

Institut für Mathematische Statistik der
Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines Diplom-Mathematikers

Der Ritt auf der Zinskurve
Einsatz eines Zinsstrukturmodells in der barwertigen Zinsbuchsteuerung

PD Dr. Volkert Paulsen



vorgelegt von:
Boris Lütke Schelhowe
Im Windhoek 1a
48157 Münster

Matrikel Nr. 317740
10. Fachsemester
Ausgabetermin: 7. Juli 2009
Abgabetermin: 29. Oktober 2009

Einleitung

Das Zinsgeschäft ist insbesondere für regionale Banken zu einer wesentlichen Ertragsquelle geworden. Wie das Handelsblatt in ihrer Ausgabe vom 9. April 2009 berichtet, erwirtschaften mittelgroße Sparkassen bis zu 80% ihres Gewinns aus dem Zinsgeschäft. Unter Zinsgeschäften versteht man in diesem Zusammenhang meist das bewusste durchführen von Fristentransformation im Bankbuch. Dies bedeutet u.a., dass langfristige Darlehen kurzfristig refinanziert werden. Für die Refinanzierung stehen den Banken zum Beispiel der Interbankenhandel und die Spareinlagen der Kunden zur Verfügung.

Sind die kurzfristigen Zinsen am Kapitalmarkt deutlich geringer als die langfristigen Zinsen, so ist die Fristentransformation für Kreditinstitute besonders interessant. Die Zinsstrukturkurve wird in diesem Fall als steil bezeichnet.

Differenz zwischen 1-jährigen und 10-jährigen Zinsen

Spread in BP		absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
invers	kleiner als -100	18	4,11
	zwischen -100 und -50	21	4,79
	zwischen -50 und 0	39	8,90
flach	zwischen 0 und 50	63	14,38
	zwischen 50 und 100	30	6,85
steil	zwischen 100 und 150	56	12,79
	größer als 150	211	48,17

Tabelle 0.1.: Datengrundlage der Auswertung sind die Zinsstrukturdaten der Bundesbank auf 1-Monatsbasis.

Die Tabelle 0.1 zeigt die Häufigkeitsverteilung der Zinsdifferenz zwischen 1 jährigen und 10 jährigen Zinsen in Basispunkten¹. In mehr als 80% der Fälle liegt ein positiver Laufzeitspread vor. Eine deutlich steile Zinskurve lässt sich in knapp 60% der Fälle identifizieren.

Generell werden zwei Arten von Fristentransformation unterschieden, welche auch kombiniert werden können:

- (1) Refinanzierungstransformation: Das zur Verfügung gestellte Kapital und die zur Refinanzierung aufgenommenen Geldmittel besitzen eine uneinheitliche Kapitalbindungsdauer.
- (2) Zinsfristentransformation: Das zur Verfügung gestellte Kapital und die zur Refinanzierung aufgenommenen Geldmittel besitzen eine uneinheitliche Zinsbindungsdauer.

Die Tabelle 0.2 verdeutlicht diesen Zusammenhang auf Basis einer Kreditvergabe (grüne Kästen) und der zugehörigen Refinanzierung am Kapitalmarkt (rote Kästen).

		Zinsfristentransformation „Riding the Yield Curve“	
		Nein	Ja
Refinanzierungstransformation „Riding the Spread Curve“	Nein	Laufzeit 3 Jahre Kupon fix (z.B. festverzinsliches Darlehen) Laufzeit 3 Jahre Kupon fix (z.B. festverzinsliches Darlehen)	Laufzeit 3 Jahre Kupon fix (z.B. festverzinsliches Darlehen) Laufzeit 3 Jahre Kupon variabel (z.B. Mix aus verschiedenen FRN)
	Ja	Laufzeit 3 Jahre Kupon variabel (z.B. FRN mit 1-Jahres Anpassung) rollierend - Laufzeit 1 Jahr Kupon fix (z.B. Darlehen mit Laufzeit 1 Jahr)	Laufzeit 3 Jahre Kupon fix (z.B. festverzinsliches Darlehen) rollierend - Laufzeit 1 Jahr Kupon fix (z.B. Darlehen mit Laufzeit 1 Jahr)

Tabelle 0.2.: Beispiele verschiedener Fristentransformationsarten

¹100 Basispunkte entsprechen einem Prozentpunkt

Allerdings entstehen durch die ursprüngliche Kreditvergabe und je nach Art und Umfang der Fristentransformation für das Kreditinstitut durchaus existenzbedrohende Risiken:

- (i) das Ausfallrisiko, d.h. der Kredit kann nicht durch den Schuldner des langfristigen Darlehens zurückbezahlt werden.
- (ii) das Zinsänderungsrisiko, d.h. aufgrund einer Veränderung der marktgegebenen Zinsstrukturkurve kann eine Refinanzierung nur zu erhöhten Kosten erreicht werden.
- (iii) das Refinanzierungsrisiko (Liquiditätsrisiko), d.h. aufgrund einer Veränderung der eigenen Refinanzierungskurve kann eine Refinanzierung nur unzureichend oder zu erhöhten Kosten erreicht werden.

Das Ausfallrisiko wird meist im Zuge der Kreditrisikosteuerung von Banken separat gesteuert. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit davon ausgegangen, dass der Kreditnehmer seinen Kredit vollständig und fristgerecht bedient.

Für die Steuerung des Zinsänderungsrisiko hat sich in den letzten Jahren die barwertige Zinsbuchsteuerung durchgesetzt. Sie bietet den Vorteil, dass die gesamten zukünftigen Zahlungen berücksichtigt werden. Eine idealtypische Vorgehensweise wird im **ersten Kapitel** vorgestellt. Detailliertere Betrachtungen und eine betriebswissenschaftliche Rechtfertigung dieser Steuerungsmethode finden sich u.a. bei [20], S. 157ff und in [25].

Im Zuge der barwertigen Zinsbuchsteuerung wird häufig in der Literatur (vgl. u.a. [10] und [29]) und in der Bankpraxis (vgl. exemplarisch [17], S. 32) eine Historische Simulation verwendet. Die implizite Prämisse der Historischen Simulation ist, dass die historische Entwicklungen eine gute Schätzung für zukünftige Zinsänderungen sind.

Der Hauptteil dieser Arbeit widmet sich der Fragestellung, inwiefern durch die Verwendung eines Zinsstrukturmodells die barwertige Zinsbuchsteuerung „verbessert“ werden kann. Dazu wird in dem **zweiten Kapitel** dieser Arbeit das verwendete Zinsstrukturmodell vorgestellt und mathematisch detailliert hergeleitet.

In dem **dritten Kapitel** werden zwei Arbeitshypothesen aufgestellt, die mit Hilfe einer Vergleichsrechnung zwischen Stochastischer und Historischer Simulation überprüft werden sollen. Für diese Vergleichsrechnung ist ein Programm in Excel-VBA programmiert worden. In dem weiteren Verlauf des Kapitels werden die Ergebnisse dieser Vergleichsrechnung vorgestellt. Für diesen Teil der Arbeit wird ein isoliertes Zinsänderungsrisiko angenommen.

Das Refinanzierungsrisiko ist erst in den letzten Jahren vermehrt in den Fokus getreten. Hofmann hat in seiner Dissertation [9] aus dem Jahre 2008 dargelegt, wie sich der Refinanzierungsfristentransformationsbeitrag in den Kontext der barwertigen Zinsbuchsteuerung integrieren lässt. In dem **vierten Kapitel** wird ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung in diesem Bereich aufgezeigt. Des Weiteren wird dargestellt, welchen Anforderungen grundsätzlich ein mathematisches Modell genügen muss.

In dem **fünften Kapitel** werden die Simulationsergebnisse des dritten Kapitels einer kritischen Würdigung unterzogen. Des Weiteren wird ein Ausblick über mögliche Anknüpfungspunkte dieser Arbeit gegeben.

An dieser Stelle möchte ich Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung dieses Themas und die sehr gute Betreuung während der gesamten Zeit danken. Ferner bedanke ich mich bei Martin Düllmann und Felix Brinkmann für das Korrekturlesen dieser Arbeit. Ein weiterer Dank gilt Manuel van de Kamp, der insbesondere in der Einarbeitungsphase als Gesprächspartner zur Verfügung stand und zu passender Zeit für die nötige Ablenkung von dem Thema gesorgt hat.

Gemäß §21 Absatz (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, 29. Oktober 2009

Boris Lütke Schelhowe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1. Die barwertige Zinsbuchsteuerung	1
2. Das Zinsstrukturmodell	14
2.1. Besonderheiten der Zinsmodellierung	14
2.2. Einführung in die Theorie der Short Rate-Modelle	16
2.3. Das 2-Faktor Gauß-Modell G2++	28
2.3.1. Die Dynamik der Short-Rate	28
2.3.2. Der Preis eines Zero-Kupon-Bonds	31
2.3.3. Anpassung an die aktuelle Zinsstrukturkurve	38
2.3.4. Kalibrierung an die Marktdaten	42
2.3.5. Konstruktion eines approximierenden Baumes für die Short Rate	44
3. Die Simulation	52
3.1. Ausgangssituation	52
3.2. Beschreibung der Simulationsmethoden	54
3.3. Analyse der Simulationsergebnisse	57
4. Die Refinanzierungsfristentransformation	67
5. Kritische Würdigung und Ausblick	73
A. Nebenrechnungen	76
B. Ergänzende Tabellen und Grafiken	79
C. Daten-CD	83
D. Programmablaufpläne	84
Literaturverzeichnis	86

1. Die barwertige Zinsbuchsteuerung

In der Einleitung ist dargelegt worden, dass für die Kreditinstitute durch das Eingehen von Fristentransformation durchaus existenzbedrohende Risiken entstehen. Für die Steuerung dieser Risiken und zur Optimierung des Ertrages ist ein adäquates Steuerungskonzept notwendig. In den letzten Jahren hat sich vermehrt die barwertige Zinsbuchsteuerung (alternative Bezeichnung: wertorientierte Steuerung) als Steuerungskonzept für das Zinsänderungsrisiko durchgesetzt, da die gesamten zukünftigen Zahlungen eines Geschäftes Berücksichtigung finden.¹

Bevor im weiteren Verlauf dieses Kapitels der Prozess der barwertigen Zinsbuchsteuerung vorgestellt werden kann, müssen zuerst einige grundlegende Begrifflichkeiten aus der Theorie der Zinsmodellierung spezifiziert werden.

Definition 1.1 (Vgl. [4], S. 12)

In einem arbitrage-freien Finanzmarkt seien folgende Bezeichnungen gegeben:

- (i) Als Diskontfaktor $B(t, T)$ wird der Wert im Zeitpunkt t einer risikolosen Auszahlung zum Zeitpunkt T in Höhe von 1 bezeichnet.
Entsprechend wird mit $B(t, \cdot) : [t, T^*] \rightarrow [0, 1]$ die Diskontierungsfunktion im Zeitpunkt t bezeichnet. Das Intervall $[t, T^*]$ bezeichnet den zu betrachtenden Zeitraum.
- (ii) Als Kassazins (Spot Rate) wird der Zinssatz $y(t, T)$ bezeichnet, der zum Zeitpunkt t für eine risikolose Anlage bei stetiger Verzinsung für den Zeitraum von t bis T vereinbart werden kann.

¹siehe auch [14], S. 1147

Es gilt:

$$\begin{aligned} B(t, T)e^{y(t, T)(T-t)} &= 1 \\ \Leftrightarrow B(t, T) &= e^{-y(t, T)(T-t)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow y(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T-t}. \quad (1.2)$$

Die Funktion $y(t, \cdot) : [t, T^*] \rightarrow [0, 1]$ wird als Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t bezeichnet.

- (iii) Als stetiger Forwardzins $f_t^{\tau, T}$ wird derjenige Zinssatz bezeichnet, der in t für eine zukünftige Anlage bei stetiger Verzinsung für den Zeitraum τ bis T vereinbart werden kann.

Entsprechend wird die Funktion $f(t, \tau, \cdot) = f_t^{\tau, \cdot} : [\tau, T^*] \rightarrow [0, 1]$ als Forwardzinskurve zum Zeitpunkt t mit Startdatum τ bezeichnet.

Lemma 1.2 (Vgl. [4], S. 12)

Die Diskontierungskurve, die Zinsstrukturkurve und die Forwardzinskurve beinhalten in einem arbitrage-freien Markt dieselben Informationen und es gilt ferner

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B(t, \tau)e^{-f_t^{\tau, T}(T-\tau)} \\ \Leftrightarrow f_t^{\tau, T} &= -\frac{\ln B(t, T) - \ln B(t, \tau)}{T-\tau}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Beweis:

Aus Gleichung (1.2) ist direkt ersichtlich, dass die Diskontierungskurve und die Zinsstrukturkurve dieselben Informationen enthalten.

Die Gleichung (1.3) lässt sich mit Hilfe des No-Arbitrage-Prinzips folgern:

Dazu seien drei endliche Zeitpunkte $t < \tau < T$ gegeben.

Strategie A: Anlage eines Nominals $N = 1$ in dem Zeitraum von t bis T zum stetigen Kassa-Zinssatz $y(t, T)$

Strategie B: Anlage eines Nominals $N = 1$ in dem Zeitraum von t bis τ zum stetigen Kassa-Zinssatz $y(t, \tau)$. Anschließend Anlage des Nominals und des Zinsertrags für den Zeitraum τ bis T zum stetigen Forwardzinssatz $f_t^{\tau, T}$.

Beide Strategien besitzen dasselbe Ausgangskapital N und zwischenzeitlich wird kein Geld entnommen. Des Weiteren sind beide Strategien risikolos, da die Zahlungshöhe in T für beide Strategien in t bekannt ist. Sie entsprechen somit duplizierenden Handelsstrategien. Entsprechend müssen beide Strategien in T dieselbe Auszahlungshöhe haben, da ansonsten eine Arbitrage-Möglichkeit gegeben ist. Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
e^{y(t,T)(T-t)} &= e^{y(t,\tau)(\tau-t)} e^{f_t^{\tau,T}(T-\tau)} \\
\Leftrightarrow e^{f_t^{\tau,T}(T-\tau)} &= \frac{e^{-y(t,\tau)(\tau-t)}}{e^{-y(t,T)(T-t)}} \\
\Leftrightarrow e^{f_t^{\tau,T}(T-\tau)} &\stackrel{(1.1)}{=} \frac{B(t,\tau)}{B(t,T)}.
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt auch die Gleichung (1.3) und damit die Behauptung.

□

In dem Zinsbuch eines Kreditinstituts befinden sich alle zinssensitiven Geschäfte. Zu den zinssensitiven Geschäften gehören unter anderem die Spareinlagen der Kunden, Forderungen und Verbindlichkeiten aus dem Interbankenhandel, ausgegebene Darlehen und Anleihen, sowie Zinsderivate. Für die Ertrag- und Risikosteuerung des Zinsbuchs kann das Steuerungskonzept der barwertige Zinsbuchsteuerung angewendet werden. Menninghaus hat in seinem Artikel (siehe [14], S. 1149) fünf Prozessschritte dieses Konzeptes identifiziert:

- ▷ 1. Schritt: Cashflow-Prognose des zinssensitiven Geschäftes
- ▷ 2. Schritt: Strukturanalyse und Bewertung
- ▷ 3. Schritt: Performance und Risikostatus
- ▷ 4. Schritt: Risikolimitierung und Steuerungsmaßnahmen
- ▷ 5. Schritt: Ex-post-Analyse und Risikoreporting

1. Schritt: Cashflow-Prognose des zinssensitiven Geschäftes

Jedes zinssensitive Geschäft generiert auf der Aktiv- und auf der Passivseite einen Zahlungsstrom.

Definition 1.3

Eine reellwertige Folge $(Z_t(n))_{n \in \mathbb{N}}$ heißt deterministischer Zahlungsstrom an dem Analysestichtag t , falls $Z_t(n) \geq 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Für jedes zinssensitive Geschäftes muss nun, bezogen auf den Analysestichtag, ein entsprechender Zahlungsstrom über die gesamte Laufzeit bestimmt werden. Die zinssensitiven Geschäftes unterscheiden sich jeweils in der Art und Dauer der Kapital- und der Zinsbindung. So sind zum Beispiel bei ausgegebenen Sparbriefen die Zins- und die Kapitalbindung über die gesamte Laufzeit fixiert und somit zum Analysestichtag vollständig bekannt. Bei Fixzinskrediten mit Kündigungsrecht ist dagegen lediglich der Zins fixiert und die Kapitalbindung unbestimmt. Für Spareinlagen auf Tagesgeld-Konten sind nicht nur die Zinsen variabel, sondern auch die Kapitalbindung variabel, da ein tägliches Kündigungsrecht des Kunden besteht. Entsprechend ist für viele Geschäftes lediglich eine Prognose des Cashflows möglich. In der Theorie und in der Bankpraxis sind dafür verschiedene Modelle entwickelt worden, die je nach Art der Zins- und Kapitalbindung eingesetzt werden. Eine Beschreibung dieser Modelle findet sich u.a. in [25] auf den Seiten 55 bis 85. Neben der Prognose von Zahlungsströmen ist es gegebenenfalls notwendig, Zahlungen, die innerhalb einer bestimmten Betrachtungsperiode (z.B. ein Jahr) anfallen, auf das entsprechende Periodenende zu mappen.

Für die Steuerung des Zinsrisikos sind insbesondere Geschäftes mit variabler Zinsbindung und einer fixen Kapitalbindung von Bedeutung. Da der Zinssatz sich während der vereinbarten Laufzeit verändern kann, benötigen diese Geschäftes eine Prognose der zukünftigen Zinszahlungen. In der Praxis dient für diese Art von Geschäftes (siehe [25], S. 57) die aktuelle Zinskurve als Grundlage der Prognose. Dies bedeutet, dass die variablen Zinszahlungen über die gesamte Laufzeit als konstant angenommen werden. Bei der nächsten vereinbarten Zinsanpassung erfolgt eine Anpassung des gesamten Zahlungsstroms auf Grundlage des zu dem Zeitpunkt vorherrschenden Zinsniveaus (siehe auch Abbildung 1.1 auf Seite 7). Auf dem ersten Blick erscheint dies nicht konsequent, da in Definition 1.1 der Forwardzinssatz ein-

geführt worden ist. Wird der Forwardzinssatz als Grundlage der Prognose in dem Kontext der barwertigen Zinsbuchsteuerung verwendet, so wird ein systematischer Fehler vollzogen. Dies liegt an den impliziten Eigenschaften der Forwardzinsen und wird im folgenden Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 1.4

Es sei folgende (steile) Zinskurve in $t = 0$ gegeben:

Restlaufzeit in Jahren	1	2	3	4
stetiger Kassazins in %	2	3	3,5	4

Ist ein arbitrage-freier Markt vorausgesetzt, so lassen sich mit Lemma 1.2 daraus die zugehörigen Forwardzinssätze berechnen:

Forwardzinssatz	$f_0^{0,1}$	$f_0^{1,2}$	$f_0^{2,3}$	$f_0^{3,4}$
Zinssatz in %	2	4	4,5	5,5

Die berechneten Forwardzinsen steigen im Zeitverlauf stark an. Würden diese Zinsen als Prognose des Cashflows für eine jährlich sich wiederholende Kreditaufnahme verwendet werden, so würden deutlich zu hohe Refinanzierungskosten angesetzt und eine systematische Fehlprognose verwendet. Ein entsprechender Vorteil einer kurzfristigen Refinanzierung bei einer steilen Zinskurve wird durch diese fehlerhafte Prognose nicht erkannt. Aus diesem Grund ist die aktuelle Zinsstrukturkurve als Grundlage der Prognose für Geschäfte mit variabler Zinsbindung und einer fixen Kapitalbindung zu verwenden.

Zu der Klasse der Geschäfte mit variabler Zins- und fixer Kapitalbindung gehören unter anderem die *Floating Rate Notes* (FRN). *Floating Rate Notes* werden über eine bestimmte Laufzeit T abgeschlossen. Innerhalb dieser Laufzeiten werden zu bestimmten Zahlungsterminen, den sogenannten *payment dates*, verschiedene Kuponzahlungen geleistet. Diese Kuponzahlungen sind allerdings nicht fix, sondern werden an mehreren Terminen (*reset dates*) anhand eines Referenzzinssatzes festgelegt. In der Regel liegt dieser Termin am Ende einer Fixingperiode und fällt damit mit dem Zahlungstermin der vorherigen Periode überein. Meist wird der Referenzzins mit einem festen Zinsauf- oder abschlag (*Floating Spread*) vergrößert bzw. verkleinert.

Dieser *Floating Spread* richtet sich dabei nach der Bonität des Schuldners (*Bonitäts-spread*). Während der gesamten Laufzeit des Floaters bleibt dieser Spread konstant und wird nicht mit angepasst. Das Refinanzierungsrisiko der Fristentransformation kann somit beseitigt werden (siehe Tabelle 0.2).

Beispiel 1.5

Ein Kreditinstitut vergibt ein endfälliges Darlehen mit einer Laufzeit von 3 Jahren, Kredithöhe 100.000,00 EUR und jährlichen Kuponzahlungen. Das Kreditinstitut möchte diesen Kredit am Kapitalmarkt refinanzieren. Dafür stehen zwei Strategien zur Auswahl:

Strategie A: 75% der Kredithöhe wird durch ein endfälliges Darlehen über die Laufzeit von 3 Jahren refinanziert (fristenkongruente Refinanzierung). Der restliche Betrag wird durch eine 6-Monats FRN mit einer Laufzeit von drei Jahren und dem risikolosen Geldmarktsatz mit Restlaufzeit von sechs Monaten als Referenzzins refinanziert. Dies bedeutet, dass während der Laufzeit alle sechs Monate eine Zinsanpassung durchgeführt wird. Als *Floating Spread* dient die Refinanzierungskurve des Kreditinstituts bei Abschluss der FRN.

Strategie B: 50% der Kredithöhe wird mit Hilfe einer 3-Monats FRN und 50% der Kredithöhe mit einer 1-Jahres FRN refinanziert. Als *Floating Spread* dient die Refinanzierungskurve des Kreditinstituts bei Abschluss der FRN.

Die Abbildung 1.1 zeigt beispielhaft die zum Analysestichtag prognostizierten Cashflowprofile für die Strategien A und B. Die Cashflows beinhalten auf der Aktivseite die festen Zinserträge aus dem endfälligen Darlehen. Auf der Passivseite stehen die risikolosen Zinsaufwendungen (fix und variabel) mit den bonitätsabhängigen Aufschlägen. Es ist ersichtlich, dass das Cashflowprofil der Strategie B eine deutlich größere Unsicherheit beinhaltet als das Profil der Strategie A. Die Strategie B ist wesentlich stärker von einer Veränderung der Zinsstrukturkurve betroffen. Dies kann sich für das Kreditinstitut zu einem Vorteil entwickeln, falls die kurzfristigen Zinsen im Zeitverlauf sinken. Steigen die kurzfristigen Zinsen jedoch an, so kann das Kreditinstitut durch die Strategie B deutliche Verluste erwirtschaften. Entsprechend ist ein Steuerungskonzept notwendig, welches zum einen das Risiko und zum anderen die Ertragskraft einer Strategie erfasst und in ein Verhältnis setzt.

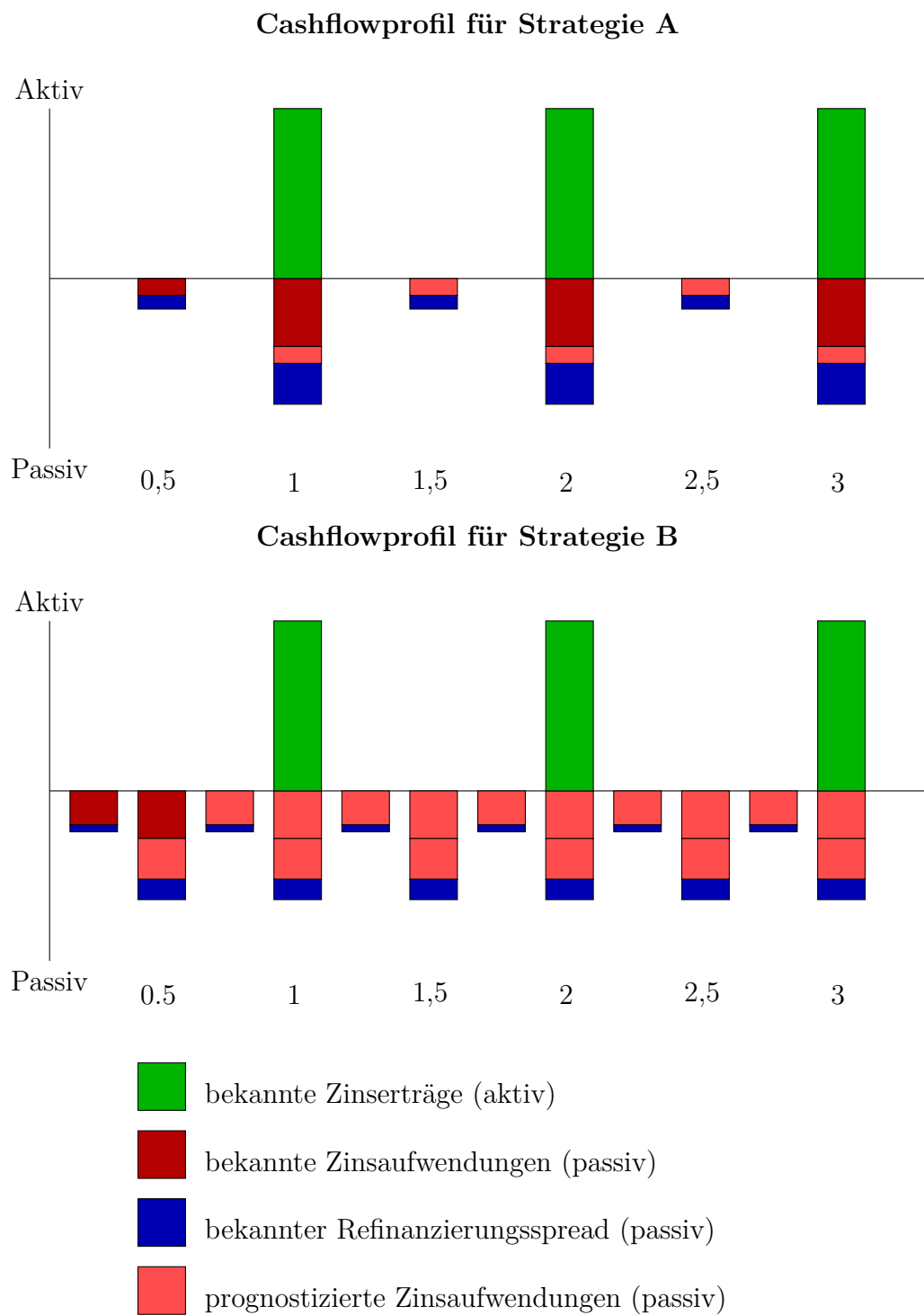


Abbildung 1.1.: Cashflowprofile der Strategien A und B (beispielhaft)

In der barwertigen Zinsbuchsteuerung werden in der Regel nicht Einzelgeschäfte gesondert begutachtet. Es werden vielmehr gleichartige Geschäfte zusammengefasst und ein gemeinsamer Cashflow betrachtet. Bevor im zweiten Schritt die Bewertung der Cashflows durchgeführt wird, müssten diese in einem Zwischenschritt aggregiert werden.

2. Schritt: Strukturanalyse und Bewertung

Zur Bewertung von Cashflows bietet sich das Barwertkonzept (vgl. [19], S. 7) an. Dabei werden die Zahlungen in den verschiedenen Zeitpunkten mit Hilfe von Diskontfaktoren auf den Analysestichtag t diskontiert. Dadurch wird der gegenwärtige Wert der zukünftigen Zahlungen bestimmt. Des Weiteren ist es möglich Zahlungsströme zu vergleichen und zu bewerten.

Es gilt folgende allgemeine Berechnungsformel für den Barwert eines Geschäftes zum Analysestichtag t

$$BW_t = \sum_{i=0}^n \left[\left(B^{aktiv}(t, t_i) \cdot Z_t^{aktiv}(t_i) \right) - \left(B^{passiv}(t, t_i) \cdot Z_t^{passiv}(t_i) \right) \right], \quad (1.4)$$

wobei $Z_i(t_i)$ die Höhe einer prognostizierten aktivischen bzw. passivischen Zahlung im Zeitpunkt t_i bezeichnet und $B(t, t_i)$ den zugehörigen Diskontierungsfaktor.

Da in dieser Arbeit das Ausfallrisiko nicht berücksichtigt wird, ist der Zahlungstrom auf der Aktiveseite risikolos, welcher sich mit der risikolosen Diskontierungsfunktion $B(t, \cdot) : [t, T^*] \rightarrow [0, 1]$ diskontieren lässt. Entsprechend ist $B^{aktiv}(t, t_i) = B(t, t_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Je nachdem welche Arten von Fristentransformation das Kreditinstitut durchführt (vgl. Tabelle 0.2) und ob die Refinanzierung am Kapitalmarkt erfolgt, müssen die eigenen laufzeitspezifischen Refinanzierungskosten berücksichtigt werden. Diese Refinanzierungskosten können entweder bei der Bestimmung des passivischen Diskontfaktors oder bei der Prognose des Zahlungsstromes $\left(Z_t^{passiv}(t_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ einbezogen werden.

Führt das Kreditinstitut ausschließlich eine Zinsfristentransformation durch, so sind die Refinanzierungskosten für die gesamte Laufzeit bekannt und können bei der Prognose des Zahlungsstromes ohne Probleme berücksichtigt werden.

Die allgemeine Bewertungsgleichung aus (1.4) lässt sich entsprechend wie folgt vereinfachen:

$$BW_t = \sum_{i=0}^n B(t, t_i) \cdot (Z_t^{aktiv}(t_i) - Z_t^{passiv}(t_i)). \quad (1.5)$$

Aus der Gleichung (1.5) ist ersichtlich, dass bei einer separaten Zinsfristentransformation die Veränderung der Zinsstrukturkurve der einzige Risikofaktor ist.

Wird durch das Kreditinstitut dagegen ebenfalls eine Refinanzierungsfristentransformation durchgeführt, so wird der Barwert auch durch die veränderlichen Refinanzierungskosten beeinflusst. Infolgedessen sind die Refinanzierungskosten ein weiterer Risikofaktor, der bei der Bestimmung und Bewertung des Risikos berücksichtigt werden muss (vgl. Kapitel 4).

3. Schritt: Performance und Risikostatus

Als zentrale Steuerungsgröße der barwertigen Zinsbuchsteuerung ist im zweiten Schritt der Barwert der zinssensitiven Geschäfte identifiziert worden. Die Barwertformel (1.5) verdeutlicht, dass der Barwert zum Analysetichtag t maßgeblich von der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t abhängt. Diese Abhängigkeit betrifft zum einen die Diskontfaktoren $B(t, \cdot)$ und zum anderen die Zahlungsströme. Die Zinsstrukturkurve ist keineswegs konstant, sondern verändert sich während einer vorgegebenen Haltedauer H . Die Haltedauer H bezeichnet dabei einen Betrachtungszeitraum, der in der Regel einige Wochen oder Monate beträgt. Für das Kreditinstitut ist somit entscheidend, wie sich der Barwert nach dieser Haltedauer H entwickelt hat und inwiefern durch diese Entwicklung ein Buchverlust für das Kreditinstitut entstehen kann. Entsprechend müssen Begriffe wie Erfolg (Performance) und Risiko für den Kontext der barwertigen Zinsbuchsteuerung entwickelt werden.

Auf den ersten Blick bietet sich die absolute Barwertveränderung als Kennzahl zur Ermittlung des Erfolges (*Performance*) eines Zinsbuches an. Diese Vermutung ist jedoch nicht zutreffend. Es existiert die Möglichkeit den berechneten Barwert aus (1.5) durch die Anwendung von Tauschgeschäften (*Swaps*) tatsächlich zu realisieren und risikolos am Kapitalmarkt anzulegen.

Der Erfolg der Fristentransformation muss sich vielmehr als Überrendite im Vergleich zu der risikolosen Anlage ausdrücken.

Neben der risikolosen Verzinsung am Kapitalmarkt bieten sich zum Beispiel der Renditenindex REXP oder das Erreichen eines Mindestergebnisses ebenfalls als Vergleichsgröße an.

Bei stetiger Verzinsung gilt für die Performance

$$\begin{aligned}
 \text{Performance} &= \text{erw. Barwertveränderung} - \text{Veränderung Vergleichsgröße} \\
 &= \text{erw. Barwertveränderung} - \text{risikol. Barwertveränderung} \\
 &= E[\Delta BW_{t,H}] - (BW_t \cdot e^{y(t,t+H)H} - BW_t) \\
 &= E[BW_{t+H}] - BW_t \cdot e^{y(t,t+H)H},
 \end{aligned}$$

wobei BW_t den Cashflow-Barwert zum Startzeitpunkt t und BW_{t+H} den unsicheren Cashflow-Barwert am Ende der Haltedauer $0 \leq H \leq T^* - t$ bezeichnet.

In diesem Zusammenhang kann der Begriff des Zinsrisikos konkretisiert werden. Als Risikopotential der zinssensitiven Geschäfte wird die Möglichkeit einer negativen Performance aufgefasst. Um dieses Risikopotential abzuschätzen, hat sich in der Bankpraxis das Konzept des *Value at Risk* (VaR) durchgesetzt.

Das Risiko einer negativen Performance wird in der folgenden Definition des *Value at Risk* versucht zu quantifizieren.

Definition 1.6 (in Anlehnung an [10], S. 71 f. und [11], S. 22)

Der in t bestimmte *Value at Risk* $VaR(\alpha, H)_t$ ist als diejenige Wertminderung des Zinsbuch-Cashflows im Vergleich zur risikolosen Anlage definiert, die mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit α während einer bestimmten Haltedauer H nicht überschritten wird.

Für die formale Definition bezeichne F die Verteilungsfunktion der unsicheren Cashflow-Barwerte am Ende der Haltedauer H und F^{-1} deren Pseudo-Inverse.

Der in dieser Arbeit verwendete VaR-Begriff ergibt sich dann durch

$$VaR(\alpha, H)_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} BW_t \cdot e^{y(t,t+H)H} - F^{-1}(\alpha), & \text{falls } F^{-1}(\alpha) < BW_t \cdot e^{y(t,t+H)H} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um die Verteilung der Cashflow-Barwerte am Ende der Haltedauer H und somit auch den $VaR(\alpha, H)_t$ bestimmen zu können, existieren verschiedene Ansätze in der Bankpraxis: (1) die analytische Varianz/Kovarianz-Methode, (2) die Historische Simulation und (3) die Stochastische Simulation.

Die Varianz/Kovarianz-Methode wird meist in Verbindung mit einer Normalverteilungsannahme für die zugrundeliegende Zufallsgröße verwendet. Dies ist im Kontext der barwertigen Zinsbuchsteuerung nicht ohne weiteres möglich. Eine detaillierte Beschreibung der weiteren Ansätze (2) und (3) befindet sich im Kapitel 3. Speziell die Historische Simulation wird vielfach in Kreditinstituten für die barwertigen Zinsbuchsteuerung verwendet.

Es darf an dieser Stelle nicht verschwiegen werden, dass es gegen die Verwendung des *Value at Risk* durchaus Einwände in der Theorie gibt. Dies liegt vor allem daran, dass der *Value at Risk* für beliebige Verteilungen den Anforderungen eines Risikomaßes nicht genügt. Dies kann insbesondere im Kontext der Performance-Messung zu Fehlanreizen führen.² Dennoch hat sich die Verwendung des *Value at Risk* in der Bankpraxis durchgesetzt. Dies liegt insbesondere daran, dass der *Value at Risk* einfach zu interpretieren ist und von der Bankenaufsicht (siehe [25], S. 85 ff.) in vielen Bereichen gefordert wird.

Für die Beurteilung des Cashflowprofils stehen nun zwei Kriterien zur Verfügung. Zum einen die Überrendite im Vergleich zur risikolosen Verzinsung des Barwertes (Performance-Messung) und zum anderen der *Value at Risk* als Maß für das Risiko des Cashflow-Profiles. Mit diesen beiden Kriterien lässt sich nun ein Risk-Return-Diagramm erstellen. Eine exemplarische Darstellung dieser Positionierung im Risk-Return-Diagramm befindet sich in Abbildung 1.2 auf Seite 13.

Es besteht zusätzlich die Möglichkeit eine risikoadjustierte Performance-Kennzahl zu bestimmen. Dafür wird die RORAC-Kennziffer (*return on risk adjusted capital*) durch

$$\begin{aligned} \text{RORAC} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Performance}}{\text{Risiko}} \\ &= \frac{E[BW_{t+H}] - BW_t \cdot e^{y(t,t+H)H}}{VaR(\alpha, H)_t} \end{aligned}$$

definiert.

²Für weitere Ausführungen siehe [11], S. 46 bis S. 126.

Um die Aussagekraft der RORAC-Kennziffer zu gewährleisten, müssen für die Berechnung des *Value at Risk* und der Performance einheitliche Haltedauern H zugrunde gelegt werden.

4. Schritt: Risikolimitierung und Steuerungsmaßnahmen

Nachdem im dritten Schritt der Ist-Zustand des gesamtbankbezogenen Cashflows bestimmt worden ist, sollen in dieser Phase der barwertigen Zinsbuchsteuerung Steuerungsmaßnahmen zur Performance-Optimierung abgeleitet werden. Zuerst ist jedoch zu überprüfen, ob risikoreduzierende Maßnahmen durchzuführen sind. Dies ist dann der Fall, wenn das im Rahmen der Gesamtbanksteuerung vorgegebene Risikolimit überschritten wird.³

Steht noch ausreichend freies Risikokapital⁴ zur Verfügung, so kann dieses zur Veränderung des Cashflowprofils eingesetzt werden. Ziel dieser Maßnahmen ist es, den Cashflow „effizient“ im Risk-Return-Diagramm bzw. am Markt zu positionieren. Dazu muss zuerst ein Effizienz-Begriff (vergleichbar mit dem μ - σ -Prinzip in der Portfolio-Selektion) definiert werden:

Definition 1.7

Der Cashflow A ist effizient gegenüber Cashflow B (bzw. B ist ineffizient gegenüber A) genau dann, wenn

$$\text{Performance}_A \geq \text{Performance}_B \quad \text{und} \quad \text{VaR}_A(\alpha, H)_t \leq \text{VaR}_B(\alpha, H)_t$$

Zwei beliebige Cashflows A und B müssen nicht zwingend effizient bzw. ineffizient untereinander sein. Man bezeichnet sie dann zueinander indifferent.

Das Kreditinstitut wird einen effizienten Cashflow gegenüber einem ineffizienten Cashflow vorziehen. Unter Berücksichtigung des Risikolimits kann durch gezielte Steuerungsmaßnahmen der Cashflow im RORAC-Diagramm neu positioniert werden. Dieses Vorgehen wird als „aktives“ Management bezeichnet und wird vor

³Auf eine Ausgestaltung eines Risikolimitierungssystems wird an dieser Stelle verzichtet (siehe dazu u.a. [10], S. 266 ff.).

⁴Kreditinstitute müssen einige Transaktionen (z.B. Kreditvergabe) mit entsprechendem Eigenkapital hinterlegen. Durch diese Hinterlegung sollen die Risiken einer Transaktion zu einem bestimmten Sicherheitsniveau abgedeckt werden. Dieser zu hinterlegende Kapitalbetrag wird Risikokapital genannt. In Deutschland wird die Berechnung in der Solvabilitätsverordnung geregelt.

allem dann angewandt, wenn ein selbstgesetzter Ziel-RORAC erreicht werden soll. Im Gegensatz dazu steht das „passive“ Management. In diesem Fall orientiert sich das Kreditinstitut an einer adäquaten Benchmark mit dem Ziel diese zu duplizieren bzw. deren RORAC zu erreichen.⁵ In beiden Fällen ist jedoch klar, dass die veränderten Cashflows (und entsprechende Benchmarks) in die Simulation mit einbezogen werden müssen.

5. Schritt: Ex-post-Analyse und Risikoreporting

Ein für die Bankpraxis wesentlicher Schritt stellt das regelmäßige Risikoreporting dar. Dadurch ist es möglich, dass die Entscheidungsträger zeitnah einen Überblick über den Risikostatus des Zinsbuches erhalten und somit Steuerungsmaßnahmen ableiten können. Ergänzend sollten Krisentests oder Worst Case-Szenarien durchgeführt werden, die die Abschätzung des Risikostatus kompletieren. Des Weiteren ist es im Rahmen eines Backtestings zwingend notwendig die berechneten Werte des *Value at Risk* und des Cashflow-Profiles ex-post auf ihre Qualität hin zu untersuchen.

Positionierung von Cashflows im Risk-Return-Diagramm

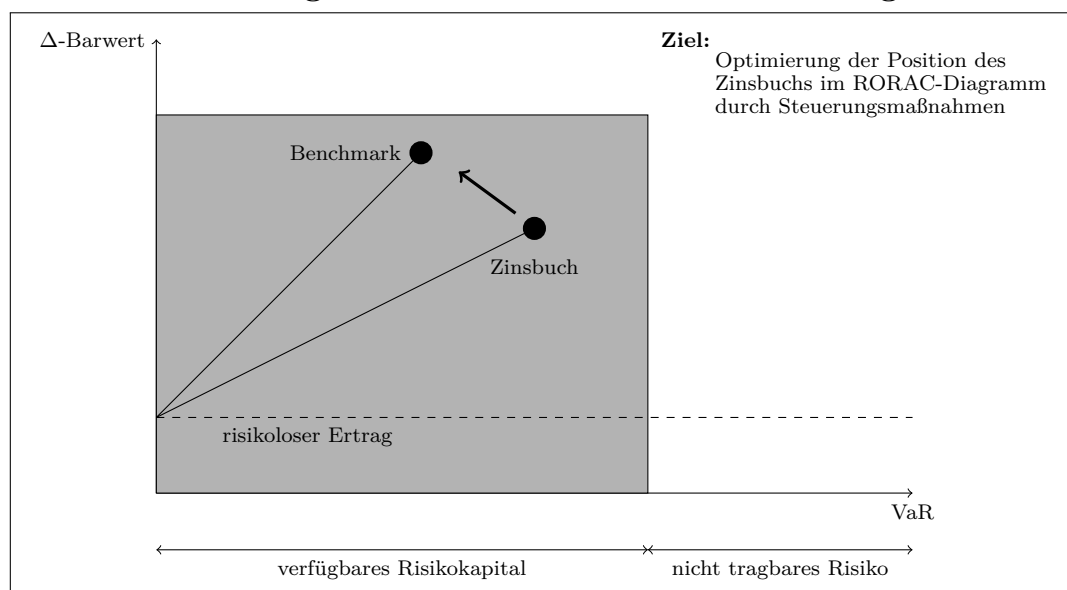


Abbildung 1.2.: eigene Darstellung in Anlehnung an [25], S. 92

⁵Zur Definition und Verwendung von geeigneten Benchmarks sei an dieser Stelle auf [29] verwiesen.

2. Das Zinsstrukturmodell

2.1. Besonderheiten der Zinsmodellierung

Während es mit dem Black-Scholes-Modell einen weltweit akzeptierten Marktstandard zur Modellierung von Aktienkursen gibt, so sucht man diesen in der Theorie der Modellierung von Zinsentwicklungen vergebens. Dies hat vielfältige Gründe:

- Vielzahl von möglichen Modellierungsgrößen:
 - (i) Short-, Spot-, Forward-Raten oder Bondpreise
 - (ii) theoretische oder am Markt beobachtbare Größen
- Spezielle Eigenschaften der Zinsen:
 - (i) Art der Versinzung (diskret, stetig, linear)
 - (ii) Nicht-Negativität der Zinsen
 - (iii) Mean Reverting Eigenschaft des Zinsenprozesses
 - (iv) beschränkte Varianz des Zinsprozesses
- Spezielle Eigenschaften der Diskontfaktoren:
 - (i) Pull-to-Par-Effekt, d.h. zum Ende der Laufzeit nähert sich der Wert dem Nennwert an
 - (ii) $B(\tau, T) = 1$ f.a. $\tau \geq T$
- Zinstrukturkonformität, d.h. die im Modell bestimmte aktuelle Zinsstrukturkurve stimmt mit der am Markt beobachteten überein
- Arbitragefreiheit

Für grundlegende Begriffe, Zusammenhänge und Besonderheiten des Zinsmarktes sei an dieser Stelle auf [19], S. 1 bis 48 verwiesen. Dort wird auch auf die Problematik der Zinsberechnungsmethoden und der *Daycount Convention* eingegangen.

Aus Vereinfachungsgründen wird in dieser Arbeit von der *30/360-Daycount Convention* ausgegangen, d.h. es werden generell 30 Tagen pro Monat und somit 360 Tage in einem Jahr angenommen.

Eine Übersicht über die wichtigsten Arten von Zinsstrukturmodellen und deren bekannteste Vertreter wird in der Abbildung 2.1 gegeben.

Übersicht Klassierung Zinsmodelle

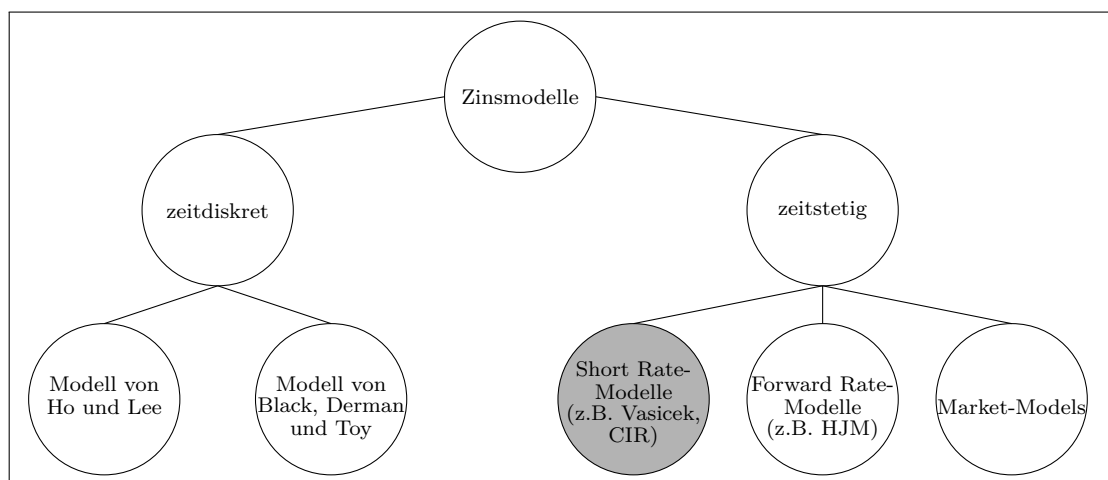


Abbildung 2.1.: eigene Darstellung nach [4] (Vorlesungsfolien)

Es stellt sich nun die Frage, welches dieser unterschiedlichen Zinsmodelle für die Fragestellung der barwertigen Zinsbuchsteuerung geeignet ist. Das für diese Arbeit verwendete Zinsmodell soll mehreren Ansprüchen genügen:

- (1) die gesamte Zinsstrukturkurve soll modelliert werden können,
- (2) das Modell soll zeitstetig und zinsstrukturkonform sein,
- (3) mathematisch gut „handbar“ sein,
- (4) verschiedene Diskontfaktoren von unterschiedlicher Fälligkeit sollen nicht perfekt korreliert sein,
- (5) eine Implementierbarkeit in Excel-VBA oder C++ soll gegeben sein.

Für diese Ansprüche bieten sich die sogenannten Short Rate-Modelle an.

2.2. Einführung in die Theorie der Short Rate-Modelle

In dem Kontext der zeitstetigen Zinsmodelle versteht man unter der Short Rate den Zinssatz, den man für eine risikolose Anlage in einem infinitesimal kurzem Zeitintervall bezieht. Die Klasse der Short Rate-Modelle versucht aus dieser Short Rate die gesamte Zinsstrukturkurve abzuleiten.

Definition 2.1 (Vgl. [5], S. 2)

Zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichne $G(t)$ den Wert des risikolosen Geldmarktkontos. Es wird davon ausgegangen, dass $G(0) = 1$ und das Geldmarktkonto der Dynamik

$$dG(t) = r(t)G(t)dt \tag{2.1}$$

folgt, wobei $r(t)$ ein positiver Prozess ist. Dieser Prozess wird Short Rate genannt.

In vielen Modellen für die Bewertung von Aktienderivaten wird die Short Rate als deterministische Funktion angenommen. In dem Black-Scholes-Modell wird sogar $r(t) = \text{const}$ vorausgesetzt. Dies führt dazu, dass für geeignetes $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Geldmarktkonto durch $G(t) = e^{\rho t}$ beschrieben werden kann.

In der Realität ist die Zinsentwicklung jedoch keinesfalls deterministisch. Vielmehr unterliegt sie zufälligen Schwankungen. Zur Abbildung dieser Schwankungen versuchen die Short Rate-Modelle die Dynamik der Short Rate mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung zu beschreiben. Es existiert eine Vielzahl verschiedener Ansätze, die sich in der Art der Differentialgleichung, der Anzahl der stochastischen Faktoren in der Differentialgleichung und dem bei der Modellierung verwendeten Wahrscheinlichkeitsmaß unterscheiden. Eine Auswahl findet sich z.B. bei [19], S. 87ff. oder [5], S. 57.

Im Folgenden wird zur Verdeutlichung der Systematik und der Idee der Short Rate-Modelle das 1-Faktor-Modell von Vasicek vorgestellt. Es gehört zu den ersten Short Rate-Modellen, welche sich in der Praxis durchgesetzt haben (siehe dazu die Originalarbeit [27]) Das Zinsstrukturmodell, welches in dieser Arbeit Verwendung findet, baut auf diesen Überlegungen auf.

Es wird ein kontinuierliches Finanzmarktmodell mit endlichem Zeithorizont $[0, T^*]$ betrachtet. Weiter sei $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem tatsächlich am Markt beobachtbaren Wahrscheinlichkeitsmaß (*real world measure*) $\mathbb{P}$.

Sei $W = (W(t))_{t \geq 0}$ ein Standard Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}$. Dann bezeichne $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ die von W erzeugte, vollständige Filtration, die die *usual conditions* erfüllt (für weitere Ausführungen siehe dazu [12], S. 10 und [16], Abschnitt (1.3) und (3.6)).

Vasicek nimmt in seinem Modell an, dass sich unter dem Maß $\mathbb{P}$ die Dynamik des Short Rate-Prozesses mit Hilfe der Differentialgleichung

$$dx(t) = \kappa(\theta - x(t))dt + \eta dW(t) \quad \text{mit } x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

beschreiben lässt, wobei κ, θ, η und x_0 positive Konstanten und $W = (W(t))_{t \geq 0}$ ein Standard Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}$ ist.

Die Gleichung (2.2) lässt die Vermutung zu, dass der zugrundeliegende Prozess die sogenannte *Mean Reverting Eigenschaft* besitzt. Dies bedeutet, dass der Erwartungswert des Short Rate-Prozesses, bei beschränkter Varianz, für $t \rightarrow \infty$ gegen eine Konstante (*Mean Reversion Level*) konvergiert (vgl. [19], S. 90). In diesem Fall ist θ das langfristige Mittel, an das der Prozess gezogen wird. Diese Anziehung wird mit der Intensität κ , dem sogenannten *Mean Reversion Speed*, durchgeführt. Durch die vorhandene stochastische Komponente ($\eta \neq 0$) wird diese Anziehung allerdings gestört. Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) wird auch Ornstein-Uhlenbeck-Prozess genannt.

Für den Beweis des nachfolgenden Satzes besitzt die Theorie der selbstfinanzierenden Portfolios eine wichtige Rolle. Diese grundlegenden Begriffe aus dem Bereich der Portfolio-Modellierung werden in der folgenden Definition kurz eingeführt. Für weitere Ausführungen sei an dieser Stelle auf [3], Kapitel 6 und [16], Abschnitt 4.1 verwiesen.

Definition 2.2

Es sei ein kontinuierliches Finanzmarktmodell mit endlichem Horizont T und N verschiedenen Finanzgütern (*assets*) gegeben. Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ die, den Informationsverlauf beschreibende Filtration, welche den *usual conditions* genügt.

In diesem Kontext sind folgende Notationen von zentraler Bedeutung:

- (i) Das reellwertige, adaptierte Semi-Martingal $(S_j(t))_{0 \leq t \leq T}$ f.a. $j = 1, \dots, N$ beschreibe die Preisentwicklung des j -ten Finanzgutes. Entsprechend wird $(S(t))_{0 \leq t \leq T} = (S_1(t), \dots, S_N(t))_{0 \leq t \leq T}^T$ als N -dimensionaler Preisprozess bezeichnet.
- (ii) Eine Portfolio-Strategie (Portfolio) $(h(t))_{0 \leq t \leq T}$ ist ein $\mathcal{F}_t$ -adaptierte, previsible, N -dimensionaler, reellwertiger Prozess.
- (iii) Der Wertprozess $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ eines Portfolios ist definiert durch

$$V_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N h_i(t) S_i(t) = h(t)^T S(t) \text{ f.a. } t \in [0, T].$$

- (iv) Ein Portfolio ohne Entnahmen während der Haltedauer $[0, T]$ heißt selbstfinanzierend, wenn der Wertprozess V folgende Bedingung genügt:

$$dV_t = \sum_{i=1}^N h_i(t) dS_i(t) = h(t)^T dS(t). \quad (2.3)$$

Vasicek macht für sein Modell zwei wesentliche Annahmen. Er geht davon aus, dass sich die Diskontierungsfunktion für festes T (siehe Definition 1.1) als stetige, zweimal differenzierbare Funktion von t und $x(t)$ auffassen lässt, dass heißt $B(t, T) = F^T(t, x(t))$. Eine weitere wesentliche Annahme wird in dem Beweis an passender Stelle geliefert.

Theorem 2.3 (Vgl. [21], S. 12)

Es existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes, risikoneutrales Martingalmaß $\mathbb{P}^$ und eine Konstante μ , so dass*

$$dx(t) = \kappa(\mu - x(t))dt + \eta d\tilde{W}(t) \quad (2.4)$$

gilt, wobei $\tilde{W}$ ein Standard Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^$ ist.*

Beweis:

Im ersten Schritt wird die Dynamik der Bondpreise $B(t, T)$ unter $\mathbb{P}$ bestimmt. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $F = F^T(t, x(t))$ und F_t, F_x und F_{xx} bezeichne die partiellen Ableitungen der Funktion. Eine Anwendung der Ito-Formel liefert

$$\begin{aligned}
 dB(t, T) &= dF^T(t, x(t)) \\
 &= F_t dt + F_x dx(t) + \frac{1}{2} F_{xx} \eta^2 dt \\
 &= F_t dt + F_x [\kappa(\theta - x(t)) dt + \eta dW(t)] + \frac{1}{2} F_{xx} \eta^2 dt \\
 &= F_t dt + F_x \kappa(\theta - x(t)) dt + \frac{1}{2} F_{xx} \eta^2 dt + F_x \eta dW(t) \\
 &= B(t, T) [\alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t)], \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \alpha(t, T) &= \frac{F_t + F_x \kappa(\theta - x(t)) + \frac{1}{2} F_{xx} \eta^2}{F} \\
 \sigma(t, T) &= \frac{F_x \eta}{F}.
 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird die Arbitragefreiheit des Marktes ausgenutzt, um den Marktpreis des Risikos (*market price of risk*) zu bestimmen. Dazu wird ein risikoloses, selbstfinanzierendes Portfolio gebildet. Zum Zeitpunkt t besteht das Portfolio aus $h_1(t)$ Anteilen eines Zero-Bonds mit Laufzeit T und $h_2(t)$ Anteilen eines Zero-Bonds mit Laufzeit S , wobei $0 < S < T \leq T^*$. Nach Definition 2.2 ist der Wertprozess des Portfolios gegeben durch $V_t = h_1(t)B(t, T) + h_2(t)B(t, S)$.

Die Gleichung (2.3) liefert die Bedingung, unter welcher das Portfolio selbstfinanzierend ist. Entsprechend gilt für die Dynamik des Wertprozesses:

$$\begin{aligned}
 dV_t &\stackrel{(2.3)}{=} h_1(t)dB(t, T) + h_2(t)dB(t, S) \\
 &= u_1(t) \frac{V_t}{B(t, T)} dB(t, T) + u_2(t) \frac{V_t}{B(t, S)} dB(t, S),
 \end{aligned}$$

wobei die relativen Portfoliogewichte durch

$$u_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_1(t)B(t, T)}{V_t} \quad \text{und} \quad u_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_2(t)B(t, S)}{V_t}$$

gegeben sind.

Das Einsetzen der vorherigen Ergebnisse führt dann zu

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_t}{V_t} &= u_1(t) \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} + u_2(t) \frac{dB(t, S)}{B(t, S)} \\
 &\stackrel{(2.5)}{=} u_1(t) [\alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)] + u_2(t) [\alpha(t, S)dt + \sigma(t, S)dW(t)] \\
 &= [u_1(t)\alpha(t, T) + u_2(t)\alpha(t, S)]dt + \underbrace{[u_1(t)\sigma(t, T) + u_2(t)\sigma(t, S)]}_{=0, \text{ da risikolos}} dW(t). \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Das Portfolio soll nicht nur risikolos, sondern auch selbstfinanzierend sein. Entsprechend müssen die relativen Portfoliogewichte die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad 1 &= u_1(t) + u_2(t) && \text{(selbstfinanziert)} \\
 \text{(II)} \quad 0 &= u_1(t)\sigma(t, T) + u_2(t)\sigma(t, S) && \text{(risikolos)}
 \end{aligned}$$

erfüllen und man erhält als Lösung dieses linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \frac{-\sigma(t, S)}{\sigma(t, T) - \sigma(t, S)} \\
 u_2(t) &= \frac{\sigma(t, T)}{\sigma(t, T) - \sigma(t, S)}.
 \end{aligned}$$

Da ein arbitragfreier Markt vorausgesetzt wird und das Portfolio risikolos und selbstfinanzierend ist, muss $V_t x(t)dt = dV_t$ sein. Ansonsten würde es in diesem Markt eine Arbitrage-Möglichkeit geben.

Diese Bedingung wird zusammen mit Gleichung (2.6) umgeformt zu

$$\begin{aligned}
 x(t)dt &= \frac{dV_t}{V_t} \\
 \Leftrightarrow x(t)dt &\stackrel{(2.6)}{=} \left[\frac{-\sigma(t, S)}{\sigma(t, T) - \sigma(t, S)} \alpha(t, T) + \frac{\sigma(t, T)}{\sigma(t, T) - \sigma(t, S)} \alpha(t, S) \right] dt,
 \end{aligned}$$

was wiederum die Gleichung

$$x(t) = \frac{-\sigma(t, S)}{\sigma(t, T) - \sigma(t, S)} \alpha(t, T) + \frac{\sigma(t, T)}{\sigma(t, T) - \sigma(t, S)} \alpha(t, S)$$

impliziert.

Wird diese Gleichheit weiter umgeformt, so erhält man die zentrale Gleichung (2.7) durch

$$\begin{aligned}
 & x(t)\sigma(t, T) - x(t)\sigma(t, S) = -\sigma(t, S)\alpha(t, T) + \sigma(t, T)\alpha(t, S) \\
 \Leftrightarrow & \sigma(t, T)[\alpha(t, S) - x(t)] = \sigma(t, S)[\alpha(t, T) - x(t)] \\
 \Leftrightarrow & \frac{\alpha(t, S) - x(t)}{\sigma(t, S)} = \frac{\alpha(t, T) - x(t)}{\sigma(t, T)}. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Die linke Seite von (2.7) ist unabhängig von T und die rechte Seite ist unabhängig von S . Somit ist es möglich für festes $T \leq T^*$ den stochastischen Prozess $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ durch

$$\lambda_t = \frac{\alpha(t, T) - x(t)}{\sigma(t, T)} \tag{2.8}$$

zu definieren.

Den durch (2.8) definierten Prozess nennt man Preisprozess des Marktrisikos.

Dieser Preisprozess des Marktrisikos wird in der Regel in einem Vasicek-Modell als konstant angenommen, e.g. $\lambda_t = \lambda < \infty$ f.a. $0 \leq t \leq T$ (siehe dazu [5], S. 61).

Dies ist die am Anfang des Beweises angesprochene, weitere wesentliche Annahme in dem Modell von Vasicek.

Definiere nun den Dichteprozess $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ durch

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \lambda_u dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_u^2 du \right). \tag{2.9}$$

Da $\lambda_t = \lambda$ als konstant angenommen wird, ist der Dichteprozess $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein $\mathbb{P}$ -Martingal (siehe dazu [16], Abschnitt 3.4) und entsprechend lässt sich nun für alle $0 \leq t \leq T$ durch $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{G}_t} = L_t$ ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ definieren, d.h.

$$\mathbb{P}^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A L_t dP \text{ für alle } A \in \mathcal{G}_t.$$

Nach dem Satz von Girsanov wird bzgl. $\mathbb{P}^*$ ein Standard Wiener-Prozess $\tilde{W}$ definiert durch

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + \lambda_t dt. \quad (2.10)$$

Es ist nun zu zeigen, dass $\mathbb{P}^*$ ein risikoneutrales Martingalmaß definiert. Dazu wird die Dynamik des Bondpreises unter $\mathbb{P}^*$ bestimmt. Dies geschieht durch Einsetzen der obigen Gleichung (2.10) in die Gleichung (2.5).

$$\begin{aligned} dB(t, T) &\stackrel{(2.10)}{=} B(t, T) \left[\alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) (d\tilde{W}(t) - \lambda_t dt) \right] \\ &= B(t, T) \left[(\alpha(t, T) - \sigma(t, T) \lambda_t) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}(t) \right] \\ &\stackrel{(2.8)}{=} B(t, T) \left[\left(\alpha(t, T) - \sigma(t, T) \frac{\alpha(t, T) - x(t)}{\sigma(t, T)} \right) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}(t) \right] \\ &= B(t, T) \left[x(t) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}(t) \right]. \end{aligned}$$

Die Dynamik der Bondpreise besitzt also nun unter $\mathbb{P}^*$ die Drift $x(t)$ (d.h. die Drift der risikolosen Anlage) und somit ist $\mathbb{P}^*$ ein risikoneutrales Martingalmaß zu $\mathbb{P}$.

Für die Dynamik des Short Rate-Prozesses $(x(t))_{t \geq 0}$ folgt entsprechend, dass

$$\begin{aligned} dx(t) &\stackrel{(2.10)}{=} \kappa (\theta - x(t)) dt + \eta (d\tilde{W}(t) - \lambda_t dt) \\ &= \kappa \left(\theta - \frac{\eta \lambda_t}{\kappa} - x(t) \right) dt + \eta d\tilde{W}(t) \\ &= \kappa (\mu - x(t)) dt + \eta d\tilde{W}(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

unter $\mathbb{P}^*$ gilt, wobei $\mu = \theta - \frac{\eta \lambda}{\kappa}$ ist.

□

Bemerkung 2.4

- (i) Durch den Übergang zu dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$ hat sich die Struktur der zugrundeliegenden stochastischen Differentialgleichung nicht geändert. Es wurde lediglich das *Mean Reversion Level* um eine vom Marktpreis des Risikos

abhängige Konstante erweitert. Die weiteren Komponenten der stochastischen Differentialgleichung bleiben dagegen unverändert. Da sich die Struktur bei dem Maßwechsel nicht verändert hat, wird in dem weiteren Verlauf dieser Arbeit die Entwicklung des Short Rate-Prozesses unter dem risikoneutralen Maß betrachtet.

- (ii) In dem betrachteten Finanzmarkt stellen die Diskontfaktoren die Basisfinanzgüter dar. Entsprechend ist $B(T, T) = 1$ hedgebar und die risikoneutrale Bewertungsgleichung vereinfacht sich zu

$$B(t, T) = E_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_t^T x(s) ds} B(T, T) \middle| \mathcal{G}_t \right] = E_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_t^T x(s) ds} \middle| \mathcal{G}_t \right]. \quad (2.12)$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.12) kann gezeigt werden, dass sich der Bondpreis sich in der Form

$$B(t, T) = C(t, T) e^{-D(t, T)x(t)} \quad (2.13)$$

darstellen lässt (siehe dazu [3], Kapitel 22), wobei $C(t, T)$ und $D(t, T)$ deterministische Funktionen sind. Diese Zinsstrukturmodelle werden der Klasse der affinen Zinsmodelle zugeordnet.

- (iii) Wesentliche Voraussetzung für das Theorem ist, dass der durch (2.8) definierte Prozess des *market price of risk* als konstant angenommen wird. Dies ist eine sehr stark vereinfachende Annahme. Es sind auch andere Annahmen denkbar, solange der entstehende Marktpreisprozess des Risikos die Novikov-Bedingung weiterhin erfüllt. Anstatt einer Konstanten μ erhält man dann allerdings einen Prozess $(\mu_t)_{t \geq 0}$. Diese Möglichkeit wird ebenfalls intensiv in der Theorie der affinen Zinsstrukturmodelle diskutiert. Um ein Verständnis für die Idee der Short Rate-Modelle zu erhalten, reicht der betrachtete Spezialfall jedoch aus.

Die risikoneutrale Bewertungsgleichung (2.12) verdeutlicht, dass für die weitere Betrachtung die Verteilungseigenschaften der Short Rate von großer Bedeutung sind. Dazu wird zuerst die stochastische Differentialgleichung (2.11) gelöst und daraus resultierend die Verteilungseigenschaften abgeleitet. Der Bondpreis wird darauf aufbauend für das tatsächlich verwendete Zinsstrukturmodell in Abschnitt 2.3.2 bestimmt.

Theorem 2.5 (Vgl. [5], S. 58)

Der Short Rate-Prozess gemäß (2.11) besitzt für jedes $s < t$ unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$ die Gestalt

$$x(t) = x(s)e^{-\kappa(t-s)} + \mu(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \eta \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u). \quad (2.14)$$

Beweis:

Um die stochastische Differentialgleichung aus (2.11) zu lösen, wird die Funktion $f : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(t, x) = e^{\kappa t} x$ definiert. Es gilt dann

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} = \kappa e^{\kappa t} x \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{\kappa t} \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 0.$$

Eine Anwendung der Ito-Formel führt entsprechend zu

$$\begin{aligned} de^{\kappa t} x(t) &= df(t, x(t)) \\ &= f_t dt + f_x dx(t) + \frac{1}{2} f_{xx} dt \\ &= \kappa e^{\kappa t} x(t) dt + e^{\kappa t} dx(t) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \kappa e^{\kappa t} x(t) dt + e^{\kappa t} [\kappa(\mu - x(t)) dt + \eta d\tilde{W}] \\ &= \kappa e^{\kappa t} \mu dt + \eta e^{\kappa t} d\tilde{W}(t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Integration der obigen Gleichung (2.15) von s bis t liefert

$$e^{\kappa t} x(t) = e^{\kappa s} x(s) + \kappa \mu \int_s^t e^{\kappa u} du + \eta \int_s^t e^{\kappa u} d\tilde{W}(u)$$

und somit ist nach entsprechender Integration

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-\kappa(t-s)} + \kappa \mu \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} du + \eta \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u) \\ &= x(s)e^{-\kappa(t-s)} + \mu(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \eta \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u). \end{aligned}$$

□

Nachdem die Gestalt des Short Rate-Prozesses unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$ im vorherigem Satz hergeleitet wurde, werden nun dessen Verteilungseigenschaften näher beleuchtet. Dazu wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 2.6 (in Anlehnung an [24], S. 149)

Sei f eine zweimal stetig-differenzierbare, reelle Funktion (d.h. $f \in L_2([s, t])$).

Dann ist $I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t f(u) d\tilde{W}(u)$ für jedes $t \geq s$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit

Erwartungswert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = \int_s^t f(u)^2 du$.

Beweis:

Die momenterzeugende Funktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist nach [1], Satz 30.2 gegeben durch

$$\psi_{\mu, \sigma^2}(\tau) = e^{\mu\tau + \frac{\tau^2 \sigma^2}{2}} \text{ für alle } \tau \in \mathbb{R}.$$

Nach [1], Satz 40.6 legt die momenterzeugende Funktion die zugrundeliegende Verteilung eindeutig fest, falls diese für jedes $\tau \neq 0$ existiert und endlich ist. Entsprechend ist zu zeigen, dass

$$E_{\mathbb{P}^*} \left[\exp \left(\tau \int_s^t f(u) d\tilde{W}(u) \right) \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \tau^2 \int_s^t f(u)^2 du \right) \quad (2.16)$$

für jedes $\tau \neq 0$ gilt.

Da f deterministisch ist, lässt sich die Gleichung (2.16) umformen zu

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}^*} \left[\exp \left(\tau \int_s^t f(u) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \tau^2 \int_s^t f(u)^2 du \right) \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & E_{\mathbb{P}^*} \left[\exp \left(\int_s^t \tau f(u) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_s^t (\tau f(u))^2 du \right) \right] = 1. \end{aligned} \quad (*)$$

Entsprechend reicht es aus, die Gleichung (*) für beliebiges $\tau \neq 0$ zu verifizieren.

Dazu definiere für $t \geq s$ den stochastischen Prozess $M(t) = \int_s^t \tau f(u) d\tilde{W}(u)$. Dieser ist nach der Konstruktion des stochastischen Integrals ein Martingal. Ferner erfüllt $(M(t))_{t \geq s}$ die Novikov-Bedingung, da f eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion ist.

Folglich ist der Exponentialprozess $\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M(t) - \frac{1}{2}[M]_t\right)$ ebenfalls ein Martingal mit

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}^*} [\mathcal{E}(M)_t] &= E_{\mathbb{P}^*} [\mathcal{E}(M)_s] = E_{\mathbb{P}^*} \left[\exp\left(M(s) - \frac{1}{2}[M]_s\right) \right] \\ &= E_{\mathbb{P}^*} \left[\exp\left(\int_s^s \tau f(u) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_s^s (\tau f(u))^2 du\right) \right] = 1. \end{aligned}$$

Dies beweist Gleichung (*) und entsprechend ist $I(f)$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_s^t f(u)^2 du$.

□

Mit diesem Lemma lässt sich nun der nachstehende Satz beweisen, der die Verteilungseigenschaft der Short Rate charakterisiert.

Theorem 2.7 (Vgl. [5], S. 59)

Der Short Rate-Prozess aus (2.14) ist für jedes $s < t$ bedingt unter $\mathcal{G}_s$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}^*} [x(t) | \mathcal{G}_s] &= x(s)e^{-\kappa(t-s)} + \mu(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\ \text{Var}_{\mathbb{P}^*} [x(t) | \mathcal{G}_s] &= \frac{\eta^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)}). \end{aligned}$$

Beweis:

Die Gleichung (2.14) besteht aus einer deterministischen und einer stochastischen Komponente. Die stochastische Komponente

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u) \tag{2.17}$$

ist ein stochastisches Integral mit dem deterministischen Integranden

$$f(u) = \eta e^{-\kappa(t-u)} \in L_2[0, T^*].$$

Aus den definierenden Eigenschaften des Wiener-Prozesses und der Definition des stochastischen Integrals folgt, dass das stochastische Integral mit einem deterministischen Integranden unabhängig von $\mathcal{G}_s$ ist. Entsprechend ist die bedingte Verteilung von $I(f)$ gegeben $\mathcal{G}_s$ gleich der unbedingten Verteilung von $I(f)$.

Lemma 2.6 besagt nun, dass $I(f)$ für jedes $t > s$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit

$$E_{\mathbb{P}^*} [I(f) | \mathcal{G}_s] = E_{\mathbb{P}^*} [I(f)] = 0$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{P}^*} [I(f) | \mathcal{G}_s] &= \text{Var}_{\mathbb{P}^*} [I(f)] = E_{\mathbb{P}^*} [I(f)^2] = \int_s^t f(u)^2 du \\ &= \eta^2 \int_s^t e^{-2\kappa(t-u)} du = \frac{\eta^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \end{aligned}$$

ist.

Mit den Eigenschaften normalverteilte Zufallsgrößen und der bedingten Varianz folgt nun sofort, dass für jedes $t > s$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-\kappa(t-s)} + \mu(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + I(f) \\ &\sim \mathcal{N}\left(x(s)e^{-\kappa(t-s)} + \mu(1 - e^{-\kappa(t-s)}), \frac{\eta^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)})\right) \end{aligned}$$

bedingt unter $\mathcal{G}_s$ ist.

□

Aus Theorem 2.7 wird eine zentrale Schwäche des Vasicek-Modells deutlich. Da die Short Rate eine normalverteilte Zufallsgröße ist, besteht die Möglichkeit, dass diese negative Werte annimmt. Damit würden jedoch auch in dem Modell negative Zinsen auftreten, was nicht gewünscht ist.

Des Weiteren ist das oben beschriebene Modell nicht zinsstrukturkonform. Dies liegt daran, dass keine deterministische Komponente in (2.11) existiert, die eine Anpassung an die aktuelle Zinsstrukturkurve erlaubt, d.h. $B(0, T) \neq B^M(0, T)$.

Eine weitere wesentliche Einschränkung von 1-Faktor-Modellen ist, dass zu jedem Zeitpunkt die Kassazinssätze aus Definition 1.1 für alle Laufzeiten perfekt korreliert sind. Dies zeigt unter Verwendung von (1.2) und (2.13) die folgende Rechnung

$$\begin{aligned} y(t, T) &= -\frac{\ln C(t, T)}{T - t} + \frac{D(t, T)}{T - t}x(t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} c(t, T) + b(t, T)x(t) \end{aligned}$$

mit deterministischen Funktionen $b(t, T)$ und $c(t, T)$.

Für zwei Kassazinssätze mit Laufzeiten T_1 und T_2 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y(t, T_1), y(t, T_2)) &= \text{Cov}(c(t, T_1) + b(t, T_1)x(t), c(t, T_2) + b(t, T_2)x(t)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das Problem der perfekten Korrelation kann bei einem Übergang zu einem Mehrfaktor-Modell behoben werden. Brigo und Mercurio führen in ihrem Buch an, dass bei einem Übergang zu einem 2-Faktor-Modell schon 99,1% der gesamten Varianz der Diskontkurve beschrieben wird (siehe [5], S. 139). Daraufhin entwickelten Brigo und Mercurio das 2-Faktor Gauß-Modell G2++. Dieses Modell wird in dieser Diplomarbeit als Zinsmodell verwendet.

2.3. Das 2-Faktor Gauß-Modell G2++

2.3.1. Die Dynamik der Short-Rate

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$. Sei $W = (W_1(t), W_2(t))_{t \geq 0}$ ein zwei-dimensionaler Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{Q}$. Dann bezeichne $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die von W erzeugte, vollständige Filtration ([16], Abschnitt (3.6)).

In dem von Brigo und Mercurio entwickelten Modell G2++ wird davon ausgegangen, dass der Short Rate-Prozess $(r(t))_{t \geq 0}$ unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ folgender Dynamik folgt:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t, \alpha) \text{ mit } r(0) = r_0, \quad (2.18)$$

wobei $(x(t))_{t \geq 0}$ und $(y(t))_{t \geq 0}$ stochastische Prozesse sind.

Diese stochastischen Prozesse genügen den sogenannten Langevin-Gleichungen

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \text{ mit } x(0) = 0 \quad (2.19)$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \text{ mit } y(0) = 0, \quad (2.20)$$

wobei a, b, σ und $\eta > 0$ sind und $W = (W_1, W_2)$ ein zwei-dimensionaler Wiener-Prozess mit Korrelation $[W_1, W_2]_t = \rho t$, für $-1 \leq \rho \leq 1$, ist.

Des Weiteren sei $\varphi(\cdot, \alpha) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ eine wohldefinierte, deterministische Funktion mit $\varphi(0, \alpha) = r_0$ und $\alpha = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$. Diese deterministische Funktion stellt im späteren Verlauf die Anpassung an die aktuelle Zinsstrukturkurve sicher.

Theorem 2.8 (Vgl. [5], S. 144)

Der Short Rate-Prozess gemäß (2.18) besitzt für jedes $s < t$ unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ die Gestalt

$$\begin{aligned} r(t) = & \varphi(t, \alpha) + x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} \\ & + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u). \end{aligned}$$

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Short Rate in (2.18) und dem Satz 2.5 auf Seite 24. Dieser besagt, dass die stochastischen Prozesse gerade durch

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) \quad (2.21)$$

und

$$y(t) = y(s)e^{-b(t-s)} + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u)$$

gegeben sind.

□

Dieser Satz stellt die Grundlage für die Charakterisierung der Verteilungseigenschaften der Short Rate dar.

Lemma 2.9 (Vgl. [5], S. 144)

Der Short Rate-Prozess aus (2.18) ist für jedes $s < t$ bedingt unter $\mathcal{F}_s$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit

$$E[r(t) | \mathcal{F}_s] = e^{-a(t-s)}x(s) + e^{-b(t-s)}y(s) + \varphi(t, \alpha) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(t) | \mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2b(t-s)}] \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)(t-s)}]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Beweis:

Aus Theorem 2.7 folgt sofort, dass $x(t)$ und $y(t)$ für jedes $t > s$ normalverteilte Zufallsgrößen sind. Entsprechend ist auch der Short Rate-Prozess aus (2.18) als Summe zweier normalverteilter Zufallsgrößen für jedes $t > s$ bedingt unter $\mathcal{F}_s$ eine normalverteilte Zufallsgröße. Mit den Eigenschaften des Erwartungswertes und der Varianz folgt demnach

$$\begin{aligned} E[r(t) | \mathcal{F}_s] &= E[x(t) | \mathcal{F}_s] + E[y(t) | \mathcal{F}_s] + E[\varphi(t, \alpha) | \mathcal{F}_s] \\ &\stackrel{2.7}{=} e^{-a(t-s)}x(s) + e^{-b(t-s)}y(s) + \varphi(t, \alpha) \\ \text{Var}[r(t) | \mathcal{F}_s] &= \text{Var}[x(t) + y(t) + \varphi(t, \alpha) | \mathcal{F}_s] \\ &= \text{Var}[x(t) | \mathcal{F}_s] + \text{Var}[y(t) | \mathcal{F}_s] + 2\text{Cov}[x(t), y(t) | \mathcal{F}_s] \\ &\stackrel{2.7}{=} \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2b(t-s)}] \\ &\quad + 2\text{Cov}[x(t), y(t) | \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

und mit den Eigenschaften der Kovarianz gilt weiter, dass

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Cov} \left[x(t), y(t) \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 & \stackrel{2.8}{=} 2 \operatorname{Cov} \left[\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u), \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 & \stackrel{2.7}{=} 2 E \left[\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 & = 2 \sigma \eta E \left[\int_s^t e^{-(a+b)(t-u)} \rho du \mid \mathcal{F}_s \right] \\
 & = 2 \sigma \eta \int_s^t e^{-(a+b)(t-u)} \rho du \\
 & = 2 \rho \frac{\sigma \eta}{a+b} \left[1 - e^{-(a+b)(t-s)} \right].
 \end{aligned}$$

Entsprechend ist die Behauptung gezeigt.

□

2.3.2. Der Preis eines Zero-Kupon-Bonds

In dem betrachteten Finanzmarkt stellen die Diskontfaktoren die Basisfinanzgüter dar und entsprechend ist $B(T, T) = 1$ hedgebar. Der Wert eines Diskontfaktors (Zero-Kupon-Bonds) zum Zeitpunkt t mit Auszahlungshöhe $B(T, T) = 1$ in dem festen Zeitpunkt T lässt sich demzufolge mit der risikoneutralen Bewertungsgleichung bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= E \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} B(T, T) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-\int_t^T \varphi(s, \alpha) ds} E \left[e^{-\int_t^T x(s) + y(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right].
 \end{aligned}$$

In dem weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird diese Gleichung analytisch gelöst. Das Ergebnis wird in dem Theorem 2.11 auf Seite 37 präsentiert.

Aus der Gestalt der Bewertungsformel ist ersichtlich, dass für die weiteren Berechnungen die Zufallsvariable $I(t, T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T x(s) + y(s) ds$ von einem wesentlichen Interesse ist. Das nachfolgende Lemma 2.10 gibt Aufschluss über die Verteilungseigenschaften von $I(t, T)$.

Lemma 2.10 (Vgl. [5], S. 145)

Für alle $0 < t < T < T^*$ ist die Zufallsvariable

$$I(t, T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T x(s) + y(s) ds$$

bedingt unter $\mathcal{F}_t$ normalverteilt mit Erwartungswert $M(t, T)$ und Varianz $V(t, T)$, welche gegeben sind durch

$$M(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) \quad (2.24)$$

und

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ & + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_t^T x(s) ds & \stackrel{(*)}{=} Tx(T) - tx(t) - \int_t^T u dx(u) \\ & = Tx(T) - tx(t) + Tx(t) - Tx(t) - \int_t^T u dx(u) \\ & = (T - t)x(t) + T(x(T) - x(t)) - \int_t^T u dx(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (T-t)x(t) + \int_t^T T-u \, dx(u) \\
 &\stackrel{(**)}{=} (T-t)x(t) - a \int_t^T (T-u)x(u) \, du + \sigma \int_t^T (T-u) \, dW_1(u) \\
 &\stackrel{(***)}{=} (T-t)x(t) + \sigma \int_t^T (T-u) \, dW_1(u) \\
 &\quad - a \int_t^T (T-u) \left[x(t)e^{-a(u-t)} + \sigma \int_t^u e^{-a(u-s)} \, dW_1(s) \right] \, du \\
 &= (T-t)x(t) + \sigma \int_t^T (T-u) \, dW_1(u) \\
 &\quad - \underbrace{ax(t) \int_t^T (T-u)e^{-a(u-t)} \, du}_{I_1} \\
 &\quad - \underbrace{a\sigma \int_t^T (T-u) \int_t^u e^{-a(u-s)} \, dW_1(s) \, du}_{I_2}, \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

wobei Folgendes ausgenutzt worden ist: Bei

- (*) die partielle stochastische Integration
mit $Y(u) = u$ und $X(u) = x(u)$.
- (**) die Definition von $dx(t)$ aus (2.19).
- (***) die Darstellung von $x(u)$ für jedes $t < u$ gemäß (2.21) auf Seite 29.

Der Ausdruck I_1 lässt sich mit Hilfe der partieller Integration auf folgende Weise vereinfachen

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -ax(t) \int_t^T (T-u)e^{-a(u-t)} \, du \\
 &= -ax(t) \left[\left(-(T-u) \frac{1}{a} e^{-a(u-t)} \right) \Big|_t^T - \int_t^T \frac{1}{a} e^{-a(u-t)} \, du \right] \\
 &= -ax(t) \left[\left(-(T-u) \frac{1}{a} e^{-a(u-t)} \right) \Big|_t^T + \frac{1}{a^2} \left(e^{-a(u-t)} \right) \Big|_t^T \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -ax(t) \left[\frac{1}{a}(T-t) + \frac{1}{a^2} (e^{-a(T-t)} - 1) \right] \\
 &= -x(t)(T-t) - \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} x(t).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Für den Ausdruck I_2 ist etwas mehr Arbeit von Nöten, denn

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -a\sigma \int_t^T (T-u) \int_t^u e^{-a(u-s)} dW_1(s) du \\
 &= -a\sigma \int_t^T \underbrace{(T-u)e^{-au}}_{g'(u)} \underbrace{\left(\int_t^u e^{as} dW_1(s) \right)}_{X(u)} du \\
 &\stackrel{(*)}{=} -a\sigma \int_t^T X(u) dg(u) \\
 &\stackrel{(**)}{=} -a\sigma \left[X(T)g(T) - \int_t^T g(u) dX(u) \right] \\
 &= -a\sigma \left[\left(\int_t^T e^{au} dW_1(u) \right) \left(\int_t^T (T-v)e^{-av} dv \right) \right. \\
 &\quad \left. - \int_t^T \left(\int_t^u (T-v)e^{-av} dv \right) e^{au} dW_1(u) \right] \\
 &= -a\sigma \left[\int_t^T \left(\int_t^T (T-v)e^{-av} dv - \int_t^u (T-v)e^{-av} dv \right) e^{au} dW_1(u) \right] \\
 &= -a\sigma \left[\int_t^T \left(\int_u^T (T-v)e^{-av} dv \right) e^{au} dW_1(u) \right] \\
 &\stackrel{(***)}{=} -a\sigma \int_t^T \left[\frac{(T-u)e^{-au}}{a} + \frac{e^{-aT} - e^{-au}}{a^2} \right] e^{au} dW_1(u) \\
 &= -\sigma \int_t^T (T-u) + \frac{e^{-a(T-u)} - 1}{a} dW_1(u),
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

wobei Folgendes ausgenutzt worden ist: Bei

- (*) lässt sich das Riemann-Integral in ein Stieltjes-Integral überführen, da g zweimal stetig-differenzierbar ist.

- (**) die partielle stochastische Integration,
wobei $Y = g$ deterministisch und $g(t) = 0$.
- (***) vergleichbares Vorgehen wie bei der Bestimmung von I_1 .

Zusammenfassend gilt mit (2.27) und (2.28)

$$\begin{aligned}
 \int_t^T x(s) ds &\stackrel{(2.26)}{=} (T-t)x(t) + \sigma \int_t^T (T-u) dW_1(u) + I_1 + I_2 \\
 &= (T-t)x(t) - x(t)(T-t) - \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} x(t) \\
 &\quad + \sigma \int_t^T (T-u) dW_1(u) - \sigma \int_t^T (T-u) + \frac{e^{-a(T-u)} - 1}{a} dW_1(u) \\
 &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T 1 - e^{-a(T-u)} dW_1(u) \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

und somit ist $\int_t^T x(s) ds$ wegen Lemma 2.6 bedingt unter $\mathcal{F}_t$ eine normalverteilte Zufallsgröße.

Das gleiche Resultat erhält man für $\int_t^T y(s) ds$ mit

$$\int_t^T y(s) ds = \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{\eta}{b} \int_t^T 1 - e^{-b(T-u)} dW_2(u). \tag{2.30}$$

Als Summe zweier normalverteilten Zufallsgrößen ist

$$I(t, T) = \int_t^T x(s) ds + \int_t^T y(s) ds$$

ebenfalls bedingt unter $\mathcal{F}_t$ normalverteilt mit

$$M(t, T) = E \left[I(t, T) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= E \left[\int_t^T x(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] + E \left[\int_t^T y(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &\stackrel{2.6}{=} \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 V(t, T) &= \text{Var} [I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] \\
 &= \text{Var} \left[\int_t^T x(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] + \text{Var} \left[\int_t^T y(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad + 2 \text{Cov} \left[\int_t^T x(s) ds, \int_t^T y(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}]^2 du + \frac{\eta^2}{b^2} \int_t^T [1 - e^{-b(T-u)}]^2 du \\
 &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}] [1 - e^{-b(T-u)}] du \\
 &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[\int_t^T 1 du - 2 \int_t^T e^{-a(T-u)} du + \int_t^T e^{-2a(T-u)} du \right] \\
 &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left[\int_t^T 1 du - 2 \int_t^T e^{-b(T-u)} du + \int_t^T e^{-2b(T-u)} du \right] \\
 &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[\int_t^T 1 du - \int_t^T e^{-a(T-u)} du - \int_t^T e^{-b(T-u)} du + \int_t^T e^{-(a+b)(T-u)} du \right] \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\
 &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\
 &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right],
 \end{aligned}$$

wobei Folgendes ausgenutzt worden ist: Bei

- (*) die Ergebnisse aus (2.29) und (2.30),
sowie Eigenschaften der Varianz und Kovarianz
und das Theorem 2.6.

(**) Integration der einzelnen Integrale.

□

Mit diesem Lemma und der risikoneutralen Bewertungsgleichung kann nun der Wert eines Zero-Kupon-Bonds bestimmt werden.

Theorem 2.11 (Vgl. [5], S. 145)

In einem Zinsmodell G2++ gemäß (2.18) ist der Wert eines Zero-Kupon-Bonds zum Zeitpunkt t mit fester Laufzeit T und Auszahlungsbetrag 1 gegeben durch

$$B(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \varphi(u, \alpha) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right). \quad (2.31)$$

Beweis:

Aus der risikoneutralen Bewertungsgleichung unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ folgt, dass

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(u, \alpha) du \right) E \left[\exp \left(- \int_t^T x(u) + y(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \exp \left(- \int_t^T \varphi(u, \alpha) du \right) \exp \left(-M(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T) \right) \\ &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(u, \alpha) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right). \end{aligned}$$

Zu (*): Aus Lemma 2.10 folgt, dass bedingt unter $\mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned} \int_t^T x(u) + y(u) du &\sim \mathcal{N}(M(t, T), V(t, T)) \\ \Rightarrow - \int_t^T x(u) + y(u) du &\sim \mathcal{N}(-M(t, T), V(t, T)) \end{aligned}$$

und mit [1], Satz 30.2 gilt nun, dass

$$E \left[\exp \left(- \int_t^T x(u) + y(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(-M(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T) \right)$$

ist.

□

2.3.3. Anpassung an die aktuelle Zinsstrukturkurve

Die deterministische Funktion $\varphi(\cdot, \alpha) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$ aus der definierenden Gleichung (2.18) ermöglicht in dem Modell G2++ die Zinsstrukturkonformität.

Es wird davon ausgegangen, dass die Funktion $B^M(0, \cdot) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ der marktgegebenen Diskontfaktoren hinreichend glatt ist. Damit einhergehend lässt sich nun die marktgegebene *instantaneous forward rate* zum Zeitpunkt 0 für die Laufzeit T definieren durch

$$f^M(0, T) \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\partial \ln B^M(0, T)}{\partial T}. \quad (2.32)$$

Theorem 2.12 (Vgl. [5], S. 146)

Das Zinsmodell G2++ gemäß (2.18) ist genau dann zinsstrukturkonform, wenn für jedes $0 < T \leq T^*$

$$\exp \left(- \int_t^T \varphi(u, \alpha) du \right) = \frac{B^M(0, T)}{B^M(0, t)} \exp \left(- \frac{1}{2} [V(0, T) - V(0, t)] \right) \quad (2.33)$$

erfüllt ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für jedes $0 \leq T \leq T^*$

$$\begin{aligned} \varphi(T, \alpha) &= f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 \\ &\quad + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

gilt.

Beweis:

Zinsstrukturkonformität bedeutet, dass für jedes $0 \leq T \leq T^*$ die marktgegebenen Diskontfaktoren mit denen im Modell berechneten Faktoren übereinstimmen, d.h. unter Beachtung von $x(0) = y(0) = 0$ und Theorem 2.11 muss

$$\begin{aligned} B^M(0, T) &= B(0, T) \\ \Leftrightarrow B^M(0, T) &= \exp \left(- \int_0^T \varphi(u, \alpha) \, du + \frac{1}{2} V(0, T) \right) \end{aligned}$$

gelten. Somit gilt weiter

$$\begin{aligned} \ln(B^M(0, T)) &= - \int_0^T \varphi(u, \alpha) \, du + \frac{1}{2} V(0, T) \\ \Leftrightarrow \int_0^T \varphi(u, \alpha) \, du &= - \ln(B^M(0, T)) + \frac{1}{2} V(0, T) \end{aligned} \quad (2.35)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(T, \alpha) &= - \frac{\partial \ln B^M(0, T)}{\partial T} + \frac{1}{2} \frac{\partial V(0, T)}{\partial T} \\ &\stackrel{(2.25)}{=} f^M(0, T) + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} [1 - e^{-aT} - e^{-bT} + e^{-(a+b)T}] \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}] + \frac{\eta^2}{2b^2} [1 - 2e^{-bT} + e^{-2bT}] \\ &= f^M(0, T) + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2, \end{aligned}$$

was (2.34) beweist.

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
 & \exp \left(- \int_t^T \varphi(u, \alpha) \, du \right) \\
 &= \exp \left(- \int_0^T \varphi(u, \alpha) \, du \right) \exp \left(\int_0^t \varphi(u, \alpha) \, du \right) \\
 &\stackrel{(2.35)}{=} \exp \left(\ln \left(B^M(0, T) \right) - \frac{1}{2} V(0, T) \right) \exp \left(- \ln \left(B^M(0, t) \right) + \frac{1}{2} V(0, t) \right) \\
 &= \frac{B^M(0, T)}{B^M(0, t)} \exp \left(- \frac{1}{2} [V(0, T) - V(0, t)] \right),
 \end{aligned}$$

was die behauptete Gleichung (2.33) zeigt.

□

Bemerkung 2.13

Aus den Sätzen 2.11 und 2.12 wird deutlich, dass das Zinsmodell G2++ ebenfalls der Klasse der affinen Zinsmodelle zu zuordnen ist. Es lassen sich somit deterministische Funktionen $A(\cdot, T)$, $B^x(\cdot, T)$ und $B^y(\cdot, T)$ finden, so dass

$$B(t, T) = A(t, T) \exp \left(- B^x(t, T)x(t) - B^y(t, T)y(t) \right).$$

Für den Kassazins aus Definition 1.1 gilt dementsprechend

$$\begin{aligned}
 y(t, T) &= - \frac{\ln A(t, T)}{T - t} + \frac{B^x(t, T)x(t) + B^y(t, T)y(t)}{T - t} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} a(t, T) + b^x(t, T)x(t) + b^y(t, T)y(t)
 \end{aligned}$$

und es folgt für zwei Kassazinssätze mit verschiedenen Laufzeiten T_1 und T_2

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}(y(t, T_1), y(t, T_2)) \\
 &= \text{Cov}(b^x(t, T_1)x(t) + b^y(t, T_1)y(t), b^x(t, T_2)x(t) + b^y(t, T_2)y(t)),
 \end{aligned}$$

was nicht unbedingt gleich 1 ist, sondern vielmehr von ρ , der Korrelation zwischen den beiden zugrundeliegenden Prozessen, abhängt.

Da das Zinsmodell G2++ zinsstrukturkonform ist und Zinssätze mit verschiedenen Laufzeiten nicht perfekt korrelieren, hat das Zinsmodell G2++ zwei wesentliche Schwächen des 1-Faktor Vasicek-Modells behoben.

In Lemma 2.9 wurde gezeigt, dass die Short Rate eine normalverteilte Zufallsgröße ist. Demzufolge besitzt auch das Modell G2++ eine positive Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von negativen Zinsen im Zeitpunkt t .

Lemma 2.14 (Vgl. [5], S. 147)

Ist das Zinsmodell G2++ zinsstrukturkonform, so gilt für das Auftreten von negativen Werten der Short Rate zum Zeitpunkt t unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}(r(t) < 0) = \Phi\left(-\frac{\mu_r(t)}{\sigma_r(t)}\right),$$

wobei

$$\begin{aligned}\mu_r(t) &= f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \\ \sigma_r(t) &= \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2at}] + \frac{\eta^2}{2b}[1 - e^{-2bt}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b}[1 - e^{-(a+b)t}].\end{aligned}$$

Beweis:

Die Short Rate ist laut Lemma 2.9 für jedes $t \geq s$ bedingt unter $\mathcal{F}_s$ normalverteilt und somit gilt für $s = 0$ unter Beachtung der Regeln für den bedingte Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mu_r(t) &= E[r(t)] = E[r(t) | \mathcal{F}_0] \\ &\stackrel{(2.22)}{=} \stackrel{(2.34)}{=} f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bt})^2 \\ &\quad + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-at})(1 - e^{-bt})\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(t) &= \text{Var}[r(t)] = \text{Var}[r(t) | \mathcal{F}_0] \\ &\stackrel{(2.23)}{=} \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2at}] + \frac{\eta^2}{2b}[1 - e^{-2bt}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b}[1 - e^{-(a+b)t}].\end{aligned}\tag{2.37}$$

Für das Auftreten von negativen Zinsen zum Zeitpunkt t unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ gilt somit

$$\mathbb{Q}(r(t) < 0) = \mathbb{Q}\left(\frac{r(t) - \mu_r(t)}{\sigma_r(t)} < -\frac{\mu_r(t)}{\sigma_r(t)}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_r(t)}{\sigma_r(t)}\right).$$

□

Diese Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von negativen Werte der Short Rate zum Zeitpunkt t hängt also maßgeblich von $\alpha = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$, dem gewählten Parameterset, ab. In den Simulationsdurchläufen traten mit denen im nächsten Abschnitt vorgestellten Parameterwerten zu keinem Zeitpunkt negative Zinsen auf.

2.3.4. Kalibrierung an die Marktdaten

In dem vorherigen Abschnitt ist eine Anpassung an die akute Zinsstrukturkurve durch Bestimmung der Shift-Funktion $(\varphi(t, \alpha))_{0 \leq t \leq T^*}$ erreicht worden. Diese Shift-Funktion hängt von der Zeitvariablen t und dem Parameterset $\alpha = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$ ab. In diesem Abschnitt wird das Vorgehen beschrieben, mit dem a , b , σ , η und ρ aus gegebenen Marktdaten bestimmt werden können. Dieses Vorgehen nennt man Kalibrierung.

Je nach Einsatzgebiet kann das Zinsmodell an verschiedene am Markt beobachtbare Finanzprodukte kalibriert werden. Es sollte dabei beachtet werden, dass das ausgewählte Finanzprodukt am Markt ausreichend gehandelt wird. Brigo und Mercurio stellen in ihrem Buch zwei Möglichkeiten der Kalibrierung vor: (1) Kalibrierung an die Cap-Preise und (2) Kalibrierung an die Preise von europäischen Swaptions.

In der barwertigen Zinsbuchsteuerung kommen häufig Zinsswaps und Swaptions zum Einsatz, um das eigene Cash-Flow-Profil zu verändern. Aus diesem Grund soll in dieser Arbeit das Zinsmodell G2++ an die Preise europäischer Swaptions angepasst werden.¹

Im ersten Schritt werden Swaptions mit n verschiedenen Laufzeiten (*maturity*) T_i für $i = 1, \dots, n$ ausgewählt. Diese Swaptions geben das Recht, am Ende der Laufzeit in

¹Grundlagen zum Thema Swaptions finden sich bei [4], S. 25 ff. oder bei [5], S. 19 ff.

einen Swap mit Laufzeit (*tenor*) τ_j für $j = 1, \dots, m$ einzutreten. Insgesamt werden somit $n \cdot m$ verschiedene Swaptions betrachtet. Aus Vereinfachungsgründen wird angenommen, dass alle betrachteten Swaptions vom gleichen Typ sind (z.B. Payer Swaption auf 3-Monats LIBOR), dieselbe *strike rate* K , dasselbe Auszahlungsprofil (z.B. monatlich oder jährlich), sowie den gleichen Nominalbetrag N besitzen. Diese Annahmen können aufgehoben werden, um eine bessere Kalibrierung zu erreichen. Allerdings wird dadurch der Rechenaufwand weiter erhöht.

Für eine Swaption mit *maturity* T_i und *tenor* τ_j lässt sich mit dem Zinsmodell G2++ numerisch ein Preis bestimmen. Auf die zugehörige Formel wird an dieser Stelle verzichtet und auf [5], S. 158f. und 173ff. verwiesen. Es bezeichne $ES_{Modell}(\alpha, T_i, \tau_j)$ den Swaption Preis, der mit Hilfe des Zinsmodells bestimmt worden ist. Der Preis dieser Swaption hängt maßgeblich von dem Paramaterset $\alpha = (a, b, \sigma, \eta, \rho)$ ab.

Im Gegensatz dazu bezeichne $ES_{Markt}(T_i, \tau_j)$ den Swaption-Preis für eine Swaption mit *maturity* T_i und *tenor* τ_j , welcher am Markt verlangt wird.

Als Zielfunktion der Kalibrierung dient die quadratische Summe der prozentualen Abweichungen zwischen Modell- und Marktpreisen der Swaptions

$$h(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{ES_{Modell}(\alpha, T_i, \tau_j) - ES_{Markt}(T_i, \tau_j)}{ES_{Markt}(T_i, \tau_j)} \right)^2,$$

welche minimiert werden soll.

Das in dem Zinsmodell G2++ zu verwendende Parameterset $\hat{\alpha} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}, \hat{\eta}, \hat{\rho}) \in (0, \infty)^4 \times [-1, 1]$ ist somit die Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems

$$h(\hat{\alpha}) = \min_{\alpha \in (0, \infty)^4 \times [-1, 1]} h(\alpha).$$

Für die Lösung dieses nichtlinearen Optimierungsproblem es ist ein entsprechender Algorithmus zu empfehlen. In [2] werden einige Verfahren vorgestellt und auf die Probleme einer nichtlinearen Optimierung eingegangen. Aus folgenden Gründe wird an dieser Stelle auf eine Durchführung verzichtet: (i) der sehr hohe Rechenaufwand bedingt durch die hohe Paramateranzahl (fünf) und die numerische Berechnung von $ES_{Modell}(\alpha, \cdot, \cdot)$ und (ii) es bestand kein Zugang zu den benötigten Marktdaten.

Brigo und Mercurio haben in ihrem Buch exemplarisch eine Anpassung an die Marktdaten vom 13. Februar 2001 durchgeführt und in einem weiteren Artikel ist ein G2++ Zinsmodell an die Swaption-Preise vom 23. Juni 2006 angepasst worden (siehe [6], S. 6). Die entsprechenden Parameter des Zinsmodells und die zugehörigen Zinsstrukturkurven befinden sich in Abbildung 2.2.

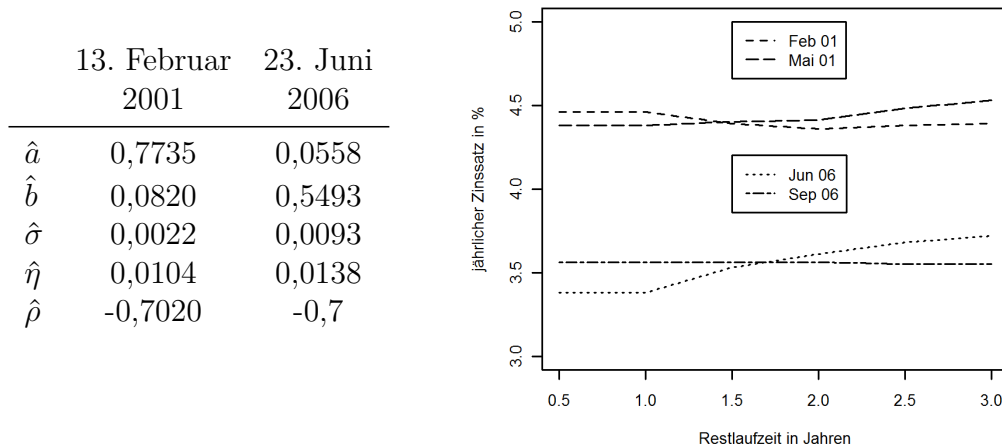


Abbildung 2.2.: Parameter des Zinsmodells und die zugehörigen Zinskurven

2.3.5. Konstruktion eines approximierenden Baumes für die Short Rate

In dem nachfolgenden Kapitel 3 wird mit Hilfe des Zinsstrukturmodells G2++ eine Stochastische Simulation der Diskontfaktoren durchgeführt. Dafür ist es notwendig den Short Rate-Prozess $(r(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ zu simulieren. Die simulierten Pfade dienen anschließend als Grundlage für die Berechnung der Diskontfaktoren gemäß Satz 2.11.

Der Short Rate-Prozess ist entsprechend Gleichung (2.18) definiert durch

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t, \alpha) \text{ mit } r(0) = r_0.$$

In dieser Definition sind $(x(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ und $(y(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ stochastische Prozesse, die

den stochastische Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) & x(0) &= 0 \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta dW_2(t) & y(0) &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Dabei sind a, b, σ und $\eta \geq 0$ und $W = (W_1, W_2)$ ist ein 2-dimensionaler Wiener-Prozess mit Korrelation $[W_1, W_2]_t = \rho t$ für $-1 \leq \rho \leq 1$. Dagegen ist $(\varphi(t, \alpha))_{0 \leq t \leq T^*}$ nicht stochastisch, sondern eine deterministische Funktion, die die Anpassung an die aktuelle Zinsstrukturkurve gewährleistet.

Für die folgende Stochastische Simulation ist somit vor allem eine Simulation der Pfade des Ito-Prozesses $(x(t), y(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ notwendig. Hierfür stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Ein sehr bekanntes Verfahren ist das sogenannte Euler-Maruyama-Schema, bei dem der Prozess durch das Ziehen von (korrelierten) Zufallszahlen diskretisiert wird. In diesem Abschnitt wird jedoch ein anderes Verfahren vorgestellt, welches insbesondere bei der Preisfindung von pfadabhängigen Derivaten Anwendung findet. Bei diesem Verfahren wird der Ito-Prozess durch einen (diskreten) Baum approximiert. Dieser Abschnitt bezieht sich auf die Dissertation von Kalina Natcheva-Acar an der TU Kaiserslautern [15], in der verschiedene Verfahren zur numerischen Preisfindung von Finanzoptionen miteinander verglichen werden.

Die Konstruktion des approximierenden Baumes beruht auf folgender grundlegender Annahme:

Der Prozess befindet sich zum Zeitpunkt t in dem Zustand $(x(t), y(t))$. Aus diesem Wert kann der Prozess sich in $t + \Delta t$ in einen von vier verschiedenen Zuständen entwickeln. Dies bedeutet, dass $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ den Wert

$$\begin{aligned} (x_u(t + \Delta t), y_u(t + \Delta t)) & \text{ mit einer Wahrscheinlichkeit von } p_{uu} \\ (x_u(t + \Delta t), y_d(t + \Delta t)) & \text{ mit einer Wahrscheinlichkeit von } p_{ud} \\ (x_d(t + \Delta t), y_u(t + \Delta t)) & \text{ mit einer Wahrscheinlichkeit von } p_{du} \\ (x_d(t + \Delta t), y_d(t + \Delta t)) & \text{ mit einer Wahrscheinlichkeit von } p_{dd} \end{aligned}$$

annimmt.

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht diese Überlegung.

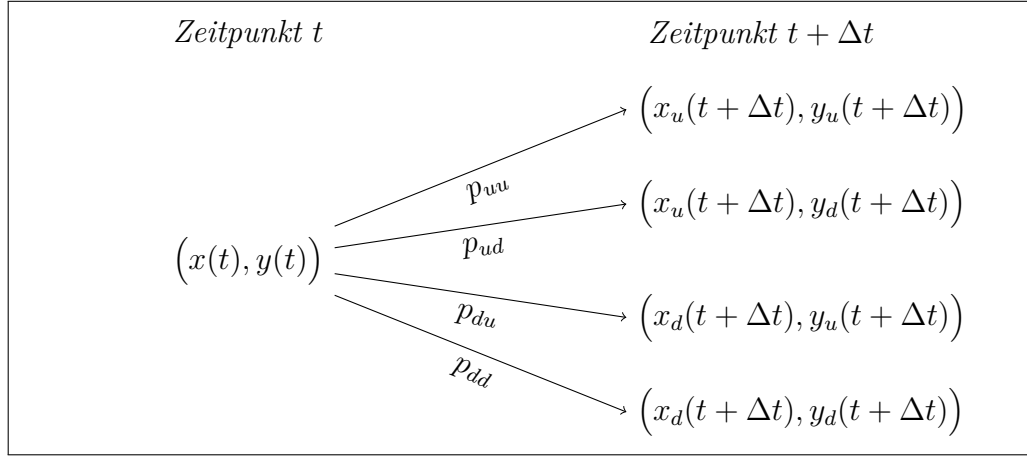


Abbildung 2.3.: Grundlegendes Vorgehen bei der Konstruktion des Baumes; eigene Darstellung

In dem weiteren Verlauf dieses Abschnitts müssen nun x_u , x_d , y_u , y_d , p_{uu} , p_{ud} , p_{du} und p_{dd} so bestimmt werden, dass der ursprüngliche Prozess approximiert werden kann. Dafür werden zunächst einige Bezeichnungsweisen vereinbart werden.

Für den weiteren Teil dieses Abschnittes bezeichne

- ▷ $\Delta x(t)$ die Zuwächse des Prozesses zum Zeitpunkt t , d.h. $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$.
- ▷ $E[\Delta x(t)|\mathcal{F}_t]$ den bedingten Erwartungswert und $Var[\Delta x(t)|\mathcal{F}_t]$ die bedingte Varianz der Zuwächse des Prozesses zum Zeitpunkt t unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$.
- ▷ $\hat{E}[\Delta x(t)|\mathcal{F}_t]$ den bedingten Erwartungswert und $\widehat{Var}[\Delta x(t)|\mathcal{F}_t]$ die bedingte Varianz der Zuwächse des Prozesses zum Zeitpunkt t , die durch den zu konstruierenden Baum gegeben sind.
- ▷ Für den Prozess $(y(t))_{t \geq 0}$ gelte die analoge Bezeichnungsweise.

Die Werte x_u , x_d , y_u , y_d , p_{uu} , p_{ud} , p_{du} und p_{dd} sind nun so zu wählen, dass lokal (d.h. bedingt unter $\mathcal{F}_t$) die Momente des ursprünglichen und des approximierten Prozesses der Zuwächse übereinstimmen.

Dies bedeutet, dass die Bedingungen

$$\widehat{E} [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] = E [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] \quad (2.38)$$

$$\widehat{E} [\Delta y(t) | \mathcal{F}_t] = E [\Delta y(t) | \mathcal{F}_t] \quad (2.39)$$

$$\widehat{Var} [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] = Var [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] \quad (2.40)$$

$$\widehat{Var} [\Delta y(t) | \mathcal{F}_t] = Var [\Delta y(t) | \mathcal{F}_t] \quad (2.41)$$

$$\widehat{Cov} [\Delta x(t), \Delta y(t) | \mathcal{F}_t] = Cov [\Delta x(t), \Delta y(t) | \mathcal{F}_t] \quad (2.42)$$

erfüllt sein müssen. Die Bedingungen (2.40), (2.41) und (2.42) sind dabei als Gleichheit bis auf Terme der Ordnung Δt^2 zu interpretieren.

Definition 2.15 (Vgl. [15], S. 38)

Die möglichen Auf- und Abwärtssprünge des Baumes für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} x_u(t + \Delta t) &\stackrel{\text{def}}{=} x(t) + [J_x(t) + 1] \sqrt{\Delta t} \sigma \\ x_d(t + \Delta t) &\stackrel{\text{def}}{=} x(t) + [J_x(t) - 1] \sqrt{\Delta t} \sigma \\ y_u(t + \Delta t) &\stackrel{\text{def}}{=} y(t) + [J_y(t) + 1] \sqrt{\Delta t} \eta \\ y_d(t + \Delta t) &\stackrel{\text{def}}{=} y(t) + [J_y(t) - 1] \sqrt{\Delta t} \eta, \end{aligned}$$

wobei

$$J_x(t) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \right\rfloor, & \text{falls } \left\lfloor \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \right\rfloor \text{ gerade} \\ \left\lfloor \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \right\rfloor + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$J_y(t) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}}{\eta} \right\rfloor, & \text{falls } \left\lfloor \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}}{\eta} \right\rfloor \text{ gerade} \\ \left\lfloor \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}}{\eta} \right\rfloor + 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch diese Definition ist sichergestellt, dass der approximierende Baum die Mean-Reverting-Eigenschaft besitzt. Je größer der Wert des Prozess im Zeitpunkt t , desto größer ist auch die Sprungkomponente J . Bei entsprechender Gewichtung der Wahrscheinlichkeiten wird der Baum somit immer wieder an den Mittelwert 0 herangezogen.

Theorem 2.16 (Vgl. [15], S. 38)

Seien die die Auf- und Abwärtssprünge des Baumes für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ wie in Definition 2.15 gegeben. Der Baum erfüllt die Bedingungen (2.38) - (2.42) dann, falls die Wahrscheinlichkeiten der Sprünge durch

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \frac{\rho}{4} + \frac{(J_x(t)-1)(J_y(t)-1)}{4} - \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}(J_y(t)-1)}{4\sigma} - \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}(J_x(t)-1)}{4\eta} \\ p_{ud} &= -\frac{\rho}{4} - \frac{(J_x(t)-1)(J_y(t)+1)}{4} + \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}((J_y(t)+1))}{4\sigma} + \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}(J_x(t)-1)}{4\eta} \\ p_{du} &= -\frac{\rho}{4} - \frac{(J_x(t)+1)(J_y(t)-1)}{4} + \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}((J_y(t)-1))}{4\sigma} + \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}(J_x(t)+1)}{4\eta} \\ p_{dd} &= \frac{\rho}{4} + \frac{(J_x(t)+1)(J_y(t)+1)}{4} - \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}((J_y(t)+1))}{4\sigma} - \frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}(J_x(t)+1)}{4\eta} \end{aligned}$$

gegeben sind.

Beweis:

Zuerst wird das zu lösende lineare Gleichungssystem aufgestellt:

$$\begin{aligned} \hat{E} [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] &= (p_{uu} + p_{ud})(x_u(t + \Delta t) - x(t)) \\ &\quad + (p_{du} + p_{dd})(x_d(t + \Delta t) - x(t)) \\ &\stackrel{!}{=} E [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] \\ &\stackrel{(*)}{=} -ax(t)\Delta t \end{aligned} \tag{I}$$

$$\begin{aligned} \hat{E} [\Delta y(t) | \mathcal{F}_t] &= (p_{uu} + p_{du})(y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\ &\quad + (p_{ud} + p_{dd})(y_d(t + \Delta t) - y(t)) \\ &\stackrel{!}{=} E [\Delta y(t) | \mathcal{F}_t] \\ &\stackrel{(*)}{=} -by(t)\Delta t \end{aligned} \tag{II}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{E} [\Delta x(t) \Delta y(t) | \mathcal{F}_t] &= p_{uu} (x_u(t + \Delta t) - x(t)) (y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\
 &\quad + p_{ud} (x_u(t + \Delta t) - x(t)) (y_d(t + \Delta t) - y(t)) \\
 &\quad + p_{du} (x_d(t + \Delta t) - x(t)) (y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\
 &\quad + p_{dd} (x_d(t + \Delta t) - x(t)) (y_d(t + \Delta t) - y(t)) \\
 &\stackrel{!}{=} E [\Delta x(t) \Delta y(t) | \mathcal{F}_t] \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sigma \eta \rho \Delta t + a b x(t) y(t) \Delta t^2
 \end{aligned} \tag{III}$$

$$1 = p_{uu} + p_{du} + p_{ud} + p_{dd} \tag{IV}$$

zu (*): $(x(t))_{t \geq 0}$ und $(y(t))_{t \geq 0}$ gehören der Klasse der Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse an und für diese Prozesse haben Karlin und Taylor in ihrem Buch (siehe [13] S. 170) die verwendeten Gleichungen gezeigt. Allgemein lassen sich die Gleichungen auch aus den definierenden Eigenschaften für Diffusionsprozesse folgern.

Das gesuchte Gleichungssystem erhält man, indem man in (III) den Term mit Ordnung Δt^2 wegfällt lässt.

Dies (neue) Gleichungssystem ist mit Hilfe des Programms Maple gelöst worden. Die Ergebnisse stimmen mit den behaupteten Wahrscheinlichkeiten überein. Eine Überprüfung der Ergebnisse befindet sich in Satz A.1 im Anhang.

Die Anforderungen (2.38) und (2.39) werden somit von dem konstruierten Baum erfüllt. Es ist noch nachzuprüfen, inwiefern die Anforderungen (2.40) und (2.41) (und somit auch (2.42)) ebenfalls erfüllt werden.

$$\begin{aligned}
 \widehat{Var} [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t] &= \widehat{E} [\Delta x(t)^2 | \mathcal{F}_t] - \widehat{E} [\Delta x(t) | \mathcal{F}_t]^2 \\
 &= (p_{uu} + p_{ud}) (x_u(t + \Delta t) - x(t))^2 \\
 &\quad + (p_{du} + p_{dd}) (x_d(t + \Delta t) - x(t))^2 - (-a x(t) \Delta t)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(*)}{=} \left(-\frac{1}{2}J_x(t) + \frac{1}{2} + \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \right) (J_x(t) + 1)^2 \sigma^2 \Delta t \\
&\quad + \left(1 + \frac{1}{2}J_x(t) - \frac{1}{2} - \frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \right) (J_x(t) + 1)^2 \sigma^2 \Delta t \\
&\quad - \left(-ax(t)\Delta t \right)^2 \\
&= -\left(J_x(t)\sqrt{\Delta t}\sigma \right)^2 + 2\left(J_x(t)\sqrt{\Delta t}\sigma \right) \left(-ax(t)\Delta t \right) \\
&\quad - \left(-ax(t)\Delta t \right)^2 + \sigma^2 \Delta t \\
&= \sigma^2 \Delta t - \left(J_x(t)\sqrt{\Delta t}\sigma + ax(t)\Delta t \right)^2,
\end{aligned}$$

wobei bei der Gleichung (*) die Nebenrechnungen aus Satz A.1 ausgenutzt worden sind.

Da $Var[\Delta x(t)|\mathcal{F}_t] = \sigma^2 \Delta t$ ist und der zweite Term aufgrund der Definition von J_x die Ordnung Δt^2 besitzt, ist die Bedingung (2.40) erfüllt. Eine analoge Rechnung für $(y(t))_{t \geq 0}$ zeigt, dass die Anforderungen (2.41) und (2.42) ebenfalls erfüllt sind.

□

Allerdings tritt für die in Theorem 2.16 bestimmten Werte p_{uu} , p_{ud} , p_{du} und p_{dd} noch ein Problem auf. Diese Werte sind nicht beschränkt und stammen daher nicht unbedingt aus dem Intervall $[0, 1]$. Obwohl deren Summe gleich 1 ist, sind sie somit per definitionem keine Wahrscheinlichkeiten.

Das nachfolgende Lemma soll eine Auskunft darüber geben, wie mit dieser Tatsache umgegangen werden soll.

Lemma 2.17 (Vgl. [15], S. 41)

Für die in Theorem 2.16 bestimmten Werte seien $\widetilde{p}_{uu}$, $\widetilde{p}_{ud}$, $\widetilde{p}_{du}$ und $\widetilde{p}_{dd}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{uu} &= \widetilde{p}_{uu} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{ud} &= \widetilde{p}_{ud} \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{du} &= \widetilde{p}_{du} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{dd} &= \widetilde{p}_{dd}.
\end{aligned}$$

Dann sind $\widetilde{p}_{uu} \in [0, 1]$, $\widetilde{p}_{ud} \in [0, 1]$, $\widetilde{p}_{du} \in [0, 1]$ und $\widetilde{p}_{dd} \in [0, 1]$.

Beweis:

Unter Berücksichtigung, dass 0 eine gerade Zahl ist, gilt für die Sprunghöhen aus Definition 2.15, dass

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} J_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{-ax(t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \right] = 0$$

und

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} J_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{-by(t)\sqrt{\Delta t}}{\eta} \right] = 0.$$

Da die Korrelation ρ der zugrundeliegenden Wiener-Prozesse beschränkt ist und im Intervall $[-1,1]$ liegt, folgt für die bestimmten Werte aus Theorem 2.16

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{uu} &= \frac{1}{4}(\rho + 1) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{ud} &= \frac{1}{4}(-\rho + 1) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{du} &= \frac{1}{4}(-\rho + 1) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{dd} &= \frac{1}{4}(\rho + 1) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

□

Natcheva-Acar schlägt in ihrer Arbeit vor, die Feinheit von Δt so zu erhöhen, dass alle Wahrscheinlichkeiten des Baumes wohldefiniert sind. Dieser Lösungsansatz wird in dieser Arbeit ebenfalls vertreten. Bei den Simulationsläufen traten zu keinem Zeitpunkt Probleme mit der Wohldefiniertheit der Wahrscheinlichkeiten auf.

3. Die Simulation

3.1. Ausgangssituation

Für die Simulationsrechnung in diesem Kapitel wird eine einzelne Kreditvergabe gesondert betrachtet, wie sie auch in der Einleitung vorgestellt worden ist (vgl. Tabelle 0.2). Als Haltedauer H wird, wie in [29], ein Zeitraum von 3 Monaten angenommen ($H = \frac{3}{12}$). Eventuelle Barwertveränderungen können somit deutlicher dargestellt werden.

Die Kreditvergabe durch das Kreditinstitut besitze die Eigenschaften aus der nebenstehenden Tabelle.

Darlehenshöhe in EUR	100.000,00
jährlicher Zinssatz	8,00%
Zinszahlungen	jährlich
Laufzeit in Jahren	3
Tilgung	endfällig

Tabelle 3.1.: Konditionen Kreditvergabe

Das Kreditinstitut hat nun die Aufgabe diese Kreditvergabe zu refinanzieren. Für die Refinanzierung stehen verschiedene Instrumente zur Verfügung. Dies sind zum Beispiel die Spareinlagen der Kunden oder auch Kapitalmarktprodukte. In diesem Falle soll die Finanzierung ausschließlich am Kapitalmarkt erfolgen. Dafür stehen vier verschiedene Kapitalmarktprodukte zur Verfügung. Die Eigenschaften dieser Instrumente befindet sich in der Tabelle 3.2.

Für die Kreditvergabe können somit durch das Kreditinstitut verschiedene Refinanzierungsstrategien verwirklicht werden, indem der zu refinanzierende Betrag auf mehrere Instrumente aufgeteilt wird. Dabei ist zu beachten, dass die Refinanzierung vollständig und nicht gehebelt stattfinden soll. Dies bedeutet, dass für die Anteile a_1 , a_2 , a_3 und a_4 der jeweiligen Instrumente an der Gesamtfinanzierung gilt: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ und $a_i \in [0, 1]$ für $i = 1, 2, 3$ und 4.

Name	3-Monats FRN	6-Monats FRN	1-Jahres FRN	Darlehen
Laufzeit	3 Jahre	3 Jahre	3 Jahre	3 Jahre
Zinsanpassung	quartalsweise	halbjährlich	jährlich	keine
Zinszahlungen	quartalsweise	halbjährlich	jährlich	jährlich
Tilgung	endfällig	endfällig	endfällig	endfällig
Zinssatz	risikoloser Geldmarktsatz mit Restaufzeit			
	3 Monate	6 Monate	1 Jahr	3 Jahre

Tabelle 3.2.: Eigenschaften der Refinanzierungsinstrumente

Für die Ertrag- und Risikosteuerung dieses Geschäfts muss nun, gemäß den Prozessschritten der barwertigen Zinsbuchsteuerung aus Kapitel 1 (siehe Seite 3), zuerst ein Zahlungsstrom für dieses Geschäft abgeleitet werden:

- (i) Da das Ausfallrisiko für diese Diplomarbeit ausgeschlossen worden ist, ist der Zahlungsstrom auf der Aktiv-Seite deterministisch.
- (ii) Die Refinanzierung des Kredites erfolgt vollständig über den Kapitalmarkt. Der Zahlungsstrom auf der Passiv-Seite hängt somit ausschließlich von der aktuellen risikolosen Zinsstrukturkurve und den institutsspezifischen Refinanzierungskosten ab. Da die Laufzeit aller Instrumente 3 Jahre beträgt, wird keine Refinanzierungsfristentransformation durchgeführt und die Refinanzierungskosten sind für die gesamte Laufzeit fix. Aus Vereinfachungsgründen wird für die Berechnungen ein Refinanzierungsspread von 0 angenommen. Die Prognose der variablen Zinszahlungen erfolgt nach dem Verfahren, welches auf Seite 4 beschrieben worden ist.

Im zweiten Schritt muss der Barwert dieses Zahlungsstroms ausgerechnet werden. Da das Kreditinstitut ausschließlich eine Zinsfristentransformation durchführt, kann die Gleichung (1.5) herangezogen werden, also

$$BW_t = \sum_{i=0}^n B(t, t_i) \cdot \left(Z_t^{\text{aktiv}}(t_i) - Z_t^{\text{passiv}}(t_i) \right).$$

Für die Ermittlung des Ertrag- und Risikostatus muss die Verteilung der Zufallsgröße BW_{t+H} bestimmt werden. Diese Verteilung wird mit Hilfe zweier verschiedener Verfahren simuliert und anschließend untersucht, inwiefern die beiden Methoden zu verschiedenen Entscheidungen über die Refinanzierungsstrategie führen.

Eine Veränderung der risikolosen Zinsstrukturkurve stellt den einzigen Marktrisiko-faktor dar. Die Gleichung (1.1) zeigt, dass sich risikolose Diskontfaktoren und risiko-lose Zinssätze ineinander überführen lassen und zwar durch $B(t, T) = e^{-y(t, T)(T-t)}$. Es ist somit ausreichend in der Simulation die Diskontkurve $B(t + H, t + H + i)$ für $i = 1, 2, 3$ mit $H = \frac{3}{12}$ zu bestimmen.¹

3.2. Beschreibung der Simulationsmethoden

In der Einleitung ist schon auf die Tatsache hingewiesen worden, dass für die Simulation der Diskontfaktoren im Zuge der barwertigen Zinsbuchsteuerung häufig eine Historische Simulation Anwendung findet. Die implizite Prämisse der Historischen Simulation ist, dass die historische Entwicklung eine gute Schätzung für die zukünftigen Zinsänderungen ist. Im Gegensatz dazu werden bei einer Stochastischen Simulation aufgrund einer Verteilungsannahme zufällige Diskontfaktoren simuliert. Völker hat in seinem Buch beiden Methoden zur Bestimmung des *Value at Risk* beschrieben und diese Ausführungen werden nun entsprechend den Anforderungen dieser Arbeit adaptiert (vgl. [28], S. 76 ff.).

Die Historische Simulation

1. *Schritt:* Im ersten Schritt müssen historische Diskontfaktoren für verschiedene Restlaufzeiten ermittelt werden. Für diese Diplomarbeit sind insbesondere die Restlaufzeiten $i = 1, 2$ und 3 Jahre relevant. Man erhält somit für n historische Zeitpunkte $T^{Start} = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T^{Ende}$ die risikolosen Diskontfaktoren $B(t_j, t_j + i)$ für die verschiedenen Restlaufzeiten i .

2. *Schritt:* Anschließend werden diese historischen Daten für die Simulation aufbereitet, so dass sich aus diesen die zukünftig möglichen Marktszenarien ermitteln lassen. Dazu betrachtet man die relativen Änderungen der Diskontfaktoren, die nach einer bestimmten Haltedauer H aufgetreten sind. Es wird also für jedes $i = 1, 2, 3$ und $1 \leq j \leq n^*$ mit $n^* = \max_{j=1, \dots, n} \{j : t_j + H \leq T^{Ende}\}$ der Return definiert durch

¹Die simulierten Diskontkurven dienen vielmehr als Stützstellen für eine log-lineare Interpolation, da die Zahlungen in einem um H verringerten Zeitpunkt auftreten (siehe dazu [19], S. 33).

$$r_i(t_j, t_j + H) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B(t_j + H, t_j + H + i) - B(t_j, t_j + i)}{B(t_j, t_j + i)}.$$

3. *Schritt*: Der dritte Schritt stellt den eigentlichen Simulationsschritt dar. Die zukünftig möglichen Marktszenarien werden simuliert, indem die relativen Änderungen auf die aktuellen Diskontfaktoren angewendet werden. Man erhält somit n^* mögliche Realisationen der Zufallsgröße $B(t + H, t + H + i)$

$$B(t + H, t + H + i) = B(t, t + i) \cdot (1 + r_i(t_j, t_j + H)) \quad \text{für } i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Die Historische Simulation geht davon aus, dass die historische Entwicklung eine gute Schätzung für zukünftige Wertveränderungen ist. Mathematisch bedeutet dies, dass in der obigen Simulationsformel (3.1) die relativen Änderungen (Returns) stochastisch unabhängig sind.

Für die Simulation wurden die risikolosen Zinsstrukturkurven auf Monatsbasis der Bundesbank verwendet. Die Bundesbank bietet diese auf ihrer Homepage kostenfrei an. Insgesamt lagen 438 Datensätze für den Zeitraum von September 1972 bis Februar 2009 vor. Dadurch konnten $n^* = 435$ mögliche Marktszenarien mit der Historischen Simulation erzeugt werden.

4. *Schritt*: Diese n^* möglichen Marktszenarien dienen nun als Grundlage zur Ermittlung der empirischen Verteilung des Barwertes BW_{t+H} . Dazu wird zuerst auf Grundlage der simulierten Zinsstrukturkurve die Cashflowprofile auf der Passivseite angepasst (siehe Seite 4). Dieser aktualisierte Zahlungsstrom zum Stichtag $t + H$ wird nun zusammen mit den simulierten Diskontfaktoren in die Barwertformel (1.5) eingesetzt. Entsprechend erhält man nun n^* simulierte Barwerte des (veränderten) Cashflows zum Zeitpunkt $t + H$.

5. *Schritt*: In dem letzten Schritt werden die simulierten Barwerte der Größe nach sortiert. Das α -Quantil der empirischen Verteilungsfunktion kann direkt aus dieser geordneten Liste als k -kleinster Wert mit $k = \lfloor \alpha \cdot n^* \rfloor + 1$ abgelesen werden. Der *Value at Risk* $VaR(\alpha, H)_t$ kann anschließend gemäß Definition 1.6 auf Seite 10 bestimmt werden.

Die Stochastische Simulation

1. *Schritt:* Im ersten Schritt werden durch den in Abschnitt 2.3.5 hergeleiteten Baum n verschiedene Pfade des stochastischen Prozesses $(x(t), y(t))_{0 \leq t \leq H}$ simuliert.

2. *Schritt:* Mit Hilfe dieser n Realisationen lassen sich zusammen mit dem Satz 2.11 die Diskontfaktoren $B(t+H, t+H+i)$ für $i = 1, 2, 3$ bestimmen. Für die Simulation ist in dieser Diplomarbeit $n = 10.000$ gewählt worden. Durch diese Anzahl konnten stabile Ergebnisse in einer angemessenen Zeitdauer erreicht werden.

Die letzten notwendigen Schritte ähneln in wesentlichen Punkten, den Schritten 4 und 5 der Historischen Simulation. Beide Simulationsmethoden sind mit Hilfe von Microsoft VisualBasic in einem Excel-Modell implementiert worden.²

Zur Vorbereitung auf die eigentliche Analyse der Simulationsergebnisse werden in der Tabelle 3.3 die wesentlichen Eigenschaften und Unterschiede der beiden Simulationsmethoden gegenübergestellt. Die Darstellung orientiert sich an [28], S. 108.

Kriterium	Historische Simulation	Stochastische Simulation
Verfahren	simulativ, nichtparametrisch	simulativ, parametrisch
<i>VaR</i> -Bestimmung	Auszählen	Auszählen
Verteilungsannahme	keine	Short Rate folgt Prozess aus Gleichung (2.18)
Anzahl der zu schätzenden Parameter	null	fünf
Anspruch an die Datenbasis	hoch	hoch (wegen der Kalibrierung)
Rechenaufwand	gering	hoch (Simulation und Kalibrierung)
Modellrisiko	gering	hoch
Erklärbarkeit	sehr gut	schwer
wichtigster Vorteil	Einfachheit	Genauigkeit bei passender Verteilungsannahme
wichtigste Nachteile	mangelnde Berücksichtigung aktueller Marktentwicklungen, da vergangenheitsbezogen; Ungenauigkeit des <i>VaR</i> -Schätzers bei geringer Datenbasis	hoher Implementierungs- und Rechenaufwand

Tabelle 3.3.: Eigenschaften und Unterschiede der beiden Simulationsmethoden

²Das entsprechende Modell findet sich auf der beiliegenden Daten-CD.

3.3. Analyse der Simulationsergebnisse

Für einen Vergleich dieser beiden Simulationsmethoden ist es notwendig, das Zinsmodell an die aktuellen Marktgegebenheiten zu kalibrieren. In der Abbildung 2.2 auf Seite 44 befinden sich die Ergebnisse der Kalibrierung des Zinsstrukturmodells für zwei verschiedene Zeitpunkte. Diese zwei Zeitpunkte dienen jeweils als Ausgangsdatum für die Simulationsrechnungen. Da diese Zeitpunkte in der Vergangenheit liegen, ist auch die tatsächliche Entwicklung der Zinsstrukturkurve nach der Haltedauer H gegeben. Es besteht somit die Möglichkeit ex-post die Simulationsergebnisse der beiden Verfahren mit der tatsächlichen Entwicklung der Barwerte zu vergleichen. Die tatsächliche Entwicklung der Zinsstrukturkurve befindet sich ebenfalls in der Abbildung 2.2.

Wird von dem Ausgangsdatum 23. Juni 2006 ausgegangen, so verdeutlicht die Abbildung 2.2, dass es nach einer Haltedauer von $H = 3$ Monaten (d.h. im September 2006) zu einer Verflachung der Zinskurve auf höherem Niveau kommt. Die kurzfristigen Zinsen steigen an und das Kreditinstitute erwirtschaftet bei einer kurzfristigen Refinanzierung einen Buchverlust. Dies stellt für die Banken eine gefährliche Veränderung der Zinskurve dar. Aus diesem Grund wird die Vergleichsrechnung mit Ausgangsdatum 23. Juni 2006 im weiteren Verlauf dieses Abschnittes detailliert beschrieben. Die Untersuchungsergebnisse für die Vergleichsrechnung mit dem Ausgangsdatum 13. Februar 2001 befinden sich im Kapitel B des Anhangs.

Es sei $t = 0$.

Mit Hilfe der Simulationsergebnisse sollen in diesem Abschnitt zwei Arbeitshypothesen überprüft werden:

1. Arbeitshypothese

Die Historische Simulation kann als Realisierung einer Zufallsgröße aufgefasst werden, welche dieselben Verteilungseigenschaften wie das Zinsstrukturmodell besitzt. Entsprechend führen beide Simulationsmethoden zu denselben Entscheidungen über die zu wählende Refinanzierungsstrategie.

Ist diese Arbeitshypothese abzulehnen, so ist es interessant zu wissen, ob durch die Verwendung der Stochastischen Simulation ein Erkenntnisgewinn für die Steuerung

des Zinsänderungsrisiko möglich ist. Dies soll mit Hilfe der zweiten Arbeitshypothese untersucht werden.

2. Arbeitshypothese

Die Stochastische Simulation liefert im Vergleich zu der Historischen Simulation erweiterte Informationen, die für die Steuerung des Zinsänderungsrisikos förderlich sind.

Überprüfung der ersten Arbeitshypothese

Die in der Stochastischen Simulation erzeugten Diskontfaktoren $B(H, H + i)$ für $i = 1, 2, 3$ sind jeweils Realisierungen einer log-normalverteilten Zufallsgröße, denn es gilt:

Die Formel (2.31) zur Bestimmung der Diskontfaktoren besitzt als einzige stochastischen Komponente die Zufallsgrößen $x(H)$ und $y(H)$.

Dementsprechend werden auch im ersten Schritt der Stochastischen Simulation n Pfade des Prozesses $(x(t), y(t))_{0 \leq t \leq H}$ erzeugt. Bedingt unter $\mathcal{F}_0$ sind $x(H)$ und $y(H)$ normalverteilte Zufallsgrößen (vgl. Theorem 2.7 und Theorem 2.9). Zusammen mit [1], Satz 32.9 und Satz 32.11 folgt nun, dass die erzeugten Diskontfaktoren $B(H, H + i)$ für $i = 1, 2, 3$ jeweils Realisierungen einer log-normalverteilten Zufallsgröße sind.

Demzufolge ist nun zu überprüfen, inwiefern die simulierten Diskontfaktoren der Historischen Simulation ebenfalls als Realisierungen einer log-normalverteilten Zufallsgröße aufgefasst werden können. Zur Überprüfung dieser Hypothese wird aus [1] der Satz 32.9 verwendet. Der Satz besagt, dass anstatt die ursprünglichen Daten auf eine Log-Normalverteilung hin zu überprüfen, es ebenfalls möglich ist, die logarithmierten Daten auf eine Normalverteilungsannahme zu überprüfen. Für eine Überprüfung auf Normalverteilung stehen eine Vielzahl von statistischen Tests zur Verfügung. Für diese Arbeit wird der Shapiro-Wilk-Test verwendet, der laut [7], S. 404 zu den Tests mit der höchsten Güte gehört. Seine Aussage wird mit Hilfe eines QQ-Norm-Plots verifiziert. Beide Methoden sind mit dem Statistikprogramm R durchgeführt worden.

Der Shapiro-Wilk-Test gehört zu der Klasse der Regressions-Tests und überprüft, ob eine Stichprobe $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ einer normalverteilten Zufallsgröße Y zugeordnet werden kann. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an der Darstellung der Shapiro-Wilk-Statistik $\hat{W}$ in [7], Kapitel 5 und Abschnitt 9.3.4.

Der Shapiro-Wilk-Test betrachtet folgendes Testproblem:

$$\text{Null-Hypothese } H_0: F_Y = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{Alternative } K: F_Y \neq \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

mit unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekanntem $\sigma^2 \in (0, \infty)$

Ist die Stichprobe normalverteilt, so können die Werte durch folgendes lineares Regressionsmodell

$$y_{(i)} = \mu + \sigma m_i + \epsilon_i \text{ für } i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

wobei

$y_{(i)} \hat{=}$ i -te Wert der geordneten, beobachteten, zufälligen Daten

$y^T = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) \hat{=}$ der zugehörige Zeilenvektor

$m_i = EZ_{(i)} \hat{=}$ der Erwartungswert der i -ten Ordnungsstatistik eines Zufallsvektors

$Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, wobei Z_i standard-normalverteilte, unabhängige Zufallsgrößen sind

$m^T = (m_1, \dots, m_n) \hat{=}$ der zugehörige Zeilenvektor

$\epsilon_i \hat{=}$ zufällige, normalverteilte Fehlerterme mit $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \tau_i^2)$

und $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = v_{i,j}$

$V = (v_{i,j})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n} \hat{=}$ die zugehörige Kovarianz-Matrix

erklärt werden.

Da die ϵ_i symmetrisch verteilt sind, folgt nun aus dem verallgemeinerten Satz von Gauß-Markov (vgl. [7], S. 205 und S. 393), dass die gleichmäßig besten, linearen, erwartungstreuen Schätzer für μ und σ durch

$$\hat{\mu}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{(i)} = \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}_n \quad (3.3)$$

$$\hat{\sigma}(y) = \frac{m^T V^{-1} y}{m^T V^{-1} m} \quad (3.4)$$

gegeben sind.

Des Weiteren ist der erwartungstreue Schätzer für die Stichproben-Varianz durch

$$\check{\sigma}^2(y) = \frac{S^2}{n-1} \quad \text{wobei } S^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 \quad (3.5)$$

gegeben.

Der Shapiro-Wilk Test setzt diese beiden Schätzer für die Varianz in ein Verhältnis zueinander. Damit die Statistik $\hat{W}$ nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, wird ein entsprechender Skalierungsfaktor hinzugefügt:

$$\begin{aligned} \hat{W}(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{R^4 \hat{\sigma}^2(y)}{C^2 \check{\sigma}^2(y)}, \\ \text{wobei } R^2 &= m^T V^{-1} m \\ C^2 &= (n-1) \cdot (m^T V^{-1} V^{-1} m). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Shapiro-Wilk Statistik $\hat{W}(y)$ aus (3.6) lässt sich in folgender Weise vereinfachen:

$$\begin{aligned} \hat{W}(y) &= \left(\frac{(m^T V^{-1} m) \frac{m^T V^{-1} y}{m^T V^{-1} m}}{(n-1)^{\frac{1}{2}} (m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \frac{n-1}{S^2(y)} \\ &= \left(\frac{m^T V^{-1} y}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \frac{1}{S^2(y)} \\ &= \frac{(a^T y)^2}{S^2(y)} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n a_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{wobei } a^T = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}}.$$

Stammt die Stichprobe $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit, so strebt die Teststatistik gegen 1. Der p -Wert der Teststatistik stellt das Entscheidungskriterium dar, ob die Null-Hypothese H_0 abgelehnt werden kann oder nicht. Bei einem Signifikanzniveau von $\hat{\alpha} = 0,05$ ist somit die Normalverteilungsannahme abzulehnen, falls der p -Wert kleiner als 0,05 ist.

Für detaillierte Ausführungen und Eigenschaften der Teststatistik sei an dieser Stelle auf [23] verwiesen, der Originalarbeit von Shapiro und Wilk aus dem Jahre 1965.

Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests der logarithmierten Diskontfaktoren der Historischen Simulation mit Ausgangsdatum 23. Juni 2006

	$B(H, H + 1)$	$B(H, H + 2)$	$B(H, H + 3)$
$\hat{W}$	0,9666	0,9831	0,9879
p -Wert	0,00002148	0,000059	0.001099

Tabelle 3.4.: Berechnungen mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Die Tabelle 3.4 liefert eine Übersicht über die Testergebnisse für die Verteilungen der logarithmierten Diskontfaktoren aus der Historischen Simulation. Die Werte der Shapiro-Wilk Statistik $\hat{W}$ sind für alle drei Restlaufzeiten nahe an 1. Bei einem vorgegebenem Signifikanz-Niveau von $\alpha=0,05$ wird jedoch die Null-Hypothese in allen drei Fällen abgelehnt, da der p -Wert jeweils kleiner als $\hat{\alpha}$ ist.

Bei einem großen Stichprobenumfang ist es sinnvoll, die Testergebnisse mit einem QQ-Norm-Plot zu verifizieren. Die QQ-Norm-Plots in Abbildung 3.1 unterstützen die Ablehnung der Null-Hypothese. Dementsprechend können die simulierten Diskontfaktoren der Historischen Simulation nicht als Realisierung einer log-normalverteilten Zufallsgröße aufgefasst werden. Die erste Arbeitshypothese muss folgerichtig verworfen werden.

QQ-Norm-Plots der logarithmierten Diskontfaktoren der Historischen Simulation mit Ausgangsdatum 23. Juni 2006

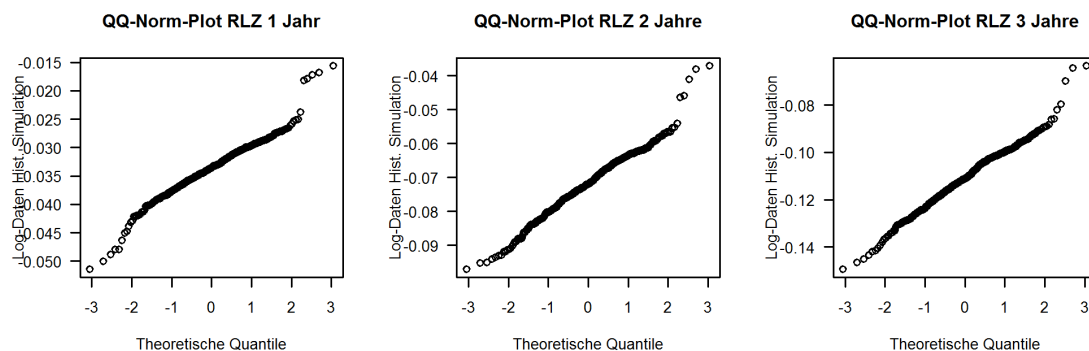


Abbildung 3.1.: Anfertigung mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Die Ergebnisse der Untersuchung des zweiten Vergleichsrechnung mit Ausgangsdatum 13. Februar 2001 stützen die obigen Ergebnisse und führen zu dem selben Schluss (vgl. Tabelle B.1 und Abbildung B.1).

Überprüfung der zweiten Arbeitshypothese

Als Ausgangspunkt der Betrachtung der zweiten Arbeitshypothese dienen 12 verschiedene Refinanzierungsstrategien. Die Strategien unterscheiden sich in der Kombination der vier Refinanzierungsinstrumente aus Tabelle 3.2. Ein Überblick über die Strategien befindet sich in der Tabelle 3.5.

Strategie	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
3-Monats FRN	1	0	0	0	0,25	0,5	0,5	0	0	0,2	0,5	0,1
6-Monats FRN	0	1	0	0	0,25	0	0,5	0,5	0	0	0,3	0,3
1-Jahres FRN	0	0	1	0	0,25	0	0	0,5	0,5	0,3	0,2	0,2
Darlehen	0	0	0	1	0,25	0,5	0	0	0,5	0,5	0	0

Tabelle 3.5.: Zusammensetzung der einzelnen Strategien

Ein wesentlicher Aspekt bei der Beurteilung der beiden Simulationsmethoden ist die Güte der Performance-Prognose und der *VaR*-Schätzung.

Zur Kontrolle der Güte der Performance-Prognose muss zuerst die tatsächliche Performance der Strategien zum Zeitpunkt H bestimmt werden. In der Abbildung 3.2 werden die verschiedenen Performance-Werte gegenübergestellt.

Während die Historische Simulation für jede Strategie von einer positiven Performance ausgeht, sieht das Bild bei der Stochastischen Simulation differenzierter aus. Sieben Strategien weisen eine negative Performance-Prognose auf. Für die übrigen fünf Strategien wird eine geringe, positive Performance ausgewiesen. Da es während der Haltedauer H zu einer Verflachung der Zinskurve auf höherem Niveau kommt, ist für elf Strategien die tatsächliche Performance negativ (siehe Tabelle 3.7). Es kann somit festgehalten werden, dass die Stochastische Simulation (in der Tendenz) die Gefahren dieser Entwicklung der Zinsstrukturkurve besser erkennt als die Historische Simulation.

Die Historische Simulation verwendet als Grundlage die historischen Veränderungen der Zinskurve nach einer Haltedauer H . Eine Verflachung der Zinskurve auf höherem Niveau ist in der Vergangenheit nicht so häufig eingetreten. Entsprechend besitzt diese Entwicklung bei der Bestimmung der empirischen Verteilungsfunktion der Barwerte mit Hilfe der Historischen Simulation ein untergeordnetes Gewicht. Anders sieht es bei der Stochastischen Simulation aus. Das Zinsstrukturmodell ist an die aktuellen Marktgegebenheiten kalibriert und vergangene Entwicklungen sind für die Simulation nicht von Relevanz. Aus diesen Gründen sind die Ergebnisse aus Abbildung 3.2 durchaus plausibel.

Vergleich der simulierten und der tatsächlichen Performance

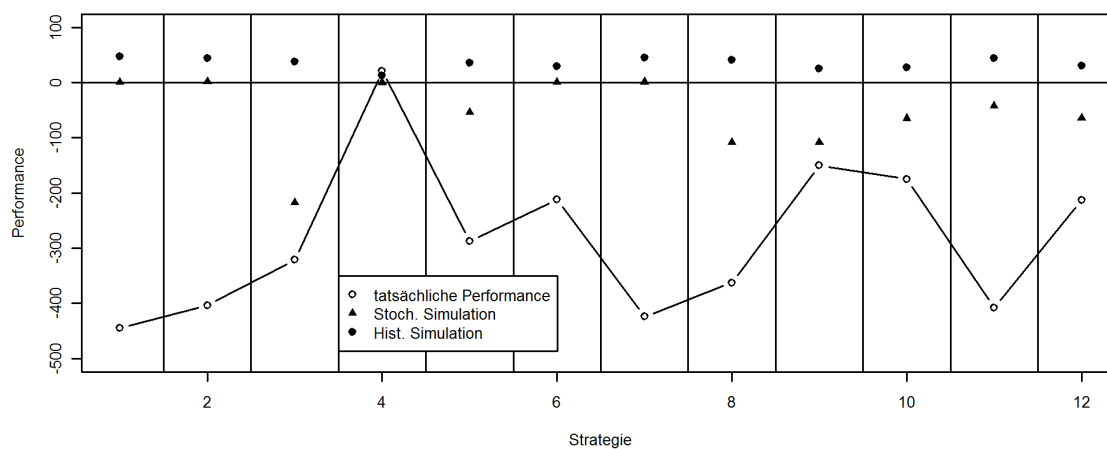


Abbildung 3.2.: Anfertigung mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Die Güte der *Value-at-Risk*-Schätzung ist schwieriger zu überprüfen. Ein *VaR*-Verfahren wird dann als gut befunden, wenn es zuverlässig arbeitet. Die Zuverlässigkeit wird mit Hilfe eines ständigen Vergleichs des tatsächlich eingetretenen Verlustes mit dem *VaR*-Wert überprüft. In einem ausreichend langen, zukünftigen Zeitraum sollte der prognostizierte *VaR*-Wert nur mit einem Anteil von $(1-\alpha)$ durch den tatsächlich eingetretenen Verlust übertroffen werden. Man kann jedoch manifestieren, dass die bestimmten *VaR*-Werte für beide Verfahren nur unwesentlich voneinander abweichen. Die Tabelle 3.6 verdeutlicht dies.

Vergleich der *Value-at-Risk*-Schätzungen (*VaR* 95%)

Strategie	Hist. Simulation	Stoch. Simulation	abs. Abweichung	proz. Abweichung in %
IV	135,20	107,89	-27,32	-20,20
IX	775,97	787,39	11,41	1,47
X	876,45	884,47	8,02	0,92
VI	1.027,15	1.030,58	3,43	0,33
XII	1.015,55	1.018,51	2,96	0,29
V	1.291,24	1.311,14	19,90	1,54
III	1.388,00	1.471,74	83,75	6,03
VIII	1.555,33	1.586,02	30,70	1,97
II	1.722,65	1.700,70	-21,95	-1,27
XI	1.739,57	1.783,02	43,45	2,50
VII	1.806,51	1.836,23	29,72	1,65
I	1.890,36	1.973,03	82,67	4,37

Tabelle 3.6.: Berechnungen mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Übersicht Simulationsergebnisse (Ausgangsdatum 23. Juni 2006 - Haltedauer: 3 Monate)

Strategie	IV	IX	X	VI	XII	V	III	VIII	II	XI	VII	I
3-Monats FRN	0	0	0,2	0,5	0,1	0,25	0	0	0	0,5	0,5	1
6-Monats FRN	0	0	0	0	0,2	0,25	0	0,5	1	0,3	0,5	0
1-Jahres FRN	0	0,5	0,3	0	0,3	0,25	1	0,5	0	0,2	0	0
Darlehen	1	0,5	0,5	0,5	0,4	0,25	0	0	0	0	0	0
Historische Simulation												
erw. Performance	12,52	25,25	26,98	29,58	29,85	35,26	37,99	40,94	43,88	44,08	45,26	46,64
VaR 95%	135,20	775,97	876,45	1.027,15	1.015,55	1.291,24	1.388,00	1.555,33	1.722,65	1.739,57	1.806,51	1.890,36
RORAC in %	9,26	3,25	3,08	2,88	2,94	2,73	2,74	2,63	2,55	2,53	2,51	2,47
Quantil 0,1	-93,37	-579,00	-652,18	-761,94	-753,34	-968,66	-1.055,49	-1.183,24	-1.310,99	-1.323,89	-1.374,99	-1.439,00
1. Quartil	-39,22	-276,90	-313,65	-368,36	-365,24	-469,53	-511,19	-573,23	-635,27	-641,50	-666,32	-697,37
Median	11,67	39,86	44,75	51,19	50,94	60,68	63,97	70,16	76,35	76,97	79,45	82,54
3. Quartil	74,77	370,75	415,39	482,99	479,65	609,25	662,61	740,86	819,11	826,89	858,19	897,27
Quantil 0,9	107,37	586,95	661,05	775,34	770,80	978,75	1.060,49	1.184,23	1.310,45	1.323,04	1.373,90	1.437,34
SD	85,97	514,77	582,39	683,84	680,14	871,90	947,28	1.060,03	1.172,79	1.184,07	1.229,17	1.285,55
Schiefte	0,13	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
Exzess	1,05	2,09	2,10	2,11	2,14	2,18	2,23	2,23	2,23	2,22	2,22	2,22
Stochastische Simulation												
erw. Performance	0,09	-108,67	-65,00	0,51	-64,87	-53,81	-217,44	-108,13	1,19	-42,67	1,05	0,92
VaR 95%	107,89	787,39	884,47	1.030,58	1.018,51	1.311,14	1.471,74	1.586,02	1.700,70	1.783,02	1.836,23	1.973,03
RORAC in %	0,09	-13,80	-7,35	0,05	-6,37	-4,10	-14,77	-6,82	0,07	-2,39	0,06	0,05
Quantil 0,1	-84,14	-641,02	-708,92	-821,76	-813,96	-1.043,28	-1.201,14	-1.268,90	-1.346,26	-1.418,25	-1.443,18	-1.551,96
1. Quartil	-44,64	-395,07	-407,56	-426,23	-463,75	-579,67	-745,12	-726,55	-712,36	-767,21	-764,41	-818,55
Median	-0,64	-118,12	-74,67	-2,07	-74,93	-65,15	-233,67	-122,48	-13,20	-54,02	-12,17	-16,09
3. Quartil	44,76	179,12	279,64	438,98	337,07	472,92	315,71	516,29	717,33	691,64	780,90	833,57
Quantil 0,9	85,02	428,92	578,91	812,21	687,00	932,91	773,32	1.057,78	1.342,55	1.330,80	1.446,81	1.552,41
SD	66,16	419,01	503,94	636,54	586,49	771,96	773,40	909,00	1.047,94	1.072,97	1.129,49	1.212,14
Schiefte	0,04	0,04	0,04	0,03	0,04	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03
Exzess	-0,02	-0,04	-0,04	-0,03	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03	-0,03
tatsächliche Performance	21,04	-150,14	-174,84	-211,89	-213,18	-287,18	-321,31	-362,46	-403,62	-407,75	-424,22	-444,81

Tabelle 3.7.: Datengrundlage: Berechnungen mit dem Excel-Modell - Auswertung: Statistikprogramm R

Die beiden vorherigen Analysen lassen zusammen eine weitere Beurteilung der Simulationsmethoden zu. Durch einen hohen *VaR*-Wert wird in beiden Simulationsarten ein hohes Ertrag- bzw. Verlustpotential angezeigt. Folgerichtig ist der erwartete Zusammenhang („hohes Risiko = hohes Ertrags-/Verlustpotential“) zwischen der Risikokennzahl *VaR* und der Ertragskennzahl *Performance* für beide Simulationsarten gegeben.

Die Hauptaufgabe der Simulationsmethoden ist es, die Auswahl einer Refinanzierungsstrategie zu unterstützen. Das RORAC-Diagramm aus Abbildung 3.3 ist ein wesentliches Hilfsmittel dieser Entscheidungsfindung.

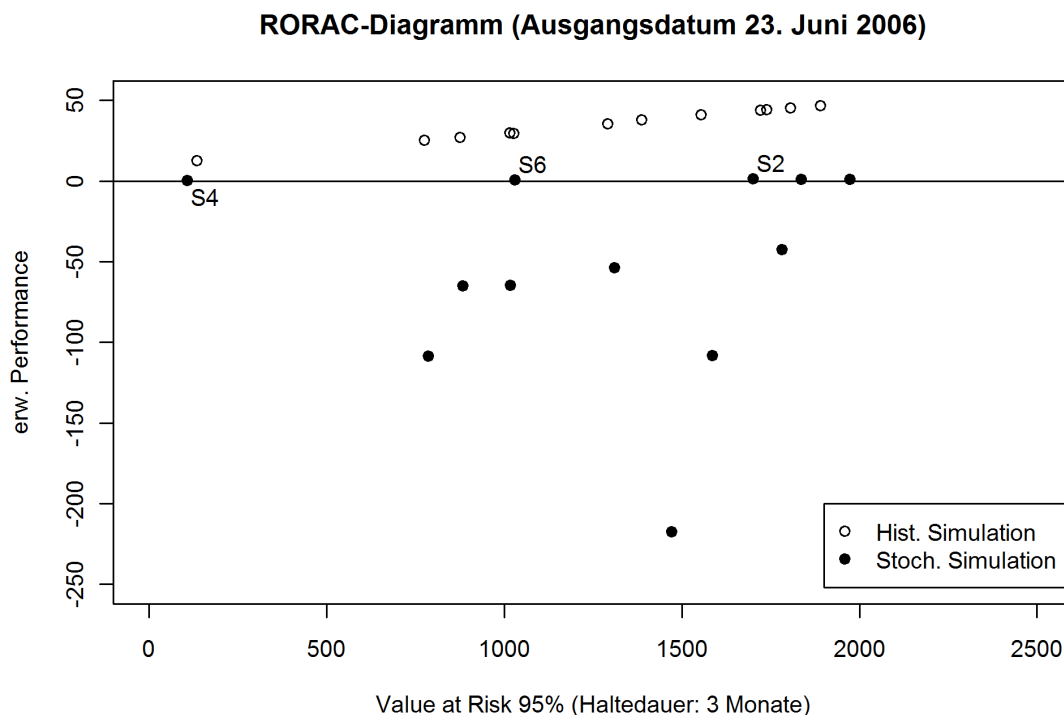


Abbildung 3.3.: Anfertigung mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Aus dem RORAC-Diagramm lassen sich für die Beurteilung der Historischen Simulation folgende Schlüsse ziehen:

Strategien mit einem hohen Anteil von Instrumenten mit kurzfristiger Zinsbindung (z.B. Strategien I, II, XI) weisen einen hohen *Value at Risk* und eine hohe erwartete Performance auf. Zusammen mit der Tabelle 3.7 ist durch das obige Diagramm ersichtlich, dass elf Strategien als zueinander indifferent eingeschätzt werden müssen

(vgl. Definition 1.7). Dadurch entsteht bei der Historischen Simulation der Eindruck eines linearen Zusammenhanges zwischen dem VaR und der erwarteten Performance. Für die Entscheidungsfindung hat dies folgende Konsequenz: Das Kreditinstitut wird das vorgegebene Risikolimit für diesen Kredit voll ausschöpfen um eine möglichst hohe erwartete Performance zu erzielen. Mit Berücksichtigung der tatsächlichen Performance-Entwicklung (vgl. Abbildung 3.2) ist dies jedoch die falsche Strategie und führt zu erhöhten Verlusten. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Historische Simulation das schwierige Marktumfeld nicht transparent darstellt und dies zu entsprechenden Fehleinschätzungen führt.

Anders stellt sich die Situation für die Beurteilung der Stochastischen Simulation dar:

Die Ergebnisse der Stochastischen Simulation zeichnen ein differenzierteres Bild der Gesamtsituation. Die Strategien II, IV und VI dominieren die übrigen Strategien. Strategien mit einer negativen Performance-Erwartung werden bei der Entscheidungsfindung nicht weiter berücksichtigt, da sie durch die risikolose Anlage (Performance = $VaR = 0$) dominiert werden. Für die Entscheidungsfindung sind somit nur noch drei Strategien von Bedeutung. Dies führt dazu, dass ökonomisches Kapital der Bank gespart wird, da selten das vorgegebene Risikolimit für einen Kredit mit der VaR -Schätzung einer effizienten Refinanzierungsstrategie übereinstimmt. Des Weiteren verdeutlicht das RORAC-Diagramm das schwierige Marktumfeld, in dem die Entscheidung über eine Refinanzierungsstrategie getroffen werden muss. Auf Grundlage der vorliegenden Daten der Stochastischen Simulation wird die Bank eher die Strategie IV für die Refinanzierung präferieren. Dies erweist sich nach einer Haltedauer von drei Monaten als die richtige Entscheidung.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass durch die Stochastische Simulation den Entscheidungsträgern erweiterte Informationen für die Entscheidungsfindung zur Verfügung gestellt werden und die Entscheidung für eine Refinanzierungsstrategie ökonomischer gestaltet werden kann.

Diese Einschätzung wird durch die zweite Simulationsrechnung mit Ausgangsdatum 13. Februar 2001 in der Tendenz bestätigt. Die entsprechenden Grafiken und Tabellen befinden sich im Kapitel B des Anhangs.

4. Die Refinanzierungsfristen- transformation

In der Einleitung ist dargestellt worden, dass neben der Zinsfristentransformation auch die Möglichkeit einer Refinanzierungsfristentransformation für die Kreditinstitute existiert (vgl. Tabelle 0.2). Das Handelsblatt schreibt in seiner Ausgabe vom 21. August 2008 hierzu unter der Überschrift „Banken pokern bei der Refinanzierung“: *Viele Banken gehen nach Expertenansicht bei der Refinanzierung große Risiken ein: Sie finanzieren sich immer kurzfristiger und häufig auch kleinteiliger. Dadurch werde die Liquiditätsbeschaffung der Institute zunehmend intransparent und unkalkulierbar, warnen Fachleute. [...] Manche Banken wüssten im Moment gar nicht, ob sie im Kreditgeschäft Geld verdienen oder am Ende drauflegten, weil die Refinanzierung so unsicher sei.*

In dem bisherigen Verlauf dieser Arbeit ist das Refinanzierungsrisiko nicht von Bedeutung gewesen. Der Fokus lag auf einer Verbesserung der Ertrags- und Risiko-steuerung durch die Verwendung eines Zinsstrukturmodells bei einer isolierten Zinsfristentransformation. Durch den Einsatz von laufzeitkongruenten *Floating Rate Notes* konnte in der Simulationsrechnung (siehe Kapitel 3) das Refinanzierungsrisiko des Kreditinstituts ausgeblendet werden. Der Vorteil lag darin, dass eine Veränderung der Zinsstrukturkurve als einziger Marktrisikofaktor behandelt werden musste. Führt das Kreditinstitut neben der Zinsfristentransformation auch eine Refinanzierungsfristentransformation durch, so ist diese Handhabung nicht mehr gerechtfertigt.

Das nachfolgende Beispiel stellt exemplarisch eine (gesonderte) Refinanzierungsfristentransformation dar und verdeutlicht die damit einhergehende Problemstellung für die barwertige Zinsbuchsteuerung.

Beispiel 4.1

Das Kreditinstitut vergibt ein Darlehen mit einer Laufzeit von drei Jahren und variabler Verzinsung, welche jeweils nach einem Jahr Laufzeit auf Grundlage eines Referenzzinssatzes angepasst wird (FRN). Als Referenzzinssatz dient der risikolose Geldmarktsatz mit Restlaufzeit von einem Jahr. Zusätzlich muss der Darlehensnehmer einen Risikoaufschlag $BS(t, 3)$ auf den Referenzzinssatz bezahlen. Dieser Aufschlag ist für die gesamte Laufzeit fix und hängt von seiner Bonität zum Zeitpunkt t und der zu vereinbarenden Laufzeit des Darlehens (3 Jahre) ab.

Die Refinanzierung des Darlehens erfolgt durch das Kreditinstitut rollierend durch drei endfällige Darlehen mit einer Laufzeit von jeweils einem Jahr. Zusätzlich zu dem risikolosen Zinssatz muss das Kreditinstitut einen Refinanzierungsaufschlag $RS(\cdot, 1)$ bezahlen. Die Abbildung 4.1 stellt ein beispielhaftes Netto-Cashflowprofil dieses Geschäftes dar.

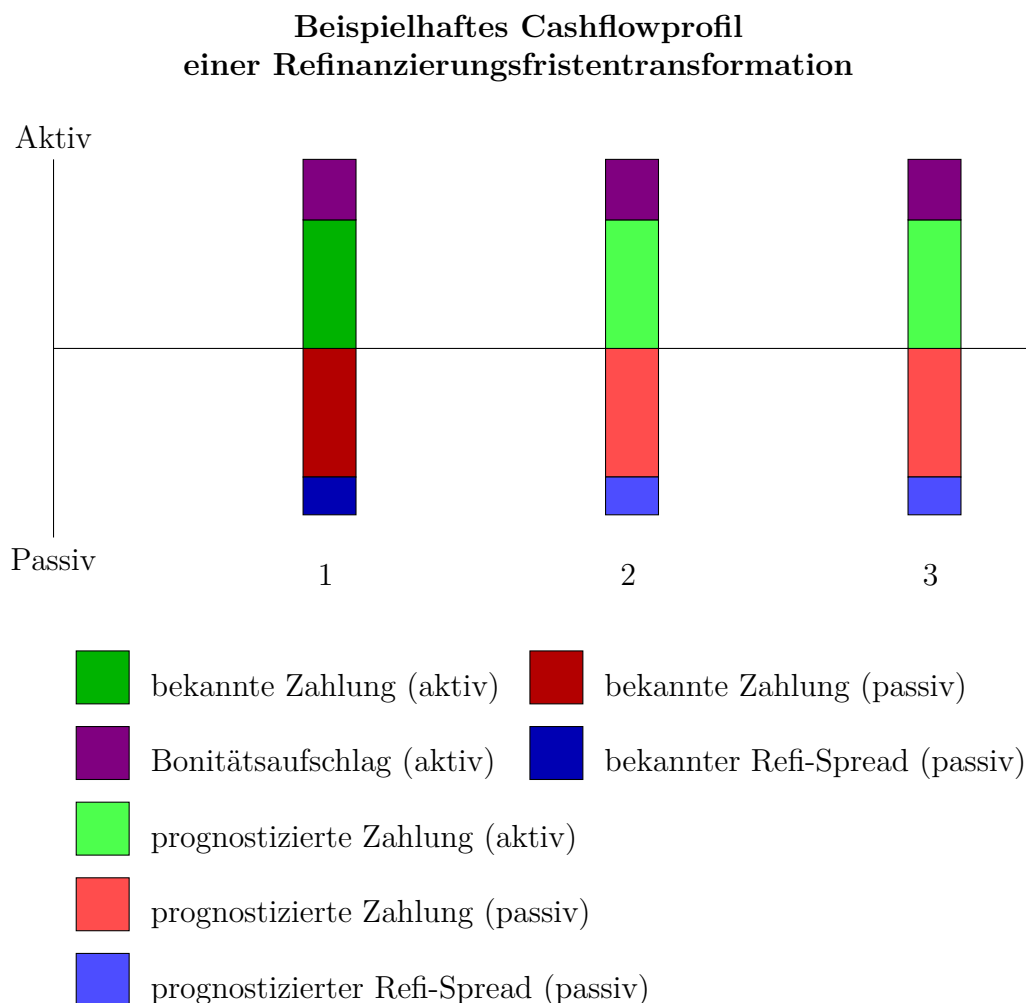


Abbildung 4.1.: Beispielhaftes Netto-Cashflowprofil

Für den Barwert dieses Geschäftes zum Analysetichtag $t = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} BW_0 &= \sum_{i=1}^3 \left[B(0, i) \left(Z_0^{aktiv}(i) + BS(0, 3) \right) - B(0, i) \left(Z_0^{passiv}(i) + RS(i - 1, 1) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 B(0, i) \left(BS(0, 3) - RS(i - 1, 1) \right) \end{aligned}$$

Entscheidend bei dieser Umformung ist, dass $Z_0^{aktiv}(\cdot)$ und $Z_0^{passiv}(\cdot)$ beide von dem risikolosen Kassazins mit Restlaufzeit von einem Jahr abhängen und somit identisch sind.

Der bonitätsabhängige Aufschlag $BS(0, 3)$ für das Darlehen des Kreditnehmers ist für die gesamte Laufzeit bekannt. Die Refinanzierungskosten des Kreditinstitutes dagegen sind variabel und lediglich für die erste Periode vereinbart. Eine Veränderung der eigenen Refinanzierungskurve ist entsprechend für das Institut der Hauptrisikofaktor. Das Zinsänderungsrisiko kann in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden.¹

Eine Veränderung der eigenen Refinanzierungskurve gehört laut Bundesbank (vgl. [8], S. 5) zu den Liquiditätsrisiken. Es wird zwischen folgenden Ausprägungen des Liquiditätsrisikos unterschieden:

- (1) Zahlungsunfähigkeits- oder dispositives Liquiditätsrisiko: Dies bezeichnet das Risiko, dass die Bank ihren gegenwärtigen und zukünftigen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr vollständig oder nicht fristgerecht nachkommen kann. Dies kann dadurch geschehen, dass Kreditlinien unerwartet in Anspruch genommen oder Spareinlagen überraschend massiv abgezogen werden (*Bank Run*).
- (2) Refinanzierungs- oder strukturelles Liquiditätsrisiko: Es bezeichnet das Risiko, dass Refinanzierungsmittel nur zu erhöhten Marktkonditionen beschafft werden können. In der Literatur werden ebenfalls die Begriffe *funding risk* oder strukturelles Liquiditätsrisiko verwendet.
- (3) Marktliquiditätsrisiko: Es bezeichnet das Risiko, dass Vermögenswerte nur mit Abschlägen am Markt liquidiert werden können. Dieses Risiko wird in den meisten Kreditinstituten im Zuge der Marktrisikosteuerung behandelt.

¹Da $BS(0, 3)$ und $RS(\cdot, 1)$ nicht durch eine Veränderung der Zinsstrukturkurve beeinflusst werden, ist dieses Geschäft mit der Strategie IV in der Simulationsrechnung aus Kapitel 3 vergleichbar (siehe Tabelle 3.7).

In den letzten Jahren haben meist statische Kennzahlen in den Instituten Anwendung gefunden, um das strukturelle Liquiditätsrisiko zu steuern. Diese statischen Kennzahlen werden auch „Fundingratios“ genannt (vgl. [22], S. 266). Sie setzen die vorhandenen mittel- bis langfristigen Refinanzierungsmittel ins Verhältnis mit den mittel- bis langfristigen Aktiva.

$$FR_t = \frac{\text{langfristige Refinanzierungsmittel}}{\text{langfristige Aktiva}}$$

Dieses Verhältnis sollte sich, je nach Risikoneigung des Institutes, zwischen 0,5 und 1 bewegen. Dadurch wird gewährleistet, dass die Chancen der Refinanzierungsfristentransformation wahrgenommen werden können, wobei das Risiko begrenzt ist. Eine Fundingratio von 1 bedeutet, dass keinerlei Refinanzierungsfristentransformation durchgeführt wird.

Die statischen Kennzahlen haben den großen Nachteil, dass keine Prognose der zukünftigen Refinanzierungskosten erfolgt. Vielmehr liefern sie Anhaltspunkte über das mögliche Risikopotential. In der letzten Zeit sind vermehrt neuere Konzepte in Erscheinung getreten. Sie versuchen die Frage zu beantworten, welche barwertigen Auswirkungen eine zukünftige Veränderung der bankeigenen Refinanzierungskonditionen mit sich bringt. Dabei sind grundsätzlich zwei verschiedene Vorgehensweisen möglich. Zum einen die integrierte Steuerung, bei der das Zinsänderungs- und das Refinanzierungsrisiko zeitgleich behandelt wird. Dazu wird die barwertige Zinsbuchsteuerung um einen weiteren Risikofaktor ergänzt. Dieser Risikofaktor spiegelt die unsicheren Refinanzierungskosten wider und wirkt sich somit auf den Barwert

$$BW_t = \sum_{i=0}^n \left[\left(B^{aktiv}(t, t_i) \cdot Z_t^{aktiv}(t_i) \right) - \left(B^{passiv}(t, t_i) \cdot Z_t^{passiv}(t_i) \right) \right]$$

der Gleichung (1.4) aus.

Bei dem zweiten Verfahren wird durch eine innerbetriebliche Verrechnung der Refinanzierungsertrag von dem Zinsertrag getrennt (vgl. [9], S. 173ff.). Es ist nun möglich die beiden Risikoarten getrennt voneinander zu steuern. Entsprechend führt das Institut neben dem Zinsbuch auch ein Liquiditätsbuch. Als Analogie zu der Definition 1.6 wird der Begriff des *Liquidity Value at Risk* definiert. Dieser dient als Maß für das Risiko der Refinanzierungsfristentransformation (vgl. u.a. [18], S. 136 oder [26], S. 67).

Beide Verfahren benötigen als Datengrundlage eine Prognose der zukünftigen Refinanzierungskosten. Dazu müssen zuerst die Risikotreiber des strukturellen Liquiditätsrisikos identifiziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind folgende Hauptrisikotreiber des strukturellen Liquiditätsrisikos identifiziert worden:

- (1) Die Bonität des Kreditinstitutes spielt für die Kosten der eigenen Refinanzierung eine zentrale Rolle. Sieht der Markt die Rückzahlung des Kredites durch das Institut als sicher an, so erhält das Institut deutlich bessere Konditionen als ein Institut, dessen Bonität geringer eingeschätzt wird. Als Indikator dieser Bonitätseinschätzung des Marktes kann die Ratingnote der Bank aufgefasst werden. Diese Ratingnote wird von Ratingagenturen (z.B. Standard&Poor's, Moodys, Fitch) vergeben und soll die Kreditwürdigkeit der Bank widerspiegeln.
- (2) Von maßgeblicher Bedeutung für die Refinanzierungskosten ist die Laufzeit der Refinanzierung.
- (3) Als letzter wesentlicher Risikofaktor ist die Liquidität des Marktes zu nennen. Im Zuge der Subprime-Krise sind die Refinanzierungskosten der Banken stark angestiegen, da kaum ein Marktteilnehmer bereit war, den Banken Refinanzierungsmittel zur Verfügung zu stellen.

Diese Hauptrisikotreiber drücken sich in der bankeigenen Refinanzierungskurve zum Zeitpunkt t aus.

Zur Bestimmung des *Liquidity Value at Risk* werden derzeit in der Praxis üblicherweise festdefinierte Szenarien betrachtet (vgl. [26], S. 68). Auf Grundlage der aktuellen Refinanzierungskurve werden mögliche Änderungsszenarien dieser Kurve festgelegt und mit Eintrittswahrscheinlichkeiten belegt. Ein einheitliches mathematisches Modell, welches für die Prognose der Refinanzierungskosten verwendet wird, konnte sich bis jetzt noch nicht durchsetzen. Dies liegt vor allem daran, dass diese Modelle die oben aufgeführten Hauptrisikotreiber des strukturellen Liquiditätsrisikos nicht vollständig berücksichtigen.

Das Modell von Reitz (siehe [18], S. 137ff.) ist ein solches mathematisches Modell. Mit Hilfe von Ratingmigrationsmatrizen lässt sich die Verteilung der zukünftigen Ratingnote der Bank bestimmen. Ist des Weiteren eine Zuordnung zwischen Laufzeit der Refinanzierung, Rating und Refinanzierungskosten je Ratingklasse gegeben, so lässt sich eine Verteilung der zukünftigen Refinanzierungskosten angeben.

In diesem Modell wird allerdings davon ausgegangen, dass die Bonitätseinschätzung des Marktes mit dem Rating des Institutes übereinstimmt. Hinzukommend wird die Liquidität des Marktes nicht berücksichtigt.

Das Modell von Reitz ist sicherlich ein sehr einfaches Modell. Es zeigt jedoch, dass durchaus mathematische Modelle zur Abschätzung der zukünftigen Refinanzierungskosten eines Kreditinstituts entwickelt werden. Vielversprechender sind Ansätze, die versuchen mit Hilfe von *Credit Default Swaps* zukünftige Mehrbelastungen für die Institute vorherzusagen.

5. Kritische Würdigung und Ausblick

Mittelständische Kreditinstitute erwirtschaften einen hohen Anteil ihres Ertrages mit der Fristentransformation. Allerdings entstehen für das Kreditinstitut je nach Art und Umfang der Fristentransformation erhebliche Risiken. Diese Risiken erfordern ein adäquates Steuerungskonzept.

Der Hauptteil dieser Arbeit widmete sich dem Zinsänderungsrisiko. In der barwertigen Zinsbuchsteuerung wird häufig eine Historische Simulation durchgeführt. Die Grundlage der Historischen Simulation ist die Auffassung, dass die historische Entwicklung eine gute Schätzung für zukünftige Zinsänderungen ist. Die Ergebnisse des Kapitel 3 legen nahe, dass diese Einschätzung zumindest teilweise revidiert werden muss. Mit Hilfe eines Zinsstrukturmodells konnte die Entscheidungsfindung zwischen verschiedenen Refinanzierungsstrategien verbessert werden. Abschließend ist nun zu klären, wie valide die Ergebnisse sind, welche Relevanz sie für die Bankpraxis besitzen und welche weiteren Untersuchungen sich an diese Arbeit anschließen können.

In der Simulation ist von einer stark vereinfachenden Ausgangssituation ausgegangen worden. Die Entscheidung über die jeweilige Refinanzierungsstrategie wird in der Bankpraxis nicht auf Einzelkredit-Ebene getroffen. Vielmehr wird das gesamte Zinsbuch betrachtet. Des Weiteren steht dem Kreditinstitut nicht nur der Kapitalmarkt als Refinanzierungsquelle zur Verfügung, sondern neben den Spareinlagen der Kunden auch besicherte Instrumente wie zum Beispiel Pfandbriefe. In zukünftigen Untersuchungen sind diese Alternativen ebenfalls in den Vergleich mit einzu beziehen. Für ein grundsätzliches Verständnis der barwertigen Zinsbuchsteuerung und einer ersten Einschätzung der beiden Simulationsarten ist die gewählte Ausgangssituation jedoch ausreichend.

Die Historische Simulation ist mit einer geringen Datenbasis durchgeführt worden (438 Datensätze). In den Kreditinstituten werden zum Teil Daten mit Hilfe von Bootstrapping-Methode aufbereitet. Für weitere Untersuchungen sollte die Datenbasis weiter ausgebaut werden, um eine verlässlichere Schätzung zu erreichen. Ebenfalls ist zu überprüfen, inwiefern es durch die log-lineare Interpolation zu einer Beeinflussung der Ergebnisse der Historischen Simulation gekommen ist. Für den Vergleich der beiden Simulationsmethoden sind nur zwei Zeitpunkte mit einer Haltedauer von drei Monaten ausgewählt worden. Dies ist sicherlich nicht ausreichend um zu einer umfassenden Einschätzung zu gelangen. Ein Parallelbetrieb beider Simulationsmethoden mit integrierter *Value-at-Risk*-Validierung ist sicherlich die Ideallösung.

Die Prognose der erwarteten Performance besitzt für beide Simulationsverfahren noch erhebliches Verbesserungspotential. Dies gilt insbesondere für die Historische Simulation. Für eine Verbesserung der Prognose kann zum Beispiel die Bestimmung des *Value-at-Risk* und der erwarteten Performance mit zwei unterschiedlichen Verfahren durchgeführt werden. Der *Value-at-Risk* wird weiterhin auf Grundlage der historischen Änderungen bzw. des Short Rate-Modells bestimmt. Für die Berechnung der erwarteten Performance wird dagegen die Forward-Rate-Kurve zum aktuellen Zeitpunkt t verwendet. In der Stochastischen Simulation ist eine Trennung der beiden Berechnungen nicht unbedingt notwendig. Vielmehr kann dies durch eine Verwendung eines komplexeren Zinsstrukturmodells erreicht werden. Insbesondere die Klasse der *Market-Models* bietet sich für diese Anforderungen an.

Trotz der Kritikpunkte ist festzuhalten, dass die Historische Simulation in gewissen Situation Fehlentscheidungen provoziert. Kreditinstitute mit einer fortgeschrittenen Steuerung des Zinsänderungsrisikos können im Vergleich zu ihrer Konkurrenz bessere Ergebnisse in einem umkämpften Marktumfeld erzielen.

In dem vorherigen Kapitel ist kurz auf das strukturelle Liquiditätsrisiko eingegangen worden. Gerade im Zuge der Suprime-Krise in den Jahren 2007 und 2008 ist diese Risikoart vermehrt in den Fokus getreten. Derzeit existieren nur wenige Verfahren für die Steuerung des Refinanzierungsrisikos. Ein Marktstandard hat sich in diesem Gebiet noch nicht etabliert, da die aktuellen Verfahren nicht die gesamte Komplexität dieses Bereiches abdecken. Somit existieren gerade in diesem Gebiet große Forschungs- und Entwicklungsmöglichkeiten.

A. Nebenrechnungen

In dem Abschnitt 2.3.5 ist für die Short Rate ein approximierender Baum konstruiert worden. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten ist ein Gleichungssystem hergeleitet worden, welches mit Hilfe von Maple gelöst worden ist. Die Ergebnisse finden sich in Satz 2.16 und sollen an dieser Stelle überprüft werden.

Theorem A.1

Die in dem Satz 2.16 angegebenen Wahrscheinlichkeiten lösen das folgende Gleichungssystem:

$$-ax(t)\Delta t = (p_{uu} + p_{ud})(x_u(t + \Delta t) - x(t)) + (p_{du} + p_{dd})(x_d(t + \Delta t) - x(t)) \quad (\text{I})$$

$$-bx(t)\Delta t = (p_{uu} + p_{du})(y_u(t + \Delta t) - y(t)) + (p_{ud} + p_{dd})(y_d(t + \Delta t) - y(t)) \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \sigma\eta\rho\Delta t = & p_{uu}(x_u(t + \Delta t) - x(t))(y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\ & + p_{ud}(x_u(t + \Delta t) - x(t))(y_d(t + \Delta t) - y(t)) \\ & + p_{du}(x_d(t + \Delta t) - x(t))(y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\ & + p_{dd}(x_d(t + \Delta t) - x(t))(y_d(t + \Delta t) - y(t)) \end{aligned} \quad (\text{III})$$

$$1 = p_{uu} + p_{du} + p_{ud} + p_{dd} \quad (\text{IV})$$

Beweis:

Setze $\nu_x = -ax(t)$ und $\nu_y = -by(t)$

1. Schritt: Berechnung von $p_{uu} + p_{du}$, $p_{uu} + p_{ud}$ und $p_{uu} + p_{dd}$

$$\begin{aligned}
& p_{uu} + p_{du} \\
&= \frac{1}{4} \left[\rho + (J_x(t) - 1)(J_y(t) - 1) - \frac{\nu_x \sqrt{\Delta t} (J_y(t) - 1)}{\sigma} - \frac{\nu_y \sqrt{\Delta t} (J_x(t) - 1)}{\eta} \right. \\
&\quad \left. - \rho - (J_x(t) + 1)(J_y(t) - 1) + \frac{\nu_x \sqrt{\Delta t} (J_y(t) - 1)}{\sigma} + \frac{\nu_y \sqrt{\Delta t} (J_x(t) - 1)}{\eta} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\rho + J_x J_y - J_y - J_x + 1 - \frac{\nu_y \sqrt{\Delta t} J_x(t) - \nu_y \sqrt{\Delta t} J_x(t)}{\eta} \right. \\
&\quad \left. - \rho - J_x J_y + J_x - J_y + 1 - \frac{\nu_y \sqrt{\Delta t} J_x(t) - \nu_y \sqrt{\Delta t} J_x(t)}{\eta} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[-2J_y + 2 + \frac{2\nu_y \sqrt{\Delta t}}{\eta} \right] \\
&= -\frac{1}{2}J_y + \frac{1}{2} + \frac{\nu_y \sqrt{\Delta t}}{2\eta}
\end{aligned}$$

Analoges Vorgehen liefert

$$\begin{aligned}
p_{uu} + p_{ud} &= -\frac{1}{2}J_x + \frac{1}{2} + \frac{\nu_x \sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \\
p_{uu} + p_{dd} &= \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}J_x J_y + \frac{1}{2} - \frac{\nu_x \sqrt{\Delta t}}{2\sigma} - \frac{\nu_y \sqrt{\Delta t}}{2\eta}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Überprüfung der Gleichung (IV)

$$\begin{aligned}
& p_{uu} + p_{ud} + p_{dd} + p_{du} \\
&= \frac{1}{4} \left[(J_x - 1)(J_y - 1) - (J_x - 1)(J_y + 1) - (J_x + 1)(J_y - 1) + (J_x + 1)(J_y + 1) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[J_x J_y - J_x - J_y + 1 - J_x J_y - J_x + J_y + 1 - J_x J_y + J_x \right. \\
&\quad \left. - J_y + 1 + J_x J_y + J_x + J_y + 1 \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Schritt: Überprüfung der Gleichungen (I) und (II)

$$\begin{aligned}
& (p_{uu} + p_{ud})(x_u(t + \Delta t) - x(t)) + (p_{du} + p_{dd})(x_d(t + \Delta t) - x(t)) \\
&= (p_{uu} + p_{ud})(J_x(t) + 1)\sigma\sqrt{\Delta t} + (1 - (p_{uu} + p_{ud}))(J_x(t) + 1)\sigma\sqrt{\Delta t} \\
&= \sigma\sqrt{\Delta t} \left[-\frac{1}{2}J_x^2 + \frac{1}{2}J_x + \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} - \frac{1}{2}J_x + \frac{1}{2} + \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} + J_x - 1 + \frac{1}{2}J_x^2 - \frac{1}{2}J_x \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} - \frac{1}{2}J_x + \frac{1}{2} + \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \right] \\
&= \nu_x\Delta t
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass Gleichung (II) ebenfalls gilt. 4. Schritt: Überprüfung der Gleichung (III)

$$\begin{aligned}
& p_{uu}(x_u(t + \Delta t) - x(t))(y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\
&+ p_{ud}(x_u(t + \Delta t) - x(t))(y_d(t + \Delta t) - y(t)) \\
&+ p_{du}(x_d(t + \Delta t) - x(t))(y_u(t + \Delta t) - y(t)) \\
&+ p_{dd}(x_d(t + \Delta t) - x(t))(y_d(t + \Delta t) - y(t)) \\
&= p_{uu}(J_x + 1)(J_y + 1)\sigma\eta\Delta t + p_{ud}(J_x + 1)(J_y - 1)\sigma\eta\Delta t \\
&\quad p_{du}(J_x - 1)(J_y + 1)\sigma\eta\Delta t + p_{dd}(J_x - 1)(J_y - 1)\sigma\eta\Delta t \\
&= \sigma\eta\Delta t [J_x J_y (p_{uu} + p_{ud} + p_{dd} + p_{du}) + J_x(p_{uu} - p_{ud} + p_{du} - p_{dd}) \\
&\quad + J_y(p_{uu} + p_{ud} - p_{du} - p_{dd}) + (p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd})] \\
&= \sigma\eta\Delta t [J_x J_y + J_x(p_{uu} + p_{du}) - J_x + J_x(p_{uu} + p_{du}) + J_y(p_{uu} + p_{ud}) \\
&\quad - J_y + J_y(p_{uu} + p_{ud}) + p_{uu} + p_{dd} - (1 - (p_{uu} + p_{du}))] \\
&= \sigma\eta\Delta t \left[J_x J_y + -J_x - J_y - 1 + 2J_x \left(-\frac{1}{2}J_y + \frac{1}{2} + \frac{\nu_y\sqrt{\Delta t}}{2\eta} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2J_y \left(-\frac{1}{2}J_x + \frac{1}{2} + \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \right) + 2 \left(\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}J_x J_y + \frac{1}{2} - \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} - \frac{\nu_y\sqrt{\Delta t}}{2\eta} \right) \right] \\
&= \sigma\eta\Delta t \left[J_x J_y + -J_x - J_y - 1 - J_x J_y + J_x + \frac{\nu_y\sqrt{\Delta t}}{\eta} J_x \right. \\
&\quad \left. - J_y J_x + J_y + \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{\sigma} J_y + \rho + J_x J_y + 1 - \frac{\nu_x\sqrt{\Delta t}}{\sigma} - \frac{\nu_y\sqrt{\Delta t}}{\eta} \right] \\
&= \rho\sigma\eta\Delta t
\end{aligned}$$

□

B. Ergänzende Tabellen und Grafiken

Bei der Analyse der Ergebnisse der Simulationsrechnung in Abschnitt 3.3 ist die Simulationsrechnung mit Ausgangsdatum 23. Juni 2006 und einer Haltedauer von drei Monaten detailliert beschrieben worden. An dieser Stelle werden nun die Grafiken und Tabellen der zweiten Simulationsrechnung mit Ausgangsdatum 13. Februar 2001 und Haltedauer drei Monaten aufgeführt.

Die Grafiken und Tabellen der zweiten Vergleichsrechnung bestätigen die in Kapitel 3 getroffenen Aussagen.

Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests der logarithmierten Diskontfaktoren der Historischen Simulation mit Ausgangsdatum 13. Februar 2001

	$B(H, H + 1)$	$B(H, H + 2)$	$B(H, H + 3)$
$\hat{W}$	0,9666	0,9831	0,9879
p -Wert	0,00002148	0,000059	0.001101

Tabelle B.1.: Berechnungen mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

QQ-Norm-Plots der logarithmierten Diskontfaktoren der Historischen Simulation mit Ausgangsdatum 13. Februar 2001

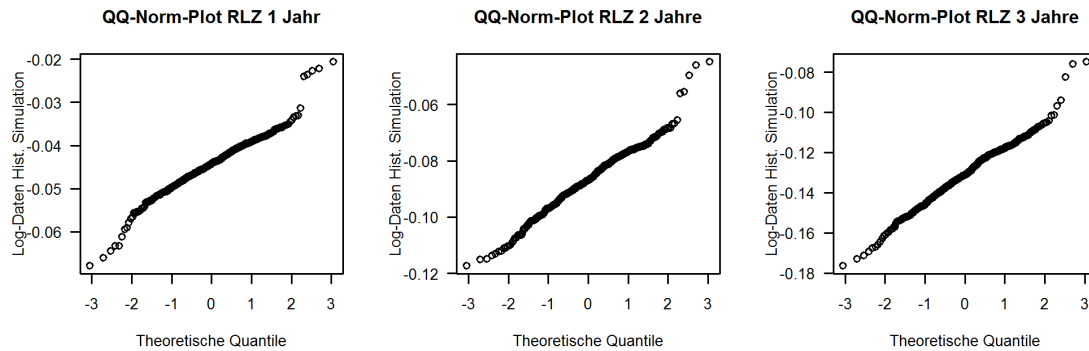


Abbildung B.1.: Anfertigung mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Vergleich der simulierten und der tatsächlichen Performance Ausgangsdatum 13. Februar 2001

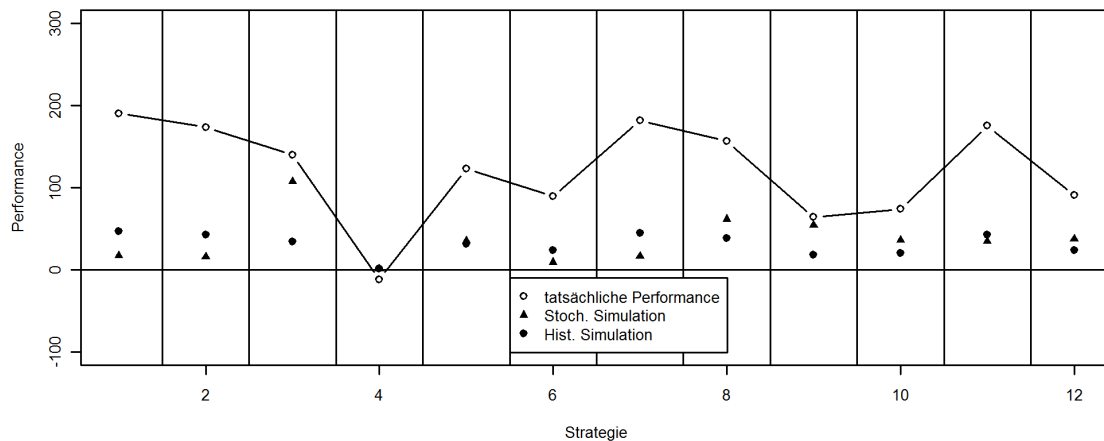


Abbildung B.2.: Anfertigung mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

**Vergleich der *Value-at-Risk*-Schätzungen
Ausgangsdatum 13. Februar 2001**

Strategie	Hist. Simulation	Stoch. Simulation	abs. Abweichung	proz. Abweichung in %
I	2.412,87	2.085,48	-327,39	-13,57
VII	2.302,89	1.988,64	-314,25	-13,65
XI	2.215,17	1.893,97	-321,20	-14,50
II	2.192,91	1.897,08	-295,83	-13,49
VIII	1.973,61	1.658,17	-315,43	-15,98
III	1.754,31	1.423,55	-330,76	-18,85
V	1.633,60	1.380,32	-253,29	-15,50
XII	1.275,89	1.062,45	-213,44	-16,73
VI	1.293,60	1.102,28	-191,31	-14,79
X	1.096,03	903,94	-192,09	-17,53
IX	964,31	772,74	-191,58	-19,87
IV	146,67	122,29	-24,38	-16,62

Tabelle B.2.: Berechnungen mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

RORAC-Diagramm (Ausgangsdatum 13. Februar 2001)

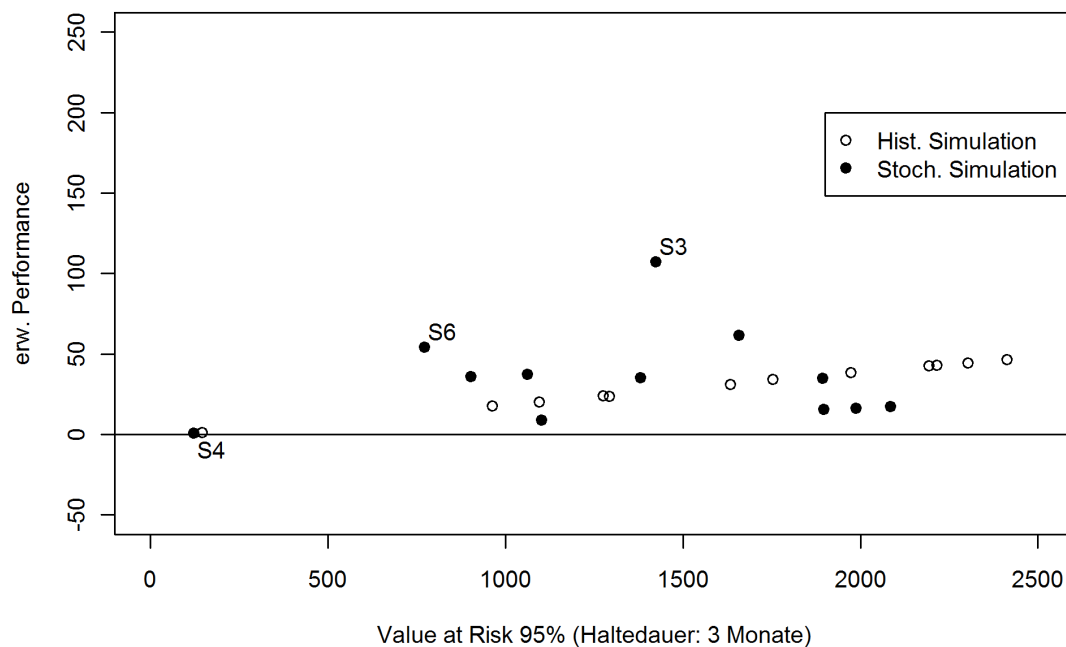


Abbildung B.3.: Anfertigung mit R - Datengrundlage: eigene Simulation

Übersicht Simulationsergebnisse (Ausgangsdatum 13. Februar 2001 - Haltedauer: 3 Monate)

Strategie	I	VII	XI	II	VIII	III	V	XII	VI	X	IX	IV
3-Monats FRN	1	0,5	0,5	0	0	0	0,25	0,1	0,5	0,2	0	0
6-Monats FRN	0	0,5	0,3	1	0,5	0	0,25	0,2	0	0	0	0
1-Jahres FRN	0	0	0,2	0	0,5	1	0,25	0,3	0	0,3	0,5	0
Darlehen	0	0	0	0	0	0	0,25	0,4	0,5	0,5	0,5	1
erw. Performance	46,26	44,37	42,71	42,47	38,34	34,21	30,99	23,79	23,64	20,02	17,61	1,01
VaR 95%	2.412,87	2.302,89	2.215,17	2.192,91	1.973,61	1.754,31	1.633,60	1.275,89	1.293,60	1.096,03	964,31	146,67
RORAC in %	1,92	1,93	1,93	1,94	1,94	1,95	1,90	1,86	1,83	1,83	1,83	0,69
Quantil 0,1	-1.852,42	-1.768,51	-1.701,53	-1.684,59	-1.517,14	-1.349,69	-1.251,99	-968,04	-972,63	-823,10	-723,42	-104,41
1. Quartil	-906,02	-865,45	-833,03	-824,88	-743,84	-662,79	-611,96	-475,38	-477,91	-404,75	-356,01	-50,45
Median	88,40	84,28	80,99	80,17	71,94	63,71	60,10	47,24	48,26	40,86	35,92	0,29
3. Quartil	1.126,56	1.076,36	1.036,14	1.026,16	925,61	825,06	764,31	590,23	593,20	501,36	442,01	63,37
Quantil 0,9	1.843,25	1.760,64	1.694,39	1.678,03	1.512,39	1.346,76	1.231,12	953,66	960,41	814,71	718,50	95,56
SD	1.648,97	1.575,39	1.516,54	1.501,82	1.354,69	1.207,56	1.110,12	860,42	865,62	733,21	644,94	86,13
Schiefte	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,14
Exzess	2,28	2,28	2,28	2,29	2,30	2,31	2,25	2,22	2,19	2,19	2,19	1,08
Historische Simulation												
erw. Performance	17,07	16,33	34,67	15,58	61,43	107,28	35,14	37,26	8,86	35,92	53,96	0,64
VaR 95%	2.085,48	1.988,64	1.893,97	1.897,08	1.658,17	1.423,55	1.380,32	1.062,45	1.102,28	903,94	772,74	122,29
RORAC in %	0,82	0,82	1,83	0,82	3,70	7,54	2,55	3,51	0,80	3,97	6,98	0,53
Quantil 0,1	-1.625,52	-1.558,55	-1.478,27	-1.480,89	-1.286,85	-1.088,32	-1.074,32	-825,57	-860,74	-702,01	-591,35	-94,91
1. Quartil	-858,38	-824,83	-768,65	-779,05	-656,47	-531,01	-552,48	-422,81	-455,33	-358,12	-290,08	-50,20
Median	7,34	7,27	23,76	2,21	46,31	95,20	24,49	27,41	5,10	27,30	47,38	-0,03
3. Quartil	881,65	838,00	829,27	801,61	773,18	740,83	618,21	492,17	466,77	424,50	397,06	51,27
Quantil 0,9	1.668,30	1.590,71	1.552,71	1.518,38	1.416,88	1.310,98	1.147,08	903,95	880,11	776,61	703,64	97,01
SD	1.280,61	1.222,75	1.176,18	1.164,93	1.048,60	932,35	863,01	670,48	677,49	572,98	503,41	74,48
Schiefte	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,04
Exzess	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07
tatsächliche Performance	190,06	181,63	174,89	173,2	156,35	139,5	122,69	90,69	89,02	73,85	63,74	-12,02

Tabelle B.3.: Datengrundlage: Berechnungen mit dem Excel-Modell - Auswertung: Statistikprogramm R

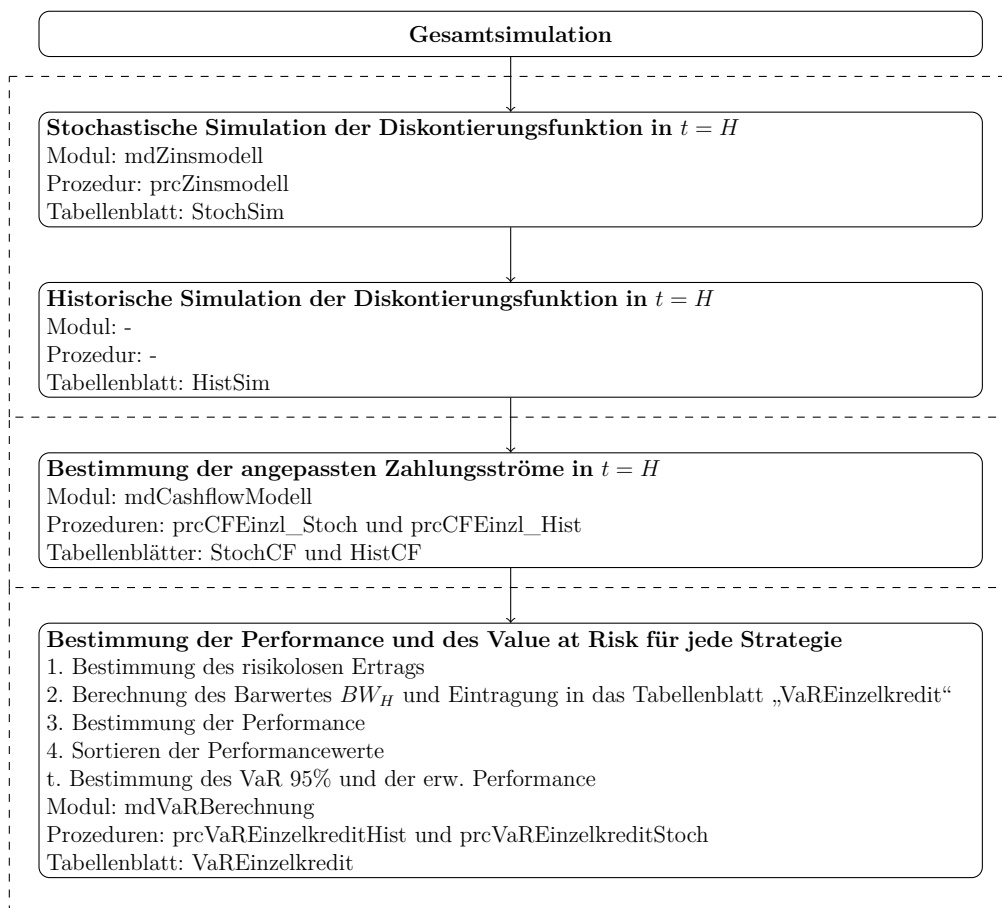
C. Daten-CD

Auf der Daten-CD befinden sich das in Excel-VBA programmierte Simulationsprogramm. Mit diesem Programm sind die beiden Vergleichsrechnungen durchgeführt worden. Die Rohdaten der beiden Vergleichsrechnungen befinden sich ebenfalls auf der Daten-CD. Des Weiteren enthält die Daten-CD die Grafiken und Tabellen der Auswertungen, einschließlich der zugehörigen Programmcodes des Statistikprogrammes R.

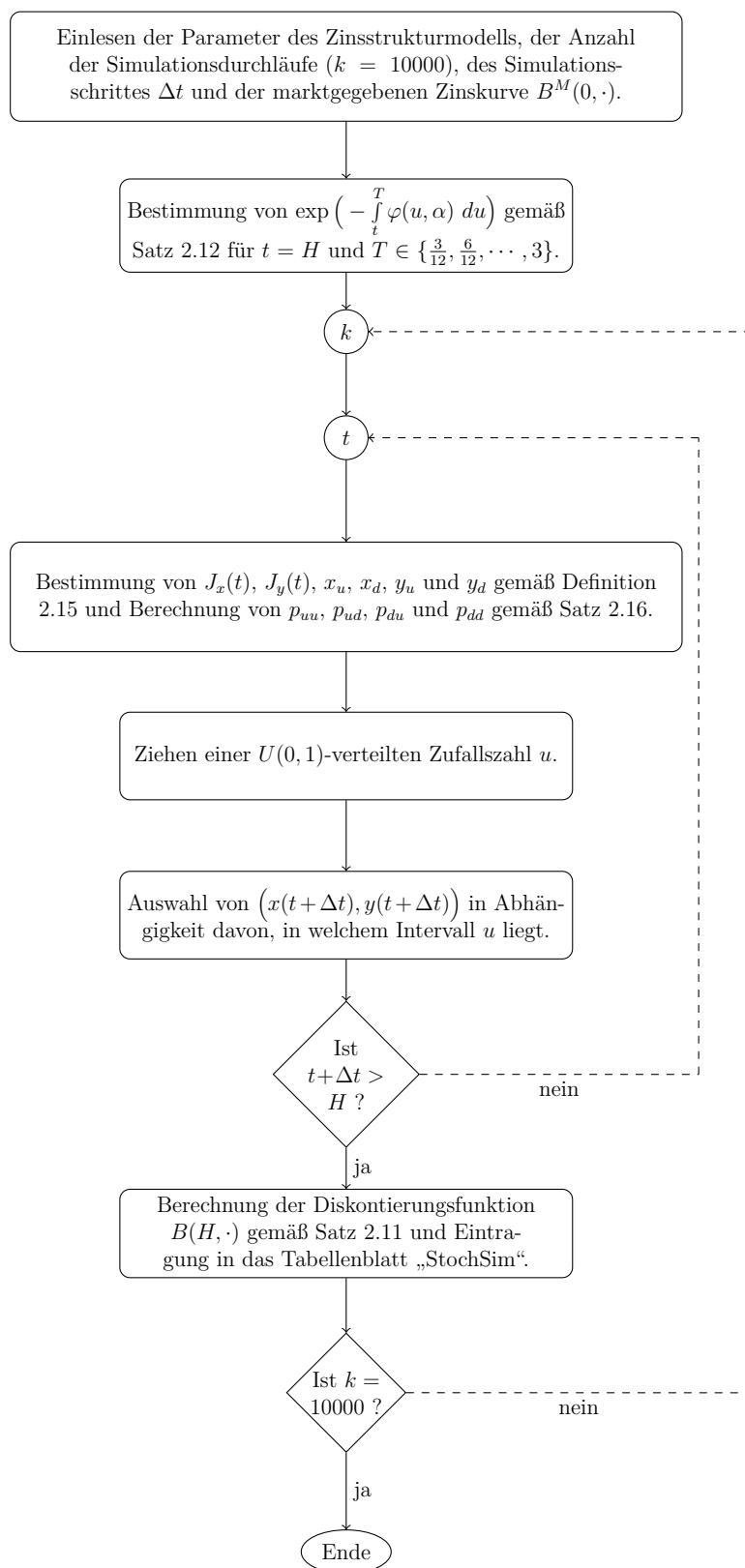
D. Programmablaufpläne

Es werden nun zwei Programmablaufpläne des Excell-VBA-Modells vorgestellt. Dadurch soll ein besseres Verständnis des Aufbaus und der Programmierlogik des Programmes erreicht werden.

Ablaufplan der Gesamtsimulation



Ablaufplan der Zinssimulation (Prozedur „prcZinssimulation“)



Literaturverzeichnis

- [1] Gerold ALSMEYER: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Nummer 30 in *Skripten zur Mathematischen Statistik*. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2005.
- [2] Walter ALT: *Nichtlineare Optimierung*. vieweg-Verlag, 1. Auflage, Mai 2002.
- [3] Thomas BJÖRK: *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2nd edition, March 2004.
- [4] Nicole BRANGER und Christian SCHLAG: *Zinsderivate: Modelle und Bewertung*. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, April 2004.
- [5] Damiano BRIGO and Fabio MERCURIO: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, May 2006.
- [6] Damiano BRIGO and Andrea PALLAVICINI: *Counterparty risk and contingent cds valuation under correlation between interest-rates and default*, March 2008. <http://www.damianobrigo.it/counterpartycorr.pdf>, visited on 05/03/09.
- [7] Ralph B. D'AGOSTINO and Michael A. STEPHENS: *Goodness-Of-Fit-Techniques*. Marcel Dekker Inc., 1. edition, June 1986.
- [8] DEUTSCHE BUNDESBANK: *Praxis des Liquiditätsrisikomanagements in ausgewählten deutschen Kreditinstituten*, 2007. <http://www.bundesbank.de/download/bankenaufsicht/pdf/liquiditaetsrisikomanagement.pdf>, besucht: 8.08.2009.
- [9] Mathias HOFMANN: *Management von Refinanzierungsrisiken in Kreditinstituten*. Gabler Verlag, 1. Auflage, Januar 2009.

- [10] Dirk HOLLÄNDER: *Kalkulation und Steuerung von Ergebnisbeiträgen aus der Zinsrisikoposition deutscher Kreditinstitute*. Schriftenreihe des zeb/. Fritz Knapp Verlag, Mai 2007.
- [11] Lutz JOHANNING: *Value-at-Risk zur Marktrisikosteuerung und Eigenkapitalallokation*. Risikomanagement und Finanzcontrolling. Uhlenbruch Verlag, Februar 1988.
- [12] Ioannis KARATZAS and Steven SHREVE: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, Berlin, 2. edition, September 2004.
- [13] Samuel KARLIN and Howard M. TAYLOR: *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press Inc., April 1981.
- [14] Wilhelm MENNINGHAUS: *Barwertige Zinsbuchsteuerung*. In: Henner SCHIERENBECK, Bernd ROLFES *et al.* (Herausgeber): *Handbuch Bankcontrolling*, Seiten 1147–1160. Gabler Verlag, zweite überarb. u. erw Auflage, Juni 2001.
- [15] Kalina NATCHEVA-ACAR: *On Numerical Pricing Methods of Innovative Financial Products*. Dissertation, TU Kaiserslautern, November 2006. <http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=982612087>, besucht: 04.03.09.
- [16] Volkert PAULSEN: *Skript Finanzmathematik I und II*. handschriftliches Vorlesungsskript. SoSe 2008 und WiSe 2008/2009.
- [17] PRIVATBANK SAL. OPPENHEIM JR. & CIE. KGAA, KÖLN: *Geschäftsbericht 2008*, Januar 2009. http://www.oppenheim.de/internet/presseportal/50_geschaeftsberichte/2008/SOP-KGAA_GB2008_view.pdf, besucht: 4.05.2009.
- [18] Stefan REITZ: *Moderne Konzepte zur Messung des Liquiditätsrisikos*. In: Walter GRUBER, Carsten WEHN *et al.* (Herausgeber): *Handbuch Liquiditätsrisiko*, Seiten 121–140. Schäffer-Poeschel, 1. Auflage, Februar 2008.
- [19] Stefan REITZ, Willi SCHWARZ und Marcus MARTIN: *Zinsderivate*. vieweg Verlag, 1. Auflage, Dezember 2003.

- [20] Henner SCHIERENBECK: *Ertragsorientiertes Bankmanagement Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling*. Gabler Verlag, 8. Auflage, September 2003.
- [21] Thorsten SCHMIDT: *Skript Zinsstrukturmodelle*. Universität Leipzig, Januar 2005. http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/FM_skriptWS04_05.pdf, besucht: 02.02.2009.
- [22] Dirk SCHRÖTER und Oliver SCHWARZ: *Optimale Strukturen und Prozesse für das Liquiditätsrisikomanagement*. In: Walter GRUBER, Carsten WEHN *et al.* (Herausgeber): *Handbuch Liquiditätsrisiko*, Seiten 247–278. Schäffer-Poeschel, 1. Auflage, Februar 2008.
- [23] Samuel SHAPIRO and Martin WILK: *An analysis of variance test for normality*. Biometrika, 1965. <http://sci2s.ugr.es/keel/pdf/algorithm/articulo/shapiro1965.pdf>, visited on 07/09/09.
- [24] Steven E. SHREVE: *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, April 2004.
- [25] ÖSTERREICHISCHE NATIONALBANK: *Leitfaden zum Management des Zinsrisikos im Bankbuch*, März 2008. http://www.oenb.at/de/img/leitfaden_zrs_screen_tcm14-83154.pdf, besucht: 12.01.2009.
- [26] Holger THOMAE: *Das Risiko exakt bemessen*. die bank, Dezember 2008. <http://www.die-bank.de/betriebswirtschaft/das-risiko-exakt-bemessen>, besucht: 05.06.2009.
- [27] Oldrich VASICEK: *An equilibrium characterisation of the term structure*. Journal of Financial Economics, pages 177–188, August 1977. <http://www.dms.umontreal.ca/~dugas/act6230/articles/Vasicek77.pdf>, besucht: 04.02.2009.
- [28] Jörg VÖLKER: *Value-at-Risk-Modelle in Banken*. Neue Betriebswirtschaftliche Studienbücher. Berliner Wissenschafts-Verlag, 1. Auflage, Januar 2001.

- [29] Olaf WEGNER, Christian SIEVI und Matthias SCHUMACHER: *Benchmarks im Rahmen der wertorientierten Steuerung des Zinsänderungsrisikos*. Betriebswirtschaftliche Blätter, Juli 2002. 51. Jahrgang.