= st(\alpha)\ \max\big\{0\,,\ \mathcal{BO}(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k}) - 1\big\} \end{aligned}$$

Wir haben also den Wert der Sondertilgung nach Swaptionansatz in den Wert nach Ansatz 1 überführt. Daraus folgt die Behauptung.

□

Satz 3.4.2 *Der Wert der Zero-Coupon-Swaption* $\mathcal{RZSW}_t^{\alpha}(1, S, (\alpha, t_n], \mathcal{T}^{\geq k})$ *entspricht dem Wert einer Calloption*

$$\mathcal{CO}_t^{\alpha}\left(1, (1 + S\,\tau_{\alpha,t_k}) \prod_{i=k}^{n-1} (1 + S\,\tau_i)\,P_{t_n}^{\alpha}\right)$$

und damit ist der Wert der Sondertilgungsoption für das Annuitätendarlehen eindeutig.

Beweis:

Da in beiden Ansätzen die Werte der Sondertilgungsoption aus dem Wert der verbindlichen Sondertilgung $\mathcal{VT}_\alpha^\alpha$ in α ermittelt wurden, gilt

$$\mathcal{RZS}(1,S,(\alpha,t_n],\mathcal{T}^{\geq k}) = \mathcal{VT}_\alpha^\alpha = -1+(1+S\,\tau(\alpha,t_k))\prod_{i=k}^{n-1}(1+S\,\tau_i)\,P(\alpha,t_n) \tag{3.23}$$

und damit die Eindeutigkeit für $\mathcal{ST}_t^\alpha$.

□

3.5 Ergebnis

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Sondertilgungsoptionen für einen beliebigen aber festen Sondertilgungsbetrag $st(\alpha)$ im Zeitpunkt α bewertet. Der Preis der Sondertilgungsoption im Ausübungszeitpunkt $\mathcal{ST}_\alpha^\alpha$ steigt dabei linear mit dem Betrag $st(\alpha)$. Ein rational handelnder Marktteilnehmer wird daher auch bei einer Wahlmöglichkeit bezüglich der Sondertilgungshöhe die Option ausschließlich zum Höchstbetrag ausüben, um seinen Gewinn zu maximieren. Für die arbitragefreie Bewertung der Sondertilgungsoptionen auf dem angenommenen Markt reicht es also aus, den Fall $\Gamma(t)\equiv 1$ zu betrachten.

Der Preis für eine solche Option in α ergibt sich, bei Annahme eines rationalen Marktteilnehmers, somit als Preis einer Option mit festem Sondertilgungsbetrag $st(\alpha)$ in α. Diesen können wir gemäß der zuvor entwickelten Bewertungmethode angeben.

Bis hierher haben wir nur ein einziges Sondertilgungsrecht zu einem beliebigen aber bestimmten Zeitpunkt α des Darlehens betrachtet. Es handelt sich folglich um eine europäische Option. Eine Möglichkeit die Sondertilgung in einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb einer Periode vorzunehmen verändert die Ausstattung (amerikanisch, bermudisch) einer Option aber nicht die Art des Underlyings.

Als zentrales Ergebnis der Bewertung der Sondertilgungsrechte ergibt sich, dass alle betrachteten Optionen nur von der Höhe der Sondertilgung, dem Festzinssatz S des Kredites und des Ausübungszeitpunktes (-zeiraumes) abhängen.

Die Zeiträume der amerikanischen oder Bermudaoptionen überschneiden sich nicht und die Optionen sind daher als voneinander unabhängig zu betrachten. Je nachdem wie viele Sondertilgungsrechte vereinbart werden und wie diese ausgestattet sind, beinhaltet der Kreditvertrag mehrere europäische (Ausübung zu einem bestimmten Zeitpunkt) oder amerikanische (bermudische) (Ausübung (zu mehreren Zeitpunkten) innerhalb eines bestimmten Zeitraums) Optionen.

Bei einer Vielzahl von Sondertilgungsoptionen ergibt sich aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Optionen ihr Gesamtwert als Summe der Einzeloptionen. Der Wert eines Darlehens mit Sondertilgungsoptionen zum Abschlusszeitpunkt $t = 0$ ergibt sich demnach aus dem Wert des Darlehens ohne Sondertilgungsoptionen mit ursprünglichem Prozess K abzüglich des Wertes für die Sondertilgungsoptionen:

$$\mathcal{K}_0^{f,(\cdot)} - \sum_{t=0}^{T} \mathcal{ST}_0^t.$$

Bemerkung 3.5.1 *Werden die Sondertilgungsrechte gegen eine Einmalzahlung begeben, so kann die Option mit dem für das Darlehen festgelegten Zins S seperat bewertet werden und der Gegenwert als Einmalzahlung bei der ersten Auszahlung einbehalten werden.*

Soll die Option sich in einem Aufschlag auf den Zinssatz niederschlagen, so müssen Optionen und Kredit ohne Sondertilgungsoption simultan bewertet werden, da sie sich gegenseitig bedingen. Der "faire" Festzinssatz des Darlehens mit Sondertilgung ergibt sich dann durch einen Barwert von null zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses $t = 0$ für den Kredit plus Option. Das heißt man sucht den Zinssatz S, der die Gleichung

$$\mathcal{K}_0^{f,(\cdot)} - \sum_{s=0}^{T} \mathcal{ST}_0^s \quad = \quad 0$$

löst.

Als Fazit können wir festhalten, dass der Ausweitung der Sondertilgungsrechte durch Ausweitung der Anzahl bzw. Modifikationen in der Ausstattung der Optionstitel Rechnung getragen wird, der Bewertungsansatz aber der Gleiche bleibt.

Betrachten wir nun noch drei Preise für Sondertilgungsrechte für die Beispieldarlehen mit Ratenzahlung.

Beispiel 3.5.1 ***Ratendarlehen 1***

Zusätzlich zu der regelmäßigen Tilgung fragt der Darlehensnehmer bei Abschluss des Kreditvertages nach einer Möglichkeit, zusätzliche Tilgungen vornehmen zu können, wenn er Geld übrig hat. Er einigt sich mit dem Kreditinstitut auf eine Sondertilgungsmöglichkeit in Höhe von 5.000 Euro am Ende eines jeden Laufzeitjahres, sprich zum 30. Oktober.

Eine Bewertung der Sondertilgungsrechte für diesen Kredit am Markt ergibt am 30.09.2008 die Preise aus Tabelle 3.1[16]*.*

Die Sondertilgungsrechte haben somit einen Preis von 727,96 Euro, was 0,2465 % des Nominalbetrages N =300.000 Euro entspricht.

[16]Quelle: Swapmanager für die Berechnung von Swaptions, Bloomberglizenz der WL Bank AG, Münster.

Ausübungsdatum α	Preis $\mathcal{ST}_0^\alpha$
30.10.2009	107,00
30.10.2010	118,07
30.10.2011	115,21
30.10.2012	105,20
30.10.2013	91,44
30.10.2014	75, 96
30.10.2015	57,26
30.10.2016	38,62
30.10.2017	19,20
Summe	727,96

Tabelle 3.1: Preise der jährlichen Sondertilgungsptionen in Höhe von 5.000 Euro für Ratendarlehen 1

Beispiel 3.5.2 ***Ratendarlehen 2***

Für das Ratendarlehen 2 wird vierteljährliche Zahlung vereinbart und der Kreditzins beläuft sich daher, abweichend zum Ratendarlehen 1 auf 4,7565 %. Der Festzins liegt um knappe 2 Basispunkte über dem Zins des ersten Ratendarlehens. Wir betrachten dieselbe Sondertilgungsvereinbarung wie beim Ratendarlehen 1 (5.000 Euro jeweils am 30. Oktober der Jahre 2009 bis 2017). Aufgrund des leicht höheren Zinssatzes quotieren die Preise der Receiverswaptions[17] *und damit der Sondertilgungsrechte leicht oberhalb der Preise für das Ratendarlehen 1. Je kürzer dabei die Laufzeit des unterlegten Swaps, desto kleiner die Unterschiede der Preise, da sich die Zinsdifferenz nur auf weniger Perioden auswirken kann.*

Einen 1:1 Hedge zur Vergabe der Sondertilgungsrechte an den Darlehensnehmer kann das Kreditinstitut also für 743,23 Euro erwerben.

Beispiel 3.5.3 ***Ratendarlehen 3***

Für das Ratendarlehen 3 vereinbaren die Kreditkontrahenten eine Sondertilgungsmöglichkeit in Höhe von 2 Millionen Euro zum Ende des fünften Laufzeitjahres am 30.10.2013. Diese Option entspricht also einer Receiverswaption mit Ausübungszeitpunkt 30.10.2013, 2 Millionen Euro Nominalbetrag, Laufzeit vom 30.10.2013 bis zum 30.10.2018, Strikerate 4,7505 % und vierteljährlichen Zahlungen. Ein Preisabgleich mit dem Marktpreis[18] *für eine solche Swaption ergibt am 30.09.2008 einen Wert in Höhe von 27.548,03 Euro für die Sondertilgungsoption. Dies bedeutet einen Anteil von 0,551 % an dem Ursprungsnominal von 5 Millionen Euro.*

[17] Quelle: Swapmanager für die Berechnung von Swaptions, Bloomberglizenz der WL Bank AG, Münster.

[18] Quelle: Swapmanager für die Berechnung von Swaptions, Bloomberglizenz der WL Bank AG, Münster.

Ausübungsdatum α	Preis $\mathcal{ST}_0^\alpha$
30.10.2009	110,31
30.10.2010	120,90
30.10.2011	117,57
30.10.2012	107,15
30.10.2013	93,00
30.10.2014	77,13
30.10.2015	58,08
30.10.2016	39,14
30.10.2017	19,95
Summe	743,23

Tabelle 3.2: Preise der jährlichen Sondertilgungsptionen in Höhe von 5.000 Euro für Ratendarlehen 2

Kapitel 4

Das Ho/ Lee Modell

4.1 Einleitung

Nachdem wir die Finanztitel identifiziert haben, die die Sondertilgungsoptionen duplizieren, benötigen wir ein Modell, das diese Finanztitel bewertet. Dazu eignen sich Zinsstrukturmodelle. Im Folgenden werden wir das Ho/ Lee Modell als ein Beispiel für ein solches Modell vorstellen.

Zinsoptionen werden durch ihr Preisverhalten, das unmittelbar von dem Verhalten der Zinsstruktur und deren stochastischen Veränderungen abhängt, charakterisiert.

Das Hauptproblem bei der Bewertung dieser Option liegt darin, die Zinsstrukturverschiebungen zu modellieren und die Veränderungen mit den Preisen der Option zu verbinden.

Im Ho/ Lee Modell werden, im Gegensatz zu anderen Ansätzen (z.B. Cox/ Ingersoll/ Ross), nicht die Parameter des Modells so kalibriert, dass sie die reale Anfangszinsstruktur implizieren, sondern die aktuelle Zinsstruktur, gegeben durch die Zerobondkurve, ist hier selbst ein Eingangsparameter. Ausgehend von der aktuellen Zinsstruktur werden in diskreten Zeitschritten die möglichen Szenarien der Zinsentwicklung modelliert. Die Grundidee dabei ist, die aktuelle Zerobondkurve in jedem Zeitschritt durch zufällige Auswahl einer Störfunktion zu verändern.

Nachdem die Zinsszenarien entwickelt sind, werden die Preise der Optionen durch die Methodik nach Cox, Ross, Rubinstein oder Black & Scholes berechnet.

4.2 Modellannahmen

1. Das Modell ist ein diskretes Zinsstrukturmodell, dass die Bondpreise über T Perioden modellieren soll. Jede Periode sei eine Zeiteinheit lang. Wir betrachten einen Zeithorizont $[0, T]$. Gehandelt wird zum

Ende einer jeden Periode, d.h. die Handelszeitpunkte sind

$$t \in \{1, 2, \dots, T\}.$$

2. Es gibt eine endliche Anzahl von Umweltzuständen

$$I = \{0, 1, 2, \dots, T\},$$

die die Diskontfunktionen beeinflussen. Liegt zum Zeitpunkt t der Umweltzustand i vor, so bezeichnet

$$P_i(t, \cdot) \quad = \quad \big(P_i(t, s)\big)_{s>t}$$

die in t realisierte Diskontfunktion (Zerobondkurve).

3. Beginnend mit dem Umweltzustand $i = 0$ in $t = 0$ ändert sich mit jedem Zeitschritt der Umweltzustand entsprechend eines Randomwalks, der mit Wahrscheinlichkeit $(1 - q)$ im Zustand verharrt und mit Wahrscheinlichkeit q um eine Einheit nach oben springt. Sind $(X_j)_{j=1,\dots,T}$ unabhänge, identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$Q(X_j = 1) \quad = \quad q \quad = \quad 1 - Q(X_j = 0),$$

so ist

$$Y(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{t} X_j \qquad t = 1, \dots, T$$

ein Randomwalk, der die Veränderung des Umweltzustandes mit der Zeit modelliert.

4. Die Anfangsdiskontfunktion $P_0(0, \cdot)$ ist bekannt und sie, sowie alle übrigen Diskontfunktionen, erfüllen die Bedingungen

$$0 \leq P_i(t, s) \leq 1 \quad \text{und} \quad P_i(s, s) = 1. \tag{4.1}$$

4.3 Baumstruktur

Im Modell von Ho und Lee wird ein Binomialbaum aufgebaut, in dem sich zu jeder Zeit und jedem Zustand der Zins über die nächste Periode nur in zwei mögliche Richtungen entwickeln kann, entweder aufwärts oder abwärts. Zum Start- bzw. Bewertungszeitpunkt ist die aktuelle Struktur der Diskontkurve gegeben. Eine Periode später kann die Funktion zwei mögliche Werte, $P_1(1, \cdot)$ und $P_0(1, \cdot)$, annehmen. Dabei beschreibt der Index den Zustand I, die erste Komponente den Entwicklungszeitpunkt und die zweite den Fälligkeitszeitpunkt. $P_1(1, \cdot)$ gibt eine über die vergangene Periode $0 \to 1$ realisierte Aufwärtsbewegung (upstate) und $P_0(1, \cdot)$ eine realisierte Abwärtsbewegung (downstate) an.

In jedem Umweltzustand hat die Funktion für die folgende Periode wiederum diese zwei Entwicklungsmöglichkeiten. Dabei nehmen wir für den Binomialbaum in diesem Modell an, dass startend von einem beliebigen Knoten (Zeit- und Zustandskoordinate (t, i)), die Realisierung einer Aufwärtsbewegung in der nächsten Periode gefolgt von einer Abwärtsbewegung in der übernächsten im selben Zustand endet wie die Realisierung einer Abwärtsbewegung in der nächsten Periode gefolgt von einer Aufwärtsbewegung in der übernächsten.

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{\omega+1}(t+1,s) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ P_\omega(t,s) & & & & P_{\omega+1}(t+2,s) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P_\omega(t+1,s) & & \end{array}$$

Durch die Baumstruktur ist die oben definierte Anzahl der Umweltzustände zum Zeitpunkt t gegeben. Der Index i gibt daher an, wie viele upstates in der Vergangenheit bereits erfolgt sind, bzw. bis zum Erreichen des Knotens (t, i) erfolgen müssen. Anschaulich dargestellt ergibt sich das folgende Bild für einen Zerobond mit Fälligkeit s:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \nearrow \\ & & & & P_2(2,s) & \\ & & & \nearrow & & \searrow \\ & & P_1(1,s) & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ P_0(0,s) & & & & P_1(2,s) & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\ & & P_0(1,s) & & & \\ & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & P_0(2,s) & \\ & & & & & \searrow \\ t=0 & & t=1 & & t=2 & \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit einen Umweltzustand k in t zu erreichen ist gegeben durch:

$$Q(\,Y(t) = k\,) = Q(\sum_{j=0}^{t} X_j = k\,) = \binom{t}{k} q^t (1-q)^{t-k}.$$

Der zufällige Preis des Zerobonds in t mit Fälligkeit s ergibt sich mit der Definition des Randomwalks als:

$$P(t,s) \quad = \quad \sum_{i=0}^{t} P_i(t,s)\, \mathbf{1}_{\{Y(t)=i\}}. \tag{4.2}$$

Der Preis des Zerobonds mit Fälligkeit in s folgt also einem Binomialprozess mit zeitabhängigen Schrittgrößen. Alle Preise der übrigen Zerobonds mit Fälligkeiten $\tilde{s} \neq s$, $\tilde{s} > t$ ergeben sich analog, so dass die Diskontfunktion in jedem Zeitpunkt und Zustand definiert ist.

4.4 Die Störfunktionen

Ziel des Ho/ Lee Modells ist es, aus der anfänglichen Zerobondkurve, rekursiv Diskontfunktionen

$$\left(P_i(t,\cdot)\right)_{\substack{0\leq t\leq T\\ 0\leq i\leq t}}$$

zu entwickeln, so dass das dadurch erhaltene Modell arbitragefrei ist.

Wären alle Marktteilnehmer in einem Zeitpunkt t und realisiertem Umweltzustand i der Meinung, dass für die nächstfolgende Periode kein Zinsänderungsrisiko bestünde (Markt unter Sicherheit), wären die Preise für eine Aufwärtsbewegung $P_{i+1}(t+1,s)$ und eine Abwärtsbewegung $P_i(t+1,s)$ gleich und der implizite Forward-Diskontfaktor

$$\mathtt{f}_{t,i}(P_s,t+1) \quad = \quad \frac{P_i(t,s)}{P_i(t,t+1)}$$

für den Zerobond P_s mit Fälligkeit in s, $s \geq t+1$, entspräche ebenfalls diesem Preis. In diesem Fall gälte:

$$\mathtt{f}_{t,i}(P_s,t+1) \quad = \quad P_i(t+1,s) \quad = \quad P_{i+1}(t+1,s) \quad = \quad \frac{P_i(t,s)}{P_i(t,t+1)}.$$

In einer unsicheren Welt weicht der zukünftige Preis der Zerobonds im Allgemeinen vom impliziten Forwardpreis ab. Ho und Lee beschreiben diese Unsicherheit durch **Störfunktionen** h und h^* in Abhängigkeit der Restlaufzeit. Die Funktion $h(\cdot)$ modifiziert den Forwardpreis dabei für eine Aufwärtsbewegung $(i \to i+1)$, $h^*(\cdot)$ für eine Abwärtsbewegung $(i \to i)$. Die Abweichung der Diskontfunktion von den impliziten Forwardpreisen wird durch Multiplikation mit den Störfunktionen modelliert. Ho und Lee motivieren also folgende rekursive Entwicklung der Diskontfunktion.

Definition 4.4.1 ***Rekursive Entwicklung der Diskontfunktion***
Ausgehend von einem Zustand i im Zeitpunkt t definieren wir die Diskontfunktion für den Zeitpunkt $t+1$ und die zwei möglichen Umweltzustände rekursiv über $P_i(t,\cdot)$ und die Störfunktionen h und h^*. Für $s \geq t+1$ gilt:

$$P_{i+1}(t+1,s) \quad = \quad \frac{P_i(t,s)}{P_i(t,t+1)}\,h(s-(t+1)) \tag{4.3}$$

und

$$P_i(t+1,s) \quad = \quad \frac{P_i(t,s)}{P_i(t,t+1)}\,h^*(s-(t+1)). \tag{4.4}$$

Satz 4.4.1 ***Restriktion Pull-To-Par Effekt***
Für die Störfunktionen gilt:

$$h(\cdot) \geq 0 \text{ und } h^*(\cdot) \geq 0 \tag{4.5}$$

und

$$h(0) \quad = \quad h^*(0) \quad = \quad 1. \tag{4.6}$$

Beweis:
(4.5) folgt direkt aus den Modellannahmen (4.1).

Für den Pull-To-Par Effekt muss der Preis des Zerobonds bei Fälligkeit 1 sein, d.h. es gilt

$$P_i(s,s) \quad = \quad 1 \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots s.$$

Für eine Aufwärtsbewegung $i \to i+1$ in der letzten Periode vor Fälligkeit gilt also

$$P_{i+1}(s,s) \quad = \quad \frac{P_i(s-1,s)}{P_i(s-1,s)}\, h(s-s) \quad = \quad h(0)$$

und für eine Abwärtsbewegung $i \to i$ in der letzten Periode

$$P_i(s,s) \quad = \quad \frac{P_i(s-1,s)}{P_i(s-1,s)}\, h^*(s-s) \quad = \quad h^*(0).$$

Es ergibt sich also die Behauptung (4.6).

□

Definition 4.4.2 ***Pfadunabhängigkeit***
Der Diskontprozess $P(\cdot, s) = \big(P(t,s)\big)_{0 \leq t \leq s}$, $s = 1, \ldots, T$, heißt pfadunabhängig, wenn der Preis $P_i(t,s)$ im Zeitpunkt t und Umweltzustand i zwar von der Anzahl der upstates i aber nicht von der Reihenfolge der up- und downstates abhängt.

Bei der Konstruktion der Baumstruktur hatten wir bereits definiert, dass zu jeder Zeit und in jedem Zustand ein Upstate gefolgt von einem Downstate der Folge eines Upstate auf einen Downastate entspricht, d.h. Pfadunabhängigkeit gilt.

Damit die rekursive Definition der Diskontierungsfunktion wohldefiniert ist, muss für die Störfunktionen der folgende Satz gelten.

Satz 4.4.2 ***Restriktion Pfadunabhängigkeit***
Mit dem inversen Volatilitätsparameter

$$\delta := \frac{h^*(1)}{h(1)}$$

folgt für die Störfunktionen

$$h^*(\tau) \quad = \quad \delta^\tau\, h(\tau) \qquad 0 \leq \tau \leq T-1 \tag{4.7}$$

Beweis:

Nach Konstruktion des Baumes hat der Diskontprozess ausgehend von $P_i(t,s)$ 2 Entwicklungsmöglichkeiten nach 2 Perioden in $t+2$ bei einem Preis von $P_{i+1}(t+2,s)$ anzukommen. Sei

$$P_i(t,s) \to P_{i+1}(t+1,s) \to P_{i+1}(t+2,s)$$

der obere und

$$P_i(t,s) \to P_i(t+1,s) \to P_{i+1}(t+2,s)$$

der untere Entwicklungspfad. In Formeln ausgedrückt bedeutet dies für den Preis des Zerobonds über den oberen Pfad

$$P_{i+1}(t+2,s) = \frac{P_i(t,s)}{P_i(t,t+2)} \frac{h(s-(t+1))\, h^*(s-(t+2))}{h(1)}$$

sowie über den unteren Pfad

$$P_{i+1}(t+2,s) = \frac{P_i(t,s)}{P_i(t,t+2)} \frac{h^*(s-(t+1))\, h(s-(t+2))}{h^*(1)}$$

Die Zerobondpreise sind folglich genau dann pfadunabhängig und die Preise wohldefiniert, wenn

$$\frac{h(s-(t+1))\, h^*(s-(t+2))}{h(1)} = \frac{h^*(s-(t+1))\, h(s-(t+2))}{h^*(1)}.$$

Durch umsortieren ergibt sich

$$\frac{h(s-(t+1))}{h^*(s-(t+1))} = \frac{h(1)}{h^*(1)} \frac{h(s-(t+2))}{h^*(s-(t+2))}$$

Wir definieren die Konstante δ,

$$\delta := \frac{h^*(1)}{h(1)}. \tag{4.8}$$

Dann folgt mit $\tau = s-(t+1)$

$$\begin{aligned}
\frac{h(\tau)}{h^*(\tau)} &= \frac{h(1)}{h^*(1)} \frac{h(\tau-1)}{h^*(\tau-1)} \\
&= \frac{h(1)}{h^*(1)} \frac{h(1)}{h^*(1)} \frac{h(\tau-2)}{h^*(\tau-2)} \\
&= \left(\frac{h(1)}{h^*(1)}\right)^2 \frac{h(\tau-2)}{h^*(\tau-2)} \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= \left(\frac{h(1)}{h^*(1)}\right)^\tau \frac{h(\tau-\tau)}{h^*(\tau-\tau)} \\
&\underbrace{=}_{\text{Satz 4.4.1}} \delta^{-\tau}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Durch die Bedingung der Pfadunabhängigkeit können wir für die Diskontfunktion in jedem Knotenpunkt (t, i) des Baumes eine rekursive Formel angeben, die nur von der Anfangsdiskontfunktion $P_0(0, \cdot)$ und den Hilfsfunktionen abhängt.

Satz 4.4.3

Die Diskontfunktion kann mit Hilfe der Störfunktionen und der Anfangsdiskontfunktion $P_0(0, \cdot)$ in jedem Knotenpunkt (t, i) explizit bestimmt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_i(t,T) &= \frac{P_0(0,T+t)}{P_0(0,t)} \frac{h^*(T+t-1)\cdots h^*(T+i)h(T+i-1)\cdots h(T)}{h^*(t-1)h^*(t-2)\cdots h^*(i)h(i-1)\cdots h(1)} \\ &= \frac{P_0(0,T+t)}{P_0(0,t)} \frac{h(T+t-1)\cdots h(T)\delta^{T(t-i)}}{P(t)\, h(t-1)\cdots h(1)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Beweis

Wir ermitteln die Knotenpreise durch ein rekursives Verfahren. Wir wissen, dass gilt:

$$h^*(\tau) \quad = \quad h(\tau)\delta^\tau \qquad \text{für alle } T-1 \geq \tau > 0$$

Verwenden wir dies nun für den zweiten Bruch des obigen Terms, dem Teil der Störfunktionen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{\tau+t-1}\cdots\delta^{\tau+\omega}\, h(\tau+t-1)\cdots h(\tau)}{\delta^{t-1}\cdots\delta^{\omega}\, h(t-1)\cdots h(1)} \\ = \quad & \frac{\delta^{\sum_{j=\tau+\omega}^{\tau+t-\omega} j}\, h(\tau+t-1)\cdots h(\tau)}{\delta^{\sum_{j=\omega}^{t-1} j}\, h(t-1)\cdots h(1)} \\ = \quad & \frac{h(\tau+t-1)\cdots h(\tau)}{h(t-1)\cdots h(1)}\, \delta^{\tau(t-1-(\omega-1))+\sum_{j=\omega}^{t-1} j - \sum_{j=\omega}^{t-1} j} \\ = \quad & \frac{h(\tau+t-1)\cdots h(\tau)}{h(t-1)\cdots h(1)}\, \delta^{\tau(t-\omega)} \end{aligned}$$

□

Um einen Binomialbaum für die Zinsstrukturentwicklung zu konstruieren, wird also nur die Menge der Störfunktionen $h(\cdot)$, $h^*(\cdot)$ und die Startdiskontfunktion $P_0(0, \cdot)$ benötigt.

Damit nicht nur ein wohldefiniertes sondern auch ein arbitragefreies Zinsstrukturmodell entsteht, müssen die Störfunktionen h und h^* weitere Bedingungen erfüllen.

Satz 4.4.4 ***Restriktion Arbitragefreiheit, risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß***

Gilt

$$Q(X_j = 1) \quad = \quad q \quad = \quad 1 - Q(X_j = 0),$$

so ist Q ein äquivalentes Martingalmaß für das Bondpreismodell und das Bondpreismodell ist arbitragefrei genau dann, wenn

$$q\, h(\tau) + (1-q)\, h^*(\tau) \quad = \quad 1 \tag{4.10}$$

gilt für alle $0 \leq \tau \leq T-1$.

Beweis:

Für ein äquiva"lentes Martingalmaß $\mathbb{P}$ gilt nach Satz 2.1.2

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(\mathcal{X}^0_{t+1})^{-1}\, P(t+1,s)|\mathcal{F}_t] &= (\mathcal{X}^0_t)^{-1}\, P(t,s) \\ \Leftrightarrow \qquad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[P(t+1,s)|\mathcal{F}_t] &= P(t,t+1)^{-1}\, P(t,s). \end{aligned}$$

In der Situation des Satzes gilt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q[P(t+1,s)|Y(t)=i] \\ &= \mathbb{E}^Q[P_{i+1}(t+1,s)\, \mathbb{1}_{\{Y(t+1)=i+1\}} + P_i(t+1,s)\, \mathbb{1}_{\{Y(t+1)=i\}}|Y(t)=i] \\ &= P_{i+1}(t+1,s)\, q + P_i(t+1,s)\,(1-q) \end{aligned}$$

Sei $\{Y(t)=i\}$ gegeben, d.h. im Zeitpunkt t ist Zustand i realisiert worden, so gilt

$$P(t,t+1)^{-1}\, P(t,s) \quad = \quad P_i(t,t+1)^{-1}\, P_i(t,s)$$

und Q ist genau dann ein äquivalentes Martingalmaß, wenn

$$P_{i+1}(t+1,s)\, q + P_i(t+1,s)\,(1-q) \quad = \quad P_i(t,t+1)^{-1}\, P_i(t,s) \tag{4.11}$$

für alle i, $i \leq t+1$ und t, s, $0 \leq t < s \leq T$. Nach der rekursiven Definition der Diskontierungsfaktoren in (4.16) und (4.4) ergibt sich die Bedingung für die Arbitragefreiheit (4.11) genau dann, wenn

$$q\, h(s-(t+1)) + (1-q)\, h^*(s-(t+1)) \quad = \quad 1$$

für alle $0 \leq t < s \leq T$ und damit die Behauptung für alle $0 \leq \tau \leq T-1$, $\tau := s-(t+1)$.

□

Wir erhalten somit durch Einsetzen der Gleichung (4.7) in Gleichung (4.10) eindeutige Lösungen für die Störfunktionen

$$h(\tau) \quad = \quad \frac{1}{q + (1-q)\,\delta^\tau} \qquad \text{für } T-1 \geq \tau \geq 0 \tag{4.12}$$

und

$$h^*(\tau) \quad = \quad \frac{\delta^\tau}{q + (1-q)\,\delta^\tau} \qquad \text{für } T-1 \geq \tau \geq 0, \tag{4.13}$$

für die das Bondmodell arbitragefrei ist.

4.5 Preisermittlung (Pricing) für Zinsderivate

Sei C ein Claim mit einer Claimauszahlung nur im Zeitpunkt der Fälligkeit s. Sein Preis $C_i(t,s)$ ist eindeutig definiert in jedem Knoten (t,i) des Binomialbaumes.

Der Payoff in s ist gegeben durch $c(s,i)$, $0 \leq i \leq s$, falls Zustand i realisiert wird. Für den vom Zustand abhängigen Preis des Claims in s bedeutet dies:

$$C_i(s,s) \quad = \quad c(s,i) \qquad 0 \leq i \leq s.$$

Satz 4.5.1 ***Risikoneutrale Preisformel***

Sei C ein Claim mit Claimauszahlung $c(s,i)$ nur im Fälligkeitszeitpunkt s und Zustandspreisen $C_i(t,s)$, das auf dem vorliegenden Marktmodell jederzeit gekauft und verkauft werden kann. So gilt:

$$C_i(t,s) \quad = \quad [q\, C_{i+1}(t+1,s) + (1-q)\, C_i(t+1,s)]\; P_i(t,t+1) \tag{4.14}$$

Beweis:

Wir bilden ein Hedgeportfolio für das Derivat und erhalten durch Duplikation den eindeutigen Preis.

Stellen wir zur Zeit t im Zustand i ein risikoloses Portfolio $V(t,i)$ aus einem Diskontbond mit Laufzeit s und dem Derivat C durch Kauf eines Bonds und ξ Teilen des Derivates zusammen:

$$\begin{aligned} V(t,i) &= P_i(t,s) + \xi\, C_i(t,s) \\ \Leftrightarrow \quad C_i(t,s) &= \frac{V(t,i) - P_i(t,s)}{\xi} \end{aligned}$$

Risikolos heißt dabei, dass die Rendite aus einer einperiodigen Anlage in das Portfolio mit Sicherheit dem risikolosen Zins, also der Rendite des einperiodigen Zerobonds entspricht, d.h.

$$\frac{V(t+1,i+1)}{V(t,i)} - 1 = \frac{V(t+1,i)}{V(t,i)} - 1 = \frac{1}{P_i(t,t+1)} - 1.$$

Äquivalent dazu erhalten wir:

$$V(t+1,i+1) \quad = \quad V(t+1,i) \quad = \quad V(t,i)\,\frac{1}{P_i(t,t+1)}. \tag{4.15}$$

Im Falle eines upstates von t nach $t+1$ ergäbe sich für den Preis des Portfolios

$$V(t+1,i+1) \quad = \quad \frac{P_i(t,s)\, h(s-t-1)}{P_i(t,t+1)} + \xi\, C_{i+1}(t+1,s)$$

und für einen downstate

$$V(t+1,i) \quad = \quad \frac{P_i(t,s)\, h^*(s-t-1)}{P_i(t,t+1)} + \xi\, C_i(t+1,s).$$

Wir bilden die Differenz der Preise, die nach (4.15) gleich Null ist:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{P_i(t,s)\,h^*(s-t-1)}{P_i(t,t+1)} - \frac{P_i(t,s)\,h(s-t-1)}{P_i(t,t+1)} \\
&\quad +\xi\ (C_i(t+1,s) - C_{i+1}(t+1,s)) \\
\Leftrightarrow\quad 0 &= \frac{P_i(t,s)\ (h^*(s-t-1) - h(s-t-1))}{P_i(t,t+1)} \\
&\quad + \frac{P_i(t,t+1)\,\xi\ (C_i(t+1,s) - C_{i+1}(t+1,s))}{P_i(t,t+1)} \\
\Leftrightarrow\quad 0 &= P_i(t,s)\ (h^*(s-t-1) - h(s-t-1)) \\
&\quad + P_i(t,t+1)\,\xi\ (C_i(t+1,s) - C_{i+1}(t+1,s)) \\
\Leftrightarrow\quad \xi &= \frac{P_i(t,s)\ (h(s-t-1) - h^*(s-t-1))}{P_i(t,t+1)\ (C_i(t+1,s) - C_{i+1}(t+1,s))}
\end{aligned}
$$

Durch die Arbitragefreiheit erhalten wir aus Gleichung (4.15):

$$
V(t,i) = V(t+1,i)P_i(t,t+1). \tag{4.16}
$$

Folglich gilt für den Preis des Portfolios in t:

$$
\begin{aligned}
V(t,i) &= P_i(t,s) + \xi\, C_i(t,s) \qquad \text{sowie} \\
V(t,i) &= \left(\frac{P_i(t,s)\,h^*(s-t-1)}{P_i(t,t+1)} + \xi\, C_i(t+1,s)\right) P_i(t,t+1)
\end{aligned}
$$

und damit für den Preis des Claims

$$
\begin{aligned}
C_i(t,s) &= (P_i(t,s)\,h^*(s-t-1) + P_i(t,t+1)\,\xi\, C_i(t+1,s) - P_i(t,s))\ \frac{1}{\xi} \\
&= P_i(t,s)\,h^*(s-t-1)\ \frac{P_i(t,t+1)\ (C_i(t+1,s) - C_{i+1}(t+1,s))}{P_i(t,s)\ (h(s-t-1) - h^*(s-t-1))} \\
&\quad + P_i(t,t+1)\, C_i(t+1,s) \\
&\quad - \frac{P_i(t,t+1)\ (C_i(t+1,s) - C_{i+1}(t+1,s))}{h(s-t-1) - h^*(s-t-1)} \\
&= C_i(t+1,s) \left[\frac{h^*(s-t-1)\,P_i(t,t+1)}{h(s-t-1) - h^*(s-t-1)} + P_i(t,t+1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{P_i(t,t+1)}{h(s-t-1) - h^*(s-t-1)}\right] \\
&\quad + C_{i+1}(t+1,s) \left[\frac{P_i(t,t+1)}{h(s-t-1) - h^*(s-t-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{h^*(s-t-1)\,P_i(t,t+1)}{h(s-t-1) - h^*(s-t-1)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C_i(t+1,s)\,P_i(t,t+1)\left[\frac{h(s-t-1)-1}{h(s-t-1)-h^*(s-t-1)}\right] \\
&\quad + C_{i+1}(t+1,s)\,P_i(t,t+1)\left[\frac{1-h^*(s-t-1)}{h(s-t-1)-h^*(s-t-1)}\right] \\
&= P_i(t,t+1)\left[C_i(t+1,s)\,\frac{\frac{1}{q+(1-q)\,\delta^{s-t-1}}-\frac{q+(1-q)\,\delta^{s-t-1}}{q+(1-q)\,\delta^{s-t-1}}}{(1-\delta^{s-t-1})\,\frac{1}{q+(1-q)\,\delta^{s-t-1}}}\right. \\
&\quad \left. + C_{i+1}(t+1,s)\,\frac{q+(1-q)\,\delta^{s-t-1}-\delta^{s-t-1}}{1-\delta^{s-t-1}}\right] \\
&= P_i(t,t+1)\;[C_i(t+1,s)\,(1-q)+C_{i+1}(t+1,s)\,q]\,.
\end{aligned}
$$

□

Durch den Satz kann jetzt der Startpreis $C_0(0,s)$ des Derivates durch periodenweise Rückwärtsrechnung ausgehend von $C_i(s,s)$ ermittelt werden. Nach s Schritten bekommt man den Wert zur Zeit $t=0$ für das Derivat C.

Bemerkung 4.5.1

Kennt man den Preis des einperiodigen Zerobonds $P_i(t,t+1)$ und die Binomialwahrscheinlichkeit q in jedem Knoten (t,i), kann man Derivate gemäß des Satzes bepreisen.

Für ein Derivat mit einem von der Short Rate abweichenden Underlying, werden zuerst über das Modell die entsprechenden Zinsen und anschließend das Derivat selbst ermittelt.

4.6 Die Short-Rate - der risikolose Zins

Der Parameter δ bestimmt den Unterschied zwischen den Störfunktionen und damit zwischen einer Auf- und einer Abwärtsbewegung des Anleihepreises

$$\frac{P_{i+1}(t,s)}{P_i(t,s)} = \delta^{-(s-t)}. \tag{4.17}$$

Ho und Lee behandeln in ihrer Arbeit stetige Zinsen, so dass sich die Zerorendite als

$$y_i(t,s) = -\frac{\ln P_i(t,s)}{s-t}$$

ergibt. Es gilt daher

$$y_{i+1}(t,s) = y_i(t,s) + \ln\delta.$$

Je größer δ desto größer ist die Variabilität der modellierten Preise.

Der Parameter δ erzeugt im Modell gemäß (4.17) die Bondvolatilität. Diese verhält sich invers zur Volatilität der Zinsstruktur, d.h. wird δ größer, so nimmt die Volatilität (Unsicherheit) ab, wird δ kleiner steigt sie an. Für $\delta = 1$ sind die Preise $P_i(t,s)$ und $P_{i+1}(t,s)$ für alle i, $0 \leq i \leq t$, identisch und es herrscht kein Preisrisiko.

Da

$$\ln \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 1$$

handelt es sich demnach für $\delta = 1$ auch um den Fall vollständiger Zinssicherheit.

Definition 4.6.1 ***Short Rate***

Die Short Rate im Ho/ Lee-Modell ist der stetige Zins (Return) eines einperiodigen Diskontbonds.

$$y_i(t, t+1) = \frac{-\ln P_i(t, t+1)}{t+1-t} = -\ln P_i(t, t+1) \tag{4.18}$$

Die Short-Rate definiert den risikolosen Zins in einem Zeitpunkt t für jeden Umweltzustand, so dass es in jedem Zeitpunkt und jedem Umweltzustand die Möglichkeit einer risikolosen Anlage gibt. Dementsprechend lässt sich für das Ho/ Lee Modell noch folgende Bemerkung machen.

Bemerkung 4.6.1

Das Ho/ Lee Modell ist ein vollständiges Zinsstrukturmodell, d.h. über die Bewertung von Derivaten mit einer einzigen Auszahlung hinaus[1]*, kann man im Ho/ Lee Modell alle Claims bewerten. Die Bewertung der Claims geschieht dabei analog zum Vorgehen im Modell von Cox, Ross, Rubinstein.*

Für die Bewertung der Sondertilgungsrechte benötigen wir lediglich die Eigenschaft des Modells, dass Derivate mit einer einzigen Auszahlung bewertet werden können, da der Wert der Optionen sich nur an dem Wert des hedgebaren Underlyings im Ausübungszeitpunkt orientiert. Die sich im Anschluss an den Ausübungszeitpunkt ergebenden Zinsstrukturentwicklungen sind für den Preis des Hedgeportfolios uninteressant.

4.7 Kallibrierung des Modells

Die Kallibrierung des Ho/ Lee Modells erfolgt in drei Schitten. Zuerst benötigen wir die Diskontfunkion zum Bewertungszeitpunkt. Im zweiten Schritt werden Preismodelle von einigen Derivaten nach der Methode von Ho und Lee aufgestellt. Anschließend werden im dritten Schritt die Parameter q und δ durch einen nicht-linearen Prozess, z.B. die Quadratfehlersumme, geschätzt, so dass die Preise aus den vorher entwickelten theoretischen Preismodellen den wahren Marktpreisen möglichst entsprechen.

Sind die Parameter anhand einiger Derivate kallibriert worden, können sie im Anschluss für die Bepreisung anderer Finanztitel verwendet werden.

[1] Siehe Satz 4.5.1.

Kapitel 5

Aktuarielle Bewertung, statistische Sichtweise

In den vorangegangenen Kapiteln sind wir bei der Bewertung der Sondertilgungsoptionen davon ausgegangen, dass der Kreditnehmer diese Rechte rational, d.h. je nach Vorteilhaftigkeit des Vergleichszinses gegenüber dem Kreditzins, in voller Höhe, ausübt. Dementsprechend wäre der Preis für die Sondertilgungsrechte gemäß der Ausführungen in Kaptitel 3.5 gleich der Summe der Optionen mit maximal möglichen Nominalen $\big(st(t)\big)_{t>0}$.

In der Realität ist es nun vielmehr aber so, dass nicht alle Kreditnehmer zwingend rational, einzig und allein einer Vermögenmaximierung folgend, handeln. Vor allen Dingen im Retail-Geschäft kann es für einen Kunden "durchaus rational sein, einfach nach einer raschen Entschuldung zu streben"[1]. Dort spielen Gegebenheiten aus dem persönlichen Umfeld des Darlehensnehmers eine Rolle bei der Ausübungsentscheidung:

- Habe ich freies Kapital um Sondertilgungsrecht auszunutzen?
- Wieviel Geld kann ich in die Sondertilgung investieren?
- Benötige ich die freie Liquidität als Reserve, obwohl die Anlage eine geringere Rendite als die Sondertilgungsoption erzielt?
- Ist meine Lebensqualität, wenn ich weniger Schulden habe?
- etc.

Solche und ähnliche Fragen stellen sich Kreditnehmer und beziehen sie in ihre Ausübungsentscheidung mit ein. Sie führen dazu, dass die Darlehensnehmer u.U. auch eine Option entgegen der Vorteilhaftigkeit verfallen lassen oder trotz eines Nachteils gegenüber dem Vergleichszins ausüben. Es ist also offensichtlich, dass es verschiedene Verhaltensmuster bei der Ausnutzung der

[1] [10], S. 2

Wahlrechte unter den Kreditnehmern gibt. Dabei kann man mindestens zwei Gruppen unterscheiden[2].

Zum einen gibt es die Gruppe der Optionsinhaber mit statistischem Verhalten, die ihre Rechte ganz unabhängig von der aktuellen Zinsstruktur ausüben. Bei ihnen sind "persönliche Motive und Gründe für die Ausübung des Optionsrechtes von Bedeutung"[3]. Für diese Kreditnehmer zählt der schnelle Schuldenabbau. Sie verwenden freie Geldbeträge stets zur Sondertilgung, unabhängig vom evtl. günstigeren Referenzzins, und ziehen andersherum bei gesunkenen Zinsen die erneute "Kreditaufnahme für eine Umschuldung nicht in Betracht"[4]. Für diese Gruppe der Darlehensnehmer ist der Preis der Sondertilgungsoptionen, wie wir ihn im Kapitel 3 bewertet haben, zu hoch taxiert, da die Kreditnehmer nicht alle Vorteile, sondern im Gegenteil auch Nachteile, realisieren.

Zum anderen gibt es die Gruppe der optional ausübenden Darlehensnehmer. Die Kunden dieser Verhaltensgruppe entscheiden strikt nach der aktuellen Zinsstruktur und somit streng nach der Vorteilhaftigkeit des dem Sondertilgungsrechtes entsprechenden Finanztitels. Sie bewerten den finanzmathematischen Nutzen, den sie durch die Sondertilgung erzielen. Sie sind die rationalen Entscheider aus den vorangegangenen Kapiteln und der Preis für die an sie vergebenen Sondertilgungsrechte ergibt sich gemäß den Preisen aus Kapitel 3.

Zwischen diesen beiden Verhaltensmustern sind natürlich auch Mischformen denkbar. Eine Ausübung erst ab einem gewissen finanzmathematischen Vorteil oder aber andersherum eine Abweichung vom Prinzip des raschen Schuldenabbaus ab einem gewissen finanziellen Vorteil in der Anlage der freien Beträge gegenüber der Sondertilgung wäre zum Beispiel eine solche Mischung aus statistischem und optionalem Verhalten. In diesen Mischformen handeln die Kreditnehmer somit teilweise statistisch und teilweise optional.

Ziel muss es folglich sein, die Rechteinhaber in Gruppen einzuteilen, um für die einzelnen Gruppen das Ausübeverhalten der Darlehensnehmer schätzen zu können.

Für die Kreditkondition bei Vertagsabschluss ist dabei offensichtlich, dass ein optionales Verhalten des Darlehensnehmers eine schlechtere Kondition für ihn nach sich zieht als ein angenommenes statisches Verhalten. Denn durch das statistische Verhalten generiert das Kreditinstitut Vorteile gegenüber dem optionalen Verhalten in späteren Zeitpunkten. Für einzelne Produkte wäre also eine Preisdifferenzierung pro Kunde notwendig. Dieses Vorgehen ist allerdings äußerst fragwürdig und geschäftspolitisch kaum zu vertreten, wenn z.B. für einen Kunden aufgrund eines hohen Kreditvolumens oder einer

[2]Vgl. [10]
[3][10], S. 5
[4][10], S. 5

höheren schulischen Ausbildung ein optionales Verhalten angenommen und der Kunde damit schlechtere Konditionen erhalten würde[5].

Bietet ein Kreditinstitut einheitliche Preise an, trotz unterschiedlichen Verhaltensmustern, so wäre eine Mischkalkulatuion unvermeidbar, die statistischen Rechteinhaber würden benachteiligt und die optionale Gruppe würde dies zugunsten ihrer Marge ausnutzen.

Somit sollte das Ziel eines Kreditinstitutes sein, schon durch die Produktgestaltung die verschiedenen Verhaltensgruppen zu trennen, so dass der Kreditnehmer sich nur von den zu seinem Verhaltensmuster passenden Produkten angesprochen fühlt. Das Kreditinstitut erreicht damit, dass sämtliche Inhaber eines bestimmten Kreditproduktes ein ähnliches Ausübeprofil aufweisen und somit die Kalkulation der Sondertilgungsrechte eindeutig ist.

Die Teilung durch die Produktgestaltung kann recht gut an zwei Produkten erläutert werden. Nehmen wir zum einen ein Darlehen mit fester Regeltilgung und einem auf max. 5 % des Ursprungdarlehensbetrages beschränkten Sondertilgungsrecht pro Kalenderjahr und zum anderen dasselbe Grunddarlehen nur mit einmaligem Sondertilgungsrecht in voller Höhe der Restschuld nach einem bestimmten Zeitraum > 1 Jahr.

Bei der 5 %-igen Sondertilgung kann der Darlehensnehmer nur "kleinere"Beträge zur Sondertilgung einbringen. Der Betrag liegt dabei noch im "normalen" Einkommensbereich[6]. Eine Umschuldung in Höhe des Sondertilgungsbetrages bei einer fremden Bank kann aufgrund der geringen Betragshöhe quasi ausgeschlossen werden. Bei der eigenen ist er von vornherein nicht möglich. Daher kann also von einer statistischen Ausübung der Optionen ausgegangen werden.

Mit der einmaligen Sondertilgungsoption in voller Höhe werden die Kreditnehmer angesprochen, die sich einerseits den bei Vertragsabschluss aktuellen Zinssatz sichern, andererseits aber sich auch die Chance auf eine Umschuldung im Falle sinkender Zinsen bewahren wollen. Aufgrund der doch erheblichen Summe wird daher bei diesem Produkt eine optionale Rechteausübung angenommen.

Wir wollen nun im Folgenden ein Regressionsmodell[7] zur Schätzung des Ausübungsverhalten der nicht rational ausübenden Gruppe und damit für die Bepreisung der an diese Gruppe vergebenen Sondertilgungsoptionen aufstellen.

Zu schätzen ist, ob eine Option überhaupt und falls kein fester Betrag vereinbart wurde, in welcher Höhe die Sondertilgungsoption ausgeübt wird. Den Preis der an den Darlehensnehmer vergebenen Sondertilgungsoptionen geben wir dann als den Erwartungswert unter der bis zum Zeitpunkt des Ver-

[5]Vergleiche dazu die Ausführungen aus [10]

[6]Vgl. [10]

[7]Durch ein Regressionsmodell kann man aufgrund von verschiedenen, unabhängigen Variablen (Kovariablen), die in einem sachlogischen Verhältnis zu einer abhängigen Variablen (Responsevariablen) stehen, die abhängige Variable schätzen.

tragsabschlusses $t = 0$ gemachten Beobachtung X an. Sei $\mathcal{ST}_0^t(1)$ der Preis für eine Sondertilgungsoption in Höhe von 1 Geldeinheit in t bezüglich des betrachteten Kredites. Dann definieren wir den Preis $GS(K)$ der gesamten Sondertilgung für diesen Kredit als[8]

$$\begin{aligned} GS(K) &= \mathbb{E}\left[\sum_{t>t_0} \theta(t)\left[mt(t) + \Gamma(t)\left(st(t) - mt(t)\right)\right]\mathcal{ST}_0^t(1)|X\right] \\ &= \sum_{t>t_0} \mathbb{E}\left[\theta(t)|X\right]\left[mt(t) + \mathbb{E}\left[\Gamma(t)|X\right]\left(st(t) - mt(t)\right)\right]\mathcal{ST}_0^t(1). \end{aligned}$$

$\theta(t) \in \{0, 1\}$ ist dabei die Zufallsvariable, die angibt ob eine Sondertilgungsoption in t ausgeübt wird ($\theta(t) = 1$) oder nicht ($\theta(t) = 0$). $\Gamma(t) \in [0, 1]$ bezeichnet die aus Sicht von $t = 0$ zufällige Höhe der Tilgung in t. $\theta(t)$ und $\Gamma(t)$ sind hier paarweise unabhängig, da wir für die Entscheidung des Darlehensnehmers bezüglich jedes einzelnen Sondertilgungsrechtes annehmen, dass er zuerst über die Ausübung entscheidet und die Betragshöhe erst in einem nachgelagerten Schritt festlegt. Ziel ist es nun ein Modell zu entwickeln, dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}\left[\theta(t)|X\right]$ und $\mathbb{E}\left[\Gamma(t)|X\right]$ möglichst gut schätzt.

5.1 Das Regressionsmodell

Betrachten wir zuerst den Schätzer $\hat{q}(t)$ für den Erwartungswert der dichotomen Variablen $\theta(t)$

$$\theta(t) \in \{0, 1\}, \quad \theta(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{Ausübung der Option} \\ 0 & \text{Verfallen der Option} \end{array} \right\}.$$

Zur Schätzung einer solchen Responsevariablen eignet sich die sogenannte Logistische Regression. Ausführungen zum Logistischen Regressionsmodell findet man u.a. in den Arbeiten von Fahrmeir und Tutz [9], Prof. Dr. Mario Rese in [1] und Christensen [8]. Dabei schätzt man die Eintrittswahrscheinlichkeit

$$q(t) \quad = \quad \mathbb{E}[\theta(t) = 1|X] \quad = \quad \mathbb{P}(\theta = 1|X)$$

durch k unabhängige Kovariablen

$$\hat{q}(t) \quad = \quad \frac{\exp(X^{Tr}\,\hat{\beta}(t))}{1 + \exp(X^{Tr}\,\hat{\beta}(t))} \quad = \quad \frac{1}{1 + \exp(-X^{Tr}\,\hat{\beta}(t))}$$

mit

$$X \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{\beta} \quad = \quad \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0(t) \\ \hat{\beta}_1(t) \\ \hat{\beta}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k(t) \end{bmatrix}.$$

[8]Zur Definition von $mt(t)$ und $\Gamma(t)$ siehe (3.1) und (3.2)

Der Vektor X gibt dabei die Ausprägungen der Kovariablen an. Für die Schätzung des Koeffizientenvektors $\hat{\beta}(t)$ benötigen wir zuvor eine genügend große Stichprobe[9] an Krediten mit Sondertilgungsoptionen aus der Vergangenheit, für die uns die Ausprägungen der Zufallsvariablen θ und Γ sowie die bei jeweiligem Vertragsabschluss der Darlehen beobachteten Werte der unabhängigen Kovariablen $X_1, \ldots, X_k$ bekannt sind.

Entscheidend ist dabei die Frage nach den unabhängigen Variablen die in einem sachlogischen Verhältnis zum schätzenden Parameter stehen. Die Frage ist also:
"Was beeinflusst die Ausübungsentscheidung des Darlehensnehmers?"
Denn durch die Kovariablen und die realisierte Ausprägung der Responsevariablen wird anhand einer Stichprobe der Koeffizientenvektor $\hat{\beta}$ geschätzt und dadurch $\hat{\theta}$ für den Einzelfall anhand der gegebenen Ausprägungen der Kovariabelen ermittelt.

Wir geben im Folgenden eine mögliche Konstellation von unabhängigen Variablen an. Gemäß dem Vorgehen einer Rückwärtsselektion[10] soll sie als Startmodell möglichst alle Variablen beinhalten, die im Zusammenhang mit der Ausübungsentscheidung relevant erscheinen. Die Variablen können dichotome, kategoriale oder metrische Ausprägungen haben. Um sie zur Schätzung in $t = 0$ verwenden zu können, müssen sie zu diesem Zeitpunkt quantifizierbar und bekannt sein. Bei einer Kreditvergabe sind sie also während des Beratungsgesprächs beim Kunden zu erfragen.

Sei α_{-1} der letzte Ausübungszeitpunkt einer Sondertilgungsoption vor α. Für die Schätzung der Ausübungswahrscheinlichkeit in α sollten die unabhängigen Variablen X_i in $t = 0$ aus Tabelle 5.1 herangezogen werden. Die Schätzungen und anschließenden tatsächlichen Realisationen von Ausübungs- und Betragskomponenten θ und Γ sollten dokumentiert werden, um das Modell laufend anpassen zu können. Es werden Variabelen nach bestimmen Modellselektionsschritten heraus- und hinzugenommen, um ein bestes Modell zu bekommen und zu erhalten.

Für Sondertilgungsoptionen bei denen kein fester Betrag definiert ist, stellt sich noch die Frage in welcher Höhe die Sondertilgung erfolgt. Auch hier schätzen wir den Erwartungswert für $\Gamma(t)$ unter Beobachtungen $Y_1, \ldots, Y_l$. Da für den Erwartungswert

$$p(t) \quad = \quad \mathbb{E}\left[\Gamma(t) \,|\, Y\right] \quad \in \quad [0,1]$$

gilt, kann man durch die Betrachtung von

$$\ln\left(\frac{\mathbb{E}\left[\Gamma(t) \,|\, Y\right]}{1 - \mathbb{E}\left[\Gamma(t) \,|\, Y\right]}\right) \quad \in \quad [-\infty, \infty]$$

[9] Bei Backhaus [1] wird eine absolute Untergrenze der Stichprobengröße mit 50 Beobachtungen für den binären Fall angegeben. Aussagekräftige Ergebnisse erwartet man ab einer Fallszahl >100.

[10] Zur Vorgehensweise der Rückwärtsselektion siehe u.a. [10]

den Wertebereich erweitern und dadurch ebenfalls das Logistische Regressionsmodell anwenden. Der Erwartungswert wird somit durch l Kovariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ und einen Koeffizientenvektor $\hat{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^{l+1}$ geschätzt:

$$\hat{p}(t) = \frac{\exp(Y^{Tr}\,\hat{\gamma}(t))}{1 + \exp(Y^{Tr}\,\hat{\gamma}(t))} = \frac{1}{1 + \exp(-Y^{Tr}\,\hat{\gamma}(t))}.$$

Da es sich um eine reine Betragsfrage handelt, sind vor allen Dingen die Parameter relevant, die die freie Liquidität im Ausübungszeitpunkt bestimmen. Hat sich ein Darlehensnehmer für die Ausübung der Option entschieden, bestimmt er anschließend die Betragshöhe der Optionsausübung. Aus Tabelle 5.1 verbleiben daher die in Tabelle 5.2 aufgelisteten Punkte zur Schätzung des Ausübungbetrages. Auch diese Schätzungen sollten einer ständigen Überprüfung unterliegen.

Hat man nun Ausübungen und Beträge geschätzt, kann man die Sondertilgungspreise für jeden individuellen Darlehensnehmer und Darlehensvertrag K berrechnen:

$$GS(K) = \sum_{t>t_0} \hat{q}(t)\left[mt(t) + \hat{p}(t)\left(st(t) - mt(t)\right)\right]\mathcal{ST}_0^t(1).$$

Um einen einheitlichen Preis für die Sondertilgungsoptionen eines bestimmten Produktes zu ermitteln, kann man zum Beispiel den durchschnittlichen Sondertilgungspreis im Verhältnis zur Darlehensbetragsumme der n aktuellsten Abschlüsse berechnen. Sei dafür K_j, $j = 1, \ldots, n$, der j-te Kredit mit Nominalbetrag N_j und $GS(K_j)$ der Gesamtpreis der Sondertilgungsoptionen für den j-ten Kredit. Ein einheitlicher Preis μ könnte dann durch

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \frac{GS(K_j)}{N_j}$$

als Anteil am Nominaldarlehensbetrag festgesetzt werden. Ein solcher Preis sollte ebenso wie das gesamte Modell in regelmäßigen Abständen aktualisiert und gegebenenfalls angepasst werden.

[10](aus Tabelle 5.1 und 5.2) Betrag, der nach Abzug der monatlichen festen Ausgaben (Miete, Versicherung, Lebensunterhalt, Kreditraten etc.) von den monatlichen Einnahmen (Gehalt, Gewinnbeteiligung, Umsatz etc.) übrig bleibt.

Parameter	Ausprägung	Bez.	Wertebereich
• Alter des Darlehensnehmers	metrisch	X_1	$\{18, 19, \dots\}$
• Restschuld in α	metrisch	X_3	$[0, N]$
• weitere Sondertilgungsmöglichkeiten in $[\alpha_{-1}, \alpha]$	metrisch	X_4	$[0, \infty)$
• Monatsüberschuss[10] in $t = 0$	metrisch	X_5	$[0, \infty)$
• Arbeitsvertag des Darlehensnehmers	dichotom	X_6	{0,1}, "0"$\hat{=}$ unbefristet, "1"$\hat{=}$ befristet
• zu versorgende Personen im Haushalt in α	metrisch	X_7	$\{1, 2, \dots\}$
• erwartete Erbschaft in $(\alpha_{-1}, \alpha]$	metrisch	X_8	$[0, \infty)$
• Berufsausbildung	kategorial	X_9	$\{0, 1, \dots, 3\}$, "0"$\hat{=}$ Studium, "1"$\hat{=}$ kfm. Ausbildung, "2"$\hat{=}$ andere Ausbildung, "3"$\hat{=}$ ohne Abschluss
• Wohnsituation	kategorial	X_{10}	$\{0, 1, 2\}$, "0"$\hat{=}$ Eigenheim, "1"$\hat{=}$ Miete, "2"$\hat{=}$ Elternhaus
• fällige(r) Lebensversicherung/ Sparvertag in $(\alpha_{-1}, \alpha]$	metrisch	X_{11}	$[0, \infty)$
• Familienstand	dichotom	X_{12}	"0"$\hat{=}$ ledig, "1"$\hat{=}$ verheiratet.

Tabelle 5.1: Kovariablen zur Schätzung der Ausübungswahrscheinlichkeit

Parameter	Ausprägung	Bez.	Wertebereich
• weitere Sondertilgungsmöglichkeiten in $[\alpha_{-1}, \alpha]$	metrisch	Y_1	$[0, \infty)$
• Monatsüberschuss[10] in $t = 0$	metrisch	Y_2	$[0, \infty)$
• Arbeitsvertag des Darlehensnehmers	dichotom	Y_3	{0,1}, "0"$\hat{=}$ unbefristet, "1"$\hat{=}$ befristet
• erwartete Erbschaft in $(\alpha_{-1}, \alpha]$	metrisch	Y_4	$[0, \infty)$
• fällige(r) Lebensversicherung/ Sparvertrag in $(\alpha_{-1}, \alpha]$	metrisch	Y_5	$[0, \infty)$

Tabelle 5.2: Kovariablen zur Schätzung der Betragshöhe

Literaturverzeichnis

[1] **Backhaus, Klaus**: Multivariate Analysemethoden - eine anwendungsorientierte Einführung, Springer 2006

[2] **Bingham, Nicholas H.; Kiesel, Rüdiger**: Risk neutral valuation - pricing and hedging of financial derivatives, Springer 2004

[3] **Björk, Tomas**: Arbitrage-Theory in continuous time, Oxford Univ. Press 2005

[4] **Branger, Nicole; Schlag, Christian**: Zinsderivate - Modelle und Bewertung, Springer 2004

[5] **Brigo, Damiano; Mercurio, Fabio**: Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer 2001

[6] **Burger, Werner**: Das Zinsänderungsrisiko variabler Bankgeschäfte - Risikoanalyse und Bewertung variabler Hypotheken und Spargelder, Haupt 1998

[7] **Chevalier, Thomas**: Ein Risikomodell für Bausparkollektive, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln, 2005

[8] **Christensen, Ronald**: Log-Linear Models and Logistic Regression, Springer Verlag 1997

[9] **Fahrmeir, Ludwig; Tutz, Gerhard** Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models, Springer 2001

[10] **Gillardon:** Auszug Publikationen 2001, Eine systematische Analyse über implizite Optionen im Retail Banking

[11] **Gillardon**: Kundenzeitschrift News 32, Januar 2003

[12] **Hausmann, Wilfried; Diener, Kathrin; Käsler, Joachim**: Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection - Stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen, Vieweg 2002

[13] **Ho/ Lee**: Journal of Finance (Dec., 1986), Interest Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims

[14] **Hosmer, David W.; Lemeshow, Stanley**: Applied Logistic Regression, Wiley 1989

[15] **Harrison, J. Michael; Pliska, Stanley R.**: Stochastic Processes and Their Applications 11 (1981) - Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading

[16] **Harrison, J. Michael; Pliska, Stanley R.**: Stochastic Processes and Their Applications 15 (1983) - A stochastic calculus model of continuous trading: Complete Markets

[17] **Irle, Albrecht**: Finanzmathematik - Die Bewertung von Derivaten, Teubner 2003

[18] **Keller, Thomas**: Zur Bewertung von Angebotsoptionen im Kreditgeschäft, Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.) an der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Dortmund, 30.05.2001

[19] **Pelsser, Anton**: Efficient Methods for valuing interest rate derivatives, Springer 2004

[20] **Pliska, Stanley R.**: Introduction to Mathematical Finance, Blackwell 1997

[21] **Reitz, Stefan; Schwarz, Wille; Martin, Marcus R. W.**: Zinsderivate - Eine Einführung in Produkte, Bewertung, Risiken, Vieweg

[22] **Schulze, Michael**: Bewertung und empirische Analyse von Schuldnerkündigungsrechten, Dt. Univ.-Verlag 1996

[23] **Urbatsch, René-Claude; Kunath, Thomas**: Credit-Scoring - Grundlagen, Arten, Funktionsweisen und Implementierung

Anhang A

Tabellen zu den Beispielen

Fälligkeit in	Zinssatz	Zinstagekonvention
1 Tag	3,900	Act/360
1 Woche	4,750	Act/360
1 Monat	4,995	Act/360
2 Monate	4,995	Act/360
3 Monate	5,125	Act/360
4 Monate	5,145	Act/360
5 Monate	5,185	Act/360
6 Monate	5,235	Act/360
7 Monate	5,245	Act/360
8 Monate	5,275	Act/360
9 Monate	5,285	Act/360
10 Monate	5,325	Act/360
11 Monate	5,365	Act/360
1 Jahr	5,140	Act/Act
2 Jahre	4,840	Act/Act
3 Jahre	4,799	Act/Act
4 Jahre	4,787	Act/Act
5 Jahre	4,784	Act/Act
6 Jahre	4,783	Act/Act
7 Jahre	4,787	Act/Act
8 Jahre	4,799	Act/Act
9 Jahre	4,813	Act/Act
10 Jahre	4,851	Act/Act
11 Jahre	4,879	Act/Act

Tabelle A.1: Zinssatzkurve 30.09.08

Fälligkeit t_i	Diskontfaktor $P(0,t_i)$	Fälligkeit t_i	Diskontfaktor $P(0,t_i)$
30.10.08	0,995855	30.03.12	0,849063
30.11.08	0,991744	30.04.12	0,845738
30.12.08	0,987350	30.05.12	0,842546
30.01.09	0,983139	30.06.12	0,839274
28.02.09	0,978853	30.07.12	0,836134
30.03.09	0,974493	30.08.12	0,832915
30.04.09	0,970312	30.09.12	0,829738
30.05.09	0,966028	30.10.12	0,826062
30.06.09	0,961874	30.11.12	0,822739
30.07.09	0,957510	30.12.12	0,819549
30.08.09	0,953126	30.01.13	0,816279
30.09.09	0,951113	28.02.13	0,813244
30.10.09	0,947353	30.03.13	0,810128
30.11.09	0,943540	30.04.13	0,806934
30.12.09	0,939920	30.05.13	0,803867
30.01.10	0,936250	30.06.13	0,800722
28.02.10	0,932879	30.07.13	0,797703
30.03.10	0,929455	30.08.13	0,794608
30.04.10	0,925984	30.09.13	0,791532
30.05.10	0,922688	30.10.13	0,788435
30.06.10	0,919346	30.11.13	0,785261
30.07.10	0,916173	30.12.13	0,782213
30.08.10	0,912956	30.01.14	0,779089
30.09.10	0,909800	28.02.14	0,776189
30.10.10	0,906256	30.03.14	0,773211
30.11.10	0,902628	30.04.14	0,770159
30.12.10	0,899151	30.05.14	0,767228
30.01.11	0,895591	30.06.14	0,764222
28.02.11	0,892291	30.07.14	0,761337
30.03.11	0,888908	30.08.14	0,758377
30.04.11	0,885445	30.09.14	0,755437
30.05.11	0,882124	30.10.14	0,752465
30.06.11	0,878724	30.11.14	0,749417
30.07.11	0,875464	30.12.14	0,746491
30.08.11	0,872125	30.01.15	0,743491
30.09.11	0,868818	28.02.15	0,740706
30.10.11	0,865778	30.03.15	0,737845
30.11.11	0,862312	30.04.15	0,734913
30.12.11	0,858986	30.05.15	0,732096
30.01.12	0,855578	30.06.15	0,729208
29.02.12	0,852307	30.07.15	0,726433

Tabelle A.2: Diskontfaktoren 30.10.08 - 30.07.2015

Fälligkeit t_i	Diskontfaktor $P(0, t_i)$
30.08.15	0,723588
30.09.15	0,720761
30.10.15	0,718552
30.11.15	0,715609
30.12.15	0,712783
30.01.16	0,709884
29.02.16	0,707099
30.03.16	0,704335
30.04.16	0,701499
30.05.16	0,698775
30.06.16	0,695981
30.07.16	0,693297
30.08.16	0,690544
30.09.16	0,687836
30.10.16	0,684354
30.11.16	0,681524
30.12.16	0,678805
30.01.17	0,676746
28.02.17	0,673428
30.03.17	0,670768
30.04.17	0,668040
30.05.17	0,665419
30.06.17	0,662731
30.07.17	0,660148
30.08.17	0,657499
30.09.17	0,654861
30.10.17	0,652105
30.11.17	0,649276
30.12.17	0,646557
30.01.18	0,643766
28.02.18	0,641172
30.03.18	0,638507
30.04.18	0,635771
30.05.18	0,633141
30.06.18	0,630441
30.07.18	0,627846
30.08.18	0,625182
30.09.18	0,622528
30.10.18	0,619921

Tabelle A.3: Diskontfaktoren 30.08.2015 - 30.10.2018

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.10.08	2.000.000	-2.000.000	0,00	0,00	0,00
30.01.09	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.09	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.09	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.09	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.10	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.10	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.10	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.10	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.11	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.11	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.11	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.11	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.12	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.12	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.12	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.12	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.13	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.13	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.13	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.13	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.14	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.14	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.14	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.14	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.15	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.15	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.15	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.15	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.16	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.16	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.16	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.16	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.17	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.17	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.17	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.17	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.01.18	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.04.18	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.07.18	2.000.000	0,00	23.794,81	0,00	23.794,81
30.10.18	0,00	0,00	23.794,81	2.000.000	2.023.794,81

Tabelle A.4: Tilgungsplan endfälliges Darlehen 1

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.10.08	300.000,00	-300.000,00	0,00	0,00	0,00
30.11.08	299.700,00	0,00	1.184,52	300,00	1.484,52
30.12.08	299.400,00	0,00	1.183,33	300,00	1.483,33
30.01.09	299.100,00	0,00	1.182,15	300,00	1.482,15
28.02.09	298.800,00	0,00	1.180,96	300,00	1.480,96
30.03.09	298.500,00	0,00	1.179,78	300,00	1.479,78
30.04.09	298.200,00	0,00	1.178,59	300,00	1.478,59
30.05.09	297.900,00	0,00	1.177,41	300,00	1.477,41
30.06.09	297.600,00	0,00	1.176,23	300,00	1.476,23
30.07.09	297.300,00	0,00	1.175,04	300,00	1.475,04
30.08.09	297.000,00	0,00	1.173,86	300,00	1.473,86
30.09.09	296.700,00	0,00	1.172,67	300,00	1.472,67
30.10.09	296.400,00	0,00	1.171,49	300,00	1.471,49
30.11.09	296.100,00	0,00	1.170,30	300,00	1.470,30
30.12.09	295.800,00	0,00	1.169,12	300,00	1.469,12
30.01.10	295.500,00	0,00	1.167,93	300,00	1.467,93
28.02.10	295.200,00	0,00	1.166,75	300,00	1.466,75
30.03.10	294.900,00	0,00	1.165,56	300,00	1.465,56
30.04.10	294.600,00	0,00	1.164,38	300,00	1.464,38
30.05.10	294.300,00	0,00	1.163,20	300,00	1.463,20
30.06.10	294.000,00	0,00	1.162,01	300,00	1.462,01
30.07.10	293.700,00	0,00	1.160,83	300,00	1.460,83
30.08.10	293.400,00	0,00	1.159,64	300,00	1.459,64
30.09.10	293.100,00	0,00	1.158,46	300,00	1.458,46
30.10.10	292.800,00	0,00	1.157,27	300,00	1.457,27
30.11.10	292.500,00	0,00	1.156,09	300,00	1.456,09
30.12.10	292.200,00	0,00	1.154,90	300,00	1.454,90
30.01.11	291.900,00	0,00	1.153,72	300,00	1.453,72
28.02.11	291.600,00	0,00	1.152,53	300,00	1.452,53
30.03.11	291.300,00	0,00	1.151,35	300,00	1.451,35
30.04.11	291.000,00	0,00	1.150,17	300,00	1.450,17
30.05.11	290.700,00	0,00	1.148,98	300,00	1.448,98
30.06.11	290.400,00	0,00	1.147,80	300,00	1.447,80
30.07.11	290.100,00	0,00	1.146,61	300,00	1.446,61
30.08.11	289.800,00	0,00	1.145,43	300,00	1.445,43
30.09.11	289.500,00	0,00	1.144,24	300,00	1.444,24
30.10.11	289.200,00	0,00	1.143,06	300,00	1.443,06
30.11.11	288.900,00	0,00	1.141,87	300,00	1.441,87
30.12.11	288.600,00	0,00	1.140,69	300,00	1.440,69
30.01.12	288.300,00	0,00	1.139,51	300,00	1.439,51
29.02.12	288.000,00	0,00	1.138,32	300,00	1.438,32

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.03.12	287.700,00	0,00	1.137,14	300,00	1.437,14
30.04.12	287.400,00	0,00	1.135,95	300,00	1.435,95
30.05.12	287.100,00	0,00	1.134,77	300,00	1.434,77
30.06.12	286.800,00	0,00	1.133,58	300,00	1.433,58
30.07.12	286.500,00	0,00	1.132,40	300,00	1.432,40
30.08.12	286.200,00	0,00	1.131,21	300,00	1.431,21
30.09.12	285.900,00	0,00	1.130,03	300,00	1.430,03
30.10.12	285.600,00	0,00	1.128,84	300,00	1.428,84
30.11.12	285.300,00	0,00	1.127,66	300,00	1.427,66
30.12.12	285.000,00	0,00	1.126,48	300,00	1.426,48
30.01.13	284.700,00	0,00	1.125,29	300,00	1.425,29
28.02.13	284.400,00	0,00	1.124,11	300,00	1.424,11
30.03.13	284.100,00	0,00	1.122,92	300,00	1.422,92
30.04.13	283.800,00	0,00	1.121,74	300,00	1.421,74
30.05.13	283.500,00	0,00	1.120,55	300,00	1.420,55
30.06.13	283.200,00	0,00	1.119,37	300,00	1.419,37
30.07.13	282.900,00	0,00	1.118,18	300,00	1.418,18
30.08.13	282.600,00	0,00	1.117,00	300,00	1.417,00
30.09.13	282.300,00	0,00	1.115,81	300,00	1.415,81
30.10.13	282.000,00	0,00	1.114,63	300,00	1.414,63
30.11.13	281.700,00	0,00	1.113,45	300,00	1.413,45
30.12.13	281.400,00	0,00	1.112,26	300,00	1.412,26
30.01.14	281.100,00	0,00	1.111,08	300,00	1.411,08
28.02.14	280.800,00	0,00	1.109,89	300,00	1.409,89
30.03.14	280.500,00	0,00	1.108,71	300,00	1.408,71
30.04.14	280.200,00	0,00	1.107,52	300,00	1.407,52
30.05.14	279.900,00	0,00	1.106,34	300,00	1.406,34
30.06.14	279.600,00	0,00	1.105,15	300,00	1.405,15
30.07.14	279.300,00	0,00	1.103,97	300,00	1.403,97
30.08.14	279.000,00	0,00	1.102,79	300,00	1.402,79
30.09.14	278.700,00	0,00	1.101,60	300,00	1.401,60
30.10.14	278.400,00	0,00	1.100,42	300,00	1.400,42
30.11.14	278.100,00	0,00	1.099,23	300,00	1.399,23
30.12.14	277.800,00	0,00	1.098,05	300,00	1.398,05
30.01.15	277.500,00	0,00	1.096,86	300,00	1.396,86
28.02.15	277.200,00	0,00	1.095,68	300,00	1.395,68
30.03.15	276.900,00	0,00	1.094,49	300,00	1.394,49
30.04.15	276.600,00	0,00	1.093,31	300,00	1.393,31
30.05.15	276.300,00	0,00	1.092,12	300,00	1.392,12
30.06.15	276.000,00	0,00	1.090,94	300,00	1.390,94
30.07.15	275.700,00	0,00	1.089,76	300,00	1.389,76

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.08.15	275.400,00	0,00	1.088,57	300,00	1.388,57
30.09.15	275.100,00	0,00	1.087,39	300,00	1.387,39
30.10.15	274.800,00	0,00	1.086,20	300,00	1.386,20
30.11.15	274.500,00	0,00	1.085,02	300,00	1.385,02
30.12.15	274.200,00	0,00	1.083,83	300,00	1.383,83
30.01.16	273.900,00	0,00	1.082,65	300,00	1.382,65
29.02.16	273.600,00	0,00	1.081,46	300,00	1.381,46
30.03.16	273.300,00	0,00	1.080,28	300,00	1.380,28
30.04.16	273.000,00	0,00	1.079,09	300,00	1.379,09
30.05.16	272.700,00	0,00	1.077,91	300,00	1.377,91
30.06.16	272.400,00	0,00	1.076,73	300,00	1.376,73
30.07.16	272.100,00	0,00	1.075,54	300,00	1.375,54
30.08.16	271.800,00	0,00	1.074,36	300,00	1.374,36
30.09.16	271.500,00	0,00	1.073,17	300,00	1.373,17
30.10.16	271.200,00	0,00	1.071,99	300,00	1.371,99
30.11.16	270.900,00	0,00	1.070,80	300,00	1.370,80
30.12.16	270.600,00	0,00	1.069,62	300,00	1.369,62
30.01.17	270.300,00	0,00	1.068,43	300,00	1.368,43
28.02.17	270.000,00	0,00	1.067,25	300,00	1.367,25
30.03.17	269.700,00	0,00	1.066,07	300,00	1.366,07
30.04.17	269.400,00	0,00	1.064,88	300,00	1.364,88
30.05.17	269.100,00	0,00	1.063,70	300,00	1.363,70
30.06.17	268.800,00	0,00	1.062,51	300,00	1.362,51
30.07.17	268.500,00	0,00	1.061,33	300,00	1.361,33
30.08.17	268.200,00	0,00	1.060,14	300,00	1.360,14
30.09.17	267.900,00	0,00	1.058,96	300,00	1.358,96
30.10.17	267.600,00	0,00	1.057,77	300,00	1.357,77
30.11.17	267.300,00	0,00	1.056,59	300,00	1.356,59
30.12.17	267.000,00	0,00	1.055,40	300,00	1.355,40
30.01.18	266.700,00	0,00	1.054,22	300,00	1.354,22
28.02.18	266.400,00	0,00	1.053,04	300,00	1.353,04
30.03.18	266.100,00	0,00	1.051,85	300,00	1.351,85
30.04.18	265.800,00	0,00	1.050,67	300,00	1.350,67
30.05.18	265.500,00	0,00	1.049,48	300,00	1.349,48
30.06.18	265.200,00	0,00	1.048,30	300,00	1.348,30
30.07.18	264.900,00	0,00	1.047,11	300,00	1.347,11
30.08.18	264.600,00	0,00	1.045,93	300,00	1.345,93
30.09.18	264.300,00	0,00	1.044,74	300,00	1.344,74
30.10.18	0,00	0,00	1.043,56	264.300,00	265.343,56

Tabelle A.5: Tilgungsplan Ratendarlehen 1

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.10.08	300.000,00	-300.000,00	0,00	0,00	0,00
30.01.09	299.000,00	0,00	3.567,40	1.000,00	4.567,40
30.04.09	298.000,00	0,00	3.555,50	1.000,00	4.555,50
30.07.09	297.000,00	0,00	3.543,61	1.000,00	4.543,61
30.10.09	296.000,00	0,00	3.531,72	1.000,00	4.531,72
30.01.10	295.000,00	0,00	3.519,83	1.000,00	4.519,83
30.04.10	294.000,00	0,00	3.507,94	1.000,00	4.507,94
30.07.10	293.000,00	0,00	3.496,05	1.000,00	4.496,05
30.10.10	292.000,00	0,00	3.484,16	1.000,00	4.484,16
30.01.11	291.000,00	0,00	3.472,26	1.000,00	4.472,26
30.04.11	290.000,00	0,00	3.460,37	1.000,00	4.460,37
30.07.11	289.000,00	0,00	3.448,48	1.000,00	4.448,48
30.10.11	288.000,00	0,00	3.436,59	1.000,00	4.436,59
30.01.12	287.000,00	0,00	3.424,70	1.000,00	4.424,70
30.04.12	286.000,00	0,00	3.412,81	1.000,00	4.412,81
30.07.12	285.000,00	0,00	3.400,92	1.000,00	4.400,92
30.10.12	284.000,00	0,00	3.389,03	1.000,00	4.389,03
30.01.13	283.000,00	0,00	3.377,13	1.000,00	4.377,13
30.04.13	282.000,00	0,00	3.365,24	1.000,00	4.365,24
30.07.13	281.000,00	0,00	3.353,35	1.000,00	4.353,35
30.10.13	280.000,00	0,00	3.341,46	1.000,00	4.341,46
30.01.14	279.000,00	0,00	3.329,57	1.000,00	4.329,57
30.04.14	278.000,00	0,00	3.317,68	1.000,00	4.317,68
30.07.14	277.000,00	0,00	3.305,79	1.000,00	4.305,79
30.10.14	276.000,00	0,00	3.293,90	1.000,00	4.293,90
30.01.15	275.000,00	0,00	3.282,00	1.000,00	4.282,00
30.04.15	274.000,00	0,00	3.270,11	1.000,00	4.270,11
30.07.15	273.000,00	0,00	3.258,22	1.000,00	4.258,22
30.10.15	272.000,00	0,00	3.246,33	1.000,00	4.246,33
30.01.16	271.000,00	0,00	3.234,44	1.000,00	4.234,44
30.04.16	270.000,00	0,00	3.222,55	1.000,00	4.222,55
30.07.16	269.000,00	0,00	3.210,66	1.000,00	4.210,66
30.10.16	268.000,00	0,00	3.198,76	1.000,00	4.198,76
30.01.17	267.000,00	0,00	3.186,87	1.000,00	4.186,87
30.04.17	266.000,00	0,00	3.174,98	1.000,00	4.174,98
30.07.17	265.000,00	0,00	3.163,09	1.000,00	4.163,09
30.10.17	264.000,00	0,00	3.151,20	1.000,00	4.151,20
30.01.18	263.000,00	0,00	3.139,31	1.000,00	4.139,31
30.04.18	262.000,00	0,00	3.127,42	1.000,00	4.127,42
30.07.18	261.000,00	0,00	3.115,53	1.000,00	4.115,53
30.10.18	0,00	0,00	3.103,63	261.000,00	264.103,63

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.10.08	5.000.000	-5.000.000	0,00	0,00	0,00
30.01.09	4.950.000	0,00	59.382,42	50.000,00	109.382,42
30.04.09	4.900.000	0,00	58.788,60	50.000,00	108.788,60
30.07.09	4.850.000	0,00	58.194,77	50.000,00	108.194,77
30.10.09	4.800.000	0,00	57.600,95	50.000,00	107.600,95
30.01.10	4.750.000	0,00	57.007,13	50.000,00	107.007,13
30.04.10	4.700.000	0,00	56.413,30	50.000,00	106.413,30
30.07.10	4.650.000	0,00	55.819,48	50.000,00	105.819,48
30.10.10	4.600.000	0,00	55.225,65	50.000,00	105.225,65
30.01.11	4.550.000	0,00	54.631,83	50.000,00	104.631,83
30.04.11	4.500.000	0,00	54.038,01	50.000,00	104.038,01
30.07.11	4.450.000	0,00	53.444,18	50.000,00	103.444,18
30.10.11	4.400.000	0,00	52.850,36	50.000,00	102.850,36
30.01.12	4.350.000	0,00	52.256,53	50.000,00	102.256,53
30.04.12	4.300.000	0,00	51.662,71	50.000,00	101.662,71
30.07.12	4.250.000	0,00	51.068,88	50.000,00	101.068,88
30.10.12	4.200.000	0,00	50.475,06	50.000,00	100.475,06
30.01.13	4.150.000	0,00	49.881,24	50.000,00	99.881,24
30.04.13	4.100.000	0,00	49.287,41	50.000,00	99.287,41
30.07.13	4.050.000	0,00	48.693,59	50.000,00	98.693,59
30.10.13	4.000.000	0,00	48.099,76	50.000,00	98.099,76
30.01.14	3.950.000	0,00	47.505,94	50.000,00	97.505,94
30.04.14	3.900.000	0,00	46.912,11	50.000,00	96.912,11
30.07.14	3.850.000	0,00	46.318,29	50.000,00	96.318,29
30.10.14	3.800.000	0,00	45.724,47	50.000,00	95.724,47
30.01.15	3.750.000	0,00	45.130,64	50.000,00	95.130,64
30.04.15	3.700.000	0,00	44.536,82	50.000,00	94.536,82
30.07.15	3.650.000	0,00	43.942,99	50.000,00	93.942,99
30.10.15	3.600.000	0,00	43.349,17	50.000,00	93.349,17
30.01.16	3.550.000	0,00	42.755,34	50.000,00	92.755,34
30.04.16	3.500.000	0,00	42.161,52	50.000,00	92.161,52
30.07.16	3.450.000	0,00	41.567,70	50.000,00	91.567,70
30.10.16	3.400.000	0,00	40.973,87	50.000,00	90.973,87
30.01.17	3.350.000	0,00	40.380,05	50.000,00	90.380,05
30.04.17	3.300.000	0,00	39.786,22	50.000,00	89.786,22
30.07.17	3.250.000	0,00	39.192,40	50.000,00	89.192,40
30.10.17	3.200.000	0,00	38.598,58	50.000,00	88.598,58
30.01.18	3.150.000	0,00	38.004,75	50.000,00	88.004,75
30.04.18	3.100.000	0,00	37.410,93	50.000,00	87.410,93
30.07.18	3.050.000	0,00	36.817,10	50.000,00	86.817,10
30.10.18	0,00	0,00	36.223,28	3.050.000,00	3.086.223,28

Tabelle A.6: Tilgungsplan Ratendarlehen 3

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.10.08	300.000,00	-300.000,00	0,00	0,00	0,00
30.11.08	299.784,51	0,00	1.184,51	215,49	1.400,00
30.12.08	299.568,16	0,00	1.183,66	216,34	1.400,00
30.01.09	299.350,96	0,00	1.182,80	217,20	1.400,00
28.02.09	299.132,91	0,00	1.181,94	218,06	1.400,00
30.03.09	298.913,99	0,00	1.181,08	218,92	1.400,00
30.04.09	298.694,21	0,00	1.180,22	219,78	1.400,00
30.05.09	298.473,56	0,00	1.179,35	220,65	1.400,00
30.06.09	298.252,04	0,00	1.178,48	221,52	1.400,00
30.07.09	298.029,65	0,00	1.177,61	222,39	1.400,00
30.08.09	297.806,37	0,00	1.176,73	223,27	1.400,00
30.09.09	297.582,22	0,00	1.175,85	224,15	1.400,00
30.10.09	297.357,18	0,00	1.174,96	225,04	1.400,00
30.11.09	297.131,25	0,00	1.174,07	225,93	1.400,00
30.12.09	296.904,43	0,00	1.173,18	226,82	1.400,00
30.01.10	296.676,71	0,00	1.172,28	227,72	1.400,00
28.02.10	296.448,10	0,00	1.171,39	228,61	1.400,00
30.03.10	296.218,58	0,00	1.170,48	229,52	1.400,00
30.04.10	295.988,16	0,00	1.169,58	230,42	1.400,00
30.05.10	295.756,83	0,00	1.168,67	231,33	1.400,00
30.06.10	295.524,58	0,00	1.167,75	232,25	1.400,00
30.07.10	295.291,41	0,00	1.166,84	233,16	1.400,00
30.08.10	295.057,33	0,00	1.165,92	234,08	1.400,00
30.09.10	294.822,32	0,00	1.164,99	235,01	1.400,00
30.10.10	294.586,38	0,00	1.164,06	235,94	1.400,00
30.11.10	294.349,52	0,00	1.163,13	236,87	1.400,00
30.12.10	294.111,71	0,00	1.162,20	237,80	1.400,00
30.01.11	293.872,97	0,00	1.161,26	238,74	1.400,00
28.02.11	293.633,29	0,00	1.160,31	239,69	1.400,00
30.03.11	293.392,65	0,00	1.159,37	240,63	1.400,00
30.04.11	293.151,07	0,00	1.158,42	241,58	1.400,00
30.05.11	292.908,54	0,00	1.157,46	242,54	1.400,00
30.06.11	292.665,04	0,00	1.156,51	243,49	1.400,00
30.07.11	292.420,59	0,00	1.155,55	244,45	1.400,00
30.08.11	292.175,17	0,00	1.154,58	245,42	1.400,00
30.09.11	291.928,78	0,00	1.153,61	246,39	1.400,00
30.10.11	291.681,42	0,00	1.152,64	247,36	1.400,00
30.11.11	291.433,08	0,00	1.151,66	248,34	1.400,00
30.12.11	291.183,76	0,00	1.150,68	249,32	1.400,00
30.01.12	290.933,46	0,00	1.149,70	250,30	1.400,00
29.02.12	290.682,17	0,00	1.148,71	251,29	1.400,00

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.03.12	290.429,89	0,00	1.147,72	252,28	1.400,00
30.04.12	290.176,61	0,00	1.146,72	253,28	1.400,00
30.05.12	289.922,33	0,00	1.145,72	254,28	1.400,00
30.06.12	289.667,04	0,00	1.144,72	255,28	1.400,00
30.07.12	289.410,75	0,00	1.143,71	256,29	1.400,00
30.08.12	289.153,45	0,00	1.142,70	257,30	1.400,00
30.09.12	288.895,13	0,00	1.141,68	258,32	1.400,00
30.10.12	288.635,79	0,00	1.140,66	259,34	1.400,00
30.11.12	288.375,43	0,00	1.139,64	260,36	1.400,00
30.12.12	288.114,04	0,00	1.138,61	261,39	1.400,00
30.01.13	287.851,61	0,00	1.137,58	262,42	1.400,00
28.02.13	287.588,15	0,00	1.136,54	263,46	1.400,00
30.03.13	287.323,65	0,00	1.135,50	264,50	1.400,00
30.04.13	287.058,11	0,00	1.134,46	265,54	1.400,00
30.05.13	286.791,52	0,00	1.133,41	266,59	1.400,00
30.06.13	286.523,87	0,00	1.132,35	267,65	1.400,00
30.07.13	286.255,17	0,00	1.131,30	268,70	1.400,00
30.08.13	285.985,41	0,00	1.130,24	269,76	1.400,00
30.09.13	285.714,58	0,00	1.129,17	270,83	1.400,00
30.10.13	285.442,68	0,00	1.128,10	271,90	1.400,00
30.11.13	285.169,71	0,00	1.127,03	272,97	1.400,00
30.12.13	284.895,66	0,00	1.125,95	274,05	1.400,00
30.01.14	284.620,53	0,00	1.124,87	275,13	1.400,00
28.02.14	284.344,31	0,00	1.123,78	276,22	1.400,00
30.03.14	284.067,01	0,00	1.122,69	277,31	1.400,00
30.04.14	283.788,60	0,00	1.121,60	278,40	1.400,00
30.05.14	283.509,10	0,00	1.120,50	279,50	1.400,00
30.06.14	283.228,50	0,00	1.119,39	280,61	1.400,00
30.07.14	282.946,78	0,00	1.118,29	281,71	1.400,00
30.08.14	282.663,96	0,00	1.117,17	282,83	1.400,00
30.09.14	282.380,02	0,00	1.116,06	283,94	1.400,00
30.10.14	282.094,95	0,00	1.114,94	285,06	1.400,00
30.11.14	281.808,76	0,00	1.113,81	286,19	1.400,00
30.12.14	281.521,45	0,00	1.112,68	287,32	1.400,00
30.01.15	281.232,99	0,00	1.111,55	288,45	1.400,00
28.02.15	280.943,40	0,00	1.110,41	289,59	1.400,00
30.03.15	280.652,67	0,00	1.109,26	290,74	1.400,00
30.04.15	280.360,78	0,00	1.108,12	291,88	1.400,00
30.05.15	280.067,75	0,00	1.106,96	293,04	1.400,00
30.06.15	279.773,55	0,00	1.105,81	294,19	1.400,00
30.07.15	279.478,20	0,00	1.104,65	295,35	1.400,00

Datum t_i	Restschuld $n(t_i)$	Auszahlung $a(t_i)$	Zins $z(t_i)$	Tilgung $u(t_i)$	Zins + Tilgung $z(t_i) + u(t_i)$
30.08.15	279.181,68	0,00	1.103,48	296,52	1.400,00
30.09.15	278.883,99	0,00	1.102,31	297,69	1.400,00
30.10.15	278.585,12	0,00	1.101,13	298,87	1.400,00
30.11.15	278.285,07	0,00	1.099,95	300,05	1.400,00
30.12.15	277.983,84	0,00	1.098,77	301,23	1.400,00
30.01.16	277.681,42	0,00	1.097,58	302,42	1.400,00
29.02.16	277.377,80	0,00	1.096,38	303,62	1.400,00
30.03.16	277.072,99	0,00	1.095,19	304,81	1.400,00
30.04.16	276.766,97	0,00	1.093,98	306,02	1.400,00
30.05.16	276.459,75	0,00	1.092,77	307,23	1.400,00
30.06.16	276.151,31	0,00	1.091,56	308,44	1.400,00
30.07.16	275.841,65	0,00	1.090,34	309,66	1.400,00
30.08.16	275.530,77	0,00	1.089,12	310,88	1.400,00
30.09.16	275.218,67	0,00	1.087,89	312,11	1.400,00
30.10.16	274.905,33	0,00	1.086,66	313,34	1.400,00
30.11.16	274.590,75	0,00	1.085,42	314,58	1.400,00
30.12.16	274.274,93	0,00	1.084,18	315,82	1.400,00
30.01.17	273.957,87	0,00	1.082,93	317,07	1.400,00
28.02.17	273.639,55	0,00	1.081,68	318,32	1.400,00
30.03.17	273.319,98	0,00	1.080,43	319,57	1.400,00
30.04.17	272.999,14	0,00	1.079,16	320,84	1.400,00
30.05.17	272.677,04	0,00	1.077,90	322,10	1.400,00
30.06.17	272.353,67	0,00	1.076,63	323,37	1.400,00
30.07.17	272.029,02	0,00	1.075,35	324,65	1.400,00
30.08.17	271.703,08	0,00	1.074,07	325,93	1.400,00
30.09.17	271.375,86	0,00	1.072,78	327,22	1.400,00
30.10.17	271.047,35	0,00	1.071,49	328,51	1.400,00
30.11.17	270.717,54	0,00	1.070,19	329,81	1.400,00
30.12.17	270.386,43	0,00	1.068,89	331,11	1.400,00
30.01.18	270.054,01	0,00	1.067,58	332,42	1.400,00
28.02.18	269.720,28	0,00	1.066,27	333,73	1.400,00
30.03.18	269.385,24	0,00	1.064,95	335,05	1.400,00
30.04.18	269.048,86	0,00	1.063,63	336,37	1.400,00
30.05.18	268.711,16	0,00	1.062,30	337,70	1.400,00
30.06.18	268.372,13	0,00	1.060,97	339,03	1.400,00
30.07.18	268.031,76	0,00	1.059,63	340,37	1.400,00
30.08.18	267.690,05	0,00	1.058,28	341,72	1.400,00
30.09.18	267.346,98	0,00	1.056,94	343,06	1.400,00
30.10.18	0,00	0,00	1.055,58	267.346,98	268.402,56

Tabelle A.7: Tilgungsplan Annuitätendarlehen 1

Anhang B

Abkürzungen und Notationen

β	Letzter Auszahlungstermin
$\rho(H)$	Entnahmeprozess einer Handelsstrategie H
ρ_t	Entnahme aus einer Handelsstrategie in t
$\tau(s,t)_{DC}$	Jahresanteil der Periode $(s,t]$ gemäß der Zinstage-konvention DC
A	Auszahlungsprozess
$A(t)$	Auszahlung in t
$BO(N,S,(t,s],\mathcal{T})$	Kuponanleihe mit Nominal N, Laufzeit $(t,s]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$\mathcal{BO}(N,S,(t,s],\mathcal{T})$	Preis des Bonds mit Nominal N, Laufzeit $(t,s]$ und Zahlungszeitpunkten in $\mathcal{T}$
bzw.	beziehungsweise
CO	Calloption
$\mathcal{CO}_t^\alpha(x,Y)$	Preis einer Calloption auf einen Titel Y mit Basispreis x und Ausübungszeitpunkt α in t
D_s	Diskontprozess in s
$D(s,t)$	Diskontfaktor in s für Zahlungen in t
$FRN(1,(t,s],\alpha)$	Floating Rate Note mit Nominal 1, Laufzeit $(t,s]$ und Zahlungszeitpunkten α
$\mathtt{f}_t(X,s)$	Forwardpreis aus Sicht von t für den Claim X im Zeitpunkt $s>t$
$f_t(s-1,s)$	Forward Short-Rate für Periode $(s-1,s]$
$F_t(t+n,s)$	Linearer Forwardzins für die Periode $(t+n,s]$ aus der Sicht des Zeitpunktes t
$h(\tau)$	Störfunktion für die Modellierung einer Aufwärtsbewegung im Ho/ Lee Modell in Abhängigkeit von der Restlaufzeit τ
$h^*(\tau)$	Störfunktion für die Modellierung einer Abwärtsbewegung im Ho/ Lee Modell in Abhängigkeit von der Restlaufzeit τ
H_t	Handelsstrategie in t

K	Kreditkondition, Kreditprozess
$\mathcal{K}_t$	Wert des Kredites K in t
$L(t,s)$	Libor-/ Euriborzins für den Zeitraum $(t,s]$
NS	Restschuldprozess
$N(t)$	Restschuld nach Zahlungen in t
$\mathsf{p}(X)$	Preisprozess für einen Claim X
PO	Putoption
$\mathcal{PO}_t^\alpha(x,Y)$	Preis einer Putoption auf einen Titel Y mit Basispreis x und Ausübungszeitpunkt α in t
P_s	Nullkuponanleihe mit Fälligkeit im Zeitpunkt s
$PS(N,S,(s,t],\mathcal{T})$	Payerswap mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit $(s,t]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$P(s,\cdot)$	Vektor der Zerobondpreise in s
$\mathcal{PS}_t(N,S,(s,t],\mathcal{T})$	Preis des Payerswaps $PS(N,S,(s,t],\mathcal{T})$
$P(s,t)$	Preis in s für die Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in t
$P(_i(s,t)$	Preis des Zerobonds P_t im Zeitpunkt s und Umweltzustand i
$\mathcal{PSW}_t^\alpha(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Preis einer Payerswaption mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit des Underlyings $(\alpha,t]$, Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$ und Ausübungszeitpunkt α in t
$\mathsf{p}_t(X)$	Preis für einen Claim X in t
$\mathcal{PZS}_t(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Preis eines Payer-Zero-Coupon-Swaps in t mit Nominal N, Laufzeit $(s,t]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$RS(N,S,(s,t],\mathcal{T})$	Receiverswap mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit $(s,t]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$\mathcal{RS}_t(N,S,(s,t],\mathcal{T})$	Preis des Receiverswaps $RS(N,S,(s,t],\mathcal{T})$
$RSW^\alpha(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Receiverswaption mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit des Underlyings $(\alpha,t]$, Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$ und Ausübungszeitpunkt α
$\mathcal{RSW}_t^\alpha(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Preis einer Receiverswaption mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit des Underlyings $(\alpha,t]$, Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$ und Ausübungszeitpunkt α in t
$\mathcal{RZS}_t(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Preis eines Receiver-Zero-Coupon-Swaps in t mit Nominal N, Laufzeit $(s,t]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$RZSW^\alpha(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Receiver-Zero-Swaption mit Ausübungszeitpunkt α, Startnominal N, Laufzeit $(\alpha,t]$, Strikerendite S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$\mathcal{RZSW}_t^\alpha(N,S,(\alpha,t],\mathcal{T})$	Preis der Receiver-Zero-Swaption in t mit Ausübungszeitpunkt α, Startnominal N, Laufzeit $(\alpha,t]$, Strikerendite S und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
S	Kreditzins

ST	Prozess der Sondertilgungen
$\mathcal{ST}_t^\alpha(K)$	Wert des Sondertilgungsrechtes in α beim Kredit K zum Zeitpunkt t
$ST(t)$	Sondertilgung in t
$\mathcal{SW}_t^\alpha(N, S, (\alpha, t], \mathcal{T})$	Preis einer Swaption mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit des Underlyings $(\alpha, t]$, Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$ und Ausübungszeitpunkt α in t
α	Menge der Zahlungszeitpunkte
t_λ	Zeitpunkt der ersten Tilgungszahlung
U	Tilgungsprozess
u.a.	unter anderem
u.U.	unter Umständen
$U(t)$	Tilgungszahlung in t
Vgl.	Vergleiche
$V(H)$	Wertprozess einer Handelsstrategie H
V_t	Wert einer Handelsstrategie in t
VT^α	Differenzprozess zwischen ursprünglichem und verändertem Zahlungsstrom bei einer verbindlichen Sondertilgung
$\mathcal{VT}_t^\alpha$	Wert der verbindlichen Sondertilgung in α aus Sicht des Zeitpunktes t
$\mathcal{X}^0$	Wertprozess des Geldmarktkontos
$\mathcal{X}_t^0$	Wert des Geldmarktkontos in t
Y_t	Zerorenditekurve in t
$Y(t, s)$	Zerorendite für die Laufzeit $(t, s]$
$y_i(t, s)$	Zerorendite für die Laufzeit $(t, s]$ im Zustand i im Ho/ Lee Modell
Z	Zinszahlungsprozess
$ZS(N, S, (s, t], \mathcal{T})$	Zero-Coupon-Swap mit Nominal N, Festzins S, Laufzeit $(s, t]$ und Zahlungszeitpunkten $\mathcal{T}$
$Z(t)$	Zinszahlung in t

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die den Ausführungen anderer Autoren wörtlich oder sinngemäß entnommen sind, habe ich durch Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Münster, den

Britta Speckmann