

WESTFÄLISCHE  
WILHELMUS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

---

# Interpolation im Rahmen des LIBOR–Markt–Modells

## Eine Analyse ausgewählter Ansätze

Diplomarbeit

von

**Daniel Schlotmann**

Betreuer  
Privatdozent Dr. Volkert Paulsen  
Mathematisches Institut für Statistik  
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

---



# Einleitung

Zinssensitive Produkte gehören für Banken zu den wichtigsten Finanzinstrumenten. Aktuelle Zahlen der European Exchange belegen auch nach der Finanzkrise wieder einen Anstieg der Zinsderivat-Kontrakte um 23,4% auf 574,8 Mio. im Jahr 2010 (Vorjahr 465,7 Mio. Kontrakte). Vor allem im Zusammenhang mit dem Risikomanagement, haben Zinsderivate für Finanzinstitute einen hohen Stellenwert. Sie werden zur Absicherung gegen das vom Kunden übernommene Risiko genutzt, was als Hedging bezeichnet wird.

Für das Zinsmanagement besteht auf der Kundenseite zunehmend der Wunsch nach individuellen Produktlösungen. Diese bedarfsgerecht entwickelten Zinsderivate steigern die Komplexität, wodurch sich die mathematische Bewertung wesentlich aufwändiger gestaltet als bei Plain–Vanilla–Geschäften. Zudem lassen aufsichtsrechtliche Vorgaben die Anforderungen an eine präzise finanzmathematische Modellierung bemerkenswert ansteigen.

Ein Zinsstrukturmodell, das diesen insgesamt sehr hohen Anforderungen gerecht wird, ist das LIBOR–Markt–Modell. Es handelt sich um eines der angesehensten, aber auch mathematisch anspruchsvollsten Finanzmarktmodelle, das zur Bewertung von exotischen Produkten eingesetzt wird. Im Gegensatz zu anderen Modellen, legt es direkt am Markt beobachtbare Größen, nämlich die „London Interbank Offered Rates“ zu Grunde.

Doch wie können in einem diskreten Finanzmarktmodell LIBOR–Raten mit beliebigen Start– und Endzeitpunkten bestimmt werden, die für die Bewertung komplexer und exotischer Zinsderivate benötigt werden? Diese Frage wird in der vorliegenden Diplomarbeit mit der Vorstellung ausgewählter Interpolationsansätze behandelt.

Das **erste Kapitel** führt den Leser über eine Einordnung des LIBOR–Markt–Modells in die Finanzmarktmodelle zu einer Diskussion des LIBOR–Zinssatzes. Weitere Schwerpunkte stellen die verschiedenen Zinsarten, sowie die am häufigsten gehandelten Zinsderivate dar.

Im Anschluss befassen wir uns im **zweiten Kapitel** mit der mathematischen Einführung in das Standard LIBOR–Markt–Modell, d.h. mit deterministischer Volatilität. Im

Mittelpunkt steht hierbei die Herleitung der Dynamik unter einem einheitlichen Maß, dem Terminal-Measure. Anschließend wollen wir eine Möglichkeit zur Kalibrierung des Modells nach Schoenmakers und Coffey vorstellen. Schließlich betrachten wir die Simulation des Modells, die uns die Forward-LIBOR-Raten liefert.

Ausgehend von diesen Gegebenheiten erörtern wir die Notwendigkeit einer Interpolation im LIBOR-Markt-Modell. Das **dritte Kapitel** stellt den Hauptteil der Arbeit dar. Nachdem wir Überlegungen zu geeigneten Gütekriterien für die Interpolationsansätze angestellt haben, werden wir sieben unterschiedliche Ansätze analysieren, um beliebige LIBOR-Raten auf Basis des im zweiten Kapitel vorgestellten Modells zu bestimmen.

Ergänzend zum vorherigen theoretischen Teil, wird anschließend das **vierte Kapitel** den praktischen Bezug herstellen. In diesem Abschnitt wird es um die detaillierte Auswertung der Interpolationsansätze gehen. Dabei wird der Fokus sowohl auf die LIBOR-Raten selbst, als auch auf die mit ihnen bewerteten Zinsderivate gelegt.

Das Fazit, welches wir im **fünften Kapitel** ziehen werden, sowie der sich anschließende Anhang und das Literaturverzeichnis runden die Arbeit ab.

Die vorliegende Arbeit wurde in Kooperation mit der „HSH Nordbank AG“ angefertigt. Aus diesem Grund gilt der Abteilung „Financial Engineering“ der HSH Nordbank AG unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Dr. Marcus Poremski ein herzlicher Dank. Ganz besonders danke ich Herrn Dr. Suso Kraut und Herrn Dr. Marcus Steinkamp für die hervorragende Betreuung. Ein weiterer Dank gilt Herrn Privatdozent Dr. Volkert Paulsen, der mir trotz der beachtlichen Entfernung zwischen Münster und Kiel eine sehr gute und vor allem flexible universitäre Betreuung ermöglichte. Darüber hinaus danke ich meiner Familie, die mich zu jeder Zeit unterstützt und gestärkt hat.

Gemäß §21 Abs. 6 der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>2 Einführung LIBOR–Markt–Modell</b>	<b>13</b>
2.1 Theorie des LIBOR–Markt–Modells . . . . .	14
2.2 Kalibrierung des Modells . . . . .	25
2.3 Simulation des Modells . . . . .	31
<b>3 Ansätze zur Interpolation im LIBOR–Markt–Modell</b>	<b>35</b>
3.1 Problemstellung . . . . .	36
3.2 Gütekriterien einer Interpolation . . . . .	37
3.3 Die Interpolationsansätze . . . . .	38
3.3.1 Lineare Interpolation der Bond–Preise . . . . .	43
3.3.2 Logarithmische Interpolation der Bond–Preise . . . . .	53
3.3.3 Konstante Interpolation der Bond–Preise . . . . .	54
3.3.4 Einführung einer Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen bei der konstanten Interpolation der Bond–Preise . . . . .	61
3.3.5 Ansatz zur Interpolation der Bond–Volatilität . . . . .	65
3.3.6 Interpolation der Zerobonds über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell . . . . .	71
3.3.7 Lineare Interpolation der LIBOR–Volatilität . . . . .	79

<b>4 Interpolation in der Praxis</b>	<b>91</b>
4.1 Umsetzung der Interpolationsansätze mit „Visual Basic for Applications“ . . .	91
4.2 Vorstellung der numerischen Ergebnisse . . . . .	93
4.3 Verwendung der Interpolationen zur Bewertung von Zinsderivaten . . . . .	98
<b>5 Fazit</b>	<b>107</b>
<b>A Anhang</b>	<b>109</b>
A.1 Weiterführende Rechnungen und Hintergrundinformationen . . . . .	109
A.2 Daten-CD . . . . .	115
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>117</b>

# Abkürzungsverzeichnis

---

Abkürzung	Bedeutung
BBA	British Banker's Association
BP	Basispunkt(e)
bzw.	beziehungsweise
CIR-Modell	Cox-Ingersol-Ross-Modell
d.h.	das heißt
EONIA	Euro OverNight Index Average
EUR	Euro (Währung)
HJM-Modell	Heath-Jarrow-Morton-Modell
IT	Informationstechnik
LIBOR	London InterBank Offered Rate
MC-Fehler	Monte-Carlo-Fehler
Mio.	Million
PCA	Principal Component Analysis
RMS	Root Mean Square
RMSE	Root Mean Squared Error
S&P	Standard and Poor's Corporation
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

---



# Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung
$P(t, T)$	Nullkuponanleihe in $t$ beobachtet, Start in $t$ und Fälligkeit in $T$
$P(t, S, T)$	Nullkuponanleihe in $t$ beobachtet, Start in $S$ und Fälligkeit in $T$
	Es gilt $P(t, T) = P(t, t, T)$
$L(t, \tau_1, \tau_2)$	LIBOR–Rate von $\tau_1$ bis $\tau_2$ , beobachtet in $t$
$L_i(t)$	LIBOR–Rate beobachtet in $t$ , startend in $T_i$ , sowie Ende in $T_{i+1}$
$f(t, T)$	Die Forward–Rate bezeichnet zum Zeitpunkt $t$ den augenblicklichen Zinssatz im zukünftigen Zeitpunkt $T$
$r(t)$	Die Short–Rate ist gegeben durch $r(t) = f(t, t)$ und bezeichnet den augenblicklichen Zinssatz in $t$
$T_0 < \dots < T_N$	Zeitpunkte für die Tenorstruktur im LIBOR–Markt–Modell
$\delta_i$	Abstand zwischen den Tenorzeitpunkten $T_i$ und $T_{i+1}$
$\eta(t)$	Der vom Zeitpunkt $t$ aus nächstgelegene, zukünftige Gitterpunkt
	$\eta(t) := \max \{i \in \{1, \dots, N\} \mid T_{i-1} < t\}$
$\sigma_i(t)$	Deterministische Volatilitätsfunktion der $i$ -ten LIBOR–Rate in $t$
	Die Schreibweise entspricht $\sigma_i(t) := \sigma(t, T_i)$
$(\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,N-1}$	Kovarianzmatrix der treibenden Brownschen Bewegungen
$\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}}$	Am Markt quotierte Swaption–Volatilität, wobei $T_\alpha$ das erste Fixing–Date und $T_\beta$ das letzte Payment–Date bezeichnen
$S_{\alpha,\beta}(t)$	Swap–Rate zum Zeitpunkt $t$ , wobei $T_\alpha$ das erste Fixing–Date und $T_\beta$ das letzte Payment–Date bezeichnen
$\sigma_i^{\text{CM}}$	Marktwert: $i$ –te Caplet–Volatilität nach dem Cap–to–Caplet Stripping der am Markt quotierten Cap–Volatilitäten

Symbol	Beschreibung
$M$	Anzahl der Realisationen in der Monte–Carlo–Simulation
$\tau$	beliebiger Zeitpunkt $\tau \in [0, T_N]$ , der nicht zwingend auf der Tenorstruktur liegen muss
$\xi$	Funktion, die bei der konstanten Interpolation die Stärke der Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterpunkten beschreibt
$h(t, \tau, L_{\eta(\tau)}(t))$	Konvexitätskorrekturfaktor
$\sigma_P(t, T)$	Bond–Volatilität des in $T$ fälligen Zerobonds zum Zeitpunkt $t$
$\kappa$	Mean–Reversion–Geschwindigkeit im Extended–Vasicek–Modell

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Verlauf des 6-Monats EUR LIBORs 2008-2010 . . . . .	2
1.2	Schematische Darstellung eines Swaps . . . . .	10
1.3	Schematische Darstellung einer Swaption . . . . .	12
3.1	Die allgemeine LIBOR–Rate . . . . .	39
3.2	Die zur Bestimmung der allgemeinen LIBOR–Rate relevanten Bonds . . . . .	41
3.3	Aufteilung 1 der Bonds am Beispiel von $P(t, \tau_1)$ . . . . .	41
3.4	Aufteilung 2 der Bonds am Beispiel von $P(t, \tau_1)$ . . . . .	42
3.5	Beispiel LIBOR–Rate $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$ . . . . .	64
4.1	LIBOR–Raten mit festem Beobachtungszeitpunkt 04.05.2012, festem Enddatum 12.09.2016, sowie variablem Startdatum zwischen dem 11.03.2015 und dem 11.03.2016 auf Basis der Marktdaten vom 11.03.2011 . . . . .	96
4.2	LIBOR–Raten mit festem Beobachtungszeitpunkt 04.05.2012, festem Startdatum 11.03.2014 und variablem Enddatum zwischen dem 11.09.2015 und dem 12.09.2016 auf Basis der Marktdaten vom 11.03.2011 . . . . .	97
4.3	Interpolationsfehler am Beispiel von 5y–Payer–Swaps mit erstem Fixing–Date zwischen dem 12.03.2012 und dem 11.09.2012 . . . . .	106



# 1 Grundlagen

In dem ersten Abschnitt dieser Arbeit wird zunächst eine Einordnung des LIBOR–Markt–Modells in die verschiedenen Modelle der Finanzmathematik vorgenommen. Es werden darüber hinaus relevante Begriffe für die weiteren Betrachtungen eingeführt. An die Definition des „LIBORs“ schließt sich eine ausführliche Diskussion zu diesem Zinssatz an. Nach der Einführung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Rahmens, der dieser Arbeit zu Grunde gelegt wird, werden die „Nullkupon–Anleihen“ definiert. Hierauf bauen verschiedene Zins–Definitionen auf, insbesondere die formale Definition der Forward–LIBOR–Rate. Ebenso werden dann die am häufigsten gehandelten Zinsderivate eingeführt.

Ein wichtiger Aspekt auf dem Kapitalmarkt ist die präzise Bewertung von Zinsderivaten. Dies sind Derivate, deren Underlying ein Zins ist. Die dazugehörigen Modelle zur Bewertung dieser Geschäfte werden Zinsstrukturmodelle genannt. Nachfolgend stellen wir überblicksartig die drei Klassen dieser Modelle vor.

Die erste Modellart bilden die Short–Rate–Modelle, die ausgehend von der Dynamik des nicht am Markt beobachtbaren augenblicklichen Zinssatzes (Short–Rate), einen Zeitpunkt der Zinsstruktur beschreiben. Der erste Ansatz stammte von Oldrich Vasicek aus dem Jahr 1977, vgl. [Vas77]. Dieses Modell ist mathematisch relativ einfach zu handhaben. Allerdings ist aufgrund der Normalverteilung der Short–Rate ein negativer Zins möglich. Ein weiterer Short–Rate–Ansatz stammt z.B. von Cox, Ingersol und Ross, vgl. [CIR85]. In diesem CIR–Modell kann im Gegensatz zum Vasicek Modell keine geschlossene Form für die Short–Rate angegeben werden. Dennoch wird das Problem der möglichen negativen Zinssätze gelöst. Für sehr komplexe Derivate sind Short–Rate–Modelle jedoch ungeeignet.

Ebenso gehen auch die Forward–Rate Modelle von nicht am Markt beobachtbaren Größen aus. In diesen Modellen wird aber ausgehend von den Terminzinssätzen die gesamte Zinsstruktur modelliert. Hierbei ist vor allem das Heath–Jarrow–Morton–Modell zu nennen, vgl. [HJM92], das als Modellrahmen fungiert.

Als dritte Klasse sind die Markt-Modelle zu nennen. Es wird zwischen den LIBOR-Rate und den Swap-Rate Modellen unterschieden. Im Folgenden wird das LIBOR-Markt-Modell detailliert analysiert. Es handelt sich um ein diskretes Zinsstrukturmodell, das im Jahre 1997 zum ersten Mal in den Artikeln von Brace, Gatarek und Musiela, vgl. [BGM97], sowie von Miltersen, Sandmann und Sondermann, vgl. [MSS97] und von Jamshidian, vgl. [Jam97] behandelt wurde.

Da das LIBOR-Markt-Modell Grundlage dieser Arbeit ist, wird die Definition des LIBORs voran gestellt. Für die Definition des LIBORs und die anschließende genauere Be- trachtung vgl. [Hul09] sowie [BBA].

**Definition 1.1 (LIBOR).** *Der LIBOR (London InterBank Offered Rate) ist ein am Markt beobachtbarer Interbankenzins. Dieser Zinssatz wird an jedem Bankentag von zwölf Banken der British Bankers' Association festgelegt. Er stellt einen Zins dar, zu dem die Banken Geld aufnehmen, bzw. selbst anbieten.*

Nachfolgend ist eine mit dem Statistikprogramm „R“ erzeugte Grafik dargestellt, die den Verlauf des in Euro quotierten 6-Monats LIBORs vom 01.01.2008 bis zum 01.01.2011 zeigt:

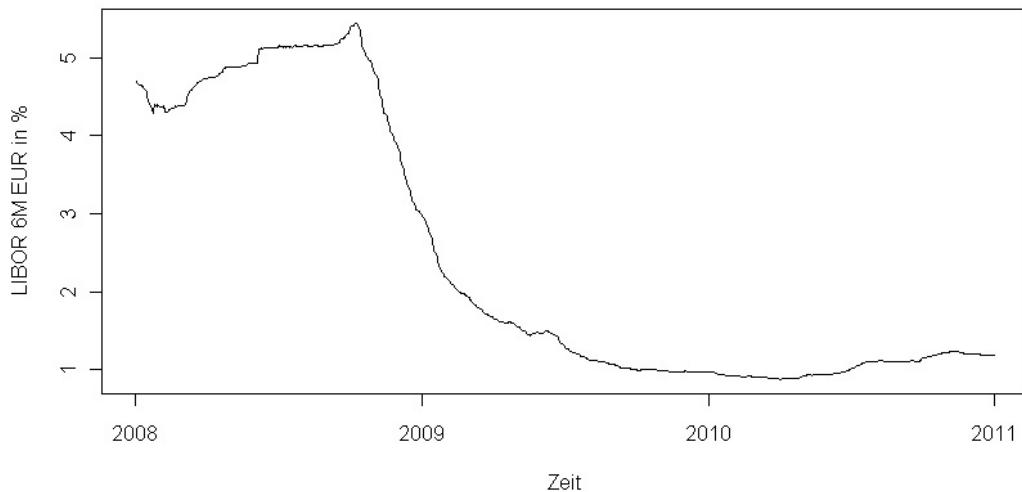


Abbildung 1.1: Verlauf des 6-Monats EUR LIBORs 2008-2010

Der in Grafik 1.1 gezeigte Chart weist einen sehr ungewöhnlichen Verlauf für den (in diesem Fall 6-Monats) LIBOR auf. Der drastische Abfall der Kurve in der Zeit von Ende 2008

---

bis zum Ende des Jahres 2009 erklärt sich durch die Interventionen der Europäischen Zentralbank während der Finanzkrise. Der Höchststand des LIBORs wird am 9. Oktober 2008 mit 5,4375% erreicht, also kurz nach der Insolvenz der Investmentbank „Lehman Brothers“. Das Vertrauen der Banken untereinander ist drastisch zurückgegangen. Da der LIBOR gerade den Zinssatz darstellt, zu dem Banken bereit sind einander Geld auszuleihen, spiegelt der hohe Stand des LIBORs genau das Missvertrauen der Banken untereinander wieder.

Die Eingriffe der Zentralbank führten zu dem anschließenden drastischen Abfall des LIBORs, da sich Banken in dieser Zeit fast ausnahmslos ihre Liquidität über die Zentralbank beschafften. Der LIBOR-Zinssatz fiel somit bis zum Ende des Jahres 2009 auf ein Niveau von etwa 1% ab.

**Bemerkung 1.2.** *Die Gründung des LIBORs resultierte in den 1980er Jahren aus dem Wunsch nach einem Leitzinssatz. Die Notierung des LIBORs erfolgt seit 1986. Der LIBOR besitzt eine Orientierungsfunktion, genauer bietet er ein Maß für den tatsächlichen Zinssatz, zu dem Banken bereit sind einander Geld zu leihen. Wegen der Finanzkrise (2008) hat sich hier jedoch ein Wandel vollzogen, worauf wir in dieser Bemerkung später noch eingehen werden. Dennoch wird an dieser Stelle deutlich, dass es sich bei den LIBOR-Raten um „offered rates“ handelt, d.h. um einen Briefkurs.*

*Der LIBOR wird täglich in zehn verschiedenen Währungen und mit etwa 15 unterschiedlichen Laufzeiten veröffentlicht. Die Fristigkeiten lauten hierbei „Overnight“ (je nach Währung: und bzw. oder „Tomorrow next“), eine Woche, zwei Wochen und ein Monat, sowie anschließend weiter in Abständen von einem Monat bis hin zu zwölf Monaten Laufzeit. Die British Bankers' Association besteht aus über 200 Banken in 60 Ländern. Die LIBOR-Raten werden je nach Währung von 8 bis 16 Banken festgelegt. Die Zahl von zwölf Banken in der obigen Definition steht für die LIBOR-Raten, die in Euro quotiert werden.*

*Ein weiterer wichtiger Aspekt ist das Rating der Banken. Diese müssen mindestens eine Ratingeinstufung „AA“ vorweisen, damit sie einen Kredit zum LIBOR-Zinssatz erhalten können. Hierbei steht „AA“ für die zweitbeste Ratingeinstufung. Die beste Einstufung der Agentur S&P ist „AAA“. Somit hat der LIBOR insbesondere eine Tendenz zu einem risikolosen Zinssatz, da die Ausfallwahrscheinlichkeit bei einer Ratingeinstufung von „AA“ in der Praxis als vernachlässigbar angesehen wird. Dies werden wir auch im Weiteren so annehmen. Allerdings sei an dieser Stelle bemerkt, dass ein deutlicher Wandel im Zuge der*

Finanzkrise zu verzeichnen ist. Da das Vertrauen der Banken untereinander zunehmend geringer wurde, sind die LIBOR-Raten nicht mehr als risikolos anzusehen. Diese Stellung eines risikolosen Referenzzinses nimmt heute in der Praxis der EONIA (Euro OverNight Index Average) ein. Der EONIA stellt ebenfalls einen Interbankenzins dar, der sich aus dem gewichteten Durchschnitt aller unbesicherten Ausleihen von Tagesgeld ergibt.

Um über zwölf Monate hinaus eine Zinsstrukturkurve aufzubauen zu können, werden in der Praxis für Laufzeiten zwischen einem und zwei Jahren Futures oder Forward Rate Agreements benutzt. Für noch längere Laufzeiten werden dann Swap-Rates verwendet. Diese nutzt man für Laufzeiten von bis zu 30 oder sogar bis zu 50 Jahren. Die resultierende Zinskurve wird oft LIBOR-Spot-Rate-Strukturkurve genannt.

Abschließend wird die tägliche Bestimmung der LIBOR-Raten erläutert. Diese erfolgt z.B. über Thomson Reuters, einen Informationsdienstleister. Die einzelnen Banken geben dort bis 11h ihre täglichen Zinssätze ein, zu denen sie bereit sind einer anderen Bank Geld für die verschiedenen Laufzeiten auszuleihen. Für die einzelnen Akteure ist nicht ersichtlich, was die anderen eingeben oder bereits eingegeben haben. Anschließend werden die einzelnen Zinssätze, getrennt nach Laufzeit und Währung, jeweils aufsteigend sortiert und aus den mittleren 50% ergibt sich über das arithmetische Mittel die LIBOR-Rate für eine bestimmte Währung mit einer bestimmten Laufzeit. Durch die ausschließliche Betrachtung der mittleren 50% kann eine Manipulation einzelner Banken ausgeschlossen werden.

In der folgenden Definition wird der wahrscheinlichkeitstheoretische Rahmen festgelegt. Dieser bildet die Grundlage für die gesamte nachfolgende Arbeit.

**Definition 1.3** (Wahrscheinlichkeitstheoretischer Rahmen). *Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.  $(W_t)_{t \geq 0}$  sei eine  $N-1$ -dimensionale Brownsche Bewegung bzgl.  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ . Die Filtration erfülle zudem die 'usual conditions', d.h.*

- (i)  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ist rechtsseitig stetig, d.h.  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$
- (ii)  $\mathcal{F}_0$  enthält alle  $P$ -Nullmengen und alle Teilmengen von  $P$ -Nullmengen

Die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  stellt den Informationsverlauf dar, so dass  $\mathcal{F}_t$  den Informationsstand zum Zeitpunkt  $t$  angibt.

---

Bei den weiteren Betrachtungen wird von einem endlichen Handelszeitraum ausgegangen. Dazu wird ein Zeitpunkt  $T^*$  fixiert mit  $0 < T^* < \infty$ , der einen endlichen Zeithorizont  $[0, T^*]$  vorgibt.  $T^*$  wird somit der letzte mögliche Fälligkeitszeitpunkt sein.

**Definition 1.4** (Nullkupon–Anleihe). *Die Nullkupon–Anleihe, auch Zero–Coupon–Bond genannt, ist ein festverzinsliches Wertpapier ohne laufende Verzinsung. Zu einem fest vereinbarten, zukünftigen Zeitpunkt  $T$  mit  $0 \leq T \leq T^*$  erhält der Inhaber der Nullkupon–Anleihe eine Auszahlung in Höhe von (normiert) 1,-€. Es bezeichne  $P(t, T)$  den Wert der Nullkupon–Anleihe mit Auszahlung 1 bei Fälligkeit in  $T$  zum Zeitpunkt  $t$ .*

Es müssen nun einige Annahmen für das Modell getroffen werden. Zunächst unterstellen wir, dass es kein Bonitätsrisiko, also kein Ausfallrisiko, für die Nullkupon–Anleihen gibt. Somit liegt zum Zeitpunkt  $T$  eine sichere Auszahlung in Höhe von einer Geldeinheit vor:  $P(T, T) = 1$ .

Weiter wird angenommen, dass der Briefkurs dem Geldkurs entspricht. Am Markt gibt es in der Realität einen sogenannten Spread, der die Differenz zwischen Brief- und Geldkurs darstellt. Der Geldkurs drückt den Preis aus, zu dem ein Marktteilnehmer einwilligt, das Produkt (im obigen Fall die Nullkupon–Anleihe) zu kaufen. Der Briefkurs dagegegen gibt den Preis an, zu dem ein anderer Marktteilnehmer bereit ist, das Produkt zu verkaufen. Der Geldkurs ist somit in der Praxis immer geringer als der Briefkurs.

Es wird darüber hinaus gefordert, dass für jede beliebige Laufzeit und zu jedem beliebigen Zeitpunkt eine Nullkupon–Anleihe am Markt erhältlich ist. Außerdem soll die *No–arbitrage with cash* Bedingung erfüllt sein. Dies bedeutet, dass der Wert einer Nullkupon–Anleihe stets positiv ist. Insbesondere kann man so eine sichere Auszahlung von einer Geldeinheit in  $T$  nicht kostenlos zu einem Zeitpunkt  $t < T$  erhalten.

Schließlich wird angenommen, dass  $P(t, T)$  nach  $T$  differenzierbar ist, um in Definition 1.7 die augenblicklichen Zinsformen erklären zu können.

Ausgehend von der Nullkupon–Anleihe wird zwischen mehreren Zinssätzen unterschieden. Eine grobe Unterscheidung ist zunächst zwischen einer Spot–Rate und einer Forward–Rate vorzunehmen. Bei einer Spot–Rate ist der Beobachtungszeitpunkt der Startpunkt des Anlagezeitintervalls. Handelt es sich stattdessen um eine Forward–Rate, so liegt das Zeit-

intervall der Anlage in der Zukunft. Der Forward–Zins wird in einem Zeitpunkt  $t$  für ein zukünftiges Zeitintervall  $[T_1, T_2]$  festgelegt.

Des Weiteren unterscheidet man zwischen stetigen und diskreten Zinsraten. Einen Zusammenhang zwischen den Zinsarten erhält man über die folgende Gleichung:

$$\exp(s(T_2 - T_1)) = 1 + d(T_2 - T_1), \quad (1.1)$$

wobei  $s$  für einen stetigen Zins und  $d$  für einen diskreten Zinssatz steht. Außerdem ist  $[T_1, T_2]$  das zugehörige Anlagezeitintervall.

Man erhält die folgenden Definitionen, vgl. hierzu [Sch05] und [BM06]:

**Definition 1.5** (Diskrete Zinssätze). *Sei  $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$ . Die folgende **diskrete Forward–Rate** entspricht der Forward–LIBOR–Rate, die im Verlauf der Arbeit thematisiert wird. Zum Zeitpunkt  $t$  ist diese für das Zeitintervall  $[T_1, T_2]$  gegeben durch:*

$$L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right).$$

Betrachtet man die obige Forward–Rate für das Zeitintervall  $[t, T_1]$ , so ergibt sich wegen  $P(t, t) = 1$  unmittelbar für den Zeitpunkt  $t$  die **diskrete Spot–Rate** (oftmals auch als Spot–LIBOR–Rate bezeichnet):

$$L(t, T_1) = L(t, t, T_1) = \frac{1}{T_1 - t} \left( \frac{1}{P(t, T_1)} - 1 \right).$$

Als nächstes werden die stetigen Zinssätze definiert. Diese Definitionen ergeben sich über den in (1.1) angegebenen Zusammenhang mit den diskreten Zinssätzen. Setzt wir in diese Formel die diskrete Forward–Rate ein und stellen die Gleichung nach der stetigen Zinsrate um, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{R(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)} &= 1 + L(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1) && \Big| L(t, T_1, T_2) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow e^{R(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)} &= 1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right) (T_2 - T_1) && \Big| \text{logarithmieren, umstellen} \\ \Leftrightarrow R(t, T_1, T_2) &= \frac{1}{T_2 - T_1} \log \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}. \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist erlaubt, da  $T_2 - T_1 > 0$ .

---

**Definition 1.6** (Stetige Zinssätze). *Sei  $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$ . Die **stetige Forward-Rate** zum Zeitpunkt  $t$  für das Zeitintervall  $[T_1, T_2]$  ist definiert durch:*

$$R(t, T_1, T_2) = -\frac{\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

*Die **stetige Spot-Rate** ist dann aufgrund von  $\log(P(t, t)) = \log(1) = 0$  gegeben durch:*

$$R(t, T_1) = R(t, t, T_1) = -\frac{\log(P(t, T_1))}{T_1 - t}.$$

Als weitere Zinsarten werden die augenblicklichen Zinsen definiert. Hierzu lassen wir das zu betrachtene Zeitintervall beliebig klein werden:

$$f(t, T_1) = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} R(t, T_1, T_2) = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} -\frac{\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

**Definition 1.7** (Augenblickliche Zinssätze). *Sei  $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$ . Die **augenblickliche Forward-Rate** beobachtet in  $t$  für den zukünftigen Zeitpunkt  $T_1$  ist gegeben durch:*

$$f(t, T_1) = -\frac{\partial \log P(t, T_1)}{\partial T_1}.$$

*Ebenso kann der augenblickliche Zins zum Zeitpunkt  $t$  definiert werden. Dieser Zinssatz wird **Short-Rate** genannt. Anschaulich handelt es sich hierbei um eine Nullkupon-Anleihe, die im nächsten Moment fällig wird. Die **Short-Rate** wird mit  $r(t)$  bezeichnet:*

$$r(t) := f(t, t) = \lim_{T_1 \rightarrow t} R(t, T_1).$$

Wir wollen jetzt die bekanntesten und am häufigsten gehandelten Zinsderivate einführen. Für die anschließende Darstellung dienen die Bücher von Piterbarg [PA10a], Hull [Hul09], sowie von Brigo und Mercurio [BM06] als Quelle. Zunächst werden Zins-Caps und deren Gegenstücke, die Zins-Floors vorgestellt. Anschließend wird eine Beschreibung von Swaps und Swaptions erfolgen.

### Zins–Cap

Ein Zins–Cap ist eine Zinsoption. Ist das betrachtete Underlying z.B. der LIBOR, so wird in der Praxis auch von einem LIBOR–Cap gesprochen. Mit dem Kauf eines Zins–Caps sichert sich der Inhaber gegen steigende Zinsen ab. Es handelt sich somit um eine Call–Option (genauer um ein Portfolio von Call–Optionen) auf den betrachteten Referenzzinssatz.

Es sei im Folgenden ein Cap betrachtet, dessen Referenzzinssatz der LIBOR ist. Weiter sei ein Notional, d.h. ein Nominalbetrag, in Höhe von  $X$  Geldeinheiten vorgegeben. Außerdem wird der Strike–Zinssatz  $K$  fixiert. Bei den Floating Rate Notes, d.h. bei den zinsvariablen Schuldverschreibungen, wird als Zinssatz der variable Referenzzinssatz verwendet, um Zinszahlungen zu bestimmen. Zu Beginn festgelegte Zeitpunkte  $T_0, \dots, T_N$  mit  $T_0 < \dots < T_N$  bilden die Tenorstruktur. Zu den Zinsanpassungsterminen, dies sind die Zeitpunkte  $T_i$  mit  $i = 0, \dots, N - 1$ , wird jeweils der variable Zinssatz für das nachfolgende Zeitintervall  $[T_i, T_{i+1}]$  der Länge  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$  fixiert und in den Zeitpunkten  $T_{i+1}$  mit  $i = 0, \dots, N - 1$ , also erst nach Ablauf der nächsten Periode, müssen die Zinszahlungen vorgenommen werden.

Genauer gesagt besteht ein Cap also aus  $N$  einzelnen Caplets. Jedes Caplet stellt eine Call–Option auf den Referenzzinssatz dar. An dieser Stelle wird deutlich, dass ein Zins–Cap einem Portfolio von Call–Optionen auf den Referenzzinssatz entspricht. Wird das Caplet betrachtet, dessen Zinsanpassungstermin der Zeitpunkt  $T_i$  ist und der Zins–Zahlungszeitpunkt  $T_{i+1}$ , so ist die Auszahlung dieses Caplets zum Zeitpunkt  $T_{i+1}$  gegeben durch:

$$V_{Caplet}(T_{i+1}) = X\delta_i \max(L(T_i, T_i, T_{i+1}) - K, 0). \quad (1.2)$$

Es erfolgt demnach genau dann eine Auszahlung in  $T_{i+1}$ , bzw. die Option wird ausgeübt, wenn der Referenzzinssatz höher ist, als der Strike–Zinssatz. Die Differenz zwischen LIBOR und Strike wird dann auf das Zeitintervall der Länge  $\delta_i$  bezogen und mit dem Nennwert multipliziert. Mit der Formel (1.2) kann man nun die Auszahlung des Caps als Summe über die Auszahlungen der Caplets bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass bei einem Cap in der Praxis keine Zahlung zum Zeitpunkt  $T_1$  vorgenommen wird, auch wenn zum Zeitpunkt  $T_0$ , bei Abschluss des Vertrags, der Referenzzinssatz über dem Strike–Zinssatz lag.

---

### Zins–Floor

Ein Zins–Floor ist das Gegenstück zum Zins–Cap und sichert den Inhaber gegen fallende Zinsen ab. Ein Floor besteht aus einer Summe von Floorlets und kann als Portfolio von Put–Optionen auf den Referenzzinssatz angesehen werden. Legt man wie beim Cap auch ein Notional von  $X$  Geldeinheiten, einen Strike–Zinssatz  $K$ , sowie eine Tenorstruktur  $T_0 < \dots < T_N$  mit  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$  zu Grunde, so ist die Auszahlung eines Floorlets mit Zinsanpassungstermin  $T_i$  und Payment–Date  $T_{i+1}$  zum Zeitpunkt  $T_{i+1}$  gegeben durch:

$$V_{Floorlet}(T_{i+1}) = X\delta_i \max(K - L(T_i, T_i, T_{i+1}), 0). \quad (1.3)$$

Über das Portfolio, bestehend aus den einzelnen Floorlets für  $i = 1, \dots, N - 1$ , kann man die Auszahlung des Floors über die Summe der Auszahlungen der Floorlets bestimmen.

### Zins–Swap

Ein Swap ist allgemein als ein Kontrakt auf Finanzmärkten zu verstehen, bei dem zwischen zwei Marktakteuren zu vereinbarten Bedingungen ein zukünftiger Austausch von Finanzgütern vertraglich geregelt ist. Im Folgenden soll unter einem Zins–Swap, bzw. kurz Swap, ein Austausch von festen und variablen Zahlungen verstanden werden. Man unterscheidet weiter zwischen Payer–Swaps und Receiver–Swaps. Liegt ein Payer–Swap vor, so wird ein fester Zinssatz auf ein fiktives Notional gezahlt und eine variable Zahlung in Abhängigkeit des Referenzzinssatzes erhalten. Beim Receiver–Swap ist es umgekehrt, d.h. der Inhaber erhält feste Zahlungen und muss variable gemäß dem Referenzzinssatz auf das fiktive Notional zahlen. Es handelt sich um ein fiktives Notional, da das Kapital nur zur Berechnung der Zinszahlungen genutzt wird und nicht ausgetauscht wird.

In der Praxis erfolgen in der Regel nicht die einzelnen festen und variablen Zahlungen, sondern es wird nur die Differenz der Zahlungen in die entsprechende Richtung zwischen den Vertragspartnern gezahlt. Zudem sei bemerkt, dass die Zahlungsfrequenzen der variablen und fixen Seite nicht übereinstimmen müssen. Setzt man „Euro“ als Währung voraus, so ist die Zahlungsstruktur typischerweise gegeben durch jährliche Zahlungen auf der fixen, und halbjährliche Zahlungen auf der variablen Seite. Für einen solchen Swap werden wir die Bewertungsformeln in Kapitel 4.3 ausführlich behandeln.

In der nachfolgenden Abbildung wird ein Swap schematisch anhand eines Zeitstrahls dargestellt. Es werden gleiche Zahlungsfrequenzen für die variable und fixe Seite vor-

ausgesetzt. Die Zeitpunkte auf der Tenorstruktur sind gegeben durch  $T_{i-2}, \dots, T_{i+2}$  mit  $0 < T_{i-2} < \dots < T_{i+2} < T^*$ . Die Zeitpunkte  $F_{i-2}, \dots, F_{i+2}$  sind die sogenannten Fixing–Dates an denen der Referenzzinssatz für das nächste Zeitintervall festgelegt wird. Sie liegen in der Regel zwei Geschäftstage vor dem nächsten Punkt auf der Tenorstruktur<sup>1</sup>. Die Tage, an denen die Zahlungen erfolgen, werden Payment–Dates genannt. Sie liegen auf der Tenorstruktur und werden nachfolgend mit  $P_{i-3}, \dots, P_{i+1}$  bezeichnet. Die festen Zins–Zahlungen auf den gegebenen fiktiven Nennwert werden in der Abbildung durch Pfeile dargestellt, die variablen Zinsen werden durch gestrichelte Pfeile entlang der Payment–Dates dargestellt.

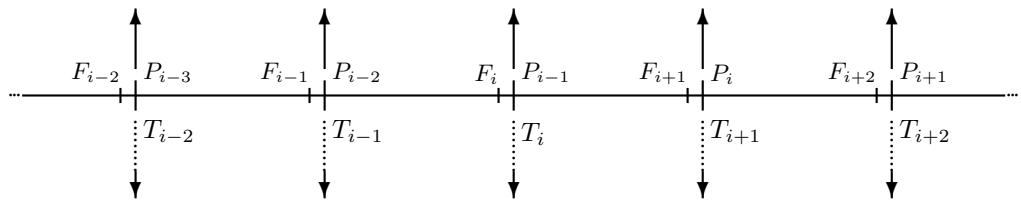


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung eines Swaps

Für die mathematische Herangehensweise vernachlässigen wir die zwei Geschäftstage vor den Zeitpunkten auf der Tenorstruktur. Wir treffen die Annahme, dass die Fixing– und Payment–Dates auf der gegebenen Tenorstruktur liegen. Dann zahlt ein Payer–Swap bei einem gegebenen Nominalbetrag  $X$ , einer fixen Rate  $K$  und der variablen LIBOR–Rate  $L(T_i, T_i, T_{i+1})$  zum Zeitpunkt  $T_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, N - 1$ :

$$X \delta_i (L(T_i, T_i, T_{i+1}) - K).$$

Über eine allgemeine Bewertungsgleichung, siehe auch Kapitel 4.3, folgt für  $t \leq T_1$ :

$$V_{Swap}(t) = X \sum_{i=1}^{N-1} P(t, T_{i+1}) \delta_i (L(t, T_i, T_{i+1}) - K). \quad (1.4)$$

Als Par–Swap–Rate wird die über die Tenorstruktur einheitliche fixe Rate  $S(t)$  angesehen, für die der Swap den Wert 0 hat. Hierzu muss der Gesamtwert der Zahlungen 0 sein, so dass die folgende Bedingung erfüllt sein muss:

$$X \sum_{i=1}^{N-1} P(t, T_{i+1}) \delta_i L(t, T_i, T_{i+1}) - X S(t) \sum_{i=1}^{N-1} P(t, T_{i+1}) \delta_i \stackrel{!}{=} 0.$$

<sup>1</sup>Dies ist abhängig von der Währung, zwei Tage gilt z.B. für „Euro“.

---

Dies ist genau dann erfüllt, wenn für die Swap–Rate gilt:

$$S(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} P(t, T_{i+1}) \delta_i L(t, T_i, T_{i+1})}{\sum_{i=1}^{N-1} P(t, T_{i+1}) \delta_i} \stackrel{(*)}{=} \frac{P(t, T_1) - P(t, T_N)}{\sum_{i=1}^{N-1} P(t, T_{i+1}) \delta_i}. \quad (1.5)$$

Es gilt (\*), da aus der Definition 1.5 folgt:

$$\begin{aligned} L(t, T_i, T_{i+1}) &= \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \quad L(t, T_i, T_{i+1}) &= \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{P(t, T_i) - P(t, T_{i+1})}{P(t, T_{i+1})} \right) \\ \Leftrightarrow \quad P(t, T_{i+1}) \delta_i L(t, T_i, T_{i+1}) &= P(t, T_i) - P(t, T_{i+1}). \end{aligned}$$

## Swaption

Swaption ist ein verkürzter Ausdruck für eine Swap–Option. Somit ist eine Swaption eine Option auf einen Zins–Swap. Auch hier unterscheidet man zwischen Payer– und Receiver–Swaption. Eine Payer–Swaption entspricht dabei einer Put–Swaption, bei der der Käufer das Recht erwirbt in einen Swap einzutreten, indem er einen festen Zinssatz auf ein gegebenes Notional zahlt und einen variablen Zins empfängt. Dagegen entspricht eine Receiver–Swaption einer Call–Swaption, bei der der Käufer der Receiver–Swaption das Recht erwirbt, in einen Swap einzutreten, bei dem er sich vertraglich bindet einen festen Zinssatz zu empfangen und einen variablen Zinssatz zu zahlen.

Auch die Swaption soll im Folgenden grafisch veranschaulicht werden. Im Gegensatz zum Swap ist hier auch die Zeit vor dem ersten Fixing–Date von besonderer Relevanz. Wir betrachten eine Tenorstruktur, die gegeben sei durch  $T_0 = 0$  und die Gitterpunkte  $T_1, \dots, T_N$  mit  $T_0 < \dots < T_N$ . Bei dem ersten Fixing, dem so genannten Expiry–Date, kann der Inhaber der Swaption wählen, ob er in den Swap eintreten möchte, oder nicht. Tritt der Swaption–Inhaber in den Swap ein, so wird beim Expiry–Date, zwei Geschäftstage vor dem ersten Tenor–Date  $T_1$ , der variable Zins für das erste Zeitintervall  $[T_1, T_2]$  gefixt. Das erste Payment–Date  $P_1$  ist dann der Zeitpunkt  $T_2$  der Tenorstruktur. Zwei Geschäftstage vor  $T_2$  wiederum wird der variable Referenzzins für das anschließende Zeitintervall und das Payment–Date  $P_2$  gefixt. So fährt man weiter fort bis zum letzten Zeitpunkt  $T_N$  der Tenorstruktur. Zwei Geschäftstage vor  $T_N$  liegt kein Fixing–Date. Das letzte Payment–Date ist dann  $P_{N-1}$ , das den letzten Zeitpunkt  $T_N$  der Tenorstruktur darstellt.

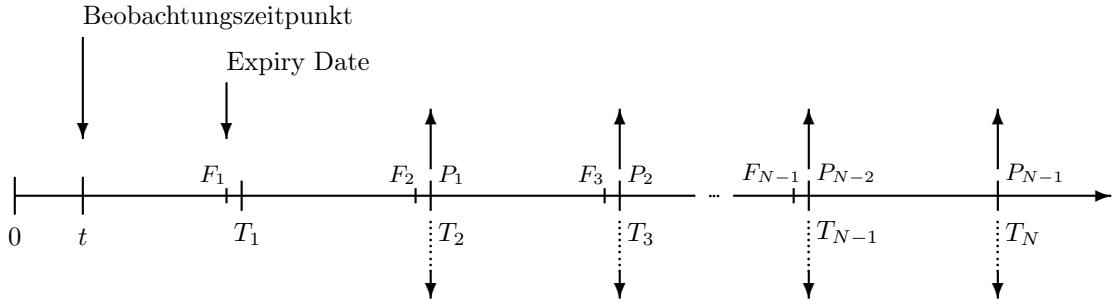


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung einer Swaption

Die Abbildung 1.3 verdeutlicht, dass bei  $N$  Zeitpunkten auf der Tenorstruktur nur  $N - 1$  Zahlungen erfolgen. Um eine Formel für den Wert einer Swaption anzugeben, gehen wir von der Annahme aus, dass die Fixing- und Payment-Dates auf der gegebenen Tenorstruktur liegen. Da eine Swaption wie oben bereits beschrieben eine Option auf einen Swap darstellt, ist der Wert einer Payer-Swaption zum Expiry-Zeitpunkt  $T_1$  mit der Formel (1.4) gegeben durch:

$$V_{Swaption}(T_1) = \max(V_{Swap}(T_1), 0). \quad (1.6)$$

Im Abschnitt 2.1 werden die analytischen Formeln von Black für die Bewertung von Caps und Swaptions präsentiert. Mit Black's Formel für Swaptions, vgl. (2.2), kann man schließlich auch zum Zeitpunkt 0 den Wert einer Swaption bestimmen. Diese Formel soll als Referenz dienen, wenn im Kapitel 4.3 ein Maß für die Güte der Interpolationsansätze benötigt wird.

**Bemerkung 1.8.** *Die vorgestellten Zinsderivate sind vergleichsweise einfach zu bewertete Zinsderivate. In der Praxis werden diese daher nicht mit dem LIBOR-Markt-Modell bewertet. Dieses wird zur Bewertung von komplexeren Derivaten eingesetzt, die typischerweise pfadabhängig oder kündbar sind.*

## 2 Einführung LIBOR–Markt–Modell

Bevor LIBOR–Markt–Modelle in der Praxis eingesetzt wurden, verwendete man Short–Rate– bzw. Forward–Rate–Modelle, um Preise oder Hedgestrategien für Zinsderivate zu bestimmen. In beiden Modelltypen werden jedoch infinitesimale Zinssätze als Ausgangspunkt angesetzt, die sowohl im Short–Rate, als auch im Forward–Rate Fall ein mathematisches Konstrukt sind, sie sind also nicht am Markt beobachtbar.

Das LIBOR–Markt–Modell hingegen legt LIBOR–Zinssätze zu Grunde, die am Markt quotiert sind. Die Zinsstrukturkurve wird in diskreter Form ausgehend von den anfänglichen LIBOR–Raten als Ganzes modelliert. Die Diskretisierung bezieht sich auf die Fälligkeiten der LIBOR–Zinssätze. Hierzu wird in der Einführung des ersten Unterabschnitts eine Tenorstruktur vorgegeben. Die Modellierung des Modells erfolgt stetig. Das LIBOR–Markt–Modell ist ein hochdimensionales Modell, das von einer  $N-1$ –dimensionalen Brownschen Bewegung angetrieben wird.

In dem nun folgenden Teil der Arbeit wird als erstes die allgemeine Theorie des LIBOR–Markt–Modells erläutert. Diese Darstellung orientiert sich an [PA10b], sowie an [BM06].

Im ersten Abschnitt wird zunächst das Setting vorgestellt. Bei der Herleitung der Black–Formel für Caplets („Black 76“) liegt den Betrachtungen nur eine Differentialgleichung zu Grunde. Mit dieser Formel kann man Caplet–Preise analytisch bestimmen. Ebenso wird eine analytische Berechnungsmöglichkeit für Swaptions angegeben. Diese Formeln werden bei der Untersuchung der Interpolationsansätze in Kapitel 4.3 die Referenzpreise analytisch festlegen. Anschließend werden die Begriffe Spot–Measure und Terminal–Measure, sowie der Satz von Girsanov eingeführt. So kann schließlich das LIBOR–Markt–Modell in seiner Gesamtheit, d.h. mit  $N-1$  Differentialgleichungen betrachtet werden. Genauer ermöglicht der Satz von Girsanov eine Darstellung der LIBOR–Dynamik unter einem einheitlichen Maß, dem Terminal– oder Spot–Measure.

Im zweiten Unterkapitel wird die Kalibrierung des LIBOR–Markt–Modells besprochen.

Unter der Kalibrierung eines Modells versteht man die Anpassung des Modells an gegebene Marktdaten. Da es zahlreiche unterschiedliche Ansätze zur Kalibrierung gibt, wird ein Verfahren von Schoenmakers und Coffey vorgestellt, welches besonders praxisrelevant ist. Dieses Unterkapitel orientiert sich somit an [SC00].

Das abschließende Unterkapitel behandelt die Simulation des aufgestellten Modells. Wir stellen das praktische Vorgehen bei der Monte–Carlo–Simulation vor. Da die Performance der Simulation für die Praxis von großer Bedeutung ist, gehen wir im Anschluss übersichtsartig auf die Verfahren der Varianz– und Faktorreduktion ein. Als Literatur wird für diesen Abschnitt insbesondere das Buch [Jäc02] dienen, sowie der Artikel [Jos03]. Weitere Literaturquellen sind unter anderem [PA10a] und [PPVR03].

## 2.1 Theorie des LIBOR–Markt–Modells

Vorab erfolgen einige Erläuterungen zu den Rahmenbedingungen des Modells. Wir setzen für alle nachfolgenden Betrachtungen voraus, dass wir uns heute im Zeitpunkt 0 befinden. Von dort aus werden zukünftige, diskrete Zeitpunkte  $T_i$  für  $i = 0, \dots, N$  vorgegeben mit:

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N \leq T^*,$$

die sogenannte Tenorstruktur. Weiter sei die Länge der Periode von  $T_i$  bis  $T_{i+1}$  in der Tenorstruktur gegeben durch:

$$\delta_i = T_{i+1} - T_i \quad \text{für } i = 0, \dots, N - 1.$$

Die Abstände  $\delta_i$  ergeben sich aus der Wahl der zu betrachteten LIBOR–Raten. Untersucht man, wie z.B. in der Währung „Euro“ üblich, die 6–Monats–LIBORen, so ergeben sich Abstände von etwa 6 Monaten. Die Tenorstruktur ist in der Regel nicht äquidistant, da die Tenorzeitpunkte, die auf einen Feiertag oder einen Wochenendtag fallen, auf den nächsten Bankentag verschoben werden.

Das LIBOR–Markt–Modell ist ein diskretes Zinsstrukturmodell, das die LIBOR–Raten  $L(t, T_i, T_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, N - 1$  mit  $0 \leq t \leq T_i \leq T_{i+1} \leq T_N$  beschreibt. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei  $L_i(t) := L(t, T_i, T_{i+1})$ . Außerdem wird definiert:

$$\eta(t) := \max \{i \in \{1, \dots, N\} \mid T_{i-1} < t\}. \quad (2.1)$$

Somit ist  $T_{\eta(t)}$  gerade der von  $t$  aus nächst größere Punkt auf der gegebenen Tenorstruktur. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden alle Zeitpunkte, die auf der Tenorstruktur liegen, auch als Gitterpunkte bezeichnet. Entsprechend der Definition 1.5, sind die LIBOR–Raten allgemein gegeben durch:

$$L_i(t) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right). \quad (2.2)$$

Das Ziel des LIBOR–Markt–Modells ist, ausgehend von den LIBOR–Raten zum Zeitpunkt 0, die Bestimmung der Forward–Raten  $L_{\eta(t)}(t), L_{\eta(t)+1}(t), \dots, L_{N-1}(t)$ . Die LIBOR–Raten  $L_i(t)$  mit  $T_i < t$  werden als tote Raten bezeichnet, da der Startzeitpunkt der Rate vor dem Beobachtungszeitpunkt liegt und sie somit bereits gefixt sind.

Die Basisfinanzgüter in unserem Modell stellen die Nullkuponanleihen  $P(t, T_i)$  für  $i = 1, \dots, N$  mit  $t \leq T_i$  dar. Dies sind genau die Zerobonds, deren Fälligkeitsdatum auf der vorgegebenen Tenorstruktur liegt. Eine wichtige Forderung an das Modell ist die Arbitragefreiheit. Hierunter ist das Nichtvorhandensein einer Möglichkeit zum risikolosen Profit beim Handel mit Finanzgütern innerhalb des Modells zu verstehen (vgl. [Pau10]).

Nach der Definition der LIBOR–Raten (2.2) gilt:

$$L_i(t)P(t, T_{i+1}) = \frac{1}{\delta_i} P(t, T_i) - \frac{1}{\delta_i} P(t, T_{i+1}),$$

so dass  $L_i(t)P(t, T_{i+1})$  ein handelbares Finanzgut ist, da es in Einheiten der Basisfinanzgüter ausgedrückt werden kann. Wir wollen den Zerobond  $P(t, T_{i+1})$  als Numéraire<sup>1</sup> voraussetzen. Da wir Arbitragefreiheit für das Modell fordern, muss nach dem Fundamentalsatz der Preistheorie (vgl. [Pau10]) ein zu dem in Definition 1.3 vorausgesetzten Maß  $P$  äquivalentes Maß  $P^{T_{i+1}}$  für das Numéraire  $P(t, T_{i+1})$  existieren, unter dem alle handelbaren Finanzgüter, ausgedrückt in Einheiten des Numéraires, Martingale bilden. Das zu dem Numéraire  $P(t, T_{i+1})$  gehörige Maß  $P^{T_{i+1}}$  heißt  $T_{i+1}$ –Forward Martingalmaß.

Drücken wir  $L_i(t)P(t, T_{i+1})$  in Einheiten des Numéraires aus, so folgt, dass  $L_i(t)$  ein Martingal unter dem Maß  $P^{T_{i+1}}$  ist. Da zudem  $\delta_i > 0$  und  $P(t, T_i) > P(t, T_{i+1})$  gilt, ist  $L_i(t)$  insbesondere ein positives Martingal.

<sup>1</sup>Ein Numéraire bezeichnet eine Verrechnungsgröße. Beispielsweise fungiert das Bankkonto als ein Numéraire, wenn der Wert eines Derivates in Einheiten des Bankkontos ausgegeben wird. Gleichermaßen ist es aber auch möglich jedes andere Asset als Verrechnungseinheit anzugeben, falls sein Preis strikt positiv ist.

Aufgrund der soeben hergeleiteten Martingaleigenschaft der LIBOR–Raten unter ihren natürlichen Forward Maßen findet man eine Darstellung der Form:

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma_i(t)dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N-1, \quad (2.3)$$

wobei  $W_i^{P^{T_{i+1}}}$  die  $i$ –te Komponente einer  $N-1$ –dimensionalen Brownschen Bewegung unter dem  $T_{i+1}$ –Forward Maß  $P^{T_{i+1}}$  bezeichnet und  $\sigma_i(t)$  im Allgemeinen ein stochastischer Prozess ist. Für das Standard LIBOR–Markt–Modell nehmen wir die Volatilität  $\sigma(t)$  als eine  $N-1$ –dimensionale deterministische Funktion an<sup>2</sup>. Als Anfangsbedingung für (2.3) setzen wir voraus:

$$L_i(0) = l_{i,0} \quad \text{mit } l_{i,0} \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, N-1.$$

Die Werte für  $l_{i,0}$  werden der gegebenen Zinskurve zum Zeitpunkt 0 entnommen. Genauer kennt man die Zerobonds  $P(0, T_i)$  und  $P(0, T_{i+1})$ , so dass auch die Forward–LIBOR–Rate  $L(0, T_i, T_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, N-1$  bekannt ist. Für die  $N-1$ –dimensionale Brownsche Bewegung fordern wir eine Korrelation der Form  $d[W_j^{P^{T_{i+1}}}, W_k^{P^{T_{i+1}}}]_t = \rho_{j,k}dt$  für  $j, k = 1, \dots, N-1$ . Die Korrelationsmatrix ist dann definiert über  $(\rho_{j,k})_{j,k=1, \dots, N-1}$ . Beispielhafte funktionale Formen für die Volatilität und die Korrelation sind im Abschnitt 2.2 angegeben.

Zusammenfassend haben wir über die Dynamiken aus (2.3) unter dem jeweiligen Forward Maß für alle  $i = 1, \dots, N-1$  lognormalverteilte Martingale  $(L_i(t))_{0 \leq t \leq T_i}$  definiert. Dieses Vorgehen wird auch als „Martingale Modelling“ bezeichnet. Jedoch wird bisher jede LIBOR–Rate unter einem eigenen, dem natürlichen Forward Maß betrachtet. Das Ziel ist die Darstellung der LIBOR–Raten unter einem einheitlichen Maß.

Da das LIBOR–Markt–Modell als ein Modell aufgefasst werden kann, welches eine gleichzeitige Betrachtung von  $N-1$  Black–Modellen vornimmt, stellen wir zunächst das Black–Modell vor. „Black’s Formel für Caplets“, die auch kurz „Black 76“ genannt wird, ermöglicht eine analytische Bewertung von Caplets und somit auch für Caps. Statt der in (2.3) angegebenen  $N-1$  stochastischen Differentialgleichungen betrachtet man lediglich eine einzelne. Im Folgenden wird der Preis für ein Caplet analytisch hergeleitet, vgl. [BM06]. Wir wollen die Formel für ein Caplet auf die LIBOR–Rate zwischen  $T_i$  und  $T_{i+1}$  zeigen.

---

<sup>2</sup>Varianten, in denen die Volatilität durch einen zusätzlichen stochastischen Prozess modelliert wird, also Modelle mit stochastischer Volatilität, gehen über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

**Satz 2.1** (Black 76). *Sei  $0 \leq t \leq T_i < T_{i+1} \leq T^*$ . Der Preis eines Caplets auf die LIBOR–Rate  $L_i(t) = L(t, T_i, T_{i+1})$  mit Strikezinssatz  $K$  und Notional normiert auf eine Geldeinheit ist zum Zeitpunkt 0 bestimmt durch:*

$$V_{Caplet}(0) = P(0, T_{i+1})(T_{i+1} - T_i) \left( L_i(0)\phi(d_1) - K\phi(d_2) \right), \quad (2.4)$$

mit  $d_1$  und  $d_2$ :

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{L_i(0)}{K} \pm \frac{1}{2} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt}{\sqrt{\int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt}}.$$

Es bezeichne  $\phi(t)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

*Beweis:* Zum Zeitpunkt  $T_{i+1}$  besitzt das Caplet nach Formel (1.2) den Wert<sup>3</sup>

$$V_{Caplet}(T_{i+1}) = \left( (T_{i+1} - T_i) (L_i(T_i) - K) \right)^+.$$

Nun ist der Wert des Caplets im Zeitpunkt 0 zu bestimmen. Hierzu wird die Bewertungsformel  $V(0) = N(0) \mathbb{E}^{P^N} \left[ \frac{V(t)}{N(t)} \right]$  verwendet, wobei das Numéraire gegeben sei durch  $N(t) = P(t, T_{i+1})$  und damit als Maß das zugehörige  $T_{i+1}$ –Forward Maß verwendet wird.

Wir erhalten auf diese Weise für den Wert des Caplets in 0:

$$V_{Caplet}(0) = P(0, T_{i+1}) \mathbb{E}^{P^{T_{i+1}}} \left[ \frac{(T_{i+1} - T_i) (L_i(T_i) - K)^+}{P(T_{i+1}, T_{i+1})} \right],$$

Da  $P(T_{i+1}, T_{i+1}) = 1$  gilt, müssen wir den Erwartungswert  $\mathbb{E}^{P^{T_{i+1}}} \left[ (L_i(T_i) - K)^+ \right]$  bestimmen. Für die LIBOR–Rate  $L_i(t)$  ist die Dynamik unter  $P^{T_{i+1}}$  gegeben durch:

$$dL_i(t) = L_i(t) \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t),$$

wobei  $W_i^{P^{T_{i+1}}}$  eine Brownsche Bewegung unter dem Forward Maß  $P^{T_{i+1}}$  bezeichnet. Mit der Itô–Formel erhält man zunächst die Dynamik von  $\log(L_i(t))$ :

$$\begin{aligned} d\log(L_i(t)) &= \frac{\partial \log(L_i(t))}{\partial L} dL_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log(L_i(t))}{\partial L^2} d[L_i]_t \\ &= \frac{1}{L_i(t)} dL_i(t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{L_i(t)^2} \right) d[L_i]_t \\ &= \frac{1}{L_i(t)} \sigma_i(t) L_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{L_i(t)^2} \sigma_i(t)^2 L_i(t)^2 \underbrace{d \left[ W_i^{P^{T_{i+1}}} \right]_t}_{=dt} \\ &= \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) - \frac{1}{2} \sigma_i(t)^2 dt. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Als Notation wird verwendet:  $x^+ = \max(x, 0)$ .

Integriert man beide Seiten der obigen Gleichung von 0 bis  $T_i$  und stellt nach  $L_i(T_i)$  um, so ergibt sich:

$$L_i(T_i) = L_i(0) \exp \left( \underbrace{\int_0^{T_i} \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt}_{=:X} \right).$$

Da sich  $X$  als Itô–Integral über die deterministische Funktion  $\sigma_i(t)$  schreibt und das zweite Integral deterministisch ist, folgt, dass  $X$  eine normalverteilte Zufallsgröße ist. Der Erwartungswert ergibt sich als:

$$m = \mathbb{E}[X] = \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^{T_i} \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \right]}_{\stackrel{=0}{\text{da Martingal}}} - \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt \right] = -\frac{1}{2} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt,$$

und die Varianz bestimmt sich zu:

$$\begin{aligned} v^2 = \text{Var}[X] &= \text{Var} \left[ \int_0^{T_i} \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \right] - \underbrace{\text{Var} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt \right]}_{=0} \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^{T_i} \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \right)^2 \right] - \underbrace{\mathbb{E} \left[ \int_0^{T_i} \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \right]}_{\stackrel{=0}{\text{da Martingal}}}^2 \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt. \end{aligned}$$

(\*) gilt aufgrund der Itô–Isometrie, da  $\mathbb{E}[(\int_0^t f(s) dW_s)^2] = \int_0^t f(s)^2 ds$  für deterministische Funktionen erfüllt ist. Daher folgt, dass  $L_i(T_i)$  entsprechend lognormal verteilt ist. Wir schreiben  $L_i(T_i) = L_i(0) \exp(m + vY)$  wobei  $Y$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ –verteilte Zufallsvariable ist.

So kann nun  $\mathbb{E}^{P^{T_{i+1}}}[(L_i(T_i) - K)^+]$  bestimmt werden. Für  $(L_i(0) \exp(m + vy) - K)^+$  gilt die Äquivalenz:

$$L_i(0) \exp(m + vy) - K > 0 \Leftrightarrow y > \frac{-\log \frac{L_i(0)}{K} - m}{v}. \quad (2.5)$$

Definiere  $\bar{y} = \frac{-\log \frac{L_i(0)}{K} - m}{v}$  und sei  $f_{\mathcal{N}(0,1)}(y)$  die Dichte bzw.  $\phi(t)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Man erhält so für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^{T_{i+1}}}[(L_i(T_i) - K)^+] &= \mathbb{E}^{P^{T_{i+1}}}[(L_i(0)e^{m+vy} - K)^+] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (L_i(0)e^{m+vy} - K)^+ f_{\mathcal{N}(0,1)}(y) dy \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \int_{\bar{y}}^{+\infty} (L_i(0)e^{m+vy} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= L_i(0) \int_{\bar{y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-v)^2 + m + \frac{1}{2}v^2} dy - K \int_{\bar{y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
 &= L_i(0) \underbrace{e^{m + \frac{1}{2}v^2}}_{=1} \underbrace{\int_{\bar{y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-v)^2} dy}_{=1-\phi(\bar{y}-v)=\phi(-\bar{y}+v)} - K \underbrace{\int_{\bar{y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{=1-\phi(\bar{y})=\phi(-\bar{y})} \\
 &= L_i(0) \phi(-\bar{y} + v) - K \phi(-\bar{y}).
 \end{aligned}$$

Wählt man  $d_1 = -\bar{y} + v$  und  $d_2 = -\bar{y}$ , so ergibt sich durch Einsetzen der Definitionen von  $\bar{y}$ ,  $m$  und  $v$  die Behauptung.  $\square$

Mit der obigen Formel kann der Preis eines Caplets analytisch bestimmt werden. Um auch den Preis für einen Cap zu erhalten, werden die Preise der einzelnen Caplets, aus denen der Cap besteht, aufsummiert. Ein analoges Vorgehen führt zu Preisen für Floorlets bzw. durch Aufsummieren gleichermaßen zu Preisen für Floors.

Analog zur obigen „Black 76“ Formel gibt es auch eine Black–Formel für Swaptions. Das folgende Resultat wird ohne Beweis angegeben. Für genauere Betrachtungen siehe [BM06].

**Satz 2.2** (Black’s Formel für Swaptions). *Es sei eine Tenorstruktur  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N \leq T^*$  gegeben. Weiter seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq \alpha < \beta \leq N$  gegeben, so dass  $T_\alpha$  das erste Fixing–Date und  $T_{\alpha+1}$  das erste Payment–Date darstellen. Der Zeitpunkt  $T_\beta$  bezeichnet das letzte Payment–Date. Für den Preis einer Payer–Swaption mit Swap–Rate  $S_{\alpha,\beta}(\cdot)$ , Strikezinssatz  $K$  und einem Nominal 1, gilt zum Zeitpunkt 0:*

$$V_{Swaption}(0) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} P(0, T_{i+1}) \delta_i \left( S_{\alpha,\beta}(0) \phi(d_1) - K \phi(d_2) \right), \quad (2.6)$$

mit  $d_1$  und  $d_2$ :

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S_{\alpha,\beta}(0)}{K} \pm \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha,\beta}^{SM})^2 T_\alpha}{\sigma_{\alpha,\beta}^{SM} \sqrt{T_\alpha}}.$$

Außerdem bezeichne  $\sigma_{\alpha,\beta}^{SM}$  die am Markt quotierte Swaption–Volatilität, sowie  $\phi(t)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Swap–Rate  $S_{\alpha,\beta}(0)$  ist nach (1.5) gegeben durch:

$$S_{\alpha,\beta}(0) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} P(0, T_{i+1}) \delta_i}.$$

**Bemerkung 2.3.** *Da in die analytische Formel (2.4) und implizit in (2.6) nur die LIBOR–Raten  $L_i(0) = L(0, T_i, T_{i+1})$  eingehen und diese — auch für den Fall, dass  $T_i$  und  $T_{i+1}$  nicht auf der Tenorstruktur liegen — zum Zeitpunkt 0 gegeben sind, werden die obigen Formeln als Referenzwert dienen, wenn es um die Bewertung von zeitlich verschobenen Caps und Swaptions mit Hilfe von interpolierten LIBOR–Raten geht.*

Nun gehen wir zurück zur Beschreibung des LIBOR–Markt–Modells unter  $N - 1$  stochastischen Differentialgleichungen. Das Ziel besteht darin, alle  $N - 1$  Differentialgleichungen, also den Ausdruck (2.3), unter einem einheitlichen Maß zu betrachten. Die üblichen Maße, die zu dieser Betrachtung herangezogen werden, sind das Terminal–Measure und das Spot–Measure. Diese sollen zunächst eingeführt werden.

### Das Terminal–Measure und das Spot–Measure

Das sogenannte Terminal–Measure bezeichnet im Kontext des LIBOR–Markt–Modells bei einer vorgegebenen Tenorstruktur  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N$  das  $T_N$ –Forward Maß  $P^{T_N}$ . Es ist das äquivalente Martingalmaß zu dem Numéraire  $N(t) = P(t, T_N)$ . Die Bezeichnung Terminal–Measure wird also verwendet, da  $T_N$  der letzte Zeitpunkt auf der Tenorstruktur ist. Alle in Einheiten des Numéraires ausgedrückten Preisprozesse besitzen somit die Martingaleigenschaft unter dem Terminal–Measure.

Das Spot–Measure dagegen ist das äquivalente Martingalmaß zu dem Numéraire, das als Roll–over–Bankkonto definiert wird. Es sei im Folgenden mit  $Q$  bezeichnet.

Wir wollen jetzt die Dynamik der LIBOR–Raten unter dem Terminal–Measure betrachten. Für den Beweis dieser Darstellung ist der Satz von Girsanov wesentlich, welcher nun präsentiert wird. Auf den Beweis des Satzes wird an dieser Stelle jedoch verzichtet. Er kann unter Verwendung von  $n$ –dimensionalen Prozessen nachgelesen werden in [Pau10].

**Satz 2.4** (Satz von Girsanov). *Es sei  $P_2$  ein zu  $P_1$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ . Die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sei die von der Brownschen Bewegung  $(W_t)_{t \geq 0}$  erzeugte vollständige Filtration. Dann existiert ein previsibler Prozess  $(H_t)_{t \geq 0}$  mit*

$$L_t = \frac{dP_2}{dP_1} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( \int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds \right).$$

Außerdem ist der Prozess  $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ , definiert durch

$$\bar{W}_t = W_t - \int_0^t H_s ds,$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P_2$ .

Ist umgekehrt für einen reellwertigen previsiblen Prozess  $(H_t)_{t \geq 0}$  der Prozess

$$L_t = \exp \left( \int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds \right)$$

ein gleichgradig integrierbares Martingal bezüglich  $P_1$ , so kann ein zu  $P_1$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_2$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  definiert werden durch  $\frac{dP_2}{dP_1} \Big|_{\mathcal{F}_\infty} = L_\infty$ . Außerdem ist auch in diesem Fall der Prozess, definiert durch

$$\bar{W}_t = W_t - \int_0^t H_s ds,$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_2$ .

Jetzt sind die Vorbereitungen abgeschlossen, um die Dynamik der LIBOR–Raten unter dem Terminal–Measure herzuleiten. An dieser Stelle sei betont, dass der Drifterm nur unter dem natürlichen Forward Maß verschwindet. Wechselt man zu einem anderen Maß, so muss der Drifterm berücksichtigt und neu bestimmt werden. Der folgende Satz zeigt die Darstellung unter dem Terminal–Measure, vgl. [PA10b] oder [BM06].

**Satz 2.5** (Die LIBOR–Dynamik unter dem Terminal–Measure). *Es sei die Tenorstruktur  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N \leq T^*$  vorgegeben. Unter dem Terminal–Measure  $P^{T_N}$  ist die Dynamik der LIBOR–Raten für  $0 \leq t \leq T_i$  gegeben durch:*

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_N}}(t) - \sigma_i(t) \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} dt \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1. \quad (2.7)$$

wobei  $W_1^{P^{T_N}}(t), \dots, W_{N-1}^{P^{T_N}}(t)$  Brownsche Bewegungen unter  $P^{T_N}$  sind und  $(\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,N-1}$  die Korrelationsmatrix bezeichnet. Die deterministische Volatilität ist wie üblich mit  $\sigma_i(t)$  bezeichnet und die Abstände auf der Tenorstruktur mit  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$ .

*Beweis:* Die Idee des Beweises besteht darin, in einem ersten Schritt, ausgehend von der Dynamik für  $L_i(t) = L(t, T_i, T_{i+1})$  unter dem natürlichen Forward Maß  $P^{T_{i+1}}$ , die Formel (2.7) für den Maßwechsel von  $P^{T_{i+1}}$  nach  $P^{T_{i+2}}$  zu zeigen.

Unter dem natürlichen Forward Maß  $P^{T_{i+1}}$  ist die Dynamik für  $L_i(t)$  gegeben durch

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1.$$

Bei dem durchzuführenden Numéraire–Wechsel ist die Radon–Nikodym Dichte zur Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P^{T_{i+2}}$  mit  $t \leq T_{i+1}$  nach [BM06] „The Change–of–Numeraire Technique“ gegeben durch

$$\frac{dP^{T_{i+2}}}{dP^{T_{i+1}}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t, T_{i+2})P(0, T_{i+1})}{P(0, T_{i+2})P(t, T_{i+1})} := \frac{1}{Z_t}.$$

Wegen

$$\frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_{i+2})} = 1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(t),$$

können wir  $Z_t$  auch schreiben als:

$$Z_t = \frac{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(t)}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(0)} \quad \text{für } t \leq T_{i+1}.$$

Da  $L_{i+1}(t)$  unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^{T_{i+2}}$  die Martingaleigenschaft besitzt, ist auch  $Z_t$  ein (positives) Martingal unter dem Maß  $P^{T_{i+2}}$ . Wir wollen die Dynamik von  $Z_t$  betrachten. Diese ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} dZ_t &= d\left(\frac{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(t)}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(0)}\right) = \frac{\delta_{i+1}}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(0)}dL_{i+1}(t) \\ &= \frac{\delta_{i+1}}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(0)}\sigma_{i+1}(t)L_{i+1}(t)dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(t) \\ &= \underbrace{\frac{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(t)}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(0)}}_{=Z_t} \underbrace{\frac{\delta_{i+1}\sigma_{i+1}(t)L_{i+1}(t)}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(t)}}_{:=X_{i+1}(t)}dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(t). \end{aligned}$$

Wir wollen  $Z_t$  als Lösung der stochastischen Differentialgleichung schreiben. Beispielsweise nach [Pau10] erhalten wir für  $dZ_t = Z_t X_{i+1}(t)dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(t)$  mit der Martingaleigenschaft und  $Z_0 = 1$  ein exponentielles Martingal der folgenden Form:

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t X_{i+1}(u)dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t X_{i+1}(u)^2 du\right). \quad (2.8)$$

Beziehungsweise für  $\frac{1}{Z_t}$  gilt entsprechend

$$\frac{1}{Z_t} = \exp\left(-\int_0^t X_{i+1}(u)dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(u) + \frac{1}{2} \int_0^t X_{i+1}(u)^2 du\right). \quad (2.9)$$

Nun muss jedoch  $W_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}$  keine Brownsche Bewegung mehr unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^{T_{i+1}}$  sein. Wir verwenden den Satz von Girsanov 2.4 unter zusätzlicher Berücksichtigung der Korrelation, so dass

$$W_{i+1}^{P^{T_{i+1}}}(t) = W_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(t) - \rho_{i+1,i+1} \int_0^t X_{i+1}(u) du \quad (2.10)$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich  $P^{T_{i+1}}$  ist. Die Korrelation  $\rho_{i+1,i+1}$  ergibt sich aus der Korrelation der Brownschen Bewegungen aus den Gleichungen (2.8) und (2.10). Es muss  $d[W_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}, W_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}]_t = \rho_{i+1,i+1} dt$  gelten, so dass aus  $d[W_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}, W_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}]_t = dt$  bereits  $\rho_{i+1,i+1} = 1$  folgt. Wir schreiben (2.10) in der Form:

$$dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(t) = dW_{i+1}^{P^{T_{i+1}}}(t) + X_{i+1}(t) dt.$$

Setzt man dies in die Gleichung (2.9) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_t} &= \exp \left( - \int_0^t X_{i+1}(u) dW_{i+1}^{P^{T_{i+2}}}(u) + \frac{1}{2} \int_0^t X_{i+1}(u)^2 du \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^t X_{i+1}(u) \left( dW_{i+1}^{P^{T_{i+1}}}(u) + X_{i+1}(u) du \right) + \frac{1}{2} \int_0^t X_{i+1}(u)^2 du \right) \\ &= \exp \left( \int_0^t -X_{i+1}(u) dW_{i+1}^{P^{T_{i+1}}}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t X_{i+1}(u)^2 du \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

So hat  $\frac{1}{Z_t}$  wieder eine Darstellung als Exponentialmartingal und es folgt mit dem Satz von Girsanov, angewendet auf die Radon–Nikodym–Dichte

$$\frac{dP^{T_{i+2}}}{dP^{T_{i+1}}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{1}{Z_t},$$

dass die  $i$ –te Brownsche Bewegung unter dem Maß  $P^{T_{i+2}}$  aus der Brownschen Bewegung unter  $P^{T_{i+1}}$  hervorgeht durch:

$$W_i^{P^{T_{i+2}}}(t) = W_i^{P^{T_{i+1}}}(t) - \rho_{i,i+1} \int_0^t -X_{i+1}(u) du, \quad (2.12)$$

wobei die Korrelation  $\rho_{i,i+1}$  gegeben ist über die Korrelation der Brownschen Bewegungen  $W_i^{P^{T_{i+1}}}(t)$  aus (2.12) und  $W_{i+1}^{P^{T_{i+1}}}(t)$  aus (2.11), genauer durch:

$$d[W_i^{P^{T_{i+1}}}, W_{i+1}^{P^{T_{i+1}}}]_t = \rho_{i,i+1} dt.$$

Aus (2.12) erhalten wir die Beziehung:

$$dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) = dW_i^{P^{T_{i+2}}}(t) - \rho_{i,i+1} X_{i+1}(t) dt. \quad (2.13)$$

Jetzt wissen wir, wie die  $i$ –te Brownsche Bewegung  $W_i^{P^{T_{i+1}}}(t)$  unter dem Maß  $P^{T_{i+1}}$  beschrieben werden kann, nämlich durch die entsprechende  $i$ –te Brownsche Bewegung  $W_i^{P^{T_{i+2}}}(t)$  unter dem Maß  $P^{T_{i+2}}$ . Setzen wir dies schließlich in die Ausgangsdynamik von  $L_i(t)$  ein, so erhalten wir die Dynamik von  $L_i(t)$  statt unter dem natürlichen Forward Maß  $P^{T_{i+1}}$  jetzt unter  $P^{T_{i+2}}$ :

$$\begin{aligned} dL_i(t) &= \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \\ &= \sigma_i(t)L_i(t) \left( dW_i^{P^{T_{i+2}}}(t) - \rho_{i,i+1}X_{i+1}(t)dt \right) \\ &= \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{P^{T_{i+2}}}(t) - \sigma_i(t)L_i(t)\rho_{i,i+1}X_{i+1}(t)dt \\ &= \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{P^{T_{i+2}}}(t) - \sigma_i(t)L_i(t)\frac{\delta_{i+1}\sigma_{i+1}(t)L_{i+1}(t)}{1 + \delta_{i+1}L_{i+1}(t)}\rho_{i,i+1}dt. \end{aligned}$$

In weiteren Schritten kann dieses Verfahren gemäß [PA10b] iterativ fortgeführt werden, um letztendlich zur gewünschten Darstellung unter dem Terminal–Measure zu gelangen. Aus der Gleichung (2.13) können wir folgern:

$$\begin{aligned} dW_i^{P^{T_N}}(t) &= dW_i^{P^{T_{N-1}}}(t) + \rho_{i,N-1}X_{N-1}(t)dt \\ &= dW_i^{P^{T_{N-2}}}(t) + \rho_{i,N-2}X_{N-2}(t)dt + \rho_{i,N-1}X_{N-1}(t)dt \\ &= dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) + \rho_{i,i+1}X_{i+1}(t)dt + \cdots + \rho_{i,N-2}X_{N-2}(t)dt + \rho_{i,N-1}X_{N-1}(t)dt \\ &= dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) + \sum_{k=i+1}^{N-1} \rho_{i,k}X_k(t)dt. \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt:

$$dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) = dW_i^{P^{T_N}}(t) - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k\sigma_k(t)L_k(t)}{1 + \delta_kL_k(t)}\rho_{i,k}dt.$$

Setzt man dies wiederum in die Ausgangsdynamik von  $L_i(t)$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} dL_i(t) &= \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{P^{T_{i+1}}}(t) \\ &= \sigma_i(t)L_i(t) \left( dW_i^{P^{T_N}}(t) - \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k\sigma_k(t)L_k(t)}{1 + \delta_kL_k(t)}\rho_{i,k}dt \right) \\ &= \sigma_i(t)L_i(t)dW_i^{P^{T_N}}(t) - \sigma_i(t)L_i(t)\sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k\sigma_k(t)L_k(t)}{1 + \delta_kL_k(t)}\rho_{i,k}dt, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Ähnlich kann man auch die Dynamik unter dem Spot–Measure herleiten. Man erhält dann die folgende Aussage:

**Satz 2.6** (Die LIBOR–Dynamik unter dem Spot–Measure). *Es sei die Tenorstruktur  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N \leq T^*$  vorgegeben. Unter dem Spot–Measure  $Q$  ist die Dynamik der LIBOR–Raten für  $0 \leq t \leq T_i$  gegeben durch:*

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \sigma_i(t)dW_i^Q(t) + \sigma_i(t) \sum_{k=\eta(t)}^i \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} dt \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1, \quad (2.14)$$

wobei  $W_1^Q(t), \dots, W_{N-1}^Q(t)$  Brownsche Bewegungen unter  $Q$  sind und die Korrelationsmatrix durch  $(\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,N-1}$  gegeben ist. Weiter ist  $\eta(t)$  nach (2.1) definiert durch  $\eta(t) := \max \{i \in \{1, \dots, N\} \mid T_{i-1} < t\}$ .

## 2.2 Kalibrierung des Modells

In dem folgenden Unterkapitel wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie das LIBOR–Markt–Modell an gegebene Marktdaten kalibriert werden kann. Unter einer Modellkalibrierung versteht man eine Anpassung der freien Parameter, so dass man die am Markt zu beobachteten Preise möglichst genau mit dem Modell trifft. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten zur Kalibrierung des LIBOR–Markt–Modells an Marktdaten. Eine sehr ausführliche Darstellung einiger Ansätze findet sich in [BM06]. In einem ersten Schritt wollen wir eine Formel zur Kalibrierung an Caps und einen Ansatz zur Kalibrierung an Swaptions vorstellen. Da für die Praxis eine simultane Kalibrierung an Caps und Swaptions von großer Wichtigkeit ist, wollen wir anschließend diese Möglichkeit der Kalibrierung anhand eines Artikels von Schoenmakers und Coffey, vgl. [SC00], vorstellen.

Es sei die Dynamik der LIBOR–Raten unter dem Terminal–Measure vorausgesetzt. Aus der Darstellung (2.7) wird deutlich, welche freien Parameter für das Modell noch bestimmt werden müssen, um eine Bewertung durchzuführen. Bei der Kalibrierung des Modells sind die Volatilitätsfunktionen  $\sigma_i(t)$  und auch die Einträge der Korrelationsmatrix  $\rho_{i,j}$  für  $i, j = 1, \dots, N-1$  so zu bestimmen, dass das Modell die Marktdaten möglichst genau abbildet. Um den Ausdruck der „möglichst genauen Anpassung“ des Modells zu spezifizieren, wird zuvor ein Maß für die Güte der Anpassung festgelegt. So wird zumeist die mittlere quadratische Abweichung von Markt– und Modellpreisen minimiert.

Das Ziel der Kalibrierung nach Schoenmakers und Coffey ist es, das Modell zugleich an Caps und Swaptions zu kalibrieren, da exotische Optionen z.B. nicht nur von den

Cap–Preisen, sondern zusätzlich auch von den Swaption–Preisen abhängen können. An dieser Stelle sei jedoch bemerkt, dass Cap– und Swaption–Märkte keinesfalls konsistent zueinander sind. Ein weiterer Aspekt, der für die Kalibrierung nach Schoenmakers und Coffey spricht, ist die Robustheit der Kalibrierung bei sich ändernden Marktdaten.

Wir wollen nun die Idee des Ansatzes von Schoenmakers und Coffey vorstellen, um eine in der Praxis notwendige simultane Kalibrierung des Modells an Caps und Swaptions durchzuführen. Da wir das Standard LIBOR–Markt–Modell (also ohne Smile–Effekte) betrachten, soll die Kalibrierung jeweils an „at the money“ Caps und Swaptions erfolgen. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Formel von Rebonato. Diese Approximation soll nun als erstes hergeleitet werden. Die Ausführungen orientieren sich an [BM06].

Sei  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq \alpha < \beta \leq N$  wie im Satz 2.2, so dass  $T_\alpha$  das erste Fixing–Date,  $T_{\alpha+1}$  das erste und  $T_\beta$  das letzte Payment–Date darstellen. Dann kann zur Kalibrierung des LIBOR–Markt–Modells die am Markt quotierte Swaption–Volatilität nach Rebonato approximiert werden durch:

$$(\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}})^2 \approx \sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \left( \frac{\omega_i(0)\omega_j(0)L_i(0)L_j(0)\rho_{i,j}}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \right), \quad (2.15)$$

wobei  $S_{\alpha,\beta}(\cdot)$  die Swap–Rate ist und die Gewichte  $\omega_i(\cdot)$  gegeben sind durch:

$$\omega_i(t) = \frac{\delta_i \prod_{k=\alpha}^i (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}}{\sum_{n=\alpha}^{\beta-1} (\delta_n \prod_{k=\alpha}^n (1 + \delta_k L_k(t))^{-1})}.$$

Um die Approximation (2.15) zu zeigen, schreiben wir die Swap–Rate  $S_{\alpha,\beta}(t)$  zunächst für  $t \leq T_\alpha$  als eine gewichtete Summe von LIBOR–Raten:

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(t) &= \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{n=\alpha}^{\beta-1} \delta_n P(t, T_{n+1})} \\ &= \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \delta_i L_i(t) P(t, T_{i+1})}{\sum_{n=\alpha}^{\beta-1} \delta_n P(t, T_{n+1})} \\ &= \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \delta_i L_i(t) \frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_\alpha)}}{\sum_{n=\alpha}^{\beta-1} \delta_n \frac{P(t, T_{n+1})}{P(t, T_\alpha)}} \\ &= \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} L_i(t) \delta_i \prod_{k=\alpha}^i (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}}{\sum_{n=\alpha}^{\beta-1} \delta_n \prod_{k=\alpha}^n (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(t) L_i(t),$$

mit

$$\omega_i(t) = \frac{\delta_i \prod_{k=\alpha}^i (1 + \delta_k L_k(t))^{-1}}{\sum_{n=\alpha}^{\beta-1} (\delta_n \prod_{k=\alpha}^n (1 + \delta_k L_k(t))^{-1})}.$$

Hierbei folgen die ersten zwei Zeilen der Gleichungskette aus der Definition der Swap–Rate, vgl. Formel (1.5). In der dritten Zeile wurde erweitert, woraufhin in der vierten Gleichung die Beziehung zwischen LIBOR–Rate und Zerobond genutzt wurde, genauer

$$\frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_i)} = \frac{1}{1 + \delta_i L_i(t)}.$$

Der erste Schritt bei der Approximation lautet:

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(t) L_i(t) \approx \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(0) L_i(t),$$

es werden also die Gewichte  $\omega_i(t)$  durch ihre Ausgangswerte zum Zeitpunkt 0 ersetzt (Freezing). Mit der Dynamik für die LIBOR–Raten ergibt sich nun

$$dS_{\alpha, \beta}(t) \approx \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(0) dL_i(t) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(0) \sigma_i(t) L_i(t) dW_i(t) + (\dots) dt.$$

Dies gilt für ein beliebiges äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit entsprechendem Driftterm  $(\dots) dt$ . Da wir im Folgenden nur an der quadratischen Variation interessiert sind, muss der Driftterm nicht weiter spezifiziert werden, da  $dt dt = 0$  und  $dt dW_t = 0$  gilt. Die quadratische Variation ist dann wegen  $d[W_i, W_j]_t = \rho_{i,j} dt$  gegeben durch:

$$d[S_{\alpha, \beta}]_t \approx \sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(0) \omega_j(0) \sigma_i(t) \sigma_j(t) L_i(t) L_j(t) \rho_{i,j} dt. \quad (2.16)$$

Andererseits hat man in dem Modell für Swaptions unter dem Forward–Swap Maß  $P^{\alpha, \beta}$  mit der Swaption–Volatilität  $\sigma_{\alpha, \beta}(t)$  den Ansatz:

$$dS_{\alpha, \beta}(t) = \sigma_{\alpha, \beta}(t) S_{\alpha, \beta}(t) dW^{P^{\alpha, \beta}}(t).$$

Auch hier kann man die quadratische Variation bestimmen. Es ergibt sich:

$$d[S_{\alpha, \beta}]_t = \sigma_{\alpha, \beta}(t)^2 S_{\alpha, \beta}(t)^2 dt. \quad (2.17)$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (2.16) und (2.17) für die quadratischen Variationen erhält man die Gleichung:

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t)^2 S_{\alpha,\beta}(t)^2 dt = \sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(0) \omega_j(0) \sigma_i(t) \sigma_j(t) L_i(t) L_j(t) \rho_{i,j} dt.$$

Ersetzt man in einem weiteren Approximationsschritt noch die in der Formel enthaltenen LIBOR–Raten sowie die Swap–Rate durch ihre Anfangswerte (erneutes Freezing) und benutzt die Integrationsschreibweise mit  $(\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}})^2 = \frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} \sigma_{\alpha,\beta}(t)^2 dt$ , so gelangt man zu:

$$\begin{aligned} T_\alpha (\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}})^2 &\approx \int_0^{T_\alpha} \frac{\sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \omega_i(0) \omega_j(0) \sigma_i(t) \sigma_j(t) L_i(0) L_j(0) \rho_{i,j}}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} dt \\ \Leftrightarrow (\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}})^2 &\approx \sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \left( \frac{\omega_i(0) \omega_j(0) L_i(0) L_j(0) \rho_{i,j}}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t) \sigma_j(t) dt \right). \end{aligned}$$

Dies ist die in (2.15) behauptete Approximation von Rebonato.

Mit der obigen Formel ist es möglich das LIBOR–Markt–Modell an Swaptions zu kalibrieren. Um es andererseits an Caps (bzw. genauer an die einzelnen Caplets) zu kalibrieren, hat man die folgende Bedingung zu erfüllen. Wie auch im Beweis von Satz 2.1 gezeigt wurde, ist  $\log(L_i(T_i))$  unter seinem natürlichen Forward Maß  $P^{T_{i+1}}$  normalverteilt, wobei die Varianz gegeben ist durch  $\int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt$ . Am Markt werden wegen der 1:1–Beziehung zwischen Volatilität und Preis die Cap–Volatilitäten quotiert. Über das sogenannte „Cap–to–Caplet–Stripping“ erhält man die Caplet–Volatilitäten  $\sigma_i^{\text{CM}}$ . Die Bedingung zur Kalibrierung des Modells an den Caplet–Markt ergibt sich zu:

$$(\sigma_i^{\text{CM}})^2 = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt. \quad (2.18)$$

Da in der Gleichung (2.18) keine Korrelation steht, sind die Caplet–Preise nicht korrelationsensensitiv. Bei einer alleinigen Kalibrierung an Caps würde man also nicht auf die Einträge der Korrelationsmatrix schließen können. Die Idee bei dem Vorgehen von Schoenmakers und Coffey in ihrem Artikel [SC00] ist nun, dass man die Bedingung zur Kalibrierung an Caps mit der Bedingung zur Kalibrierung an Swaptions vereint.

In einem ersten Schritt geben wir uns funktionale Formen für die Volatilitätsfunktion  $\sigma_i(t)$  und für die Einträge  $\rho_{i,j}$  der Korrelationsmatrix vor. Für die Volatilitätsfunktion würde man im einfachsten Fall die Volatilität als konstante Funktion  $\sigma_i(t) = \sigma_i^{\text{CM}}$  voraussetzen. Dies erweist sich allerdings in den meisten Fällen als unzureichend und ökonomisch

nicht zweckmäßig, sodass man in der Praxis häufig die folgende Form verwendet:

$$\sigma_i(t) = \varphi_i [(a(T_i - t) + d) \exp(-b(T_i - t)) + c]. \quad (2.19)$$

Am Markt wird ein sogenannter „Hump“, also ein Buckel, in der Volatilitätsstruktur beobachtet. Die Volatilität steigt bis zu einem Maximum, das bei einer Fälligkeit von etwa 2-3 Jahren liegt, an und fällt mit weiter zunehmender Fälligkeit ab. Geht man von dem Ansatz (2.19) aus, so kann man diese Hump-Eigenschaft der Volatilitätsstruktur abbilden. Darüber hinaus wird mit (2.19) eine Zeithomogenität der Volatilitätsstruktur erreicht. Ein dritter Vorteil, der für die Verwendung in der Praxis spricht ist, dass man eine analytische Lösung für Integrale der Form  $\int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t) \sigma_j(t) dt$  angeben kann. Für andere Ansätze sei an dieser Stelle auf [BM06] verwiesen.

Für die Korrelationsmatrix  $(\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,N-1}$  sollen die folgenden Eigenschaften erfüllt sein. Das erste notwendige Kriterium ist, dass die Matrix positiv semidefinit ist, d.h. die Eigenwerte der Korrelationsmatrix dürfen nicht negativ sein. Außerdem werden negative Korrelationen ausgeschlossen, also  $\rho_{i,j} \geq 0$  für alle  $i, j = 1, \dots, N - 1$ . Optional kann man darüber hinaus noch fordern, dass die Korrelationen umso geringer sind, je größer der Abstand der zu den Brownschen Bewegungen gehörigen Raten ist. Genauer ist dann  $\rho_{i,j}$ , als Funktion von  $i$  betrachtet, fallend für  $i \geq j$ . Zuletzt kann optional angenommen werden, dass benachbarte Raten, und damit ihre zugehörigen Brownschen Bewegungen, umso korrelierter sind, je weiter man in der Zeit voranschreitet. Dies würde bedeuten, dass für ein festes  $p$  die Werte  $\rho_{i+p,i}$ , betrachtet als Funktion in  $i$ , wachsend sind in  $i$ . Ein Beispiel für eine funktionale Form der Korrelationen ist:

$$\rho_{i,j}(\gamma, \rho_\infty) = \exp\left(-\frac{|i-j|}{(N-1)-1} \left(-\log(\rho_\infty) + \gamma \frac{(N-1)-1-i-j}{(N-1)-2}\right)\right). \quad (2.20)$$

Wir schreiben nun (2.19) in folgender Form:

$$\sigma_i(t) = \varphi_i g_{a,b,c,d}(T_i - t) \quad \text{mit} \quad g_{a,b,c,d}(s) := (as + d) \exp(-bs) + c. \quad (2.21)$$

Setzt man die obige funktionale Form der Volatilität in (2.18) ein, so erhält man:

$$(\sigma_i^{\text{CM}})^2 = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \sigma_i(t)^2 dt = \frac{\varphi_i^2}{T_i} \int_0^{T_i} g_{a,b,c,d}(T_i - t)^2 dt. \quad (2.22)$$

Jetzt folgt der entscheidende Schritt nach [SC00], bei dem wir die Caplet–Bedingung in die Swaption–Bedingung (2.15) einfließen lassen. Hierzu wird definiert:

$$\begin{aligned}
\theta_{i,j,\alpha}^{a,b,c,d} &:= \frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} \frac{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}{\sigma_i^{\text{CM}}\sigma_j^{\text{CM}}} dt \\
&= \frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} \frac{\varphi_i g_{a,b,c,d}(T_i - t) \varphi_j g_{a,b,c,d}(T_j - t)}{\sigma_i^{\text{CM}}\sigma_j^{\text{CM}}} dt \\
&= \frac{1}{T_\alpha} \frac{\varphi_i \varphi_j}{\sigma_i^{\text{CM}}\sigma_j^{\text{CM}}} \int_0^{T_\alpha} g_{a,b,c,d}(T_i - t) g_{a,b,c,d}(T_j - t) dt \\
&\stackrel{(2.22)}{=} \frac{\sqrt{T_i}\sqrt{T_j}}{T_\alpha} \frac{\int_0^{T_\alpha} g_{a,b,c,d}(T_i - t) g_{a,b,c,d}(T_j - t) dt}{\sqrt{\int_0^{T_i} g_{a,b,c,d}(T_i - t)^2 dt} \sqrt{\int_0^{T_j} g_{a,b,c,d}(T_j - t)^2 dt}}.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\theta_{i,j,\alpha}^{a,b,c,d}$  kann analytisch bestimmt werden. Es sei bemerkt, dass sich die Koeffizienten  $\varphi_i$  in der obigen Gleichung herausgekürzt haben. Verwenden wir nun  $\theta_{i,j,\alpha}^{a,b,c,d}$  zusammen mit den funktionalen Formen für die Volatilität (2.19) bzw. (2.21) und die Korrelation (2.20), so definiert man unter Berücksichtigung der Formel von Rebonato (2.15):

$$\sigma_{\alpha,\beta}(a, b, c, d, \gamma, \rho_\infty) := \sqrt{\sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \left( \frac{\omega_i(0)\omega_j(0)L_i(0)L_j(0)}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \rho_{i,j}(\gamma, \rho_\infty) \sigma_i^{\text{CM}}\sigma_j^{\text{CM}} \theta_{i,j,\alpha}^{a,b,c,d} \right)}.$$

Insgesamt erhalten wir mit

$$RMS(a, b, c, d, \gamma, \rho_\infty) := \sqrt{\frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta-2 \leq \beta \leq N} \left( \frac{\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}} - \sigma_{\alpha,\beta}(a, b, c, d, \gamma, \rho_\infty)}{\sigma_{\alpha,\beta}^{\text{SM}}} \right)^2},$$

ein Minimierungsproblem über die Parameter  $a, b, c, d, \gamma, \rho_\infty$  der folgenden Art:

$$\min_{a,b,c,d,\gamma,\rho_\infty} RMS(a, b, c, d, \gamma, \rho_\infty). \quad (2.23)$$

Haben wir schließlich die Parameter  $a, b, c, d, \gamma, \rho_\infty$  über das Minimierungsproblem (2.23) festgelegt, so werden zuletzt die Koeffizienten  $\varphi_i$  über die Gleichung (2.22) bestimmt. Somit ist das LIBOR–Markt–Modell gleichzeitig an Caps und Swaptions kalibriert, wobei die Caplets sogar exakt getroffen werden.

Bisher wurde das Modell also allgemein aufgestellt und die freien Parameter wurden in der Kalibrierung an die entsprechenden Marktwerte für Caps und Swaptions angepasst. In dem nun folgenden Abschnitt wird die Simulation des Modells erläutert.

## 2.3 Simulation des Modells

Das LIBOR–Markt–Modell wird in erster Linie für die Bewertung sehr komplexer Derivate benutzt. Für die meisten Anwendungen wird die Monte–Carlo–Simulation verwendet. Vor allem stark pfadabhängige Derivate können über diesen Ansatz sehr gut bewertet werden. Für einfache Derivate wird das LIBOR–Markt–Modell in der Regel nicht verwendet.

In diesem Kapitel werden wir zunächst das allgemeine Vorgehen bei der Monte–Carlo–Simulation erläutern. Das Ziel ist dann eine Effizienzsteigerung dieser Simulation. Daher werden wir in einem nächsten Schritt überblicksartig geeignete Verfahren vorgestellt, die die Performance der Simulation entscheidend verbessern. Als Literatur dienen für diesen Abschnitt insbesondere die Bücher [PA10a], [Hul09], [Fri07], [BM06] und [Jäc02], sowie die Artikel [PPVR03] und [Jos03].

Zur Bewertung von Caplets und Swaptions wurden mit den Formeln (2.4) und (2.6) Möglichkeiten aufgezeigt, einfache Derivate mit einer analytischen Formel zu bewerten. Da es aber in den meisten Fällen nicht möglich ist, eine geschlossene Formel anzugeben, wird die Monte–Carlo–Simulation verwendet. Sie basiert auf dem „Starken Gesetz der Großen Zahlen“. Statt den Erwartungswert analytisch zu berechnen, werden zufällige Pfade simuliert und anschließend der Durchschnitt über alle diese Realisationen gebildet.

Um mit den in Abschnitt 2.2 festgelegten Paramtern jetzt eine Monte–Carlo–Simulation durchführen zu können, müssen wir zunächst eine Diskretisierung der stochastischen Differentialgleichung vornehmen. Dies geschieht z.B. mit dem Euler–Schema, das im Folgenden erörtert wird. Die Darstellung erfolgt gemäß [Fri07] und [Jäc02].

**Definition 2.7** (Euler–Schema). *Es seien  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$  eine stochastische Differentialgleichung und  $t_s$  für  $s = 0, \dots, n$ , die Zeitpunkte der Zeitdiskretisierung, wobei  $0 = t_0 < \dots < t_n$  gelte. Dann ist das Euler–Schema für  $X$  gegeben durch:*

$$\tilde{X}_{t_{s+1}} = \tilde{X}_{t_s} + \mu_{t_s} \Delta t_s + \sigma_{t_s} \Delta W_{t_s}, \quad (2.24)$$

wobei  $\Delta t_s := t_{s+1} - t_s$ , sowie  $\Delta W_{t_s} := W_{t_{s+1}} - W_{t_s}$ .

Alternativen zu dem Euler–Schema aus Definition 2.7 sind zum Beispiel das Milstein–Schema oder das Prädiktor–Korrektor Verfahren, siehe hierzu [Jäc02] und [PPVR03]. Die

Erfahrungen in der Praxis zeigen jedoch, dass das Euler–Schema zusammen mit einer kleinen Schrittweite den besten Kompromiss aus Genauigkeit und Performance liefert. Statt ein komplizierteres Diskretisierungsverfahren zu implementieren, ist es in vielen Fällen effektiver, das im Vergleich relativ einfache Euler–Schema mit kleiner Schrittweite zu wählen und dafür Ansätze zur Faktorreduktion und Varianzreduktion zu implementieren<sup>4</sup>.

Wir wollen die LIBOR–Raten ausgehend von der Dynamik unter dem Terminal–Measure simulieren. Um Fehler zu vermeiden, wendet man das in Definition 2.7 vorgestellte Schema nicht direkt auf die LIBOR–Raten an, sondern auf die log–LIBOR–Raten unter dem Terminal–Measure. Diese erhält man mit Hilfe der Itô–Formel wie folgt:

$$\begin{aligned}
d \log(L_i(t)) &= \frac{\partial \log(L_i(t))}{\partial L} dL_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log(L_i(t))}{\partial L^2} d[L_i]_t \\
&= \frac{1}{L_i(t)} dL_i(t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{L_i(t)^2} \right) d[L_i]_t \\
&= \frac{1}{L_i(t)} \sigma_i(t) L_i(t) dW_i^{P^{T_N}}(t) - \frac{1}{L_i(t)} \sigma_i(t) L_i(t) \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{L_i(t)^2} \sigma_i(t)^2 L_i(t)^2 \underbrace{d[W_i^{P^{T_N}}]_t}_{=dt} \\
&= \sigma_i(t) dW_i^{P^{T_N}}(t) - \left( \sigma_i(t) \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t) L_k(t)}{1 + \delta_k L_k(t)} \rho_{i,k} + \frac{\sigma_i(t)^2}{2} \right) dt.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass die Differenzen  $\Delta W_i^{P^{T_N}}(t_s) = W_i^{P^{T_N}}(t_{s+1}) - W_i^{P^{T_N}}(t_s)$  nach Definition einer Brownschen Bewegung normalverteilt sind unter  $P^{T_N}$ , so ist die Zeitdiskretisierung für  $i = 1, \dots, N-1$  gemäß (2.24) nach Anwendung der Exponentialfunktion gegeben durch:

$$\begin{aligned}
L_i(t_{s+1}) &= L_i(t_s) \exp \left( -\sigma_i(t_s) \sum_{k=i+1}^{N-1} \frac{\delta_k \sigma_k(t_s) L_k(t_s)}{1 + \delta_k L_k(t_s)} \rho_{i,k} (t_{s+1} - t_s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma_i(t_s)^2}{2} (t_{s+1} - t_s) + \sigma_i(t_s) \sqrt{t_{s+1} - t_s} Y_{i,s} \right), \quad (2.25)
\end{aligned}$$

wobei wir  $Y_{1,s}, \dots, Y_{N-1,s}$  für  $s = 0, \dots, n-1$  annehmen als standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Mit (2.25) können wir schrittweise die gewünschten LIBOR–Raten simulieren. Die Diskretisierungszeitpunkte  $t_s$  mit  $0 = t_0 < \dots < t_n$  sind hierbei mindestens so

---

<sup>4</sup>Dies trifft vor allem für Erweiterungen des LIBOR–Markt–Modells zu, die das Smile abbilden, wie etwa stochastische Volatilität. Hier ist ein Schema höherer Ordnung (das Euler–Schema ist ein Schema 1. Ordnung) oft nicht einfach zu berechnen und zu implementieren.

fein gewählt, wie das LIBOR–Grid  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N$ , d.h. es gilt  $n \geq N$ . Die Diskretisierungszeitpunkte werden auch Simulationsgrid genannt.

Für jede LIBOR–Rate werden jeweils  $M$  Realisierungen erzeugt. Ist man nur an der entsprechenden Forward–LIBOR–Rate interessiert, so mittelt man über diese  $M$  Realisationen. Die Monte–Carlo–Simulation dient aber vorrangig der Bewertung von Zinsderivaten. Implementiert man das LIBOR–Markt–Modell, so würde man die Interpolationsansätze, die im nachfolgenden Kapitel 3 vorgestellt werden, in die Simulation integrieren. Die Interpolationen werden dann in jedem der  $M$  Pfade durchgeführt. Schließlich werden die  $M$  Payoffs gemittelt, um eine Bewertung für das Zinsderivat zu erhalten. In Kapitel 4.3 werden auf diese Weise beispielhafte Zinsderivate bewertet.

Um eine hohe Genauigkeit für den simulierten Mittelwert zu erreichen, ist es nötig  $M$  sehr groß zu wählen. Wir wollen zuerst den Standard–Fehler betrachten, der bei einer Monte–Carlo–Simulation entsteht, siehe hierzu auch [BM06] Kapitel 6.11. Zur einfachen Veranschaulichung seien hierzu  $\mu$  der Erwartungswert, der über die Monte–Carlo–Simulation bestimmt werden soll, und  $X_i$  die Realisationen für  $i = 1, \dots, M$ . Die  $X_i$  werden als unabhängig und identisch verteilt angenommen. Dann gilt zunächst für die Varianz des Monte–Carlo Schätzers für den Erwartungswert:

$$\text{Var} \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i - \mu \right] = \frac{1}{M^2} M \text{Var}[X_1] = \frac{\text{Var}[X_1]}{M}.$$

Ist  $\sigma_{X_1}$  die Standardabweichung von  $X_1$ , so ist der Standard–Fehler der Monte–Carlo–Simulation gegeben durch  $\frac{\sigma_{X_1}}{\sqrt{M}}$ . Mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gilt  $2\Phi(z) - 1 = 98\% \Leftrightarrow z \approx 2,33$ . Also ist das 98%–Konfidenzintervall gegeben durch:

$$\left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i - 2,33 \frac{\sigma_{X_1}}{\sqrt{M}}, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i + 2,33 \frac{\sigma_{X_1}}{\sqrt{M}} \right].$$

Um nun die Genauigkeit der Aussage zu erhöhen, d.h. das Konfidenzintervall zu verkleinern, ergibt sich — wie auch in [BM06] oder [Hul09] beschrieben — das Problem, dass bei einer Intervallverkleinerung um den Faktor 10, die Anzahl der Realisationen  $M$  um den Faktor 100 erhöht werden muss. Dieses Vorgehen ist für die Praxis nicht effizient genug, da man  $M$  entsprechend groß wählen muss, um gute Ergebnisse zu erzielen. Aus diesem Grund stellen wir in einem kurzen Überblick ausgewählte Möglichkeiten vor, um die Performance der Simulation entscheidend zu verbessern.

Die erste Möglichkeit zur Steigerung der Performance ist die Durchführung einer Varianzreduktion. Statt  $M$  zu erhöhen, wird hierbei die Varianz und damit ebenfalls der Fehler verringert. Eine Auswahl unterschiedlicher Ansätze zur Varianzreduktion findet sich z.B. in [Jäc02] oder [PA10a]. Zu diesen Ansätzen gehört beispielsweise das „Moment Matching“, bei dem die Simulationen so angepasst werden, dass die Mittelwerte der in der Simulation erzeugten Realisationen mit den entsprechenden theoretischen Erwartungswerten übereinstimmen. Außerdem zählen das Verfahren „Importance Sampling“ und der „Control Variates“–Ansatz zu den varianzreduzierenden Techniken.

Auch die Faktorreduktion verbessert die Performance bei der Monte–Carlo–Simulation. Hierbei wird die Anzahl der unabhängigen Brownschen Bewegungen reduziert. Ein für die Praxis gut umzusetzendes Verfahren stellt Joshi in dem Artikel [Jos03] vor. Alternativ ist eine Faktorreduktion auch über die Eigenwerte der Korrelationsmatrix möglich. Hierzu sei z.B. auf [Fri07] oder [PA10b] verwiesen.

Die Faktorreduktion alleine ergibt schon eine enorme Einsparung bei der Rechenzeit. Um eine noch präzisere Simulation zu erhalten, ist z.B. die Ergänzung der Faktorreduktion durch das sogenannte „Brownian Bridge“–Schema möglich. Bei dieser Idee werden, ausgehend von der geringeren Anzahl an unabhängigen Brownschen Bewegungen in Folge der Faktorreduktion diskrete Pfade der Brownschen Bewegungen erzeugt, deren Volatilität möglichst groß ist. Zur Umsetzung dieser Technik findet sich z.B. ein ausführlicher Algorithmus in [Jäc02]. Zusätzlich greift man in der Praxis häufig anstelle von Pseudo–Zufallszahlen auf sogenannte Quasi–Zufallszahlen zurück.

Wird die positive Wirkung der einzelnen Verfahren zusammen genutzt, so erhält man eine sehr effiziente Simulation für das LIBOR–Markt–Modell. Die erwähnten Ansätze haben sich als sehr wirkungsvoll erwiesen. Es handelt sich aber keineswegs um die einzigen Möglichkeiten, um die Simulation effizienter zu gestalten.

Zusammenfassend ist die Simulation der LIBOR–Raten daher Bestandteil der Payoff–Simulation eines Zinsderivates. Allerdings ergeben sich bei der Simulation nur die LIBOR–Raten von einem Zeitpunkt der Tenorstruktur zu einem weiteren. LIBOR–Raten, die zwischen solchen Zeitpunkten starten oder fällig werden, können nicht simuliert werden. Benötigt man für die einzelnen Pfade der Payoff–Simulation auch solche Raten, so müssen wir eine Interpolation durchführen. Die Interpolation ist das Thema des nächsten Kapitels.

## 3 Ansätze zur Interpolation im LIBOR–Markt–Modell

Im vorherigen Kapitel 2.3 haben wir analysiert, wie man die Forward–LIBOR–Raten entlang der vorgegebenen Tenorstruktur simuliert. Die Tenorstruktur ist festgelegt über die verwendeten LIBOR–Raten, also z.B. über die sechs Monats LIBORen und schränkt somit die Verfügbarkeit der LIBOR–Raten auf die vorgegebenen Zeitintervalle des LIBOR–Grids ein. Die Zahlungsstruktur des Zinsderivates stimmt aber in vielen Fällen nicht mit der Tenorstruktur des Modells überein, so dass in den Pfaden der Payoff–Simulation LIBOR–Raten erforderlich sind, die nicht simuliert werden können.

Selbst wenn man in der Theorie die Tenorintervalle kleiner wählt, ist es unter Umständen nicht möglich die Zahlungsstruktur des Zinsderivates genau zu treffen oder die erforderliche Frequenz geht über die heutigen Computerleistungen hinaus. Zudem ist es auch nicht zweckmäßig bei jedem neuen Zinsderivat das Modell an die Zahlungsperioden anzupassen, es neu zu kalibrieren und erneut zu simulieren, um die gewünschten Zinsraten für die Bewertung zu erhalten. Vielmehr möchte man ein bestehendes Modell so flexibel wie möglich benutzen, um Bewertungen verschiedener Zinsderivate durchzuführen.

Ausgehend von dem bestehenden Modell benötigen wir somit LIBOR–Raten, deren Periode zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten auf der Tenorstruktur beginnen und enden kann. Da diese Raten aber nicht simuliert wurden, stellen wir in diesem Kapitel ausgewählte Interpolationsansätze vor, um auch diese Raten bestimmen zu können.

In dem ersten Unterkapitel wird anhand einfacher Beispiele die Problemstellung herausgearbeitet, die eine Interpolation erstrebenswert macht. Um einen Interpolationsansatz bewerten zu können, wird im anschließenden Abschnitt auf die Kriterien eingegangen, die ein Interpolationsansatz erfüllen muss bzw. sollte. Im Anschluss daran werden die unterschiedlichen Interpolationsansätze vorgestellt.

### 3.1 Problemstellung

Im Folgenden soll in einem ersten Schritt die Problematik erläutert werden, die eine Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten begründet. Wir werden hierzu erneut reflektieren, welche Daten für ein beispielhaftes Zinsderivat zur Verfügung stehen und darauf aufbauend die Notwendigkeit der Interpolation im LIBOR–Markt–Modell verdeutlichen.

Wir geben uns beispielhaft zwei Zinsderivate vor, die eine Interpolation im LIBOR–Markt–Modell erfordern. Hierzu setzen wir voraus, dass wir uns heute im Zeitpunkt  $T_0 = 0$  befinden und bereits ein kalibriertes LIBOR–Markt–Modell mit der festen Tenorstruktur  $0 = T_0 < \dots < T_N$  gegeben haben. In diesem Modell können wir auf die LIBOR–Raten  $L_{\eta(t)}(t), L_{\eta(t)+1}(t), \dots, L_{N-1}(t)$  zurückgreifen, wobei  $t$  ein Zeitpunkt der Zeitdiskretisierung aus der Simulation sein muss, siehe auch Abschnitt 2.3.

Das erste Zinsderivat, das wir betrachten wollen, sei eine Swaption mit der folgenden Zahlungsstruktur: Es sei  $T_\alpha^{\text{Swap}} > 0$  das erste Fixing–Date und  $T_\beta^{\text{Swap}}$  mit  $\alpha < \beta$  das letzte Payment–Date. Weiter gelte  $T_k^{\text{Swap}} \notin \{T_1, \dots, T_N\}$  für alle  $k = \alpha, \dots, \beta$ . In die Bewertung der Swaption gehen LIBOR–Raten ein, deren Start– und Enddatum nicht auf dem LIBOR–Grid liegen. Genauer gesagt handelt es sich um die Raten  $L(T_k^{\text{Swap}}, T_k^{\text{Swap}}, T_{k+1}^{\text{Swap}})$  für  $k \in \{\alpha, \dots, \beta - 1\}$ . Diese können jedoch nicht mit dem vorgegebenen Modell bestimmt werden. Um auch für diese Perioden LIBOR–Raten ausgehend von der ursprünglichen Tenorstruktur des Modells zu bestimmen, ist eine Interpolation erforderlich.

Als zweites Beispiel betrachte man einen „Range Accrual“ auf den 6–Monats–LIBOR. Dies ist ein Zinsderivat, welches seinem Inhaber eine tägliche Auszahlung liefert, sofern der vorgegebene LIBOR–Zinssatz zwischen zwei festgelegten Schranken liegt. Für die Bewertung ist somit eine tägliche 6–Monats–LIBOR–Rate erforderlich. Das Zeitdiskretisierungsgrid für den täglichen Beobachtungszeitpunkt kann man feiner wählen, das LIBOR–Grid ist jedoch durch die 6–Monats Abstände fest vorgegeben. Auch in diesem Fall muss auf Interpolationstechniken zurückgegriffen werden, um die täglichen Raten für die Bewertung eines „Range Accruals“ zu bestimmen.

Es sei bemerkt, dass selbst wenn das LIBOR–Grid an einem anderen Bewertungstag festgelegt wird, man im ersten Beispiel unter Umständen wieder das Problem hätte, dass die Zahlungsstruktur des Zinsderivates nicht mit der Tenorstruktur des Modells übereinstimmt, da diese über die verwendeten LIBOR–Raten, also z.B. die 6–Monats–LIBORen

vorgegeben wird. Eine beliebig feine Tenorstruktur ist zwar in der Theorie möglich, aber wie bereits erläutert in der Praxis nicht umzusetzen. Zusammenfassend sind wir also in vielen Fällen auf eine Interpolation der LIBOR–Raten angewiesen. Zudem ist eine Implementierung der Interpolation wünschenswert, um das LIBOR–Markt–Modell für eine große Menge von Bewertungen verschiedener Zinsderivate möglichst effizient einzusetzen.

## 3.2 Gütekriterien einer Interpolation

Bevor wir die verschiedenen Ansätze zur Interpolation im LIBOR–Markt–Modell vorstellen und schließlich beispielhafte Bewertungen durchführen, wollen wir überblicksartig Kriterien vorgeben, die zur Bewertung der Qualität der entsprechenden Ansätze dienen sollen.

Grundsätzlich ist in der Finanzmathematik die Arbitragefreiheit von großer Bedeutung. Die in der Modellherleitung angenommene No–Arbitragebedingung bezieht sich auf die Basisfinanzgüter des Modells, also auf die Zerobonds mit Fälligkeit zu den Tenorzeitpunkten. Das Ausgangsmodell soll nun durch die Interpolationsansätze erweitert werden. Nach [Wer10] ist ein Interpolationsansatz im LIBOR–Markt–Modell arbitragefrei, falls

1. unter Voraussetzung von positiven, simulierten LIBOR–Raten<sup>1</sup> auch die interpolierten LIBOR–Raten nicht negativ sind.
2. für alle  $t, T \in [0, T_N]$  mit  $t \leq T$  die folgende Gleichung gilt

$$P(0, T) = N_0 \mathbb{E}^{P^N} \left[ \frac{P(t, T)}{N_t} \right],$$

wobei  $N$  das Numéraire und  $P^N$  das zugehörige äquivalente Martingalmaß ist.

Die zwei Bedingungen für die Arbitragefreiheit nach Werpachowski sind offensichtlich darin begründet, dass auch bei Erfüllung der zweiten Bedingung eine Arbitragemöglichkeit existiert, falls die interpolierten Raten negativ werden können. Nachfolgend werden wir jedoch beide Eigenschaften separat diskutieren, um genauere Aussagen zu den Ansätzen zu treffen. Mit anderen Worten werden wir auch die Positivität überprüfen, obgleich die zweite Bedingung, also die No–Arbitragebedingung, bereits nicht erfüllt ist.

---

<sup>1</sup>da ein log–normales Modell verwendet wird, sind die simulierten Raten positiv

Eine weitere wichtige Eigenschaft zur Beurteilung der Ansätze ist der stetige Übergang zwischen LIBOR–Raten auf dem Gitter und den interpolierten Raten, genauer soll für  $\tau$  mit  $\tau \notin \{T_0, \dots, T_N\}$  und  $T_k \in \{T_{\eta(\tau)}, \dots, T_N\}$  gelten:

$$\lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} L(t, \tau, T_k) = L(t, T_{\eta(\tau)}, T_k) \text{ und } \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} L(t, \tau, T_k) = L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_k).$$

Analog soll diese Stetigkeitsbedingung auch für die zweite Komponente erfüllt sein.

Des Weiteren ist die Stochastizität der interpolierten Zinsraten ein bedeutender Aspekt, der bei der Bewertung eines Ansatzes berücksichtigt werden sollte. Genauer betrachtet man die Volatilität der zugehörigen Zerobonds und unterscheidet zwischen Ansätzen, die eine Bond–Volatilität von 0 voraussetzen und solchen bei denen der Zerobond  $P(s, t)$  für alle  $s < t$  stochastisch ist, vgl. [BJ09].

Außerdem wollen wir die numerischen Ergebnisse berücksichtigen, vergl. Abschnitt 4.2. Anhand beispielhafter Derivate, die man auch mit analytischen Formeln bewerten kann, sollen die unterschiedlichen Interpolationsansätze aus numerischer Sicht bewertet werden. Das Bewertungskriterium ist hierbei der Abstand zu dem analytischen Preis. Im anschließenden Fazit wird diesem Kriterium die größte Bedeutung zugesprochen.

### 3.3 Die Interpolationsansätze

Im vorliegenden Abschnitt werden wir ausgewählte Ansätze zur Bestimmung von allgemeinen LIBOR–Raten vorstellen, deren Zeitintervall auch zwischen zwei Punkten auf der Tenorstruktur beginnen bzw. enden kann.

Grundsätzlich betrachtet man den Zusammenhang der LIBOR–Rate zu den Nullkupon–Anleihen, vgl. Definition 1.5. Die Nullkuponanleihen können auf mehrere Weisen interpoliert werden, um so insgesamt eine Interpolation für die LIBOR–Rate herzuleiten.

Im Folgenden werden zunächst in den Abschnitten 3.3.1 bis 3.3.4 verschiedene Ansätze der Bond–Preis–Interpolation beschrieben. Diese Ideen stammen von Piterbarg und Schlögl, vgl. [Pit03], [PA10b] und [Sch02]. Beveridge und Joshi erweitern diese Betrachtungen in ihrem Artikel, vgl. [BJ09].

Die Passage 3.3.5 der Arbeit befasst sich mit einem weiteren Ansatz von Piterbarg, siehe [PA10b]. Hierbei kann man das Problem der Bond–Preis–Interpolation auf eine Interpolation der Volatilität der Bond–Preise reduzieren. Grundlegende No–Arbitrage–Bedingungen geben einen Hinweis auf einen Zusammenhang zwischen Bond–Preisen, die von 0 und von  $t$  aus beobachtet werden. Wird dieser Zusammenhang unterstellt, so kann man unter Zuhilfenahme von Ansätzen aus dem HJM–Modellrahmen und dem Extended–Vasicek–Modell eine Interpolationsformel für die Zerobonds herleiten. Der Vorteil der Reduzierung auf eine Volatilitäts–Interpolation liegt darin, dass man bei der Interpolation der Volatilität laut Piterbarg, vgl. [PA10b], nur wenige No–Arbitrage–Bedingungen einhalten muss (falls es überhaupt welche gibt).

Anschließend wird im Unterabschnitt 3.3.6 die Idee beschrieben, wie man direkt die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell nutzen kann, um eine Interpolationsformel über die Beziehung zwischen Zerobonds mit den Beobachtungszeitpunkten 0 und  $t$  herzuleiten. Auch diese Interpolationsmöglichkeit bezieht sich auf [PA10b].

Zuletzt kann auch die Volatilität der LIBOR–Raten interpoliert werden, um so über die Zusammenhänge des LIBOR–Markt–Modells eine Interpolation der zu bestimmenden LIBOR–Rate zu erhalten. Diese Idee wird im Unterkapitel 3.3.7 behandelt. Hierzu dient das 8. Kapitel des Buches von Brace als Literatur, vgl. [Bra07].

Die folgende Grafik soll zunächst veranschaulichen, wie die LIBOR–Rate, die bestimmt werden soll, zu verstehen ist. Hierzu sei eine Tenorstruktur mit  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N$  vorgegeben. Weiter seien  $\tau_1, \tau_2$  beliebig mit  $0 \leq t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_N$ . Wir nehmen für die folgenden Grafiken an, dass beide Zeitpunkte nicht auf der Tenorstruktur liegen, also  $\tau_1, \tau_2 \notin \{T_0, \dots, T_N\}$ . Dies soll ausschließlich zur Verdeutlichung dienen, die Ausführungen gelten auch weiterhin für Zeitpunkte auf dem LIBOR–Grid.

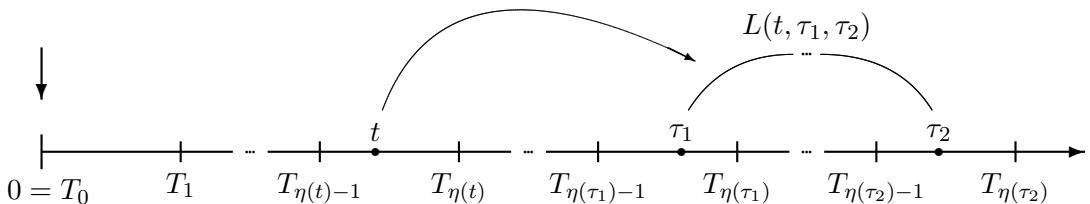


Abbildung 3.1: Die allgemeine LIBOR–Rate

Der vertikale Pfeil über  $0 = T_0$  bringt zum Ausdruck, dass man sich im Zeitpunkt 0 befindet und von dort aus die LIBOR–Raten modelliert. Die gewünschte Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  besitzt den Beobachtungszeitpunkt  $t$ . Von dort aus soll sie für die Laufzeit von  $\tau_1$  bis  $\tau_2$  betrachtet werden. Die folgende wichtige Formel stellt erneut den Zusammenhang zwischen Bond–Preisen und LIBOR–Raten dar, siehe auch Definition 1.5:

$$L(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right). \quad (3.1)$$

Wir bestimmen also die zwei Zerobond–Preise  $P(t, \tau_1)$  und  $P(t, \tau_2)$ , um einen Wert für die gesuchte LIBOR–Rate zu erhalten. Diese Bondpreise sind im LIBOR–Markt–Modell nicht bekannt. Aus der Simulation der LIBOR–Raten kennt man für ein  $t$  auf dem Simulationsgrid lediglich die Bondpreise, die exakt an die Tenorstruktur gebunden sind, also  $P(t, T_i, T_{i+1})$  für  $i = 0, \dots, N - 1$  und  $t \in t_0, \dots, t_n$  mit  $t \leq T_i$ . Hieraus können über die Formel

$$P(t, T_i, T_{i+2}) = P(t, T_i, T_{i+1})P(t, T_{i+1}, T_{i+2}),$$

alle von  $t$  aus beobachteten Bondpreise bestimmt werden, die auf einem Gitterpunkt starten und auch auf einem Zeitpunkt der Tenorstruktur fällig werden.

Genauer stellt sich dies wie folgt dar. Sei  $k \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k \leq N - 1$ . Für den Forward–Bond von einem Gitterpunkt  $T_k$  zu dem nächsten  $T_{k+1}$  gilt nach Gleichung (3.1):

$$P(t, T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{1 + (T_{k+1} - T_k)L(t, T_k, T_{k+1})}.$$

Da die LIBOR–Raten  $L(t, T_k, T_{k+1})$  aus der Simulation bekannt sind, ist  $P(t, T_k, T_{k+1})$  bekannt für alle  $0 \leq k \leq N - 1$  mit  $0 \leq t \leq T_k < T_{k+1} \leq T_N$ . Für  $0 \leq i < j \leq N$  und  $0 \leq t \leq T_i < T_j \leq T_N$  folgt somit für den von  $t$  aus beobachteten Forward Zerobond von einem beliebigen Gitterpunkt  $T_i$  zu einem weiteren beliebig gewählten Gitterpunkt  $T_j$ :

$$P(t, T_i, T_j) = \prod_{k=i}^{j-1} P(t, T_k, T_{k+1}) = \prod_{k=i}^{j-1} \frac{1}{1 + (T_{k+1} - T_k)L(t, T_k, T_{k+1})}. \quad (3.2)$$

Auf diese Weise kann man jedoch nicht auf die Bond–Preise  $P(t, \tau_1)$  und  $P(t, \tau_2)$  schließen, um die LIBOR–Rate zwischen den Gitterpunkten zu bestimmen. Um die gesuchten Bond–Preise  $P(t, \tau_1)$  und  $P(t, \tau_2)$  ebenfalls zu veranschaulichen, betrachte man die folgende Abbildung zusammen mit Gleichung (3.1) und Abbildung 3.1.

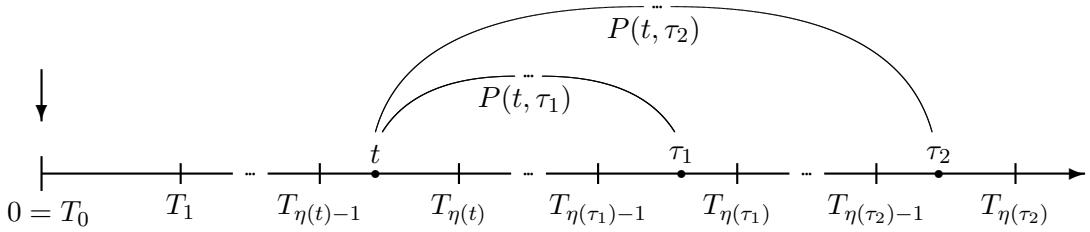


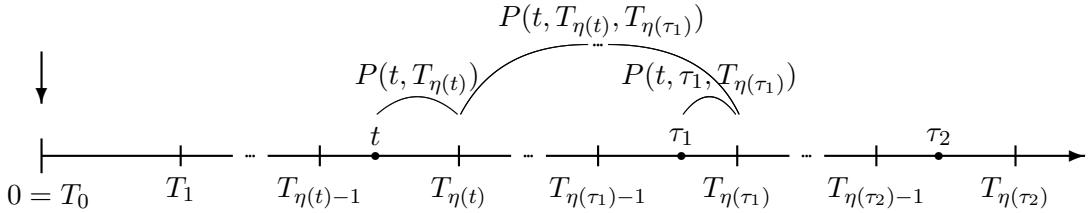
Abbildung 3.2: Die zur Bestimmung der allgemeinen LIBOR–Rate relevanten Bonds

Die zu bestimmenden Zerobonds mit  $\tau_1 \leq \tau_2$  aus der obigen Abbildung 3.2 kann man auf zwei Arten aus Produkten von abschnittsweisen Zerobonds zusammensetzen. Da die Überlegungen für die Zerobonds  $P(t, \tau_1)$  und  $P(t, \tau_2)$  identisch sind, werden wir die nachfolgenden Formeln für  $\tau$  vorstellen mit  $0 \leq t \leq \tau \leq T_N$ .

Die erste Unterteilungsmöglichkeit lautet:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}. \quad (3.3)$$

Diese Aufteilung wird an folgender Grafik am Beispiel von  $P(t, \tau_1)$  veranschaulicht:


 Abbildung 3.3: Aufteilung 1 der Bonds am Beispiel von  $P(t, \tau_1)$ 

Für die zweite Möglichkeit zur Aufteilung der gewünschten Zerobonds müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen, damit diese wohldefiniert ist. Für  $\tau > T_{\eta(t)}$  ist die Aufteilung gegeben durch:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1})P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau). \quad (3.4)$$

Für  $\tau \leq T_{\eta(t)}$  folgt  $T_{\eta(\tau)} = T_{\eta(t)}$ , so dass die Bedeutung des mittleren Faktors zunächst unklar ist. Um die Aufteilung dennoch betrachten zu können, definieren wir in Anlehnung an die Formel

$$P(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_i)},$$

für den mittleren Faktor im Fall  $\tau \leq T_{\eta(t)}$ :

$$P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) = P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)-1}) = \frac{P(t, T_{\eta(t)-1})}{P(t, T_{\eta(t)})} = \frac{1}{P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}.$$

Jetzt muss jedoch der Zerobond  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  bestimmt werden, dessen Startzeitpunkt vor dem Beobachtungszeitpunkt liegt. Auch bei dem hinteren Faktor  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  aus (3.4) ergibt sich im Fall  $\tau \leq T_{\eta(t)}$  dieses Problem. Für die Fälle, in denen der Startzeitpunkt vor dem Beobachtungszeitpunkt liegt, vereinbaren wir an dieser Stelle den Beobachtungszeitpunkt auf den Startzeitpunkt zurück zu verlegen. Mit dieser Konvention erhalten wir für die zweite Aufteilung im Fall  $\tau \leq T_{\eta(t)}$ :

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) \frac{1}{P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})} P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, \tau).$$

Zur Veranschaulichung ist auch für die zweite Aufteilung eine Grafik am Beispiel von  $P(t, \tau_1)$  für den Fall  $\tau_1 > T_{\eta(t)}$  abgebildet:

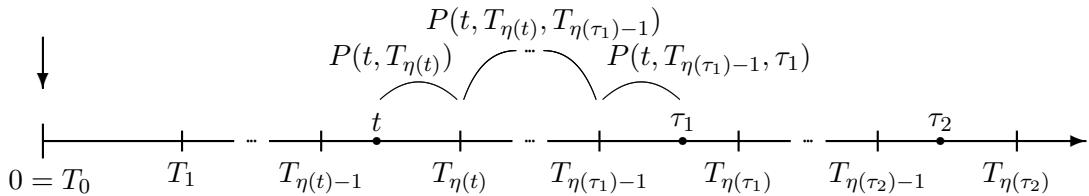


Abbildung 3.4: Aufteilung 2 der Bonds am Beispiel von  $P(t, \tau_1)$

An dieser Stelle wird zudem deutlich, dass wir für alle nachfolgenden Überlegungen die Annahme  $t > 0$  voraussetzen müssen, da sonst  $T_{\eta(t)-1}$  nicht definiert ist. Da aber für  $t = 0$  alle beliebigen LIBOR–Raten über die in 0 bekannte Zinskurve gegeben sind, stellt diese Annahme keine Einschränkung für die sich anschließenden Betrachtungen dar.

Wird im weiteren Verlauf von den unterschiedlichen Aufteilungen gesprochen, so sind die Bond–Aufteilungen gemäß Grafik 3.3 und Grafik 3.4 gemeint. Ist die Rede von der ersten Aufteilung, so handelt es sich um die Möglichkeit der Aufteilung in Abbildung 3.3. Entsprechend um die Möglichkeit der Bond–Aufteilung in Abbildung 3.4, wenn von der zweiten Aufteilung gesprochen wird.

Wie oben beschrieben, kennt man alle Bond–Preise von einem Gitterpunkt zu einem anderen. Die Aufteilungen sind somit zweckmäßig, da jetzt nicht mehr der gesammte Zero-

bond, sondern nur noch die jeweils vorderen und hinteren Faktoren aus den Formeln (3.3) und (3.4) unbekannt sind.  $P(t, T_{\eta(t)})$ , also der erste Faktor in den Formeln, wird Front–Stub genannt. Der hintere Faktor, also  $\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}$  in der ersten Aufteilung, vgl. (3.3) bzw.  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  in der zweiten Aufteilung, vgl. (3.4), wird Back–Stub genannt.

Möchte man schließlich die allgemeine LIBOR–Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  bestimmen, so setzt man die entsprechenden Aufteilungsformeln für die Zerobonds  $P(t, \tau_1)$  und  $P(t, \tau_2)$  in die Definition der Forward–LIBOR–Rate (3.1) ein. Für  $\tau_1 = \tau_2$  ist die LIBOR–Rate gegeben durch  $L(t, \tau_1, \tau_2) = 0$ . Zu beobachten ist, dass der Front–Stub sich lediglich im Fall  $t = \tau_1$  mit  $\tau_2 > \tau_1$  nicht herauskürzt, sondern in  $P(t, \tau_2)$  aufgrund von  $P(t, \tau_1) = 1$  zu berücksichtigen ist. Beispielhaft wird dies für die erste Aufteilungsmöglichkeit aufgezeigt:

$$\begin{aligned} L(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{1}{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Nachfolgend werden aufbauend auf den allgemeinen Überlegungen zu den Aufteilungsmöglichkeiten der Zerobonds die verschiedenen Interpolationsansätze vorgestellt.

### 3.3.1 Lineare Interpolation der Bond–Preise

Der erste Ansatz ist ein intuitiver, es wird nämlich eine lineare Interpolation benutzt. Genauer werden die Nullkupon–Anleihen linear interpoliert, um so über den Zusammenhang zwischen Nullkupon–Anleihen und LIBOR–Rate (Formel (3.1)) auch eine Interpolation für die LIBOR–Rate zu erhalten, siehe [PA10b]. Zunächst werden die beiden Aufteilungsmöglichkeiten der Bonds getrennt voneinander betrachtet. Anschließend wird ein eigener Vorschlag unterbreitet, wie man die lineare Interpolation durch die Kombination der beiden Ansätze noch optimieren könnte. Ob diese Möglichkeit auch in der Praxis bessere Ergebnisse liefert, wird in Abschnitt 4.3 behandelt.

Wir betrachten als erstes die Interpolation der Bonds unter der ersten Aufteilung, also nach der Formel (3.3) für  $\tau$  mit  $0 < t \leq \tau \leq T_N$ :

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}. \quad (3.5)$$

Der mittlere Faktor aus der Gleichung (3.5) kann direkt über die simulierten LIBOR–Raten bestimmt werden, da es sich um einen Zerobond mit Start und Endzeitpunkt auf dem Gitter handelt. Genauer ist dieser Faktor nach (3.2) gegeben durch:

$$P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) = \frac{1}{\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau)-1} (1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1}))}, \quad (3.6)$$

Für die lineare Interpolation verwenden wir den allgemeingültigen Ansatz nach Isaac Newton. Für eine Funktion  $f$  mit bekannten Werten  $f(x_1)$  an der Stelle  $x_1$  und  $f(x_2)$  an der Stelle  $x_2$ , ist damit die lineare Interpolation an der Stelle  $x$  für  $f(x)$  gegeben durch:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1). \quad (3.7)$$

Wir beginnen mit dem Back–Stub, d.h. wir wollen  $P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})$  bestimmen. Wir wissen, dass  $T_{\eta(\tau)-1} < \tau < T_{\eta(\tau)}$  gilt. Für die Grenzwerte von  $\tau$  in den Grenzen des Intervalls  $[T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}]$  erhält man für den Back–Stub:

$$\lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} P(t, \tau, T_{\eta(\tau)}) = P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \text{ und } \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} P(t, \tau, T_{\eta(\tau)}) = P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)}).$$

Deshalb verwenden wir für die lineare Interpolation die Stützwerte  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)})$ . Diese sind über die simulierten LIBOR–Raten bekannt, da sie jeweils an einer Gitterstelle starten und enden. Weiter gilt offensichtlich  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)}) = 1$ . Mit der Formel (3.7) ergibt sich für  $P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})$  die in [PA10b] vorgestellte Form:

$$\begin{aligned} P(t, \tau, T_{\eta(\tau)}) &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) + \frac{P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)}) - P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \\ &= \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) (T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \\ &\quad + \frac{(\tau - T_{\eta(\tau)-1}) - P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) (\tau - T_{\eta(\tau)-1})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \\ &= \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \end{aligned}$$

Anschaulich entspricht dieser Ansatz der Auswertung einer Geraden, die durch die Werte  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)})$  gelegt wird. Für den Back–Stub erhalten wir so:

$$\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = \left( \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Im Fall  $\tau < T_{\eta(t)}$  würde in den Back–Stub (3.8) der Zerobond  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  eingesetzt, dessen Startzeitpunkt vor seinem Beobachtungszeitpunkt  $t$  liegt. In diesem Fall setzen

wir  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$ . Diese Annahme, den Beobachtungszeitpunkt auf den Startzeitpunkt zurückzusetzen, gelte auch für alle nachfolgenden Formeln, die auf ein derartiges Problem stoßen.

Außerdem müssen wir den Front-Stub  $P(t, T_{\eta(t)}) = P(t, t, T_{\eta(t)})$  bestimmen. Würden wir vorgehen, wie zur Bestimmung des Back-Stubs zuvor, so würde man die Zerobonds  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  sowie  $P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)})$  als Stützwerte voraussetzen. In diesem Kontext taucht somit direkt bei der Herleitung ein toter Zerobond auf und nicht nur für spezielle Fälle wie zuvor. Um dieses Problem zu lösen, nehmen wir an, dass der Front-Stub in dem zugehörigen Intervall eine Volatilität von 0 hat:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = P(t, t, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, t, T_{\eta(t)}),$$

so dass wir den Front-Stub analog zum Back-Stub bestimmen können. Wir erhalten dann mit den bekannten Werten  $P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  und  $P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)}) = 1$ :

$$\begin{aligned} P(T_{\eta(t)-1}, t, T_{\eta(t)}) &= P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) \\ &\quad + \frac{P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)}) - P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} (t - T_{\eta(t)-1}) \\ &= \frac{t - T_{\eta(t)-1}}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} + \frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Für den ersten Fall der Bondaufteilung setzen wir die Formeln (3.6), (3.8) und (3.9) ein und die Gleichung (3.5) ist vollständig bestimmt.

Als nächstes wird die zweite Aufteilungsmöglichkeit analysiert. Für  $\tau$  mit  $0 < t \leq \tau \leq T_N$  setzen wir die Formel (3.4) voraus:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau). \quad (3.10)$$

Der Front-Stub ist in beiden Aufteilungsvarianten (3.5) und (3.10) identisch, so dass dieser nicht erneut betrachtet werden muss (vgl. hierzu Formel (3.9)). Da sich auch der mittlere Faktor nach (3.2) wieder über die LIBOR-Raten bestimmt, genauer durch:

$$P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) = \frac{1}{\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau)-2} (1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1}))}, \quad (3.11)$$

muss nur noch eine Formel für den Back-Stub  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  aus Gleichung (3.10) für die lineare Interpolation angegeben werden.

Wir verwenden wiederum  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)})$  als Stützwerte für die Interpolation. Da wir den Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  bestimmen wollen und dieser den Endzeitpunkt  $\tau$  hat, verwenden wir zusätzlich den Bond  $P(t, \tau, \tau) = 1$ . Für die lineare Interpolation des Back–Stubs setzen wir:

$$\begin{aligned}
 P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= P(t, \tau, \tau) - \frac{P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)}) - P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}(\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \\
 &= 1 - \frac{1 - P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}(\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \\
 &= \frac{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1} - (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) + P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})(\tau - T_{\eta(\tau)-1})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \\
 &= \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Anschaulich gesprochen nehmen wir  $P(t, \tau, \tau)$  mit bekanntem Wert 1 an, von dem wir aufgrund der Eigenschaft, dass ein Zerobond in einem arbitragefreien Modell monoton wachsend ist, noch einen Betrag abziehen müssen, um den Zerobond mit der Laufzeit von  $T_{\eta(\tau)-1}$  bis  $\tau$  zu erhalten. Da wir uns innerhalb des Intervalls  $[T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}]$  befinden, nutzen wir die Interpolation über die Werte  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)})$  aus, um den Subtrahend zu bestimmen. Wie bereits angenommen, setzen wir auch in (3.12)  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  für den Fall  $\tau < T_{\eta(t)}$  voraus.

Insgesamt ist jetzt die Gleichung (3.10) auch für die zweite Variante der Bondaufteilung vollständig bestimmt über die Formeln (3.9), (3.11) und (3.12).

Aufgrund der Vermutung, dass der Wert für  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  bei der Interpolation von der Aufteilung abhängt, wird eine Abhängigkeit der Aufteilung zu der Lage von  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  vorgeschlagen. Die Hypothese lautet, dass der auftretende Fehler bei der Interpolation umso größer wird, je größer das zu interpolierende Intervall ist. Es sollte also die Aufteilung 1 verwendet werden, falls der Abstand von  $\tau_1$  bzw. von  $\tau_2$  zu dem jeweils oberen Gitterpunkt  $T_{\eta(\tau_1)}$  bzw.  $T_{\eta(\tau_2)}$  geringer ist, als zu dem jeweils unteren  $T_{\eta(\tau_1)-1}$  bzw.  $T_{\eta(\tau_2)-1}$ . Genauer geben wir die vorgeschlagene Form für ein beliebiges  $\tau$  an:

$$P(t, \tau) = \begin{cases} P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1})P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) & \text{für } \tau \in [T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)-1} + m] \\ P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} & \text{für } \tau \in (T_{\eta(\tau)} - m, T_{\eta(\tau)}], \end{cases}$$

wobei  $m = \frac{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}{2}$ . Ob die vorgeschlagene Möglichkeit in der Praxis bessere Ergebnisse liefert, wird am Beispiel der linearen Interpolation in Kapitel 4 analysiert.

Als nächstes wollen wir die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Gütekriterien überprüfen. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass die lineare Interpolation nicht arbitragefrei ist. Dazu formulieren wir zunächst die No–Arbitrage Bedingung 2 aus dem Abschnitt 3.2 um. Aus

$$P(0, T) = N_0 \mathbb{E}^{P^N} \left[ \frac{P(t, T)}{N_t} \right],$$

folgt mit dem Numéraire  $N(t) = P(t, T_{\eta(\tau)-1})$  und dem zugehörigen Forward Maß  $P^{T_{\eta(\tau)-1}}$ :

$$\begin{aligned} P(0, \tau) &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}) \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} \left[ \frac{P(t, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)-1})} \right] \\ \Leftrightarrow \quad \frac{P(0, \tau)}{P(0, T_{\eta(\tau)-1})} &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} \left[ \frac{P(t, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)-1})} \right] \\ \Leftrightarrow \quad P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Für Zerobonds mit Fälligkeit auf der Tenorstruktur haben wir die Arbitragefreiheit in der Modellformulierung vorausgesetzt. Schreibt man diese analog zu (3.13), so ergibt sich:

$$P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})]. \quad (3.14)$$

Verwenden wir die Interpolationsformel (3.12), so können wir folgern:

$$\begin{aligned} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &\stackrel{(3.13)}{=} \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)] \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} \left[ \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \right] \\ &= \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})] \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es ist aber sehr unwahrscheinlich, dass die Zinskurve in 0 die Zerobonds so festlegt, dass die Form (3.15) erfüllt ist. Verwenden wir diese Darstellung, so können wir sogar zeigen, dass für  $T_{\eta(\tau)-1} < \tau < T_{\eta(\tau)}$  und  $P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) < 1$  gilt:

$$P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) P(0, \tau, T_{\eta(\tau)}) > P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \quad (3.16)$$

Wir setzen die linearen Interpolationsformeln

$$P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) = \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}),$$

und

$$P(0, \tau, T_{\eta(\tau)}) = \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}),$$

in (3.16) ein und erhalten mit den Schreibweisen

$$\alpha = \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}, \quad 1 - \alpha = \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \text{ und } P = P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}),$$

die folgende äquivalente, zu zeigene Aussage:

$$\begin{aligned} & (\alpha + (1 - \alpha)P)((1 - \alpha) + \alpha P) > P \\ \Leftrightarrow & (\alpha - \alpha^2)P^2 - 2(\alpha - \alpha^2)P + (\alpha - \alpha^2) > 0 \quad \left| \alpha - \alpha^2 > 0, \text{ da } T_{\eta(\tau)-1} < \tau < T_{\eta(\tau)} \right. \\ \Leftrightarrow & P^2 - 2P + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow & (P - 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Da  $P < 1$  gilt, folgt die behauptete Ungleichung (3.16). Um die Arbitragemöglichkeit zu verdeutlichen können wir eine genaue Handelsstrategie angeben:

Im Zeitpunkt 0 verkaufe man  $P(0, \tau, T_{\eta(\tau)})$ -Stück des Zerobonds  $P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$ . Außerdem kaufe man einen Zerobond  $P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und lege wegen (3.16) die Differenz aus diesen beiden Geschäften (wir wollen diese mit  $d$  bezeichnen) zum Zinssatz  $\rho > 0$  von 0 bis  $T_{\eta(\tau)}$  an. Des Weiteren verkaufe man auf Termin einen Zerobond  $P(0, \tau, T_{\eta(\tau)})$  zum Zeitpunkt  $\tau$ . Aus dieser Strategie resultieren die folgenden Zahlungsströme:

Zum Zeitpunkt 0:

$$P(0, \tau, T_{\eta(\tau)}) \cdot P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) - 1 \cdot P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) - d = 0.$$

Zum Zeitpunkt  $\tau$ :

$$P(0, \tau, T_{\eta(\tau)}) \cdot (-1) + 1 \cdot P(0, \tau, T_{\eta(\tau)}) = 0.$$

Zum Zeitpunkt  $T_{\eta(\tau)}$ :

$$1 - 1 + d e^{\rho(T_{\eta(\tau)} - 0)} > 0.$$

Diese Strategie ermöglicht es, ohne eine Investition, einen positiven Payoff zu erwirtschaften. Mit anderen Worten liegt aufgrund des risikolosen Gewinns eine Arbitragemöglichkeit vor, wenn man die lineare Interpolation verwendet. Möchte man eine arbitragefreie Interpolationsmöglichkeit benutzen, so ist die lineare Interpolation nicht geeignet.

Als nächsten Punkt untersuchen wir die Eigenschaft der Nichtnegativität für die linear interpolierten LIBOR–Raten unter Voraussetzung der ersten Aufteilungsmöglichkeit für die Zerobonds. Hierfür unterscheiden wir die Fälle  $t < \tau_1 \leq \tau_2$  und  $t = \tau_1 < \tau_2$ . Hierin sind

bereits alle relevanten Fälle eingeschlossen. Für den Fall  $t = \tau_1 = \tau_2$  ist die LIBOR–Rate gegeben durch  $L(t, \tau_1, \tau_2) = 0$ .

Wir untersuchen zunächst den ersten Fall und setzen  $t < \tau_1 \leq \tau_2$  voraus. Mit der Formel (3.1) ergibt sich für die LIBOR–Rate:

$$\begin{aligned}
 & L(t, \tau_1, \tau_2) \\
 &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(\tau_1)}, T_{\eta(\tau_1)}) \frac{1}{P(t, \tau_1, T_{\eta(\tau_1)})}}{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(\tau_2)}, T_{\eta(\tau_2)}) \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})}} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{\Pi \cdot \left( \frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_2)-1}}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)}) \right)}{\frac{\tau_1 - T_{\eta(\tau_1)-1}}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)})} - 1 \right),
 \end{aligned}$$

wobei  $\Pi$  gegeben ist durch  $\Pi = \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t))$ .

Um zu zeigen, dass die LIBOR–Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  mit  $\tau_1 \leq \tau_2$  nicht negativ ist, genügt es zu zeigen, dass die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 & \left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) \left( \frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_2)-1}}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)}) \right) \\
 & \geq \frac{\tau_1 - T_{\eta(\tau_1)-1}}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Wir unterscheiden an dieser Stelle zwischen  $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  und  $\eta(\tau_1) < \eta(\tau_2)$ . Für den Fall, dass  $\tau_1$  und  $\tau_2$  in dem selben Gitterintervall liegen, also wenn  $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  gilt, dann vereinfacht sich die zu zeigende Ungleichung zu:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_1)-1}}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_1)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}) \\
 & \geq \frac{\tau_1 - T_{\eta(\tau_1)-1}}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}), \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

da  $\Pi$  ein leeres Produkt ist und somit  $\Pi = 1$  gilt. Vereinfachen wir die Ungleichung (3.18) weiter, so ergibt sich:

$$\tau_2 (1 - P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)})) - \tau_1 (1 - P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)})) \geq 0,$$

was offensichtlich erfüllt ist, da aus der Eigenschaft  $0 \leq P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}) \leq 1$  folgt, dass  $1 - P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}) \geq 0$  gilt und  $\tau_1 \leq \tau_2$  vorausgesetzt ist. Insgesamt ist damit im

Fall  $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  die Ungleichung (3.17) erfüllt und es folgt, dass die LIBOR–Rate nicht negativ ist.

Im Fall  $\eta(\tau_1) < \eta(\tau_2)$  ist das Produkt  $\Pi$  nicht leer. Wir schreiben es in der Form:

$$\begin{aligned} \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) &= 1 + \delta_{\eta(\tau_2)-1} L_{\eta(\tau_2)-1}(t) \left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) \\ &= \frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})} \left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Schreibweise ergibt sich aus Ungleichung (3.17):

$$\begin{aligned} &\left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) \left( \frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_2)-1}}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} \cdot \frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})} + \frac{T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} \right) \\ &\geq \frac{\tau_1 - T_{\eta(\tau_1)-1}}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da die simulierten LIBOR–Raten nicht negativ sind und  $\delta_k \geq 0$  für alle  $k = 0, \dots, N-1$  erfüllt ist, gilt:

$$\prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \geq 1.$$

Für die rechte Seite der Ungleichung ist offenbar erfüllt:

$$0 \leq P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}) \leq \frac{\tau_1 - T_{\eta(\tau_1)-1}}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1}{T_{\eta(\tau_1)} - T_{\eta(\tau_1)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, T_{\eta(\tau_1)}) \leq 1.$$

Es genügt also jetzt zu zeigen, dass die folgende Aussage gilt:

$$\frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_2)-1}}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} \cdot \frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})} + \frac{T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} \geq 1. \quad (3.20)$$

Die linke Seite von (3.20) nimmt Werte zwischen 1 und  $\frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})}$  an. Da aber  $0 \leq P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)}) \leq 1$  gilt, folgt  $\frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})} \geq 1$  und (3.20) ist erfüllt. Somit ist auch für den Fall  $\eta(\tau_1) < \eta(\tau_2)$  die Bedingung (3.17) erfüllt, so dass die LIBOR–Raten  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  für den ersten Fall  $t < \tau_1 \leq \tau_2$  nicht negativ sind.

Als nächstes betrachten wir den zweiten Fall, also  $t = \tau_1 < \tau_2$ . Unter dieser Voraussetzung folgt für die LIBOR–Rate:

$$\begin{aligned} L(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{1}{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Zu zeigen ist dann die Ungleichung:

$$P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})} \leq 1, \quad (3.21)$$

mit den einzelnen Faktoren

$$\begin{aligned} P(t, T_{\eta(t)}) &= \frac{t - T_{\eta(t)-1}}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} + \frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) \\ P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) &= \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})) \right)^{-1} \\ \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})} &= \left( \frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_2)-1}}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} + \frac{T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)}) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei wir in dem Back-Stub  $\frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})}$  im Fall  $t = \tau_1 < \tau_2 \leq T_{\eta(t)}$ , also falls  $\eta(t) = \eta(\tau_2)$  gilt, den Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})$  durch  $P(T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})$  ersetzen müssen, da es sich sonst um einen toten Bond handeln würde. Wir nehmen also eine erneute Fallunterscheidung in die Fälle  $\eta(t) = \eta(\tau_2)$  und  $\eta(t) < \eta(\tau_2)$  vor.

Wir setzen zuerst  $\eta(t) = \eta(\tau_2)$  voraus. Dann gilt für den mittleren Faktor in (3.21)  $P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) = 1$ , da es sich um ein leeres Produkt handelt. Somit bleibt zu zeigen:

$$\begin{aligned} &\frac{t - T_{\eta(t)-1}}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} + \frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) \\ &\leq \frac{\tau_2 - T_{\eta(t)-1}}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} + \frac{T_{\eta(t)} - \tau_2}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vereinfachen wir die Ungleichung (3.22), so ergibt sich:

$$\tau_2 (1 - P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})) - t (1 - P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})) \geq 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, da  $1 - P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) \geq 0$  gilt und  $t < \tau_2$  vorausgesetzt ist. Für  $\eta(t) = \eta(\tau_2)$  ist damit die Ungleichung (3.21) erfüllt und die resultierenden LIBOR-Raten sind nicht negativ.

Wir betrachten jetzt den Fall  $\eta(t) < \eta(\tau_2)$ . Ähnlich wie auch im vorhergehenden Fall  $t < \tau_1 \leq \tau_2$  unter der Voraussetzung  $\eta(\tau_1) < \eta(\tau_2)$  schreiben wir das nicht leere Produkt um. Wir ziehen den letzten Faktor aus dem Produkt heraus und multiplizieren diesen in

den Back–Stub hinein. Dergestalt erhalten wir die zu zeigende Bedingung:

$$\begin{aligned}
 & \frac{t - T_{\eta(t)-1}}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} + \frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}} P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) \\
 & \leq \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) \left( \frac{\tau_2 - T_{\eta(\tau_2)-1}}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} \cdot \frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, T_{\eta(\tau_2)})} + \frac{T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2}{T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}} \right). 
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die linke Seite nimmt nur Werte zwischen  $P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  und 1 an, wohingegen die rechte Seite einen Wert größer oder gleich 1 annimmt. Insgesamt ist die Bedingung (3.23) also erfüllt und für den Fall  $\eta(t) < \eta(\tau_2)$  folgt, dass die LIBOR–Raten nicht negativ sind. Damit ist der Fall  $t = \tau_1 < \tau_2$  abgeschlossen.

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass die LIBOR–Raten  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  unter Verwendung der linearen Interpolation nicht negativ sind.

Die nächste Eigenschaft, die wir überprüfen wollen, ist der stetige Übergang von den interpolierten auf die simulierten LIBOR–Raten. Nach den grundlegenden Eigenschaften der linearen Interpolation, anschaulich durch das Auswerten einer Geraden, die durch die gegebenen Stützwerte gelegt wird, ist der Übergang zwischen den Zerobonds an den Stützstellen und den linear interpolierten Zerobonds stetig. Über den direkten Zusammenhang von den Zerobonds zu den LIBOR–Raten (vgl. (3.1)), ist so auch die Stetigkeit für den Übergang der simulierten LIBOR–Raten auf die interpolierten gegeben.

Die Annahme einer Volatilität von 0 für die Bestimmung des Front–Stubs impliziert, dass die Stochastizitätseigenschaft bei der linearen Interpolation (zumindest bei der Verwendung des Front–Stubs) nicht erfüllt ist, da nicht jeder Zerobond  $P(s, t)$  für alle  $s < t$  stochastisch ist. Zudem sei darauf hingewiesen, dass die Vereinbarung den Beobachtungszeitpunkt in den Fällen toter Raten zurückzusetzen grundsätzlich (dies bezieht sich auch auf alle weiteren Interpolationsmöglichkeiten) die Stochastizität der Zerobonds ändert.

Insgesamt sind zwar die linear interpolierten LIBOR–Raten positiv und die Übergänge zwischen den simulierten und den interpolierten Raten stetig, aber das wichtigste Kriterium, die Arbitragefreiheit, ist nicht erfüllt. Auch die Stochastizität der Zerobonds  $P(s, t)$  ist nicht für alle  $s < t$  erfüllt, da für den Front–Stub eine Volatilität von 0 angenommen wurde. Ob es sich aus numerischer Sicht dennoch rentiert diesen Ansatz zu implementieren, wird im Kapitel 4 diskutiert.

### 3.3.2 Logarithmische Interpolation der Bond–Preise

Der zweite Ansatz zur Interpolation der LIBOR–Raten ist wie die lineare Interpolation aus Abschnitt 3.3.1 ebenfalls eine in [PA10b] vorgestellte, intuitive Methode. In diesem Unterkapitel wird die logarithmische Interpolation vorgestellt. Wie bei der linearen Interpolation werden auch hier die Stützwerte  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)})$  zur Interpolation verwendet. Der Unterschied liegt darin, dass bei dieser Möglichkeit keine lineare, sondern eine logarithmische Funktion zur Verbindung der Stützstellen vorausgesetzt wird.

Wir verwenden für die logarithmische Interpolation das allgemeingültige Schema, bei dem für eine Funktion  $f$  mit bekannten Werten  $f(x_1)$  an der Stelle  $x_1$  und  $f(x_2)$  an der Stelle  $x_2$ , die Interpolation für  $f(x)$  an der Stelle  $x$  gegeben ist durch:

$$\frac{\ln f(x) - \ln f(x_0)}{\ln f(x_1) - \ln f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (3.24)$$

Als erstes wird wieder die Aufteilung 1 der Zerobonds betrachtet, vgl. (3.5):

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}.$$

Analog zur linearen Interpolation müssen auch bei der logarithmischen nur Formeln für den Front– und Back–Stub angegeben werden, da sich der mittlere Faktor direkt über die simulierten Raten ergibt. Wir bestimmen zunächst den Back–Stub  $\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}$ . Setzen wir in (3.24) die bekannten Werte  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)})$  ein und beachten, dass  $\ln P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)}) = \ln 1 = 0$  gilt, so können wir für  $P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})$  folgern:

$$\begin{aligned} \frac{\ln P(t, \tau, T_{\eta(\tau)}) - \ln P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{-\ln P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} &= \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \\ \Leftrightarrow \quad \ln P(t, \tau, T_{\eta(\tau)}) &= \left(1 - \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}\right) \ln P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \\ \Leftrightarrow \quad P(t, \tau, T_{\eta(\tau)}) &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})^{\frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Den Front–Stub können wir auch bei der logarithmischen Interpolation nur bestimmen, wenn wir für den Front–Stub in dem zugehörigen Intervall eine Volatilität von 0 voraussetzen, also wenn  $P(t, T_{\eta(t)}) = P(t, t, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, t, T_{\eta(t)})$  angenommen wird. Ein analoges Vorgehen liefert dann die folgende Gleichung für den Front–Stub:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, t, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})^{\frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}}}. \quad (3.26)$$

Für die Aufteilung 2 der Zerobonds, vgl. (3.10)

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau),$$

können wir die Interpolationsformel (3.26) für den Front–Stub übernehmen, da sich der Front–Stub in den verschiedenen Aufteilungen nicht unterscheidet. Der mittlere Faktor ergibt sich auch wieder direkt aus den simulierten LIBOR–Raten, so dass nur noch der Back–Stub  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  bestimmt werden muss. Diesen können wir ähnlich zu Formel (3.25) angeben durch:

$$P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) = P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})^{\frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}}, \quad (3.27)$$

so dass auch in der Aufteilung 2 alle Faktoren vollständig bestimmt sind.

Da es sich bei der logarithmischen Interpolation um ein sehr ähnliches Schema handelt wie bei der linearen Interpolation, sind auch die Kriterien aus Kapitel 3.2 genau analog erfüllt bzw. nicht erfüllt. So gilt auch für die logarithmische Interpolation, dass sie die No–Arbitrage Bedingung 2 nicht erfüllt. Die Übergänge der simulierten zu den interpolierten LIBOR–Raten sind aufgrund der Eigenschaften der logarithmischen Interpolation stetig. Ebenso sind die interpolierten Raten nicht negativ, falls die simulierten LIBOR–Raten positiv sind. Neben der nicht gegebenen Arbitragefreiheit ist ein weiterer Kritikpunkt, dass wie auch bei der linearen Interpolation zur Bestimmung des Front–Stubs eine Volatilität von 0 angenommen werden musste, so dass das Stochastizitätskriterium nicht erfüllt ist.

### 3.3.3 Konstante Interpolation der Bond–Preise

Ein Interpolationsansatz von Schrögl, vgl. [Sch02] und Piterbarg, vgl. [Pit03], ist die konstante Interpolation der LIBOR–Raten. Auch bei dieser Möglichkeit wird die Beziehung zu den Zerobonds verwendet, so dass man anstelle der LIBOR–Raten die Zerobonds konstant interpoliert, siehe Gleichung (3.1).

Wir setzen die Aufteilung 1 des Bonds  $P(t, \tau)$  für  $\tau \in [T_0, T_N]$  mit  $\tau \geq t$  voraus:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}.$$

Zur Bestimmung der einzelnen Faktoren legen wir für das Intervall des Front–Stubs wieder eine Volatilität von 0 fest, so dass wir  $P(t, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, t, T_{\eta(t)})$  annehmen können. Es ist aus dem Zusammenhang von Zerobonds und LIBOR–Rate bekannt (siehe Formel (3.1)), dass für den Zerobond  $P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  gilt:

$$P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}) = \frac{1}{1 + (T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1})L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}.$$

Die konstante Interpolation des Front–Stubs, der in dem Intervall  $[T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}]$  liegt, ist dann gegeben durch:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = P(T_{\eta(t)-1}, t, T_{\eta(t)}) = \frac{1}{1 + (T_{\eta(t)} - t)L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}. \quad (3.28)$$

Aus der Gleichung (3.28) wird deutlich, dass bei der konstanten Interpolation des Front–Stubs nur die Intervalllänge der LIBOR–Rate angepasst wird. Die Voraussetzung des Front–Stubs ohne Volatilität ermöglicht die Benutzung der LIBOR–Rate, die bereits von  $T_{\eta(t)-1}$  aus beobachtet wird. Ansonsten würde erneut das Problem auftreten, dass die Rate  $L(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  einer toten LIBOR–Rate entspricht, da der Startzeitpunkt vor dem Beobachtungszeitpunkt liegen würde und die Rate somit schon gefixt wäre.

Bei der konstanten Interpolation wollen wir in Anlehnung an [Pit03] für den Fall  $t < \tau < T_{\eta(t)}$  eine separate Interpolationsformel für den Zerobond  $P(t, \tau)$  angeben. Wir verfahren analog zu den Überlegungen zuvor und setzen wieder eine Volatilität 0 voraus. Ähnlich zu (3.28) definieren wir die konstante Interpolation für  $t < \tau < T_{\eta(t)}$  durch:

$$P(t, \tau) = \frac{1}{1 + (\tau - t)L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}. \quad (3.29)$$

Der vorliegende konstante Interpolationsansatz ist der einzige, bei dem wir das Definitionsproblem eines vor dem Beobachtungszeitpunkt startenden Zerobonds (bzw. einer LIBOR–Rate) umgehen durch eine separate Definition für  $P(t, \tau)$ .

Der mittlere Faktor in der Aufteilung (3.5) ist, wie auch zuvor bei der linearen und logarithmischen Interpolation, eindeutig über die simulierten LIBOR–Raten festgelegt:

$$P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) = \frac{1}{\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau)-1} (1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1}))}.$$

Der Back–Stub  $\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}$  wird über den Front–Stub bestimmt. Wir verwenden die No–Arbitragebedingung und erhalten für den Back–Stub:

$$\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = \frac{P(t, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)})} = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ \frac{P(\tau, \tau)}{P(\tau, T_{\eta(\tau)})} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ P(\tau, T_{\eta(\tau)})^{-1} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Jetzt können wir für  $P(\tau, T_{\eta(\tau)})$  die Gleichung (3.28) verwenden und die Martingaleigenschaft der LIBOR–Raten nutzen. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} [P(\tau, T_{\eta(\tau)})^{-1} \mid \mathcal{F}_t] &= 1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} [L(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}).\end{aligned}$$

Für den Back–Stub folgt somit insgesamt:

$$\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = 1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}), \quad (3.30)$$

so dass alle Faktoren der ersten Aufteilung bestimmt sind.

Auf die Herleitung für die Aufteilung 2 wird an dieser Stelle nicht genauer eingegangen. Wir geben lediglich in folgendem Überblick die zugehörigen Formeln an. Man erhält analog:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau),$$

mit den einzelnen Faktoren

$$\begin{aligned}P(t, T_{\eta(t)}) &= (1 + (T_{\eta(t)} - t) L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}))^{-1} \\ P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) &= \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau)-2} (1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})) \right)^{-1} \\ P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= (1 + (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))^{-1}.\end{aligned}$$

Als nächstes sollen die Eigenschaften der konstanten Interpolation untersucht werden. Auch die konstante Interpolation ist nicht arbitragefrei. Wir wollen nachfolgend ein Gegenbeispiel angeben, vgl. hierzu [BJ09].

Wir nehmen  $t < \tau_1 < \tau_2 < T_{\eta(t)}$  an. Daraus folgt unmittelbar  $T_{\eta(t)-1} = T_{\eta(\tau_1)-1} = T_{\eta(\tau_2)-1}$  und  $T_{\eta(t)} = T_{\eta(\tau_1)} = T_{\eta(\tau_2)}$ . Wir zeigen die Ungleichung

$$P(t, \tau_1) P(\tau_1, \tau_2) < P(t, \tau_2), \quad (3.31)$$

die ein Arbitrageportfolio ermöglicht. Nachfolgend verwenden wir die in Kapitel 2.1 eingeführte Kurzschreibweise  $L_i(t) := L(t, T_i, T_{i+1})$ . Für die kurzen Bonds folgt mit der Eigen-

schaft  $\eta(t) = \eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  und der Formel (3.29):

$$\begin{aligned} P(t, \tau_1)P(\tau_1, \tau_2) &= \left[ (1 + (\tau_1 - t)L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})) (1 + (\tau_2 - \tau_1)L_{\eta(\tau_1)-1}(T_{\eta(\tau_1)-1})) \right]^{-1} \\ &= \left[ 1 + (\tau_2 - t)L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}) + (\tau_1 - t)(\tau_2 - \tau_1)L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})^2 \right]^{-1} \\ &< \left[ 1 + (\tau_2 - t)L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}) \right]^{-1} \\ &= P(t, \tau_2), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung gilt, da nach Voraussetzung  $(\tau_1 - t) > 0$ ,  $(\tau_2 - \tau_1) > 0$  gilt und die Eigenschaften  $L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}) > 0$  und  $L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})^2 > 0$  gelten. Mit der Ungleichung (3.31) können wir nun wieder ein Arbitrageportfolio angeben:

Man kaufe im Zeitpunkt  $t$  einen Zerobond  $P(t, \tau_2)$  und verkaufe  $\frac{P(t, \tau_2)}{P(t, \tau_1)}$  Stück des Zerobonds  $P(t, \tau_1)$ . Das Portfolio hat dann zum Zeitpunkt  $t$  einen Wert von 0:

$$-1 \cdot P(t, \tau_2) + \frac{P(t, \tau_2)}{P(t, \tau_1)} \cdot P(t, \tau_1) = 0.$$

Zum Zeitpunkt  $\tau_1$  hat dieses Portfolio aufgrund der Ungleichung (3.31) einen positiven Wert, so dass wir einen risikolosen Gewinn erwirtschaften können und damit eine Arbitragemöglichkeit aufgezeigt haben, genauer gilt in  $\tau_1$ :

$$-1 \cdot P(t, \tau_2) + \frac{P(t, \tau_2)}{P(t, \tau_1)} \cdot 1 > 0.$$

Allerdings ist die Nichtnegativität der interpolierten LIBOR-Raten bei vorgegebenen positiven simulierten Raten erfüllt. Um dies zu zeigen, nehmen wir eine Fallunterscheidung in  $T_{\eta(t)-1} < t \leq T_{\eta(t)} < \tau_1 \leq \tau_2$ , sowie in  $T_{\eta(t)-1} < t \leq \tau_1 \leq T_{\eta(t)} < \tau_2$  und  $T_{\eta(t)-1} < t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_{\eta(t)}$  vor und betrachten jeweils die LIBOR-Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$ . In den aufgeführten drei Fällen sind alle möglichen Anordnungen von  $t$ ,  $\tau_1$  und  $\tau_2$  enthalten.

Wir wenden uns zunächst der Aufteilung 1 zu und benutzen die Formel (3.1). Für den ersten Fall  $T_{\eta(t)-1} < t \leq T_{\eta(t)} < \tau_1 \leq \tau_2$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} L(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_1)}) \frac{1}{P(t, \tau_1, T_{\eta(\tau_1)})}}{P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{\left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) (1 + (T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1)L_{\eta(\tau_1)-1}(t))}{1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2)L_{\eta(\tau_2)-1}(t)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Damit die LIBOR–Rate nicht negativ ist, muss gelten:

$$\left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) (1 + (T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1) L_{\eta(\tau_1)-1}(t)) \geq 1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t). \quad (3.32)$$

An dieser Stelle müssen wir weiter zwischen  $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  und  $\eta(\tau_1) < \eta(\tau_2)$  unterscheiden.

Für  $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  folgt zunächst:

$$\prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) = 1,$$

da es sich um ein leeres Produkt handelt. Damit bleibt zu zeigen:

$$1 + (T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1) L_{\eta(\tau_1)-1}(t) \geq 1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t).$$

Aufgrund von  $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2)$  und  $\tau_1 \leq \tau_2$  ist diese Ungleichung aber erfüllt und (3.32) ist gezeigt, so dass die LIBOR–Raten nicht negativ sind.

Im Fall  $\eta(\tau_1) < \eta(\tau_2)$  ist das Produkt  $\prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t))$  nicht leer und der letzte Faktor ist gegeben durch  $1 + \delta_{\eta(\tau_2)-1} L_{\eta(\tau_2)-1}(t)$ . Wir notieren die Ungleichung in der Form

$$\begin{aligned} & (1 + \delta_{\eta(\tau_2)-1} L_{\eta(\tau_2)-1}(t)) \left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) (1 + (T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1) L_{\eta(\tau_1)-1}(t)) \\ & \geq 1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t). \end{aligned}$$

Die simulierten LIBOR–Raten sind als nicht negativ vorausgesetzt. Weiter gilt  $\tau_1 \leq T_{\eta(\tau_1)}$  und  $\delta_k \geq 0$  für alle  $k = 0, \dots, N-1$ , woraus folgt:

$$\left( \prod_{k=\eta(\tau_1)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) (1 + (T_{\eta(\tau_1)} - \tau_1) L_{\eta(\tau_1)-1}(t)) \geq 1.$$

Aufgrund von  $\delta_{\eta(\tau_2)-1} = T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1} \geq T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2$  gilt:

$$1 + \delta_{\eta(\tau_2)-1} L_{\eta(\tau_2)-1}(t) \geq 1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t).$$

Somit ist auch in diesem Fall die Ungleichung (3.32) erfüllt und insgesamt ist die LIBOR–Rate für den Fall 1 nicht negativ.

Jetzt betrachten wir den Fall 2, d.h.  $T_{\eta(t)-1} < t \leq \tau_1 \leq T_{\eta(t)} < \tau_2$ . Dieser Fall wird im Vergleich zum Nachweis bei der linearen Interpolation zusätzlich berücksichtigt, da

für  $P(t, \tau_1)$  im Fall  $\tau_1 \leq T_{\eta(t)}$  anstelle von  $P(t, \tau_1) = P(t, T_{\eta(t)}) \frac{1}{P(t, \tau_1, T_{\eta(\tau_1)})}$  die direkte Interpolationsformel nach [Pit03] eingesetzt wird. Für  $P(t, \tau_2)$  verwenden wir wiederum die Aufteilung 1, so dass sich für die LIBOR–Rate der folgende Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} L(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)}) \frac{1}{P(t, \tau_2, T_{\eta(\tau_2)})}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{(1 + (T_{\eta(t)} - t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})) \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) \right)}{(1 + (\tau_1 - t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})) (1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t))} - 1 \right). \end{aligned}$$

Damit auch in diesem Fall die LIBOR–Rate nicht negativ ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} &(1 + (T_{\eta(t)} - t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})) \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) \right) \\ &\geq (1 + (\tau_1 - t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})) (1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Da der Faktor  $(1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t))$  aufgrund von  $\tau_2 < T_{\eta(\tau_2)}$  und positiven simulierten LIBOR–Raten nicht negativ ist, können wir die Gleichung umstellen zu:

$$\frac{(1 + (T_{\eta(t)} - t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})) \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t)) \right)}{1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t)} \geq 1 + (\tau_1 - t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}).$$

Es genügt nun zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t))}{1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t)} \geq 1, \quad (3.34)$$

da damit wegen  $t \leq \tau_1 \leq T_{\eta(t)}$  und positiven simulierten LIBOR–Raten die Ungleichung (3.33) erfüllt ist.

Wir wollen jetzt die Ungleichung (3.34) zeigen. Dazu wissen wir nach Voraussetzung, dass  $T_{\eta(t)} < \tau_2$  gilt und somit das Produkt  $\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-1} (1 + \delta_k L_k(t))$  nicht leer ist. Wir schreiben (3.34) in der Form:

$$\frac{(1 + (T_{\eta(\tau_2)} - T_{\eta(\tau_2)-1}) L_{\eta(\tau_2)-1}(t)) \left( \prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \right)}{1 + (T_{\eta(\tau_2)} - \tau_2) L_{\eta(\tau_2)-1}(t)} \geq 1.$$

Weiter gilt

$$\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau_2)-2} (1 + \delta_k L_k(t)) \geq 1,$$

da  $\delta_k \geq 0$  für alle  $k = 0, \dots, N-1$  und die simulierten Raten als positiv vorausgesetzt sind. Damit folgt aber sogleich die Ungleichung (3.34), da  $T_{\eta(\tau_2)-1} < \tau_2 \leq T_{\eta(\tau_2)}$ . Insgesamt folgt damit (3.33), so dass die interpolierten LIBOR–Raten auch im Fall 2 nicht negativ sind.

Der letzte Fall  $T_{\eta(t)-1} < t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_{\eta(t)}$  kann im Vergleich sehr schnell abgehandelt werden, da für den Zerobond  $P(t, \tau_1)$  die Interpolation  $(1 + (\tau_1 - t)L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}))^{-1}$  und für  $P(t, \tau_2)$  die Interpolation  $(1 + (\tau_2 - t)L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}))^{-1}$  verwendet wird. Nach Voraussetzung gilt  $\tau_1 \leq \tau_2$ , so dass  $\frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} \geq 1$  gilt und die LIBOR–Rate positiv ist.

Analog kann auch für die zweite Aufteilung argumentiert werden, so dass sich bei der konstanten Interpolation der LIBOR–Raten unter Voraussetzung von positiven simulierten Raten nicht negative interpolierte LIBOR–Raten ergeben.

Auch die Stetigkeit der LIBOR–Raten beim Übergang von den simulierten zu den interpolierten Raten ist gegeben. Dies folgt wiederum über die Formel (3.1), wenn wir die Stetigkeit für die Zerobonds gegeben haben. Die konstante Interpolation der Zerobonds ist gerade so konzipiert, dass man die simulierte LIBOR–Rate verwendet, die genau das Gitterintervall als Anlagezeitraum zugrunde legt, in dem auch der Zeitpunkt  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  liegt. Bei dem interpolierten Bond wird die Zeitdifferenz angepasst. Somit folgt aus der Definition der konstanten Interpolation die Stetigkeitseigenschaft für die Zerobonds. Beispielhaft soll dies an dem Back–Stub der Aufteilung 2 gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1} \\ \tau \nearrow T_{\eta(\tau)}}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= \lim_{\substack{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1} \\ \tau \nearrow T_{\eta(\tau)}}} (1 + (\tau - T_{\eta(\tau)-1})L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))^{-1} \\ &= (1 + (T_{\eta(\tau)-1} - T_{\eta(\tau)-1})L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

und für den zweiten Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)} \\ \tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= \lim_{\substack{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)} \\ \tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}}} (1 + (\tau - T_{\eta(\tau)-1})L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))^{-1} \\ &= (1 + (T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))^{-1} \\ &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \end{aligned}$$

Analog folgt dies auch für die übrigen interpolierten Bonds. Bei der Stetigkeitsüberprüfung des Front–Stubs verwendet man  $P(t, T_{\eta(t)}) = P(t, t, T_{\eta(t)})$ , wobei zu beachten ist, dass man in die Grenzwertbetrachtung nicht den Beobachtungszeitpunkt  $t$  einschließt. Des Weiteren

wird der Grenzwert des Startzeitpunktes  $t$  gegen  $T_{\eta(t)-1}$  nicht betrachtet, da man wie zuvor geschildert den Beobachtungszeitpunkt nicht variiert und somit tote Zerobonds betrachten würde. Insgesamt folgt über die Gleichung (3.1) die Stetigkeit für die Übergänge der LIBOR–Raten.

Das Kriterium der Stochastizität ist auch bei der konstanten Interpolation nicht erfüllt, da der Front–Stub  $P(t, T_{\eta(t)})$  nicht stochastisch ist. Der Front–Stub wird durch den folgenden Ausdruck bestimmt, der bereits zum Zeitpunkt  $T_{\eta(t)-1}$  festgelegt ist:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = \frac{1}{1 + (T_{\eta(t)} - t)L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}.$$

Zusammenfassend ist also auch die konstante Interpolation weder arbitragefrei, noch erfüllt sie die Eigenschaft der Stochastizität. Dennoch sind auch in diesem Fall die interpolierten LIBOR–Raten nicht negativ und die Übergänge zwischen den simulierten und den interpolierten Raten sind stetig.

### 3.3.4 Einführung einer Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen bei der konstanten Interpolation der Bond–Preise

In diesem Unterkapitel wird die Idee aus dem Abschnitt 3.3.3 von Schlägl und Piterbarg erweitert durch die Einführung einer Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen, vgl. [Sch02] und [BJ09]. Durch diese Erweiterung wird in diesem Interpolationsansatz das Kriterium der Stochastizität erfüllt sein.

Wir wollen die Einführung der Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen genauer betrachten. Nachfolgend setzen wir nur noch die erste Aufteilungsmöglichkeit voraus:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)})P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}.$$

Im Fall der einfachen konstanten Interpolation im obigen Abschnitt 3.3.3 wird für die Interpolation eine LIBOR–Rate verwendet, deren Start– und Endzeitpunkt jeweils eine Stelle auf der gegebenen Tenorstruktur ist. Genauer sind es die benachbarten Gitterpunkte, die die zur Interpolation verwendete Stelle  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  umgeben. Setzen wir wieder ein  $\tau$  mit  $T_{\eta(\tau)-1} < \tau < T_{\eta(\tau)}$  voraus, so würde man z.B. für den Back–Stub  $\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}$  die

LIBOR–Rate  $L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  zur Interpolation verwenden, unabhängig davon, wo sich  $\tau$  innerhalb des Intervalls  $[T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}]$  genau befindet.

Die Idee besteht darin, dass z.B. der Back–Stub  $\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}$ , wenn  $\tau$  sehr nah an der oberen Intervallgrenze liegt, stärker von der LIBOR–Rate  $L(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})$  beeinflusst wird. Diese Abhängigkeit soll von einer Funktion  $\xi$  gesteuert werden. Wir nehmen im Folgenden  $\tau \in [T_0, T_{N-1}]$  an. Alternativ muss man, wie auch in Kapitel 4, die LIBOR–Raten über  $T_N$  hinaus simulieren. Genauer ergibt sich dann unter Verwendung der Kurzschreibweise für die LIBOR–Raten das folgende Schema für den Front–Stub:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = \frac{1}{1 + (T_{\eta(t)} - t) (\xi(t) L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}) + (1 - \xi(t)) L_{\eta(t)}(t))}, \quad (3.35)$$

wobei die Funktion  $\xi$  für alle  $i = 0, \dots, N-1$  gegeben ist durch:

$$\lim_{\Delta \searrow 0} \xi(T_i + \Delta) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta \nearrow T_{i+1} - T_i} \xi(T_i + \Delta) = 0.$$

Man kann die Funktion  $\xi$  z.B. in der Form  $\xi(t) = \frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}}$  annehmen.

Der mittlere Faktor  $P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)})$  ergibt sich analog zu den übrigen Ansätzen direkt über die simulierten LIBOR–Raten:

$$P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) = \frac{1}{\prod_{k=\eta(t)}^{\eta(\tau)-1} (1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1}))}. \quad (3.36)$$

Wie in Kapitel 3.3.3 bestimmen wir den Back–Stub über die No–Arbitragebedingung. Gleichermaßen gilt auch hier:

$$\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = \frac{P(t, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)})} = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ \frac{P(\tau, \tau)}{P(\tau, T_{\eta(\tau)})} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ P(\tau, T_{\eta(\tau)})^{-1} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Wiederum setzen wir für  $P(\tau, T_{\eta(\tau)})$  den Kehrwert der Definition des Front–Stubs (3.35) ein und nutzen die Martingaleigenschaft der LIBOR–Raten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ P(\tau, T_{\eta(\tau)})^{-1} \mid \mathcal{F}_t \right] &= 1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \left( \xi(\tau) \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ L_{\eta(\tau)-1}(T_{\eta(\tau)-1}) \mid \mathcal{F}_t \right] \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi(\tau)) \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ L_{\eta(\tau)}(\tau) \mid \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= 1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \left( \xi(\tau) L_{\eta(\tau)-1}(t) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi(\tau)) \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ L_{\eta(\tau)}(\tau) \mid \mathcal{F}_t \right] \right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des zweiten Erwartungswertes  $\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)}}} \left[ L_{\eta(\tau)}(\tau) \mid \mathcal{F}_t \right]$  können wir allerdings nicht direkt die Martingaleigenschaft anwenden, da  $L_{\eta(\tau)}(\tau)$  unter dem Forward Maß

$P^{T_{\eta(\tau)}}$  nicht zwingend die Martingaleigenschaft besitzt. Um auch diesen Erwartungswert zu bestimmen, müssen wir eine Konvexitätskorrektur durchführen. Für eine ausführliche Darstellung des Themas siehe beispielsweise [Pel01]. Wir wollen an dieser Stelle auf die detaillierte Herleitung verzichten. Der Beweis für die verwendete Formel findet sich in [Rut97]. Setzen wir diesen Korrekturfaktor ein, so erhalten wir insgesamt für den Back–Stub:

$$\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = 1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \left( \xi(\tau) L_{\eta(\tau)-1}(t) + (1 - \xi(\tau)) L_{\eta(\tau)}(t) h(t, \tau, L_{\eta(\tau)}(t)) \right), \quad (3.37)$$

wobei  $h(t, \tau, L_{\eta(\tau)}(t))$  den Konvexitätskorrekturfaktor bezeichnet, der gegeben ist durch:

$$h(t, \tau, L_{\eta(\tau)}(t)) = 1 + \frac{(T_{\eta(\tau)+1} - T_{\eta(\tau)}) L_{\eta(\tau)}(t) (\exp(\int_t^\tau \sigma_{\eta(\tau)}(s)^2 ds) - 1)}{1 + (T_{\eta(\tau)+1} - T_{\eta(\tau)}) L_{\eta(\tau)}(t)}. \quad (3.38)$$

Mit den Formeln (3.35), (3.36) und (3.37) ist die konstante Interpolation des Zerobonds  $P(t, \tau)$  unter der Aufteilung 1 für  $\tau$  beliebig mit  $T_0 \leq t \leq \tau \leq T_{N-1}$  vollständig bestimmt.

Wir wollen uns jetzt wieder den Kriterien aus Kapitel 3.2 zuwenden. Durch die Bestimmung des Front–Stubs über (3.35), ist unter der Voraussetzung  $\xi(t) < 1$  für alle  $T_{\eta(t)-1} < t < T_{\eta(t)}$  das Kriterium der Stochastizität erfüllt, da nicht mehr nur die LIBOR–Rate  $L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}) = L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$ , die bereits zum Zeitpunkt  $T_{\eta(t)-1}$  gefixt wird, sondern auch  $L_{\eta(t)}(t) = L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})$  zur Bestimmung von  $P(t, T_{\eta(t)})$  herangezogen wird. Zwischen zwei Gitterpunkten gilt  $\xi < 1$ , so dass beide Anteile nicht verschwinden. Mit dem Einfluss durch  $L_{\eta(t)}(t)$  ist die Stochastizitätseigenschaft gegeben. Allerdings ist zu beobachten, dass die Volatilität der interpolierten LIBOR–Raten durch den Anteil der Rate  $L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})$  insgesamt auf einem niedrigeren Niveau ist, als bei den simulierten LIBOR–Raten, vgl. auch [Wer10].

Neben der Stochastizität ist auch das viel bedeutendere Kriterium, nämlich die Arbitragefreiheit erfüllt. Da wir aus dem für jeden Zeitpunkt stochastischen Front–Stub, den Back–Stub über die No–Arbitragebedingung definieren, gibt es in diesem Interpolationsansatz keine Arbitragemöglichkeiten beim Handel mit den interpolierten Zerobonds bzw. mit den interpolierten LIBOR–Raten (keine interne Arbitragemöglichkeit).

Allerdings ist eine Arbitragemöglichkeit gegeben, falls die LIBOR–Raten negativ werden. Dies ist möglich, falls die Struktur der LIBOR–Raten stark ansteigend ist. Wir orientieren uns nachfolgend an [BJ09] und geben ein ähnliches Beispiel, in dem die interpolierte LIBOR–Rate negativ wird.

Wir wollen die konstante Interpolation mit Abhängigkeit zu den nächstgelegenen Gitterstellen anwenden zur Bestimmung der LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$ , wobei wir annehmen, dass  $0 = T_0 \leq T_{\eta(\tau)-1} < t \leq \tau < T_{\eta(\tau)} \leq T_{N-1}$  gilt. Außerdem sei  $\delta_{\eta(\tau)-1} = T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}$  und wir nehmen  $\delta_{\eta(\tau)}$  so groß an, dass  $T_{\eta(\tau)} < \tau + \delta_{\eta(\tau)-1} < T_{\eta(\tau)+1}$  erfüllt ist. Schematisch wollen wir also den folgenden Fall betrachten:

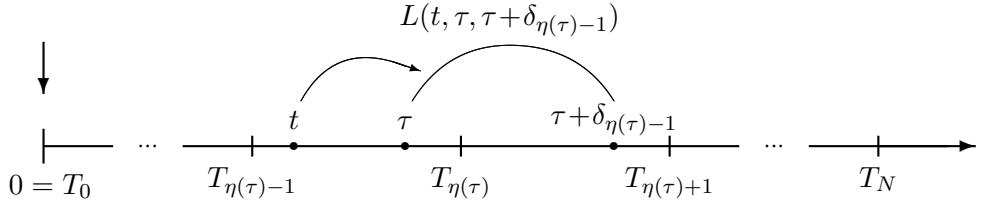


Abbildung 3.5: Beispiel LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$

Verwenden wir die Formel (3.1) und nutzen im vorliegenden Fall  $T_{\eta(t)} = T_{\eta(\tau)}$  aus, so folgt für die LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  unter Verwendung der konstanten Interpolation mit Abhängigkeit zu den Gitterstellen:

$$\begin{aligned} L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) &= \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \left( \frac{P(t, \tau)}{P(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \left( \frac{P(t, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}}{P(t, T_{\eta(\tau)}) P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1}) \frac{1}{P(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)+1})}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \left( \frac{\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})}}{P(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1}) \frac{1}{P(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)+1})}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \left( \frac{(1 + \delta_{\eta(\tau)} L_{\eta(\tau)}(t)) (1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \cdot \Lambda)}{1 + (T_{\eta(\tau)+1} - (\tau + \delta_{\eta(\tau)-1})) \cdot \Psi} - 1 \right), \end{aligned}$$

wobei  $\Lambda$  und  $\Psi$  gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \left( \xi(\tau) L_{\eta(\tau)-1}(T_{\eta(\tau)-1}) + (1 - \xi(\tau)) L_{\eta(\tau)}(t) \right) \quad \text{und} \\ \Psi &:= \left( \xi(\tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) L_{\eta(\tau)}(t) + (1 - \xi(\tau + \delta_{\eta(\tau)-1})) L_{\eta(\tau)+1}(t) h(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}, L_{\eta(\tau)+1}(t)) \right). \end{aligned}$$

Im Beispiel A.1 des Anhangs wird gezeigt, dass der Bruch

$$\frac{(1 + \delta_{\eta(\tau)} L_{\eta(\tau)}(t)) (1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \cdot \Lambda)}{1 + (T_{\eta(\tau)+1} - (\tau + \delta_{\eta(\tau)-1})) \cdot \Psi}, \quad (3.39)$$

einen Wert kleiner als 1 annehmen kann, so dass die LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  negativ wird. Dies ist der Fall, wenn eine stark ansteigende LIBOR–Struktur vorliegt. Um dies

zu verdeutlichen wählen wir beispielhaft  $L_{\eta(\tau)-1}(T_{\eta(\tau)-1}) = 1,5\%$ ,  $L_{\eta(\tau)}(t) = 3,5\%$  und  $L_{\eta(\tau)+1}(t) = 18,5\%$ . Dieses Beispiel sieht zunächst unrealistisch aus, allerdings können solche oder ähnliche Werte bei einer Monte–Carlo–Simulation durchaus auftreten. Der vorliegende Interpolationsansatz wird also in den meisten, aber nicht in allen Fällen zu nicht negativen LIBOR–Raten führen.

Ein weiteres bedeutendes Merkmal ist die Stetigkeit. Diese ist aber analog zu dem Ansatz der einfachen konstanten Interpolation auch bei der Einführung einer Abhängigkeit erfüllt, da die Funktion  $\xi$  im Grenzfall jeweils 1 bzw. 0 wird.

Im direkten Vergleich zur konstanten Interpolation aus Abschnitt 3.3.3 erhält man infolge der Einführung der Gewichtung durch die Funktion  $\xi$  die Arbitragefreiheit und die Eigenschaft der Stochastizität. Allerdings kann sich bei stark ansteigenden LIBOR–Strukturen das Problem der negativen Raten ergeben.

Beveridge und Joshi verallgemeinern und erweitern in ihrem Artikel [BJ09] die Interpolationsmöglichkeit von Schlägl. Der von Beveridge und Joshi vorgeschlagene Ansatz wird im sogenannten „Displaced Diffusion LIBOR–Markt–Modell“ betrachtet. Zudem wird ein Skalierungsfaktor eingeführt, so dass dieser Interpolationsansatz unter gegebenen Voraussetzungen arbitragefrei ist und zu positiven Raten führt.

### 3.3.5 Ansatz zur Interpolation der Bond–Volatilität

In dem nachfolgenden Interpolationsansatz wird die Interpolation der LIBOR–Raten nicht nur auf die Interpolation der Zerobonds reduziert, sondern durch einen Zusammenhang zwischen Bond–Preisen, die von 0 und von  $t$  aus beobachtet werden, und durch die Verwendung der Bond–Preis–Dynamik aus dem HJM–Modell, wird eine Reduktion auf die Interpolation der Bond–Volatilität erreicht. Die Ausführungen orientieren sich hierbei an [PA10b].

Das Standard LIBOR–Markt–Modell, wie es in Kapitel 2.1 eingeführt wurde, ist nach Konstruktion ein arbitragefreies Modell, d.h. für  $t, T \in [0, T_N]$  mit  $t \leq T$  ist für die Zerobonds die folgende No–Arbitragebedingung erfüllt:

$$P(0, T) = N_0 \mathbb{E}^{P^N} \left[ \frac{P(t, T)}{N_t} \right],$$

wobei  $N$  das Numéraire und  $P^N$  das zugehörige äquivalente Martingalmaß ist. Insbesondere gilt dann auch die No–Arbitragebedingung (3.14), die auf Seite 47 hergeleitet wurde:

$$P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})].$$

Das Ziel ist die Angabe eines Interpolationsschemas für die Zerobonds, das auch die No–Arbitragebedingung für die Zeitpunkte zwischen den Gitterpunkten erfüllt, also die Bedingung (3.13), die ebenfalls auf Seite 47 angegeben wurde:

$$P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)].$$

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst den Back–Stub  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  aus der zweiten Aufteilung. Hierfür nehmen wir den folgenden Zusammenhang der Zerobonds zu den Beobachtungszeitpunkten 0 und  $t$  an:

$$P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) = P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) + \alpha(\tau) (P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) - P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})), \quad (3.40)$$

wobei die Funktion  $\alpha$  zunächst eine beliebige Funktion ist, die nur an den Stellen  $T_{\eta(\tau)-1}$  und  $T_{\eta(\tau)}$  festgelegt sein muss durch die Werte  $\alpha(T_{\eta(\tau)-1}) = 0$  und  $\alpha(T_{\eta(\tau)}) = 1$ .

Dergestalt wird wegen der natürlichen Erfüllung von Bedingung (3.14) auch die No–Arbitragebedingung (3.13) eingehalten, denn:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)] \\ &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) + \alpha(\tau) (P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) - P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))] \\ &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) + \alpha(\tau) (\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(\tau)-1}}} [P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})] - P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})) \\ &\stackrel{(3.14)}{=} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) + \alpha(\tau) (P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) - P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})) \\ &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau). \end{aligned}$$

Das Ziel ist nun die Funktion  $\alpha$  genauer zu spezifizieren. In einem ersten Schritt geben wir als Motivation den zu Grunde gelegten Zusammenhang der Zerobonds (3.40) in Form einer Differentialgleichung an, wobei  $D(dt)$  ein Platzhalter für auftretende Driftterme sei:

$$dP(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) = D(dt) + \alpha(\tau) dP(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \quad (3.41)$$

Aus dem HJM–Modellrahmen sind die Dynamiken der Zerobonds  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  und  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  bekannt, die gegeben sind durch:

$$\frac{dP(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)} = D(dt) + (\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, \tau)) dW_t,$$

und

$$\frac{dP(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} = D(dt) + (\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)})) dW_t,$$

wobei  $\sigma_P$  jeweils die Bondvolatilität bezeichnet. Zur genaueren Beschreibung des HJM–Modells sei auf den Abschnitt A.2 des Anhangs verwiesen.

Man erkennt an den Gleichungen aus dem HJM–Modellrahmen, dass zwischen der Funktion  $\alpha$  in (3.41) und den Bondvolatilitäten aus den Darstellungen des HJM–Modellrahmens ein Zusammenhang besteht. Für die Funktion  $\alpha$  wählt man aus diesem Grund den Ansatz:

$$\begin{aligned} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, \tau)\| \\ = \alpha(\tau) P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)})\|. \end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung um, so erhalten wir für  $\alpha$ :

$$\alpha(\tau) = \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \frac{\|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, \tau)\|}{\|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)})\|}.$$

Da in dieser Definition von  $\alpha$  noch der Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  auftritt, der nicht bekannt ist, führen wir eine Approximation durch. Genauer gesagt benutzen wir das Freezing, das wir auch im Beweis zu Satz ?? von Seite ?? verwendet haben. Da wir das Freezing sowohl im Zähler, als auch im Nenner des Bruchs  $\frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}$  durchführen, ist der Fehler der Approximation sehr klein. Für  $\alpha$  erhalten wir somit:

$$\alpha(\tau) \approx \frac{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \frac{\|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, \tau)\|}{\|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)})\|}. \quad (3.42)$$

Das Ziel ist die Interpolation des Zerobonds  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$ . Aus Gleichung (3.40) sind jetzt bis auf die Bondvolatilität  $\sigma_P(t, \tau)$  alle Bestandteile bekannt. Insgesamt haben wir also die Interpolation des Zerobonds auf die Interpolation der Bondvolatilität reduziert. Die Interpolation der Volatilität eines Zerobonds gestaltet sich aufgrund der wenigen einzuhalgenden No–Arbitragebedingungen (falls es überhaupt welche gibt, vgl. [PA10b]) wesentlich einfacher. Beispielsweise ist es möglich, die Interpolation der Bondvolatilität  $\sigma_P(t, \tau)$  in Form einer linearen Interpolation aus den Werten  $\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1})$  und  $\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)})$  vorzunehmen. Mit der linearen Interpolationsformel 3.7 folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_P(t, \tau) &= \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) + \frac{\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)}) - \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \\ &= \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)}) \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}}. \end{aligned}$$

Andererseits wird in [PA10b] ein Vorschlag unterbreitet, der vorsieht die Bondvolatilität aus dem Extended–Vasicek–Modell mit positiver und konstanter Mean–Reversion–Geschwindigkeit  $\kappa$  anzusetzen. Für eine überblicksartige Beschreibung dieses Short–Rate–Modells sei auf den Abschnitt A.3 des Anhangs verwiesen. Die Bondvolatilität ist im Extended–Vasicek–Modell allgemein gegeben durch:

$$\sigma_P(t, T) = \sigma_r(t)G(t, T), \quad (3.43)$$

wobei  $\sigma_r(t)$  die Short–Rate–Volatilität im Zeitpunkt  $t$  bezeichnet und  $G(t, T)$  gegeben ist durch:

$$G(t, T) = \int_t^T \exp\left(-\int_t^u \kappa(s)ds\right) du,$$

wobei hier  $\kappa(s)$  für die Mean–Reversion–Geschwindigkeit steht und im allgemeinen Fall zeitabhängig sein kann. Da wir eine konstante Mean–Reversion–Rate  $\kappa$  annehmen, ergibt sich (3.43) zu:

$$\sigma_P(t, T) = \sigma_r(t) \int_t^T \exp(-\kappa(u-t)) du = \sigma_r(t) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}. \quad (3.44)$$

Eine Ergänzung durch 0 und die Anwendung der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion liefert mit (3.44) die Differenzen der Bondvolatilitäten aus (3.42):

$$\begin{aligned} \|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, \tau)\| &= \left\| \sigma_r(t) \frac{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)}}{\kappa} - \sigma_r(t) \frac{1 - e^{-\kappa(\tau-t)}}{\kappa} \right\| \\ &= \left\| \frac{\sigma_r(t)}{\kappa} \left( e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t+\tau-T_{\eta(\tau)-1})} - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \right) \right\| \\ &= \left\| -\frac{\sigma_r(t)}{\kappa} e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \left( 1 - e^{-\kappa(\tau-T_{\eta(\tau)-1})} \right) \right\| \\ &= \left| -\frac{\sigma_r(t)}{\kappa} e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \right| \cdot \left\| 1 - e^{-\kappa(\tau-T_{\eta(\tau)-1})} \right\|, \end{aligned}$$

und mit einer ähnlichen Ergänzung folgt mit dem gleichen Argument:

$$\|\sigma_P(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \sigma_P(t, T_{\eta(\tau)})\| = \left| -\frac{\sigma_r(t)}{\kappa} e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \right| \cdot \left\| 1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)}-T_{\eta(\tau)-1})} \right\|.$$

Nach Voraussetzung ist  $T_{\eta(\tau)-1} < \tau \leq T_{\eta(\tau)}$  und die Mean–Reversion–Rate  $\kappa$  eine positive Konstante. Damit folgt

$$1 - e^{-\kappa(\tau-T_{\eta(\tau)-1})} \geq 0 \quad \text{und} \quad 1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)}-T_{\eta(\tau)-1})} \geq 0.$$

Für die Funktion  $\alpha$  aus (3.42) folgt damit schließlich die Approximation:

$$\alpha(\tau) \approx \frac{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \frac{1 - e^{-\kappa(\tau-T_{\eta(\tau)-1})}}{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)}-T_{\eta(\tau)-1})}}, \quad (3.45)$$

die insbesondere die erforderlichen Eigenschaften  $\alpha(T_{\eta(\tau)-1}) = 0$  und  $\alpha(T_{\eta(\tau)}) = 1$  erfüllt.

Obgleich der Ansatz über das Extended–Vasicek–Modell gewählt wurde, der die Volatilität der Short–Rate  $\sigma_r$  beinhaltet, erhält man mit der Formel (3.45) eine Darstellung für die Funktion  $\alpha$ , in der die Short–Rate–Volatilität nicht mehr berücksichtigt werden muss.

Setzen wir schließlich die Funktion  $\alpha$  aus (3.45) in (3.40) ein, so ergibt sich für den Back–Stub die Form:

$$P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) = P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \left( 1 + \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \nu_\tau - \nu_\tau \right), \quad (3.46)$$

mit

$$\nu_\tau = \frac{1 - e^{-\kappa(\tau - T_{\eta(\tau)-1})}}{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})}},$$

wobei die Mean–Reversion–Geschwindigkeit  $\kappa$  wahlweise durch eine Kalibrierung des verwendeten Extended–Vasicek–Modells oder individuell festlegt wird.

Um auf die allgemeinen LIBOR–Raten  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  mit  $\tau_1 \leq \tau_2$  schließen zu können, benötigen wir noch eine Interpolation für den Front–Stub der Bondaufteilung. In der Quelle [PA10b] wird jedoch für die Front–Stub–Interpolation kein Vorschlag unterbreitet. Für den Front–Stub ist es erforderlich die Verwendung von toten Zerobonds auszuschließen, das heißt die Benutzung von Zerobonds, deren Beobachtungszeitpunkt nach dem Laufzeitstart des Bonds liegt. Würde man das oben beschriebene Verfahren für den Back–Stub auf den Front–Stub übertragen wollen, so müsste man unter anderem den toten Zerobond  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  betrachten. Setzt man andererseits eine Volatilität von 0 für die kurzen Bonds voraus, wie es z.B. bei der lineraren Interpolation in Abschnitt 3.3.1 angenommen wurde, so würde dies der Idee der Bondvolatilitäts–Interpolation von Grund auf widersprechen. Auch die Idee als Referenz in dem Zusammenhang zwischen Bonds mit den Beobachtungszeitpunkten 0 und  $t$  das nächste Gitterintervall, also das Zeitintervall  $[T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1}]$  zu verwenden, liefert nicht den gewünschten Erfolg, da man in diesem Fall keine geeignete Darstellung für die Funktion  $\alpha$  erhält<sup>2</sup>.

Um dennoch eine vollständige Interpolation durchführen zu können, greifen wir bei der Front–Stub–Interpolation auf die konstante Interpolation aus dem Abschnitt 3.3.3 zurück.

---

<sup>2</sup>Aufgrund der unterschiedlichen Zeitintervalle die zu Grunde gelegt wurden, kürzt sich die Short–Rate–Volatilität  $\sigma_r$  nicht mehr heraus.

Auch bei diesem Interpolationsverfahren wollen wir die Gütekriterien aus dem Unterkapitel 3.2 überprüfen.

Die erste Eigenschaft, die wir überprüfen wollen, ist die Arbitragefreiheit. In der Herleitung des Interpolationsansatzes haben wir genau einen solchen Ansatz konstruiert, der auch für alle beliebigen Stellen zwischen den Gitterpunkten die No–Arbitrage–Bedingung erfüllt. Es existiert also keine interne Arbitragemöglichkeit bei der Verwendung des Back–Stubs. Allerdings mussten wir feststellen, dass es keine Möglichkeit gab, um diese Interpolationsidee auch auf den Front–Stub zu übertragen. Je nach dem welchen Ansatz man dann für den Front–Stub verwendet, kann also doch eine Arbitragemöglichkeit existieren.

Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass bei diesem Ansatz auch negative LIBOR–Raten möglich sein können. Dies würde zusätzlich zu einer Arbitragemöglichkeit führen, dem sogenannten Arbitrage with cash. Ein Beispiel für eine negative LIBOR–Rate wird im Anhang gegeben, siehe Beispiel A.4.

Ähnlich wie bei der Arbitragefreiheit ist zumindest auch für den Back–Stub das Stochastizitätskriterium erfüllt, da der Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  die in  $t$  beobachtete LIBOR–Rate berücksichtigt. Möchte man eine LIBOR–Rate interpolieren, die den Front–Stub benötigt, so ist die Stochastizität abhängig von dem verwendeten Interpolationsansatz.

Die Stetigkeit der interpolierten LIBOR–Raten beim Übergang auf die umliegenden Gitterpunkte, d.h. beim Übergang auf die simulierten LIBOR–Raten, ist im Fall der ausschließlichen Verwendung des Back–Stubs offensichtlich gegeben, da es genügt die Stetigkeit für die Zerobonds nachzuweisen. Schon bei der Konstruktion dieser Interpolationstechnik wurden Bedingungen an die Funktion  $\alpha$  gestellt, die den stetigen Übergang zu den Zerobonds auf den Gitterpunkten ermöglichen. Wir wollen nachfolgend die Stetigkeit für den Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$  aus Gleichung (3.46) nachweisen. Für  $\nu_\tau$  erhalten wir:

$$\lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \nu_\tau = \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \frac{1 - e^{-\kappa(\tau - T_{\eta(\tau)-1})}}{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})}} = 0,$$

und

$$\lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \nu_\tau = \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \frac{1 - e^{-\kappa(\tau - T_{\eta(\tau)-1})}}{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})}} = 1,$$

so dass sich für die Grenzwerte des Back–Stubs (3.46) ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)-1}) \left( 1 + \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \cdot 0 - 0 \right) \\ &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)-1}) = 1, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \left( 1 + \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \cdot 1 - 1 \right) \\ &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \end{aligned}$$

Insgesamt sind im Fall der Bond–Volatilitäts–Interpolation die Stetigkeit und die Stochastizität gegeben. Wir konnten allerdings ein Gegenbeispiel für die Positivität der interpolierten LIBOR–Raten angeben, wodurch die Arbitragefreiheit des Modells unter Hinzunahme dieser Interpolationstechnik nicht mehr in vollem Umfang gegeben ist.

### 3.3.6 Interpolation der Zerobonds über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell

Der vorliegende Abschnitt befasst sich mit einem Interpolationsschema für Zerobonds, bei dem wir über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell mit konstanter, positiver Mean–Reversion–Geschwindigkeit  $\kappa$  (auch Mean–Reversion–Rate genannt), einen Zusammenhang der Zerobonds mit Beobachtungszeitpunkt 0 und  $t$  herleiten. Die Ausführungen beziehen sich hierbei erneut auf die Quelle [PA10b].

Die Idee, in einem Interpolationsansatz für die LIBOR–Raten eine bekannte Bewertungsformel aus einem Short–Rate–Modell zu verwenden, ist darin begründet, dass über diese Formel die Stochastizität für das Interpolationsintervall berücksichtigt wird. Bei den zuerst vorgestellten Interpolationsansätzen, wie beispielsweise der linearen Interpolation, hat man die Stochastizität ausgeblendet. Für lange Interpolationsintervalle muss man hierbei mit Ungenauigkeiten rechnen. Mit dem Interpolationsansatz aus dem vorliegenden Abschnitt erhoffen wir uns auch für längere Zeiträume gute Interpolationsergebnisse zu erzielen.

Wir werden Formeln für den Front– bzw. den Back–Stub erhalten, die die Short–Rate nicht explizit einfließen lassen (wohl aber die Short–Rate–Volatilität). Somit ist eine tiefergehende Betrachtung der Short–Rate selbst in diesem Zusammenhang nicht nötig<sup>3</sup>.

Wir wollen die zweite Unterteilungsmöglichkeit der Zerobonds voraussetzen:

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)-1}) P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \quad \text{für } 0 < t \leq \tau \leq T_N.$$

<sup>3</sup>Eine solche Betrachtung ist an dieser Stelle auch nicht gewollt, da die Short–Rate eine nicht am Markt zu beobachtene Größe ist. Genauer handelt es sich um ein mathematisches Konstrukt.

Wie bereits ausführlich erläutert, ergibt sich der mittlere Faktor aus der Bondaufteilung direkt aus den simulierten LIBOR–Raten. Der Front– und auch der Back–Stub erfordern dagegen eine Interpolation.

Für eine überblicksartige Darstellung des Extended–Vasicek–Modells sei erneut auf den Abschnitt A.3 des Anhangs verwiesen. Wir werden verwenden, dass der Zerobond–Preis in diesem Short–Rate–Modell gegeben ist durch die nachfolgende Formel:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( -x(t)G(t, T) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T)^2 \right), \quad (3.47)$$

mit den abkürzenden Schreibweisen

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) - f(0, t) \\ y(t) &= e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{2\kappa s} \sigma_r(s)^2 ds \\ G(t, T) &= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}, \end{aligned}$$

wobei  $f$  die Forward–Rate und  $r$  die Short–Rate, also die augenblicklichen Zinsen aus Definition 1.7, bezeichnen und  $\kappa$  für die konstante, positive Mean–Reversion–Rate steht.

Wir beginnen zunächst mit dem Back–Stub, also mit der Bestimmung des Zerobonds  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$ . Über die Formel (3.47) aus dem vorausgesetzten Short–Rate–Modells erhalten wir die Formel:

$$\begin{aligned} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= \frac{P(t, \tau)}{P(t, T_{\eta(\tau)-1})} \\ &= \frac{\frac{P(0, \tau)}{P(0, t)} \exp \left( -x(t)G(t, \tau) - \frac{1}{2}y(t)G(t, \tau)^2 \right)}{\frac{P(0, T_{\eta(\tau)-1})}{P(0, t)} \exp \left( -x(t)G(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2 \right)} \\ &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \exp \left( -x(t) (G(t, \tau) - G(t, T_{\eta(\tau)-1})) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}y(t) (G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right), \quad (3.48) \end{aligned}$$

wobei wir die Differenz  $G(t, \tau) - G(t, T_{\eta(\tau)-1})$  schreiben als

$$\begin{aligned} G(t, \tau) - G(t, T_{\eta(\tau)-1}) &= \frac{1 - e^{-\kappa(\tau-t)}}{\kappa} - \frac{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)}}{\kappa} \\ &= \frac{e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t+\tau-T_{\eta(\tau)-1})}}{\kappa} \\ &= \frac{1 - e^{-\kappa(\tau-T_{\eta(\tau)-1})}}{\kappa} e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \\ &= G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau) e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)}. \end{aligned}$$

In der Formel (3.48) ist in  $x(t)$  noch die Short–Rate enthalten, deren genauere Untersuchung an dieser Stelle nicht gewünscht ist. Um die Short–Rate aus der Darstellung für den Back–Stub zu entfernen, betrachten wir auch den Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  (dessen Wert über das LIBOR–Markt–Modell bekannt ist) mit der Formel (3.47). Das Ziel ist hierbei eine zu (3.48) ähnliche Form anzugeben und beide Formeln nach der Short–Rate aufzulösen, um sie gleichsetzen zu können:

$$\begin{aligned}
 P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) &= \frac{P(t, T_{\eta(\tau)})}{P(t, T_{\eta(\tau)-1})} \\
 &= \frac{\frac{P(0, T_{\eta(\tau)})}{P(0, t)} \exp(-x(t)G(t, T_{\eta(\tau)}) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(\tau)})^2)}{\frac{P(0, T_{\eta(\tau)-1})}{P(0, t)} \exp(-x(t)G(t, T_{\eta(\tau)-1}) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2)} \\
 &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \exp\left(-x(t)(G(t, T_{\eta(\tau)}) - G(t, T_{\eta(\tau)-1}))\right. \\
 &\quad \left.- \frac{1}{2}y(t)(G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2)\right) \\
 &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \exp\left(-x(t)\left(G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)}\right)\right. \\
 &\quad \left.- \frac{1}{2}y(t)(G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2)\right). \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Wir lösen jetzt die Gleichungen (3.48) und (3.49) jeweils nach  $-x(t)e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)}$  auf.

Für (3.48) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 &-x(t)e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \\
 &= \frac{1}{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)} \left( \log \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)} + \frac{1}{2}y(t)(G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right),
 \end{aligned}$$

und analog für (3.49) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &-x(t)e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)-1}-t)} \\
 &= \frac{1}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \left( \log \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} + \frac{1}{2}y(t)(G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right).
 \end{aligned}$$

Die obigen zwei Ausdrücke können wir nun gleichsetzen und nach einigen Umformungen ergibt sich wie folgt eine Darstellung für den Back–Stub  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)$ :

$$\begin{aligned}
 &\log \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau)} + \frac{1}{2}y(t)(G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \\
 &= \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \left( \log \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} + \frac{1}{2}y(t)(G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \quad & \log P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \\
 &= \log P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) - \frac{1}{2}y(t)(G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \\
 &\quad + \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \log \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \\
 &\quad + \frac{1}{2}y(t) \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \\
 \\ 
 \Leftrightarrow \quad & \log P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \\
 &= \log P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) + \log \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}^{\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}} \\
 &\quad - \frac{1}{2}y(t)(G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}y(t) \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \\
 \\ 
 \Leftrightarrow \quad & P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \\
 &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \left( \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \right)^{\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}} \\
 &\quad \exp \left( -\frac{1}{2}y(t)(G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right) \\
 &\quad \exp \left( \frac{1}{2}y(t) \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right). \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Die Short–Rate–Volatilitäten  $\sigma_r(t)$  aus (3.50) erhält man aus einer Kalibrierung des Short–Rate–Modells an die gegebenen Marktdaten. Die Mean–Reversion–Rate kann ebenfalls kalibriert, oder individuell festgelegt werden.

Ähnlich wie bei der Bestimmung des Back–Stubs, bestimmen wir mit der Formel (3.47) auch bei der Berechnung des Front–Stubs  $P(t, T_{\eta(t)})$ , neben dem Zerobond  $P(t, T_{\eta(t)})$  selbst, noch einen weiteren Bond über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell, um die Short–Rate zu eliminieren. Da bei dem Zerobonds  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  der Beobachtungszeitpunkt nach dem Startzeitpunkt liegt, wählen wir als zweiten, im LIBOR–Markt–Modell bekannten Bond, den Zerobond  $P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})$ .

Mit (3.47) ergibt sich für den Front–Stub  $P(t, T_{\eta(t)})$  direkt die Darstellung:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = \frac{P(0, T_{\eta(t)})}{P(0, t)} \exp \left( -x(t)G(t, T_{\eta(t)}) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(t)})^2 \right). \tag{3.51}$$

Für den Preis des Zerobonds  $P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1}) &= \frac{P(t, T_{\eta(t)+1})}{P(t, T_{\eta(t)})} \\
 &= \frac{\frac{P(0, T_{\eta(t)+1})}{P(0, t)} \exp(-x(t)G(t, T_{\eta(t)+1}) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(t)+1})^2)}{\frac{P(0, T_{\eta(t)})}{P(0, t)} \exp(-x(t)G(t, T_{\eta(t)}) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(t)})^2)} \\
 &= P(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1}) \exp \left( -x(t) (G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}y(t) (G(t, T_{\eta(t)+1})^2 - G(t, T_{\eta(t)})^2) \right) \\
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Die Gleichungen (3.51) und (3.52) werden nun nach  $-x(t)$  aufgelöst. Für (3.51) ergibt sich:

$$-x(t) = \frac{1}{G(t, T_{\eta(t)})} \left( \log \frac{P(t, T_{\eta(t)})}{P(0, t, T_{\eta(t)})} + \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(t)})^2 \right),$$

sowie für (3.52):

$$\begin{aligned}
 -x(t) &= \frac{1}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} \left( \log \frac{P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{P(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}y(t) (G(t, T_{\eta(t)+1})^2 - G(t, T_{\eta(t)})^2) \right).
 \end{aligned}$$

Jetzt können wir durch Gleichsetzen die gewünschte Formel für den Front–Stub bestimmen:

$$\begin{aligned}
 &\log \frac{P(t, T_{\eta(t)})}{P(0, t, T_{\eta(t)})} + \frac{1}{2}y(t)G(t, T_{\eta(t)})^2 \\
 &= \frac{G(t, T_{\eta(t)})}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} \left( \log \frac{P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{P(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}y(t) (G(t, T_{\eta(t)+1})^2 - G(t, T_{\eta(t)})^2) \right) \\
 \Leftrightarrow &\log \frac{P(t, T_{\eta(t)})}{P(0, t, T_{\eta(t)})} \\
 &= \log \frac{P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{P(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \frac{G(t, T_{\eta(t)})}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} \\
 &\quad + \frac{1}{2}y(t) \left( \underbrace{\frac{(G(t, T_{\eta(t)+1})^2 - G(t, T_{\eta(t)})^2) G(t, T_{\eta(t)})}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} - G(t, T_{\eta(t)})^2}_{\stackrel{(*)}{=} G(t, T_{\eta(t)+1}) G(t, T_{\eta(t)})} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow P(t, T_{\eta(t)}) \\
 &= P(0, t, T_{\eta(t)}) \left( \frac{P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{P(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right)^{\frac{G(t, T_{\eta(t)})}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})}} \\
 &\quad \exp \left( \frac{1}{2} y(t) G(t, T_{\eta(t)+1}) G(t, T_{\eta(t)}) \right), \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

wobei (\*) erfüllt ist wegen:

$$\begin{aligned}
 &\frac{(G(t, T_{\eta(t)+1})^2 - G(t, T_{\eta(t)})^2) G(t, T_{\eta(t)})}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} - G(t, T_{\eta(t)})^2 \\
 &= \frac{G(t, T_{\eta(t)+1})^2 G(t, T_{\eta(t)}) - G(t, T_{\eta(t)})^2 G(t, T_{\eta(t)}) - G(t, T_{\eta(t)})^2 (G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)}))}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} \\
 &= \frac{G(t, T_{\eta(t)+1})^2 G(t, T_{\eta(t)}) - G(t, T_{\eta(t)})^2 G(t, T_{\eta(t)+1})}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} \\
 &= \frac{G(t, T_{\eta(t)+1}) G(t, T_{\eta(t)}) (G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)}))}{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})} \\
 &= G(t, T_{\eta(t)+1}) G(t, T_{\eta(t)}).
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist mit den Formeln (3.53) für den Front–Stub und (3.50) für den Back–Stub die zweite Aufteilungsmöglichkeit des Zerobonds  $P(t, \tau)$  vollständig bestimmt.

Bei der vorliegenden Interpolationstechnik ist es nicht mehr so einfach möglich die Gütekriterien aus Abschnitt 3.2 zu überprüfen. Wir wollen uns auf die Ausführungen in [PA10b] über den Back–Stub beziehen. Es wird gesagt, dass es bei dieser Interpolationsmöglichkeit keine eindeutigen Nachteile gäbe. Zudem sei sie in der Praxis vergleichsweise einfach zu implementieren und fast arbitragefrei. In [PA10b] ist dieser Ansatz also die präferierte Interpolationstechnik. Die „Fastarbitragefreiheit“ wird damit begründet, dass man die No–Arbitragebedingung (3.13) zwar in dem verwendeten Extended–Vasicek–Modell zeigen kann, man aber innerhalb des LIBOR–Markt–Modells nur eine gute Approximation bekommt. Kritisch zu bemerken ist jedoch, dass an dieser Stelle auch in der Quelle nicht eindeutig ist, wie gut die Approximation wirklich ist, so dass wir keine Möglichkeit haben zu beurteilen, wie die „Fastarbitragefreiheit“ zu interpretieren ist. Außerdem haben

wir keine Hinweise darauf, wie sich der Front–Stub verhält, in den bei der Herleitung Eigenschaften aus dem Short–Rate–Modell des Zerobonds  $P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})$  anstelle von  $P(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  einfließen.

Stochastizität ist ein weiteres Kriterium, das im vorliegenden Fall aber eindeutig erfüllt ist, da in die Konstruktion der Interpolationsmöglichkeit das Extended–Vasicek–Modell einfließt und die Formeln jeweils die Short–Rate–Volatilität berücksichtigen. Zudem sind die in den Formeln enthaltenen, in  $t$  beobachteten Zerobonds stochastisch, da sie jeweils über die zugehörige stochastische LIBOR–Rate in  $t$  gegeben sind.

Zur Positivität ist an dieser Stelle allerdings keine genaue Aussage möglich. Es ist bekannt, dass in dem verwendeten Short–Rate–Modell die Short–Rate auch negativ werden kann. Da diese jedoch in den Interpolationsformeln nicht explizit auftritt, sind die Auswirkungen auf die Positivität der LIBOR–Raten unklar. Da dieser Ansatz aber die favorisierte Interpolationstechnik darstellt, liegt die Vermutung nahe, dass die resultierenden LIBOR–Raten nicht negativ sind. Zu eventuellen Ausnahmen existieren jedoch keine Informationen und ein Gegenbeispiel konnte ebenfalls nicht gefunden werden.

Ein letztes wichtiges Kriterium ist die Stetigkeit beim Übergang von den interpolierten LIBOR–Raten zu den simulierten Raten auf den Gitterpunkten. Auch in diesem Fall werden wir anstelle der LIBOR–Raten die Zerobonds untersuchen, genauer gesagt den Front– und den Back–Stub aus den Formeln (3.53) und (3.50). Im Fall des Front–Stubs können wir nur den Fall  $t \nearrow T_{\eta(t)}$  zeigen, da sich die Grenzwerte nur auf den Anlagezeitraum der Rate beziehen und nicht den Beobachtungszeitpunkt einschließen. Würde man auch den Grenzwert  $t \searrow T_{\eta(t)-1}$  betrachten, so würde man damit eine tote Rate interpretieren wollen.

Für die Funktion  $G(t, T)$  ergibt sich:

$$\lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} G(t, T_{\eta(t)}) = \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} \frac{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(t)} - t)}}{\kappa} = 0,$$

so dass schließlich für den Front–Stub (3.53) folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} P(t, T_{\eta(t)}) &= \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} P(0, t, T_{\eta(t)}) \left( \frac{P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{P(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right) \overbrace{\frac{G(t, T_{\eta(t)+1}) - G(t, T_{\eta(t)})}{G(t, T_{\eta(t)})}}^{\rightarrow 0} \\ &\quad \exp \left( \frac{1}{2} y(t) G(t, T_{\eta(t)+1}) \underbrace{G(t, T_{\eta(t)})}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Um den stetigen Übergang des Back–Stubs zu den Zerobonds auf dem Gitter zu zeigen, betrachten wir zunächst das Verhalten des Bruchs  $\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}$ . Wir erhalten:

$$\lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} = 1.$$

Für den Back–Stub (3.50) folgt somit:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \\ &= \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \left( \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \right) \overbrace{\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}}^{\rightarrow 0} \\ & \quad \exp \left( -\frac{1}{2} y(t) \underbrace{(G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2)}_{\rightarrow 0} \right) \\ & \quad \exp \left( \frac{1}{2} y(t) \underbrace{\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}}_{\rightarrow 0} (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \\ &= \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \left( \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \right) \overbrace{\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}}^{\rightarrow 1} \\ & \quad \exp \left( -\frac{1}{2} y(t) (G(t, \tau)^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right) \\ & \quad \exp \left( \frac{1}{2} y(t) \underbrace{\frac{G(T_{\eta(\tau)-1}, \tau)}{G(T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}}_{\rightarrow 1} (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right) \\ &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \exp \left( -\frac{1}{2} y(t) (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right) \\ & \quad \exp \left( +\frac{1}{2} y(t) (G(t, T_{\eta(\tau)})^2 - G(t, T_{\eta(\tau)-1})^2) \right) \\ &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}). \end{aligned}$$

Obwohl die vorliegende Interpolationstechnik der von Piterbarg präferierte Ansatz ist und die Gütekriterien dem Anschein nach erfüllt sind, erhalten wir nur wenige eindeutige Aussagen. Umso wichtiger werden die numerischen Ergebnisse aus dem Kapitel 4 sein.

### 3.3.7 Lineare Interpolation der LIBOR–Volatilität

In diesem Interpolationsansatz wird im Gegensatz zu den vorhergehenden Möglichkeiten direkt die Volatilität der LIBOR–Raten interpoliert. Man kann hierbei eine vergleichsweise einfache, nämlich die lineare Interpolation unterstellen, da man bei der Interpolation der Volatilität keine besondere Rücksicht auf No–Arbitragebedingungen nehmen muss. Anschließend werden wir Eigenschaften des LIBOR–Markt–Modells ausnutzen, um über die lineare Interpolation der Volatilität auch eine Interpolation der stochastischen Größen, d.h. der LIBOR–Raten und der Zerobonds zu erhalten. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an dem Buch von Brace, vgl. [Bra07], und erweitern die darin enthaltenen Ideen, um eine allgemeine LIBOR–Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  bestimmen zu können.

Das Ziel bei diesem Interpolationsansatz ist die Bestimmung der unbekannten LIBOR–Raten  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  und  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$ , wobei  $\delta_{\eta(\cdot)-1} = T_{\eta(\cdot)} - T_{\eta(\cdot)-1}$  gilt. Kennt man diese Darstellungen, so kann man aus der ersten Aufteilungsmöglichkeit

$$P(t, \tau) = P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})},$$

den Front– und den Back–Stub bestimmen über die Formeln:

$$P(t, T_{\eta(t)}) = \left( \left( 1 + \delta_{\eta(t)-1} L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1}) \right)^{\frac{T_{\eta(t)} - t}{\delta_{\eta(t)-1}}} \right)^{-1}, \quad (3.54)$$

sowie

$$\frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = \left( 1 + \delta_{\eta(\tau)-1} L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \right)^{\frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{\delta_{\eta(\tau)-1}}}. \quad (3.55)$$

Auf diese Weise ist es über die Formel (3.1) dann auch möglich, alle beliebigen LIBOR–Raten  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  zu berechnen. Hierbei müssen wir  $0 < t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_{N-1}$  voraussetzen, da sonst simulierte LIBOR–Raten in die Interpolationsformeln eingehen würden, die über den Zeithorizont  $T_N$  hinausgehen. Alternativ werden diese Raten, wie auch in Kapitel 4 geschehen, mitsimuliert.

Der Vorteil der Formeln (3.54) und (3.55) im Gegensatz zu den Interpolationsformeln aus der konstanten Interpolation, vgl. Abschnitt 3.3.3, ist die Tatsache, dass jeweils direkt die LIBOR–Rate mit dem passenden Startzeitpunkt interpoliert wird und in die Berechnung eingeht. Bei der konstanten Interpolation dagegen hat man lediglich die LIBOR–Rate von den umliegenden Gitterpunkten auf das benötigte Intervall bezogen.

In einem ersten Schritt bestimmen wir die Interpolationsformel für die LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$ . Hierzu wählen wir einen Ansatz, bei dem wir zunächst eine Interpolation für die unbekannte Volatilität  $\sigma(t, \tau)$  dieser LIBOR–Rate angeben.

Da in diesem Interpolationsansatz die LIBOR–Volatilitäten im Mittelpunkt stehen, verwenden wir die ausführliche Schreibweise für die Volatilitäten. Mit der allgemeinen linearen Interpolationsformel nach Isaac Newton erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sigma(t, \tau) &= \sigma(t, T_{\eta(\tau)-1}) + \frac{\sigma(t, T_{\eta(\tau)}) - \sigma(t, T_{\eta(\tau)-1})}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \\ &= \frac{1}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \left( \sigma(t, T_{\eta(\tau)-1}) (T_{\eta(\tau)} - \tau) + \sigma(t, T_{\eta(\tau)}) (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \right).\end{aligned}$$

Um später zusätzliche Bedingungen erfüllen zu können, wollen wir an dieser Stelle bereits eine Funktion  $\vartheta(\cdot)$  mit den Eigenschaften  $\vartheta(T_{\eta(\tau)-1}) = 1$  und  $\vartheta(T_{\eta(\tau)}) = 1$  einführen. Außerdem verwenden wir eine abkürzende Schreibweise mit den Funktionen:

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \vartheta(\tau) (T_{\eta(\tau)} - \tau) \quad \text{und} \quad \beta(\tau) = \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \vartheta(\tau) (\tau - T_{\eta(\tau)-1}),$$

die bei der Implementierung den Vorteil haben, dass man sie schon vorher berechnen kann.

Mit  $\delta_{\eta(\tau)-1} = T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}$  ergibt sich so schließlich:

$$\begin{aligned}\sigma(t, \tau) &= \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \vartheta(\tau) \left( \sigma(t, T_{\eta(\tau)-1}) (T_{\eta(\tau)} - \tau) + \sigma(t, T_{\eta(\tau)}) (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) \right) \\ &= \alpha(\tau) \sigma(t, T_{\eta(\tau)-1}) + \beta(\tau) \sigma(t, T_{\eta(\tau)}).\end{aligned}\tag{3.56}$$

Wir gehen aus von der Dynamik der LIBOR–Rate  $L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$  unter dem natürlichen Forward Maß  $P^{T_{\eta(\tau)}}$ . Verwenden wir die Kurzschreibweise, so ergibt sich:

$$dL_{\eta(\tau)-1}(t) = \sigma(t, T_{\eta(\tau)-1}) L_{\eta(\tau)-1}(t) dW_{\eta(\tau)-1}^{P^{T_{\eta(\tau)}}}(t) \quad \text{unter } P^{T_{\eta(\tau)}}.$$

Hierfür erhält man mit der Itô–Formel, die wie auch im Beweis von „Black 76“, vgl. Satz (2.1), auf die log–Dynamik angewendet wird, die folgende Darstellung:

$$L_{\eta(\tau)-1}(t) = L_{\eta(\tau)-1}(0) \exp \left( \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) dW_{\eta(\tau)-1}^{P^{T_{\eta(\tau)}}}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds \right).$$

In geänderter Schreibweise erhalten wir den Ausdruck:

$$\log \frac{L_{\eta(\tau)-1}(t)}{L_{\eta(\tau)-1}(0)} = \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) dW_{\eta(\tau)-1}^{P^{T_{\eta(\tau)}}}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds.\tag{3.57}$$

Unter der Annahme, dass wir das Forward Maß  $P^{\tau + \delta_{\eta(\tau)-1}}$  mit dem Maß  $P^{T_{\eta(\tau)}}$  identifizieren, können wir die LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  analog zu (3.57) schreiben. Um

die Darstellung übersichtlich zu gestalten, werden wir auch für diese LIBOR–Rate eine Kurzschreibweise verwenden, die wir sinngemäß definieren durch:

$$L_\tau(t) := L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}).$$

Für die LIBOR–Rate  $L_\tau(t)$  setzen wir an:

$$\log \frac{L_\tau(t)}{L_\tau(0)} \approx \int_0^t \sigma(s, \tau) dW^{P^{T_{\eta(\tau)}}}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, \tau)^2 ds, \quad (3.58)$$

wobei wir als Brownsche Bewegung aufgrund der Forward Maß Identifizierung eine Brownsche Bewegung  $W^{P^{T_{\eta(\tau)}}}$  unter dem Maß  $P^{T_{\eta(\tau)}}$  verwenden. Wir setzen nun in (3.58) die lineare Interpolation der Volatilität (3.56) ein und erhalten:

$$\log \frac{L_\tau(t)}{L_\tau(0)} \approx \int_0^t (\alpha(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) + \beta(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)})) dW^{P^{T_{\eta(\tau)}}}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, \tau)^2 ds.$$

Identifizieren wir zusätzlich auch die Forward Maße  $P^{T_{\eta(\tau)}}$  und  $P^{T_{\eta(\tau)+1}}$  miteinander und verwenden für die Brownschen Bewegungen unter diesen Maßen gerade die entsprechenden Brownschen Bewegungen aus dem zu Grunde liegenden LIBOR–Markt–Modell, so können wir den Ausdruck durch das Addieren einer 0 auch schreiben als:

$$\begin{aligned} \log \frac{L_\tau(t)}{L_\tau(0)} &\approx \alpha(\tau) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) dW_{\eta(\tau)-1}^{P^{T_{\eta(\tau)}}}(s) - \alpha(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds \\ &\quad + \beta(\tau) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)}) dW_{\eta(\tau)}^{P^{T_{\eta(\tau)+1}}}(s) - \beta(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)})^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \alpha(\tau) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds + \beta(\tau) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)})^2 ds - \int_0^t \sigma(s, \tau)^2 ds \right), \end{aligned}$$

und erhalten auf diese Weise über (3.57) und eine analoge Form für  $L_{\eta(\tau)}(t)$  die Interpolation der LIBOR–Rate  $L_\tau(t) = L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$ :

$$\begin{aligned} \log \frac{L_\tau(t)}{L_\tau(0)} &\approx \alpha(\tau) \log \frac{L_{\eta(\tau)-1}(t)}{L_{\eta(\tau)-1}(0)} + \beta(\tau) \log \frac{L_{\eta(\tau)}(t)}{L_{\eta(\tau)}(0)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \alpha(\tau) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds + \beta(\tau) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)})^2 ds - \int_0^t \sigma(s, \tau)^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Da der letzte Term noch die unbekannte Volatilität  $\sigma(s, \tau)$  enthält, setzen wir erneut die Interpolationsformel (3.56) ein und lösen nach  $L_\tau(t)$  auf. Die Interpolationsformel für die

LIBOR–Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  ist dann in ausgeschriebener Form gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) &\approx L(0, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \\
 &\cdot \left[ \left( \frac{L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{L(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \right)^{\alpha(\tau)} \cdot \left( \frac{L(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})}{L(0, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})} \right)^{\beta(\tau)} \right. \\
 &\exp \left( \alpha(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds + \beta(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)})^2 ds \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \alpha(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) + \beta(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)}) \right)^2 ds \right) \right]. \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

Um als nächstes auch die LIBOR–Rate  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  zu bestimmen, müsste man die Gleichung (3.60) für  $\tau = t$  auswerten. Allerdings ergibt sich dann das Problem, dass die Formel zunächst nur für  $t \leq T_{\eta(\tau)-1}$  wohldefiniert ist. Für  $\tau = t$  stößt man auf das Problem einen toten LIBOR, genauer die LIBOR–Rate  $L(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$ , berechnen zu müssen. Um auch eine Gestalt für  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  angeben zu können, werden wir nachfolgend eine geeignete Form für die tote LIBOR–Rate  $L_{\eta(t)-1}(t) = L(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  herleiten.

Wir wollen einen Ansatz wählen, bei dem wir die virtuelle LIBOR–Rate  $L_{\eta(t)-1}(t)$  über einen bedingten Erwartungswert bestimmen, genauer durch:

$$\begin{aligned}
 &\frac{L_{\eta(t)-1}(t)}{L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})} \\
 &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}} \left[ \exp \left( \begin{array}{c} \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)}}}(s) \\ -\frac{1}{2} \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds \end{array} \right) \middle| \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)+1}}}(s) \right], \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

wobei wir zunächst für die Wohldefiniertheit von (3.61) fordern müssen:

$$\sigma(s, T_{\eta(t)-1}) = \sigma(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}) \quad \text{für alle } T_{\eta(t)-1} \leq s \leq t.$$

Zur Verkürzung der Schreibweise, definieren wir:

$$X := \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)}}}(s) - \frac{1}{2} \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds,$$

sowie

$$Y := \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)+1}}}(s).$$

In dem Ansatz (3.61) bedingen wir auf die Zufallsvariable  $Y$ , die es über die Volatilitätsfunktion  $\sigma(s, T_{\eta(t)})$  ermöglicht, auch das bereits bekannte Zeitintervall  $[T_{\eta(t)-1}, t]$  bei

der Bestimmung von  $L_{\eta(t)-1}(t)$  zu berücksichtigen. Bei beiden Zufallsvariablen verwenden wir die  $\eta(t)$ -te Brownsche Bewegung aus dem gegebenen LIBOR–Markt–Modell. In der Zufallsvariable  $X$  wird sie unter dem Forward Maß  $P^{T_{\eta(t)}}$  berücksichtigt und in die Zufallsvariable  $Y$  geht sie ein unter dem Maß  $P^{T_{\eta(t)+1}}$ . Bereits jetzt sei daran erinnert, dass wir diese Maße miteinander identifiziert haben.

Das Ziel ist jetzt die Bestimmung der bedingten Verteilung  $X|Y$ . Wir werden zeigen, dass eine Normalverteilung vorliegt. Schließlich werden wir

$$\mathbb{E}[\exp(Z)] = \exp\left(\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{2}\text{Var}[Z]\right), \quad (3.62)$$

für eine normalverteilte Zufallsvariable  $Z$  erweitern zur Bestimmung des bedingten Erwartungswertes (3.61). Der Beweis und die Erweiterung der Formel (3.62) finden sich im Anhang, vgl. Abschnitt A.5 Seite 113.

Wir wollen zusätzlich noch die folgenden abkürzenden Schreibweisen einführen:

$$\begin{aligned} X_1 &:= \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)}}}(s) \\ q_{\eta(t)-1} &:= \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds = \sigma(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1})^2 (t - T_{\eta(t)-1}) \\ q_{\eta(t)} &:= \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds \\ q &:= \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}) \sigma(s, T_{\eta(t)}) ds, \end{aligned}$$

Offensichtlich sind  $X$  und  $Y$  beide normalverteilt, da es sich jeweils um ein Itô–Integral über eine deterministische Funktion handelt. In einem ersten Schritt bestimmen wir die genauen Verteilungen von  $X$  und  $Y$ . Für den Erwartungswert von  $X$  gilt:

$$\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X] = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}\left[X_1 - \frac{1}{2}q_{\eta(t)-1}\right] = \underbrace{\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X_1]}_{=0 \text{ da Martingal}} - \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}\left[\frac{1}{2}q_{\eta(t)-1}\right] = -\frac{1}{2}q_{\eta(t)-1},$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X] &= \text{Var}^{P^{T_{\eta(t)}}}\left[X_1 - \frac{1}{2}q_{\eta(t)-1}\right] \\ &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X_1^2] - \underbrace{\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X_1]^2}_{=0 \text{ da Martingal}} \\ &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}\left[\left(\int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)}}}(s)\right)^2\right] = q_{\eta(t)-1}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Itô–Isometrie gilt. Für  $X$  folgt somit:

$$X \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}q_{\eta(t)-1}, q_{\eta(t)-1}\right). \quad (3.63)$$

Der Erwartungswert von  $Y$  ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}} \left[ \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)+1}}}(s) \right] = 0,$$

da wir die Forward Maße  $P^{T_{\eta(t)}}$  und  $P^{T_{\eta(t)+1}}$  miteinander identifiziert haben und somit die Martingaleigenschaft anwenden können. Die Varianz von  $Y$  bestimmt sich unter Berücksichtigung der Forward Maß Identifikation und der Itô–Isometrie zu:

$$\text{Var}^{P^{T_{\eta(t)}}}[Y] = \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[Y^2] - \underbrace{\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[Y]^2}_{=0 \text{ da Martingal}} = q_{\eta(t)},$$

so dass wir für  $Y$  insgesamt erhalten:

$$Y \sim \mathcal{N}(0, q_{\eta(t)}). \quad (3.64)$$

Die Verteilung des Zufallsvektors  $(X, Y)^\top$  ist gegeben über

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right),$$

wobei wir den Erwartungswertvektor mit  $\mu$  und die Kovarianzmatrix mit  $\Sigma$  bezeichnen.

Außerdem ist  $\rho$  gegeben durch

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X]}\sqrt{\text{Var}^{P^{T_{\eta(t)}}}[Y]}},$$

so dass wir noch die Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y)$  bestimmen müssen:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[XY] - \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[X] \underbrace{\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[Y]}_{=0} \\ &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}} \left[ \left( X_1 - \frac{1}{2}q_{\eta(t)-1} \right) Y \right] \\ &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}} \left[ \left( \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)}}}(s) \right) Y \right] - \frac{1}{2}q_{\eta(t)-1} \underbrace{\mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}}[Y]}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}^{P^{T_{\eta(t)}}} \left[ \left( \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)}}}(s) \right) \left( \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)+1}}}(s) \right) \right] \\
 &\stackrel{(*)}{=} \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}) \sigma(s, T_{\eta(t)}) ds = q,
 \end{aligned}$$

wobei  $(*)$  gilt, da wir die Forward Maße  $P^{T_{\eta(t)}}$  und  $P^{T_{\eta(t)+1}}$  miteinander identifiziert haben und eine Folgerung aus der Itô–Isometrie anwenden, deren Beweis sich im Anhang befindet, vgl. Lemma A.6. Die Verteilung von  $(X, Y)^\top$  ist schließlich gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_{\eta(t)-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{\eta(t)-1} & q \\ q & q_{\eta(t)} \end{pmatrix} \right), \quad (3.65)$$

Hieraus ergibt sich für die bedingte Verteilung von  $X$  gegeben  $Y$ :

$$\begin{aligned}
 X|Y &\sim \mathcal{N} \left( \mu_X + \Sigma_{1,2} \Sigma_{2,2}^{-1} \cdot (Y - \mu_Y), \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2} \Sigma_{2,2}^{-1} \Sigma_{2,1} \right) \\
 &\sim \mathcal{N} \left( -\frac{1}{2}q_{\eta(t)-1} + q \cdot q_{\eta(t)}^{-1} (Y - 0), q_{\eta(t)-1} - q \cdot q_{\eta(t)}^{-1} \cdot q \right) \\
 &\sim \mathcal{N} \left( \frac{q}{q_{\eta(t)}} Y - \frac{1}{2}q_{\eta(t)-1}, q_{\eta(t)-1} - \frac{q^2}{q_{\eta(t)}} \right). \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Jetzt können wir die oben bestimmte bedingte Verteilung (3.66) dazu benutzen, um mit Hilfe von (3.62) den bedingten Erwartungswert (3.61) zu bestimmen. Es ergibt sich:

$$\frac{L_{\eta(t)-1}(t)}{L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})} = \exp \left( \frac{q}{q_{\eta(t)}} Y - \frac{1}{2}q_{\eta(t)-1} + \frac{1}{2} \left( q_{\eta(t)-1} - \frac{q^2}{q_{\eta(t)}} \right) \right). \quad (3.67)$$

Um eine vollständige Bestimmung der virtuellen LIBOR–Rate  $L_{\eta(t)-1}(t)$  zu erhalten, setzen wir  $Y$  in (3.67) ein. Wegen:

$$\log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(T_{\eta(t)-1})} = \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)+1}}}(s) - \frac{1}{2} \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds,$$

schreiben wir  $Y$  in der Form:

$$Y = \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)}) dW_{\eta(t)}^{P^{T_{\eta(t)+1}}}(s) = \log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(T_{\eta(t)-1})} + \frac{1}{2} \int_{T_{\eta(t)-1}}^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds. \quad (3.68)$$

Auf diese Weise erhalten wir für (3.67) unter zusätzlicher Verwendung von  $q_{\eta(t)}$  in (3.68):

$$\begin{aligned}
 \log \frac{L_{\eta(t)-1}(t)}{L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1})} &= \frac{q}{q_{\eta(t)}} \left( \log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(T_{\eta(t)-1})} + \frac{1}{2}q_{\eta(t)} \right) - \frac{1}{2} \frac{q^2}{q_{\eta(t)}} \\
 &= \frac{q}{q_{\eta(t)}} \log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(T_{\eta(t)-1})} + \frac{1}{2}q \left( 1 - \frac{q}{q_{\eta(t)}} \right). \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Die Gestalt der virtuellen LIBOR–Rate (3.69) wurde benötigt, um die Gleichung (3.60) in  $\tau = t$  auswerten zu können und auf diese Weise eine Interpolation für  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  zu erhalten. Da es sich einfacher gestaltet, werten wir anstelle von (3.60) die noch nicht umgestellte Gleichung (3.59) für  $\tau = t$  aus und gelangen so zu:

$$\begin{aligned} \log \frac{L_t(t)}{L_t(0)} &\approx \alpha(t) \log L_{\eta(t)-1}(t) - \alpha(t) \log L_{\eta(t)-1}(0) + \beta(t) \log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(0)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \alpha(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds + \beta(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds - \int_0^t \sigma(s, t)^2 ds \right), \end{aligned}$$

in der die virtuelle LIBOR–Rate  $L_{\eta(t)-1}(t)$  benötigt wird. Setzen wir (3.69) ein:

$$\begin{aligned} \log \frac{L_t(t)}{L_t(0)} &\approx \alpha(t) \left( \frac{q}{q_{\eta(t)}} \log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(T_{\eta(t)-1})} + \frac{1}{2} q \left( 1 - \frac{q}{q_{\eta(t)}} \right) + \log L_{\eta(t)-1}(T_{\eta(t)-1}) \right) \\ &\quad - \alpha(t) \log L_{\eta(t)-1}(0) + \beta(t) \log \frac{L_{\eta(t)}(t)}{L_{\eta(t)}(0)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds + \frac{1}{2} \beta(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \alpha(t) \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) + \beta(t) \sigma(s, T_{\eta(t)}) \right)^2 ds, \end{aligned}$$

so gelangen wir schließlich zu der Formel für  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$ :

$$\begin{aligned} L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1}) &\approx L(0, t, t + \delta_{\eta(t)-1}) \\ &\quad \left[ \left( \frac{L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right)^{\alpha(t) \frac{q}{q_{\eta(t)}}} \cdot \exp \left( \frac{1}{2} q \alpha(t) \left( 1 - \frac{q}{q_{\eta(t)}} \right) \right) \right. \\ &\quad \cdot \left( \frac{L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}{L(0, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})} \right)^{\alpha(t)} \cdot \left( \frac{L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{L(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right)^{\beta(t)} \\ &\quad \exp \left( \frac{1}{2} \alpha(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds + \frac{1}{2} \beta(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \alpha(t) \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) + \beta(t) \sigma(s, T_{\eta(t)}) \right)^2 ds \right) \right], \quad (3.70) \end{aligned}$$

Die Formeln (3.60) und (3.70) können wir nun verwenden, um den Front–Stub (3.54) und den Back–Stub (3.55) zu bestimmen. Um alle LIBOR–Raten  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  mit  $0 < t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_N$  zu bestimmen, verwendet man die Formel (3.1):

$$L(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right),$$

zusammen mit der ersten Aufteilungsmöglichkeit für die Zerobonds  $P(t, \tau_1)$  und  $P(t, \tau_2)$ .

Auch bei der Interpolation der LIBOR–Volatilität wollen wir die Gütekriterien überprüfen, die wir in Kapitel 3.2 vorgestellt haben.

Die Arbitragefreiheit ist laut Brace, vgl. [Bra07], nicht vollständig gegeben, da wir die unterschiedlichen Forward Maße miteinander identifiziert haben. Allerdings sei es durch eine Unterscheidung der verschiedenen Forward Maße und eine Approximierung der zugehörigen Drifts möglich, Interpolationen herzuleiten, die näher an der Arbitragefreiheit liegen. Kritisch zu bemerken ist an dieser Stelle, dass Brace keine Angaben dazu macht, wie weit die vorliegende Interpolationstechnik noch von der Arbitragefreiheit entfernt ist.

Zur Beurteilung der Positivität einer allgemeinen LIBOR–Rate, betrachtet man die grundlegende Beziehung zu den Zerobonds über die Formel (3.1). Damit die LIBOR–Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  nicht negativ ist, muss man nachweisen, dass  $P(t, \tau_1) \geq P(t, \tau_2)$  gilt.

Wir wollen uns an dieser Stelle zunächst darauf beschränken die LIBOR–Raten auf Positivität zu untersuchen, die in die Formeln (3.54) und (3.55) des Front– und Back–Stubs einfließen. Für diese haben wir mit den Formeln (3.60) und (3.70) eine direkte Interpolationsformel hergeleitet.

Die LIBOR–Raten  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  und  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  sind aber offensichtlich nicht negativ, da sie sich aus einem Produkt von nicht negativen Faktoren ergeben. Die einzelnen Faktoren sind nicht negativ, da wir alle in 0 beobachteten LIBOR–Raten als nicht negativ angenommen haben und auch alle simulierten LIBOR–Raten auf den Gitterpunkten nicht negativ sind. Außerdem ist  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so dass alle Faktoren in den Formeln (3.60) und (3.70) nicht negativ sind. Insgesamt nehmen somit die LIBOR–Raten  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  und  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  keine negativen Werte an.

Im Hinblick auf die konstante Interpolation 3.3.3 liegt die Vermutung nahe, dass aufgrund der Positivität von  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  und  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$ , die in den Front– und Back–Stub einfließen, auch die allgemeine LIBOR–Rate nicht negativ ist. Die LIBOR–Raten, die in die Formeln für den Front– und den Back–Stub eingehen sind zwar nicht negativ, allerdings handelt es sich im Gegensatz zu Abschnitt 3.3.3 um zeitlich verschobene LIBOR–Raten, so dass eine analoge Durchführung des Beweises nicht möglich ist.

Im Fall der Stochastizität nehmen wir bei der Herleitung des Interpolationsansatzes für die LIBOR–Rate  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  Einschränkungen vor. Diese beziehen sich allerdings nicht wie zuvor auf die Volatilität des Zerobonds, sondern auf die Volatilität der LIBOR–Rate. Um die tote LIBOR–Rate  $L_{\eta(t)-1}(t) = L(t, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})$  herzuleiten, wird

die LIBOR–Volatilität  $\sigma(s, T_{\eta(t)-1})$  für  $T_{\eta(t)-1} \leq s \leq t$  als konstant angenommen. Grundsätzlich ist aber bei diesem Ansatz die Stochastizität nicht vollständig ausgeblendet.

Als letztes Kriterium wollen wir noch die Stetigkeit der interpolierten LIBOR–Raten beim Übergang auf die simulierten Raten der Gitterpunkte untersuchen. Hierzu betrachten wir die LIBOR–Raten  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$ , die in den Back–Stub eingeht und  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$ , die in den Front–Stub einfließt.

Im Fall des Front–Stubs zeigen wir wiederum lediglich die Stetigkeit für den Grenzwert von  $t$  gegen den oberen Gitterpunkt  $T_{\eta(t)}$ . Da sich der Grenzwert nur auf das Anlagezeitintervall bezieht und nicht auf den Beobachtungszeitpunkt, würde man bei der Betrachtung des Grenzwertes gegen  $T_{\eta(t)-1}$  eine tote LIBOR–Rate untersuchen.  $\vartheta$  ist als eine Hilfsfunktion definiert, die es ermöglicht zusätzliche Bedingungen zu erfüllen. Sie ist aber auf den Gitterpunkten durch den Wert 1 festgelegt. Es gilt somit für die Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$\lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} \alpha(t) = \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} \frac{1}{\delta_{\eta(t)-1}} \vartheta(t) (T_{\eta(t)} - t) = 0,$$

sowie

$$\lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} \beta(t) = \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} \frac{1}{\delta_{\eta(t)-1}} \vartheta(t) (t - T_{\eta(t)-1}) = 1.$$

Damit folgt sogleich für die LIBOR–Rate (3.70), die in den Front–Stub eingeht:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1}) \\ &= \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} L(0, t, t + \delta_{\eta(t)-1}) \\ & \quad \left[ \left( \frac{L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right)^{\alpha(t) \frac{q}{q_{\eta(t)}}} \cdot \exp \left( \frac{1}{2} q \alpha(t) \left( 1 - \frac{q}{q_{\eta(t)}} \right) \right) \right. \\ & \quad \cdot \left( \frac{L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}{L(0, T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})} \right)^{\alpha(t)} \cdot \left( \frac{L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{L(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \right)^{\beta(t)} \\ & \quad \exp \left( \frac{1}{2} \alpha(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)-1})^2 ds + \frac{1}{2} \beta(t) \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(t)})^2 ds \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha(t) \sigma(s, T_{\eta(t)-1}) + \beta(t) \sigma(s, T_{\eta(t)}))^2 ds \right) \Big] \\ &= L(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1}) \frac{L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})}{L(0, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1})} \\ &= L(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(t)+1}). \end{aligned}$$

Bei der Analyse der LIBOR–Rate (3.60), die im Back–Stub berücksichtigt wird, geben wir auch zunächst die Grenzwerte für die Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  an. Die Funktion  $\vartheta$  ist nach Voraussetzung auf der Tenorstruktur durch den Wert 1 festgelegt.

Für den Grenzwert von  $\tau$  gegen den unteren Gitterpunkt erhalten wir dann für die Funktion  $\alpha$ :

$$\lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \alpha(\tau) = \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \vartheta(\tau) (T_{\eta(\tau)} - \tau) = 1,$$

sowie für die Funktion  $\beta$ :

$$\lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \beta(\tau) = \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \vartheta(\tau) (\tau - T_{\eta(\tau)-1}) = 0.$$

Für den Grenzwert von  $\tau$  gegen den unteren Gitterpunkt ergibt sich damit für die LIBOR–Rate (3.60), die in den Back–Stub eingeht:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \\ &= \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} L(0, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \\ & \quad \left[ \left( \frac{L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{L(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \right)^{\alpha(\tau)} \cdot \left( \frac{L(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})}{L(0, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})} \right)^{\beta(\tau)} \right. \\ & \quad \exp \left( \alpha(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds + \beta(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)})^2 ds \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \alpha(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) + \beta(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)}) \right)^2 ds \right) \right] \\ &= L(0, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1}) \frac{L(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})}{L(0, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})} \\ &= L(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1}). \end{aligned}$$

Für den oberen Grenzwert, also für  $\tau$  gegen  $T_{\eta(\tau)}$  erhalten wir für die Grenzwerte der Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  wie beim Front–Stub:

$$\lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \alpha(\tau) = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \beta(\tau) = 1.$$

Somit ist für die Rate im Back–Stub der obere Grenzwert gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \\
 &= \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} L(0, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \\
 & \quad \left[ \left( \frac{L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{L(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \right)^{\alpha(\tau)} \cdot \left( \frac{L(t, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})}{L(0, T_{\eta(\tau)}, T_{\eta(\tau)+1})} \right)^{\beta(\tau)} \right. \\
 & \quad \left. \exp \left( \alpha(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1})^2 ds + \beta(\tau) \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T_{\eta(\tau)})^2 ds \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)-1}) + \beta(\tau) \sigma(s, T_{\eta(\tau)}))^2 ds \right) \right] \\
 &= L(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \frac{L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{L(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \\
 &= L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}).
 \end{aligned}$$

Für die zeitlich verschobenen LIBOR–Raten  $L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1})$  und  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  haben wir die Stetigkeitsaussage bereits gezeigt. Zur Vollständigkeit wollen wir die Stetigkeit auch auf alle beliebigen LIBOR–Raten übertragen. Dazu betrachten wir den Zusammenhang zu den Zerobonds (3.1) und verwenden die Formeln für den Front und den Back–Stub, vgl. (3.54) und (3.55). Für den Front–Stub folgt mit  $P(t, T_{\eta(t)}) = P(t, t, T_{\eta(t)})$ :

$$\lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} P(t, t, T_{\eta(t)}) = \lim_{t \nearrow T_{\eta(t)}} \left( \left( 1 + \delta_{\eta(t)-1} L(t, t, t + \delta_{\eta(t)-1}) \right)^{\overbrace{\frac{T_{\eta(t)} - t}{\delta_{\eta(t)-1}}}^{\rightarrow 0}} \right)^{-1} = 1.$$

Für den Back–Stub erhalten wir die Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = \lim_{\tau \searrow T_{\eta(\tau)-1}} \left( 1 + \delta_{\eta(\tau)-1} L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \right)^{\overbrace{\frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{\delta_{\eta(\tau)-1}}}^{\rightarrow 1}} \\
 &= 1 + (T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}) L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \\
 &= \frac{1}{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})},
 \end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \frac{1}{P(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = \lim_{\tau \nearrow T_{\eta(\tau)}} \left( 1 + \delta_{\eta(\tau)-1} L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) \right)^{\frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{\delta_{\eta(\tau)-1}}} = 1.$$

Insgesamt ist somit die Stetigkeit beim Übergang von den interpolierten zu den umliegenden simulierten LIBOR–Raten gezeigt.

# 4 Interpolation in der Praxis

Gegenstand dieses Kapitels ist die praktische Auswertung der vorgestellten Interpolationsansätze. Auf der beiliegenden Daten-CD befindet sich die mit Visual Basic for Applications (VBA) erstellte Excel-Datei. Obgleich die Verwendung von VBA zusammen mit Excel keine großen Performance-Leistungen bietet, wurde diese Programmiersprache gewählt, da eine vergleichsweise einfache Verbindung zu Excel möglich ist, so dass eine anschauliche Aufbereitung der Ergebnisse ohne großen Aufwand stattfinden kann.

Zunächst werden im Kapitel 4.1 die Rahmenbedingungen und die Datengrundlage vorgestellt, unter denen die Auswertung der Interpolationsansätze vorgenommen wird. Im Anschluss daran werden wir die numerischen Ergebnisse vorstellen. In dem gesonderten Kapitel 4.3 untersuchen wir Zinsderivate, die eine Interpolation der LIBOR-Raten erfordern.

## 4.1 Umsetzung der Interpolationsansätze mit „Visual Basic for Applications“

Bei dem verwendeten Framework handelt es sich um ein leistungsstarkes PC-System mit Windows XP Home, Version 2002 mit Service Pack 3. Excel wird in der Version Microsoft Office Excel 2003 SP2 benutzt und Visual Basic for Applications (VBA) als Version Microsoft Visual Basic 6.0. Die durchgeführten Berechnungen sind sehr aufwändig, so dass auf die Aktualisierung ganzer Tabellenblätter in Excel verzichtet werden sollte. Stattdessen wurde zur Neuberechnung ausgewählter Zellen ein Makro erstellt.

Die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen stellen die Marktdaten vom 11.03.2011 dar, die sich in Form einer NAO-Datei<sup>1</sup> auf der Daten-CD befinden. Ausgehend von die-

---

<sup>1</sup>NAO steht für NordicAnalyticsObject. Die Datei ist mit einem Texteditor zu öffnen.

sen Marktdaten wurde das LIBOR–Markt–Modell gemäß Abschnitt 2.2 mit Hilfe von NordicAnalytics 2.0.48.0, einer HSH–Nordbank eigenen Bewertungsbibliothek, simultan an Caps und Swaptions kalibriert. Zu einem vorgegebenen Zeitdiskretisierungsgrid wurden die LIBOR–Raten schließlich simuliert.

In einem ersten Durchlauf wurden 250, in einem weiteren wurden 500 Simulationen erstellt. Die Ergebnisse aus dem zweiten Durchlauf befinden sich in der Excel–Datei auf den Tabellenblättern „Sim1“ bis „Sim500“. Für beide Simulationsdurchgänge finden sich die entsprechenden Output NAO–Dateien auf der Daten–CD. Es handelt sich um halbjährliche LIBOR–Raten für die Währung „Euro“ entlang eines Zeitdiskretisierungsgrids, welches als zweiwöchig vorgegeben wurde. Der letzte Zeitpunkt auf der LIBOR–Tenorstruktur ist der 11.03.2021, d.h. es wurde ein Zeithorizont von 10 Jahren vorausgesetzt. Die Simulation erfolgte mit der Darstellung der LIBOR–Raten unter dem Terminal–Forward–Measure (siehe Satz 2.5) und dem Diskretisierungsschema nach Euler, vgl. Definition 2.7. Bei den vorliegenden Simulationen der LIBOR–Raten wurde keine Faktorreduktion durchgeführt, allerdings wurde das Moment–Matching–Verfahren verwendet.

Es fällt auf, dass die letzte LIBOR–Rate die Forward–LIBOR–Rate mit Startpunkt am 11.03.2021 und Endzeitpunkt 13.09.2021 ist, sie also über  $T_N = 11.03.2021$ , den letzten Zeitpunkt der Tenorstruktur, hinausgeht. Dies liegt daran, dass die Ansätze aus den Kapiteln 3.3.4 und 3.3.7 den Einfluss der LIBOR–Rate aus dem nächsten Tenorintervall fordern. Liegt der zu interpolierende Zeitpunkt im letzten Tenorintervall, also in  $[T_{N-1}, T_N]$ , so geht in die genannten Interpolationsansätze die LIBOR–Rate  $L(t, T_N, T_{N+1})$  für  $t \leq T_N$  ein. Da bei der Simulation keine Probleme entstehen, wurden die entsprechenden LIBOR–Raten — ebenfalls unter dem Terminal–Measure — mitsimuliert, so dass schließlich auch für diese Ansätze beliebige LIBOR–Raten mit Zeitpunkten im letzten Tenorintervall berechnet werden können. Der entscheidende Grund ist jedoch, dass erst auf diese Weise auch das zur Bewertung erforderliche Numéraire  $P(t, T_N)$  eindeutig bestimmt ist, da auch hierfür die Interpolationsansätze benötigt werden.

Die Output–Datei von NordicAnalytics enthält neben den LIBOR–Raten auch Diskontfaktoren, aus denen sich die zum Zeitpunkt 0 (dies entspricht dem 11.03.2011) beobachteten Zerobondpreise für beliebige Zeitpunkte  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_N]$  mit  $\tau_1 \leq \tau_2$  ergeben. Auf diese

Weise sind sogleich mit der Formel

$$L(0, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(0, \tau_1)}{P(0, \tau_2)} - 1 \right),$$

auch alle beliebigen in 0 beobachteten LIBOR–Raten bestimmt.

Des Weiteren wurden die Parameter der Hump–Volatilitätsfunktion (2.19) von NordicAnalytics ausgegeben. Für die Verwendung von Black's Formel für Swaptions, vgl. Satz 2.2, benötigen wir noch die Markt–Volatilitäten, an die das LIBOR–Markt–Modell kalibriert wurde. Diese befinden sich auf dem Tabellenblatt „SW“. Darüber hinaus befinden sich dort Volatilitäten, die ausgehend von dem kalibrierten Modell approximiert wurden.

Die in NordicAnalytics verwendete Day Count Convention (ACT/360) und die damit verbundenen Zeitdifferenzen wurden in Excel nachgebildet, vgl. Tabellenblatt „Delta“, so dass im Vergleich zu den NordicAnalytics–Daten keine Konsistenzprobleme entstehen.

Da VBA grundsätzlich nicht für gute Performance–Leistungen ausgelegt ist, benötigt die Berechnung bereits bei 500 Simulationen sehr viel Zeit. Der Hauptgrund für die schlechte Performance liegt neben den grundsätzlich aufwändigen Berechnungen in der Tatsache, dass VBA sich auf die Daten aus den zahlreichen Tabellenblättern stützt. Kritisch zu bemerken ist an dieser Stelle bereits, dass eine Anzahl von 500 Simulationen in der Praxis nicht ausreicht, da der Monte–Carlo–Fehler noch sehr groß ist. Auf diesen Fehler werden wir im Kapitel 4.3 bei der Bewertung von ausgewählten Zinsderivaten erneut eingehen.

## 4.2 Vorstellung der numerischen Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden wir zunächst auf die Untersuchung der interpolierten LIBOR–Raten selbst eingehen, bevor wir im nächsten Unterkapitel die Bewertung von Zinsderivaten mit den interpolierten LIBOR–Raten analysieren.

In der auf der Daten–CD befindlichen Excel–Datei kann man sich auf dem Tabellenblatt „Rechnungen“ auf Basis der Marktdaten vom 11.03.2011 beliebige LIBOR–Raten bestimmen lassen. Ein sehr bemerkenswertes Ergebnis der Implementierung ist die Beobachtung, dass die Ansätze „Lineare Interpolation Aufteilung 2“ und „Konstante Interpolation Aufteilung 1“ zu den selben LIBOR–Raten führen, falls sich das Startdatum der Rate mindestens auf dem nächsten Gitterpunkt nach dem Beobachtungszeitpunkt befindet. Das Ergebnis wird in der folgenden Bemerkung theoretisch begründet:

**Bemerkung 4.1.** Für die Fälle  $0 < t \leq T_{\eta(t)} \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T_N$  ergibt sich für den linearen und den konstanten Interpolationsansatz die gleiche LIBOR–Rate, wenn man gegenteilige Aufteilungsarten der Zerobonds unterstellt. Mit anderen Worten stimmt die LIBOR–Rate für die konstante Interpolation unter Voraussetzung der ersten Bondaufteilungsmöglichkeit überein mit der LIBOR–Rate für die lineare Interpolation unter der zweiten Bondaufteilung und umgekehrt. Beispielhaft zeigen wir nachfolgend den ersten genannten Fall:

$$\begin{aligned}
 L^{Kons1}(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P^{Kons1}(t, \tau_1)}{P^{Kons1}(t, \tau_2)} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P^{Kons1}(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_1)})}{P^{Kons1}(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)})} \frac{1}{P^{Kons1}(t, \tau_1, T_{\eta(\tau_1)})} - 1 \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P^{Linear2}(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_1)-1}) P^{Linear2}(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_1)}{P^{Linear2}(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)-1}) P^{Linear2}(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, \tau_2)} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P^{Linear2}(t, \tau_1)}{P^{Kons1}(t, \tau_2)} - 1 \right) = L^{Linear2}(t, \tau_1, \tau_2).
 \end{aligned}$$

Um (\*) zu zeigen, verwenden wir die Definitionen der entsprechenden Interpolationsansätze und Bondaufteilungen. Die Mid–Stubs der zwei Aufteilungen unterscheiden sich lediglich durch den Faktor  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) = (1 + (T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}))^{-1}$ , der zusätzlich im Mid–Stub der ersten Aufteilung enthalten ist. Es genügt somit die folgende Aussage für ein  $\tau$  mit  $0 < t \leq T_{\eta(t)} \leq \tau \leq T_N$  nachzuweisen:

$$P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \frac{1}{P^{Kons1}(t, \tau, T_{\eta(\tau)})} = P^{Linear2}(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau).$$

Setzen wir nun die konstante Interpolation für den Back–Stub ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) (1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau)L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})) \\
 &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \left( \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + (T_{\eta(\tau)} - \tau)L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \right) \\
 &= P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}) \left( \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} (1 + (T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})L(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})) \right) \\
 &= \frac{T_{\eta(\tau)} - \tau}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} + \frac{\tau - T_{\eta(\tau)-1}}{T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1}} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)}).
 \end{aligned}$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite nun dem Back–Stub der linearen Interpolation unter Voraussetzung der zweiten Aufteilungsmöglichkeit entspricht, ist die Behauptung gezeigt.

Würde man die LIBOR–Rate für den Fall  $\tau_1 < T_{\eta(t)}$  betrachten, so wäre die Aussage nicht mehr gültig. Für  $t = \tau_1$  würde sich der Front–Stub nicht herauskürzen und in den jeweiligen Interpolationsansätzen unterschiedliche Werte annehmen. In den übrigen Fällen betrachtet man Zerobonds, deren Startzeitpunkt vor dem Beobachtungsdatum liegen. Wie wir bereits mehrmals erörtert haben, passen wir das Beobachtungsdatum dann auf den vorherigen Gitterpunkt an. Dies ruft wiederum Abweichungen hervor, die keine Gleichheit der LIBOR–Raten mehr garantieren.

Als nächstes wollen wir den Verlauf der interpolierten LIBOR–Raten über zwei Tenorintervalle hinweg betrachten. Dabei untersuchen wir in einem ersten Fall die Abhängigkeit vom Startzeitpunkt der LIBOR–Rate. Wir halten den Beobachtungszeitpunkt und den Endzeitpunkt fest und betrachten die LIBOR–Raten in Abhängigkeit vom Startdatum, welches wir innerhalb des Zeitraums von zwei Tenorintervallen variieren. Das Enddatum liegt dabei auf dem vorgegebenen Tenorgrid. Die nachfolgende Grafik 4.1 zeigt auf Seite 96 für den geschilderten Fall die LIBOR–Raten für die einzelnen Interpolationsansätze. Die Zahlen hinter den Kürzeln in der Legende stehen für die Möglichkeit der Zerobondaufteilung. Der Ausdruck „1,70“ hinter den Interpolationsansätzen „BondVola2“ und „Vasicek2“ steht für die Wahl der Mean–Reversion–Rate  $\kappa$ , vgl. Kapitel 3.3.5 und 3.3.6.

Anhand der Grafik 4.1 ist ersichtlich, dass die LIBOR–Raten aller untersuchten Interpolationsarten mit den Startdaten 11.03.2015, 11.09.2015 und 11.03.2016 exakt die gleichen LIBOR–Raten ergeben. Dies ist darin begründet, dass der Endzeitpunkt der LIBOR–Raten einen Punkt der Tenorstruktur darstellt und in diesen Fällen die angegebenen Startdaten ebenfalls auf der Tenorstruktur liegen. Die Beobachtung entspricht gerade der geforderten Stetigkeitsbedingung. Wir können somit der Grafik 4.1 sehr gut entnehmen, dass für den abgebildeten Zeitraum alle Interpolationsansätze die Stetigkeitsbedingung für das variable Startdatum bei festem Endzeitpunkt erfüllen.

Eine weitere Beobachtung ist, dass die Interpolationsansätze „BondVola2“ und „Vasicek2“ annähernd die selben Werte für die LIBOR–Raten in dem für das Startdatum gegebenen Zeitraum liefern. Insgesamt sind aber sehr unterschiedliche Verläufe für die LIBOR–Raten ersichtlich. So liegt z.B. die maximale Differenz in dem beobachteten Zeitraum beim Startdatum 26.06.2015 zwischen den Ansätzen „Linear1“ und „KonstAbh1“ bei 0,029 Prozentpunkten.

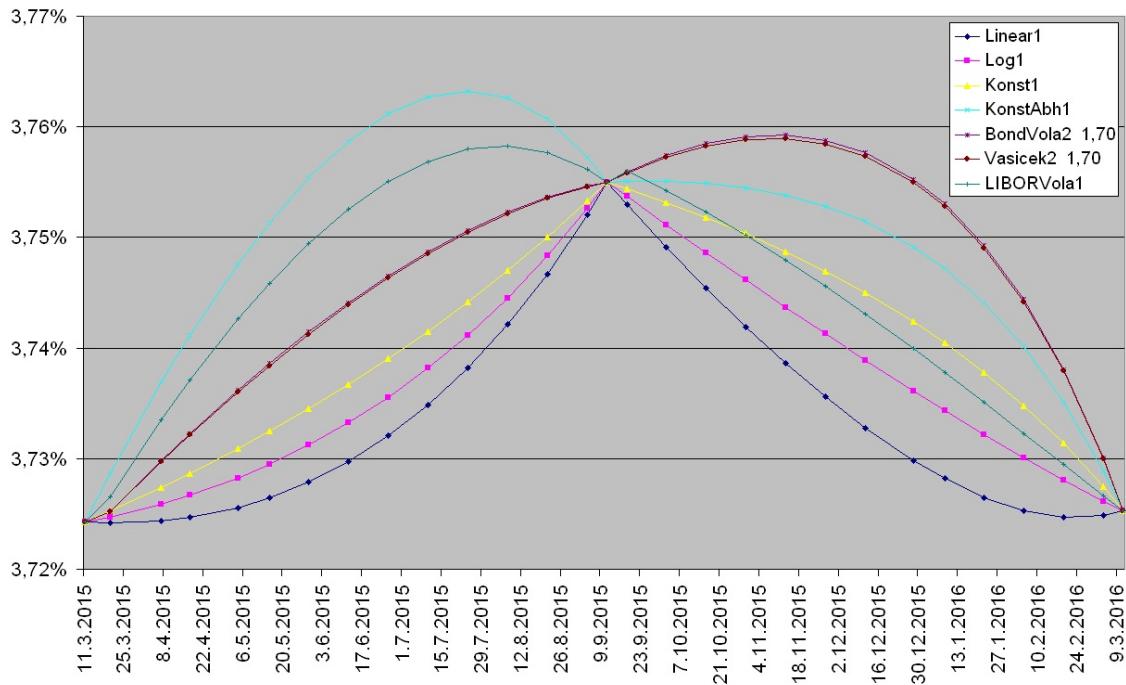


Abbildung 4.1: LIBOR–Raten mit festem Beobachtungszeitpunkt 04.05.2012, festem Enddatum 12.09.2016, sowie variablem Startdatum zwischen dem 11.03.2015 und dem 11.03.2016 auf Basis der Marktdaten vom 11.03.2011

Auch die Krümmungen der eingezeichneten Verbindungslien sind sehr unterschiedlich. So haben z.B. die Verbindungslien der linearen, logarithmischen und konstanten Interpolation im ersten untersuchten Intervall eine positive Krümmung, die Kurven der übrigen Ansätze haben im ersten Untersuchungsintervall hingegen eine negative Krümmung. Besonders auffällig ist der Verlauf der Kurve, die zur konstanten Interpolation mit zusätzlicher Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen gehört. Diese Kurve weist im ersten Intervall sogar eine Extremstelle auf. Dieser markante Verlauf lässt sich im Vergleich zur einfachen konstanten Interpolation durch den Einfluss der LIBOR–Rate aus dem nächsten Tenorintervall erklären. Je näher das Startdatum an dem nächsten Gitterpunkt (im vorliegenden Fall 11.09.2015) liegt, desto stärker wird über die Funktion  $\xi$  in den Zerobond–Interpolationen die LIBOR–Rate aus dem nächsten Tenorintervall berücksichtigt.

Ebenso zeigt die Verbindungslien des „LIBORVola1“–Ansatzes einen ähnlichen Verlauf, wenngleich dieser nicht derart markant ausfällt. Aber auch in den Formeln dieses Ansatzes wird die LIBOR–Rate aus dem nächsten Intervall berücksichtigt.

In dem zweiten untersuchten Intervall weisen die Ansätze, die Einflüsse aus dem Short–Rate–Modell berücksichtigen, einen Verlauf mit auffällig hohen interpolierten LIBOR–Raten auf. Gleichzeitig sind diese Ansätze über beide Intervalle gesehen diejenigen, die die „glatteste“ Kurve in Abhängigkeit von dem variablen Startdatum erzeugen.

Andererseits erörtern wir den Verlauf der LIBOR–Raten bei festem Beobachtungszeitpunkt und Startdatum, sowie variablem Enddatum am Beispiel von Abbildung 4.2. In diesem Fall ist es umgekehrt, d.h. das feste Startdatum liegt auf dem gegebenen Tenorgrid und das Enddatum wird über zwei Tenorintervalle hinweg betrachtet.

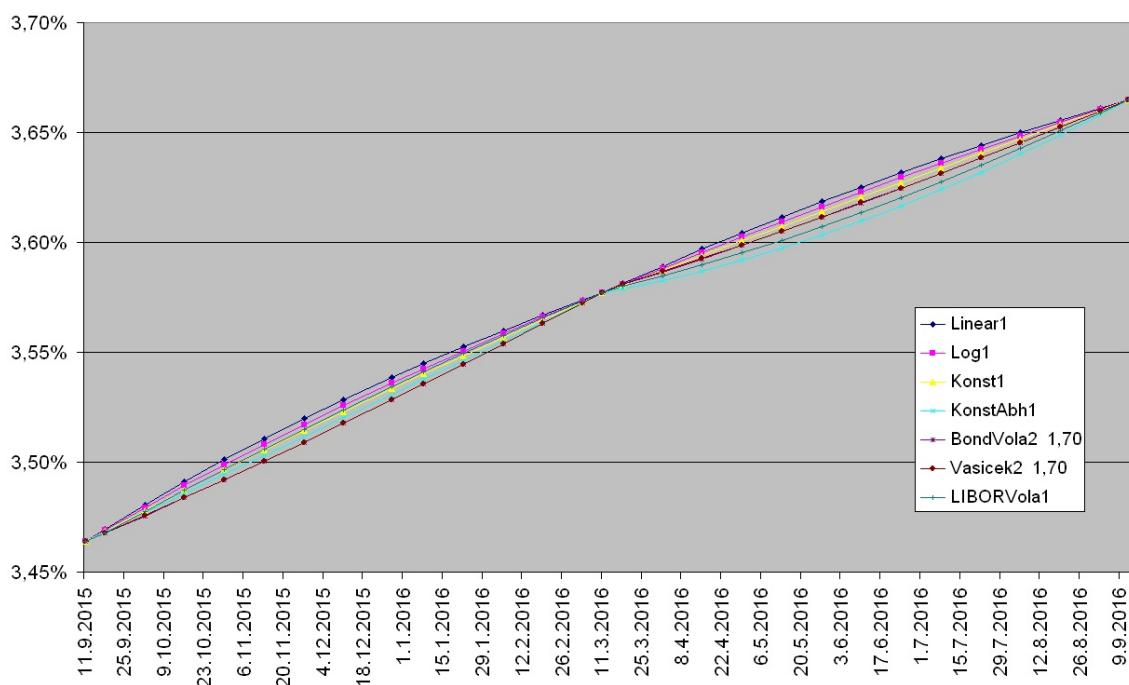


Abbildung 4.2: LIBOR–Raten mit festem Beobachtungszeitpunkt 04.05.2012, festem Startdatum 11.03.2014 und variablem Enddatum zwischen dem 11.09.2015 und dem 12.09.2016 auf Basis der Marktdaten vom 11.03.2011

Auf den ersten Blick zeigt diese Abbildung deutlich weniger Unterschiede der einzelnen Interpolationsansätze auf. In diesem Zusammenhang sei allerdings auf die unterschiedliche Skalierung der Grafiken 4.1 und 4.2 hingewiesen. Die wesentlichen Beobachtungen sind grundsätzlich sehr ähnlich zu denen aus Abbildung 4.1, in der ein variabler Startzeitpunkt betrachtet wurde. Auch in der vorliegenden Grafik mit variablem Enddatum erkennt man

die geforderte Stetigkeitsbedingung an den Tenorstellen. Die maximale Differenz in dem beobachteten Zeitraum liegt beim Enddatum 10.06.2016 mit 0,0155 Prozentpunkten zwischen der linearen und der konstanten Interpolation mit Abhängigkeit. Ebenso beobachtet man wiederum die unterschiedlichen Krümmungsrichtungen und Krümmungsstärken der Ansätze. Zusammenfassend sind demnach auch im Fall des variablen Enddatums deutliche Unterschiede zwischen den Interpolationsansätzen erkennbar.

Weitere Grafiken und die zugehörigen Wertetabellen zu den interpolierten LIBOR–Raten finden sich in der beigefügten Excel–Datei auf dem Tabellenblatt „Grafiken“.

In diesem Abschnitt haben wir bereits bei den interpolierten LIBOR–Raten selbst große Unterschiede zwischen den ausgewählten Ansätzen erkennen können. Auffällig ist die Tatsache, dass bei keinem Interpolationsansatz als Ergebnis in der Grafik eine nahezu glatte Kurve durch die Stützstellen auf dem LIBOR–Grid herauskommt. Gleichzeitig gehören die markantesten Kurven, nämlich die zu der konstanten Interpolation mit Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen (siehe Abschnitt 3.3.4) und zur Interpolation über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell (siehe Abschnitt 3.3.6), zu den Interpolationsansätzen, die auch die meisten theoretischen Gütekriterien aus dem Unterkapitel 3.2 erfüllen. In dem nächsten Abschnitt dieser Arbeit wollen wir weitere Erkenntnisse aus der Bewertung von Zinsderivaten mit den interpolierten LIBOR–Raten gewinnen.

### 4.3 Verwendung der Interpolationen zur Bewertung von Zinsderivaten

Die Notwendigkeit einer Interpolation der LIBOR–Raten ist in dem Wunsch nach einer exakten Bewertung von Zinsderivaten begründet. Um die Qualität eines Preises zu beurteilen, der aus einer Bewertung mit interpolierten LIBOR–Raten stammt, benötigt man einen Referenzpreis. Swaptions können beispielsweise mit Black’s Formel, vgl. Satz 2.2, losgelöst vom LIBOR–Markt–Modell und auf diese Weise auch für Payment–Dates außerhalb des gegebenen LIBOR–Grids bewertet werden.

Für die Auswertung wurden auf dem Tabellenblatt „Swaptions“ der Excel–Datei insgesamt 85 Payer–Swaptions mit einer Laufzeit von jeweils 5 Jahren aufgesetzt. Die Expiry–Dates der Swaptions liegen auf dem zweiwöchigen Zeitdiskretisierungsgrid aus der Simu-

lation der LIBOR–Raten. Die fixen Zahlungen sollen jährlich, die variablen halbjährlich erfolgen. Als Strike–Zinssatz setzen wir die faire Swap–Rate voraus, da wir uns in einem Standard LIBOR–Markt–Modell befinden, das keinen Smile–Effekt berücksichtigt. Das Nominal wird in einer Höhe von 10.000,- Euro angenommen, so dass spätere Abweichungen direkt in Basispunkten<sup>2</sup> ausgegeben und interpretiert werden können.

Die erste Swaption hat ihr Expiry–Date in einem Jahr. Eine Untersuchung früherer Expiry–Dates wäre unüblich und würde zudem nicht zu verwertbaren Ergebnissen führen, da die Volatitätsfläche in die Richtung von sehr kurzen Expiry–Dates und kurzen Laufzeiten zunächst ansteigt und dann stark abfällt. Die Payment–Dates der ersten Swaption liegen exakt auf der Tenorstruktur, so dass keine Interpolation erforderlich ist.

Anschaulich kann man sich vorstellen, dass diese Swaption jetzt entlang des LIBOR–Grids zeitlich verschoben wird. Durch die Wahl eines zweiwöchigen Simulationsgrids liegt nur jede 14. Swaption auf dem vorgegebenen LIBOR–Gitter. Alle übrigen Bewertungen sind abhängig von LIBOR–Raten, die nicht aus der Simulation bekannt sind.

In den Excel–Auswertungen wurden aufgrund von Performance–Problemen mit VBA nur 500 Simulationen vorgenommen. Der Monte–Carlo–Fehler (MC–Fehler) der Swaptionpreise ist dann aber bedeutend größer, als der Interpolationsfehler. Die Schwierigkeit besteht somit in der Isolierung des Interpolationsfehlers, so dass trotz des großen MC–Fehlers Aussagen zur Güte der einzelnen Ansätze möglich sind. Hierzu wurde aufgrund einer grafischen Auswertung der MC–Fehler von den Swaptions mit Payment–Dates auf dem Tenorgrid (diese Bewertungen beinhalten keinen Interpolationsfehler), eine lineare Interpolation dieses MC–Fehlers für die Swaptions mit Payment–Dates zwischen den Tenorzeitpunkten gewählt. Den Referenzpreis setzen wir als den analytischen Preis (Black's Formel) mit hinzugerechnetem linear interpolierten MC–Fehler voraus, so dass die resultierende Abweichung als reiner Interpolationsfehler interpretiert werden kann. Zu bemerken sei an dieser Stelle außerdem, dass in Black's Formel Markt–Volatilitäten eingehen, die nicht für beliebige Zeitpunkte vorliegen. Da wir Swaptions mit sehr kurzen Expiry–Dates nicht berücksichtigen, sind die Differenzen zwischen den gegebenen Volatilitätswerten so gering, dass wir eine linear Interpolation annehmen können.

Auf Basis dieser Überlegungen für die Isolierung des Interpolationsfehlers wurden mehrere Auswertungen durchgeführt. Die nachfolgende Tabelle zeigt für jeden Ansatz die An-

---

<sup>2</sup>Es gilt: 100 Basispunkte  $\hat{=}$  1 Prozentpunkt

zahl der Fälle, in denen er derjenige mit der kleinsten quadratischen Abweichung von dem analytischen Referenzpreis unter Berücksichtigung des interpolierten MC-Fehlers ist, also derjenige mit dem kleinsten Interpolationsfehler. In jedem Intervall liegen 13 Swaptions, die eine Interpolation erfordern. Insgesamt werden 6 Intervalle, also 78 Swaptions betrachtet.

Ansatz	I1	I2	I3	I4	I5	I6	Gesamt
Linear1	0	0	1	1	0	0	2
Linear2	0	1	0	0	0	0	1
Konstant1	1	0	0	0	1	2	4
KonstAbh1	7	10	9	9	9	10	54
BondVola2 1,35	2	2	1	1	1	1	8
LIBORVola1	3	0	2	2	2	0	9

Tabelle 4.1: Anzahl der Fälle je Tenorintervall und insgesamt, in denen der Ansatz derjenige mit der kleinsten quadratischen Abweichung von dem analytischen Referenzpreis mit hinzugerechnetem interpolierten MC-Fehler ist (Swaptions)

Es fällt auf, dass die konstante Interpolation mit Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen bezogen auf alle 78 Swaptions, die eine Interpolation erfordern, für die meisten Swaptions den kleinsten quadratischen Interpolationsfehler liefert (in 54 von 78 Fällen).

Auf dem Tabellenblatt „Swaptions“ der Excel-Datei sind darüber hinaus für jede Swaption die genauen Abweichungen aller Interpolationsansätze ersichtlich, sowie jeweils der Ansatz mit dem kleinsten Fehler. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass in den Fällen, wo ein anderer Ansatz einen kleineren Fehler als „KonstAbh1“ liefert, das Swaption Expiry-Date vergleichsweise nah am Tenorgrid liegt.

Als weiteren Indikator haben wir die RMSEs (Root Mean Squared Errors) bestimmt. Hierbei handelt es sich um die Wurzel aus dem mittleren quadratischen Fehler bezogen auf alle 78 Swaptions, die eine Interpolation erfordern. Wir wollen nachfolgend zwischen dem absoluten und dem relativen RMSE unterscheiden. Für die Berechnung des absoluten RMSE werden für jeden Interpolationsansatz die quadratischen Interpolationsfehler zu allen 78 Swaptions gemittelt. Bei dem relativen RMSE dagegen werden die quadrierten Fehler relativ zu dem Referenzpreis bestimmt. Da wir ein festes Nominal in Höhe von 10.000,- Euro vorausgesetzt haben, können wir den absoluten RMSE auch als relativen RMSE bezogen auf das Nominal, ausgedrückt in Basispunkten interpretieren.

Die nachfolgende Tabelle 4.2 gibt einen Überblick über die Ansätze mit den kleinsten RMSEs. Der Ansatz „Linear3“ steht für den Ansatz der linearen Interpolation, der in Abhängigkeit von der Lage der geforderten LIBOR–Rate die Zerobondaufteilung zuordnet.

Auch in dieser Auswertung erzielt der Ansatz „KonstAbh1“ den im Vergleich kleinsten durchschnittlichen Fehler. Auffallend ist dagegen der signifikant große Fehler der Interpolation über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell.

Für eine umfassendere Auswertung aller Ansätze sei auf das Tabellenblatt „Swaptions“ in der Excel–Datei verwiesen.

Ansatz	RMSE (Nominal)	RMSE (Referenzpreis)
KonstAbh1	3,2401 BP	1,0989 %
Linear1	6,1430 BP	2,0814 %
Log1	6,2126 BP	2,1057 %
Konstant1	6,2841 BP	2,1305 %
Linear3	9,5552 BP	3,2129 %
Linear2	11,6627 BP	3,9028 %
BondVola2 1,35	12,3750 BP	4,0221 %
LIBORVola1	14,1287 BP	4,6866 %
BondVola2 1,70	17,1054 BP	5,5870 %
Vasicek2 1,25	133,3274 BP	44,3010 %

Tabelle 4.2: RMSEs in Bezug auf das Nominal und den Referenzpreis bei der Bewertung von 78 Swaptions, wobei der Referenzpreis dem analytischen Preis mit hinzugerechnetem interpolierten MC–Fehler entspricht

Swaptions sind aufgrund ihrer Optionalität sehr stark von der Verteilung der simulierten LIBOR–Raten abhängig. Da aber bei einer geringen Anzahl von Simulationen die Verteilung nicht gut genug approximiert wird, ist der MC–Fehler entsprechend groß. Aus diesem Grund wollen wir jetzt die Betrachtung von 5y–Payer–Swaps anschließen. Für die Swaps haben wir ebenfalls eine analytische Bewertungsformel, die sich sogar aufgrund der fehlenden Optionalität einfacher gestaltet. Da wir bei den Swaps keine Optionalität berücksichtigen müssen und wir zudem bei der Simulation der LIBOR–Raten das „Moment Matching“ verwendet haben, können wir bei der Analyse der Swapbewertung, auch bei einer geringen Anzahl von Simulationen, genauere Ergebnisse erwarten.

Für die Swaps wurde ein analoges Vorgehen gewählt wie bei den Swaptions. Der erste

Swap ist jedoch ein Swap, der „Spot“ startet, d.h. das erste Fixing–Date ist der 11.03.2011, also der heutige Bewertungszeitpunkt. Wie auch bei den Swaptions kann man sich nun anschaulich vorstellen, dass dieser Swap zeitlich über das zweiwöchige Zeitdiskretisierungsgitter verschoben wird. Insgesamt wurden 113 Swaps aufgesetzt, von denen 104 eine Interpolation erfordern. Wie auch bei den Swaptions wurde zunächst als Strike die faire Swap–Rate gewählt. Da aber in die Berechnung eines Swaps keine Volatilität (und auch keine implizite Volatilität) eingeht, trifft man den Swap auch für andere Strikes bereits im Standard LIBOR–Markt–Modell. Deshalb betrachten wir über die faire Swap–Rate hinaus auch eine größere bzw. eine kleinere Strike–Rate. Da in allen Fällen sehr ähnliche Ergebnisse resultieren, wollen wir hier lediglich auf den Fall der fairen Swap–Rate eingehen. Für die anderen Betrachtungen sei auf die Auswertungen in der Excel–Datei verwiesen.

Bevor wir auf die Ergebnisse genauer eingehen, wollen wir die genaue Bewertungsformel für die Swaps vorstellen. Für die Monte–Carlo–Bewertung eines 5y–Payer–Swaps mit halbjährlichen variablen und jährlichen fixen Zahlungen verwenden wir die folgende Formel:

$$V_{\text{Swap}}(0) = P(0, T_N) \mathbb{E}^{P^{T_N}} \left[ \sum_{j=1}^{10} \frac{L(\tilde{T}_j, \tilde{T}_j, \tilde{T}_{j+1}) \delta_j}{P(\tilde{T}_{j+1}, T_N)} \right] - P(0, T_N) \mathbb{E}^{P^{T_N}} \left[ \sum_{i=1}^5 \frac{K \delta_i}{P(\bar{T}_{i+1}, T_N)} \right], \quad (4.1)$$

wobei  $K$  die Strike–Rate bezeichnet und als Nominal  $X = 1$  gewählt ist. Die Zeitpunkte der fixen Zahlungsseite seien mit  $\bar{T}_i$  für  $i = 1, \dots, 6$  bezeichnet. Hierbei seien die Abstände  $\delta_i = \bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i$  als jährlich vorausgesetzt. Des Weiteren seien die Zeitpunkte der variablen Zahlungsseite festgelegt durch  $\tilde{T}_j$  für  $j = 1, \dots, 11$ , wobei  $\delta_j = \tilde{T}_{j+1} - \tilde{T}_j$  als halbjährlich vorausgesetzt werde. Außerdem sei  $\bar{T}_1 = \tilde{T}_1$  das erste Fixing–Date, also der Startzeitpunkt des Swaps. Zu diesem Zeitpunkt erfolgt noch keine Zahlung. Der Zeitpunkt  $T_N$  bezeichnet den letzten Zeitpunkt auf der vorgegebenen Tenorstruktur für die LIBOR–Raten. Die LIBOR–Raten wurden unter dem Terminal–Measure simuliert, so dass wir dieses auch für die Bewertung zusammen mit dem zugehörige Numéraire  $P(t, T_N)$  verwenden.

Für die analytische Bestimmung können wir (4.1) dagegen weiter auflösen nach:

$$V_{\text{Swap}}(0) = \sum_{i=1}^5 P(0, \bar{T}_{i+1}) \delta_i (S(0) - K), \quad (4.2)$$

so dass sich für den analytischen Preis 0 ergibt, wenn wir als Strike–Rate die faire Swap–Rate zum Zeitpunkt 0, in den Auswertungen entspricht dies dem 11.03.2011, voraussetzen.

In der nachfolgenden Tabelle 4.3 sind im Vergleich zur Swaptionauswertung die ersten beiden Intervalle hinzugekommen. Aufgrund der fehlenden Optionalität ist es möglich Swaps zu betrachten, deren erstes Fixing–Date weniger als ein Jahr in der Zukunft liegt.

Ansatz	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	Gesamt
Linear1	0	0	1	0	6	0	6	6	19
Linear2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Linear3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Log1	0	0	0	0	2	0	1	1	4
Konstant1	0	0	0	1	3	0	2	1	7
KonstAbh1	8	8	6	5	2	7	2	4	42
BondVola2 1,70	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Vasicek2 1,70	1	2	2	3	0	0	0	1	9
LIBORVola1	2	0	0	1	0	0	0	0	3

Tabelle 4.3: Anzahl der Fälle je Tenorintervall und insgesamt, in denen der Ansatz derjenige mit der kleinsten quadratischen Abweichung von dem analytischen Referenzpreis mit hinzugerechnetem interpolierten MC–Fehler ist (Swaps)

Wie bereits bei der Bewertung von Swaptions, vgl. Tabelle 4.1, liegt auch bei der Auswertung der Swaps im Bezug auf die reine Anzahl der Fälle in denen der Ansatz die kleinste quadratische Abweichung hervorruft, der Ansatz „KonstAbh1“ eindeutig an erster Stelle. Das Ergebnis ist jedoch mit 42 von 104 untersuchten Swaps nicht mehr derart eindeutig wie bei den Swaptionuntersuchungen mit 54 von 78. Der zweitbeste Ansatz „Linear1“ liegt aber bereits mit 19 Fällen deutlich zurück.

Zu beachten ist, dass in den Fällen, wo der Ansatz „Linear1“ den kleinsten Fehler liefert und „Linear3“ das gleiche Resultat ergibt wie „Linear1“, nur ein Punkt für „Linear1“ vergeben wurde. Die Güte des Ansatzes „Linear3“ ist aus der Tabelle 4.3 also noch nicht eindeutig abzuleiten. Hierzu werden wir die nachfolgende Tabelle 4.4 auswerten, die uns bezogen auf alle 104 Swaps, die eine Interpolation erfordern, den RMSE darlegt.

Der Ansatz „KonstAbh1“ ergibt mit einer durchschnittlichen Abweichung von 1,0566 Basispunkten bezogen auf das Nominal die kleinsten Abweichungen. Berücksichtigt man die Tatsache, dass der MC–Fehler über eine lineare Interpolation bestimmt wurde und im Vergleich zum Interpolationsfehler deutlich größer ist, sind die Fehler des Ansatzes „KonstAbh1“ vergleichsweise gering. Zudem verdeutlicht die Tabelle, dass die konstante

Interpolation verbessert wird, wenn man in Abhängigkeit zu den Gitterstellen die LIBOR–Raten für das nächste Ternorintervall einbezieht.

Auffällig ist der im Vergleich zu den Swaptionauswertungen insgesamt höhere RMSE in Bezug auf den Referenzpreis. Dies liegt an dem kleineren MC–Fehler bei den Swaps, so dass der Referenzpreis insgesamt auf einem niedrigeren Niveau und damit die Abweichungen in Relation dazu größer werden.

Ansatz	RMSE (Nominal)	RMSE (Referenzpreis)
KonstAbh1	1,0566 BP	16,4888 %
Linear1	2,2046 BP	38,5443 %
Log1	2,3826 BP	41,4152 %
Konstant1	2,5659 BP	44,3299 %
Linear3	6,2829 BP	87,4080 %
Vasicek2 1,35	8,2066 BP	116,7486 %
Linear2	8,6170 BP	115,8237 %
BondVola2 1,70	10,1270 BP	171,0510 %
BondVola2 1,35	10,1531 BP	171,4057 %
Vasicek2 1,70	13,1279 BP	136,1008 %
LIBORVola1	21,9722 BP	260,0267 %

Tabelle 4.4: RMSEs in Bezug auf das Nominal und den Referenzpreis bei der Bewertung von 104 Swaps, wobei der Referenzpreis dem analytischen Preis mit hinzugerechnetem interpolierten MC–Fehler entspricht

Außerdem können wir beobachten, dass die lineare Interpolation unter der ersten Aufteilung (RMSE in Bezug auf das Nominal 2,2046 BP, RMSE Referenzpreis 38,5443%) deutlich bessere Ergebnisse liefert als unter der zweiten (RMSE Nominal 8,6170 BP, RMSE Referenzpreis 115,8237%). Bei dem Ansatz „Linear3“ haben wir vermutet, dass dieser die Vorteile von beiden Aufteilungsmöglichkeiten der Zerobonds vereinen kann, um somit immer das bestmögliche Ergebnis zu liefern. In der vorliegenden Auswertung ist jedoch auch zu vielen Zeitpunkten, an denen das zu interpolierende Intervall für die zweite Aufteilungsmöglichkeit kleiner ist, der Ansatz „Linear2“ schlechter als „Linear1“, der im Vergleich ein größeres Intervall interpoliert. Daher ist der erwartete Vorteil des Ansatzes „Linear3“ nicht gegeben. Da die LIBOR–Raten jedoch aufgrund der Gegebenheiten der Zahlungsstruktur der Swaps in fast allen Fällen so liegen, dass entweder beide Zeitpunkte (Startdatum und

Enddatum der Rate) in einer ersten Intervallhälfte oder beide in einer zweiten Hälfte liegen, kann man an dieser Stelle aber auch noch keinen Vorteil des Ansatzes „Linear3“ ausschließen, falls das Start- und das Enddatum in jeweils verschiedenenartigen Intervallhälften, also z.B. das Startdatum in einer ersten und das Enddatum einer zweiten Intervallhälfte liegen. Grundsätzlich können wir anhand von Tabelle 4.4, aber auch von Tabelle 4.2, darauf schließen, dass die Variante der Zerobondaufteilung mit dem kleineren zu interpolierenden Intervall nicht zwingend kleinere Interpolationsfehler liefert.

Eine weitere Auffälligkeit ist, dass der Ansatz „Vasicek2“ im Gegensatz zum Vorgehen „BondVola2“ sehr stark abhängig von der Wahl von  $\kappa$  ist. Die verschiedenen Werte von  $\kappa$  wurden manuell festgelegt. Detailliertere Auswertungen in Abhängigkeit von  $\kappa$  finden sich in der Excel-Datei auf dem Tabellenblatt „Swaps“.

Ausgehend von den Tabellen 4.3 und 4.4 kann man vermuten, dass der Ansatz „KonstAbh1“ in Abhängigkeit zum Startzeitpunkt der Swaps konstant geringe Interpolationsfehler produziert, da der durchschnittliche Fehler vergleichsweise klein und die Anzahl, bei denen dieser Ansatz den kleinsten Fehler hervorbringt, recht groß ist. Andererseits kann man für die Ansätze, die eine geringe Anzahl kleiner quadratischer Fehler ergeben und bezogen auf alle untersuchten Swaps hohe durchschnittliche Abweichungen erzeugen, den Verdacht äußern, dass diese sehr starke Schwankungen im Interpolationsfehler aufweisen. Diese Thesen untersuchen wir anhand der nachfolgenden Grafik, siehe Abbildung 4.3.

In der Grafik 4.3 sind die Abweichungen aufbereitet, die bei der Bewertung der Swaps entstanden sind. Bezugsgröße ist dabei wiederum der analytische Preis, der zudem den interpolierten MC-Fehler berücksichtigt. Die Beschriftung der Abszisse mit der Swap Nummer stammt aus der Excel-Auswertung und bezieht sich auf die Swaps mit Startzeitpunkten zwischen dem 12.03.2012 und dem 11.09.2012. Um alle Interpolationsfehler der Swapbewertung grafisch zu sehen, sei erneut auf die Excel-Datei verwiesen. Auf dem Tabellenblatt „Grafiken Swaps“ wurde eine Grafik für alle untersuchten Swaps erstellt.

Die zuvor aufgestellten Thesen lassen sich anhand der Grafik 4.3 bestätigen. So besitzt der Interpolationsfehler des Ansatzes „KonstAbh1“ auf dem gesamten Intervall ein niedriges Niveau. Die Fälle, in denen ein anderer Ansatz eine geringere Abweichung, bzw. in den Auswertungen zuvor einen kleineren quadratischen Fehler liefert, vgl. Tabelle 4.3, kann man auf diese Weise durch große Schwankungen des Interpolationsfehlers begründen. Mit anderen Worten lassen sie sich nicht auf einzelne große Abweichungen von „KonstAbh1“

zurückführen. Demgegenüber stehen die Ansätze „Vasicek2 1,70“ und „LIBORVola1“ mit beträchtlichen Abweichungen, wobei der Ansatz „Vasicek2 1,70“ seine größte Abweichung sogar unmittelbar nach dem Tenorzeitpunkt verzeichnet. Dies ist zunächst eher ungewöhnlich und kann in der starken Abhängigkeit von  $\kappa$  begründet sein.

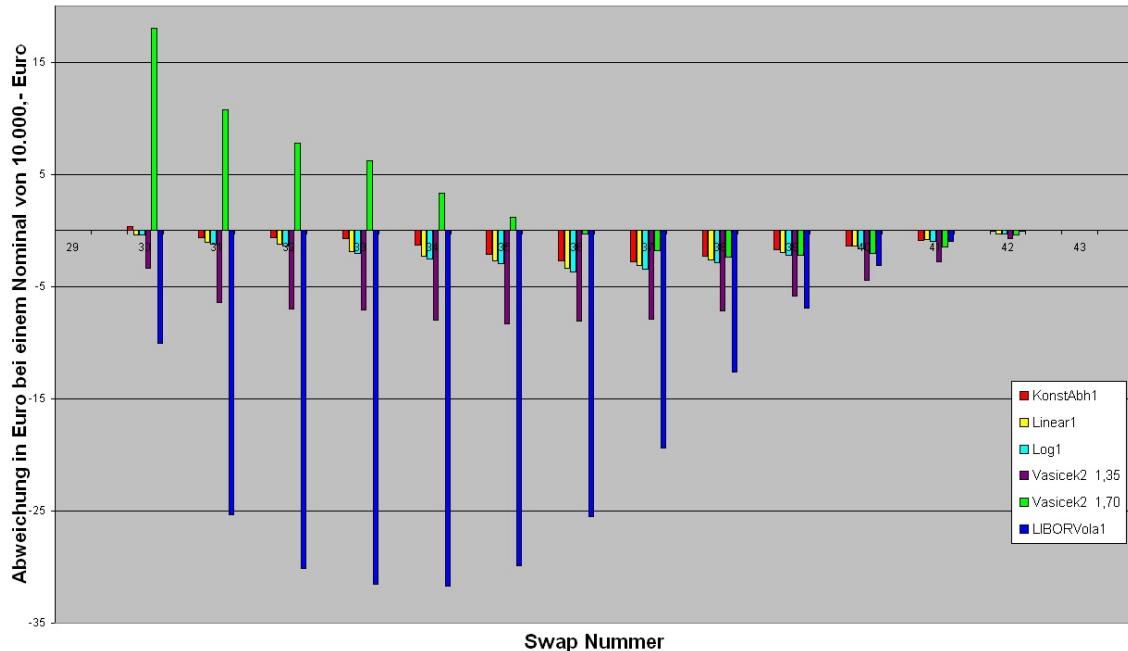


Abbildung 4.3: Interpolationsfehler am Beispiel von 5y–Payer–Swaps mit erstem Fixing–Date zwischen dem 12.03.2012 und dem 11.09.2012

Die Interpolationsfehler der Ansätze, die über das gesamte Intervall vergleichsweise kleine Fehler liefern (wie z.B. die Ansätze „konstAbh1“, „Linear1“ oder „Log1“), sind in der Intervallmitte am größten. Einerseits kann man vermuten, dass diese Beobachtung mit der Länge des zu interpolierenden Intervalls zusammenhängt, andererseits kann dies aber auch ein Fehler sein, der aus der Interpolation des MC–Fehlers herrührt.

Abschließend ist zu den Auswertungen der Zinsderivate zu bemerken, dass immer nur eine spezielle LIBOR–Rate in die Bewertungen eingegangen ist. Hierbei handelt es sich um die LIBOR–Rate, deren Startzeitpunkt mit dem Beobachtungsdatum übereinstimmt.

Im Bezug auf die durchgeführten Auswertungen hat der konstante Interpolationsansatz mit Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen die genauesten und (im Hinblick auf die Lage der Zinsderivate) stabilsten Ergebnisse erzielt.

## 5 Fazit

Das Ziel der vorliegenden Diplomarbeit besteht darin, Möglichkeiten aufzuzeigen, wie man im Rahmen des diskreten Standard LIBOR–Markt–Modells beliebige LIBOR–Raten, d.h. Raten mit beliebigem Start– und Enddatum, bestimmen kann. Zu diesem Zweck haben wir Interpolationsansätze vorgestellt, die auf Basis des gegebenen LIBOR–Markt–Modells und den darin verfügbaren simulierten Raten beliebige LIBOR–Raten liefern.

Bei der Analyse der einzelnen Interpolationsmöglichkeiten wurde gezeigt, dass alle vorgestellten Interpolationsansätze die geforderte Stetigkeitsbedingung erfüllen. Weiterhin haben wir festgestellt, dass es unter den sieben vorgestellten Ansätzen keine Vorgehensweise gibt, die alle ausgewählten Gütekriterien erfüllt. Darüber hinaus müssen wir darauf hinweisen, dass nicht alle Kriterien für jeden Ansatz explizit nachgeprüft werden konnten.

In dem theoretischen Kapitel 3.3 galt der Ansatz zur Interpolation über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell als einer der Favoriten. Zum einen lag dies an dem stochastischen Einfluss aus dem Short–Rate–Modell und zum anderen hat auch Piterbarg diese Interpolationsmöglichkeit für den Praxiseinsatz empfohlen. Doch wie wir in den anwendungsorientierten Auswertungen des Kapitels 4.3 festgestellt haben, hat dieser Ansatz markante Abweichungen zu unserem Referenzpreis hervorgerufen.

Ebenso blieb im Rahmen der vorgenommenen Untersuchungen der Erfolg der vorgeschlagenen linearen Interpolation aus, welche in Abhängigkeit zur Lage der Start– und Endpunkte der geforderten LIBOR–Rate die Zerobondaufteilung auswählt. Mit anderen Worten impliziert die Variante der Zerobondaufteilung mit dem kleineren zu interpolierenden Intervall nicht zwangsläufig bessere Interpolationsresultate.

Bemerkenswert sind die sehr geringen und stabilen Abweichungen zum vorausgesetzten Referenzpreis der konstanten Interpolation mit zusätzlicher Abhängigkeit zu den umliegenden Gitterstellen („KonstAbh1“). Dies ist speziell aus anwendungsorientierter Sicht ein bedeutsames Argument für diesen Ansatz. Nichtsdestoweniger sind für den Ansatz „Kon-

stAbh1“ auch die Ergebnisse aus dem theoretischen Teil der Arbeit erwähnenswert. Neben den exaktesten und robustesten Ergebnissen im praktischen Teil, hat diese Vorgehensweise bis auf die nicht ausgeschlossenen negativen Raten bei stark ansteigender LIBOR–Struktur alle Gütekriterien erfüllt.

Abschließend ist jedoch festzuhalten, dass sich die obigen Aussagen ausschließlich auf die durchgeführten Auswertungen dieser Arbeit beziehen. Um verlässlichere Aussagen tätigen zu können, muss man den MC–Fehler durch eine wesentlich höhere Anzahl an Simulationen verringern und die Auswertungen auch für andere Derivate und Laufzeiten durchführen.

In weiteren Untersuchungen, die über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausreichen, könnte die Aussage der „Fast Arbitragefreiheit“ in den Ansätzen von Brace (Interpolation der LIBOR–Volatilität) und Piterbarg (Interpolation über die Bond–Preis–Formel aus dem Extended–Vasicek–Modell) genauer untersucht werden. Brace schreibt sogar, dass in seinem Interpolationsansatz bei einer Nichtidentifizierung der Forward Maße die Arbitragefreiheit erreicht werden kann.

Da die Interpolationsmöglichkeit „KonstAbh1“ gute Ergebnisse erbracht hat, wäre ein weiteres mögliches Thema die Analyse der Erweiterung dieses Ansatzes nach Beveridge und Joshi im „Displaced Diffusion LIBOR–Markt–Modell“, vgl. [BJ09]. Auch Werpachowski greift diesen Ansatz in seinem Artikel auf, vgl. [Wer10].

Darüber hinaus müsste man die Untersuchungen des Interpolationsfehlers bei der Bewertung von Zinsderivaten detaillierter vornehmen. Hervorzuheben ist dabei einerseits die Notwendigkeit der zuvor bereits geschilderten Reduzierung des MC–Fehlers. Andererseits wurden in den durchgeführten Bewertungen ausschließlich LIBOR–Raten des selben Typs herangezogen. Dabei handelt es sich um diejenigen Raten, deren Startzeitpunkt mit dem Beobachtungsdatum übereinstimmt. Da in andere Zinsderivate aber auch LIBOR–Raten eingehen können, deren Beobachtungs– und Startdatum nicht übereinstimmen, ist eine Analyse dieser Zinsderivate wünschenswert, da sich dann der Front–Stub aus den Zerobond–Interpolationen herauskürzen würde. Ein weiterer interessanter Aspekt wäre in diesem Zusammenhang eine weitreichendere Analyse des Einflusses von  $\kappa$ , der Mean–Reversion–Geschwindigkeit.

# A Anhang

## A.1 Weiterführende Rechnungen und Hintergrundinformationen

**Beispiel A.1.** In diesem Beispiel wollen wir zeigen, dass der Bruch (3.39) von Seite 64 einen Wert annehmen kann, der kleiner als 1 ist, so dass die resultierende LIBOR-Rate  $L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})$  negativ werden kann. Der Bruch ist gegeben durch:

$$\frac{(1 + \delta_{\eta(\tau)} L_{\eta(\tau)}(t)) (1 + (T_{\eta(\tau)} - \tau) \cdot \Lambda)}{1 + (T_{\eta(\tau)+1} - (\tau + \delta_{\eta(\tau)-1})) \cdot \Psi},$$

wobei  $\Lambda$  und  $\Psi$  gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \left( \xi(\tau) L_{\eta(\tau)-1}(T_{\eta(\tau)-1}) + (1 - \xi(\tau)) L_{\eta(\tau)}(t) \right) \quad \text{und} \\ \Psi &:= \left( \xi(\tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) L_{\eta(\tau)}(t) + (1 - \xi(\tau + \delta_{\eta(\tau)-1})) L_{\eta(\tau)+1}(t) h(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}, L_{\eta(\tau)+1}(t)) \right). \end{aligned}$$

Wir nehmen eine äquidistante, halbjährliche Tenorstruktur an, d.h.

$$\delta_{\eta(\tau)-1} = \delta_{\eta(\tau)} = 0,5.$$

Weiter legen wir die Funktion  $\xi$  fest durch

$$\xi(t) = \frac{T_{\eta(t)} - t}{T_{\eta(t)} - T_{\eta(t)-1}}.$$

Außerdem setzen wir

$$T_{\eta(\tau)} - \tau = T_{\eta(\tau)+1} - (\tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) = 0,2.$$

Die Werte für  $\xi$  ergeben sich dann zu

$$\xi(\tau) = 0,4$$

$$1 - \xi(\tau) = 0,6$$

$$\xi(\tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) = 0,4$$

$$1 - \xi(\tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) = 0,6.$$

Für die LIBOR-Raten nehmen wir die folgenden Werte an:

$$L_{\eta(\tau)-1}(T_{\eta(\tau)-1}) = 1,5\%$$

$$L_{\eta(\tau)}(t) = 3,5\%$$

$$L_{\eta(\tau)+1}(t) = 18,5\%.$$

Das Ziel ist es zu zeigen, dass der Bruch (3.39) mit den obigen Beispieldaten kleiner als 1 wird. Es genügt zu zeigen, dass der Nenner größer ist als der Zähler. Im Nenner steht der Faktor der Konvexitätskorrektur. Für diesen gilt nach (3.38):

$$h(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}, L_{\eta(\tau)+1}(t)) \geq 1,$$

da  $e^x \geq 1$  für  $x \geq 0$ . Da der Nenner umso größer wird, je größer der Faktor der Konvexitätskorrektur wird, schätzen wir ihn durch den Wert 1 ab.

Setzen wir jetzt die obigen Werte in (3.39) ein, so ergibt sich:

$$\frac{(1 + 0,5 \cdot 0,035)(1 + 0,2 \cdot (0,4 \cdot 0,015 + 0,6 \cdot 0,035))}{1 + 0,2 \cdot (0,4 \cdot 0,035 + 0,6 \cdot 0,185)} = \frac{1,02299}{1,02557} < 1.$$

Also erhalten wir insgesamt über die Formel (3.1) eine negative LIBOR-Rate:

$$L(t, \tau, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1}) = \frac{1}{\delta_{\eta(\tau)-1}} \left( \underbrace{\frac{P(t, \tau)}{P(t, \tau + \delta_{\eta(\tau)-1})} - 1}_{<1} \right) < 0.$$

Dieses Ergebnis ist wie wir durch die Abschätzung des Konvexitätskorrekturfaktors gesehen haben, unabhängig von der Volatilitätsstruktur.

**Bemerkung A.2** (HJM-Modell). Das HJM-Modell ist ein Zinsstrukturmodell, das ausgehend von den Forward-Rates die gesamte Zinsstruktur modelliert. Das HJM-Modell bildet einen Modellrahmen, worin sogar das LIBOR-Markt-Modell eingebettet werden kann. An dieser Stelle soll lediglich ein kurzer Überblick über den allgemeinen Rahmen dieses Modells gegeben werden. Dies geschieht vor allem mit dem Ziel, die Bond-Preis-Dynamik in diesem Modell zu erläutern, die im Unterkapitel 3.3.5 verwendet wird. Als Literatur für diese zusammenfassende Darstellung dienen [BS04] und [Sch05].

Wir setzen den endlichen Zeitraum  $[0, T_N]$  voraus. Für ein festes  $T$  mit  $0 \leq T \leq T_N$  ist die folgende stochastische Differentialgleichung für die Forward-Rates der Ausgangspunkt

des Modells:

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_N.$$

Für den Zusammenhang zwischen den Zerobonds und der Forward–Rate gilt:

$$P(t, T) = \exp \left( - \int_t^T f(t, s)ds \right).$$

Die Dynamik der Zerobonds wird aus der Dynamik der Forward–Rates abgeleitet. Mit Hilfe der Itô–Formel erhält man schließlich für die Dynamik der Bondpreise:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \left( r(t) - \mu^*(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2 \right) dt - \sigma^*(t, T)dW_t,$$

wobei  $\mu^*(t, T)$  und  $\sigma^*(t, T)$  gegeben sind durch:

$$\mu^*(t, T) = \int_t^T \mu(t, s)ds \quad \text{und} \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s)ds.$$

**Bemerkung A.3** (Extended–Vasicek–Modell). In diesem Abschnitt wird überblicksartig das Extended–Vasicek–Modell vorgestellt, welches wir in den Unterkapiteln 3.3.5 und 3.3.6 verwendet haben. Die Ausführungen orientieren sich hierbei an [PA10b] und [BS04]. Genauer handelt es sich um ein erweitertes Vasicek–Modell, bei dem die Parameter zeitabhängig sein können. Es handelt sich also um ein Short–Rate–Modell, das die Idee des Martingale Modelling verwendet, d.h. die Dynamik der Short–Rate wird direkt unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß betrachtet. Setzt man das endliche Zeitintervall  $[0, T_N]$  voraus, dann ist die Short–Rate Dynamik im Extended–Vasicek–Modell gegeben durch:

$$dr(t) = \kappa(t)(\theta(t) - r(t))dt + \sigma_r(t)d\bar{W}_t \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_N,$$

wobei  $(\bar{W}_t)_{0 \leq t \leq T_N}$  eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet. Des Weiteren steht  $r(t)$  für die Short–Rate, d.h. für den augenblicklichen Zinssatz,  $\theta$  bezeichnet das Mean–Reversion–Level,  $\kappa$  die Mean–Reversion–Rate, sowie  $\sigma_r$  die Volatilität der Short–Rate. Es handelt sich um deterministische Funktionen der Zeit, wobei wir in den Kapiteln 3.3.5 und 3.3.6 vorausgesetzt haben, dass  $\kappa(t) = \kappa$  gilt, also die Mean–Reversion–Rate konstant ist.

Das Modell wird auch als „Ein–Faktor–Gauss–Modell“ bezeichnet, da das Modell über eine Brownsche Bewegung getrieben wird und die Short–Rate normalverteilt ist.

In dem Extended–Vasicek–Modell kann man für die Zerobonds eine geschlossene Formel angeben. Nachfolgend betrachten wir den allgemeinen Fall, bei dem die Mean–Reversion–Rate nicht als konstant angenommen wird. Um den Ausdruck übersichtlich zu gestalten, definieren wir hierzu:

$$x(t) := r(t) - f(0, t),$$

wobei  $f$  die Forward–Rate bezeichnet, sowie

$$y(t) := \int_0^t \exp \left( -2 \int_u^t \kappa(s) ds \right) \sigma_r(u)^2 du,$$

und

$$G(t, T) := \int_t^T \exp \left( - \int_t^u \kappa(s) ds \right) du.$$

Die Zerobond–Preise im Extended–Vasicek–Modell sind mit diesen Schreibweisen gegeben durch die Formel:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( -x(t)G(t, T) - \frac{1}{2}y(t)G(t, T)^2 \right).$$

Der Beweis dieser Formel kann in [PA10b] nachgelesen werden.

**Beispiel A.4.** Es wird nachfolgend ein Beispiel präsentiert, das im Fall des Interpolationsansatzes aus Kapitel 3.3.5 zu einer negativen LIBOR–Rate führt. Hierzu nehmen wir eine äquidistante Tenorstruktur mit  $\delta = 0.5$  an. Es soll die LIBOR–Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  bestimmt werden, wobei wir voraussetzen, dass wir uns heute im Zeitpunkt 0 befinden, sowie  $t = 2$ ,  $\tau_1 = 3.1$  und  $\tau_2 = 3.4$  gilt. Allgemein ist die LIBOR–Rate gegeben durch:

$$\begin{aligned} L(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, \tau_1)}{P(t, \tau_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_1)-1}) P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_1)}{P(t, T_{\eta(t)}) P(t, T_{\eta(t)}, T_{\eta(\tau_2)-1}) P(t, T_{\eta(\tau_2)-1}, \tau_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \frac{P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_1)}{P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_2)} - 1 \right), \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung  $T_{\eta(\tau_1)-1} = 3 = T_{\eta(\tau_2)-1}$  gilt. Für die Zerobonds  $P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_1)$  und  $P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_2)$  verwenden wir die Interpolationsformel (3.46):

$$\begin{aligned} P(t, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) &= P(0, T_{\eta(\tau)-1}, \tau) \left( 1 + \frac{P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})}{P(0, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})} \cdot \frac{1 - e^{-\kappa(\tau - T_{\eta(\tau)-1})}}{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - e^{-\kappa(\tau - T_{\eta(\tau)-1})}}{1 - e^{-\kappa(T_{\eta(\tau)} - T_{\eta(\tau)-1})}} \right), \end{aligned}$$

wobei wir für den Zerobond  $P(t, T_{\eta(\tau)-1}, T_{\eta(\tau)})$ , der aus dem LIBOR-Markt-Modell stammt, annehmen:

$$P(2, 3, 3.5) = 0.985,$$

und für die Zerobonds, die von 0 aus beobachtet werden:

$$P(0, 3, 3.5) = 0.98 \quad P(0, 3, 3.4) = 0.999 \quad P(0, 3, 3.1) = 0.9999.$$

Für  $\kappa$  setzen wir einen neutralen Wert von  $\kappa = 1$  voraus.

Wir zeigen im Folgenden, dass  $P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_1) < P(t, T_{\eta(\tau_1)-1}, \tau_2)$  gilt und damit die LIBOR-Rate  $L(t, \tau_1, \tau_2)$  negativ wird. Für den Zerobond bis  $\tau_1$  gilt:

$$\begin{aligned} P(2, 3, 3.1) &= P(0, 3, 3.1) \left( 1 + \frac{P(2, 3, 3.5)}{P(0, 3, 3.5)} \cdot \frac{1 - e^{-1(3.1-3)}}{1 - e^{-1(3.5-3)}} - \frac{1 - e^{-1(3.1-3)}}{1 - e^{-1(3.5-3)}} \right) \\ &= 1.0018451, \end{aligned}$$

und für den Zerobond bis  $\tau_2$ :

$$\begin{aligned} P(2, 3, 3.4) &= P(0, 3, 3.1) \left( 1 + \frac{P(2, 3, 3.5)}{P(0, 3, 3.5)} \cdot \frac{1 - e^{-1(3.4-3)}}{1 - e^{-1(3.5-3)}} - \frac{1 - e^{-1(3.4-3)}}{1 - e^{-1(3.5-3)}} \right) \\ &= 1.0037046. \end{aligned}$$

Wegen  $1.0018451 < 1.0037046$  folgt, dass die LIBOR-Rate  $L(2, 3.1, 3.4)$  negativ ist.

Abschließend ist zu bemerken, dass die obigen Werte gerade so gewählt wurden, dass wir ein Beispiel für eine negative LIBOR-Rate erhalten. In der Praxis dagegen resultieren die Werte aus der anfänglichen Zinsstrukturkurve und dem LIBOR-Marktmodell, so dass zwar die Möglichkeit negativer Raten besteht, sie aber in den meisten Fällen positiv sind.

**Satz A.5.** Für eine normalverteilte Zufallsvariable  $Z$  gilt:

$$\mathbb{E}[\exp(Z)] = \exp\left(\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{2} \text{Var}[Z]\right).$$

*Beweis:*  $Z$  sei gegeben als  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable. Über die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable können wir die Formel direkt nachrechnen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\exp(Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{2\sigma^2x - x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2} - (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\right) dx \\
 &= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + \mu^2 + \sigma^4 - 2\sigma^2x - 2x\mu + 2\sigma^2\mu}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{=1} \\
 &= \exp\left(\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{2} \text{Var}[Z]\right).
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Das Ziel ist die Erweiterung dieser Gleichung auf den Fall  $\mathbb{E}[\exp(X)|Y]$ , wobei wir voraussetzen, dass  $X$  und  $Y$  bivariat normalverteilt sind. Um zu einer solchen Gleichung zu gelangen, betrachten wir zunächst die faktorisierte bedingte Erwartung. Es gilt:

$$\mathbb{E}[\exp(X)|Y=y] = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x,y) dx,$$

wobei  $f_Y(y)$  für die Dichte der normalverteilten Zufallsvariablen  $Y$  steht (insbesondere gilt somit  $f_Y(y) > 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ ), sowie  $f(x,y)$  für die Dichte der gemeinsamen Verteilung von  $X$  und  $Y$ . Ziehen wir die Dichte von  $Y$  in das Integral, so ergibt sich:

$$\mathbb{E}[\exp(X)|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Da  $f_{X|Y}(x|y)$  eine Normalverteilungsdichte ist, gilt die gewünschte Formel in der Form:

$$\mathbb{E}[\exp(X)|Y=y] = \exp\left(\mathbb{E}[X|Y=y] + \frac{1}{2} \text{Var}[X|Y=y]\right).$$

Diese Aussage erhalten wir für alle  $y$ , womit wir insgesamt erhalten:

$$\mathbb{E}[\exp(X)|Y] = \exp\left(\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{2} \text{Var}[Z]\right),$$

wobei  $Z$  eine Zufallsvariable bezeichne, die verteilt ist wie  $X|Y$ .

**Lemma A.6** (Folgerung aus der Itô–Isometrie). *Sei  $(W_t)_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ . Weiter seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , sowie  $g$  und  $f$  zwei deterministische reelle Funktionen. Dann gilt:*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b g(t) dW_t \right) \left( \int_a^b f(t) dW_t \right) \right] = \int_a^b g(t) f(t) dt.$$

*Beweis:* Mit der Itô–Isometrie gilt für eine deterministische Funktion  $f$ :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b f(t) dW_t \right)^2 \right] = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Des Weiteren benutzen wir  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , sowie die Linearität des stochastischen Integrals aus. Damit erhalten wir für zwei deterministische Funktionen  $g$  und  $f$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b g(t) dW_t \right) \left( \int_a^b f(t) dW_t \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ 2 \left( \int_a^b g(t) dW_t \right) \left( \int_a^b f(t) dW_t \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b g(t) dW_t + \int_a^b f(t) dW_t \right)^2 - \left( \int_a^b g(t) dW_t \right)^2 - \left( \int_a^b f(t) dW_t \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b (g(t) + f(t)) dW_t \right)^2 - \left( \int_a^b g(t) dW_t \right)^2 - \left( \int_a^b f(t) dW_t \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_a^b (g(t) + f(t))^2 dt - \int_a^b g(t)^2 dt - \int_a^b f(t)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_a^b g(t)^2 dt + 2 \int_a^b g(t) f(t) dt + \int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b g(t)^2 dt - \int_a^b f(t)^2 dt \right) \\ &= \int_a^b g(t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

## A.2 Daten–CD

Auf der beigefügten Daten–CD sind alle für die Diplomarbeit erstellten Programmcodes, Abbildungen und Tabellen enthalten. Der Datenträger befindet sich in der CD–Tasche auf dem Innen–Cover.



# Literaturverzeichnis

- [BBA] BBA: *The British Bankers' Association*. – <http://bbalibor.com/bbalibor-explained/the-basics> Zugriff am: 10.11.2010
- [BGM97] BRACE, Alan ; GATAREK, Dariusz ; MUSIELA, Marek: The Market Model of Interest Rate Dynamics. In: *Mathematical Finance* Vol 7 (1997), Nr. 2, S. 127–147
- [BJ09] BEVERIDGE, Christopher ; JOSHI, Mark: Interpolation Schemes in the Displaced-Diffusion LIBOR Market Model and the Efficient Pricing and Greeks for Callable Range Accruals. (2009). – <http://ssrn.com/abstract=1461285> Zugriff am: 28.10.2010
- [BM06] BRIGO, Damiano ; MERCURIO, Fabio: *Interest Rate Models - Theory and Practice. With Smile, Inflation and Credit*. Second edition. Berlin Heidelberg New York : Springer Finance, 2006
- [Bra07] BRACE, Alan: *Engineering BGM*. Sydney : Chapman and Hall/CRC, 2007
- [BS04] BRANGER, Nicole ; SCHLAG, Christian: *Zinsderivate*. Berlin : Springer, 2004
- [CIR85] COX, John C. ; INGERSOLL, Jonathan E. ; ROSS, Stephen A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. In: *Econometrica* Vol 53 (1985), Nr. 2, S. 385–407
- [Fri07] FRIES, Christian P.: *Finanzmathematik: Theorie, Modellierung, Implementierung*. Frankfurt am Main, 2007. – <http://www.christian-fries.de/finmath/book>
- [HJM92] HEATH, David ; JARROW, Robert A. ; MORTON, Andrew: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. In: *Econometrica* 60 (1992), Nr. 1, S. 77–105
- [Hul09] HULL, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. 7. Auflage. München : Pearson Studium, 2009
- [Jäc02] JÄCKEL, Peter: *Monte Carlo Methods in Finance*. West Sussex : John Wiley and Sons, 2002
- [Jam97] JAMSHIDIAN, Farshid: LIBOR and swap market models and measures. In: *Finance and Stochastics* Vol 1 (1997), Nr. 4, S. 293–330
- [Jos03] JOSHI, Mark S.: Rapid computation of drifts in a reduced factor LIBOR Market Model. In: *Wilmott Magazine* (2003). – (Entwurf)
- [MSS97] MILTERSEN, Kristian R. ; SANDMANN, Klaus ; SONDERMANN, Dieter: Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. In: *Journal of Finance* Vol 52 (1997), Nr. 1, S. 409–430

- [PA10a] PITERBARG, Vladimir V. ; ANDERSEN, Leif B. G.: *Interest Rate Modeling*. Bd. I: Foundations and Vanilla Models. 1st edition. London, New York : Atlantic Financial Press, 2010
- [PA10b] PITERBARG, Vladimir V. ; ANDERSEN, Leif B. G.: *Interest Rate Modeling*. Bd. II: Term Structure Models. 1st edition. London, New York : Atlantic Financial Press, 2010
- [Pau10] PAULSEN, Volkert: *Handschriftliche Vorlesungsmitschrift Finanzmathematik I+II*. 2010. – WWU Münster WS2009/2010 und SS2010
- [Pel01] PELSSER, Antoon A. J.: Mathematical Foundation of Convexity Correction. (2001). – <http://ssrn.com/abstract=267995> Zugriff am: 15.10.2010
- [Pit03] PITERBARG, Vladimir V.: Computing Deltas of callable LIBOR exotics in forward LIBOR models. (2003). – <http://ssrn.com/abstract=396180> Zugriff am: 28.10.2010
- [PPVR03] PIETERSZ, Raoul ; PELSSER, Antoon ; VAN REGENMORTEL, Marcel: Fast Drift Approximated Pricing in the BGM Model. In: *Wilmott Magazine* (2003). – <http://ssrn.com/abstract=520424> Zugriff am: 15.12.2010
- [Rut97] RUTKOWSKI, Marek: Spot, Forward, and Futures Libor Rates. (1997). – <http://alpha.mini.pw.edu.pl/~fmg/fileadmin/files/mr/work3b.pdf> Zugriff am: 14.02.2011
- [SC00] SCHOENMAKERS, John ; COFFEY, Brian: Stable implied calibration of a multi-factor LIBOR model via a semi-parametric correlation structure / Weierstrass-Institute. 2000. – Forschungsbericht
- [Sch02] SCHLÖGL, Erik: Arbitrage-free interpolation in models of market observable interest rates. In: *Advances in Finance and Stochastics: Essays in Honour of Dieter Sondermann*. Heidelberg : Springer, 2002, S. 197–218
- [Sch05] SCHMIDT, Thorsten: *Zinsstrukturmodelle*. 2005. – Vorlesungsskript
- [Vas77] VASICEK, Oldrich: An equilibrium characterization of the term structure. In: *Journal of Financial Economics* Vol 5 (1977), Nr. 2, S. 177–188
- [Wer10] WERPACHOWSKI, Roman: Arbitrage-free interpolation scheme for Libor Market Model with smooth volatility term structure. (2010). – <http://ssrn.com/abstract=1729828> Zugriff am: 18.01.2011