Diplomarbeit

Arbitragefreies Bewerten von Schadenversicherungen

von

Ingmar Schiltz

Universität Siegen

Fachbereich Mathematik

Juni 2005

Betreuer und Gutachter:

Priv. Doz. Dr. Edgar Kaufmann,	Universität Siegen
Priv. Doz. Dr. Volkert Paulsen,	Universität Siegen

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

bzgl.	:	bezüglich
bzw.	:	beziehungsweise
const.	:	konstant
d.h.	:	das heißt
ff.	:	fortfolgende (Seiten)
f.s.	:	fast sicher
iid	:	unabhängig, identisch verteilt
o.E.	:	ohne Einschränkung
RK	:	Risikokäufer
S.	:	Seite
s.d.	:	so dass
vgl.	:	vergleiche
VN	:	Versicherunsnehmer
VU	:	Versicherungsunternehmen
W-Maß	:	Wahrscheinlichkeitsmaß
W-Raum	:	Wahrscheinlichkeitsraum
z.B.	:	zum Beispiel
ZV	:	Zufallsvariable
z.Z.	:	zum Zeitpunkt
z.z.	:	zu zeigen

Symbolverzeichnis

$\blacksquare$	:	Ende der Bemerkung, der Definition, der Bezeichnung oder des Korollars
$\square$	:	Ende des Beweises
$\sim$	:	verteilt nach
B_t	:	Bondpreis z.Z. $t \in [0, T]$
$(B_t)_{t=0}^T$	:	Preisprozess des Bondes
$\mathbb{B}$	:	Borelsche σ-Algebra
$\mathrm{E}[\mathrm{X}]$	:	Erwartungswert der Zufallsvariable X
exp	:	Exponentialfunktion
$\mathcal{EP}_\lambda$	:	Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$
$\mathcal{F}$	:	Filtration
$(\mathrm{K}_t)_{t\in[0,T]}$	:	Kompensator
ln	:	natürlicher Logarithmus
max	:	Maximum
MEF	:	Momenterzeugende Funktion
$\mathbb{N}$	:	Menge der natürlichen Zahlen
Ω	:	Grundraum, Zustandsraum
$\mathrm{P}\{.\}$	:	Wahrscheinlichkeit, dass $\{.\}$ eintritt
P, Q	:	Wahrscheinlichkeitsmaße, Poissonsche Schadensummenverteilungen
$\mathcal{P}$	:	previsible σ-Algebra
p_t	:	Prämie für das verbleibende Risiko der Periode $(t, T]$
$(p_t)_{t\in[0,T]}$	:	Prämienprozess
r	:	Log-Marktzins (einer Periode)
$\mathbb{R}$	:	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{R}$	:	System der previsiblen Rechtecke

$\mathcal{SEP}$	:	Standardexponentialverteilung
S_t	:	Schadensumme bis z.Z. $t \in [0, T]$
$(S_t)_{t\in[0,T]}$	:	Schadensummenprozess
$\sigma\{.\}$	:	von $\{.\}$ erzeugte σ-Algebra
T	:	zukünftiger Zeitpunkt bzw. Ende der Vertragslaufzeit
$\mathrm{Var}[\mathrm{X}]$	:	Varianz der Zufallsvariable X
X, Y	:	Zufallsvariablen
Z_t	:	Preis eines Finanzgutes z.Z. $t \in [0, T]$
$(\mathrm{Z}_t)_{t\in[0,T]}$	:	Preisprozess eines Finanzgutes

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thematische Einordnung der Arbeit

In der Finanzmathematik stellt sich häufig die Frage nach der Bewertung von Finanzderivaten. Black, F. & Scholes, M.S. [2] sowie Merton, R.C. [14] z.B. haben in ihren Arbeiten den fairen Preis für eine Europäische Call Option unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit über ein Hedgeportfolio berechnet, welches die Zahlungsströme der Call Option dupliziert. Voraussetzung dabei ist die Handelbarkeit der der Option zu Grunde liegenden Wertpapiere.
Etwas differentierter sieht es im Schadenversicherungswesen aus. Dort ist ein Handel mit Versicherungsverträgen nicht erlaubt. Man könnte sich jedoch ein Modell überlegen, das die Voraussetzungen erfüllt, um einen Handel mit Versicherungspolicen zu ermöglichen. Wünschenswert ist dabei ein Modell, das die Möglichkeit von Arbitrage, also risikofreien Gewinnen, ausschließt. In diesem Modell müssten die Versicherungsverträge dann natürlich auch einer Bewertung unterzogen werden, um einen Preis für sie als Handelsgüter zu bestimmen. Ein solches Modell haben Delbaen & Haezendonck in [3] aufgestellt. Ihre Veröffentlichung ist Grundlage dieser Arbeit und wird in Kapitel 2 und Kapitel 3 dargestellt.
Delbaen & Haezendonck zeigen, dass der Preis für einen Versicherungsvertrag als Handelsgut gleichgesetzt werden kann mit der Zahlungsverpflichtung, die sich aus dem Versicherungsvertrag für jenes Versicherungsunternehmen ergibt, welches den Vertrag mit ei-

nem Versicherungsnehmer abgeschlossen hat. Diese Zahlungsverpflichtung besteht aus zwei unterschiedlichen Komponenten. Zum Einen muss die zum Handelszeitpunkt angefallene Schadensumme berücksichtigt werden, zum Anderen eine Prämie für die Restlaufzeit des Vertrages, die den in diesem Zeitraum fallenden erwarteten Schaden abdeckt.
Wie sich herausstellen wird, beschreibt das Modell von Delbaen & Haezendonck einen unvollständigen Markt, so dass weder ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß noch ein eindeutig bestimmter fairer Preis für die Handelsgüter - anders als im Black-Scholes-Modell - existiert. Es werden jedoch Eigenschaften herausgearbeitet, durch die besonders „gute“ zur Ausgangswahrscheinlichkeit äquivalente Martingalmaße charakterisiert werden. Mit diesen Eigenschaften wird ein Satz formuliert, durch den alle diese „guten“ Martingalmaße bestimmt werden können. „Gut“ heißen in diesem Fall alle Martingalmaße, unter denen der zu Grunde liegende Schadensummenprozess ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung bleibt.
Ein weiterer untersuchter Punkt ist der Zusammenhang von Prinzipien, die zur Prämienkalkulation im Versicherungswesen benutzt werden und dem Prämienanteil der Zahlungsverpflichtung. Wie sich herausstellen wird, ist die Prämie für die Restlaufzeit des Vertrages, die den in diesem Zeitraum erwarteten Schaden abdeckt, das Ergebnis eines Maßwechsels von der Ausgangswahrscheinlichkeit hin zu einem dazu äquivalenten Martingalmaß. Dabei bleibt der Schadensummenprozess zwar ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung, aber es können sich sowohl die Intensität des Schadenanzahlprozesses als auch die Verteilung der Schadenhöhen verändern.
Desweiteren wird ein Stopp-Loss-Kontrakt in dem Modell von Delbaen & Haezendonck eingeführt, durch den eine Rückversicherung modelliert werden kann. Zusätzlich wird eine obere und untere Schranke für den Bereich bestimmt, in dem die arbitragefreien Preise eines solchen Kontraktes liegen. Dieser Bereich wird auch als Range der arbitragefreien Preise des Stopp-Loss-Kontraktes bezeichnet.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden zuerst die mathematischen Grundlagen für das Modell von Delbaen & Haezendonck und dann das Modell selber eingeführt. Am Ende dieses Kapitels wird der schon angesprochene Satz zur Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße, unter denen

der Schadensummenprozess ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung bleibt, dargestellt und bewiesen.
Beziehungen zwischen schon bekannten Prämienkalkulationsprinzipien und dem Teil der Zahlungsverpflichtung, der aus der Prämie für die Restlaufzeit des Vertrages besteht, werden in Kapitel 3 herausgearbeitet.
In Kapitel 4 wird ein Modell für einen Stopp-Loss-Kontrakt auf das oben genannte Handelsgut aufgestellt, Eigenschaften der Auszahlungsfunktion des Stopp-Loss-Kontraktes hergeleitet und eine obere und untere Schranke für den Range der arbitragefreien Preise bestimmt.
Die Ergebnisse der Arbeit werden noch einmal in Kapitel 5 zusammenfassend dargestellt.
Im Anhang A werden einige, in der vorliegenden Arbeit benutzte Verteilungen und ihre Kenngrößen aufgeführt.
Einige Simulationen des Preisprozesses der Versicherungspolicen befinden sich in Anhang B.

Kapitel 2

Zur Bewertung von Schadenversicherungen

2.1 Mathematische Grundlagen

Um das Modell von Delbaen & Haezendonck herleiten zu können, seien hier noch einmal einige der dafür benötigten mathematischen Grundbegriffe beschrieben.

Definition 2.1.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(i) Eine Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ von Sub-σ-Algebren $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ heißt *Filtration*, falls

$$\forall\ 0 \leq s < t < \infty : \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Dabei wird

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left\{ \bigcup_{t \in [0,\infty)} \mathcal{F}_t \right\}$$

gesetzt.

(ii) Ein stochastischer Prozess $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_t)_{t \geq 0}$ heißt *adaptiert* zu der Filtration $\mathcal{F}$, falls

$$\forall\ t \geq 0 : \mathrm{X}_t\ \ \mathcal{F}_t\text{-messbar ist.}$$

(iii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein W-Raum. Ein zu einer Filtration $\mathcal{F}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\geq 0}$ heißt *Submartingal* bzgl. P bzw. kurz P-*Submartingal*, falls gilt:

(a) $\forall\, t : \mathrm{E}_P\, |\mathrm{M}_t| < \infty$

(b) $\forall\, s \leq t : \mathrm{E}_P\, [\mathrm{M}_t|\mathcal{F}_s] \geq \mathrm{M}_s$

(iv) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein W-Raum. Ein zu einer Filtration $\mathcal{F}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\geq 0}$ heißt *Supermartingal* bzgl. P bzw. kurz P-*Supermartingal*, falls gilt:

(a) $\forall\, t : \mathrm{E}_P\, |\mathrm{M}_t| < \infty$

(b) $\forall\, s \leq t : \mathrm{E}_P\, [\mathrm{M}_t|\mathcal{F}_s] \leq \mathrm{M}_s$ ■

(v) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein W-Raum. Ein zu einer Filtration $\mathcal{F}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_t)_{t\geq 0}$ heißt *Martingal* bzgl. P bzw. kurz P-*Martingal*, falls gilt:

(a) $\forall\, t : \mathrm{E}_P\, |\mathrm{M}_t| < \infty$

(b) $\forall\, s \leq t : \mathrm{E}_P\, [\mathrm{M}_t|\mathcal{F}_s] = \mathrm{M}_s$ ■

Definition 2.1.2. Sei X ein adaptierter Prozess zur Filtration $\mathcal{F}$ und sei

$$\mathcal{R} := \{\{0\} \times A : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s,t] \times B : 0 < s < t < \infty, B \in \mathcal{F}_s\},$$

dann heißt

(i) $\mathcal{R}$ *System der previsiblen (oder vorhersagbaren) Rechtecke*

(ii) $\mathcal{P} = \sigma\{\mathcal{R}\}$ *previsible σ-Algebra* oder *$\mathcal{F}$-vorhersagbare σ-Algebra* und

(iii) der Prozess X *previsibel*, *$\mathcal{F}$-previsibel* oder *vorhersagbar*, falls er betrachtet als Abbildung X auf $[0,\infty) \times \Omega$ mit $(t,\omega) \to \mathrm{X}_t(\omega)$ messbar bzgl. $\mathcal{P}$ ist. ■

Bemerkung 2.1.3. Wenn man die Werte kennt, die ein vorhersagbarer Prozess X vor dem Zeitpunkt t annimmt, dann kann man den Wert des Prozesses zum Zeitpunkt t selbst vorhersagen. (Vgl. z.B. [11], S. 251 ff.) ■

Definition 2.1.4. Sei $\mathcal{F}$ eine Filtration und $\mathrm{N} = (\mathrm{N}_t)_{t\in[0,T]}$ ein Zählprozess. Ein stochastischer Prozess $\mathrm{K} = (\mathrm{K}_t)_{t\in[0,T]}$ heißt *Kompensator* des Zählprozesses N, falls

(i) K ein (pfadweise) nichtfallender Prozess ist,

(ii) K ein vorhersagbarer Prozess ist und

(iii) K die Doob-Meyer-Zerlegung

$$\mathrm{N}_t = \mathrm{X}_t + \mathrm{K}_t \tag{2.1}$$

erfüllt, wobei $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_t)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal ist. ■

2.2 Das Modell von Delbaen & Haezendonck

Gesucht ist ein Modell, das den Handel mit Schadenversicherungsverträgen beschreibt. Da der Versicherungsnehmer (VN) die Schadenhöhe seines Versicherungsvertrages und damit die Zahlungsströme, die sich aus diesem Vertrag ableiten, direkt beeinflussen kann, darf der Versicherungsnehmer nicht in den Handel involviert werden, da sonst die Unabhängigkeit zwischen dem Preis des gehandelten Wertpapieres und den Marktteilnehmern nicht gegeben ist. Das Modell von Delbaen & Haezendonck beschreibt somit den Handel von Schadenversicherungsverträgen zwischen einzelnen Versicherungsunternehmen (VU), die die Schadenhöhe der gehandelten Verträge nicht beeinflussen können. Ein Versicherungsunternehmen tritt also als Verkäufer eines mit einem Versicherungsnehmer bereits abgeschlossenen Versicherungsvertrages in einem noch zu präzisierenden Sinne auf, ein anderes Unternehmen als Käufer. Betrachtet wird dabei der Zeitraum $[0, T]$, wobei T das Ende der Vertragslaufzeit darstellt (z.B. $T = 1$ Jahr). Sei weiterhin $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ der Schadensummenprozess einer Schadenversicherung mit Poissonscher Schadensummenverteilung P, wobei S_t die Schadensumme bis z.Z. t angibt. Zu der Poissonschen Schadensummenverteilung P sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ der W-Raum mit Zustandsraum Ω und Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, wobei $\mathcal{F}_t$ alle Informationen bis z.Z. t beinhaltet. Der Zins r wird in diesem Modell als konstant gleich Null ($r = 0$) angenommen. Es sei nun $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ der Preisprozess eines Finanzgutes adaptiert zur Filtration $\mathcal{F}$.

Z_t gibt dabei den Preis des Finanzgutes z.Z. t an. Dieses Finanzgut soll die Zahlungsverpflichtungen eines Schadenversicherungsunternehmens im Zeitraum $[0, T]$ resultierend aus einem mit einem Versicherungsnehmer abgeschlossenen Schadenversicherungsvertrag darstellen.

Annahme 2.2.1. *Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ kann das dem Preisprozess* Z *zu Grunde liegende Finanzgut ge- und verkauft werden. Zu diesem Zweck können selbstfinanzierende Handelsstrategien gefunden werden, die nur auf den Informationen der Vergangenheit beruhen. Der Markt, auf dem das Finanzgut gehandelt wird, sei hinreichend liquide, s.d. keine Arbitragemöglichkeiten entstehen.*

Sei zusätzlich $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ ein nichtwachsender, previsibler Prozess mit $p_0 < \infty$ und $p_T = 0$, wobei p_t die Prämie aus Sicht desjenigen Versicherungsunternehmens ist, das den Versicherungsvertrag mit einem Versicherungsnehmer abgeschlossen hat, die dieses Unternehmen einem anderen Versicherungsunternehmen z.Z. t für die Übernahme des verbleibenden Risikos der Periode $(t, T]$ des Vertrages zu zahlen hat. Darum wird $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ auch *Prämienprozess* genannt. Das Versicherungsunternehmen, welches den Vertrag mit dem Versicherungsnehmer abgeschlossen hat, tritt dabei als Verkäufer des Risikos auf dem Markt auf und hat also für die Risikoübernahme die Prämie p_t an den Käufer des Risikos zu zahlen. Risikoübernahme bedeutet, dass alle Schäden, die in der Periode $(t, T]$ von dem Versicherungsnehmer verursacht werden, von dem Käufer des Risikos entsprechend den Vertragsbedingungen abgesichert werden.
Weiterhin kann der Betrag $p_0 - p_t$ als Prämie für den Zeitraum $[0, t]$ interpretiert werden und $p_{t+dt} - p_t$ ist die Prämie für das Risiko $S_{t+dt} - S_t$. Dabei sind die Prämien $p_{t+dt} - p_t$ schon z.Z. t bekannt, während das Risiko $S_{t+dt} - S_t$ erst z.Z. $t + dt$ bekannt ist.
Da Arbitragemöglichkeiten in diesem Modell ausgeschlossen sind, muss der Betrag p_0 gleich der Prämie sein, die der Versicherungsnehmer dem Versicherungsunternehmen, bei dem er den Vertrag abgeschlossen hat, für die Versicherung gezahlt hat. Ansonsten hat das Versicherungsunternehmen durch direkten Weiterverkauf des Risikos die Möglichkeit zu einem risikolosen Gewinn.

Annahme 2.2.2. *Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ kann das Versicherungsunternehmen, welches einen Schadenversicherungsvertrag mit einem Versicherungsnehmer abgeschlossen hat, das verbleibende Risiko der Periode $(t, T]$ dieses Vertrages für eine previsible Prämie p_t auf dem Markt an einen Risikokäufer verkaufen. Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ existiert also ein*

Risikokäufer (RK), der bereit ist, das Schadensrisiko des Vertrages für den Zeitraum $(t, T]$ *von dem Versicherungsunternehmen für die Prämie* p_t *zu übernehmen.*

Damit kann der Preisprozess Z der Zahlungsverpflichtungen des Versicherungsunternehmens zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ wie folgt dargestellt werden:

$$\mathrm{Z}_t = S_t + p_t, \tag{2.2}$$

d.h. also, dass die Zahlungsverpflichtungen eines Versicherungsunternehmens z.Z. t zum Einen aus der aufgelaufenen Schadensumme zu diesem Zeitpunkt und zum Anderen aus der Prämie für das verbleibende Risiko $S_T - S_t$ der Restlaufzeit $T - t$ besteht, welches z.Z. t unbekannt ist.

In dem Modell von Delbaen & Haezendonck können also folgende Finanzgüter auf dem Markt für Schadenversicherungsverträge gehandelt werden:
Einerseits kann zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ein mit dem Zins $r = 0$ festverzinsliches Wertpapier, ein *Bond*, mit dem Preisprozess $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$, ge- und verkauft werden. Dann gilt zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$: $B_t \equiv 1$.
Andererseits besteht die Möglichkeit für Versicherungsunternehmen zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ das Schadensrisiko aus einem Versicherungsvertrag für die Gesamtlaufzeit des Vertrages $[0, T]$ untereinander für den Preis Z_t zu handeln. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Schadensregulierung erst am Ende der Vertragslaufzeit z.Z. T getätigt wird und der Versicherungsnehmer z.Z. 0 bereits die Prämie für die gesamte Vertragslaufzeit an das ihn versichernde Unternehmen gezahlt hat.

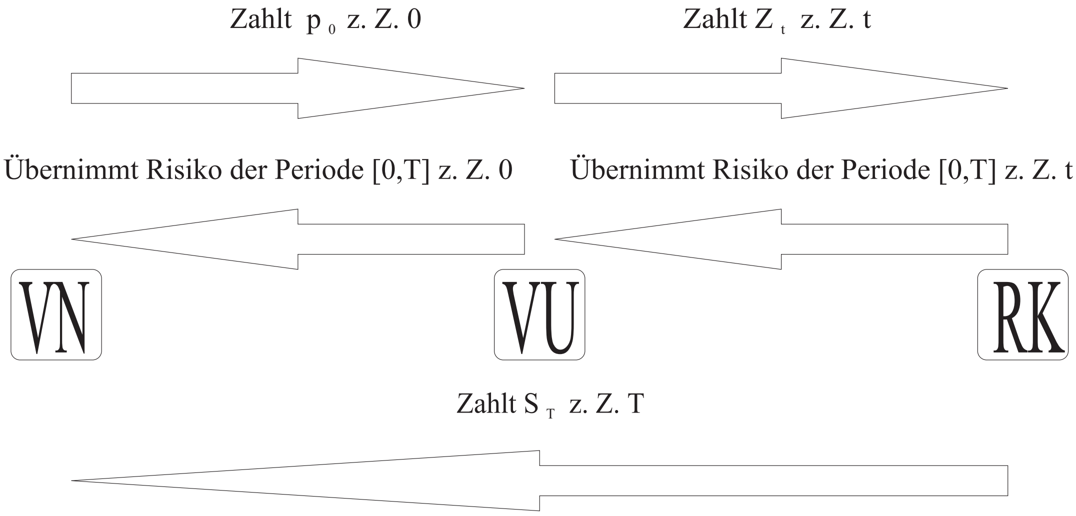

Abbildung 2.1: Zahlungsströme im Modell von Delbaen & Haezendonck.

Bemerkung 2.2.3. Die in Annahme 2.2.1 vorausgesetzte Arbitragefreiheit des Modells impliziert nach der Theorie von Harrison & Kreps (vgl. [6]) die Existenz (mindestens) eines zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes Q, unter dem der Preisprozess Z ein Martingal bzgl. Q ist. ■

Lemma 2.2.4. *Der Kompensator des Schadensummenprozesses* $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ *ist gegeben durch*

$$\mathrm{K} = (p_0 - p_t)_{t\in[0,T]}.$$

Beweis: Zu zeigen sind Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 2.1.4:
Aus Gleichung (2.2) folgt:

$$S_t = \mathrm{Z}_t - p_t = (\mathrm{Z}_t - p_0) + (p_0 - p_t)\,. \tag{2.3}$$

Da der Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ nichtwachsend ist, ist der Prozess $\mathrm{K} = (p_0 - p_t)_{t\in[0,T]}$ nichtfallend, d.h. die Bedingung (i) ist erfüllt. Nach Voraussetzung ist p ein vorhersagbarer Prozess und damit auch der Prozess $\mathrm{K} = (p_0 - p_t)_{t\in[0,T]}$, d.h. es gilt Bedingung (ii). Nach Bemerkung 2.2.3 existiert ein W-Maß Q unter dem Z ein Martingal ist. Damit ist Gleichung (2.3) äquivalent zu der Doob-Meyer-Zerlegung des Schadensummenprozesses

$S = (S_t)_{t\in[0,T]}$, falls der Prozess $(\mathrm{Z}_t - p_0)_{t\in[0,T]}$ ebenfalls ein Martingal unter Q ist, was noch zu zeigen ist:
Sei Also $t \in [0,T]$. Dann gilt:
$\mathrm{E}_Q |\mathrm{Z}_t - p_0| \leq \mathrm{E}_Q |\mathrm{Z}_t| + p_0 < \infty$, da Z ein Martingal ist und p_0 endlich ist.
Sei weiterhin $s \leq t$, dann gilt:
$\mathrm{E}_Q [\mathrm{Z}_t - p_0|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}_Q [\mathrm{Z}_t|\mathcal{F}_s] - p_0 = \mathrm{Z}_s - p_0$, da Z ein Martingal ist.
Somit ist $(\mathrm{Z}_t - p_0)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal unter Q und $\mathrm{K} = (p_0 - p_t)_{t\in[0,T]}$ erfüllt auch die Bedingung (iii). □

Wie man aus dem Beweis von Lemma 2.2.4 erkennt, stehen der Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ und die äquivalenten Martingalmaße Q unter Annahme der Arbitragefreiheit in einer direkten Beziehung zueinander. Dieser Zusammenhang ist allerdings für praktische Zwecke zu allgemein. Die Tatsache, dass Q die Poissonsche Schadensummenverteilung P des Schadensummenprozesses $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ mit dem Ziel verändert, einen Sicherheitszuschlag bei der Prämienberechnung zu berücksichtigen,um somit den sicheren Ruin der Versicherungsunternehmen zu verhindern, sollte implizieren, dass Q schärfere Eigenschaften erfüllt. Dies führt zu folgender Fragestellung:

Frage 2.2.5. Welche Eigenschaften sollen die äquivalenten Martingalmaße Q im Modell von Delbaen & Haezendonck erfüllen, das einen unvollständigen Markt darstellt? ■

Um diese Frage zu beantworten, benötigt man folgendes Lemma:

Lemma 2.2.6. *Sei* Q *ein zu* P *äquivalentes Martingalmaß derart, dass* $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ *unter* Q *weiterhin ein zusammengesetzter Poissonprozess bleibt, d.h.* $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ *unter* Q *weiterhin eine Poissonsche Schadensummenverteilung besitzt. Der Prämienprozess* $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ *sei zusätzlich deterministisch, d.h. es gilt sowohl*
$\mathrm{E}_Q [p_t] = p_t$,
als auch
$\forall s \leq t : \mathrm{E}_Q [p_t|F_s] = p_t$.
Dann gilt:

(i) Der Kompensator $(p_0 - p_t)_{t\in[0,T]}$ *verhält sich linear wachsend in der Zeit, d.h.*

$$p_0 - p_t = \Pi(\mathrm{Q})t,$$

wobei $\Pi(\mathrm{Q})$ *eine Konstante ist.*

(ii) *Der Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ verhält sich linear fallend in der Zeit, d.h.*

$$p_t = \Pi(\mathrm{Q})(T-t),$$

wobei $\Pi(\mathrm{Q})$ *die Konstante aus (i) ist.*

Beweis:
Zu (i): Da $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ nach Voraussetzung deterministisch ist, folgt für $s \leq t$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_Q[S_t|\mathcal{F}_s] &= S_s + \mathrm{E}_Q[p_s - p_t|\mathcal{F}_s]\\ &= S_s + p_s - p_t.\end{aligned}$$

Für $s = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_Q[S_t|\mathcal{F}_0] &= S_0 + p_0 - p_t\\ &= p_0 - p_t.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_Q[S_t] &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{E}_Q[S_t|\mathcal{F}_0]]\\ &= \mathrm{E}_Q[p_0 - p_t]\\ &= p_0 - p_t. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Da $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ unter Q nach Voraussetzung weiterhin ein zusammengesetzter Poissonprozess ist, gilt außerdem

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_Q[S_t] &= \mathrm{E}_Q[N_t]\,\mathrm{E}_Q[X_1]\\ &= \lambda' t \mathrm{E}_Q[X_1], \qquad (2.5)\end{aligned}$$

wobei λ' die Intensität des Schadenanzahlprozesses $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$ unter Q ist.
Definiere

$$\Pi(\mathrm{Q}) := \lambda' \mathrm{E}_Q[X_1], \qquad (2.6)$$

dann folgt aus Gleichung (2.5)

$$\mathrm{E}_Q[S_t] = \Pi(\mathrm{Q})t. \qquad (2.7)$$

Aus den Gleichungen (2.4) und (2.7) erhält man insgesamt

$$p_0 - p_t = \Pi(\mathrm{Q})t, \tag{2.8}$$

d.h. Teil (i) ist gezeigt.
Zu (ii): Insbesondere gilt für $t = T$ in Gleichung (2.8)

$$\begin{aligned}\Pi(\mathrm{Q})T &= p_0 - p_T \\ &= p_0.\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (2.8) äquivalent zu

$$\begin{aligned}p_t &= p_0 - \Pi(\mathrm{Q})t \\ &= \Pi(\mathrm{Q})T - \Pi(\mathrm{Q})t \\ &= \Pi(\mathrm{Q})(T - t),\end{aligned} \tag{2.9}$$

d.h. auch Aussage (ii) ist bewiesen. □

Bemerkung 2.2.7. Die umgekehrte Richtung von Lemma 2.2.6 gilt ebenfalls, d.h. die Linearität des Prämienprozesses p impliziert, dass der Schadensummenprozess S unter Q ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung bleibt, falls genügend Marktplätze existieren, auf denen mit den Prämien p_t gehandelt werden kann (vgl. [3], S.270 ff.). ■

Bezeichnung 2.2.8. Die Konstante π (Q) wird im Folgenden als *Konstante des Prämienprozesses* p bzw. kurz als *Prämienkonstante* bezeichnet. ■

Es kann also folgende Antwort auf Frage 2.2.5 gegeben werden:

Antwort 2.2.9. Von Interesse sind in diesem Modell diejenigen Martingalmaße Q die folgende beiden Bedingungen erfüllen:

(i) Q ist ein zu P äquivalentes Martingalmaß.

(ii) Unter Q bleibt der Schadensummenprozess $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung, d.h. $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ bleibt unter Q ein zusammengesetzter Poissonprozess. ■

Wie diese zu P äquivalenten Martingalmaße Q charakterisiert werden, wird in Satz 2.3.11 erläutert, der im nächsten Abschnitt hergeleitet wird. Zuvor jedoch noch folgendes Ergebnis, welches eine Aussage über die Prämienkonstante $\pi(\mathrm{Q})$ trifft.

Bemerkung 2.2.10. Sei Q ein Martingalmaß, das die beiden Bedingungen aus Antwort 2.2.9 erfüllt. Aus den Gleichungen (2.5) und (2.6) folgt dann, dass durch

$$\pi(\mathrm{Q}) = \mathrm{E}_Q[S_1] \tag{2.10}$$

eine Konstante des Prämienprozesses p definiert wird. ■

Bemerkung 2.2.11. Mit Hilfe der Prämienkonstanten $\pi(\mathrm{Q})$ können interessante Verbindungen zu schon bekannten Prämienkalkulationsprinzipien aufgezeigt werden. Dies geschieht in den Kapiteln 3 und 4. ■

2.3 Ein Satz zur Charakterisierung der Martingalmaße

Sei $(U_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, exponentialverteilter ZV mit gemeinsamem Parameter $\lambda > 0$. Zur Definition der Exponentialverteilung vergleiche auch Anhang A.2.1. Sei weiterhin $(\mathrm{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge iid, echt positiver ZV. Alle diese ZV seien auf einem W-Raum $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathrm{P}^*)$ definiert und paarweise unabhängig.
Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein weiterer W-Raum mit

$$\Omega = \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{A} = \mathbb{B}_+^{\times\mathbb{N}} \times \mathbb{B}_+^{\times\mathbb{N}}, \tag{2.12}$$

wobei $\mathbb{B}_+^{\times\mathbb{N}}$ die Borelsche Produkt-σ-Algebra über $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ ist.
Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega^* &\longrightarrow \Omega \\ \omega^* &\longrightarrow \Psi(\omega^*) = (U_1^*(\omega^*), ..., U_n^*(\omega^*), ..., \mathrm{X}_1^*(\omega^*), ..., \mathrm{X}_n^*(\omega^*), ...), \end{aligned} \tag{2.13}$$

dann sei P die Verteilung des Zufallsvektors Ψ:

$$\mathrm{P} = \mathcal{L}(U_1^*|\mathrm{P}^*) \times ... \times \mathcal{L}(U_n^*|\mathrm{P}^*) \times ... \times \mathcal{L}(\mathrm{X}_1^*|\mathrm{P}^*) \times ... \times \mathcal{L}(\mathrm{X}_n^*|\mathrm{P}^*) \times ... \tag{2.14}$$

Die ZV $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien nun wie folgt auf dem W-Raum $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ definiert:
Zu $\omega=(u_1,...,u_n,...,x_1,...,x_n,...)\in\Omega$, sei

$$\forall\ n\in\mathbb{N}: U_n(\omega)=u_n \tag{2.15}$$

$$\forall\ n\in\mathbb{N}: X_n(\omega)=x_n. \tag{2.16}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{L}\left((U_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}|\mathrm{P}\right)=\mathcal{L}\left((U_n^*)_{n\in\mathbb{N}},(\mathrm{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}|\mathrm{P}^*\right)$$

Definition 2.3.1.

(i) $U_n(\omega)$ aus Gleichung 2.15 heißt *Wartezeit vom* $n-1$*-ten bis zum* n*-ten Schaden* und

(ii) $\mathrm{X}_n(\omega)$ aus Gleichung 2.16 heißt *Schadenhöhe des* n*-ten Schadens*.

Bemerkung 2.3.2. Durch $U_n(\omega)$ wird die Projektion auf die n-te Komponente des Zufallsvektors ω dargestellt. Analoges gilt für $\mathrm{X}_n(\omega)$. Wegen $U_n(\omega)\overset{\mathcal{L}}{=}U_n^*(\omega^*)$ und $\mathrm{X}_n(\omega)\overset{\mathcal{L}}{=}\mathrm{X}_n^*(\omega^*)$ ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, exponentialverteilter ZV mit gemeinsamem Parameter $\lambda>0$ und $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge iid, echt positiver ZV. Alle diese ZV sind paarweise unabhängig. ■

Definition 2.3.3. Seien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, dann heißt

(i) $\forall\ n\in\mathbb{N}: T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}U_i,\ T_0=0$
Schadeneintrittszeit des n-ten Schadens

(ii) $\mathrm{N}_t=\sum\limits_{n\geq 0}n1_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}$
Schadenanzahl z.Z. $t\geq 0$

(iii) $\forall\ t\geq 0: S_t=\sum\limits_{n=1}^{N_t}\mathrm{X}_n$
Schadensumme z.Z. t. ■

Bemerkung 2.3.4. Da $\mathrm{N}=(\mathrm{N}_t)_{t\geq 0}$ ein homogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda>0$ ist (vgl. z.B. [15], S. 49 ff.), ist $S=(S_t)_{t\geq 0}$ ein Schadensummenprozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung auf $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$. ■

Definition 2.3.5. Sei $S = (S_t)_{t\geq 0}$ ein zufälliger Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ und

$$\mathcal{F}_u = \sigma\{S_t : 0 \leq t \leq u\} \text{ mit } \mathcal{F}_\infty = \sigma\{S_t : t \geq 0\}$$

dann heißt $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_u)_{u\geq 0}$ die von $S = (S_t)_{t\geq 0}$ *erzeugte Filtration* bzw. *innere Geschichte* von $S = (S_t)_{t\geq 0}$. ■

Bemerkung 2.3.6. $\mathcal{F}_u = \sigma\{S_t : 0 \leq t \leq u\}$ enthält also alle Informationen, die man ausschließlich durch die Betrachtung des zufälligen Prozesses S bis z.Z. u erhalten hat. ■

Sei also $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_s = \sigma\{S_t : 0 \leq t \leq s\}$ die von dem Schadensummenprozess $S = (S_t)_{t\geq 0}$ erzeugte Filtration. Da nur die Informationen von Interesse sind, die man durch die Betrachtung des Schadensummenprozesses erhält, sei weiterhin o.E. $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty$.

Definition 2.3.7. Seien P und Q zwei W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ und es gelte:

$$\forall\ 0 \leq t < \infty : \{N \in \mathcal{F}_t : \mathrm{P}(N) = 0\} = \{N \in \mathcal{F}_t : \mathrm{Q}(N) = 0\}$$

Dann heißen P und Q *lokal äquivalent*. ■

Bemerkung 2.3.8. Sind P und Q lokal äquivalent, dann sind sie nicht notwendigerweise äquivalent auf $\mathcal{F}_\infty$ (vgl. [3], S. 272). ■

Sei nun $\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Abbildung mit

$$\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right] < \infty, \tag{2.17}$$

wobei P das W-Maß aus Gleichung (2.14) ist.
Betrachte nun folgenden zufälligen Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P})$:

$$M^{(\beta)} = (M_t^{(\beta)})_{t\geq 0}, \tag{2.18}$$

mit

$$M_t^{(\beta)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k) - \lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right) \tag{2.19}$$

Satz 2.3.9. *Der zufällige Prozess* $M^{(\beta)} = (M_t^{(\beta)})_{t\geq 0}$ *ist*

(i) *echt positiv*

(ii) *ein Martingal auf* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P})$ *bzgl. der Filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *und es gilt*

(iii) $\mathrm{E}_P\left[M_t^{(\beta)}\right] = 1$

Beweis:
Zu (i): Da die Exponentialfunktion in die echt positive reelle Halbachse abbildet, gilt $\forall t \geq 0$: $M_t^{(\beta)} > 0 \implies$ (i).
Zu (iii): Sei

$$S^{(\beta)} = (S_t^{(\beta)})_{t\geq 0} \tag{2.20}$$

mit

$$S_t^{(\beta)} = \sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k) \tag{2.21}$$

eine Modifikation des Schadensummenprozesses $S = (S_t)_{t\geq 0}$ mit Poissonscher Schadensummenverteilung. Für die Momenterzeugende Funktion von $S_t^{(\beta)}$ mit Index 1 gilt dann (vgl. [17], Teil Kaufmann, Bsp. 2.15):

$$\begin{aligned} MEF_1(S_t^{(\beta)}) &= \exp(\lambda t[MEF_1(\beta(X_1)) - 1]) \\ &= \exp(\lambda t[\mathrm{E}_P\left[e^{1\beta(X_1)}\right] - 1]) \\ &= \exp(\lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]) \end{aligned}$$

Damit folgt für $M_t^{(\beta)}$:

$$\begin{aligned} M_t^{(\beta)} &= \exp\left(\sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k) - \lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right) \\ &= \exp\left(S_t^{(\beta)} - \lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right) \\ &= \frac{\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)}{\exp\left(\lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right)} \\ &= \frac{\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)}{MEF_1(S_t^{(\beta)})} \end{aligned} \tag{2.22}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left[M_t^{(\beta)}\right] &= \mathrm{E}_P\left[\frac{\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\right] \\
&= \frac{\mathrm{E}_P\left[\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)\right]}{MEF_1(S_t^{(\beta)})} \\
&= 1 \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Zu (ii): Wegen (iii) gilt insbesondere $\mathrm{E}_P\left|M_t^{(\beta)}\right| < \infty$ und es bleibt z.z.:
$\forall\ s \leq t : \mathrm{E}_P\left[\mathrm{M}_t^{(\beta)}|\mathcal{F}_s\right] = \mathrm{M}_s$.

Sei also $0 \leq s \leq t$. Mit (2.22), (2.23) und der $\mathcal{F}_t$-Meßbarkeit von $S_t^{(\beta)}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left[M_t^{(\beta)}|\mathcal{F}_s\right] &= \mathrm{E}_P\left[\frac{M_t^{(\beta)}}{M_s^{(\beta)}}M_s^{(\beta)}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\mathrm{E}_P\left[\frac{M_t^{(\beta)}}{M_s^{(\beta)}}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\mathrm{E}_P\left[\frac{\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{\exp\left(S_s^{(\beta)}\right)}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)\exp\left(-S_s^{(\beta)}\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(S_t^{(\beta)}-S_s^{(\beta)}\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(\sum_{k=N_s+1}^{N_t}\beta(\mathrm{X}_k)\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(\sum_{k=N_s+1}^{N_t}\beta(\mathrm{X}_k)\right)\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(S_t^{(\beta)}-S_s^{(\beta)}\right)\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)\exp\left(-S_s^{(\beta)}\right)\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\mathrm{E}_P\left[\exp\left(S_t^{(\beta)}\right)\right]\mathrm{E}_P\left[\exp\left(-S_s^{(\beta)}\right)\right] \\
&= M_s^{(\beta)}\frac{MEF_1(S_s^{(\beta)})}{MEF_1(S_t^{(\beta)})}\frac{MEF_1(S_t^{(\beta)})}{MEF_1(S_s^{(\beta)})} \\
&= M_s^{(\beta)},
\end{aligned}$$

da der Prozess $S^{(\beta)} = (S_t^{(\beta)})_{t\geq 0}$ unabhängige Zuwächse hat. □

Lemma 2.3.10. *Sind* P *und* Q *zwei lokal äquivalente W-Maße auf* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, *dann sind die zugehörigen Verteilungen* $\mathrm{P}_{X_1} = \mathcal{L}(\mathrm{X}_1|\mathrm{P})$ *und* $\mathrm{Q}_{X_1} = \mathcal{L}(\mathrm{X}_1|\mathrm{Q})$ *der ZV* X_1 *äquivalent.*

Beweis: Sei $N \in \mathbb{B}_+$ mit $\mathrm{P}_{X_1}(N) = 0$, dann gilt wegen $T_1 < \infty$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_{X_1}(N) &= \mathrm{Q}(\mathrm{X}_1^{-1}(N)) \\ &= \mathrm{Q}(S_{T_1}^{-1}(N)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}\left(S_{T_1}^{-1}(N) \cap (T_1 \leq n)\right) \end{aligned}$$

Da $\forall\ n : S_{T_1}^{-1}(N) \cap (T_1 \leq n) \in \mathcal{F}_n$ ist und P und Q lokal äquivalent sind, folgt:

$$\forall\ n : \mathrm{Q}\left(S_{T_1}^{-1}(N) \cap (T_1 \leq n)\right) = 0$$

und damit

$$\mathrm{Q}_{X_1}(N) = 0$$

woraus die Äquivalenz von P_{X_1} und Q_{X_1} folgt. □

Der folgende Satz bestimmt nun alle W-Maße Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, so dass P und Q lokal äquivalent sind und $S = (S_t)_{t\geq 0}$ unter Q ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung bleibt.

Satz 2.3.11. ***(Bestimmungssatz für Martingalmaße)***
Es gelten folgende beiden Aussagen:

(i) *Sei* Q *ein W-Maß auf* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *mit den beiden Eigenschaften:*

  (1) P *und* Q *sind lokal äquivalent*

  (2) $S = (S_t)_{t\geq 0}$ *bleibt unter* Q *ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung,*

  dann existiert eine Borel-messbare Abbildung β *mit:*

  (3) $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

  (4) $\mathrm{E}_P\left[\exp \beta(\mathrm{X}_1)\right] < \infty$,

  so dass Q *definiert ist durch:*

$$\forall\ 0 \leq s \leq t \textit{ und } \forall A \in \mathcal{F}_s : \mathrm{Q}(A) = \int_A M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} \tag{2.24}$$

(ii) *Umgekehrt sei β eine Borel-messbare Abbildung mit den Eigenschaften* (3) *und* (4), *dann existiert ein eindeutig bestimmtes W-Maß* Q *auf* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, *definiert durch Gleichung (2.24), welches die Eigenschaften* (1) *und* (2) *erfüllt.*
Gilt zusätzlich $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$, *dann sind* P *und* Q *zueinander singulär auf* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, *d.h.:*

$$\exists\ M \in \mathcal{F}_\infty : \mathrm{P}(M) = 0 \textit{ und } \mathrm{Q}(M^c) = 0 \tag{2.25}$$

Beweis:
Zu (i): Sei Q ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, das die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt. Aus (2) folgt, dass $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{Q})$ ist. Daher existiert ein λ', so dass

$$\mathrm{Q}(N_t = n) = \frac{(\lambda' t)^n}{n!} e^{-\lambda' t} \tag{2.26}$$

Da $T_1 < \infty$ ist, gilt

$$\lambda' > 0 \tag{2.27}$$

Setze

$$\alpha = \ln \lambda' - \ln \lambda. \tag{2.28}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N_t = n) e^{n\alpha - \lambda(e^\alpha - 1)t} &= \mathrm{P}(N_t = n) e^{n(\ln \lambda' - \ln \lambda) - \lambda(e^{\ln \lambda' - \ln \lambda} - 1)t} \\
&= \mathrm{P}(N_t = n) e^{n \ln \lambda'} e^{-n \ln \lambda} e^{-\lambda t e^{\ln \lambda'} e^{-\ln \lambda}} e^{\lambda t} \\
&= \mathrm{P}(N_t = n) \frac{(\lambda')^n}{\lambda^n} e^{-\lambda' t} e^{\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda')^n}{\lambda^n} e^{-\lambda' t} e^{\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda' t)^n}{n!} e^{-\lambda' t} \\
&= \mathrm{Q}(N_t = n)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Wegen (1) ist aus Lemma 2.3.10 bekannt, dass P_{X_1} und Q_{X_1} äquivalent sind. Also existiert eine echt positive Dichtefunktion f mit

$$\forall\ A \in \mathbb{B}_+ : \mathrm{Q}_{X_1}(A) = \int_A f d\mathrm{P}_{X_1}$$

Definiere

$$\gamma(x) = \ln f(x), \tag{2.30}$$

dann ist $-\infty < \gamma < +\infty$.
Für $s \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s \cap (N_s = n) &= \sigma\left\{S_t : 0 \leq t \leq s\right\} \cap (N_s = n) \\
&= \sigma\left\{\sum_{n=1}^{N_t} \mathrm{X}_n : 0 \leq t \leq s\right\} \cap (N_s = n) \\
&\subset \sigma\left\{\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n\right\} \cap (N_s = n)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Dabei ist $\sigma\{\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n\}$ die von den Schadenhöhen $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n$ erzeugte σ-Algebra. Falls $n = 0$ ist, dann degeneriert die σ-Algebra aus Gleichung (2.31) zu $\{\varnothing, \Omega\} \cap (N_s = 0)$.
Sei A aus $\mathcal{F}_s$, dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $B_n \in \sigma\{\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n\}$, so dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(A) &= \sum_{n \geq 0} \mathrm{Q}(A \cap (N_s = n)) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{Q}(B_n \cap (N_s = n)) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{Q}(B_n)\mathrm{Q}(N_s = n)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Angenommen, dass $B_n = \mathrm{X}_1^{-1}(C_1) \cap ... \cap \mathrm{X}_n^{-1}(C_n)$, wobei $C_1, ..., C_n$ beliebige Borelsche Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(B_n) &= \mathrm{E}_Q\left[1_{\{B_n\}}\right] \\
&= \mathrm{E}_Q\left[1_{\left\{X_1^{-1}(C_1) \cap ... \cap X_n^{-1}(C_n)\right\}}\right] \\
&= \mathrm{E}_Q\left[1_{\{C_1\}}(\mathrm{X}_1)\right] \cdot ... \cdot \mathrm{E}_Q\left[1_{\{C_n\}}(\mathrm{X}_n)\right] \\
&= \mathrm{E}_P\left[1_{\{C_1\}}(\mathrm{X}_1) e^{\gamma(X_1)}\right] \cdot ... \cdot \mathrm{E}_P\left[1_{\{C_n\}}(\mathrm{X}_n) e^{\gamma(X_n)}\right] \\
&= \mathrm{E}_P\left[1_{\left\{X_1^{-1}(C_1) \cap ... \cap X_n^{-1}(C_n)\right\}} e^{\gamma(X_1) + ... + \gamma(X_n)}\right] \\
&= \mathrm{E}_P\left[1_{\{B_n\}} \exp\left\{\gamma(X_1) + ... + \gamma(X_n)\right\}\right]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Gleichung (2.33) bleibt auch für beliebige $B_n \in \sigma\{\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n\}$ gültig (vgl. [3], S.273). Daher folgt mit Gleichung (2.32), (2.33) und (2.29):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(A) &= \sum_{n \geq 0} \mathrm{Q}(B_n)\mathrm{Q}(N_s = n) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{E}_P\left[1_{\{B_n\}} \exp\{\gamma(X_1) + ... + \gamma(X_n)\}\right] \mathrm{Q}(N_s = n) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{E}_P\left[1_{\{B_n\}} \exp\{\gamma(X_1) + ... + \gamma(X_n)\}\right] \mathrm{P}(N_s = n) \exp\{n\alpha - \lambda(e^\alpha - 1)s\} \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{E}_P\left[1_{\{B_n \cap (N_s = n)\}} \exp\{\gamma(X_1) + ... + \gamma(X_n) + n\alpha - \lambda(e^\alpha - 1)s\}\right] \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{E}_P\left[1_{\{B_n \cap (N_s = n)\}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{N_s} (\alpha + \gamma(X_i)) - \lambda(e^\alpha - 1)s\right\}\right] \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathrm{E}_P\left[1_{\{A \cap (N_s = n)\}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{N_s} (\alpha + \gamma(X_i)) - \lambda(e^\alpha - 1)s\right\}\right] \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Da alle diese Summanden bis auf den einen, in dem $1_{\{N_s = n\}} = 1$ ist, gleich 0 sind, erhält man mit $\mathrm{E}_P[Y] = \int Y d\mathrm{P}$ aus Gleichung (2.34):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(A) &= \sum_{n \geq 0} \mathrm{E}_P\left[1_{\{A \cap (N_s = n)\}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{N_s} (\alpha + \gamma(X_i)) - \lambda(e^\alpha - 1)s\right\}\right] \\
&= \int_A \exp\left\{\sum_{i=1}^{N_s} (\alpha + \gamma(X_i)) - \lambda(e^\alpha - 1)s\right\} d\mathrm{P} \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Setze

$$\beta(x) = \alpha + \gamma(x) \qquad (2.36)$$

dann gilt wegen (2.27), (2.28) und (2.30) Eigenschaft (3) und es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right] &= \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha+\gamma(X_1)}\right] \\ &= \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha}e^{\ln f(X_1)}\right] \\ &= \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha}f(X_1)\right] \\ &= e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[f(X_1)\right] \\ &= e^{\alpha}\int f(X_1)d\mathrm{P} \\ &= e^{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

da f eine Dichte ist. Insbesondere gilt also Eigenschaft (4).
Mit (2.36), (2.37) und (2.19) kann man Gleichung (2.35) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(A) &= \int_A \exp\left\{\sum_{i=1}^{N_s}(\alpha+\gamma(X_i)) - \lambda(e^{\alpha}-1)s\right\}d\mathrm{P} \\ &= \int_A \exp\left\{\sum_{i=1}^{N_s}(\beta(X_i)) - \lambda(\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]-1)s\right\}d\mathrm{P} \\ &= \int_A M_s^{(\beta)}d\mathrm{P} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Da nach Satz 2.3.9 der Prozess $M^{(\beta)} = (M_t^{(\beta)})_{t\geq 0}$ ein Martingal ist, gilt nach Gleichung (2.38) mit Hilfe von $\mathrm{E}_P[Y] = \int Y d\mathrm{P}$:

$$\forall\ 0 \leq s \leq t\ \mathit{und}\ \forall A \in \mathcal{F}_s : \mathrm{Q}(A) = \int_A M_t^{(\beta)}d\mathrm{P}, \tag{2.39}$$

denn:

$$\begin{aligned} \int_A M_s^{(\beta)}d\mathrm{P} - \int_A M_t^{(\beta)}d\mathrm{P} &= \int_A M_s^{(\beta)} - M_t^{(\beta)}d\mathrm{P} \\ &= \int_A M_s^{(\beta)} - \mathrm{E}_P\left[M_t^{(\beta)}|\mathcal{F}_s\right]d\mathrm{P} \\ &= \int_A M_s^{(\beta)} - M_s^{(\beta)}d\mathrm{P} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit sind alle Behauptungen aus (i) bewiesen.
Zu(ii): Sei β eine Borel-messbare Abbildung, welche die Eigenschaften (3) und (4) erfüllt. Es gilt: $\forall\ A \in \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k\ \exists\ s \geq 0 : A \in \mathcal{F}_s$. Dann definiere

$$\forall\ 0 \leq s \leq t\ und\ \forall\ A \in \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k\, (also\ \forall\ A \in \mathcal{F}_s) : \mathrm{Q}(A) = \int_A M_t^{(\beta)} d\mathrm{P}. \tag{2.40}$$

Zeige:

(*) Q ist wohldefiniert.

(**) Durch Gleichung (2.40) wird ein additiver Inhalt auf $\bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k$ definiert.

(***) Die Einschränkung von Q auf jedes $\mathcal{F}_t$ ist normiert.

(****) Q erfüllt Eigenschaft (1).

Zu (*): Sei o.E. $s \leq t_1 < t_2$ und $A \in \mathcal{F}_s$, dann gilt, da $M^{(\beta)} = (M_t^{(\beta)})_{t\geq 0}$ ein Martingal ist:

$$\begin{aligned}
\int_A M_{t_1}^{(\beta)} d\mathrm{P} - \int_A M_{t_2}^{(\beta)} d\mathrm{P} &= \int_A M_{t_1}^{(\beta)} - M_{t_2}^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= \int_A M_{t_1}^{(\beta)} - \mathrm{E}\left[M_{t_2}^{(\beta)} | \mathcal{F}_{t_1}\right] d\mathrm{P} \\
&= \int_A M_{t_1}^{(\beta)} - M_{t_1}^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Zu (**): Seien $A, B \in \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k$ p.d., dann $\exists\ s \geq 0 : A \in \mathcal{F}_s$ und $\exists\ l \geq 0 : B \in \mathcal{F}_l$ mit $A, B \in \mathcal{F}_{\max\{s,l\}}$, da die $\mathcal{F}_k$ Sub-σ-Algebren sind. Auf $\mathcal{F}_{\max\{s,l\}}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(A+B) &= \int_{A+B} M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= \int \left(1_{\{A\}} + 1_{\{B\}}\right) M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= \int 1_{\{A\}} M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} + \int 1_{\{B\}} M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= \int_A M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} + \int_B M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= \mathrm{Q}(A) + \mathrm{Q}(B)
\end{aligned}$$

Zu (***): Mit Gleichung (2.23) folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(\Omega|_{\mathcal{F}_t}) &= \int_{\Omega|_{\mathcal{F}_t}} M_t^{(\beta)} d\mathrm{P} \\ &= \mathrm{E}_P\left[M_t^{(\beta)}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zu (****): Da nach (2.19) $M_t^{(\beta)} > 0$ P-f.s. ist, weil $M_t^{(\beta)}$ eine Exponentialfunktion ist, folgt: P und Q sind äquivalent auf jedem $\mathcal{F}_s$, $0 \leq s \leq t$, mit

$$\frac{1}{M_t^{(\beta)}}$$

ist Q-Dichte von P. Daraus folgt die lokale Äquivalenz von P und Q.
Hilfreich wird noch folgende Aussage über die Verteilung der Schadensumme sein:

$$\forall\ u \leq s : \mathcal{L}\left(\sum_{i=N_u+1}^{N_s} \mathrm{X}_i|\mathrm{P}\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{N_{s-u}} \mathrm{X}_i|\mathrm{P}\right), \tag{2.41}$$

d.h. unter P hat die Schadensumme stationäre Zuwächse, da die Schadenhöhen X_i und die Wartezeiten U_i jeweils iid und paarweise unabhängig sind.
Weiterhin gilt:

(*****) Für jedes feste $t > 0$ besitzt der Schadensummenprozess $S = (S_u)_{u \leq t}$ unabhängige und stationäre Zuwächse auf $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathrm{Q})$.

Um dies zu beweisen, wird gezeigt, dass für jedes $r > 0$ und $0 \leq u \leq s \leq t$ die bedingte Erwartung

$$\mathrm{E}_Q\left[\exp\left\{-r\left(S_s - S_u\right)\right\}|\mathcal{F}_u\right]$$

deterministisch ist und von s und u nur über die Differenz $s - u$ abhängt:
Sei $A \in \mathcal{F}_u$, dann folgt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_Q\left[1_{\{A\}} \exp\left\{-r\left(S_s - S_u\right)\right\}\right] \\ &= \int_A \exp\left\{-r\left(S_s - S_u\right)\right\} d\mathrm{Q} \end{aligned}$$

Da $M_s^{(\beta)}$ nach Gleichung (2.38) eine P-Dichte von Q ist, gilt:

$$= \int_A \exp\{-r(S_s - S_u)\} M_s^{(\beta)} d\mathrm{P}$$
$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} \exp\{-r(S_s - S_u)\} M_s^{(\beta)}\right]$$

Mit Gleichung (2.19) folgt:

$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} \exp\left\{-r(S_s - S_u) + S_s^{(\beta)}\right\}\right] \exp\left\{-\lambda s \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$
$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} \exp\left\{-r(S_s - S_u) + S_s^{(\beta)} + S_u^{(\beta)} - S_u^{(\beta)}\right\}\right] \exp\left\{-\lambda s \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$
$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} \exp\left\{S_u^{(\beta)}\right\}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r(S_s - S_u) + \left(S_s^{(\beta)} - S_u^{(\beta)}\right)\right\}\right]$$
$$\exp\left\{-\lambda s \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$
$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} \exp\left\{S_u^{(\beta)} - \lambda u \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r(S_s - S_u) + \left(S_s^{(\beta)} - S_u^{(\beta)}\right)\right\}\right]$$
$$\exp\left\{-\lambda(s-u) \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$
$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} M_u^{(\beta)}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r(S_s - S_u) + \left(S_s^{(\beta)} - S_u^{(\beta)}\right)\right\}\right]$$
$$\exp\left\{-\lambda(s-u) \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$

Mit Definition 2.3.3 und Gleichung (2.21) erhält man:

$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} M_u^{(\beta)}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r\left(\sum_{i=1}^{N_s} \mathrm{X}_i - \sum_{i=1}^{N_u} \mathrm{X}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{N_s} \beta(\mathrm{X}_i) - \sum_{i=1}^{N_u} \beta(\mathrm{X}_i)\right)\right\}\right]$$
$$\exp\left\{-\lambda(s-u) \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$
$$= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} M_u^{(\beta)}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r \sum_{i=N_u+1}^{N_s} \mathrm{X}_i + \sum_{i=N_u+1}^{N_s} \beta(\mathrm{X}_i)\right\}\right]$$
$$\exp\left\{-\lambda(s-u) \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\}$$

Verwendung von Gleichung (2.41) liefert:

$$
\begin{aligned}
&\overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} M_u^{(\beta)}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r\sum_{i=1}^{N_{s-u}} \mathrm{X}_i + \sum_{i=1}^{N_{s-u}} \beta\left(\mathrm{X}_i\right)\right\}\right] \\
&\quad \exp\left\{-\lambda\left(s-u\right)\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right\} \\
&= \mathrm{E}_P\left[1_{\{A\}} M_u^{(\beta)}\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-rS_{s-u} + S_{s-u}^{(\beta)}\right\}\right] \exp\left\{-\lambda\left(s-u\right)\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right\} \\
&= \int_A M_u^{(\beta)} d\mathrm{P}\ \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-rS_{s-u} + S_{s-u}^{(\beta)}\right\}\right] \exp\left\{-\lambda\left(s-u\right)\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right\} \\
&= \mathrm{Q}(A)\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-rS_{s-u} + S_{s-u}^{(\beta)}\right\}\right] \exp\left\{-\lambda\left(s-u\right)\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Womit gezeigt wäre, dass die bedingte Erwartung deterministisch ist und von s und u nur über die Differenz $s-u$ abhängt. Also gilt (*****).

Betrachte nun die beiden W-Maße μ und ν auf $(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$, definiert durch

$$
\mu\left(A\right) = \int_A \frac{\exp\left\{\beta\left(x\right)\right\}}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} d\mathrm{P}_{X_1}\left(x\right), \tag{2.42}
$$

$$
\nu\left(A\right) = \lambda' \int_A e^{-\lambda' x} dx \tag{2.43}
$$

für alle $A \in \mathbb{B}_+$ und $\lambda' = \lambda \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]$.

Definiere das folgende Produktmaß auf $\Omega = \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$:

$$
\tilde{\mathrm{Q}} = \nu^{\times \mathbb{N}} \times \mu^{\times \mathbb{N}}. \tag{2.44}
$$

Da ν eine Exponentialverteilung mit Parameter λ' ist, folgt aus der Definition von $\tilde{\mathrm{Q}}$, dass der Schadensummenprozess $S = (S_t)_{t\geq 0}$ unter $\tilde{\mathrm{Q}}$ ein Prozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung ist. Damit gilt Eigenschaft (2), falls Q und $\tilde{\mathrm{Q}}$ auf $\mathcal{F}_t$ übereinstimmen für alle $t \in \mathbb{R}_+$, was noch z.z. ist. Da nach (*****) $S = (S_s)_{s\leq t}$ unabhängige und stationäre Zuwächse sowohl auf $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathrm{Q})$ als auch auf $(\Omega, \mathcal{F}_t, \tilde{\mathrm{Q}})$ hat, reicht es z.z., dass für alle $s \leq t$ und für alle $A \in \mathbb{B}_+$

$$
\mathrm{Q}_{S_s}(A) = \tilde{\mathrm{Q}}_{S_s}(A) \tag{2.45}
$$

ist. Nach [15], Theorem 8.1.1, genügt es für alle $r > 0$ die Gleichheit der Laplace- Transformierten von S_s unter Q und $\tilde{\mathrm{Q}}$ nachzuweisen:

$$
\mathrm{E}_Q\left[e^{-rS_s}\right] = \mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[e^{-rS_s}\right] \tag{2.46}
$$

Dazu betrachte zunächst für alle $r > 0$ die Laplace-Transformierte von X_1 unter $\tilde{\mathrm{Q}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[e^{-rX_1}\right] &= \int \exp\left\{-r\mathrm{X}_1\right\} d\tilde{\mathrm{Q}} \\
&= \int \exp\left\{-rx_1\right\} d\mu \\
&= \int \frac{\exp\left\{-rx_1 + \beta\left(x_1\right)\right\}}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(x_1\right)\right\}\right]} d\mathcal{L}\left(\mathrm{X}_1|\mathrm{P}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r\mathrm{X}_1 + \beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

sowie die Wahrscheinlichkeit, dass die Schadenanzahl z.Z. s unter $\tilde{\mathrm{Q}}$ gleich n ist:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}\left(N_s = n\right) &= \mathcal{P}_{\lambda'}\left(\{n\}\right) \\
&= \frac{\left(\lambda' s\right)^n}{n!} e^{-\lambda' s} \\
&= \frac{\left(\lambda s \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]\right)^n}{n!} e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta\left(X_1\right)\right\}\right]} \\
&= \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n \frac{\left(\lambda s\right)^n}{n!} e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta\left(X_1\right)\right\}\right]} \\
&= \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n \frac{\left(\lambda s\right)^n}{n!} e^{-\lambda s} e^{-\lambda s\left\{E_P\left[\exp\left\{\beta\left(X_1\right)\right\}\right]-1\right\}} \\
&= \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta\left(X_1\right)\right\}-1\right]} \mathrm{P}\left(N_s = n\right). \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (2.47) und (2.48) folgt dann für die Laplace-Transformierte von S_s

unter $\tilde{\mathrm{Q}}$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[e^{-rS_s}\right] \\
&= \mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[\mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[e^{-rS_s}|N_s\right]\right] \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[e^{-rS_s}|N_s = n\right] \tilde{Q}\left(N_s = n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathrm{E}_{\tilde{Q}}\left[e^{-rX_1}\right]^n \tilde{Q}\left(N_s = n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r\mathrm{X}_1 + \beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n} \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta(X_1)\right\}-1\right]} \mathrm{P}\left(N_s = n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r\mathrm{X}_1 + \beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]^n e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta(X_1)\right\}-1\right]} \mathrm{P}\left(N_s = n\right) \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite erhält man für die Laplace-Transformierte von S_s unter Q mit Hilfe von Gleichung (2.40) und (2.19):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_Q\left[e^{-rS_s}\right] \\
&= \int \exp\left\{-rS_s\right\} d\mathrm{Q} \\
&= \int \exp\left\{-rS_s\right\} M_s^{(\beta)} d\mathrm{P} \\
&= \int \exp\left\{-rS_s\right\} \exp\left\{S_s^{(\beta)} - \lambda s \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]\right\} d\mathrm{P} \\
&= \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-rS_s + S_s^{(\beta)}\right\} e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta(X_1)\right\}-1\right]}\right] \\
&= \mathrm{E}_P\left[\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-rS_s + S_s^{(\beta)}\right\} |N_s\right] e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta(X_1)\right\}-1\right]}\right] \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-rS_s + S_s^{(\beta)}\right\} |N_s = n\right] e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta(X_1)\right\}-1\right]} \mathrm{P}\left(N_s = n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{-r\mathrm{X}_1 + \beta\left(X_1\right)\right\}\right]^n e^{-\lambda s E_P\left[\exp\left\{\beta(X_1)\right\}-1\right]} \mathrm{P}\left(N_s = n\right) \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

Durch (2.49) und (2.50) ist Gleichung (2.46) gezeigt und Eigenschaft (2) gilt. Da Q und $\tilde{\mathrm{Q}}$ auf jedem $\mathcal{F}_t$ und damit auch auf $\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ übereinstimmen, ist Q σ-additiv, mit (**) und (***) ein W-Maß und $\tilde{\mathrm{Q}}$ die eindeutig bestimmte Erweiterung von Q auf $\mathcal{F}_\infty$.

Um den letzten Teil des Satzes zu zeigen, sei $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$. Dies bedeutet, dass $\mathrm{P}(\beta(\mathrm{X}_1) \neq 0) > 0$. Die Lebesgue-Zerlegung von Q bezüglich P existiert immer und hat folgende Gestalt:

$$\forall\ A \in \mathcal{F}_\infty : \mathrm{Q}(A) = \int_A Z d\mathrm{P} + \mathrm{P}^{(s)}(A), \tag{2.51}$$

wobei $Z \geq 0$ P-f.s. und $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P})$, sowie P und $\mathrm{P}^{(s)}$ zueinander singuläre Maße sind. Mit Gleichung (2.24) und (2.51) erhält man für alle $A \in \mathcal{F}_t$:

$$\int_A Z d\mathrm{P} = \int_A \mathrm{E}_P\left[Z|\mathcal{F}_t\right] d\mathrm{P} \leq \mathrm{Q}(A) = \int_A M_t^{(\beta)} d\mathrm{P}$$

und damit

$$\mathrm{E}_P\left[Z|\mathcal{F}_t\right] \leq M_t^{(\beta)} \text{ P-f.s.},$$

was wiederum zu

$$0 \leq Z = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}_P\left[Z|\mathcal{F}_t\right] \leq \lim_{t\to\infty} M_t^{(\beta)} \text{ P-f.s.}$$

führt. Falls noch

$$\lim_{t\to\infty} M_t^{(\beta)} = 0 \tag{2.52}$$

nachgewiesen werden kann, dann folgt $Z = 0$ und damit

$$\mathrm{Q}(A) = \mathrm{P}^s(A), \tag{2.53}$$

womit die Aussage des letzten Teils des Satzes gezeigt wäre.
Um Gleichung (2.52) z.z., reicht es aus, den Grenzwert des Exponenten von $M_t^{(\beta)}$ zu betrachten:
Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k)}{N_t} = \mathrm{E}_P\left[\beta(\mathrm{X}_1)\right]. \tag{2.54}$$

Weiterhin ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda. \tag{2.55}$$

Mit (2.54) und (2.55) folgt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k) - \lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right] &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N_t}\beta(\mathrm{X}_k)\right] - \lambda \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{N_t}{t}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_t}\beta(\mathrm{X}_k)}{N_t}\right] - \lambda \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right] \\
&= \lambda \mathrm{E}_P\left[\beta(\mathrm{X}_1)\right] - \lambda \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right] \\
&= -\lambda \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1-\beta(X_1)\right] \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung von $e^{\beta(X_1)}$ um 0

$$
e^{\beta(X_1)} = 1 + \beta(\mathrm{X}_1) + \frac{\beta^2(X_1)}{2} e^{\vartheta\beta(X_1)}
$$

bekommt man

$$
0 \leq e^{\beta(X_1)} - 1 - \beta(\mathrm{X}_1)
$$

und damit

$$
0 \leq \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1 - \beta(\mathrm{X}_1)\right]. \qquad (2.57)
$$

Aus den Gleichungen (2.56) und (2.57) erhält man

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k) - \lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right] &= -\lambda \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1-\beta(X_1)\right] \\
&\leq 0,
\end{aligned}
$$

womit

$$
\lim_{t\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{N_t} \beta(\mathrm{X}_k) - \lambda t \mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]\right] = -\infty
$$

folgt. Damit ist die Aussage von Gleichung (2.52) gezeigt und der Beweis von Satz 2.3.11 beendet. □

Bezeichnung 2.3.12. Im Folgenden wird das bzgl. einer festen Abbildung β eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß anstatt wie bisher mit Q mit $\mathrm{P}^{(\beta)}$ bezeichnet. ■

Korollar 2.3.13. *Es gilt:*

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}^{(0)}.$$

Beweis: Sei $0 \leq s \leq t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Dann gilt nach Gleichung (2.24) und (2.19):

$$\mathrm{P}^{(0)}(A) = \int_A M_t^{(0)} d\mathrm{P} = \int_A e^0 d\mathrm{P} = \int_A 1 d\mathrm{P} = \mathrm{P}(A)$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.3.14. Für die Verteilung von X_1 und den Erwartungswert von N_1 unter $\mathrm{P}^{(\beta)}$ gilt mit Hilfe von Gleichung (2.42) und (2.43):

$$\mathrm{P}_{X_1}^{(\beta)}(A) = \frac{1}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} \int_A e^{\beta(x)} d\mathrm{P}_{X_1}(x) \tag{2.58}$$

und

$$\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right] = \lambda' = \lambda \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] \tag{2.59}$$

für alle $A \in \mathbb{B}_+$ ■

Lemma 2.3.15. *Die Abbildung*

$$\beta \in \mathbb{B}_P \longrightarrow \mathrm{P}^{(\beta)}$$

mit

$$\mathbb{B}_P := \left\{\beta \in L^0\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+, \mathrm{P}_{X_1}\right) | \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] < \infty\right\},$$

wobei $L^0\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+, \mathrm{P}_{X_1}\right)$ *die Menge aller messbaren Funktionen auf* $\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+, \mathrm{P}_{X_1}\right)$ *darstellt, ist injektiv.*

Beweis: Seien β und β' aus $\mathbb{B}_P$ mit

$$\mathrm{P}^{(\beta)} = \mathrm{P}^{(\beta')},$$

dann gilt nach Gleichung (2.59):

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right] = \mathrm{E}_{P^{(\beta')}}\left[N_1\right] \\ \Leftrightarrow\ & \lambda \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] = \lambda \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta'\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] = \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta'\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.58) folgt dann für alle $A \in \mathbb{B}_+$:

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}_{X_1}^{(\beta)}(A) = \mathrm{P}_{X_1}^{(\beta')}(A) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} \int_A e^{\beta(x)} d\mathrm{P}_{X_1}(x) = \frac{1}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta'\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} \int_A e^{\beta'(x)} d\mathrm{P}_{X_1}(x) \\ \Leftrightarrow\ & \int_A e^{\beta(x)} d\mathrm{P}_{X_1}(x) = \int_A e^{\beta'(x)} d\mathrm{P}_{X_1}(x) \end{aligned}$$

und damit

$$\beta = \beta' \ \mathrm{P}_{X_1}\text{-f.s.},$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Kapitel 3

Anwendung auf Prinzipien der Prämienkalkulation

Sei $S = (S_t)_{t \geq 0}$ ein Schadensummenprozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P})$ mit $\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] < \infty$. Durch

$$\pi(\mathrm{P}) = \mathrm{E}_P[S_1] = \mathrm{E}_P[N_1]\,\mathrm{E}_P[X_1] \tag{3.1}$$

wird eine Konstante des zugehörigen Prämienprozesses p definiert.
Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, kann P durch ein weiteres W-Maß Q ersetzt werden, wobei P und Q lokal äquivalent sind und $S = (S_t)_{t \geq 0}$ unter Q ein Schadensummenprozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung bleibt. Das neue W-Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ wird eingeführt, um einen Sicherheitszuschlag zu berücksichtigen, d.h. Q muss derart definiert sein, dass die zugehörige Prämienkonstante

$$\pi(\mathrm{Q}) = \mathrm{E}_Q[S_1] = \mathrm{E}_Q[N_1]\,\mathrm{E}_Q[X_1] \tag{3.2}$$

endlich ist und den Sicherheitszuschlag enthält. Diese beiden Bedingungen äußern sich in

$$\pi(\mathrm{P}) < \pi(\mathrm{Q}) < \infty. \tag{3.3}$$

Dies führt zu folgender allgemeinen Definition eines Prämienkalkulationsprinzips, die sich von der sonst üblichen allgemeinen Definition eines Prämienkalkulationsprinzip unterscheidet.

Definition 3.0.16. Ein *Prämienkalkulationsprinzip* ist ein W-Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, das den folgenden drei Bedingungen genügt:

(1) Q und P sind lokal äquivalent,

(2) $S = (S_t)_{t\geq 0}$ bleibt unter Q ein Schadensummenprozess mit Poissonscher Schadensummenverteilung und

(3) $\mathrm{E}_Q[\mathrm{X}_1] < \infty$ ■

Aus Satz 2.3.11 folgt die Existenz einer Borel-messbaren Abbildung $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] < \infty, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] < \infty \tag{3.5}$$

und

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{(\beta)}.$$

Zu $\mathrm{P}^{(\beta)}$ gehört nach Gleichung (3.2) folgende Prämienkonstante :

$$\pi(\mathrm{P}^{(\beta)}) = \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[N_1]\,\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[X_1]. \tag{3.6}$$

Dabei sind nach Gleichung (2.58) und (2.59)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[N_1] &= \lambda \mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] \\
&= \mathrm{E}_P[N_1]\,\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] \qquad (3.7)\\
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[X_1] &= \frac{\int \mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}\, d\mathrm{P}_{X_1}}{\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]}{\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Bedingung (3.5) ist also unter Bedingung (3.4) äquivalent zu

$$\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[\mathrm{X}_1] < \infty.$$

Wegen Gleichung (3.7) und (3.8) gilt in Gleichung (3.6)

$$\pi(\mathrm{P}^{(\beta)}) = \mathrm{E}_P[N_1]\,\mathrm{E}_P[X_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}].$$

Falls $\beta \geq 0$ P_{X_1}-f.s. und $\mathrm{P}_{X_1}(\beta = 0) < 1$, dann ist die erste Ungleichung aus (3.3) verifiziert und es gilt

$$\mathrm{E}_{P(\beta)}[N_1] > \mathrm{E}_P[N_1]$$

Die bisherigen Annahmen reichen im Allgemeinen allerdings nicht aus, um auch

$$\mathrm{E}_{P(\beta)}[\mathrm{X}_1] \geq \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] \tag{3.9}$$

zu implizieren.

Beispiel 3.0.17. Definiere

$$\beta(x) = \begin{cases} n, & x < \mathrm{E}_P[X_1] \\ 0, & x \geq \mathrm{E}_P[X_1]. \end{cases}$$

Dann erhält man für ein hinreichend großes n und der Tatsache, dass $\mathrm{X}_1 \neq c$, $c = \text{const.}$, P-f.s.:

$$\mathrm{E}_P[(\mathrm{X}_1 - \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]) \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] < 0.$$

Damit folgt mit Hilfe von Gleichung (3.8)

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}_P[(\mathrm{X}_1 - \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]) \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] - \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]\, \mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] < \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]\, \mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]}{\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]} < \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] \\
\Leftrightarrow\ & E_{P(\beta)}[\mathrm{X}_1] < \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Ungleichung (3.10) macht gerade eine entgegengesetzte Aussage zu Ungleichung (3.9). ■

Das folgende Lemma legt die Voraussetzungen fest, die zusätzlich gelten müssen, damit Ungleichung (3.9) erfüllt ist.

Lemma 3.0.18. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Die Abbildung β ist monoton wachsend.

(ii) Für alle positiven und P*-integrierbaren ZV* X_1 *gilt:*

$$\mathrm{E}_{P(\beta)}\left[\mathrm{X}_1\right] \geq \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right]$$

Beweis: Vgl. [3], S. 276. □

Definition 3.0.19. (Prämienkalkulationsprinzipien)
Sei X definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ die Schadenhöhe , dann ist

(i) die Prämie nach dem *Nettorisikoprämienprinzip* definiert durch

$$p = \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}\right];$$

(ii) die Prämie nach dem *Erwartungswertprinzip* definiert durch

$$p = (1+\alpha)\,\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}\right],$$

mit $\alpha > 0$;

(iii) die Prämie nach dem *Varianzprinzip* definiert durch

$$p = \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}\right] + \alpha \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}\right],$$

mit $\alpha > 0$;

(iv) die Prämie nach dem *Standardabweichungsprinzip* definiert durch

$$p = \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}\right] + \alpha\sqrt{\mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}\right]},$$

mit $\alpha > 0$;

(v) die Prämie nach dem *Semivarianzprinzip* definiert durch

$$p = \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}\right] + \alpha \mathrm{E}_P\left[\max\left(\mathrm{X} - \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}\right], 0\right)\right]^2,$$

mit $\alpha > 0$;

(vi) die Prämie nach dem *Exponentialprinzip* definiert durch

$$p = \frac{\ln \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X}\right]}{\alpha},$$

mit $\alpha > 0$;

(vii) die Prämie nach dem *Esscherprinzip* definiert durch

$$p = \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}e^{\alpha X}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X}\right]},$$

mit $\alpha > 0$. ■

3.1 Erwartungswertprinzip

Beispiel 3.1.1. (Erwartungswertprinzip)
Sei $\beta(x) = \alpha$, $\alpha = \text{const.}$, dann folgt aus Gleichung (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{X}_1\right] &= \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 \exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 \exp\left\{\alpha\right\}\right]}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\alpha\right\}\right]} \\
&= \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right]
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Prämie nach dem **Nettorisikoprämienprinzip** und aus Gleichung (3.7) folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right] &= \mathrm{E}_P\left[N_1\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] \\
&= \lambda \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\alpha\right\}\right] \\
&= \lambda e^{\alpha}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Prämienkonstante

$$\begin{aligned}
\pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right] \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{X}_1\right] \\
&= \lambda e^{\alpha} \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right].
\end{aligned}$$

Für den Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ gilt nach Gleichung (2.9)

$$\begin{aligned} p_t &= \pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right)(T-t) \\ &= \lambda e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right](T-t) \\ &= \lambda T e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] - \lambda t e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] \\ &= p_0 - \lambda t e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Insbesondere folgt

$$p_0 = \lambda T e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] \tag{3.13}$$

Für $\lambda T e^{\alpha} > 1$ erhält man in (3.13) das **Erwartungswertprinzip**.
Aus Gleichung (3.12) folgt für den Preisprozess der Zahlungsverpflichtungen $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ nach Gleichung (2.2)

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_t &= p_t + S_t \\ &= p_0 - \lambda t e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + S_t \end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Lemma 2.2.4 ist

$$(\mathrm{Z}_t - p_0)_{t\in[0,T]} = (-\lambda t e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + S_t)_{t\in[0,T]}$$

ein Martingal unter $\mathrm{P}^{(\beta)}$ und damit auch $(\lambda t e^{\alpha}\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] - S_t)_{t\in[0,T]}$. ■

Bemerkung 3.1.2. In Beispiel 3.1.1 bleibt die erwartete Schadenhöhe unter dem Maßwechsel von P nach $\mathrm{P}^{(\beta)}$ unverändert, während der Parameter λ des zu Grunde liegenden homogenen Poissonprozesses mit dem Faktor e^{α} multipliziert wird. ■

3.2 Varianzprinzip

Beispiel 3.2.1. (Varianzprinzip)
Sei $\beta(x) = \ln(a + bx)$ mit $a = 1 - b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] > 0$ und $b > 0$, dann folgt aus Gleichung (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[\mathrm{X}_1] &= \frac{\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]}{\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1 \exp\{\ln(a + b\mathrm{X}_1)\}]}{\mathrm{E}_P[\exp\{\ln(a + b\mathrm{X}_1)\}]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1(a + b\mathrm{X}_1)]}{\mathrm{E}_P[a + b\mathrm{X}_1]} \\
&= \frac{a\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + b\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1^2\right]}{a + b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]} \\
&= \frac{(1 - b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1])\,\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + b\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1^2\right]}{(1 - b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]) + b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]} \\
&= \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + b\left(\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1^2\right] - (\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1])^2\right) \\
&= \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + b\mathrm{Var}_P[\mathrm{X}_1]
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Prämie nach dem **Varianzprinzip** und aus Gleichung (3.7) folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[N_1] &= \mathrm{E}_P[N_1]\,\mathrm{E}_P[\exp\{\beta(\mathrm{X}_1)\}] \\
&= \lambda\mathrm{E}_P[\exp\{\ln(a + b\mathrm{X}_1)\}] \\
&= \lambda\mathrm{E}_P[a + b\mathrm{X}_1] \\
&= \lambda\mathrm{E}_P[1 - b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + b\mathrm{X}_1] \\
&= \lambda(1 - b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + b\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1]) \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Prämienkonstante

$$\begin{aligned}
\pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[N_1]\,\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[\mathrm{X}_1] \\
&= \lambda\mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1] + \lambda b\mathrm{Var}_P[\mathrm{X}_1].
\end{aligned}$$

Für den Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ gilt nach Gleichung (2.9)

$$\begin{aligned} p_t &= \pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right)(T-t) \\ &= \left(\lambda \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + \lambda b \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right]\right)(T-t) \\ &= \left(\lambda \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + \lambda b \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right]\right)T - \left(\lambda \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + \lambda b \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right]\right)t \\ &= p_0 - \lambda t \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] - \lambda b t \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right] \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$p_0 = \lambda T \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + \lambda T b \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right] \tag{3.14}$$

Für $\lambda T = 1$ erhält man in (3.14) wieder das **Varianzprinzip**.
Damit folgt für den Preisprozess der Zahlungsverpflichtungen $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ nach Gleichung (2.2)

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_t &= p_t + S_t \\ &= p_0 - \lambda t \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] - \lambda b t \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + S_t \end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Lemma 2.2.4 ist

$$(\mathrm{Z}_t - p_0)_{t\in[0,T]} = \left(-\lambda t \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] - \lambda b t \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + S_t\right)_{t\in[0,T]}$$

ein Martingal unter $\mathrm{P}^{(\beta)}$ und damit auch $\left(\lambda t \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1\right] + \lambda b t \mathrm{Var}_P\left[\mathrm{X}_1\right] - S_t\right)_{t\in[0,T]}$. ■

Bemerkung 3.2.2. In Beispiel 3.2.1 bleibt der Parameter λ des zu Grunde liegenden homogenen Poissonprozesses unter dem Maßwechsel von P nach $\mathrm{P}^{(\beta)}$ unverändert, während die erwartete Schadenhöhe zu der Prämie nach dem Varianzprinzip wechselt. ■

3.3 Esscherprinzip

Beispiel 3.3.1. (Esscherprinzip)
Sei $\beta(x) = \alpha x - \ln \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]$ mit $\alpha > 0$, dann folgt aus Gleichung (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{X}_1\right] &= \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 \exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 \exp\left\{\alpha \mathrm{X}_1 - \ln \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]\right\}\right]}{\mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\alpha \mathrm{X}_1 - \ln \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]\right\}\right]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \frac{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Prämie nach dem **Esscherprinzip** und aus Gleichung (3.7) folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right] &= \mathrm{E}_P\left[N_1\right] \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\beta\left(\mathrm{X}_1\right)\right\}\right] \\
&= \lambda \mathrm{E}_P\left[\exp\left\{\alpha \mathrm{X}_1 - \ln \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]\right\}\right] \\
&= \lambda \mathrm{E}_P\left[\frac{e^{\alpha X_1}}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}\right] \\
&= \lambda \frac{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= \lambda. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Prämienkonstante

$$\begin{aligned}
\pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right] \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{X}_1\right] \\
&= \lambda \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}.
\end{aligned}$$

Für den Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ gilt nach Gleichung (2.9)

$$\begin{aligned}
p_t &= \pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right)(T-t) \\
&= \lambda \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}(T-t) \\
&= \lambda T \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} - \lambda t \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= p_0 - \lambda t \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$p_0 = \lambda T \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \tag{3.16}$$

Für $\lambda T = 1$ erhält man in (3.16) wieder das **Esscherprinzip**.
Damit folgt für den Preisprozess der Zahlungsverpflichtungen $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ nach Gleichung (2.2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_t &= p_t + S_t \\
&= p_0 - \lambda t \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} + S_t
\end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Lemma 2.2.4 ist

$$(\mathrm{Z}_t - p_0)_{t\in[0,T]} = \left(-\lambda t \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} + S_t\right)_{t\in[0,T]}$$

ein Martingal unter $\mathrm{P}^{(\beta)}$ und damit auch $\left(\lambda t \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} - S_t\right)_{t\in[0,T]}$. ■

Bemerkung 3.3.2. In Beispiel 3.3.1 bleibt der Parameter λ des zu Grunde liegenden homogenen Poissonprozesses unter dem Maßwechsel von P nach $\mathrm{P}^{(\beta)}$ unverändert, während die erwartete Schadenhöhe zu der Prämie nach dem Esscherprinzip wechselt. ■

Bemerkung 3.3.3. Wie die Beispiele 3.1.1, 3.2.1 und 3.3.1 zeigen, ist die Prämienkonstante $\pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right)$ und damit auch der Prämienprozess $p = (p_t)_{t\in[0,T]}$ das Ergebnis eines Maßwechsels von P nach $\mathrm{P}^{(\beta)}$, wobei sich die Intensität λ der Schadenanzahl und die Verteilung der Schadenhöhen verändern können. ■

Bemerkung 3.3.4. Versicherungsprämien, die nach den Beispielen 3.1.1, 3.2.1 und 3.3.1 gebildet werden, führen also zu einem arbitragefreien Markt, wenn der Handel mit Versicherungsverträgen erlaubt wäre. ■

Kapitel 4

Stopp-Loss-Kontrakte

4.1 Modellbildung

In diesem Kapitel wird im Modell von Delbaen&Haezendonck ein *Stopp-Loss-Kontrakt* auf den Preisprozess $Z = (Z_t)_{t \in [0,T]}$ betrachtet. Die *Auszahlungsfunktion* ist somit gegeben durch

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$g(x) = (x - K)^+ := \max\{x - K, 0\},$$

wobei $K > 0$ eine Schranke ist, die überschritten werden muss, damit die Auszahlungsfunktion g einen echt positiven Wert annimmt. Insbesondere erhält man für $x = Z_t$

$$g(Z_t) = (Z_t - K)^+.$$

Bemerkung 4.1.1. Vor dem Hintergrund eines Marktes, auf denen Versicherungsverträge gehandelt werden, kann man einen Stopp-Loss-Kontrakt auf den Preisprozess $Z = (Z_t)_{t \in [0,T]}$ z.Z. T als Rückversicherung ansehen. Dabei trägt die Rückversicherung z.Z. T den Anteil der Schadensumme S_T, der über der Schranke K liegt. ■

Der Erwartungswert unter dem Maß $P^{(\beta)}$ des Stopp-Loss-Kontraktes auf den Preisprozess

$Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ hat dann z.Z. T bei einem Zins von $r = 0$ folgende Gestalt

$$\begin{aligned} v(P^{(\beta)}) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[g(Z_T)] \qquad (4.1) \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[(Z_T - K)^+] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[(S_T - K)^+]. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.2. Der Erwartungswert $v(P^{(\beta)})$ kann dabei als Preis z.Z. 0 für die Rückversicherung z.Z. T angesehen werden. ■

Da $v(P^{(\beta)})$ von dem zu P äquivalenten Martingalmaß $P^{(\beta)}$ abhängt und, wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, dieses Maß nicht eindeutig bestimmt ist, ist der Bereich von Interesse, in dem alle Werte $v(P^{(\beta)})$ liegen. Dieser Bereich wird *Range der arbitragefreien Preise des Stopp-Loss-Kontraktes* genannt und in Abschnitt 4.3 näher bestimmt. Zunächst werden im folgenden Abschnitt noch einige hilfreiche Eigenschaften der Auszahlungsfunktion g hergeleitet.

4.2 Eigenschaften der Auszahlungsfunktion

Lemma 4.2.1. *Die Auszahlungsfunktion* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $g(x) = (x - K)^+$ *besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) $0 \leq g(x) < x$,

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$,

(iii) g *ist konvex.*

Beweis:
Zu (i): Die Ungleichungen folgen direkt aus der Definition von g.

Zu (ii): Für den gesuchten Grenzwert gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x-K)^+}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x-K}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\\ &= 1\end{aligned}$$

Zu (iii): Da g stetig ist, reicht es aus, $g(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2}$ zu zeigen.
Dazu betrachte folgende Fallunterscheidung:
1. Fall: $x < K < y$, dann

$$g(\frac{x+y}{2}) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} - K & , \text{ falls } \frac{x+y}{2} > K \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sowie

$$\begin{aligned}\frac{g(x)+g(y)}{2} &= \frac{y-K}{2}\\ &> \frac{x+y-2K}{2}\\ &= \frac{x+y}{2} - K\\ &\geq g(\frac{x+y}{2})\end{aligned}$$

2. Fall: $y < K < x$, dann

$$g(\frac{x+y}{2}) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} - K & , \text{ falls } \frac{x+y}{2} > K \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sowie

$$\begin{aligned}\frac{g(x)+g(y)}{2} &= \frac{x-K}{2}\\ &> \frac{x+y-2K}{2}\\ &= \frac{x+y}{2}-K\\ &\geq g(\frac{x+y}{2})\end{aligned}$$

In allen anderen 11 Fällen erhält man $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$, woraus insgesamt $g(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2}$ folgt und die Konvexität von g gezeigt wäre. □

Satz 4.2.2. ***(Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungen)***
Sei X *eine integrierbare ZV auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *mit Werten aus einem offenen Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *und sei* g *eine auf* I *definierte konvexe reelle Funktion. Dann gilt für jede Unter-*σ*-Albegra* $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$*:*

(i) $\mathrm{E}_P\left[X|\mathcal{C}\right] \in I \qquad \mathrm{P}$*-f.s.,*

(ii) und falls zusätzlich $g \circ \mathrm{X}$ *integrierbar ist*

$$g\left(\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}|\mathcal{C}\right]\right) \leq \mathrm{E}_P\left[g \circ \mathrm{X}|\mathcal{C}\right] \qquad \mathrm{P}\text{-}f.s.$$

Beweis: Siehe z.B. [1], S.121 ff., 15.3 Satz. □

Korollar 4.2.3. *Ist* $X = (X_t)_{t\in\hat{I}}$ *ein* P*-Martingal bzgl. einer Filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\hat{I}}$ *mit Werten in einem offenen Intervall* $J \subset \mathbb{R}$*, d.h.* $\forall t \in \hat{I}: \ \mathrm{X}_t(\Omega) \subset J$*, und ist* $g : J \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion, so ist* $g \circ X_t$ *ein* P*-Submartingal bzgl.* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\hat{I}}$*, falls alle ZV* $g \circ X_t$*,* $t \in \hat{I}$*, integrierbar sind.*

Beweis: Zu zeigen sind die Bedingungen (a) und (b) aus Definition 2.1.1(iii). Bedingung (a) folgt aus der Integrierbarkeit von allen ZV $g \circ X_t$, $t \in \hat{I}$, Bedingung (b) ist eine direkte Folgerung aus Teil (ii) der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungen (Satz 4.2.2) unter Berücksichtigung von

$$g\left(\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_t|\mathcal{F}_s\right]\right) = g\left(\mathrm{X}_s\right),$$

für alle $s \leq t$, $s, t \in \hat{I}$, da $X = (X_t)_{t\in\hat{I}}$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\hat{I}}$ ist. □

Lemma 4.2.4. *Sei* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $g(x) = (x-K)^+$. *Dann ist* $(g(Z_t))_{t\in[0,T]}$ *ein* $P^{(\beta)}$*-Submartingal.*

Beweis: Zu zeigen sind die Voraussetzungen des Korollars 4.2.3. Nach Bemerkung 2.2.3 und Bezeichnung 2.3.12 ist $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ ein $\mathrm{P}^{(\beta)}$-Martingal bzgl. der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ mit Werten in $\mathbb{R}^+$. Die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ist nach Lemma 4.2.1(iii) konvex. Bleibt noch $g \circ Z_t$ ist integrierbar $\forall t \in [0,T]$ zu zeigen. Dazu:
Sei $t \in [0,T]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[|g(Z_t)|\right] &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\left|(Z_t-K)^+\right|\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[(Z_t-K)^+\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[(Z_t-K)\,1_{\{Z_t>K\}}\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_t 1_{\{Z_t>K\}}\right] - K\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[1_{\{Z_t>K\}}\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_t 1_{\{Z_t>K\}}\right] - KP^{(\beta)}\left(Z_t>K\right) \\
&\leq \underbrace{\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_t\right]}_{<\infty,\text{ da Z } P^{(\beta)}\text{-Martingal}} - \underbrace{K}_{<\infty}\underbrace{P^{(\beta)}\left(Z_t>K\right)}_{\in[0,1]} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Korollar 4.2.3. □

4.3 Der Range eines Stopp-Loss-Kontraktes

Um den Range der arbitragefreien Preise eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ zu bestimmen, benötigt man die in Lemma 4.2.4 gezeigte Eigenschaft, dass

$(g(Z_t))_{t\in[0,T]}$ ein $P^{(\beta)}$-Submartingal ist. Denn einerseits gilt nach Gleichung (4.1)

$$\begin{aligned} v(P^{(\beta)}) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[g(Z_T)\right] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[g(Z_T)|\mathcal{F}_0\right]\right] \\ &\geq \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[g(Z_0)\right] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[(Z_0-K)^+\right] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[(S_0+p_0-K)^+\right] \\ &= (p_0-K)^+, \end{aligned}$$

da $(g(Z_t))_{t\in[0,T]}$ ein $P^{(\beta)}$-Submartingal ist.
Andererseits gilt nach Lemma 4.2.1(i)

$$\begin{aligned} g(Z_T) &= (Z_T-K)^+ \\ &< Z_T, \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} v(P^{(\beta)}) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[g(Z_T)\right] \\ &< \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_T\right] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_T|\mathcal{F}_0\right]\right] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_0\right] \\ &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[S_0+p_0\right] \\ &= p_0 \end{aligned}$$

folgt. Insgesamt erhält man

$$(p_0-K)^+ \leq v(P^{(\beta)}) < p_0. \tag{4.3}$$

Bemerkung 4.3.1. Durch die Ungleichung (4.3) ist für $v(P^{(\beta)})$ eine obere und eine untere Schranke gegeben. Ob diese Schranken exakt sind, also den Range der arbitragefreien Preise eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z=(Z_t)_{t\in[0,T]}$ exakt bestimmen, konnte nicht gezeigt werden. ■

Vermutung 4.3.2. E. EBERLEIN & J. JACOD haben in ihrer Arbeit [4] den Range einer Europäischen Call Option in einem unvollständigen Markt berechnet. Unter den gleichen Voraussetzungen für die Auszahlungsfunktion g und zusätzlicher Betrachtung des Marktzinses $r > 0$ erhalten sie folgendes Intervall als Range der arbitragefreien Preise der Europäischen Call Option:

$$\left(e^{rT} g\left(e^{rT} S_0\right), S_0\right), \tag{4.4}$$

dabei bezeichnet S_0 den Preis des der Option zu Grunde liegendem Wertpapieres z.Z. 0. Für $r = 0$ folgt aus (4.4):

$$(g(S_0), S_0) = \left((S_0 - K)^+, S_0\right).$$

Da p_0 der Preis für die Versicherung z.Z. 0 ist, weiterhin $Z_0 = p_0$ gilt und die Auszahlungsfunktion des Stopp-Loss-Kontraktes mit dem Zahlungsstrom der Europäischen Call Option übereinstimmt, liegt die Vermutung nahe, dass der Range der arbitragefreien Preise eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ gegeben ist durch

$$\left((p_0 - K)^+, p_0\right). \tag{4.5}$$

Für weitere Einzelheiten, auch Unterschiede in der Modellbildung siehe [4]. ■

4.4 Der Preis eines Stopp-Loss-Kontraktes

In diesem Abschnitt soll der Preis $v(P^{(\beta)})$ eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ unter Annahme einer konkreten Schadenhöhenverteilung und unter Annahme verschiedener Darstellungen der Funktion β berechnet werden. Dazu betrachte zunächst folgendes Lemma.

Lemma 4.4.1. *In dem Modell von* DELBAEN & HAEZENDONCK *gilt für den Prämienprozess z.Z.* 0 *und damit für den Preis des Finanzgutes* $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ *z.Z.* 0*:*

$$p_0 = \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[Z_T] = \lambda T \mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\beta(X_1)}\right]. \tag{4.6}$$

Beweis: Einerseits gilt mit den Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_T\right] &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[S_T\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_T\right]\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{X}_1\right] \\
&= T\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[N_1\right]\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{X}_1\right] \\
&= T\Pi\left(\mathrm{P}^{(\beta)}\right) \\
&= T\mathrm{E}_P\left[N_1\right]\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\beta(X_1)}\right] \\
&= \lambda T\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\beta(X_1)}\right],
\end{aligned}$$

da N ein Poissonprozess mit Intensität λ unter P ist.
Weil andererseits Z ein Martingal bzgl. $P^{(\beta)}$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_T\right] &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_T|\mathcal{F}_0\right]\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[Z_0\right] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}\left[S_0+p_0\right] \\
&= p_0,
\end{aligned}$$

da $S_0 = 0$ ist. □

Im Folgenden soll der Preis $v(P^{(\beta)})$ eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ unter der Annahme berechnet werden, dass die Schadenhöhen gammaverteilt sind [in Zeichen: $X_i \sim \Gamma_{a,\gamma}$]. Zur Definition der Gammaverteilung vergleiche auch Definition (A.3.1) im Anhang. Nach Gleichung (4.2) gilt:

$$\begin{aligned}
v(P^{(\beta)}) &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[(S_T-K)^+] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[(S_T-K)1_{\{S_T>K\}}] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[S_T 1_{\{S_T>K\}}] - K\mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[1_{\{S_T>K\}}] \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[S_T 1_{\{S_T>K\}}] - KP^{(\beta)}\{S_T>K\} \\
&= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[S_T 1_{\{S_T>K\}}] - KP^{(\beta)}\{S_T\in(K,\infty)\} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht werden die beiden Summanden aus Gleichung (4.7) im Folgenden einzeln berechnet. Für den 2. Summanden gilt nach [17], Teil Kaufmann, Bemerkung 2.5

$$KP^{(\beta)}\{S_T \in (K,\infty)\} = K\sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \left[P_{X_1}^{(\beta)}\{(K,\infty)\}\right]^{*(n)}$$

Aus den Gleichungen (2.26) und (2.58) folgt weiterhin unter der Annahme von gammaverteilten Schadenhöhen

$$\begin{aligned} KP^{(\beta)}\{S_T \in (K,\infty)\} &= K\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \left[\frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\mathrm{P}_{X_1}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]}\right]^{*(n)} \\ &= K\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \left[\frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]}\right]^{*(n)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Für den 1. Summanden gilt mit $S_T = \sum_{i=1}^{N_T} X_i$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[S_T 1_{\{S_T > K\}}] &= \int 1_{\{S_T>K\}} S_T dP^{(\beta)} \\ &= \int 1_{\{\sum_{i=1}^{N_T} X_i > K\}} \sum_{i=1}^{N_T} X_i dP^{(\beta)} \\ &= \int \mathrm{E}_{P^{(\beta)}} \left[1_{\{\sum_{i=1}^{N_T} X_i > K\}} \sum_{i=1}^{N_T} X_i | N_T = n\right] dP_{N_T}^{(\beta)}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \mathrm{E}_{P^{(\beta)}} \left[1_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i > K\}} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \int_{(K,\infty)} \sum_{i=1}^{n} X_i dP^{(\beta)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \int_{(K,\infty)} x dP^{(\beta)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(x), \end{aligned} \tag{4.9}$$

wobei

$$P^{(\beta)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \left[P_{X_1}^{(\beta)}\right]^{*(n)}. \tag{4.10}$$

Insgesamt erhält man also aus den Gleichungen (4.7), (4.8) und (4.9)

$$\begin{aligned} v(P^{(\beta)}) = & \sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \int_{(K,\infty)} x dP^{(\beta)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(x) \\ & - K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \left[\frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} \right]^{*(n)} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Beispiel 4.4.2. Erwartungswertprinzip
Sei $\beta(x) = \hat{\alpha}$ mit $\hat{\alpha} =$ const., dann folgt aus den Gleichungen (3.11) und (3.13) aus Beispiel 3.1.1

$$\begin{aligned} \lambda' &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[N_1] \\ &= \lambda e^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.12}$$

und

$$p_0 = \lambda T e^{\hat{\alpha}} \mathrm{E}_P[\mathrm{X}_1].$$

Für $\lambda T e^{\hat{\alpha}} > 1$ entspricht dies der Prämie nach dem **Erwartungswertprinzip**.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} &= \frac{\int_{(K,\infty)} e^{\hat{\alpha}} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\hat{\alpha}}\right]} \\ &= \frac{e^{\hat{\alpha}} \int 1_{(K,\infty)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{e^{\hat{\alpha}}} \\ &= \Gamma_{a,\gamma}\{(K,\infty)\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Mit Gleichung (4.12) und (4.13) folgt für den 2. Summanden aus Gleichung (4.11)

$$\begin{aligned} & K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \left[\frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} \right]^{*(n)} \\ &= K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T e^{\hat{\alpha}})^n}{n!} e^{-\lambda T e^{\hat{\alpha}}} \left[\Gamma_{a,\gamma}\{(K,\infty)\}\right]^{*(n)} \\ &= K \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}\{n\} \, \Gamma_{na,\gamma}\{(K,\infty)\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

wobei $\mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}$ die Poissonverteilung zum Parameter $\lambda T e^{\hat{\alpha}}$ ist und $\Gamma_{na,\gamma}$ die n-fache Faltung der Verteilung von X_1 unter $\mathrm{P}^{(\beta)}$ darstellt.
Für den 1. Summanden aus Gleichung (4.11) gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \int_{(K,\infty)} x dP^{(\beta)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \int_{(K,\infty)} x d\Gamma_{na,\gamma}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T e^{\hat{\alpha}})^n}{n!} e^{-\lambda T e^{\hat{\alpha}}} \int_{(K,\infty)} x \frac{\gamma^{na}}{\Gamma(na)} x^{na-1} e^{-\gamma x} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}\{n\} \frac{na}{\gamma} \int_{(K,\infty)} \frac{\gamma^{na+1}}{\Gamma(na+1)} x^{(na+1)-1} e^{-\gamma x} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}\{n\} \frac{na}{\gamma} \Gamma_{na+1,\gamma}\{(K,\infty)\} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man aus den Gleichungen (4.11), (4.14) und (4.15)

$$\begin{aligned}
v(P^{(\beta)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}\{n\} \frac{na}{\gamma} \Gamma_{na+1,\gamma}\{(K,\infty)\} - K \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}\{n\} \Gamma_{na,\gamma}\{(K,\infty)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T e^{\hat{\alpha}}}\{n\} \left(\frac{na}{\gamma} \Gamma_{na+1,\gamma}\{(K,\infty)\} - K \Gamma_{na,\gamma}\{(K,\infty)\} \right) \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Durch Gleichung (4.16) wird eine Formel zur Berechnung des Preises $v(P^{(\beta)})$ eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ unter der Annahme von gammaverteilten Schadenhöhen und einer Prämie p_0 berechnet nach dem **Erwartungswertprinzip** (für $\lambda T e^{\hat{\alpha}} > 1$) angegeben. ■

Beispiel 4.4.3. Esscherprinzip
Sei $\beta(x) = \alpha x - \ln \mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]$ mit $\alpha > 0$, dann folgt aus den Gleichungen (3.15) und (3.16) aus Beispiel 3.3.1

$$\begin{aligned}
\lambda' &= \mathrm{E}_{P^{(\beta)}}[N_1] \\
&= \lambda \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

und

$$p_0 = \lambda T \frac{\mathrm{E}_P\left[\mathrm{X}_1 e^{\alpha X_1}\right]}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}.$$

Für $\lambda T = 1$ entspricht dies der Prämie nach dem **Esscherprinzip**.
Weiterhin gilt mit Lemma A.3.3

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} &= \frac{\int_{(K,\infty)} e^{\alpha x - \ln E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\alpha X_1 - \ln E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}\right]} \\
&= \frac{\int_{(K,\infty)} \frac{e^{\alpha x}}{E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[\frac{e^{\alpha X_1}}{E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]}\right]} \\
&= \frac{\int_{(K,\infty)} e^{\alpha x} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= \frac{\int_{(K,\infty)} e^{\alpha x} \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\gamma x} dx}{E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= \frac{\int_{(K,\infty)} \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\gamma-\alpha)x} dx}{E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^a \frac{\int_{(K,\infty)} \frac{(\gamma-\alpha)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\gamma-\alpha)x} dx}{E_P\left[e^{\alpha X_1}\right]} \\
&= \int_{(K,\infty)} \frac{(\gamma-\alpha)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\gamma-\alpha)x} dx \\
&= \Gamma_{a,\gamma-\alpha}\left\{(K,\infty)\right\}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.17) und (4.18) folgt für den 2. Summanden aus Gleichung (4.11)

$$\begin{aligned}
& K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \left[\frac{\int_{(K,\infty)} e^{\beta(x)} d\Gamma_{a,\gamma}(x)}{\mathrm{E}_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]}\right]^{*(n)} \\
&= K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} \left[\Gamma_{a,\gamma-\alpha}\left\{(K,\infty)\right\}\right]^{*(n)} \\
&= K \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T}\left\{n\right\} \Gamma_{na,\gamma-\alpha}\left\{(K,\infty)\right\}, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}_{\lambda T}$ die Poissonverteilung zum Parameter λT ist und $\Gamma_{na,\gamma-\alpha}$ die n-fache Faltung der Verteilung von X_1 unter $\mathrm{P}^{(\beta)}$ darstellt.
Für den 1. Summanden aus Gleichung (4.11) gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} P^{(\beta)}\{N_T = n\} \int_{(K,\infty)} x dP^{(\beta)}_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} e^{-\lambda' T} \int_{(K,\infty)} x d\Gamma_{na,\gamma-\alpha}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} \int_{(K,\infty)} x \frac{(\gamma-\alpha)^{na}}{\Gamma(na)} x^{na-1} e^{-(\gamma-\alpha)x} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T}\{n\} \frac{na}{\gamma-\alpha} \int_{(K,\infty)} \frac{(\gamma-\alpha)^{na+1}}{\Gamma(na+1)} x^{(na+1)-1} e^{-(\gamma-\alpha)x} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T}\{n\} \frac{na}{\gamma-\alpha} \Gamma_{na+1,\gamma-\alpha}\{(K,\infty)\}. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man aus den Gleichungen (4.11), (4.19) und (4.20)

$$\begin{aligned}
v(P^{(\beta)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T}\{n\} \frac{na}{\gamma-\alpha} \Gamma_{na+1,\gamma-\alpha}\{(K,\infty)\} - K \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T}\{n\} \Gamma_{na,\gamma-\alpha}\{(K,\infty)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\lambda T}\{n\} \left(\frac{na}{\gamma-\alpha} \Gamma_{na+1,\gamma-\alpha}\{(K,\infty)\} - K \Gamma_{na,\gamma-\alpha}\{(K,\infty)\} \right) \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Durch Gleichung (4.21) wird eine Formel zur Berechnung des Preises $v(P^{(\beta)})$ eines Stopp-Loss-Kontraktes auf das Finanzgut $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ unter der Annahme von gammaverteilten Schadenhöhen und einer Prämie p_0 berechnet nach dem **Esscherprinzip** (für $\lambda T = 1$) angegeben. ■

Kapitel 5

Zusammenfassung

Text

Anhang A

Verteilungen

A.1 Poissonverteilung

Definition A.1.1. Sei $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und X eine diskrete Zufallsvariable. Dann heißt X *poissonverteilt mit dem Parameter* λ, falls gilt:

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

[in Zeichen: $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}_\lambda$] ■

Lemma A.1.2. *Sei* $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}_\lambda$*. Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz von* X*:*

(*i*) $\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \lambda$

(*ii*) $\mathrm{Var}[\mathrm{X}] = \lambda$

Beweis: Siehe z.B. [13], S.83 □

A.2 Exponentialverteilung

Definition A.2.1. Die Zufallsvariable X heißt *exponentialverteilt mit dem Parameter* $\lambda > 0$, falls X folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

[in Zeichen: $\mathrm{X} \sim \mathcal{EP}_\lambda$]
Im Fall $\lambda = 1$ heißt X *standardexponentialverteilt* mit Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

[in Zeichen: $\mathrm{X} \sim \mathcal{SEP}$] ■

Lemma A.2.2. *Sei* $\mathrm{X} \sim \mathcal{EP}_\lambda$*. Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz von* X*:*

(i) $\quad \mathrm{E}[\mathrm{X}] = \dfrac{1}{\lambda}$

(ii) $\mathrm{Var}[\mathrm{X}] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Beweis: Siehe z.B. [13], S.102 ff. □

A.3 Gammaverteilung

Definition A.3.1. Durch

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t)\, dt$$

wird die Gammafunktion definiert. Dann heißt die Zufallsvariable X *gammaverteilt mit den Parametern* $a > 0$ *und* $\gamma > 0$, falls X folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\gamma x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

[in Zeichen: $\mathrm{X} \sim \Gamma_{a,\gamma}$]
Dabei gibt $\Gamma(a)$ den Wert der Gammafunktion an der Stelle a an. Der Parameter γ ist ein Skalenparameter. Im Fall $a = 1$ erhält man speziell eine Exponentialverteilung. ■

Lemma A.3.2. *Sei* $\mathrm{X} \sim \Gamma_{a,\gamma}$ *mit* $a > 0$ *und* $\gamma > 0$. *Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz von* X*:*

$$(i) \quad \mathrm{E}[\mathrm{X}] = \frac{a}{\gamma}$$

$$(ii) \quad \mathrm{Var}[\mathrm{X}] = \frac{a}{\gamma^2}$$

Beweis: Siehe z.B. [19], S.182 □

Lemma A.3.3. *Sei* $\mathrm{X} \sim \Gamma_{a,\gamma}$ *mit* $a > 0$ *und* $\gamma > 0$. *Für die Momenterzeugende Funktion von* X *mit Index* α
$MEF_\alpha(\mathrm{X}) : (-\infty, \gamma) \to \mathbb{R}$, $MEF_\alpha(\mathrm{X}) = \mathrm{E}[\exp(\alpha \mathrm{X})]$
gilt dann:

$$MEF_\alpha(\mathrm{X}) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - \alpha}\right)^a.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
MEF_{\alpha}(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}\left[\exp\left(\alpha \mathrm{X}\right)\right] \\
&= \int_0^{\infty} e^{(\alpha x)} d\Gamma_{(a,\gamma)}\left(x\right) \\
&= \int_0^{\infty} e^{(\alpha x)} \frac{\gamma^a}{\Gamma\left(a\right)} x^{a-1} e^{-\gamma x} dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\gamma^a}{\Gamma\left(a\right)} x^{a-1} e^{-(\gamma-\alpha)x} dx
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $g\left(x\right) = \left(\gamma - \alpha\right) x$, $x = \frac{g(x)}{\gamma-\alpha}$, $\frac{dg}{dx} = \gamma - \alpha$, $dx = \frac{dg}{\gamma-\alpha}$ folgt für $\gamma > 0$ und $\alpha < \gamma$

$$
\begin{aligned}
MEF_{\alpha}(\mathrm{X}) &= \int_0^{\infty} \frac{\gamma^a}{\Gamma\left(a\right)} \left(\frac{g}{\gamma-\alpha}\right)^{a-1} e^{-g} \frac{dg}{\gamma-\alpha} \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^a \int_0^{\infty} \frac{1^a}{\Gamma\left(a\right)} g^{a-1} e^{-g} dg \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^a \Gamma_{(a,1)}\{(0,\infty)\} \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^a,
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

Anhang B

Simulationen

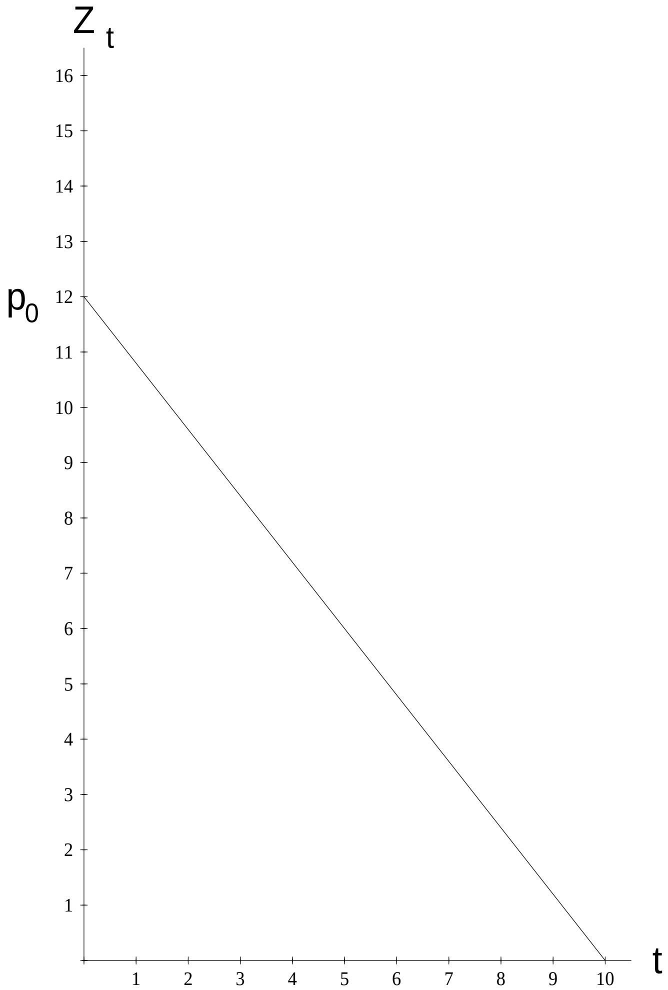

Abbildung B.1: Möglicher Preisprozess Z_t der Zahlungsverpflichtungen eines VU falls keine Schäden eintreten. Dabei ist $p_0 = 12$ und $T = 10$.

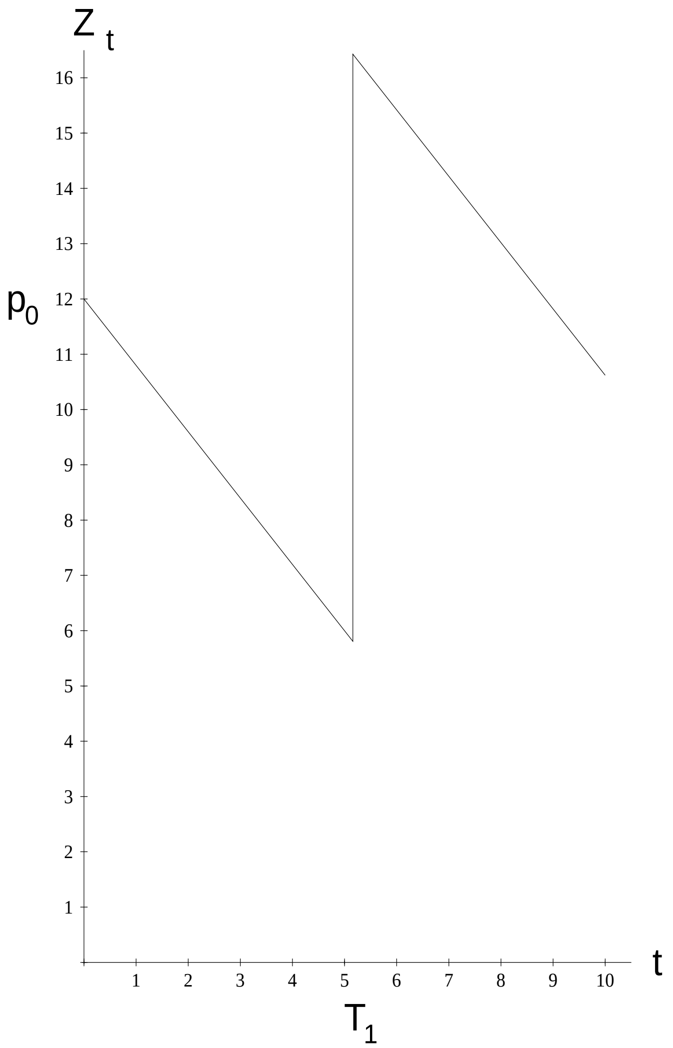

Abbildung B.2: Möglicher Preisprozess Z_t der Zahlungsverpflichtungen eines VU falls ein Schaden eintritt. Dabei ist $p_0 = 12$ und $T = 10$. Die Wartezeiten zwischen den Schadeneintrittszeiten T_i sind exponentialverteilt und die Schadenhöhen gammaverteilt mit Parametern $\alpha = 3.5$ und $\beta = 10$.

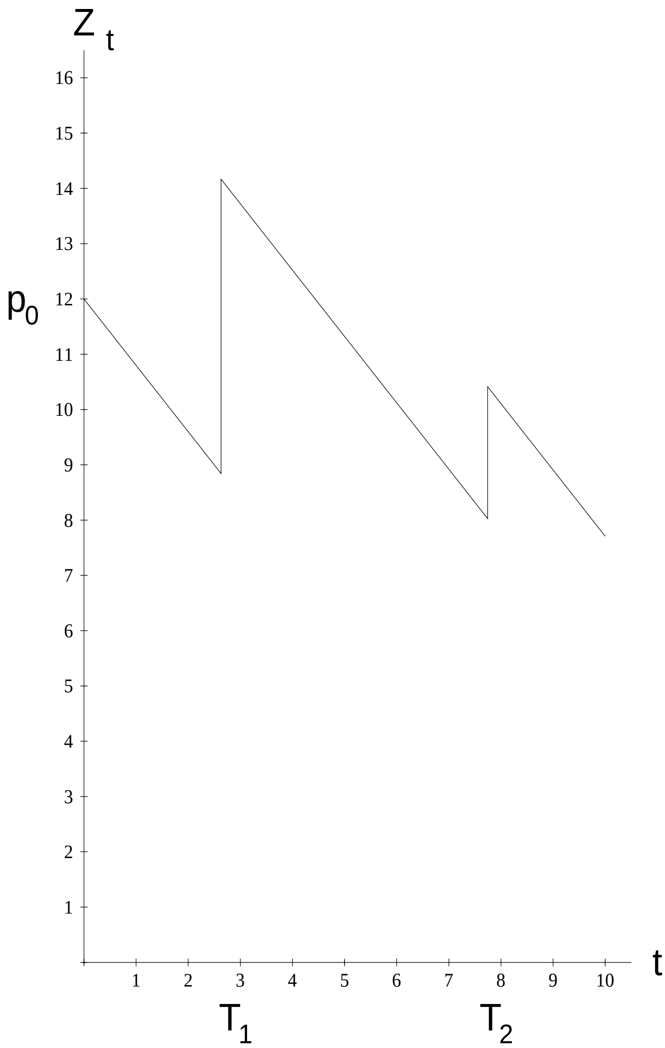

Abbildung B.3: Möglicher Preisprozess Z_t der Zahlungsverpflichtungen eines VU falls zwei Schäden eintreten. Dabei ist $p_0 = 12$ und $T = 10$. Die Wartezeiten zwischen den Schadeneintrittszeiten T_i sind exponentialverteilt und die Schadenhöhen gammaverteilt mit Parametern $\alpha = 3.5$ und $\beta = 5$.

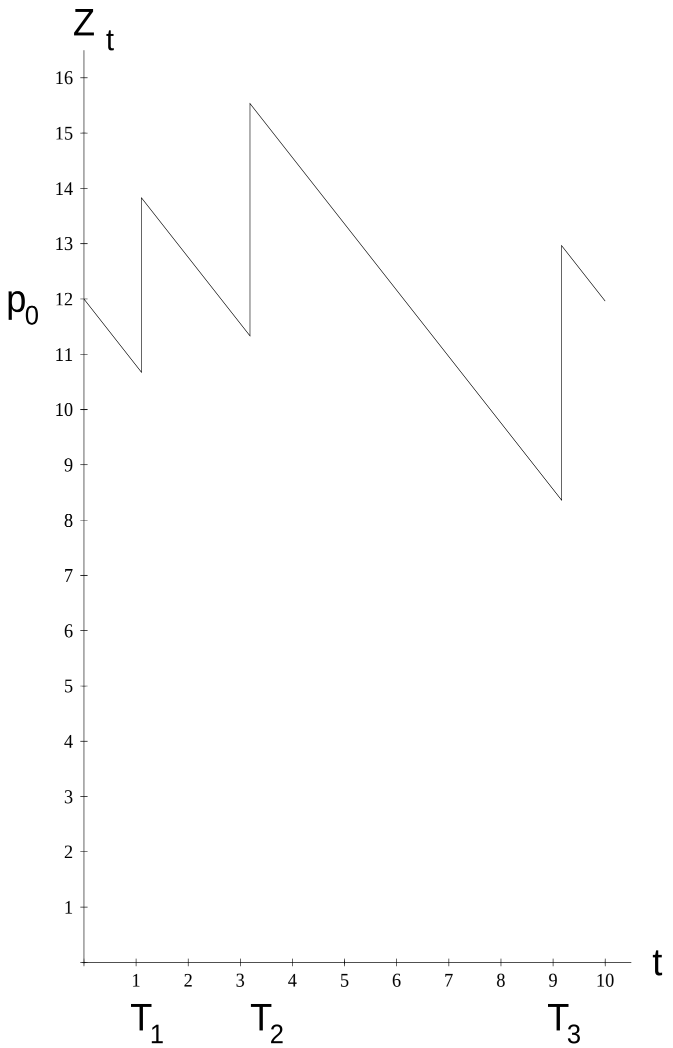

Abbildung B.4: Möglicher Preisprozess Z_t der Zahlungsverpflichtungen eines VU falls drei Schäden eintreten. Dabei ist $p_0 = 12$ und $T = 10$. Die Wartezeiten zwischen den Schadeneintrittszeiten T_i sind exponentialverteilt und die Schadenhöhen gammaverteilt mit Parametern $\alpha = 3.5$ und $\beta = \frac{10}{3}$.

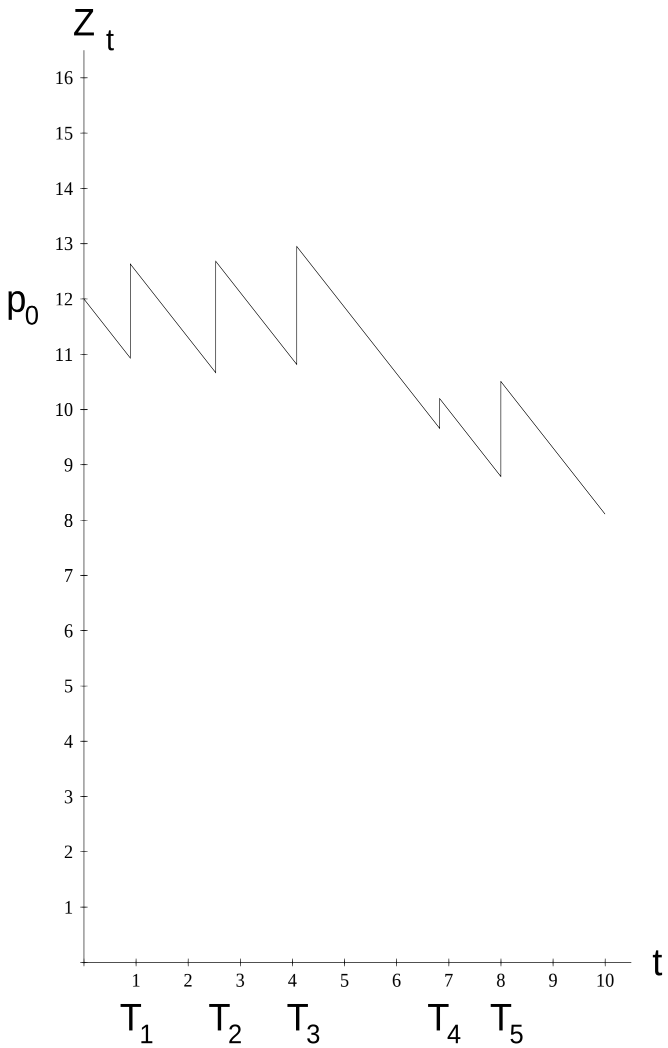

Abbildung B.5: Möglicher Preisprozess Z_t der Zahlungsverpflichtungen eines VU falls fünf Schäden eintreten. Dabei ist $p_0 = 12$ und $T = 10$. Die Wartezeiten zwischen den Schadeneintrittszeiten T_i sind exponentialverteilt und die Schadenhöhen gammaverteilt mit Parametern $\alpha = 3.5$ und $\beta = 2$.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H.
Wahrscheinlichkeitstheorie, 4.Auflage
Erlangen (1990)
Walter de Gruyter Verlag, Berlin & New York

[2] Black, F. & Scholes, M.S.
The pricing of options and corporate liabilities
(1973)
Journal of Political Economy 81 (3), S. 637-654

[3] Delbaen, F. & Haezendonck, J.
A martingale approach to premium calculation principles in an arbitrage free market
Brüssel & Antwerpen (1989)
Insurance: Mathematics and Economics 8, North-Holland

[4] Eberlein, E. & Jacod, J.
On the range of options prices
Freiburg & Tour (1997)
Finance and Stochastics 1, S.131-140
Springer-Verlag, New York & Berlin & Heidelberg

[5] Embrechts, P.
Actuarial versus Financial Pricing of Insurance
Zürich (1997)
The Wharton School, University of Pennsylvania

[6] HARRISON, J.M. & KREPS, D.M.
Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets
(1979)
Journal of Economic Theory 20, S.381-408

[7] IRLE, A.
Finanzmathematik - Die Bewertung von Derivaten, 2. Auflage
Kiel (2003)
B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden

[8] KAUFMANN, E.
Grundlagen der Finanzmathematik
Skript zur Vorlesung
Siegen (2003)
Universität Siegen, Siegen

[9] KAUFMANN, E.
Stochastische Prozesse der Finanzmathematik
Skript zur Vorlesung
Siegen (2003/2004)
Universität Siegen, Siegen

[10] KAUFMANN, E.
Stochastische Prozesse in der Rückversicherung
Skript zur Vorlesung
Siegen (2003/2004)
Universität Siegen, Siegen

[11] KÖNIG, D. & SCHMIDT, V.
Zufällige Punktprozesse
Freiberg (1992)
B.G. Teubner Verlag, Stuttgart

[12] KONOW, M. & SIMSEK, S.
Thesenpapier zu Embrechts, Paul: Actuarial versus Financial Pricing of Insurance

Köln (2004/2005)
http://www.uni-koeln.de/wiso-fak/versich/studium/lehrveranstaltungen
/hauptseminar/thesenpapier_b3_konow_simsek.pdf

[13] Maibaum, G.
Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik
Dresden (1976)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

[14] Merton, R.C.
Theory of rational option pricing
(1973)
Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1), S. 141-183

[15] Reiss, R.-D.
A Course on Point Processes
Siegen (1993)
Springer-Verlag, New York & Berlin & Heidelberg

[16] Reiss, R.-D.
Finanzmathematik
Skript zur Vorlesung
Siegen (2002)
Universität Siegen, Siegen

[17] Reiss, R.-D. & Kaufmann, E.
Versicherungsmathematik II - Schadenversicherungsmathematik
Skript zur Vorlesung
Siegen (2002)
Universität Siegen, Siegen

[18] Reiss, R.-D. & Thomas, M.
Statistical Analysis of Extreme Values, 2. Auflage
Siegen (2001)
Birkhäuser Verlag, Basel & Boston & Berlin

[19] SCHÜRGER, K.
Wahrscheinlichkeitstheorie
Bonn (1998)
R. Oldenbourg Verlag, München & Wien

Index

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Siegen, im Juni 2005