

Der Benchmarkansatz zur Bewertung von Wetterderivaten

Diplomarbeit

von Kristina Salm

Themenstellung und Betreuung:
Herr Dr. Volkert Paulsen

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Einleitung | 5 |
| 1 Wetterderivate | 7 |
| 1.1 Der Einfluss des Wetters | 8 |
| 1.2 Der Wettermarkt | 10 |
| 1.3 Gestaltungsmerkmale eines Wetterderivats | 12 |
| 2 Der Benchmark-Bewertungsansatz | 17 |
| 2.1 Das Modell | 18 |
| 2.2 Das Growth Optimal Portfolio (GOP) | 23 |
| 2.2.1 Approximation des GOP | 27 |
| 2.2.2 Die Supermartingaleigenschaft | 34 |
| 2.3 Faire Bewertung | 36 |
| 2.3.1 Zusammenhang zur risikoneutralen Bewertung | 41 |
| 2.3.2 Unabhängigkeit vom GOP: Der Wetterderivatfall | 43 |
| 2.3.3 Faire Bewertung von Wetterderivaten | 45 |
| 3 Anwendung | 49 |
| 3.1 Die Daten | 49 |
| 3.2 Anwendung der Historischen Bewertungsmethode (HFP) | 54 |
| 3.3 Anwendung der Verteilungsmethode | 55 |
| 3.4 Zeitreihenanalyse | 60 |
| 3.5 Methodenvergleich | 66 |
| 3.6 Fazit | 69 |
| Literaturverzeichnis | 71 |
| Anhang | 75 |

Einleitung

Wenn man einander nichts Interessantes zu erzählen hat, sagt man, man könne ja über das Wetter sprechen - und meint damit, dass es sich dabei um ein völlig belangloses, langweiliges Thema handele. Doch das Gegenteil ist der Fall: Das Wetter hat große Relevanz für eine Vielzahl von Bereichen der Weltwirtschaft. Mit dem Klimawandel wird der Einfluss des Wetters vermutlich in Zukunft noch immens steigen. Umso wichtiger ist es da, die Möglichkeit zu haben, sich gegen schädliche Wettereinflüsse abzusichern. Das relativ junge Finanzgut "Wetterderivat" kann hier Abhilfe leisten. Das erste Kapitel erklärt nicht nur, worum es sich dabei genau handelt, sondern stellt auch wichtige Eigenschaften von Wetterderivaten vor und gibt eine Übersicht über die vielfältigen Einflüsse des Wetters auf verschiedenste Bereiche der Wirtschaft.

Wenn man dies alles weiß, stellt sich natürlich die Frage, wie man dieses Finanzgut fair bewerten kann. In Kapitel 2 wird sich zeigen, dass die klassische Black-Scholes-Formel nicht dafür geeignet ist. Stattdessen stelle ich dort den Benchmarkansatz vor, der ohne die Vorraussetzungen auskommt, die die Anwendung der Black-Scholes-Formel auf Wetterderivate unmöglich machen. Dieser Bewertungsansatz, der auf der Verwendung eines anderen numeraire beruht, ist auch für viele andere Finanzgüter geeignet, die ebenfalls die Vorraussetzungen für die Black-Scholes-Formel nicht erfüllen.

Im dritten und letzten Kapitel schließlich möchte ich feststellen, wie sich der Benchmarkansatz und die aus ihm resultierende Bewertungsformel in die Praxis umsetzen lassen. Dazu wähle ich ein reales Wetterderivat aus und versuche, den Benchmarkansatz darauf anzuwenden. Dazu nutze ich verschiedene Prognosemethoden.

Kapitel 1

Wetterderivate

Wetterderivate sind Finanzgüter, deren Auszahlungen - im Gegensatz zu klassischen Derivaten - nicht von Preisen von Basisfinanzgütern wie Aktien oder Rohstoffen abhängen, sondern von der Entwicklung von Wetterphänomenen, ausgedrückt durch Wetterindices.

Wetterderivate sind ein relativ junges Finanzgut. Ihre Entstehung wurde durch die Deregulierung des amerikanischen Energiemarktes begünstigt: Durch den verstärkten Konkurrenzkampf sind die Energieunternehmen bestrebt, Angebot und Nachfrage möglichst anzunähern. So wurde dann auch 1997 das erste Wetterderivat zwischen zwei Energiekonzernen gehandelt. Es handelte sich um eine Wetteroption, die Teil eines Energievertrages war. Auslöser war der besonders milde Winter (verursacht durch das Wetterphänomen "El Niño"), in dem mit geringerem Heizbedarf und somit geringerem Absatz gerechnet werden musste. So entstand die Idee, sich gegen diese Absatzschwankungen abzusichern. Bisher hatten sich Unternehmen lediglich gegen Preisschwankungen abgesichert.

In der zeitlichen Entwicklung sind Wetterderivate als Weiterentwicklung der bisherigen Verschmelzung von Kapital- und Versicherungsmarkt interpretierbar. So hatte es zuvor bereits Katastrophen-Optionen und -Bonds gegeben (auch wenn diese etwas anderer Natur sind als Wetterderivate).

1999 wurde beim Chicago Mercantile Exchange (CME) das erste Wetterderivat an der Börse gehandelt. Dies hatte nicht nur das Ziel, den Markt für Wetterderivate zu vergrößern, sondern auch das Kreditrisiko zu verringern und dem Markt zu mehr Liquidität zu verhelfen.

1.1 Der Einfluss des Wetters

“Weather is not just an environmental issue; it is a major economic factor. At least \$ 1 trillion of our economy is weather sensitive.“ [4] Dieses Zitat aus dem Jahr 1998 von William Daley, damaliger amerikanischer Handelsminister, verdeutlicht, welchen Einfluss das Wetter auf die Wirtschaft hat. Wilkens und Kamp geben an, dass ca. 14% des amerikanischen Bruttosozialprodukts vom Wetter abhängig sind [23], Carabello spricht davon, dass fast 20% der US-Wirtschaft von Wettereinflüssen betroffen seien [4]. Garcia & Sturzenegger behaupten, 70% aller Unternehmen seien vom Wetterrisiko betroffen [8].

Einige Beispiele für den Einfluss des Wetters: Ertragsmengen in der Landwirtschaft hängen stark von den klimatischen Bedingungen ab: Herrscht zu lange Frost, kann erst spät gesät werden. Zu viel Hitze und fehlender Niederschlag lassen die Felder vertrocknen, zu viel Regen ist aber meist auch schädlich.

Wie oben angedeutet hängen auch Energieunternehmen stark vom Wetter ab: Je kälter der Winter, desto mehr werden die Menschen heizen und desto größer wird der Absatz an Gas, Öl und anderen Heizmitteln ausfallen. Ein milder Winter führt hingegen zu Absatzeinbußen. Entsprechend verhält es sich (besonders in den USA) im Sommer für die Anbieter von Elektrizität: Je wärmer es ist, desto mehr Klimaanlage werden eingeschaltet und somit mehr Strom verbraucht.

Ist das Wetter im eigenen Land längere Zeit schlecht, werden die Leute eher Fernreisen buchen, bei einer Schönwetterperiode machen viele Urlaub im eigenen Land. Freizeitparks haben mehr Besucher, wenn es trocken ist und können einige Fahrgeschäfte bei Regen oder starkem Wind nicht betreiben. Auch die Konsumgüterindustrie ist in vielfältiger Weise betroffen. So werden etwa bei warmen Temperaturen mehr Erfrischungsgetränke und Eis verkauft. Auch das Baugewerbe wird vom Wetter beeinflusst: Ist der Boden gefroren, kann nicht gearbeitet werden und starker Wind erschwert die Arbeit auf Baugerüsten. Ebenso sind Transportunternehmen beeinträchtigt, wenn das Wetter den Verkehr erschwert.

Typisch für das Wetter ist, dass es stets lokal ist, auch an vergleichsweise nahe beieinander gelegenen Orten kann es sehr unterschiedlich sein. Dazu kommt, dass es nur sehr schwer vorhersagbar ist, besonders langfristige Prognosen sind oft unzuverlässig. Das Wetter lässt sich weder kontrollieren noch beeinflussen, daher lässt sich negativer Einfluss kaum vermeiden. Einige Unternehmen sind in zyklischer Weise betroffen (Gas- und Ölkonzerne im Winter, Energieunternehmen im Sommer), andere in unregelmäßiger Form (z.B. die Freizeitindustrie). Weitere Unterschiede bestehen in der Art des Einflusses:

Für manche Firmen sind kumulierte Abweichungen von bestimmten Standardwerten entscheidend (die gesamte Unterschreitung einer gewissen Temperatur in der Wintersaison etwa determiniert den Heizbedarf), für andere die Anzahl an Tagen, an denen schlechte Bedingungen herrschen (z.B. die Zahl der Tage, an denen auf einer Baustelle nicht gearbeitet werden kann). Für wieder andere reicht schon ein einziges negatives Ereignis aus.

Der Einfluss des Wetters lässt sich nicht verhindern, aber die finanziellen Folgen können abgeschwächt werden - durch Wetterderivate.

Wie bereits oben bemerkt, hat das Wetter Einfluss auf Mengen, weniger auf Preise. Durch Preisänderungen kann nicht angemessen auf Absatzeinbußen durch das Wetter reagiert werden - wohl hingegen durch eine Wetteroption, die genau dann zu Zahlungen führt, wenn die eigene Absatzmenge gering ist. Umgekehrt kann ein Unternehmen auch eine Option herausgeben: Wenn es aufgrund von günstigen Wetterbedingungen auf große Nachfrage trifft, kann es sich Zahlungen an den Käufer der Option leisten, ansonsten hat man immerhin die Prämie. Somit können Wetterderivate helfen, Absatz- und Nachfrageschwankungen auszugleichen.

Zwei Vertragspartner, für die unterschiedliche Wetterbedingungen ein Risiko darstellen, können ihre Risiken austauschen, indem ein Vertrag eingegangen wird, bei dem jeweils derjenige, für den günstige Bedingungen herrschen, Zahlungen an der anderen leistet. Das Risiko für den Einzelnen wird dadurch geringer.

Des Weiteren sind auch Cross-Commodity-Hedges möglich: Hat man z.B. Anteil an Gas im Portfolio, kann man dies ausgleichen, indem man eine Wetteroption kauft, die bei milden Temperaturen ausgeübt wird.

Versicherungen schützen ebenfalls vor negativen Wettereinflüssen, jedoch auf ganz andere Weise, denn sie sichern den Versicherten gegen verschiedenste Katastrophen wie Wirbelstürme oder Überschwemmungen ab - also im Allgemeinen gegen Ereignisse, die zwar mit geringer Wahrscheinlichkeit auftreten, deren Auswirkungen dafür aber umso gravierender sind. Diese werden auch als "high risk, low probability"-Ereignisse bezeichnet. Im Gegensatz dazu schützen Wetterderivate vor den negativen Folgen von Wetterereignissen, die durchaus häufig vorkommen und für wahrscheinlich gehalten werden, wie z.B. milde Winter oder nasskalte Sommer. Dafür sind die Folgen eines solchen Phänomens natürlich harmloser als dies bei Katastrophen der Fall ist. Wetterderivate sichern also "low risk, high probability"-Ereignisse ab.

1.2 Der Wettermarkt

Bis zum Jahr 2001 sind in den USA ca. 4.500 Wetterkontrakte abgeschlossen worden, deren Volumen 7,3 Milliarden US-Dollar betrug. [23] Von da an ist der amerikanische Wettermarkt stetig weiter gewachsen.

Im Gegensatz dazu wirkt der europäische Markt mit 200 Kontrakten und einem Volumen von umgerechnet 120 Millionen US-Dollar relativ klein. Die "Weather Risk Management Association" hat aber auch herausgefunden, dass der europäische Markt rasant wächst: Für den Zeitraum von 2001 bis 2002 wurde eine Erhöhung der Kontraktzahl um 345% und eine Vergrößerung des Volumens um 1126% gemessen. [22]

Besonders in Europa sind die Marktvolumina also noch gering, aber aufgrund des großen Wettereinflusses wird dem Markt allgemein großes Potenzial bescheinigt, so dass für die Zukunft von starkem Wachstum ausgegangen wird.

Im Gegensatz dazu gibt es aber auch einige Hemmnisse, die die Entwicklung des Wettermarktes bisher beeinträchtigt haben:

Wetterrisiken sind schwer quantifizierbar. Das bedeutet, dass Unternehmen zwar wissen, dass sie vom Wetter abhängig sind, es aber nur schwer möglich ist, dieses Risiko von anderen Einflussfaktoren zu isolieren und durch eine konkrete Kennzahl abzubilden. Diese ist aber unerlässlich zur Gestaltung eines Wetterkontraktes (vgl. Abschnitt "Gestaltungsmerkmale eines Wetterderivats").

Wie später noch ausführlicher festgestellt werden wird, fehlt es dem Markt bisher auch an einer allgemein anerkannten, transparenten Bewertungsmethode für Wetterderivate, da herkömmliche Mittel versagen.

Historische und aktuelle Wetterdaten, die zur Bewertung und Einschätzung eines Derivats bzw. zur Bestimmung des Payoffs nötig sind, sind oft nur schwer zu beschaffen und/oder verursachen hohe Kosten. Dazu kommt, dass die Wetterdaten, die man erhält, oftmals nicht konsistent sind (z.B. werden im Zeitablauf Messmethoden oder -orte geändert).

Da die meisten Geschäfte over-the-counter (OTC) abgewickelt werden, geht der Verkäufer eines Wetterderivats oft ein Kreditrisiko ein. Der Markt ist noch ziemlich illiquide. Dies zeigt sich in den großen Spannen zwischen Angebots- und Nachfragepreisen. Gerade in den USA ist aber zu beobachten, dass sich die Situation langsam bessert. Abschließend ist noch zu erwähnen, dass es noch keine steuerlichen Regeln für Wetterderivate gibt.

In Europa kommen viele dieser Hemmnisse noch schwerwiegender zum Tragen als in den USA, es gibt etwa kaum standardisierte, verlässliche und preisgünstige Wetterdaten, kostenlos erhältlich sind staatlich erfasste Daten lediglich in Großbritannien. Messungen finden ansonsten nur noch in Belgien,

Frankreich, Deutschland, Irland und den Niederlanden statt. Die Möglichkeit, die Daten von sekundären Datenhändlern zu bekommen, ist wenig hilfreich, da diese viel Geld verlangen.

Ein weiterer Grund, warum Wetterderivate in Europa noch nicht so stark gehandelt werden, liegt darin, dass der Energiemarkt in vielen Ländern noch reguliert ist und somit bei den Energieunternehmen weniger Bedarf an solchen Instrumenten besteht, Überkapazitäten stellen kein gravierendes Problem dar.

Schließlich waren die Wetterunterschiede in Europa bisher noch nicht so extrem wie in den USA, das Wetter war beständiger und besser prognostizierbar. Daher bestand weniger Bedarf, sich gegen Wetterschwankungen abzusichern. Dieser Sachverhalt könnte sich aber durch den Klimawandel ändern, erste Auswirkungen sind bereits heute sichtbar. Dies könnte den Handel von Wetterderivaten in Europa begünstigen.

Die größten europäischen Wettermärkte befinden sich in Großbritannien und Frankreich, gefolgt von Skandinavien und Deutschland.

Wichtigste Marktteilnehmer im gesamten Wettermarkt sind eindeutig Energieunternehmen. Sie sind an ca. 70-80% aller Kontrakte beteiligt. [23] Weitere Teilnehmer sind Banken und Versicherungen (diese nutzen Wetterderivate als Alternative zu Rückversicherungen).

OTC-Händler nutzen börsengehandelte Wetterderivate, um sich gegen die Ansprüche der Gegenpartei abzusichern.

Ansonsten muss festgestellt werden, dass die meisten Unternehmen, die vom Wettereinfluss betroffen sind (vgl. 1.1), bisher noch wenig am Wettermarkt tätig sind, was vielleicht am mangelnden Bewusstsein für dieses Problem liegt.

Hauptsächlich werden im Wettermarkt die bereits erwähnten OTC-Geschäfte durchgeführt, d.h. die Vertragspartner handeln direkt untereinander oder über private Broker. Viele Emittenten von OTC-Wetterderivaten bieten ihre Kontrakte auch direkt im Internet an. Der OTC-Handel hat einen großen Vorteil: Die Vertragskonditionen sind individuell vereinbar und können so an die spezifischen Wetterrisiken und Absicherungsbedürfnisse der Vertragspartner angepasst werden. Es können ganz individuelle Indices gebildet werden, die das reale Risiko gut approximieren und die dann zur Payoff-Bestimmung genutzt werden.

Seit 1999 gibt es jedoch auch börsengehandelte Wetterderivate. Der Chicago Mercantile Exchange (CME) handelt mit Wetterfutures und Optionen auf diese Futures. Diese basieren auf Heating- und Cooling Degree Days, deren Konzept später noch erläutert werden soll. Die Kontrakte beziehen sich auf

je eine von 15 US-amerikanischen und 5 europäischen Städten. Die Daten werden von EarthSat geliefert, ursprünglich stammen sie vom National Climate Data Center.

In Europa werden Wetterderivate am London International Finance Futures and Options Exchange (LIFFE) online gehandelt. Kontrakte sind verfügbar für London, Paris und Berlin. Derivate haben eine Laufzeit von einem Monat oder einer Wintersaison.

Wetterderivate, die an Börsen gehandelt werden, sind stets standardisiert. Auch dieser Typus hat einige Vorteile: Sie werden öffentlich (elektronisch) gehandelt, sind also im Gegensatz zu OTC-Kontrakten für eine breitere Masse an potenziellen Käufern zugänglich. An der Börse sind auch kleinere Transaktionsvolumina möglich, was mehr und vor allem auch kleinere Investoren anzieht. Durch den öffentlichen Handel wird auch für mehr Transparenz, insbesondere auch in Bezug auf Preise, gesorgt. Ein Handel an der Börse verursacht auch geringere Transaktionskosten als ein OTC-Geschäft und verringert letztendlich auch das Kreditrisiko.

1.3 Gestaltungsmerkmale eines Wetterderivats

Hier sollen nun einige typische Elemente eines Wetterkontraktes vorgestellt werden. Einige davon finden sich auch bei anderen gängigen Derivaten, andere sind wetterderivattypisch.

Das wichtigste Element eines Wetterderivates ist wohl der *Wetterindex*, der das Risiko des Käufers abbilden soll und somit den Payoff festlegt. Ein Wetterindex ist eine Variable, deren Wert sich aus Wetterdaten bestimmt. Über diese Indices wird das Wetter auf gewisse Weise handelbar, denn mit dem Kauf eines Wetterderivats kann man auf bestimmte Wetterverhältnisse spekulieren wie auf Aktienkurse. [4] Häufig verwendete Wetterindices sind:

- Die *Tagesdurchschnittstemperatur* (daily average temperature, DAT): Dabei handelt es sich um den Mittelwert zwischen der Tagesmaximal- und der Tagesminimaltemperatur, in der Regel jeweils gemessen von 0 Uhr bis 0 Uhr am Folgetag. Auf der Tagesdurchschnittstemperatur beruhen wohl die meisten Wetterindices, oft jedoch in kumulierter Form über einen gewissen festgelegten Zeitraum, in der Regel ein Monat, ein halbes Jahr oder ein Jahr:
- *Kumulierte Jahrestemperaturen* (cumulative annual temperature, CAT)

sind Summen von jährlichen DAT-Werten:

$$CAT_i = \sum_{h=1}^{365} DAT_{h,l}$$

dabei zählt $1 \leq h \leq 365$ die Tage des Jahres und l die Jahre.

- LIFFE benutzt ebenfalls Indices auf DAT-Basis, einen Monats- und einen Wintersaisonindex. Dabei werden jeweils die DAT-Werte für die entsprechenden Tage aufsummiert und der Durchschnitt zu 100 addiert:

$$\text{Monatsindex: } 100 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DAT_i$$

dabei steht n für die Anzahl der Tage im betrachteten Monat. Entsprechend:

$$\text{Wintersaisonindex: } 100 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m DAT_i$$

in diesem Fall repräsentiert m die Anzahl der Tage in der gesamten Wintersaison.

Diese beiden Indextypen sind jeweils für London, Paris und Berlin erhältlich. Der Payoff bestimmt sich durch die Abweichung von diesem Index. Kontrakte auf Basis dieser Indices sind also nicht geeignet, das Wetterrisiko für weit von diesen Städten entfernt gelegene Orte korrekt abzubilden.

- *Heating/Cooling Degree Days* (HDD/CDD). Dies ist das in den USA am häufigsten verwendete Maß, da es gut geeignet ist, den Wettereinfluss auf den Energiebedarf für Heizung bzw. Klimaanlage wiederzugeben. Heating- und Cooling Degree Days beziehen sich immer auf eine *Referenztemperatur* κ : Die Überschreitung von κ liefert einen CDD-Wert, die Unterschreitung dementsprechend einen HDD-Wert:

$$HDD_{h,l} = (\kappa - DAT_{h,l})^+$$

$$CDD_{h,l} = (DAT_{h,l} - \kappa)^+$$

In der Regel wird für den Zeitraum Oktober bis März mit HDD-Kontrakten und für April bis September mit CDD-Kontrakten gehandelt.

Als Referenztemperatur wird in der Regel $\kappa = 65^\circ\text{F}$ in den USA bzw. $\kappa = 18^\circ\text{C}$ in Europa verwendet. Statt mit CDD-Werten werden Wetterkontrakte für Europa aber meistens auf DAT-Basis abgeschlossen,

da Klimaanlage hier in Privathaushalten nicht so verbreitet sind und daher auf den Energieverbrauch in den Sommermonaten keinen so gravierenden Einfluss haben wie in den USA. HDD-Kontrakte hingegen sind auch in Europa üblich.

- Schließlich gibt es auch noch die Möglichkeit, direkt mit *Tageshöchsttemperaturen* zu arbeiten.

Abschließend kann man sagen, dass 98% aller bisher gehandelten Wetterderivatkontrakte auf Temperaturindices basierten. [23]

- Weniger übliche Maße sind z.B. *Windgeschwindigkeiten*, *Niederschlag* und *Feuchtigkeit*. Das liegt daran, dass diese Wetterphänomene oft mit der Temperatur korreliert sind, also mit besonders warmem oder kaltem Wetter einhergehen. Da die Temperatur aber wesentlich leichter zu messen ist und viel mehr und bessere Temperaturdaten erhältlich sind, wird das Wetterrisiko bevorzugt hierüber abgebildet.

Ist der zu verwendende Wetterindex festgelegt, muss als nächstes fixiert werden, auf welchen Ort sich die Daten beziehen sollen und somit, von welcher *Referenzwetterstation* sie stammen sollen. Dabei muss darauf geachtet werden, dass diese Station zuverlässige und zeitlich konsistente Werte liefert. Deshalb werden oft staatliche Wetterstationen ausgewählt.

Problematisch wird es wiederum, wenn der Ort, an dem das Unternehmen seinen Standort hat und dem Einfluss des Wetters ausgesetzt ist, zu weit von einer solchen Station entfernt liegt.

Gerade Börsen wie der CME, der ja Kontrakte für weltweit nur 20 Städte anbietet, und LIFFE (3 Städte, s.o.) sind mit diesem Problem konfrontiert. Die Datenabweichung zwischen dem Messort und dem Ort, von dem der Wettereinfluss tatsächlich gemessen werden soll, entsteht schon bei geringen geografischen Differenzen. Man nennt sie *Basis Risk*. Die *Basis* misst den Temperaturunterschied zwischen zwei Städten. Sie ist nur schwer quantifizierbar und analysierbar, d.h. es ist schwer festzustellen, von welchen Faktoren die Wetterabweichungen zwischen zwei Standorten bestimmt werden. Man kann auch mit Basis Risk handeln.

Um das Basisrisiko abzuschwächen, werden oft nicht Wetterdaten von einer einzelnen Wetterstation zur Payoffbestimmung genutzt, sondern verschiedene, in der Nähe des Unternehmensstandortes gelegene Wetterstationen ausgewählt. Aus deren Messwerten wird dann ein gewichteter Mittelwert gebildet, Orte, deren Wetter stärker mit dem des Unternehmensstandortes korreliert ist, bekommen ein stärkeres Gewicht. Gänzlich eliminieren lässt sich das Basisrisiko jedoch nicht.

Basis Risk ist ein vor allem für amerikanische Wetterderivate bedeutsamer Faktor, da Messorte oft weit auseinander liegen und die Wetterunterschiede zwischen einzelnen Städten gravierender sind als in Europa. Dort ist Basis Risk durchaus vernachlässigbar.

Ob eine Gegend von Basis Risk betroffen ist, hängt davon ab, wie viele Wetterstationen, die zuverlässige Daten liefern, sich in der näheren Umgebung befinden, wie diese zueinander liegen und welchen Abstand sie zueinander haben. Zuletzt sollte noch beachtet werden, dass zwei Orte in Bezug auf das Wetter über unterschiedliche Zeiträume unterschiedlich korreliert sein können, so dass das Wetter kurzfristig in beiden Städten sehr ähnlich, aber langfristig komplett unterschiedlich sein kann.

Sind nun die Merkmale Wetterindex und Wetterstation festgelegt, kann man sich mit klassischeren Derivateigenschaften befassen. So etwa mit der *Laufzeit* bzw. dem *Ausübungszeitpunkt*. Typische Laufzeiten eines Wetterderivats sind ein Monat oder eine Sommer- bzw. Wintersaison. Wer eine Saison abdecken möchte, kann statt eines Wetterderivats, das über die komplette Zeit läuft, auch mehrere Monatsderivate kaufen. Da oft jedes dieser Derivate über einen eigenen Strike verfügt, kann sich diese Strategie lohnen.

Es gibt also sowohl kurz- als auch langfristige Kontrakte. Abhängig vom Käuferwunsch kann OTC natürlich sowieso jede beliebige Laufzeit festgelegt werden.

Nun also zum bereits erwähnte *Strike K*, dem Basispreis bzw. Ausübungslevel. Die Über- bzw. Unterschreitung des Strikes definiert die Höhe des Payoffs. Ihn festzulegen ist eine schwierige Aufgabe. Der Strike sollte möglichst nah bei dem Wetterindexwert liegen, der sich bei "normalen" Wetterverhältnissen einstellt. Dabei wird üblicherweise ein Mittelwert aus vergangenen Indexwerten gebildet, was meist zu einer Diskussion führt, über welchen Zeitraum gemittelt werden sollte. Einerseits führt die Nutzung möglichst vieler Daten zu Genauigkeit, andererseits sind Daten aus der jüngeren Vergangenheit oft aussagekräftiger, da diese eher den aktuellen "Normalzustand" widerspiegeln. Gerade im Zuge des Klimawandels sind historische Wetterdaten oft wenig aussagekräftig für das aktuelle Wetter. Oft einigt man sich auf einen Mittelungszeitraum von 10-15 Jahren.

Da Wetterdaten nicht in einer Währung ausgedrückt sind, gibt es in jedem Wetterkontrakt den *Faktor* λ , um den Payoff quantifizierbar zu machen. Dieser wandelt den Indexwert in Dollar bzw. Euro um. Der CME nutzt einen Faktor von $\lambda = 20\$$.

Schließlich haben viele Wetterderivate eine *maximale Auszahlungshöhe*, auch Cap genannt. Über- bzw. Unterschreitungen des Strikes führen nach Erreichen des Caps nicht mehr zu zusätzlichen Auszahlungen.

Wie bei anderen Derivattypen gibt es auch bei Wetterderivaten die gängigen Kontrakttypen *Call*, *Put* und *Future*. Außerdem gibt es noch *Wetterswaps*, die sich aber von klassischen Swaps unterscheiden und eher Forwards bzw. Futures ähneln:

Gleichen sich die Wetterrisiken zweier Vertragspartner aus, können sie diese einander übertragen: Es wird ein Referenzwert K festgelegt. Überschreitet der Indexwert am Ende der Laufzeit diesen Wert, muss der Verkäufer des Swaps eine Zahlung an den Käufer leisten, unterschreitet er K , ist es genau umgekehrt. Es liegt also die Situation vor, in der hohe Werte des Wetterindex das eigentliche Geschäft des Swapverkäufers begünstigen, so dass er sich in diesem Fall die Zahlung an den Käufer leisten kann. Für den Käufer verhält es sich entsprechend genau umgekehrt. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Swaps leistet hier also stets nur eine Vertragspartei Zahlungen an die andere, nicht beide. Eine Prämie wird in der Regel bei Wetterswaps nicht gezahlt.

Wetteroptionen, also Calls und Puts, machen mit 70-80% den Großteil des US-Wettermarktes aus. [23] Diese Kontrakte funktionieren wie klassische Optionen. Der Payoff berechnet sich wie üblich, hier am Beispiel eines Monats-HDD-Kontraktes:

$$\text{Payoff long Call: } \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{30} HDD_i - K \right)^+$$

$$\text{Payoff long Put: } \lambda \cdot \left(K - \sum_{i=1}^{30} HDD_i \right)^+$$

entsprechend für die short-Positionen.

Kapitel 2

Der Benchmark-Bewertungsansatz

Klassische Bewertungsmethoden für derivative Finanzgüter wie etwa die Black-Scholes-Formel sind im Fall von Wetterderivaten aus verschiedenen Gründen nicht anwendbar:

Zunächst einmal kann der durch den Handel mit Wetterderivaten erweiterte Markt als unvollständig betrachtet werden, denn die den Wetterderivaten zugrunde liegenden Wetterindices sind nicht handelbar. Insbesondere sind also Wetterderivate nicht durch die anderen Finanzgüter hedgebar. Ebenso kann kein risikoneutrales Portfolio gebildet werden. Aufgrund der Unvollständigkeit des Marktes existiert auch kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß. Weiterhin ist unklar, ob ein um den Handel mit Wetterderivaten erweitertes Finanzmarktmodell arbitragefrei ist - oder gar die NFLVR (no free lunch with vanishing risk) -Bedingung erfüllt - und somit, ob überhaupt ein solches Maß existiert. Daher sind Formeln wie die von Black-Scholes, die auf diesen Prinzipien beruhen, nicht anwendbar.

Außerdem kann kaum untersucht werden, inwieweit Wetterderivate mit anderen klassischen Finanzgütern korreliert sind, da der Wettermarkt so jung ist, dass hierfür nicht genügend Daten vorhanden sind.

Die zeitliche Entwicklung von Wetterindices ist nicht mit der von Aktien und anderen klassischen Basisfinanzgütern vergleichbar, insbesondere ist sie kein Random Walk. Erwartungswerte und Varianzen sind nicht konstant in der Zeit. Daher muss auch die Modellierung anders angegangen werden als im Black-Scholes-Modell und gestaltet sich oftmals schwierig. Außerdem ist das Wetter nicht stationär. Statistische Bewertungsverfahren, die auf Prozessen im Gleichgewicht beruhen, sind daher ebenfalls nicht nutzbar.

Bisher fehlt es dem Wettermarkt an einer Bewertungsmethode, die nicht nur

auf diesen Markt anwendbar, sondern auch leicht verständlich ist und allgemein akzeptiert wird.

Platen und West [17] schlagen vor, für die Bewertung von Wetterderivaten den von Platen entwickelten Benchmarkansatz zu verwenden. Die resultierende Bewertungsformel kann auch im Fall von unvollständigen Märkten angewendet werden. Ebenfalls kommt sie ohne die Voraussetzung der Existenz eines risikoneutralen Maßes aus.

Hinter dem Benchmarkansatz steht die folgende Idee: Im Black-Scholes-Modell wird die sichere Anlage $(B(t))_{0 \leq t \leq T}$ als numeraire verwendet. In diesem Modell existiert dann zu jedem hedgebaren contingent claim ein Hedge H , dessen Wertentwicklung, ausgedrückt in Einheiten von B , dann bzgl. eines zu P äquivalenten Martingalmaßes P^* ein Martingal ist. Aus dieser Eigenschaft erhält man dann die Black-Scholes-Formel.

Wenn man nun ein anderes, in gewissem Sinne optimales numeraire S^{δ^*} finden könnte, so dass jedes strikt positive, selbstfinanzierende Portfolio, ausgedrückt in Einheiten von S^{δ^*} , bereits *selbst* ein lokales Martingal ist - und zwar bezüglich des von Anfang an gegebenen Maßes P - so hätte man sowohl das Problem der fehlenden Hedgebarkeit als auch die fragliche Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes umgangen. Die Bewertungsformel, die man so erhält, wäre dann auf eine viel größere Anzahl von Modellen anwendbar als nur auf das Black-Scholes-Modell (insbesondere auch auf den Wetterderivatfall), da sie ohne besagte Voraussetzungen auskommt.

Dass es tatsächlich ein solches numeraire gibt, möchte ich in diesem Kapitel zeigen und die entsprechende Bewertungsformel herleiten. Weiterhin wird sich zeigen, dass bekannte Bewertungsformeln als Spezialfälle des Benchmarkansatzes angesehen werden können.

Im Folgenden soll der Benchmarkansatz vorgestellt werden.

2.1 Das Modell

Zur Entwicklung des Benchmarkansatzes soll hier ein zeitstetiges Finanzmarktmodell verwendet werden, obgleich Wetterderivate ihren Wert nur zu diskreten Zeitpunkten ändern, nämlich einmal täglich, wenn ein neuer DAT-Wert (bzw. HDD/CDD oder ein anderer vergleichbarer Index) bekannt wird. Somit wird am Ende nur die diskrete Formel benötigt. Aus Genauigkeitsgründen, zum korrekten Aufbau der Theorie und da der Benchmarkansatz ja auch für andere Fälle als den der Wetterderivate anwendbar ist, ist dennoch ein stetiges Modell besser geeignet.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}_T, \underline{\mathcal{A}}, P)$. Dabei sei $T \in (0, \infty)$

ein endlicher Zeithorizont und $\underline{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_t)_{t \in [0, T]}$ eine Filtration auf Ω , d.h. eine aufsteigende Folge von σ -Algebren $\mathcal{A}_t, 0 \leq t \leq T$, die die usual conditions erfüllt (also $(\mathcal{A}_t)_{0 \leq t \leq T}$ rechtsseitig stetig und \mathcal{A}_0 enthält alle P-Nullmengen). \mathcal{A}_0 sei dabei als die triviale σ -Algebra angenommen. Die Filtration $\underline{\mathcal{A}}$ beschreibt in dem Modell die Entwicklung des Informationsstandes (nicht nur bzgl. des Finanzmarktes, sondern auch bzgl. der später betrachteten Wetterentwicklung), \mathcal{A}_t gibt also den Informationsstand zum Zeitpunkt t an.

Weiterhin seien $d+1$ Basisfinanzgüter gegeben. Das 0-te Basisfinanzgut stellt die sichere Anlage dar, die übrigen d Finanzgüter sind risikobehaftet. Dazu sei jeweils ein Basisfinanzgut-Account gegeben. Diese sind so definiert, dass der j -te Account jeweils nur Anteile des j -ten Basisfinanzgutes und die daraus resultierenden akkumulierten Gewinne enthält (diese werden also reinvestiert). Im Fall einer Aktie würde es sich dabei also um den Preis des Accounts in t handeln, inklusive aller Dividenden die bis zu diesem Zeitpunkt angefallen sind.

Der Zinsratenprozess $r = \{r(t), t \in [0, T]\}$ bildet die Wertentwicklung der sicheren Anlage ab. Bezeichnet $B(t)$ den Preis des 0-ten Accounts zum Zeitpunkt t , so sei

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

Somit erfüllt $B(t)$ die folgende Differentialgleichung:

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, \quad t \in [0, T]$$

dabei ist $B(0) = 1$.

$S^j(t)$ bezeichne den Wert des zum j -ten Basisfinanzgut gehörenden Accounts zum Zeitpunkt t ($0 \leq t \leq T$). Der Prozess $S^j = \{S^j(t), t \in [0, T]\}$ beschreibt demnach die Entwicklung des Wertes des j -ten Portfolios. Für jedes t ist $S^j(t)$ als eindeutige (starke) Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS^j(t) = S^j(t) \cdot \left(a^j(t)dt + \sum_{k=1}^d b^{j,k}(t)dW^k(t) \right) \quad (2.1)$$

gegeben.

Dabei sei $W^k = \{W^k(t), t \in [0, T]\}$ für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\underline{\mathcal{A}}$. Diese d Wiener-Prozesse seien unabhängig voneinander. Durch sie wird die Unsicherheit des Finanzmarktes im Modell abgebildet.

$a^j(t)$ ist die expected rate of return des j -ten Basisfinanzgut-Accounts zum Zeitpunkt t und $b^{j,k}(t)$ gibt die Volatilität des j -ten Accounts in Bezug auf den k -ten Wiener-Prozess an. Man fasst die Volatilitäten in der Volatilitätsmatrix $b(t) = (b^{j,k}(t))_{1 \leq j, k \leq d}$ zusammen. Diese sei λ -f.s. invertierbar mit

inverser Matrix $b^{-1}(t) = (b^{-1j,k}(t))_{1 \leq j,k \leq d}$. In diesem Fall nennt man auch den Markt *invertierbar*. Aufgrund der Invertierbarkeit der Volatilitätsmatrix ist die Existenz von redundanten Basisfinanzgut-Accounts ausgeschlossen. Sowohl $a^j = \{a^j(t), t \in [0, T]\}$ als auch $b^{j,k} = \{b^{j,k}(t), t \in [0, T]\}$ seien für alle $j, k \in \{1, \dots, d\}$ adaptierte, previsible Prozesse, die

$$\int_0^T \left(|a^j(s)| + (b^{j,k}(s))^2 \right) ds < \infty$$

erfüllen.

Üblicherweise wird $b^{0,k}(t) = 0$ angenommen (d.h. die sichere Anlage besitzt keine Volatilität). Klar: $a^0(t) = r(t)$.

Für jedes j gelte $S^j(0) > 0$, d.h. zu Beginn haben alle Basisfinanzgut-Accounts einen positiven Wert, und $S^0(0) = 1$.

Definition: Ein invertierbarer Markt $\mathcal{S}_{(d)} = (S, a, b, r, \underline{A}, P)$ mit d risikobehafteten Basisfinanzgut-Accounts heißt stetiger Finanzmarkt.

(Dabei sei $S = \{S(t) = (S^0(t), \dots, S^d(t))^T, t \in [0, T]\}$ und $a = \{a(t) = (a^0(t), \dots, a^d(t))^T, t \in [0, T]\}$.)

Der Marktpreis des Risikos wird durch den Vektor

$$\theta(t) = (\theta^1(t), \dots, \theta^d(t))^T := b^{-1}(t)[a(t) - r(t)\mathbf{1}], \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

gegeben.

Dabei sei $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Der Marktpreis des Risikos in Bezug auf den k -ten Unsicherheitsfaktor, modelliert durch den k -ten Wiener-Prozess, wird also mit $\theta^k(t)$ bezeichnet.

Bemerkung: Mithilfe von θ kann die Differentialgleichung (2.1) umgeschrieben werden zu:

$$dS^j(t) = S^j(t) \cdot \left(r(t)dt + \sum_{k=1}^d b^{j,k}(t) \cdot (\theta^k(t)dt + dW^k(t)) \right) \quad (2.3)$$

$t \in [0, T], 0 \leq j \leq d$ (denn aus (2.2) folgt $a(t) = b(t)\theta(t) + r(t)\mathbf{1}$).

Mit den oben gegebenen S^j können nun Portfolios gebildet werden, die sich aus diesen Basisfinanzgut-Accounts zusammensetzen.

Definition: Eine Strategie $\delta = \{\delta(t) = (\delta^0(t), \dots, \delta^d(t))^T, t \in [0, T]\}$ ist ein previsibler, S -integrierbarer Prozess. Dabei gibt für jedes j die j -te Komponente $\delta^j(t) \in (-\infty, \infty)$ von δ die Anzahl der Einheiten des j -ten Basisfinanzgut-Accounts an, die im zu δ gehörigen Portfolio zum Zeitpunkt t gehalten werden.

Entsprechend gibt dann $S^\delta(t)$ den Wert dieses Portfolios in t an. Dabei gilt f.a. $t \in [0, T]$:

$$S^\delta(t) = \sum_{j=0}^d \delta^j(t) S^j(t)$$

Definition: Ein Portfolio S^δ mit einer zugehörigen Handelsstrategie δ wird selbstfinanzierend genannt, wenn in keinem der Zeitpunkte t Kapital entnommen oder hinzugefügt wird, sondern alle Gewinne und Verluste aus dem Handel mit den Basisfinanzgut-Accounts entstehen. Dies ist äquivalent zu

$$dS^\delta(t) = \sum_{j=0}^d \delta^j(t) dS^j(t) \quad (2.4)$$

f.a. $t \in [0, T]$.

Im Folgenden sollen nur selbstfinanzierende, strikt positive Portfolios betrachtet werden (also solche mit $S^\delta(t) > 0$ f.a. $t \in [0, T]$). Die Menge aller solcher Portfolios werde mit \mathcal{V}^+ bezeichnet.

Bemerkung: Die Beschränkung auf strikt positive Portfolios ist sinnvoll, wenn man das Konzept der beschränkten Haftung berücksichtigt, denn ein Marktteilnehmer, dessen gesamtes Portfolio negativ wird, muss Bankrott anmelden und kann nicht mehr weiter am Markt teilnehmen.

Definition: Aus der Strategie δ lässt sich nun der Anteilprozess

$$\pi_\delta = \{\pi_\delta(t) = (\pi_\delta^0(t), \pi_\delta^1(t), \dots, \pi_\delta^d(t)), t \in [0, T]\}$$

ableiten. Dabei gibt $\pi_\delta^j(t)$ den Anteil von $S^\delta(t)$ an, der in den j -ten Basisfinanzgut-Account investiert ist.

$\pi_\delta^j(t)$ ist gegeben durch:

$$\pi_\delta^j(t) = \delta^j(t) \frac{S^j(t)}{S^\delta(t)}, \quad t \in [0, T], \quad 0 \leq j \leq d.$$

Natürlich müssen sich die Anteile zu 1 aufaddieren:

$$\sum_{j=0}^d \pi_\delta^j(t) = 1 \quad \text{f.a. } t \in [0, T].$$

Wendet man (2.4) und (2.3) auf ein strikt positives Portfolio S^δ an, erhält

man für jedes $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
dS^\delta(t) &= \sum_{j=0}^d \delta^j(t) dS^j(t) \\
&= \sum_{j=0}^d \delta^j(t) S^j(t) \left(r(t) dt + \sum_{k=1}^d b^{j,k}(t) (\theta^k(t) dt + dW^k(t)) \right) \\
&= S^\delta(t) r(t) dt + \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \delta^j(t) S^j(t) b^{j,k}(t) (\theta^k(t) dt + dW^k(t)) \\
&= S^\delta(t) r(t) dt + S^\delta(t) \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) (\theta^k(t) dt + dW^k(t))
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dabei ist

$$\beta_\delta^k(t) = \sum_{j=1}^d \pi_\delta^j(t) b^{j,k}(t)$$

wie üblich (z.B. im Capital Asset Pricing Model) die k -te *Portfolio-Volatilität* bzw. das β -Risiko.

Für den Logarithmus von $S^\delta(t)$ gilt mithilfe von (2.5) und der Itô-Formel für jedes strikt positive Portfolio $S^\delta(t)$:

$$\begin{aligned}
d \log(S^\delta(t)) &= \left(r(t) + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \theta^k(t) \right) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{S^\delta(t)^2} \cdot \left(S^\delta(t) \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \right)^2 \right) dt + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) dW^k(t) \\
&= \left(r(t) + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \theta^k(t) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \right)^2 \right) dt \\
&+ \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) dW^k(t) \\
&= g_\delta(t) dt + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) dW^k(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

mit

$$g_\delta(t) = r(t) + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \left(\theta^k(t) - \frac{1}{2} \beta_\delta^k(t) \right),$$

der *Portfolio-Wachstumsrate*.

Mithilfe dieser Wachstumsrate lässt sich ein Optimalitätskriterium für selbst-finanzierende Portfolios bestimmen, welches dann einen Kandidaten für das gesuchte numeraire liefern wird. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

2.2 Das Growth Optimal Portfolio (GOP)

Ziel ist es nun, unter allen Wachstumsraten aus Abschnitt 1 für jedes t ($0 \leq t \leq T$) in Abhängigkeit von $\pi_\delta(t)$ eine zu diesem Zeitpunkt *optimale Wachstumsrate* $g_{\delta^*}(t)$ zu finden.

Definition: Ein Portfolio $S^{\delta^*} \in \mathcal{V}^+$ wird Growth Optimal Portfolio (GOP) genannt, wenn es den erwarteten Logarithmus des Endvermögens maximiert, d.h.

$$E(\log(S^{\delta^*}(T))) = \max_{\delta: S^\delta \in \mathcal{V}^+} E(\log(S^\delta(T))).$$

Lemma 2.2.1 Ein Portfolio S^{δ^*} , das in jedem Zeitpunkt t die Wachstumsrate maximiert, für das also gilt:

$$g_{\delta^*}(t) \geq g_\delta(t) \text{ f.s.}$$

für alle $t \in [0, T]$ und alle δ mit $S^\delta \in \mathcal{V}^+$, maximiert auch den erwarteten Logarithmus des Endvermögens:

$$E(\log(S^{\delta^*}(T))) = \max_{\delta: S^\delta \in \mathcal{V}^+} E(\log(S^\delta(T)))$$

und ist somit ein GOP.

Beweis: Mithilfe von (2.6) sieht man, dass

$$E(\log(S^\delta(T))) = E\left(\int_0^T g_\delta(t) dt\right) \text{ f.a. } \delta \text{ mit } S^\delta \in \mathcal{V}^+, 0 \leq t \leq T$$

Somit folgt aus

$$g_{\delta^*}(t) \geq g_\delta(t) \text{ f.s. f.a. } t \in [0, T], \delta \text{ mit } S^\delta \in \mathcal{V}^+ :$$

$$\begin{aligned}
E(\log(S^{\delta^*}(T))) &= E\left(\int_0^T g_{\delta^*}(t) dt\right) \\
&\geq E\left(\int_0^T g_{\delta}(t) dt\right) \\
&= E(\log(S^{\delta}(T)))
\end{aligned}$$

f.a. δ mit $S^{\delta} \in \mathcal{V}^+$. □

Gesucht ist also ein Anteilsprozess π_{δ^*} , der ein Portfolio mit optimaler Wachstumsrate erzeugt. Findet man einen solchen, so hat man auch ein GOP gefunden. In diesem konkreten Modell, in dem ein äquivalentes Martingalmaß P^* existiert, kann man direkt ein GOP bestimmen:

Satz 2.2.1 *In oben gegebenem Modell ist ein GOP gegeben durch den Anteilsprozess*

$$(\pi_{\delta^*}(t))^T = \theta^T(t)b^{-1}(t) \text{ f.a. } 0 \leq t \leq T.$$

Beweis: Nach Lemma 2.2.1 liefert ein Portfolio mit optimaler Wachstumsrate g_{δ^*} ein GOP. Es genügt also, ein solches Portfolio S^{δ^*} zu finden.

Halte dazu eine konkrete Realisierung $S^{\delta}(t)(\omega)$ und $0 \leq t \leq T$ fest. Es gilt:

$$\begin{aligned}
g_{\delta}(t) &= r(t) + \sum_{k=1}^d \beta_{\delta}^k(t)\theta^k(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (\beta_{\delta}^k(t))^2 \\
&= r(t) + \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \pi_{\delta}^j(t)b^{j,k}(t)\theta^k(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \pi_{\delta}^j(t)b^{j,k}(t) \right)^2 \\
&= r(t) + \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \pi_{\delta}^j(t)b^{j,k}(t)\theta^k(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d (\pi_{\delta}^j(t)b^{j,k}(t)\pi_{\delta}^l(t)b^{l,k}(t))
\end{aligned}$$

Somit reduziert sich das Problem auf die Maximierung einer Funktion in $(\pi_{\delta})^T = (\pi_{\delta}^1(t), \dots, \pi_{\delta}^d(t))$, also auf eine Maximierung im \mathbb{R}^d , genauer, die Maximierung der Funktion

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x_1, \dots, x_d) \mapsto r(t) + \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d x_j b^{j,k}(t)\theta^k(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d (x_j b^{j,k}(t)x_l b^{l,k}(t)).$$

Eine Extremestelle x^* einer Funktion g im \mathbb{R}^d muss als notwendige Bedingung $\text{grad}g(x^*) = 0$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, \dots, x_d) &= \sum_{k=1}^d b^{i,k}(t) \theta^k(t) - \sum_{k=1}^d b^{i,k}(t) \sum_{j=1}^d x_j b^{j,k}(t) \stackrel{!}{=} 0 \\
&\text{f.a. } 1 \leq i \leq d \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^d b^{i,k}(t) \theta^k(t) &\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^d b^{i,k}(t) \sum_{j=1}^d x_j b^{j,k}(t) \text{ f.a. } 1 \leq i \leq d \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^d b^{i,k}(t) \left(\theta^k(t) - \sum_{j=1}^d x_j b^{j,k}(t) \right) &\stackrel{!}{=} 0 \text{ f.a. } 1 \leq i \leq d \\
\Rightarrow b^{i,k}(t) &\stackrel{!}{=} 0 \text{ f.a. } 1 \leq i, k \leq d \text{ (Wid.)} \\
\vee \theta^k(t) &\stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^d x_j b^{j,k}(t) \text{ f.a. } 1 \leq k \leq d \\
\Rightarrow (\theta^k(t))^T &\stackrel{!}{=} (x^T b(t))_k \text{ f.a. } 1 \leq k \leq d \\
\Rightarrow \theta(t)^T &\stackrel{!}{=} x^T b(t) \\
\Rightarrow \theta(t)^T b^{-1}(t) &\stackrel{!}{=} x^T = (\pi_{\delta_*}(t))^T
\end{aligned}$$

Dass es sich bei der gefundenen Nullstelle des Gradienten von g tatsächlich um ein Maximum handelt, liegt daran, dass g konkav ist:

Betrachte $h := -g$. Für $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex gilt für beliebiges $0 < \lambda < 1$ und $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^d), x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^d) \in U, x_1 \neq x_2$:

$$\begin{aligned}
&h(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - \lambda h(x_1) + (1 - \lambda)h(x_2) \\
&= \frac{1}{2} \left((\lambda^2 - \lambda) \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d x_1^j x_1^l b^{j,k}(t) b^{l,k}(t) + \lambda(1 - \lambda) \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d x_1^j x_2^l b^{j,k}(t) b^{l,k}(t) \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\lambda(1 - \lambda) \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d x_2^j x_1^l b^{j,k}(t) b^{l,k}(t) + (\lambda^2 - \lambda) \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d x_2^j x_2^l b^{j,k}(t) b^{l,k}(t) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lambda(1 - \lambda) \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d b^{j,k} b^{l,k} (x_1^l - x_2^l)(x_2^j - x_1^j) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^d \left(\sum_{l=1}^d b^{l,k} (x_1^l - x_2^l) \right) \left(- \sum_{j=1}^d b^{j,k} (x_1^j - x_2^j) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^d \left(\sum_{l=1}^d b^{l,k} (x_1^l - x_2^l) \right)^2 \right) \leq 0$$

Damit ist h konvex und somit g wie behauptet konkav. Damit ist $(\pi_{\delta^*}(t))$ tatsächlich absolute Maximalstelle von g . \square

In diesem Modell konnte der Anteilsprozess, der ein optimales Portfolio erzeugt, direkt berechnet werden. Es ist hingegen zunächst noch nicht klar, ob in der Realität ein selbstfinanzierendes, strikt positives Portfolio S^{δ^*} mit Anteilsprozess π_{δ^*} existiert, das eine optimale Wachstumsrate $g_{\delta^*} < \infty$ besitzt bzw. das $E(\log(S^{\delta^*}(T)))$ maximiert.

Beachte: Für andere Nutzenfunktionen muss das GOP nicht optimal sein.

Bemerkungen: Nach (2.5) und Satz 2.2.1 ist das GOP die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS^{\delta^*}(t) = S^{\delta^*}(t) \left(r(t)dt + \sum_{k=1}^d \theta^k(t) (\theta^k(t)dt + dW^k(t)) \right) \quad (2.7)$$

für alle $t \in [0, T]$. Dabei ist $S^{\delta^*}(0) > 0$, denn

$$S^{\delta^*}(0) = \sum_{j=0}^d \delta_*^j(0) S^j(0)$$

mit $S^j(0) > 0$ f.a. $0 \leq j \leq d$ und $\delta_*^j(t) = \frac{S^{\delta^*}(t)}{S^j(t)} \pi_{\delta^*}^j(t)$.

Man sieht also (vgl. Satz 2.2.1), dass beim GOP die Volatilitäten identisch mit den Marktpreisen des Risikos $\theta^k(t)$, $k = 1, \dots, d$ sind. Aus (2.7) folgt insbesondere, dass die Risikoprämie des GOP für alle t dem Quadrat des gesamten Marktpreises des Risikos $|\theta(t)|$ entspricht:

$$|\theta(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (\theta^k(t))^2}$$

Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem Capital Asset Pricing Model (CAPM), wenn man statt des Marktportfolios das GOP als Referenzportfolio wählt. Dass die Interpretation des Marktportfolios als Approximation des GOP nicht ungerechtfertigt ist, soll sich noch zeigen.

2.2.1 Approximation des GOP

Es ist zwar schön, dass die Existenz des GOP in diesem konkreten Modell gezeigt und der zugehörige Anteilsprozess bestimmt werden konnte. Damit die Benchmark-Bewertungsmethode, die auf der Existenz des GOP fußt (und im Folgenden vorgestellt werden soll), einen praktischen Nutzen haben kann, muss diese Existenz auch in der Realität vorliegen und das GOP - wenn benötigt - berechnet bzw. angenähert werden können. Daher soll nun gezeigt werden, wie ein GOP in einem stetigen Finanzmarktmodell approximiert werden kann. Dazu sind zunächst einige vorbereitende Definitionen nötig:

Definition: Ein Portfolioprozess S^δ , ausgedrückt in Einheiten des GOP, heißt gebenchmarkt. Der gebenchmarkte Prozess wird mit

$$\hat{S}^\delta(t) = \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \text{ f.a. } 0 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

bezeichnet.

Wie gewünscht werden somit Portfolios in Einheiten des GOP ausgedrückt. Dass es auch die geforderte Eigenschaft hat, dass jedes strikt positive, selbstfinanzierende Portfolio, ausgedrückt in Einheiten des GOP, ein lokales Martingal bzgl. P ist, wird sich noch zeigen.

Lemma 2.2.2 Ein gebenchmarktes Portfolio ist Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$d\hat{S}^\delta(t) = \hat{S}^\delta(t) \left(\sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_\delta^j(t) (b^{j,k}(t) - \theta^k(t)) \right) dW^k(t)$$

Beweis: Unter Verwendung von (2.8), (2.5), der Definition von $\beta_\delta^k(t)$, (2.7) und des Lemmas von Itô erhält man:

$$\begin{aligned} d\hat{S}^\delta(t) &= \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \left(r + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \theta^k(t) \right) - \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \left(r + \sum_{k=1}^d (\theta^k(t))^2 \right) \\ &+ \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \left(\sum_{k=1}^d \theta^k(t) \right)^2 - \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \left(\sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \right) \left(\sum_{k=1}^d \theta^k(t) \right) dt \\ &+ \left(\frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) - \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)} \sum_{k=1}^d \theta^k(t) \right) dW^k(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{S}^\delta(t) \left(r + \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \theta^k(t) - r - \sum_{k=1}^d (\theta^k(t))^2 + \sum_{k=1}^d (\theta^k(t))^2 - \sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) \theta^k(t) \right) dt \\
&+ \hat{S}^\delta(t) \left(\sum_{k=1}^d \beta_\delta^k(t) - \sum_{k=1}^d \theta^k(t) \right) dW^k(t) \\
&= \hat{S}^\delta(t) \left(\sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=0}^d \pi_\delta^j(t) b^{j,k}(t) - \theta^k(t) \right) \right) dW^k(t) \\
&= \hat{S}^\delta(t) \left(\sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_\delta^j(t) (b^{j,k}(t) - \theta^k(t)) \right) dW^k(t) \\
&= \hat{S}^\delta(t) \left(\sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_\delta^j(t) \sigma^{j,k}(t) dW^k(t) \right) \square
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dabei bezeichne

$$\sigma^{j,k}(t) = b^{j,k}(t) - \theta^k(t) \tag{2.10}$$

die j -te spezifische Volatilität für $t \in [0, T]$, $j \in \{0, \dots, d\}$, $k \in \{1, \dots, d\}$. Diese gibt das k -te spezifische Marktrisiko (bezogen auf den k -ten Wiener-Prozess) des gebenchmarkten j -ten Basisfinanzgut-Accounts zum Zeitpunkt t an.

Definition: Für $t \in [0, T]$ und $k \in \{1, \dots, d\}$ kann man aus den $\sigma^{j,k}(t)$ die k -te totale spezifische Volatilität bilden:

$$\hat{\sigma}^k(t) = \sum_{j=0}^d |\sigma^{j,k}(t)|$$

Ziel ist es nun, das GOP mit Hilfe von Diversifikation durch ein Marktportfolio anzunähern. Dazu betrachte ich eine Folge von stetigen Finanzmärkten, in denen sich immer mehr verschiedene, risikobehaftete Basisfinanzgüter befinden.

Zu diesem Zweck sollen weiterhin der zu Beginn definierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}_T, \underline{\mathcal{A}}, P)$ und die Wiener-Prozesse W^k verwendet werden, wobei diesmal $k \in \mathbb{N}$ gelte. Für jedes $d \in \mathbb{N}$ betrachte nun einen zugehörigen stetigen Finanzmarkt $\mathcal{S}_{(d)}$, der $d+1$ Basisfinanzgüter enthalte, von denen d risikobehaftet seien. $S_{(d)}^0(t)$ sei wie gehabt gegeben durch

$$S_{(d)}^0(t) = \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right).$$

Es entsteht eine Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$. Der Prozess $r = \{r(t), t \in [0, T]\}$ ist für alle diese Märkte gleich, denn es soll sich um eine Folge von gleichartigen Märkten handeln, wobei für wachsendes d jeweils ein Basisfinanzgut hinzukommt. Diese Folge soll den real existierenden Markt annähern.

Um Klarheit zu schaffen, auf welchen Markt der Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ sich ein Finanzgut bezieht, wird nun die Notation angepasst, indem die Basisfinanzgüter zusätzlich mit der Gesamtanzahl der risikobehafteten Finanzgüter im zugehörigen Markt indiziert werden. So hat in $\mathcal{S}_{(d)}$ der Vektor aller Basisfinanzgüter die Gestalt

$$S_{(d)} = \{S_{(d)}(t) = (S_{(d)}^0(t), \dots, S_{(d)}^d(t))^T, t \in [0, T]\}.$$

Genauso soll von jetzt an auch bei den übrigen, bisher eingeführten Notationen die Abhängigkeit von d durch einen Index gekennzeichnet werden, sobald dies erforderlich ist.

Entsprechend umindiziert lautet die Differenzialgleichung zum Basisfinanzgut $S_{(d)}^j$:

$$\begin{aligned} dS_{(d)}^j(t) &= S_{(d)}^j(t) \cdot \left(r(t)dt + \sum_{k=1}^d b_{(d)}^{j,k}(t) \cdot (\theta_{(d)}^k(t)dt + dW^k(t)) \right) \\ &= S_{(d)}^j(t) \cdot r(t)dt \\ &+ S_{(d)}^j(t) \cdot \sum_{k=1}^d \left(\sigma_{(d)}^{j,k}(t) + \sigma_{(d)}^{0,k}(t) \right) \cdot \left(\sigma_{(d)}^{0,k}(t)dt + dW^k(t) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

(die zweite Gleichung gilt mit (2.10)).

Bemerkung: Die Identifizierung $\theta_{(d)}^k(t) = \sigma_{(d)}^{0,k}(t)$, $k \in \{1, \dots, d\}$, zeigt noch einmal, dass die $\theta_{(d)}^k(t)$ das generelle Marktrisiko in t in Bezug auf den k -ten Wiener-Prozess abbilden, während die übrigen $\sigma_{(d)}^{j,k}(t)$, $j \in \{1, \dots, d\}$, $k \in \{1, \dots, d\}$ die spezifischen Risiken der gebenchmarkten j -ten Basisfinanzgut-Accounts in Bezug auf den k -ten Wiener-Prozess widerspiegeln.

Definition: Eine Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ heißt Folge von stetigen Finanzmärkten, wenn

- für jedes d die Basisfinanzgut-Accounts in $\mathcal{S}_{(d)}$ Differentialgleichungen wie in (2.11) erfüllen

- für jedes d die Volatilitätsmatrix $b_{(d)}(t) = \left(b_{(d)}^{j,k}(t) \right)_{1 \leq j,k \leq d}$
 $= \left(\sigma_{(d)}^{j,k}(t) + \sigma_{(d)}^{0,k}(t) \right)_{1 \leq j,k \leq d}$ invertierbar ist für λ -f.a. $t \in [0, T]$
- die j, k -ten spezifischen Volatilitäten für alle $t \in [0, T]$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ für $d \rightarrow \infty$ f.s. gegen einen endlichen Grenzwert $\sigma^{j,k}(t)$ konvergieren, d.h.

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \sigma_{(d)}^{j,k}(t) = \sigma^{j,k}(t) \text{ f.s.}$$

mit $\sigma^{j,k}(t) < \infty$.

Bemerkung: Wie oben für einen einzelnen stetigen Finanzmarkt gesehen, existiert in jedem Markt der Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ ein zugehöriges d -tes GOP $S_{(d)}^{\delta_*(d)} = \{S_{(d)}^{\delta_*(d)}(t), t \in [0, T]\}$.

Die Strategie hängt also von d ab und es kann in jedem $\mathcal{S}_{(d)}$ eine andere Strategie optimal sein.

Sei nun eine Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ gegeben. Es soll nun eine Folge von Portfolios gefunden werden, die die zugehörige Folge der GOPs approximiert. Dazu sind noch einige Vorbemerkungen nötig:

Definition: In einer Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ von stetigen Finanzmärkten heiÙe eine Folge $(S_{(d)}^{\delta(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{V}^+ mit $S_{(d)}^{\delta(d)}(0) = 1$ Folge von diversifizierten Portfolios, falls endliche Konstanten $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ und $K_3 \in \{1, 2, \dots\}$ existieren, die unabhängig von d sind, so dass gilt:

$$|\pi_{\delta(d)}^j(t)| \leq \frac{K_1}{d^{\frac{1}{2} + K_2}} \quad (2.12)$$

f.s. f.a. $j \in \{0, \dots, d\}$, $d \in \{K_3, K_3 + 1, \dots\}$ und $t \in [0, T]$.

Dies bedeutet, dass der Anteil, der in t in den j -ten Basisfinanzgut-Account investiert ist, für $d \rightarrow \infty$ etwas schneller fällt als $d^{-\frac{1}{2}}$. Dies gilt z.B. wenn in alle Basisfinanzgut-Accounts gleichviel investiert wird.

Definition: Weiterhin heißt eine Folge von stetigen Finanzmärkten regulär, wenn von d unabhängige, endliche Konstanten K_4 und K_5 existieren, so dass

$$E \left((\hat{\sigma}_{(d)}^k(t))^2 \right) \leq K_5 \quad (2.13)$$

f.a. $t \in [0, T]$, $k \in \{1, \dots, d\}$, $d \in \{K_4, K_4 + 1, \dots\}$.

Diese Bedingung stellt sicher, dass jede Quelle von Unsicherheit nur eine begrenzte Anzahl von gebenchmarkten Basisfinanzgut-Accounts beeinflusst.

Bemerkung: Der real existierende Markt, der aus allen auf der Welt gehandelten Finanzgütern besteht, kann als regulär angenommen werden.

In jedem Markt $(\mathcal{S}_{(d)})$ gilt nach (2.6) , (2.10) und der Definition von $g_\delta(t)$ für alle t :

$$\begin{aligned}
& d \left(\log \left(S_{(d)}^{\delta_*(d)}(t) \right) - \log \left(S_{(d)}^{\delta(d)}(t) \right) \right) \\
&= \left(r(t) + g_{(d)}^{\delta_*(d)}(t) \right) dt + \sum_{k=1}^d \theta_{(d)}^k(t) dW^k(t) - \left(r(t) + g_{(d)}^{\delta(d)}(t) \right) dt \\
&\quad - \sum_{k=1}^d \beta_{\delta(d)}^k(t) dW^k(t) \\
&= \left(g_{(d)}^{\delta_*(d)}(t) - g_{(d)}^{\delta(d)}(t) \right) dt + \sum_{k=1}^d \left(\theta_{(d)}^k(t) - \beta_{\delta(d)}^k(t) \right) dW^k(t) \\
&= \sum_{k=1}^d \left(\beta_{\delta_*(d)}^k(t) \left(\theta_{(d)}^k(t) - \frac{1}{2} \beta_{\delta_*(d)}^k(t) \right) - \beta_{\delta(d)}^k(t) \left(\theta_{(d)}^k(t) - \frac{1}{2} \beta_{\delta(d)}^k(t) \right) \right) dt \\
&\quad - \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) dW^k(t) \\
&= \sum_{k=1}^d \left(\frac{1}{2} (\theta_{(d)}^k(t))^2 - \beta_{\delta(d)}^k(t) \theta_{(d)}^k(t) + \frac{1}{2} (\beta_{\delta(d)}^k(t))^2 \right) dt \\
&\quad - \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) dW^k(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(\theta_{(d)}^k(t) - \beta_{\delta(d)}^k(t) \right)^2 dt - \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) dW^k(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=0}^d \left(\theta_{(d)}^k(t) - \pi_{\delta(d)}^j(t) b_{(d)}^{j,k}(t) \right) \right)^2 dt - \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) dW^k(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=0}^d \left(\pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) \right) \right)^2 dt - \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) dW^k(t) \\
&= \frac{1}{2} R_{\delta(d)}^d(t) dt - \sum_{k=1}^d \sum_{j=0}^d \pi_{\delta(d)}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) dW^k(t)
\end{aligned}$$

Dabei wird

$$R_{\delta^{(d)}}^d(t) := \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=0}^d \left(\pi_{\delta^{(d)}}^j(t) \sigma_{(d)}^{j,k}(t) \right) \right)^2, \quad t \in [0, T]$$

als *tracking rate* bezeichnet. Sie kann als Maß für den “Abstand“ zur Zeit t zwischen $S^{\delta^{(d)}}(t)$ und dem GOP aufgefasst werden. Es gilt natürlich $R_{\delta^{(d)}}^d(t) = 0$ f.a. $t \in [0, T]$. Gesucht ist also eine Folge von Portfolios, für die die tracking rate für wachsendes d möglichst klein wird, denn diese Portfolios sind dem GOP am nächsten.

Definition: In einer Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ von stetigen Finanzmärkten heie eine Folge $(S_{(d)}^{\delta^{(d)}})_{d \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}^+$ mit Startwert 1 Folge von approximierten GOPs, wenn f.a. $t \in [0, T]$ die zugehörige Folge der tracking rates für $d \rightarrow \infty$ stochastisch gegen Null konvergiert:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{d \rightarrow \infty} P(R_{\delta^{(d)}}^d(t) > \varepsilon) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Mit Hilfe dieser Definition kann nun in einer Folge von stetigen Finanzmärkten ohne weitere Annahmen die Folge der GOPs approximiert werden.

Satz 2.2.2 In einer regulären Folge $(\mathcal{S}_{(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ von stetigen Finanzmärkten ist jede Folge $(S_{(d)}^{\delta^{(d)}})_{d \in \mathbb{N}}$ von diversifizierten Portfolios eine Folge von approximierten GOPs.

Bemerkung: Dieser Satz begründet auch theoretisch, warum Diversifikation sinnvoll ist.

Beweis: Sei $(S_{(d)}^{\delta^{(d)}})_{d \in \mathbb{N}}$ eine Folge von diversifizierten Portfolios in einer Folge von regulären stetigen Finanzmärkten. Nutze zur Abschätzung der erwarteten tracking rates die Ungleichungen (2.12) und (2.13). Es gilt für alle

$t \in [0, T]$ und $d \geq \max\{K_3, K_4\}$:

$$\begin{aligned}
E(R_{\delta(d)}^d(t)) &\leq \sum_{k=1}^d E \left(\left(\sum_{j=0}^d |\pi_{\delta(d)}^j(t)| |\sigma_{(d)}^{j,k}(t)| \right)^2 \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^d E \left(\left(\frac{K_1}{d^{\frac{1}{2}+K_2}} \cdot \sum_{j=0}^d |\sigma_{(d)}^{j,k}(t)| \right)^2 \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^d \frac{K_1^2}{d^{1+2K_2}} \cdot E \left((\hat{\sigma}_{(d)}^k(t))^2 \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^d \left(\frac{K_1^2}{d^{1+2K_2}} K_5 \right) \\
&= K_1^2 \cdot K_5 \cdot d^{-2K_2}
\end{aligned}$$

Da $K_2 > 0$ und $K_1, K_5 < \infty$ gilt wegen der Markov-Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ und $t \in [0, T]$:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(R_{\delta(d)}^d(t) > \varepsilon) \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} E(R_{\delta(d)}^d(t)) \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} K_1^2 \cdot K_5 \cdot d^{-2K_2} = 0$$

Dies ist aber gerade dazu äquivalent, dass $(S_{(d)}^{\delta(d)})_{d \in \mathbb{N}}$ die Folge der GOPs approximiert. \square

Bemerkung: Für Satz 2.2.2 ist es völlig irrelevant, wie die Basisfinanzgut-Accounts genau verteilt sind. Solange die Folge der Portfolios ausreichend diversifiziert (und die Folge der Finanzmärkte regulär) ist, konvergiert die Portfolio-Folge gegen das GOP.

Wendet man Satz 2.2.2 an, erhält man, dass das GOP durch ein Weltmarktportfolio, z.B. den MSCI World Index, approximiert werden kann. Dabei handelt es sich um einen auf Aktien basierenden Index, der von dem amerikanischen Finanzdienstleister Morgan Stanley Capital International (MSCI) veröffentlicht wird. Er wird seit 1969 aus Finanztiteln aus 23 Ländern gebildet.

Es wird sich aber zeigen, dass es bei der Bewertung von Wetterderivaten gar nicht notwendig ist, die genaue Struktur des GOP zu kennen. Für die Bewertungsformel wird nur seine Existenz benötigt.

Jetzt, da klar ist, dass das GOP existiert, muss nur noch gezeigt werden, dass es die gewünschte Supermartingaleigenschaft hat. Dies soll im Folgenden geschehen.

2.2.2 Die Supermartingaleigenschaft

Von jetzt an soll wieder nur ein stetiger Finanzmarkt $\mathcal{S}_{(d)}$ mit festem $d > 0$ betrachtet werden.

Satz 2.2.3 *Ein strikt positives, selbstfinanzierendes Portfolio S^{δ^*} ist genau dann ein GOP, wenn alle strikt positiven, selbstfinanzierenden Portfolios S^δ - ausgedrückt in Einheiten von S^{δ^*} - $(\underline{\mathcal{A}}, P)$ -Supermartingale sind, d.h.*

$$E \left(\frac{S^\delta(s)}{S^{\delta^*}(s)} \middle| \mathcal{A}_t \right) \leq \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta^*}(t)}$$

f.s. f.a. $0 \leq t \leq s \leq T$.

Beweis: “ \Rightarrow “: Nach (2.9) erfüllt $\hat{S}^\delta(t)$ für alle t die Differentialgleichung

$$d\hat{S}^\delta(t) = \hat{S}^\delta(t)dM(t)$$

mit M gegeben durch

$$dM(t) = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \pi_\delta^j(t) \sigma^{j,k}(t) dW^k(t)$$

also

$$M(t) = M(0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \left(\sum_{j=1}^d \pi_\delta^j(s) \sigma^{j,k}(s) \right) dW^k(s).$$

Als stochastischer Integralprozess ist M ein lokales Martingal und somit ein Semimartingal.

Somit lässt sich \hat{S}^δ als zu M gehöriges exponentielles Semimartingal darstellen:

$$\hat{S}^\delta(t) = \mathcal{E}(M)_t = \hat{S}^\delta(0) \exp \left(M(t) - \frac{1}{2} [M]_t \right).$$

Da M ein lokales Martingal ist, ist $\mathcal{E}(M)$ ein positives lokales Martingal und somit ein Supermartingal.

“ \Leftarrow “: Es seien nun alle Portfolios S^δ , ausgedrückt in Einheiten von S^{δ^*} , also alle \hat{S}^δ , Supermartingale.

Annahme: S^{δ^*} ist kein GOP. Dann gibt es aber ein $\bar{\delta}$, so dass $S^{\bar{\delta}}$ ein GOP ist (da ein GOP existiert, vgl. Abschnitt 2.2.1). Dann folgt aus der bereits

gezeigten Richtung “ \Rightarrow “, dass auch alle in Einheiten von $S^{\bar{\delta}}$ ausgedrückten Portfolios S^{δ} Supermartingale sind. Definiere

$$L_t := \frac{S^{\delta^*}(t)}{S^{\bar{\delta}}(t)}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung: L_t und $\frac{1}{L_t}$ sind Supermartingale. Das geht aber nur, wenn L_t bereits ein Martingal ist. Also gilt

$$EL_t = EL_0 = C \text{ mit } C > 0 \text{ konstant.}$$

Da $x \mapsto \frac{1}{x}$ eine konvexe Funktion ist, gilt mit der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:

$$E\left(\frac{1}{L_t} \mid \mathcal{A}_s\right) \geq \frac{1}{E(L_t \mid \mathcal{A}_s)} = \frac{1}{L_s}$$

Aufgrund der Supermartingaleigenschaft gilt aber auch

$$E\left(\frac{1}{L_t} \mid \mathcal{A}_s\right) \leq \frac{1}{L_s},$$

also insgesamt Gleichheit. Somit ist auch $\frac{1}{L_t}$ ein Martingal.

Dann muss aber schon $L_t \equiv C$ gelten. Also ist S^{δ^*} bereits ein Vielfaches von $S^{\bar{\delta}}$ (bzw. umgekehrt). Dann muss aber auch S^{δ^*} ein GOP sein. \square

Anwendung: Somit ist also jedes \hat{S}^{δ} - also jeder mit dem numeraire S^{δ^*} gebenchmarkte Preisprozess S^{δ} - ein lokales Martingal bezüglich P . Daraus folgt dann unmittelbar, dass P bereits ein äquivalentes lokales Martingalmaß ist, wenn man S^{δ^*} als numeraire wählt.

Bemerkung: Der Anteilsprozess π_{δ^*} des GOP muss nicht eindeutig sein, z.B. kann man im Fall redundanter Basisfinanzgut-Accounts mit verschiedenen Anteilsprozessen den gleichen Wertprozess S^{δ^*} erzeugen. Es gilt aber, wie obiger Beweis gezeigt hat:

Korollar: *Der Prozess S^{δ^*} ist f.s. eindeutig.*

Somit hat sich also gezeigt, dass das GOP tatsächlich die gewünschte Supermartingaleigenschaft hat. Im Folgenden soll nun die faire Bewertung mithilfe des GOP stattfinden.

2.3 Faire Bewertung

Der gebenchmarkte Wertprozess

$$\hat{S}^\delta(t) = \frac{S^\delta(t)}{S^{\delta_*}(t)}, \quad 0 \leq t \leq T$$

eines strikt positiven, selbstfinanzierenden Portfolios S^δ zum Zeitpunkt t ist bereits im letzten Abschnitt eingeführt worden.

Ebenso wurde gezeigt, dass der gebenchmarkte Prozess stets ein Supermartingal ist, d.h.

$$\hat{S}^\delta(t) \geq E\left(\hat{S}^\delta(s) \mid \mathcal{A}_t\right) \quad \text{f.s. f.a. } t \leq s.$$

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn ein gebenchmarkter Prozess ein Martingal ist:

Definition: Ein Wertprozess $V = \{V(t), t \in [0, \infty)\}$, also ein Prozess der Form

$$V(t) = \sum_{i=1}^d \delta^i(t) S^i(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

der die Wertentwicklung bei Anwendung einer Handelsstrategie $\delta = (\delta^1(t), \dots, \delta^d(t))_{0 \leq t \leq T}$ beschreibt, wird fair genannt, wenn der gebenchmarkte Prozess

$$\hat{V} = \{\hat{V}(t) = \frac{V(t)}{S^{\delta_*}(t)}, t \in [0, \infty)\}$$

ein $(\underline{\mathcal{A}}, P)$ -Martingal ist, d.h.

$$\hat{V}(t) = E(\hat{V}(s) \mid \mathcal{A}_t)$$

f.s. f.a. $t \leq s$.

Korollar 1: Ein gebenchmarkter fairer Portfolioprocess $\hat{S}^\delta = \{\hat{S}^\delta(t), t \in [0, \infty)\}$ ist ein $(\underline{\mathcal{A}}, P)$ -Martingal auf $[0, \infty]$ mit

$$\hat{S}^\delta(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{S}^\delta(t) \quad \text{f.s.}$$

und für alle Stoppzeiten $\sigma, \tau \in [0, \infty]$ mit $\sigma \leq \tau$ f.s. gilt:

$$\hat{S}^\delta(\sigma) = E\left(\hat{S}^\delta(\tau) \mid \mathcal{A}_\sigma\right) \quad \text{f.s.}$$

mit $\hat{S}^\delta(\sigma), \hat{S}^\delta(\tau)$ integrierbar.

Dieses Korollar folgt unmittelbar aus dem Optional-Sampling-Theorem.

Definition / Korollar 2: Für ein strikt positives Portfolio S^δ und beschränkte Stoppzeiten $\tau \in [0, \infty)$ und $\sigma \in (\tau, \infty)$ ist der erwartete Return im Zeitraum $[\sigma, \tau]$ definiert durch

$$r_{\tau, \sigma}^\delta := E \left(\frac{S^\delta(\sigma)}{S^\delta(\tau)} \middle| \mathcal{A}_\tau \right) - 1$$

mit $\frac{0}{0} := 1$.

Dabei heißt eine Stoppzeit $\tau \in [0, \infty)$ beschränkt, falls ein $0 \leq C < \infty$ existiert mit $P(\tau \leq C) = 1$. Der erwartete Return eines gebenchmarkten Portfolios \hat{S}^δ im Zeitraum $[\sigma, \tau]$ ist entsprechend gegeben durch:

$$r_{\tau, \sigma}^{\delta*, \delta} = E \left(\frac{S^\delta(\sigma)}{S^{\delta*}(\sigma)} \frac{S^{\delta*}(\tau)}{S^\delta(\tau)} \middle| \mathcal{A}_\tau \right) - 1 = E \left(\frac{\hat{S}^\delta(\sigma)}{\hat{S}^\delta(\tau)} \middle| \mathcal{A}_\tau \right) - 1.$$

Es gilt: $r_{\tau, \sigma}^{\delta*, \delta} = 0$ f.a. $\tau \in [0, \infty)$ und $\sigma \in (\tau, \infty)$ genau dann, wenn S^δ fair ist.

Beweis: “ \Rightarrow ” Sei S^δ strikt positiv mit $r_{\tau, \sigma}^{\delta*, \delta} = 0$ f.a. $\tau \in [0, \infty)$ und $\sigma \in (\tau, \infty)$ beschränkt.

$$\Rightarrow 0 = r_{\tau, \sigma}^{\delta*, \delta} = E \left(\frac{\hat{S}^\delta(\sigma)}{\hat{S}^\delta(\tau)} \middle| \mathcal{A}_\tau \right) - 1$$

$$\Rightarrow E \left(\frac{\hat{S}^\delta(\sigma)}{\hat{S}^\delta(\tau)} \middle| \mathcal{A}_\tau \right) = 1$$

$$\Rightarrow E \left(\hat{S}^\delta(\sigma) \middle| \mathcal{A}_\tau \right) = \hat{S}^\delta(\tau)$$

$\Rightarrow \hat{S}^\delta$ ist ein Martingal, also ist S^δ fair.

“ \Leftarrow ” Sei nun S^δ fair.

$$\Rightarrow E \left(\hat{S}^\delta(\sigma) \middle| \mathcal{A}_\tau \right) = \hat{S}^\delta(\tau)$$

$$\Rightarrow r_{\tau, \sigma}^{\delta*, \delta} = E \left(\frac{\hat{S}^\delta(\sigma)}{\hat{S}^\delta(\tau)} \middle| \mathcal{A}_\tau \right) - 1 = 0$$

□

Bemerkung: Möchte man nun für einen gegebenen Wertprozess V den Wert im Zeitpunkt t so bestimmen, dass man einen fairen Wertprozess erhält,

so braucht man nur die definierende Gleichung eines fairen Wertprozesses anzuwenden:

$$\hat{V}(t) = E(\hat{V}(s) | \mathcal{A}_t).$$

Man muss also nur den Erwartungswert des gebenchmarkten Wertprozesses zu einem Zeitpunkt $s \geq t$, bedingt auf \mathcal{A}_t , bilden. Dabei liefert Korollar 1 die Martingaleigenschaft

$$\hat{V}(\tau) = E(\hat{V}(\sigma) | \mathcal{A}_\tau)$$

f.s. auch für alle Stoppzeiten $\tau \in [0, \infty]$, $\sigma \in [\tau, \infty]$.

Der faire Preis in t kann also als beste Voraussage für alle zukünftigen Werte (auch für den in ∞) des gebenchmarkten Prozesses interpretiert werden, die in diesem Zeitpunkt gemacht werden kann.

Um nun für einen Contingent Claim H_T , also eine \mathcal{A}_T -messbare Payofffunktion zum Endzeitpunkt T , mit

$$E\left(\frac{|H_T|}{S^{\delta_*}(T)}\right) = E(|\hat{H}_T|) < \infty$$

den fairen Preis eines Wertprozesses zum Zeitpunkt t zu bestimmen, kann nun die faire Bewertungsformel aufgestellt werden:

Definition: Zu einem nichtnegativen, gebenchmarkten Contingent Claim \hat{H}_T existiert ein faires Portfolio S^{δ_H} (d.h. \hat{S}^{δ_H} ist ein lokales P -Martingal) mit

$$\hat{S}^{\delta_H}(T) = \hat{H}_T.$$

Dieses Portfolio wird lokaler Martingalhedge genannt.

Satz 2.3.1 Sei \hat{H}_T ein beliebiger nichtnegativer gebenchmarkter Contingent Claim und S^{δ_H} der zugehörige lokale Martingalhedge. Dann gibt es einen zugehörigen eindeutigen previsiblen Prozess

$x_{\delta_H} = \{x_{\delta_H}(t) = (x_{\delta_H}^1(t), \dots, x_{\delta_H}^d(t))^T, t \in [0, T]\}$, so dass für den Anteilprozess π_{δ_H} gilt:

$$\pi_{\delta_H}(t) = \sigma^{-1}(t)^T \mathbf{1}^T x_{\delta_H}(t) \hat{S}^{\delta_H}(t)^{-1}$$

und

$$\hat{H}_T = \hat{S}^{\delta_H}(t) + \sum_{k=1}^d \int_t^T x_{\delta_H}^k(s) dW^k(s) \text{ f.s. f.a. } t \in [0, T]$$

Beweis: Nach dem Martingaldarstellungssatz für lokale Martingale existiert zu jedem lokalen Martingale M ein previsible Prozess x_Y so dass

$$M_t = \int_0^t x_Y(s) dW(s) \text{ f.a. } t \geq 0.$$

Wähle $Y = \hat{S}^{\delta_H}(t)$ (denn \hat{S}^{δ_H} ist ein lokales Martingale). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{S}^{\delta_H}(t) &= \int_0^t x_{\delta_H}(s) dW(s) \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^t x_{\delta_H}^k(s) dW^k(s) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Für $t = T$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \hat{H}_T = \hat{S}^{\delta_H}(T) &= \sum_{k=1}^d \int_0^T x_{\delta_H}^k(s) dW^k(s) \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^t x_{\delta_H}^k(s) dW^k(s) + \sum_{k=1}^d \int_t^T x_{\delta_H}^k(s) dW^k(s) \\ &= \hat{S}^{\delta_H}(t) + \sum_{k=1}^d \int_t^T x_{\delta_H}^k(s) dW^k(s) \end{aligned}$$

Vergleicht man nun (2.9):

$$d\hat{S}^{\delta_H}(t) = \hat{S}^{\delta_H}(t) \left(\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \pi_{\delta_H}^j(t) \sigma^{j,k}(t) dW^k(t) \right)$$

mit dem Differential von (2.14):

$$d\hat{S}^{\delta_H}(t) = \sum_{k=1}^d x_{\delta_H}^k(t) dW^k(t)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{S}^{\delta_H}(t) \pi_{\delta_H}^T(t) \sigma(t) &= x_{\delta_H}^T(t) \mathbf{1} \\ \Rightarrow \pi_{\delta_H}^T(t) \sigma(t) &= \hat{S}^{\delta_H}(t)^{-1} x_{\delta_H}^T(t) \mathbf{1} \\ \Rightarrow \pi_{\delta_H}^T(t) &= \hat{S}^{\delta_H}(t)^{-1} x_{\delta_H}^T(t) \mathbf{1} \sigma(t)^{-1} \text{ (falls } \sigma \text{ invertierbar)} \\ \Rightarrow \pi(t) &= \sigma^{-1}(t)^T \mathbf{1}^T x(t) S^{\delta_H}(t)^{-1} \end{aligned}$$

□

Insbesondere ist

$$E\left(\hat{H}_T | \mathcal{A}_t\right) = E\left(\hat{S}^{\delta_H}(T) | \mathcal{A}_t\right) = \hat{S}^{\delta_H}(t)$$

ein P -Martingal. Dieses definiert den zu H_T gehörigen fairen Wertprozess.

Definition: Für einen durch einen lokalen Martingalhedge S^δ hedgebaren Claim H_T ist der faire Preis $C_{H_T}(t)$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch

$$\hat{C}_{H_T}(t) := \hat{S}^{\delta_H}(t) = E\left(\hat{H}_T | \mathcal{A}_t\right).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} C_{H_T}(t) &= S^{\delta_*}(t) \hat{C}_{H_T}(t) \\ &= S^{\delta_*}(t) E\left(\frac{H_T}{S^{\delta_*(T)}} | \mathcal{A}_t\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dabei ist wie üblich

$$\hat{C}_{H_T}(t) = \frac{C_{H_T}(t)}{S^{\delta_*(t)}}.$$

$\hat{C}_{H_T}(t)$ ist der gebenchmarkte faire Preis.

(2.15) nennt man die faire Bewertungsformel.

Bemerkung: In der fairen Bewertungsformel

$$C_{H_T}(t) = S^{\delta_*}(t) E\left(\frac{H_T}{S^{\delta_*(T)}} | \mathcal{A}_t\right)$$

kommt der lokale Martingalhedge S^δ gar nicht explizit vor. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung kann also auch für nicht hedgebare Claims gebildet werden. Somit erhält man auch für diesen Fall eine sinnvolle Bewertung, denn als bedingter Erwartungswert ist $E\left(\hat{H}_T | \mathcal{A}_t\right)$ die beste Prognose für den Wert in T , die im Zeitpunkt t gemacht werden kann. Somit kann man die faire Bewertungsformel auch für nicht hedgebare Claims anwenden.

Bemerkung: Beachte, dass der bedingte Erwartungswert, der in beiden Fällen für die faire Bewertungsformel benötigt wird, unter dem (von vornherein gegebenen) Maß P gebildet wird. Es ist wie gewünscht keine Maßtransformation erforderlich. Sobald ein GOP identifiziert ist, kann der faire Preis eines jeden integrierbaren gebenchmarkten Payoffs bestimmt werden.

Beispiel (entnommen aus [17]): Betrachtet man eine europäische Calloption mit Ausübungszeitpunkt T , zugrundeliegendem Finanzgut $S = \{S(t), 0 \leq t \leq T\}$ und strike K , so ergibt sich aus dem Payoff H_T ,

$$H_T = (S(T) - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\},$$

der gebenchmarkte Payoff in T :

$$\hat{H}_T = \frac{H_T}{S^{\delta^*}(T)}$$

Nun soll der faire Wert $C_{H_T}(t)$ dieser Option zum Zeitpunkt $t \leq T$ bestimmt werden.

Der gebenchmarkte faire Wert $\hat{C}_{H_T}(t)$ ergibt sich wie oben gesehen als:

$$\hat{C}_{H_T}(t) = E\left(\hat{H}_T | \mathcal{A}_t\right).$$

und der faire Preis als:

$$C_{H_T}(t) = S^{\delta^*}(t) \hat{C}_{H_T}(t) = S^{\delta^*}(t) E\left(\hat{H}_T | \mathcal{A}_t\right)$$

f.a. $t \in [0, T]$.

Dieser Bewertungsansatz ist für eine große Anzahl von Fällen anwendbar, auch in solchen, in denen klassische Bewertungsmethoden versagen, z.B. stochastische Zinsraten, unvollständige Märkte (und demzufolge fehlendes eindeutiges risikoneutrales Maß). Die einzige Voraussetzung an das Modell liegt in der Existenz eines GOP.

Das verbleibende Problem für die praktische Umsetzung des Benchmark-Ansatzes besteht nun darin, den bedingten Erwartungswert auf der rechten Seite der fairen Bewertungsformel zu berechnen. Zunächst soll aber untersucht werden, inwieweit diese Erkenntnisse im risikoneutralen Fall mit der bekannten Bewertungsformel übereinstimmen. Danach soll die faire Bewertungsformel für einen Spezialfall, der auch Wetterderivate betrifft, vereinfacht werden.

2.3.1 Zusammenhang zur risikoneutralen Bewertung

In diesem Abschnitt soll überprüft werden, ob in dem Fall, in dem die risikoneutrale Bewertungsformel anwendbar ist, beide Methoden, also die risikoneutrale und die faire Bewertungsmethode, zu dem selben Ergebnis kommen.

Es wird sich zeigen, dass es sich bei der fairen Bewertungsformel um eine Verallgemeinerung der risikoneutralen Bewertungsformel handelt.

Es sei also ein Modell wie das Bisherige gegeben, in dem auch ein äquivalentes Martingalmaß \bar{P} (bei Verwendung von B als numeraire) existiert. Es gelten die Voraussetzungen für den Satz von Girsanov.

Satz 2.3.2 *Die risikoneutrale Bewertung ist ein Spezialfall der fairen Bewertung, d.h. sind beide Bewertungsformeln anwendbar, so liefern sie dasselbe Ergebnis.*

Beweis: Es sei

$$\Lambda := \{\Lambda(t), t \in [0, T]\}$$

mit

$$\Lambda(t) := \frac{B(t)S^{\delta_*}(0)}{S^{\delta_*}(t)B(0)}, t \in [0, T]$$

Dies ist die P -Dichte eines äquivalenten Martingalmaßes \bar{P} .

Da wie bereits gesehen P bei Verwendung von S^{δ_*} als numeraire äquivalentes lokales Martingalmaß ist, gilt für jedes Portfolio S^δ :

$$\hat{S}^\delta(t) = E\left(\hat{S}^\delta(T) | \mathcal{A}_t\right) \text{ f.a. } t \in [0, T].$$

Aber

$$\hat{S}^\delta(t) = \bar{S}^\delta(t) \frac{B(t)}{S^{\delta_*}(t)}$$

mit

$$\bar{S}^\delta(t) = \frac{S^\delta(t)}{B(t)}$$

also:

$$\begin{aligned} \bar{S}^\delta(t) &= \frac{S^{\delta_*}(t)}{B(t)} E\left(\hat{S}^\delta(T) | \mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(\bar{S}^\delta(T) \frac{B(T)S^{\delta_*}(t)}{B(t)S^{\delta_*}(T)} | \mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(\bar{S}^\delta(T) \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} | \mathcal{A}_t\right). \end{aligned}$$

Ist also

$$\frac{d\bar{P}}{dP}|_{\mathcal{A}_t} = \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} \text{ f.a. } t \in [0, T],$$

so ist \bar{S}^δ ein \bar{P} -Martingal. Also ist \bar{P} bei Verwendung von B als numeraire ein zu P äquivalentes Martingalmaß.

Für einen Contingent Claim H_T kann man nun mit Hilfe von Λ die faire Bewertungsformel für $t \in [0, T]$ umschreiben zu:

$$\begin{aligned} C_{H_T}(t) &= S^{\delta^*}(t)\hat{C}_{H_T}(t) = S^{\delta^*}(t)E\left(\hat{H}_T|\mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(S^{\delta^*}(t)\frac{H_T}{S^{\delta^*}(T)}|\mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(\frac{\Lambda(T)B(t)}{\Lambda(t)B(T)}H_T|\mathcal{A}_t\right) \\ &= \bar{E}\left(\frac{B(t)}{B(T)}H_T|\mathcal{A}_t\right) \\ &= B(t)\bar{E}\left(\frac{H_T}{B(T)}|\mathcal{A}_t\right) \end{aligned}$$

dabei bezeichne $\bar{E}(\cdot|\mathcal{A}_t)$ den auf \mathcal{A}_t bedingten Erwartungswert bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes \bar{P} .

Dies ist aber gerade die bekannte risikoneutrale Bewertungsformel. \square

Somit zeigt sich also, dass sich die bisherige risikoneutrale Bewertungsformel aus der fairen Bewertungsformel herleiten lässt und somit einen Spezialfall dieser Formel darstellt für den Fall, in dem bei der Verwendung von B als numeraire ein äquivalentes Martingalmaß existiert.

2.3.2 Unabhängigkeit vom GOP: Der Wetterderivatfall

Hier soll sich nun mit dem Spezialfall befasst werden, in dem der Claim H_T unabhängig vom GOP ist. Man kann annehmen, dass dies auf Wetterderivate zutrifft, da man davon ausgeht, dass Wetterphänomene wie Temperatur unabhängig vom Aktienmarkt (also vom MSCI-Index und damit vom GOP) sind.

Es sei nun im Folgenden eine vom GOP unabhängige Payoff-Funktion H_T gegeben (genauer: H_T sei unabhängig vom Wert $S^{\delta^*}(T)$ des GOP zum Ausübungszeitpunkt T). Weiterhin sei der erwartete gebenchmarkte Payoff endlich, d.h.

$$E\left(\left|\frac{H_T}{S^{\delta^*}(T)}\right|\right) < \infty.$$

$\underline{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ sei weiterhin die von Anfang an verwendete Filtration, die nicht nur das Geschehen am Finanzmarkt, sondern auch das Wettergeschehen abbildet.

Dann kann unter Ausnutzung der Unabhängigkeit die faire Bewertungsformel folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} C_{H_T}(t) &= S^{\delta^*}(t) \cdot E\left(\hat{H}_T | \mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(\frac{S^{\delta^*}(t)}{S^{\delta^*}(T)} H_T | \mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(\frac{S^{\delta^*}(t)}{S^{\delta^*}(T)} | \mathcal{A}_t\right) \cdot E(H_T | \mathcal{A}_t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

f.a. $t \in [0, T]$. Die Unabhängigkeit wurde in der letzten Zeile ausgenutzt.

Bezeichnet $B(t, T)$ den fairen Preis im Zeitpunkt $t \in [0, T]$ einer Nullkuponanleihe mit Ausübungszeitpunkt T (die Auszahlung in T betrage 1 Euro), so liefert die faire Bewertungsformel:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= S^{\delta^*}(t) \cdot \hat{B}(t, T) \\ &= S^{\delta^*}(t) \cdot E\left(\frac{1}{S^{\delta^*}(T)} | \mathcal{A}_t\right) \\ &= E\left(\frac{S^{\delta^*}(t)}{S^{\delta^*}(T)} | \mathcal{A}_t\right) \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$. Setzt man dies in (2.16) ein, erhält man die *generalisierte aktuarielle Bewertungsformel*:

$$C_{H_T}(t) = B(t, T) E(H_T | \mathcal{G}_t)$$

Auch bei dieser Formel kann die Zinsrate (der Nullkuponanleihe) stochastisch sein.

Es sei noch einmal bemerkt, dass in diesem Spezialfall der Unabhängigkeit, der bei Wetterderivaten vorliegt, keine genauen Informationen über die Beschaffenheit und das Verhalten des GOP benötigt werden, sondern nur dessen Existenz. Für die Berechnung des fairen Wertes werden lediglich der bedingte Erwartungswert von H_T bzgl. \mathcal{A}_t und der faire Preis einer Nullkuponanleihe

(auf den das GOP indirekt Einfluss hat, der aber direkt am Markt beobachtbar ist) gebraucht. Für die Gültigkeit der generalisierten aktuariellen Bewertungsformel werden weder die Vollständigkeit des Marktes noch die Existenz eines risikoneutralen Maßes verlangt. Das in der Einleitung formulierte Ziel ist somit erreicht.

Bemerkung: In der Praxis wird der Verkäufer eines Wetterderivates zusätzlich zum fairen Preis vermutlich noch eine (subjektive) Liquiditätspämie verlangen (falls der Käufer dies akzeptiert).

2.3.3 Faire Bewertung von Wetterderivaten

Wie im ersten Kapitel gesehen, hängen die Payoffs von Wetterderivaten von Wetterindices ab, die als unabhängig vom GOP angesehen werden können. Betrachtet man z.B. wie in Kapitel 1 den Payoff eines long Calls auf Basis von kumulierten HDD-Werten mit Strike K , Laufzeit einem Monat und Faktor λ und wendet darauf die generalisierte aktuarielle Bewertungsformel an, ergibt sich für den fairen Preis $C(t)$ in $t \in [0, 30]$:

$$\begin{aligned} C(t) &= B(t, 30) E \left(\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{30} HDD_i - K \right)^+ \mid \mathcal{A}_t \right) \\ &= B(t, 30) \lambda E \left(\left(\sum_{i=1}^{30} HDD_i - K \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{30} HDD_i > K\}} \mid \mathcal{A}_t \right) \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht also im Folgenden darin, bedingte Erwartungswerte von Wetterindices - wie dem kumulierten HDD-Wert im Beispiel - in Bezug auf \mathcal{A}_t zu bestimmen.

Im Folgenden sollen zwei Methoden, die Platen & West für die praktische Berechnung dieser Erwartungswerte vorschlagen [17], vorgestellt werden. Beide Methoden greifen dabei auf historische Wetterdaten zurück. Die Problematik, die sich bei deren Beschaffung und Nutzung ergibt, ist bereits in Kapitel 1 angesprochen worden.

Hinzu kommt aber, dass Wetterdaten oft noch bereinigt werden müssen, um sie zur korrekten Rechnung verwenden zu können: Trends und saisonbedingte Änderungen müssen im Modell oftmals berücksichtigt werden.

Zunächst sollen die Messwerte normalisiert werden. Zu diesem Zweck kann der Langzeit-Durchschnitt durch ein Polynom approximiert werden. Verwendet man etwa ein quadratisches Polynom zur Approximation, könnte die zu lösende Gleichung für den Durchschnittswert $A_{t,h,l}$ für Tag h in Jahr l etwa

so lauten:

$$A_{t_{h,l}} = \beta_0 t_{h,l}^2 + \beta_1 t_{h,l} + \beta_2 \quad (2.17)$$

Dabei seien die β_i , $i \in \{0, 1, 2\}$ die Koeffizienten.

Dann müssen oft noch jahreszeitlich bedingte Zyklen aus dem Datenmaterial gefiltert werden. Dies geschieht, indem jeder Tag einzeln betrachtet wird. Für jeden Tag wird dann der Langzeit-Durchschnitt, beispielsweise des DAT-Wertes, mit Hilfe einer abgeschnittenen Fourierreihe approximiert. Dann wird dieser Durchschnittswert von jedem tatsächlichen Wert abgezogen, um die Residuen zu erhalten.

Für diese Methode muss dem Durchschnittswert $A_{t_{h,l}}$ eine Saisonkomponente $\xi_{t_{h,l}}$ hinzugefügt werden. Dies stellt den jahreszeitlich oszillierenden Durchschnitt dar und lässt besser erkennen, welche Teile des Durchschnittswerts jahreszeitlich bedingt sind. Aus (2.17) wird dementsprechend:

$$A_{t_{h,l}} = \beta_0 t_{h,l}^2 + \beta_1 t_{h,l} + \beta_2 + \xi_{t_{h,l}}$$

für $h \in \{1, \dots, 365\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$.

$\xi_{t_{h,l}}$ soll also durch eine Fourierreihe modelliert werden. Das geschieht durch den Ansatz

$$\xi_{t_{h,l}} = \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos \left(2\pi k \frac{\delta(t_{h,l})}{L} \right) + b_k \sin \left(2\pi k \frac{\delta(t_{h,l})}{L} \right) \right]$$

Die Reihe soll also bei N abgeschnitten werden. Dabei gilt $L = 365$ (außer in Schaltjahren). δ schließlich stellt eine (sich wiederholende) Treppenfunktion dar, die die Tage des Jahres zählt. Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k sind gegeben durch:

$$a_k = \frac{2}{L} \sum_{h=1}^L f(t_{h,l}) \cos \left(\frac{k\pi\delta(t_{h,l})}{L} \right)$$

und

$$b_k = \frac{2}{L} \sum_{h=1}^L f(t_{h,l}) \sin \left(\frac{k\pi\delta(t_{h,l})}{L} \right).$$

f soll die Funktion darstellen, die durch die Fourierreihe $\xi_{t_{h,l}}$ approximiert wird. $f(t_{h,l})$ sei definiert für alle $1 \leq h \leq L$ und $0 \leq l \leq n$. f habe die Periode L.

Sind die Daten vorhanden und bereinigt, kann eine der möglichen Methoden zur Bestimmung des bedingten Erwartungswertes angewendet werden.

Hierzu soll zunächst die *Historische Bewertungsmethode* (historical fair pricing method (HFP)) vorgestellt werden. Eine ähnliche Methode wird gern

bei der Bewertung von Versicherungsverträgen verwendet. Dabei wird der gesuchte bedingte Erwartungswert durch einen Langzeitmittelwert approximiert. Nehme an, dass ein CAT-Index betrachtet wird und für die Mittelung Wetterdaten aus M Jahren zur Verfügung stehen. Außerdem seien die CAT_i , $1 \leq i \leq M$, also die CAT-Werte aus den zur Verfügung stehenden Jahren, als voneinander unabhängig und identisch verteilt angenommen. Schätze zuerst den Mittelwert $\hat{\mu}$ der CAT-Werte durch das Stichprobemittel:

$$\hat{\mu}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M CAT_i$$

Dieser Schätzer ist bekanntlich erwartungstreu und nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konsistent.

Genauso soll die Standardabweichung $\hat{\sigma}$ durch die Stichprobenvarianz geschätzt werden:

$$\hat{\sigma}_M = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (CAT_i - \hat{\mu})^2}$$

Dies ist bekanntlich ebenfalls ein erwartungstreuer Schätzer.

Nun wird der erwartete Payoff $E(H_T | \mathcal{A}_t)$ für jedes $t \leq T$ mit Hilfe der im ersten Schritt berechneten Residuen bestimmt. Dazu wird für jedes der M Jahre der Payoff berechnet, der angefallen wäre, wenn dieses Jahr die Laufzeit des Kontrakts gewesen wäre. Als Mittelwert ergibt sich dann die Schätzung für den erwarteten Payoff. Setzt man diesen Wert in die generalisierte aktuarielle Bewertungsformel ein, erhält man eine Schätzung für den gesuchten fairen Preis.

Diese Methode ist einfach anzuwenden und benötigt nicht die Kenntnis über die Verteilung der betrachteten Wetterindices. Es wird hingegen eine große Datenmenge benötigt, um zuverlässige Schätzungen zu erhalten.

Möchte man den fairen Preis hingegen unter Berücksichtigung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für den betrachteten Wetterindex im Zeitpunkt der maturity bestimmen, bietet sich die *Verteilungsmethode* an. Mit einem statistischen Ansatz soll aus den historischen Daten eine Verteilung für den Wetterindex bestimmt werden. Ist einmal aus den vorhandenen Werten (etwa mittels eines Tests) der gesuchte Verteilungstyp identifiziert worden, müssen die Parameter geschätzt werden. Ist die genaue Verteilung schließlich bekannt, kann man mit ihrer Hilfe dann natürlich den gesuchten Erwartungswert berechnen.

Oft stellen sich Wetterindices als normalverteilt heraus, so dass der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 geschätzt werden müssen. Es bietet sich an,

eine Normalverteilung zu vermuten, da das normalisierte Stichprobenmittel

$$Z_M = \frac{\sqrt{M}(\hat{\mu}_M - \mu)}{\hat{\sigma}_M}$$

nach dem Zentralen Grenzwertsatz für $M \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen $Z \sim N(0, 1)$ konvergiert.

Diese Methode ist sicherlich rechnerisch aufwendiger, da erst die Verteilung bestimmt werden muss. Hat man diese hingegen gefunden, kann man eine Formel aufstellen, die in Abhängigkeit von den Parametern den fairen Preis angibt. Sind viele Daten vorhanden, liefern beide Methoden vergleichbare Ergebnisse.

Kapitel 3

Anwendung

In diesem Kapitel soll die in Kapitel 2 vorgestellte Theorie auf ein Zahlenbeispiel angewendet werden.

3.1 Die Daten

Als Beispiel für die Anwendung der Benchmark-Methode bzw. der generalisierten aktuariellen Bewertungsformel habe ich ein Wetterderivat ausgewählt, das tatsächlich in dieser Form auf der Website des CME gehandelt worden ist. Die genauen Ausgestaltungsmerkmale:

- *Wetterindex*: Heating Degree Days (HDD)
- *Ort/Referenzwetterstation*: Boston, Logan International Airport
- *Laufzeit*: Januar 2008
- *Strike*: auf der Website ist lediglich ein Intervall für Strikes angegeben: 1 - 3200.
- *Faktor λ* : 20\$
- *Derivattyp*: europäische Call-Option

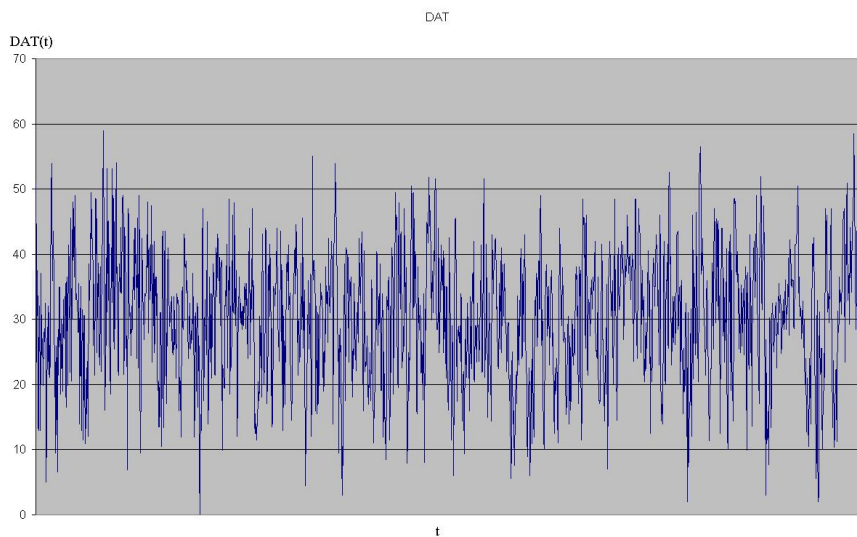
Ich habe mich für eine amerikanische Referenzstation entschieden, da hierfür umfangreiches Datenmaterial beim National Climatic Data Center (NCDC; dies ist auch die Datenquelle des CME, vgl. Kapitel 1) kostenlos erhältlich ist. Des Weiteren habe ich mich für den Typ Option entschieden, da diese den Großteil des amerikanischen Wettermarktes ausmachen (vgl. Kapitel 1.3). Da kein exakter Strike angegeben ist, habe ich beispielhaft zwei Werte

ausprobiert: 500 und 1000, letzteres liegt nahe beim Langzeitmittelwert über alle untersuchten Jahre (1945-2007) von rund 1083.

Die historischen Wetterdaten von obengenannter Station werden für die Berechnung des bedingten Erwartungswertes in der generalisierten aktuariellen Bewertungsformel benötigt. Die verwendeten Daten stammen jeweils aus dem Januar der Jahre 1945 - 2007. Es handelt sich somit um $63 \cdot 31 = 1953$ verschiedene Datensätze, ursprünglich bestehend aus einer Tagesmaximal- und einer Tagesminimaltemperatur, die von der Website des National Climatic Data Center (NCDC) stammen. In einem ersten Schritt habe ich daraus DAT-Werte bestimmt:

$$DAT_i = \frac{t_{min} + t_{max}}{2}$$

Dabei bezeichne t_{min} die Tagesminimal- und t_{max} die Tagesmaximaltemperatur, wie sie vom NCDC angegeben wird. Einen Sonderfall stellt der 17. 01. 1994 dar: Für diesen Tag steht auf der Website keine Tagesmaximaltemperatur zur Verfügung. Deshalb habe ich als DAT-Wert für diesen Tag den vom NCDC bereitgestellten Tagesdurchschnittswert (der sich in der Regel leicht vom rechnerischen DAT unterscheidet) für meine Berechnungen verwendet. Eine Übersicht über die DAT-Werte befindet sich im Anhang. Es ergibt sich folgende zeitliche Entwicklung der DAT-Werte:



Anhand der grafischen Veranschaulichung der DAT-Werte erkennt man zunächst einmal zweierlei:

Erstens sieht man, dass die Werte im zeitlichen Verlauf ziemlich konstant bleiben, also trotz globaler Erwärmung kein Aufwärtstrend zu beobachten ist (es liegt also die Vermutung nah, dass es sich um eine stationäre Zeitreihe handelt). Es muss also, wenn sich diese Vermutung bestätigt, kein Trend aus den Ausgangsdaten herausgerechnet werden.

Zweitens gibt die Grafik Anlass zu dem Verdacht, es mit einem Datensatz zu tun zu haben, der die Realisierung von zumindest annähernd unabhängigen Zufallsvariablen darstellt.

Diese beiden Vermutungen gilt es also im Folgenden zu überprüfen.

Ich teste also zunächst, ob die durch den Datensatz $(X_t)_{1 \leq t \leq T} = (DAT_t)_{1 \leq t \leq T}$, $T = 1953$ erzeugte Zeitreihe stationär ist. Zur Überprüfung der Hypothese "die Reihe ist stationär" führe ich einen KPSS-Test zum Niveau $\alpha = 0,05$ durch. Die Teststatistik ist

$$KPSS = \frac{1}{T^2 \omega_X^2} \cdot \sum_{t=1}^T S_t^2$$

mit

$$S_t = \sum_{j=1}^t (X_j - \bar{X}_T) \text{ f.a. } t \in \{1 \dots T = 1953\}$$

und

$$\omega_X^2 = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) = \gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h).$$

Dabei kann ω_X^2 durch den Schätzer

$$\hat{\omega}_X^2 = \hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{h=1}^{T-1} \hat{\gamma}(h)$$

angenähert und somit in der Teststatistik durch diesen ersetzt werden.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+h} - \bar{X}_T)$$

ist hierbei ein Schätzer für die Autokovarianz

$$\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Weiterhin ist

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

das arithmetische Mittel der X_t und $T = 1953$. Die Werte der Teststatistik ergeben sich als

$$\sum_{t=1}^T S_t^2 = 167.376.178$$

$$\omega_X^2 \approx -8,41324428$$

und somit gilt:

$$KPSS \approx -5,215856834,$$

was unter dem kritischen Wert von 0,463 liegt. Die Hypothese wird somit nicht verworfen.

Die Überprüfung der zweiten Vermutung, die X_t seien unabhängig, erfolgt nun durch die Schätzung der Autokorrelationsfunktion ρ . Diese ist für einen stochastischen Prozess $(X_t)_t$ definiert durch

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \quad h \geq 0$$

mit

$$\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t), \quad 0 \leq t \leq T-h = Cov(X_h, X_0), \quad h \geq 0$$

der bereits oben verwendeten Autokovarianz. Letztere Gleichheit gilt wegen der Stationarität.

Die Autokorrelationsfunktion misst, inwieweit die Werte eines stochastischen Prozesses zu unterschiedlichen Zeitpunkt miteinander korreliert sind.

Als Schätzer für γ kann wie oben $\hat{\gamma}$ verwendet werden:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+h} - \bar{X}_T)$$

Dabei ist \bar{X}_T wieder das arithmetische Mittel der T Beobachtungswerte (X_1, \dots, X_T) :

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i.$$

In diesem Beispiel ist $T = 1953$ und $(X_t)_t = (DAT_t)_t$.

Es ergibt sich automatisch der Schätzer für die Autokorrelation:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)},$$

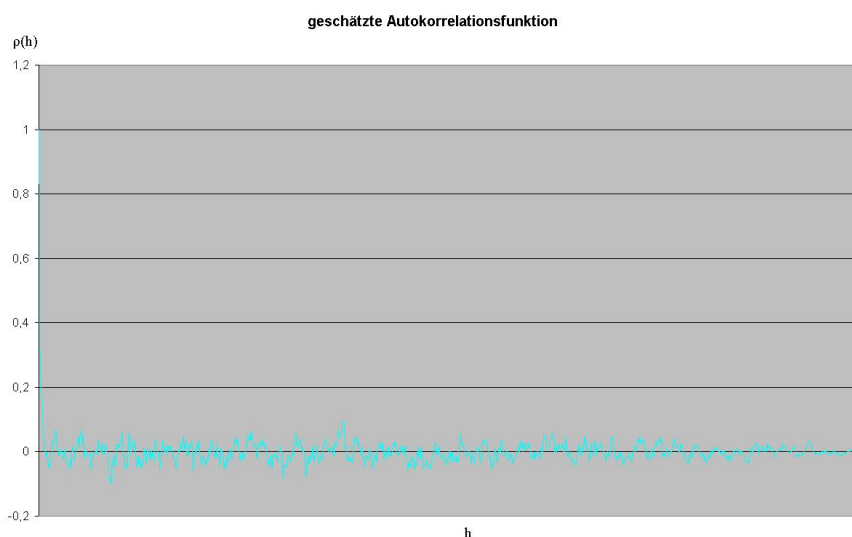
indem man einfach die $\gamma(h)$, $h \geq 0$ durch ihren jeweiligen Schätzer $\hat{\gamma}(h)$ ersetzt. Während natürlich $\rho(0) = 1$ gilt, sollten sich die Werte von $\rho(h)$ für

$h > 0$ bei einem unkorrelierten Datensatz $(X_t)_t$ sehr schnell der Null nähern und dann dort bleiben. In [12] wird etwa $|\rho(h)| \leq 0,2$ als Grenze vorgeschlagen, unter der die geschätzte Autokorrelationsfunktion bei Unabhängigkeit liegen sollte.

In diesem Beispiel liegt die $|\rho(h)|$ erstmals für $h = 5$ unterhalb dieser Schranke und überschreitet sie danach auch nie wieder. Somit kann nur für sehr nah beieinander liegende Zeitpunkte von einer Abhängigkeit der Wetterdaten ausgegangen werden.

Genauer liegt die Autokorrelation für $h = 1$ mit 0,66591769 noch relativ hoch, während sie für $h = 4$ mit 0,22294456 schon sehr nah an der Grenze von 0,2 liegt.

Hier eine grafische Darstellung der geschätzten Autokorrelationsfunktion:



Nachdem sich also die erste Hypothese als gerechtfertigt erwiesen hat und die zweite immerhin eingeschränkt gilt, möchte ich nun auf verschiedene Weisen für den Januar 2008 auf Basis der Daten aus den Jahren 1945 - 2007 den bedingten Erwartungswert in der generalisierten aktuariellen Bewertungsformel und somit den fairen Preis zunächst ausführlich für $t=0$ (31. Dezember 2007) berechnen (eine vergleichende Auswertung über die gesamte Laufzeit des Claims erfolgt im Kapitel 3.5).

Dazu verwende ich in den folgenden beiden Abschnitten zunächst die in Kapitel 2 vorgestellten Methoden, um im dritten Abschnitt dann noch eine Betrachtung auf Basis der Methoden der Zeitreihenanalyse durchzuführen.

3.2 Anwendung der Historischen Bewertungsmethode (HFP)

Als erstes möchte ich die Historische Methode anwenden, bei der ein Mittelwert aus den Payoffs P_i , $1945 \leq i \leq 2007$ gebildet wird, die angefallen wären, wenn die Laufzeit des Calls der Januar des Jahres i gewesen wäre, also

$$P_i := \left(\sum_{j=1}^{31} HDD_{i,j} - K \right)^+ = \left(\sum_{j=1}^{31} (\kappa - DAT_{i,j})^+ - K \right)^+$$

wobei $HDD_{i,j}$ bzw. $DAT_{i,j}$ den entsprechenden Wert des j -ten Januartages des i -ten Jahres bezeichne, $1 \leq j \leq 31$ (der Faktor λ wird hier außer Acht gelassen). Da mit den Januartemperaturen aus 63 Jahren eine große Datenmenge für die Berechnung zur Verfügung steht, sollte diese Methode bereits eine gute Näherung für das Ergebnis liefern, obwohl sie keinerlei Verteilungseigenschaften berücksichtigt. Wie bereits zu Beginn des Kapitels 3 gesehen, muss kein Trend herausgerechnet werden und auch die Betrachtung einer saisonalen Komponente entfällt, da es stets nur um Januarwerte geht. Der geschätzte erwartete Payoff für den Januar 2008 ergibt sich wie folgt:

$$\hat{P}_{2008} = \frac{1}{63} \sum_{i=1945}^{2007} P_i$$

Für $K = 500$ ergibt sich:

$$\hat{P}_{2008} = 583,0095238$$

Für $K = 1000$ entsprechend:

$$\hat{P}_{2008} = 103,25$$

Die wahren Payoffs ergeben sich zu:

$$P_{2008} = 468,3$$

für $K = 500$ bzw.

$$P_{2008} = 0$$

für $K = 1000$. Es ergeben sich also Abweichungen von 114,7095238 bzw. 103,25. Somit sind die Prognosen relativ nah am wahren Ergebnis. Allerdings würde man im Fall $K = 1000$ den Call für vorteilhaft halten, obwohl der Payoff am Ende Null beträgt.

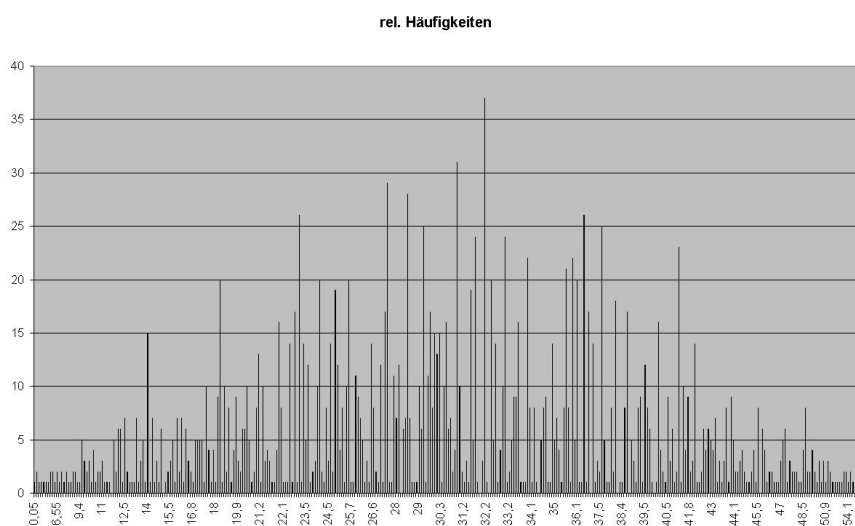
Dies entspricht einer Prognose auf Basis des Informationsstandes vor dem 1. Januar 2008. Möchte man den Wert des Calls zu einem Zeitpunkt während der Laufzeit, also für $1 \leq t \leq 31$ bestimmen, genügt es, die bis dahin bekannten Werte zu benutzen und nur über die Werte für $j > t$ zu mitteln:

$$P_{2008}^t = \frac{1}{63} \sum_{i=1945}^{2007} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} HDD_{2008,j} + \sum_{j=\lfloor t \rfloor+1}^{31} HDD_{i,j} - K \right)^+$$

3.3 Anwendung der Verteilungsmethode

Obwohl sich im Abschnitt 3.1 eine leichte Abhängigkeit der DAT-Werte untereinander über kurze Zeiträume abgezeichnet hat, möchte ich für die Anwendung der Verteilungsmethode von unabhängigen Zufallsvariablen ausgehen, um eine unverhältnismäßige Kompliziertheit der Rechnungen zu vermeiden.

Im Folgenden soll nun die Verteilung der als unabhängig angenommenen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_T , $T = 1953$ ($63 \cdot 31$) bestimmt werden. Betrachte dazu zunächst die relativen Häufigkeiten der einzelnen DAT-Werte:



Dieses Diagramm weist starke Ähnlichkeit zur Dichtefunktion der Normalverteilung auf. Deshalb will ich zunächst die Hypothese “ X_1, \dots, X_{1953} sind iid normalverteilt“ überprüfen.

Dafür schätze ich zunächst die infragekommenden Parameter μ und σ^2 . Danach möchte ich einen Test auf eine $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ -Verteilung durchführen.

Zur Schätzung des Erwartungswertes μ der (unterstellten) Normalverteilung verwende ich das Stichprobenmittel

$$\hat{\mu} = \bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i.$$

Dies ist ein erwartungstreuer und stark konsistenter Schätzer (genauer: ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer (GBES)), der sich im Fall einer Normalverteilung z.B. mit der Momentenmethode und der Maximum-Likelihood-Methode ergibt. In diesem konkreten Zahlenbeispiel ($T = 1953$) erhalte ich:

$$\hat{\mu} \approx 30,0642089.$$

Die Varianz σ^2 schätze ich mit Hilfe der Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \cdot \sum_{i=1}^T (X_i - \bar{X}_T)^2.$$

Auch dieser Schätzer ist ein GBES. Ich erhalte:

$$\hat{\sigma}^2 \approx 91,7981779$$

und dementsprechend

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} \approx 9,58113656.$$

Die zu testende Hypothese lautet also:

$$(X_t)_{0 \leq t \leq T} = (DAT_t)_{0 \leq t \leq T} \sim N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2).$$

Zur Überprüfung dieser Hypothese führe ich einen Kolmogorov-Smirnov-Test zum Niveau $\alpha = 0,05$ durch.

Für diesen Test muss ich die empirische Verteilung

$$F_T(\omega, t) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(X_i(\omega))$$

der X_t bestimmen. Der Kolmogorov-Smirnov-Test vergleicht diese mit der vermuteten tatsächlichen Verteilung, in diesem Fall also mit $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$. Liegt die Hypothese vor, sollte also die Teststatistik

$$d_T = \|F_T - N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |F_T(\omega, t) - N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)(t)|$$

sehr klein sein. Gleiches gilt für

$$\tilde{d}_T = \sup_{0 \leq t \leq T} |F_T(\omega, t-1) - N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)(t)|.$$

Somit sind alle Abstände $d(t) = |F_T(\omega, t) - N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)(t)|$ und $\tilde{d}(t) = |F_T(\omega, t-1) - N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)(t)|$ zu berechnen und ihr Maximum zu bestimmen. Als maximaler Abstand ergibt sich

$$\max_{0 \leq t \leq T} \{d(t), \tilde{d}(t)\} = \max\{d_T, \tilde{d}_T\} \approx 0,030130377.$$

Dieser Abstand wird mit dem kritischen Wert $k = \frac{1,36}{\sqrt{T}} = \frac{1,36}{\sqrt{1953}}$ verglichen. Es ergibt sich der Test

$$\varphi_\alpha = \mathbf{1}_{\{\max\{d_T, \tilde{d}_T\} \geq k\}}.$$

In diesem konkreten Fall ist

$$k = 0,030774272 > \max\{d_T, \tilde{d}_T\}$$

also $\varphi = 0$. Die Verteilungshypothese wird nicht abgelehnt. Allerdings ist dies ein sehr knappes Ergebnis, so dass ich es mit weiteren Tests überprüfen möchte.

Dafür habe ich zunächst einen Jarque-Bera-Test, ebenfalls zum Niveau $\alpha = 0,05$, durchgeführt. Die zu bestimmende Teststatistik lautet:

$$JB = \frac{T}{6} \left(S\hat{C}H^2 + \frac{E\hat{X}Z^2}{4} \right)$$

mit

$$S\hat{C}H = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (DAT_i - \hat{\mu})^3}{\left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (DAT_i - \hat{\mu})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Schätzer für die Schiefe und

$$E\hat{X}Z = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (DAT_i - \hat{\mu})^4}{\left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (DAT_i - \hat{\mu})^2 \right)^2} - 3$$

mit $EXZ + 3$ Schätzer für die Kurtosis.

Der Test lehnt die Hypothese “Die Daten folgen einer Normalverteilung“ ab, wenn $JB > 5,99$ gilt ($JB \sim \chi_2^2$).

Für die gegebenen Wetterdaten ergibt sich:

$$JB = 8,28502996 > 5,99$$

Der Test lehnt die Hypothese also ab.

Als letzten Test habe ich noch einen Shapiro-Wilk-Test zum Niveau $\alpha = 0,05$ auf Basis der letzten 50 DAT-Werte durchgeführt.

Die Teststatistik W ergibt sich zu:

$$W = 0,97679502214102876$$

Dieser Wert ist größer als der Schwellenwert von 0,9470000267028809, die Hypothese der Normalverteilung wird nicht abgelehnt. Als Schätzer für Mittelwert und Standardabweichung (auf Basis der letzten 50 Werte) liefert der Test:

$$\tilde{\mu} = 35,611 \text{ und } \tilde{\sigma} = 10,122692682426802.$$

Nach diesen Überlegungen habe ich mich entschlossen, die Hypothese der Normalverteilung der X_t beizubehalten.

Um nun den Payoff auf Basis der infragekommenden Normalverteilungen $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ und $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ prognostizieren zu können, simuliere ich (mit R) jeweils 31 DAT-Werte anhand dieser Verteilungen. Ich erhalte folgende zufällige Werte:

| Datum | $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ | $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ |
|------------|--------------------------------|------------------------------------|
| 01. Januar | 18,22847 | 22,76837 |
| 02. Januar | 41,28037 | 47,88743 |
| 03. Januar | 28,52954 | 49,82081 |
| 04. Januar | 28,96654 | 27,94440 |
| 05. Januar | 30,40508 | 19,40568 |
| 06. Januar | 46,23583 | 31,91282 |
| 07. Januar | 38,02611 | 55,97503 |
| 08. Januar | 21,53702 | 39,38927 |
| 09. Januar | 38,94283 | 43,23338 |
| 10. Januar | 36,98736 | 34,12487 |
| 11. Januar | 42,92089 | 28,70178 |
| 12. Januar | 22,85501 | 48,03593 |
| 13. Januar | 25,51291 | 29,86751 |
| 14. Januar | 27,96033 | 34,71409 |
| 15. Januar | 37,96180 | 38,14733 |
| 16. Januar | 39,58756 | 20,44641 |
| 17. Januar | 29,99420 | 22,33864 |
| 18. Januar | 32,72042 | 17,90608 |
| 19. Januar | 28,40876 | 48,77255 |
| 20. Januar | 20,95386 | 30,32126 |
| 21. Januar | 62,12166 | 26,27540 |
| 22. Januar | 40,52407 | 28,36341 |
| 23. Januar | 26,61345 | 27,81740 |
| 24. Januar | 45,57169 | 34,36504 |
| 25. Januar | 46,14038 | 51,17554 |
| 26. Januar | 43,88612 | 49,72378 |
| 27. Januar | 41,25626 | 42,12583 |
| 28. Januar | 29,89039 | 47,57534 |
| 29. Januar | 21,15804 | 13,60495 |
| 30. Januar | 29,25262 | 32,78571 |
| 31. Januar | 31,20142 | 42,39656 |

Die Spaltenüberschriften geben an, nach welcher der oben genannten Verteilungen die Werte simuliert wurden.

Aus diesen simulierten DAT-Werten errechne ich folgende Payoffs:

$$\hat{P}_{2008} = 459,36901; \tilde{P}_{2008} = 427,07740$$

für den Fall $K=500$ und

$$\hat{P}_{2008} = 0 = \tilde{P}_{2008}$$

für $K=1000$.

Dabei bezeichne \hat{P} den resultierende Payoff bei Simulation auf Basis der $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ -Verteilung, \tilde{P} den bei Nutzung von $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ entstehenden Payoff.

Nach Auswertung der realen DAT-Werte des Januars 2008 ergeben sich folgende tatsächliche Werte:

$$\sum_{i=1}^{31} HDD_i = 968,3$$

$$\Rightarrow P_{2008} = 468,3 (K = 500); P_{2008} = 0 (K = 1000)$$

Daraus resultieren für den Fall $K = 500$ Abweichungen von 8,93099 für $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ bzw. 41,2226 für $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2$. Für den Fall $K = 1000$ ergeben sich keine Abweichungen.

Die so erhaltenen Resultate liegen wesentlich näher am realen Ergebnis als die der Historischen Methode, obwohl hier die einschränkende Annahme der Unabhängigkeit gemacht wurde, die real nicht vollständig erfüllt ist. Für $K = 1000$ stellt sich sogar direkt in $t = 0$ die Unvorteilhaftigkeit der Option heraus.

Möchte man nun den Wert der Option zu einem späteren Zeitpunkt $1 \leq t \leq T$ bestimmen, so muss man nur die bis t bekannten realen Werte verwenden und lediglich die $T - [t]$ fehlenden Werte simulieren.

3.4 Zeitreihenanalyse

Für eine alternative Prognose möchte ich die Daten nun mit den Methoden der Zeitreihenanalyse auswerten. Die Voraussetzung der Unabhängigkeit wird in diesem Abschnitt nicht mehr gemacht. Dass es hingegen vernünftig ist, von einem stationären Prozess auszugehen, habe ich bereits in Abschnitt 3.1 gezeigt.

Ich möchte nun ein Modell für den Prozess der DAT-Werte schätzen. Da es sich, wie bereits in Kapitel 3.1 gesehen, um eine stationäre Zeitreihe handelt und die geschätzte Autokorrelationsfunktion sich schnell 0 nähert, eignet sich ein AR(p)-Modell gut zur Approximation. Die erste Aufgabe besteht nun darin, das am besten geeignete p zu finden.

Da die geschätzte Autokorrelationsfunktion $\rho(h)$ bereits für $h \geq 5$ unter 0,2 liegt und die Daten somit nur über kurze Zeiträume miteinander korreliert

sind, gehe ich davon aus, dass das optimale p eher niedrig sein wird, so dass auch die Prognose mittels des geschätzten $AR(p)$ -Modells nur die aktuellsten Werte berücksichtigt. Schätzt man die partielle Autokorrelationsfunktion, so ergibt sich, dass für $p \geq 4$ deren Betrag stets unter 0,1 liegt, was ebenfalls auf einen niedrigen Wert für p hindeutet.

Um dies zu überprüfen, berechne ich für $p \geq 1$ jeweils einen Yule-Walker-Schätzer für das entsprechende $AR(p)$ -Modell. Um ein geeignetes p zu bestimmen, habe ich die Daten der letzten 10 Jahre verwendet und zunächst noch als eine lange Zeitreihe betrachtet, auch wenn dies nicht ganz korrekt ist, da ja der 1. Januar nicht direkt auf den 31. Januar des Vorjahres folgt. Da aber die Betrachtung jedes einzelnen Jahres für jedes infrage kommende p einen erheblichen Rechenaufwand verursachen, aber wohl ein ähnliches Ergebnis liefern würde, habe ich beschlossen, für diese Schätzung noch nicht jedes Jahr einzeln zu betrachten. Dies habe ich erst bei der Bestimmung der Prognosefunktion getan.

Um p zu bestimmen, wird ein Prozess mit Mittelwert 0 benötigt, so dass ich mit um den Erwartungswert von 30,0642089 bereinigten Daten arbeiten muss. Nach der Prognose addiere ich diese Zahl wieder zu den resultierenden Werten hinzu.

Für einen $AR(p)$ -Prozess

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad \phi_i \neq 0 \text{ f.a. } 1 \leq i \leq p$$

lautet der Yule-Walker-Schätzer:

$$\hat{\Phi} = \left(\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p \right)^T = \hat{\Gamma}_p^{-1} \hat{\gamma}_p(1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\Phi}^T \hat{\gamma}_p(1)$$

mit

$$\hat{\Gamma}_p = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(0) & \hat{\gamma}(1) & \dots & \hat{\gamma}(p-1) \\ \hat{\gamma}(1) & \hat{\gamma}(0) & \dots & \hat{\gamma}(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\gamma}(p-1) & \hat{\gamma}(p-2) & \dots & \hat{\gamma}(0) \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\gamma}_p(1) = (\hat{\gamma}(1), \dots, \hat{\gamma}(p))^T.$$

$\hat{\gamma}$ wird dabei wie in 3.1 geschätzt.

Um zu prüfen, welches p am besten geeignet ist, habe ich mit den oben erhaltenen Schätzern für jedes $1 \leq p \leq 10$ und jedes $X_t, p+1 \leq t \leq 310$ Schätzwerte für X_t bestimmt und diese mit dem wahren Wert verglichen. Als Informationskriterium für die Auswahl des geeignetsten p habe ich das Bayesianische

Informationskriterium BIC verwendet. Dieses lautet für AR(p)-Prozesse:

$$BIC(p) = \ln \hat{\sigma}_p^2 + p \frac{\ln T}{T}$$

dabei ist $\hat{\sigma}_p^2$ die geschätzte Varianz der Residuen bei Verwendung des Parameters p .

Für $1 \leq p \leq 10$ ergeben sich die folgenden BIC-Werte:

| | | | | | |
|-----|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| BIC | 3,805793267 | 3,79877244 | 3,785252509 | 3,80386969 | 3,815425473 |
| p | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| BIC | 3,833331144 | 3,849376611 | 3,869867521 | 3,89160251 | 3,907158826 |

Man sieht, dass die BIC-Werte zunächst stets um etwa 0,01 sinken, dann bei $p = 3$ ihr Minimum von 3,785252509 erreichen und von da an kontinuierlich wieder um etwa 0,01 ansteigen. Aufgrund dieser Regelmäßigkeit und weil ich ja bereits von einem niedrigen p-Wert ausgegangen war, habe ich nach $p = 10$ mit der Überprüfung aufgehört.

Um nun eine Prognose für 2008 anstellen zu können, habe ich zunächst jedes Jahr i von 1945 bis 2007 separat betrachtet.

Für jedes dieser Jahre habe ich die Parameter $\hat{\Phi}^i = (\hat{\phi}_1^i, \hat{\phi}_2^i, \hat{\phi}_3^i)^T$ und $\hat{\sigma}_i^2$ der resultierenden Prognosefunktion bestimmt, die zu verwenden wäre, wollte man eine Prognose erstellen, die nur auf den Januardaten dieses Jahres basiert. Um daraus eine Prognosefunktion für das Jahr 2008 zu erhalten, habe ich die so erhaltenen Werte $\hat{\phi}_j^i$, $j = 1, 2, 3$; $1945 \leq i \leq 2007$ und $\hat{\sigma}_i^2$, $1945 \leq i \leq 2007$ jeweils über alle i gemittelt:

$$\hat{\phi}_j^{2008} = \frac{1}{63} \sum_{i=1945}^{2007} \hat{\phi}_j^i, \quad j = 1, 2, 3$$

und

$$\hat{\sigma}_{2008}^2 = \frac{1}{63} \sum_{i=1945}^{2007} \hat{\sigma}_i^2.$$

Dann ergibt sich als Prognosefunktion:

$$\hat{X}_t = \hat{\phi}_1^{2008} X_{t-1} + \hat{\phi}_2^{2008} X_{t-2} + \hat{\phi}_3^{2008} X_{t-3} + Z_t$$

wobei t zwischen dem 01. und dem 31. Januar 2008 läuft und $Z_t \sim WN(0, \hat{\sigma}_{2008}^2)$. Liegt $t - 1$ (bzw. $t - 2$, $t - 3$) vom Prognosezeitpunkt aus gesehen in der Zukunft, so wird X_{t-1} (bzw. X_{t-2} , X_{t-3}) durch die jeweils aktuelle Prognose

\hat{X}_{t-1} (bzw. \hat{X}_{t-2} , \hat{X}_{t-3}) ersetzt.

Für diesen konkreten Fall erhalte ich folgende Schätzwerte für $\hat{\phi}^{2008}$ und $\hat{\sigma}_{2008}^2$:

$$\hat{\Phi}^{2008} = \left(\hat{\phi}_1^{2008}, \hat{\phi}_2^{2008}, \hat{\phi}_3^{2008} \right)^T = (0, 75737656, -0, 35795444, 0, 13446879)^T$$

$$\hat{\sigma}_{2008}^2 = 40, 9437197$$

Somit ist $Z_t \sim WN(0; 40, 9437197)$. Um konkrete Prognosen anstellen zu können, simuliere ich Z_t , $1 \leq t \leq 31$ (01. - 31. Januar) mithilfe von R. Diese Simulation liefert folgende Ergebnisse:

| t | Z_t |
|----|-------------|
| 1 | 8,268431 |
| 2 | 1,9252472 |
| 3 | -7,1912523 |
| 4 | 1,6270586 |
| 5 | 4,2328430 |
| 6 | -3,9960135 |
| 7 | -7,0031653 |
| 8 | 8,6406222 |
| 9 | -7,4811239 |
| 10 | 6,0016439 |
| 11 | 5,8721089 |
| 12 | -2,8933343 |
| 13 | -3,5852141 |
| 14 | -7,0314121 |
| 15 | 6,2036227 |
| 16 | -1,9910781 |
| 17 | -2,4057285 |
| 18 | 0,1129669 |
| 19 | 6,5970252 |
| 20 | 10,3011458 |
| 21 | -4,4885043 |
| 22 | 4,8094636 |
| 23 | -6,1717645 |
| 24 | -4,7257517 |
| 25 | 11,1065213 |
| 26 | 17,7812434 |
| 27 | -3,6479417 |
| 28 | -2,2290575 |
| 29 | -1,8503831 |
| 30 | -7,1534598 |
| 31 | -13,2229591 |

Für die Prognosen für den 01. bis 03. Januar 2008 werden, da im AR(3)-Modell jeder Wert von den drei vorausgegangenen Werten abhängt, auch die letzten Dezember-DAT-Werte von 2007 (29. - 31. 12.) benötigt. Diese lauten:

| 29. 12. 07 | 30. 12. 07 | 31. 12. 07 |
|------------|------------|------------|
| 41 | 38,3 | 37,6 |

Nun habe ich alle Elemente, die ich für eine Prognose der Januar-DAT-Werte

für 2008 benötigte, beisammen. Der Prognosezeitpunkt ist wie bei den vorherigen Methoden der 31. Dezember 2007 ($t = 0$). Es ergeben sich folgende Werte (dabei ist der Erwartungswert bereits wieder hinzuaddiert worden):

| Datum t | Prognose \hat{X}_t |
|------------|----------------------|
| 01. Januar | 42,5625621 |
| 02. Januar | 39,8654028 |
| 03. Januar | 26,8356388 |
| 04. Januar | 27,4182816 |
| 05. Januar | 34,7667243 |
| 06. Januar | 30,1427499 |
| 07. Januar | 21,0814478 |
| 08. Januar | 32,5057258 |
| 09. Januar | 27,6582133 |
| 10. Januar | 32,1617553 |
| 11. Januar | 38,7144949 |
| 12. Januar | 32,6480411 |
| 13. Januar | 25,621575 |
| 14. Januar | 19,9063492 |
| 15. Januar | 30,5122121 |
| 16. Januar | 31,4510934 |
| 17. Januar | 27,1825944 |
| 18. Januar | 27,5585095 |
| 19. Januar | 35,9814555 |
| 20. Januar | 45,3563776 |
| 21. Januar | 34,7025917 |
| 22. Januar | 33,7084601 |
| 23. Januar | 27,0485045 |
| 24. Januar | 22,3736752 |
| 25. Januar | 36,915623 |
| 26. Januar | 55,3818954 |
| 27. Januar | 42,1046587 |
| 28. Januar | 28,8130288 |
| 29. Januar | 26,3607174 |
| 30. Januar | 22,1727416 |
| 31. Januar | 12,021874 |

Rechnet man diese Ergebnisse in HDD-Werte um und berechnet daraus die Zielgröße

$$\hat{P}_{2008} = \left(\sum_{i=1}^{31} HDD_i - K \right)^+$$

so erhält man:

$$\hat{P}_{2008} = 543,4650253$$

für den Fall $K = 500$ und

$$\hat{P}_{2008} = 43,4650253$$

für $K = 1000$.

Diese Prognose liegt näher am tatsächlichen Ergebnis als die mit der Historischen Methode erstellte. Allerdings wird auch hier die Unvorteilhaftigkeit im Fall $K = 1000$ nicht erkannt.

Will man zu einem späteren Zeitpunkt $t \geq 1$ eine Prognose erstellen, so braucht man nur die bis dahin bekannten Werte zu verwenden und auf Basis dieser die zukünftigen Werte zu prognostizieren.

Die Simulation anhand einer Normalverteilung liefert also - zumindest in $t = 0$ - die beste Prognose des Payoffs. Genauere Vergleiche der einzelnen Prognosemethoden möchte ich im nächsten Abschnitt anstellen.

3.5 Methodenvergleich

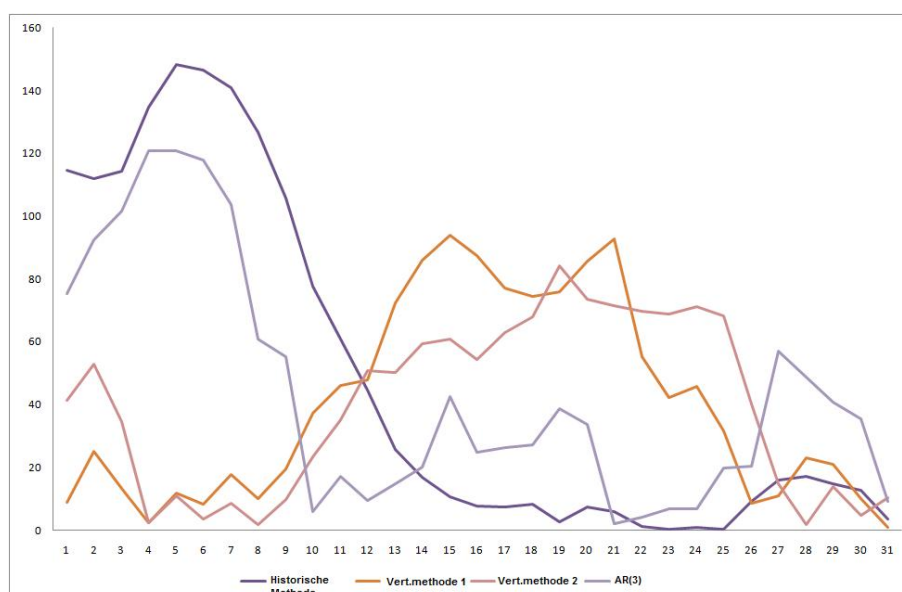
Um die angewendeten Methoden (Historische Methode, Verteilungsmethode (mit zwei verschiedenen Parameterpaaren) und AR(3)-Modell) vergleichen zu können, habe ich für jede Methode für alle Prognosezeitpunkte $0 \leq t \leq 30$ (31. Dezember 2007 - 30. Januar 2008) Prognosen erstellt und den Abstand zwischen Prognose $\hat{P}_{2008}(t)$ und tatsächlichem Wert für den Payoff P_{2008} (468,3 bzw. 0) berechnet:

$$\text{Abstand}(t) = |\hat{P}_{2008}(t) - P_{2008}|$$

Schließlich habe ich auch noch für jede Methode die Abstände aufsummiert, um die Gesamtabweichung zu erhalten:

$$\text{Gesamtabstand} = \sum_{t=0}^{30} |\hat{P}_{2008}(t) - P_{2008}|$$

Die zeitliche Entwicklung der Abweichung vom exakten Ergebnis für **K=500** zeigt folgende Grafik:



Dabei bezeichnet “Vert.methode 1“ die Prognose unter Nutzung von $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$, “Vert.methode 2“ entsprechend unter Nutzung von $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2$.

Es zeigt sich, dass die Verteilungsmethode (mit beiden Parameterkombinationen) zunächst bessere Ergebnisse liefert als die beiden anderen. Dies ändert sich jedoch in $t = 10$. Von da an liefert die AR(3)-Prognose die geringsten Abweichungen vom realen Ergebnis, die Verteilungsmethoden sind ab $t = 12$ am schlechtesten. Ab $t = 14$ ist dann die Historische Methode am besten, die Rangfolge der anderen Methoden bleibt bestehen. Während die Verteilungsmethoden ab $t = 27$ dann wieder etwa genauso gut wie die Historische Methode sind, werden ab diesem Zeitpunkt die AR(3)-Prognosen schlechter.

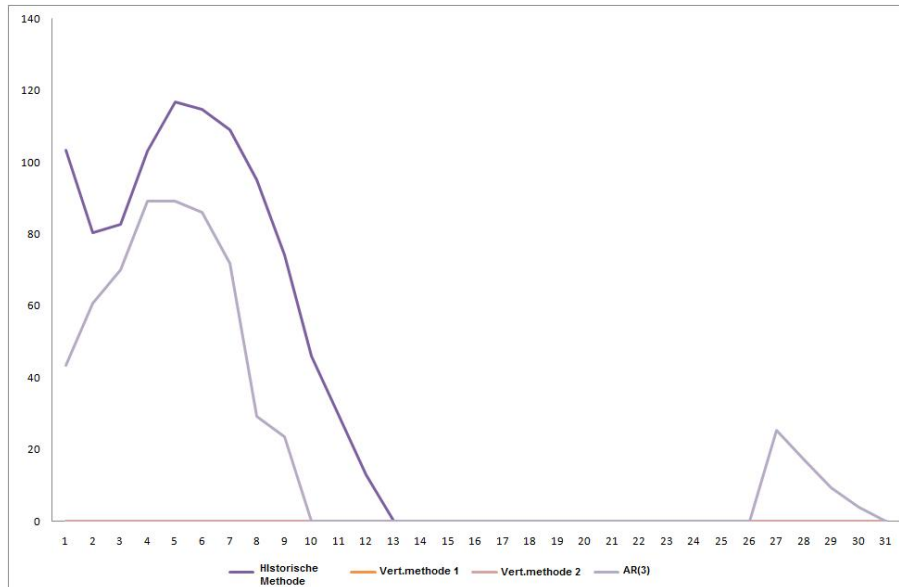
Insgesamt liefert die Historische Methode mit 11x am häufigsten die geringste Abweichung vom realen Ergebnis. Die Verteilungsmethode 1 liegt 7x am nächsten, die Verteilungsmethode 2 8x und die AR(3)-Prognose nur 5x. Wie oben gesehen hängt es stark vom Prognosezeitpunkt ab, welche Methode die beste ist.

Für die Gesamtabweichung ergeben sich folgende Werte:

| Historische Methode | Vert.methode 1 | Vert.methode 2 | AR(3) |
|---------------------|----------------|----------------|------------|
| 1494,90714 | 1242,3087 | 1223,35096 | 1359,44234 |

Die Gesamtabweichung ist also bei der Verteilungsmethode 2 am geringsten.

Für den Fall $K=1000$ zeigt sich ein klareres Bild. Die Grafik der zeitlichen Entwicklung der Abweichungen stellt sich folgendermaßen dar:



Von Anfang an schätzen beide Verteilungsmethoden den Payoff korrekterweise auf 0, liegen also in 31 von 31 Fällen richtig. Die Abweichung der AR(3)-Methode (43,4650253 in $t = 0$) ist stets geringer als die der Historischen Methode (103,25 in $t = 0$). Bei beiden Methoden steigt die Abweichung nach $t = 0$ zuerst an, um dann steil abzufallen. Die AR(3)-Prognose erkennt die Unvorteilhaftigkeit der Option in $t = 10$, die Historische Methode erst in $t = 13$. Von da an schätzen zunächst alle Methoden den Payoff richtigerweise auf 0. Die AR(3)-Methode jedoch kehrt in $t = 26$ wieder zu positiven Prognosen zurück. Alle anderen bleiben beim korrekten Wert von 0.

Insgesamt liegen beide Verteilungsmethoden in allen 31 Prognosezeitpunkten richtig. Der Historischen Methode gelingt dies immerhin noch 19x, der AR(3)-Methode 18x.

Die Gesamtabweichungen betragen:

| Historische Methode | Vert.methode 1 | Vert.methode 2 | AR(3) |
|---------------------|----------------|----------------|------------|
| 967,001587 | 0 | 0 | 618,459346 |

Natürlich sind hier wieder die beiden Anwendungen der Verteilungsmethode am besten, da sie ja jedesmal richtig gelegen haben. Die Gesamtabweichung

der AR(3)-Methode ist niedriger als die der Historischen Methode, obwohl diese einmal öfter richtig liegt. Das liegt daran, dass die AR(3)-Prognose zwar öfter, aber dafür weniger stark vom echten Ergebnis abweicht.

Die Klarheit des Ergebnisses (in Bezug auf die Rangfolge der Methoden) liegt in erster Linie daran, dass der Payoff im Fall $K = 1000$ Null ist. Da $\hat{P}_{2008} = (\sum_{i=1}^{31} HDD_i - K)^+$ keine negativen Prognosen zulässt (es somit keine Abweichungen nach unten geben kann), liegen die Prognosen tendenziell öfter richtig.

Abschließend kann man also sagen, dass nicht immer die gleiche Methode die besten Prognosen liefert. Offenbar hängt es sowohl vom Prognosezeitpunkt als auch von der genauen Ausgestaltung des Derivats ab, welche Methode die zuverlässigste Schätzung liefert. Dabei werden unvorteilhafte Optionen anscheinend zuverlässiger und schneller erkannt, als der genaue Payoff von vorteilhaften Optionen angenähert werden kann.

3.6 Fazit

Wie das erste Kapitel gezeigt hat, ist der Einfluss des Wetters auf zahlreiche Wirtschaftszweige enorm und wird mit dem Klimawandel wahrscheinlich in Zukunft noch stärker anwachsen. Dies zeigt die Wichtigkeit einer zuverlässigen, exakten Bewertungsmethode für Wetterderivate, mit denen sich Unternehmen gegen diesen Einfluss absichern können.

Mit der Benchmark-Methode ist ein Instrument gefunden, mit Hilfe dessen eine theoretisch fundierte Bewertung solcher Finanzgüter vorgenommen werden kann, da sie keine Voraussetzungen stellt, die Wetterderivate nicht erfüllen.

Die Anwendung dieser Methode hingegen erfordert wie gesehen die Beschaffung und Auswertung umfangreicher historischer Daten, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, egal ob man nun die Historische Methode, die Verteilungsmethode oder ein AR-Modell anwenden möchte. Dies ist aufwendig und oftmals auch nicht kostenfrei. Hat man diese Hürde jedoch genommen, zeigt sich, dass mit dem Benchmarkansatz bei der Bewertung von Wetterderivaten gute Ergebnisse erzielt werden können. Dies hat der Vergleich mit den tatsächlichen Wetterdaten ergeben. Der Benchmarkansatz ist also nicht nur von theoretischem Wert, sondern (mit etwas Aufwand) auch für die praktische Anwendung geeignet.

Literaturverzeichnis

- [1] Alsmeyer, Gerold (2006). *Mathematische Statistik*. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 36
- [2] Bankhofer, Udo und Jürgen Vogel (2007). *Datenanalyse und Statistik: Eine Einführung für Ökonomen im Bachelor*. Gabler Verlag
- [3] Bühlmann, Hans and Eckhard Platen (2002). *A Discrete Time Benchmark Approach for Finance and Insurance*. (erhältlich auf <http://econpapers.repec.org/RAS/ppl10.htm>)
- [4] Carabello, Felix (2005). *Introduction To Weather Derivatives*. Investopedia (www.investopedia.com/articles/optioninvestor/05/052505.asp; aufgerufen am 09. 05. 2008)
- [5] Chicago Mercantile Exchange. *CME Boston HDD*. www.cme.com/clearing/clr/list/contract_listings_.cl.html aufgerufen am 04. 11. 2008
- [6] Chicago Mercantile Exchange. *CME Heating Degree Day*. (www.cme.com/clr/contract_specifications_.cl.html aufgerufen am 04. 11. 2008)
- [7] Considine, Geoffrey (1999). *Introduction to Weather Derivatives*. Weather Derivatives Group, Aquila Energy
- [8] Garcia, Antoni Ferrer and Franz Sturzenegger (2001). *Hedging Corporate Revenues with Weather Derivatives: A Case Study*. Master's Thesis, Université de Lausanne (www.hec.unil.ch/cms_mbf/master_thesis/0004.pdf (aufgerufen am 09. 05. 2008))
- [9] Merz, Prof. Dr. Michael und Dipl. Ing. L. Huerigo. *Angewandte Zeitreihenanalyse und Prognosemethoden Kapitel 6* <http://www.wiwi.uni-tuebingen.de/cms/>

- fileadmin/Uploads/Lehrstuehle/Prof._Schaich/
Lehre/Folien_Kapitel_6.pdf; aufgerufen am 30. 06. 2009)
- [10] National Climatic Data Center (NCDC). *Climate Data Online (Wetterdaten)*. (<http://www7.ncdc.noaa.gov/CDO/cdo>; aufgerufen am 15. 11. 2008)
- [11] National Climatic Data Center (NCDC) (2006). *Federal Climate Complex, Global Surface Summary Of Day Data*. (http://cdo.ncdc.noaa.gov/CDO/GSOD_DESC.txt; aufgerufen am 15. 11. 2008)
- [12] Neusser, Klaus (2006). *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften*. Teubner
- [13] Platen, Eckhard (2001). *Arbitrage in Continuous Complete Markets*. (erhältlich auf <http://econpapers.repec.org/RAS/ppl10.htm>)
- [14] Platen, Eckhard (2003). *Modeling the Volatility and Expected Value of a Diversified World Index*. (erhältlich auf <http://econpapers.repec.org/RAS/ppl10.htm>)
- [15] Platen, Eckhard (2003). *Pricing and Hedging for Incomplete Jump Diffusion Benchmark Models*. (erhältlich auf <http://econpapers.repec.org/RAS/ppl10.htm>)
- [16] Platen, Eckhard (2003). *A Benchmark Framework for Risk Management*. (erhältlich auf <http://econpapers.repec.org/RAS/ppl10.htm>)
- [17] Platen, Eckhard and Jason West (2004). *Fair Pricing of Weather Derivatives*. (erhältlich auf <http://econpapers.repec.org/RAS/ppl10.htm>)
- [18] Platen, Eckhard and David Heath (2006). *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*. Springer
- [19] Protter, Philip E. (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer
- [20] Rogers, L.C.G. and David Williams (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales Vol. 2: Itô Calculus*. Cambridge Mathematical Library

- [21] *Kolmogorov-Smirnov-Test*. www.statistik.tuwien.ac.at/public/dutt/vorles/inf_bak/node61.html (aufgerufen am 13. 10. 2009)
- [22] Ross, Nick and Nick Buckley, Alex Hamilton, Justyn Harding, Nicola Roche, Emma Sands, Richard Skelting, Nick Watford, Heidi Whitlow(2002). *European Weather Derivatives*. www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0020/18722/Ross.pdf (aufgerufen am 02. 05. 2008)
- [23] Wilkens, Sascha und Andreas Kamp (2002). *Wetterderivate*. in: *Der Betriebswirt* 62 (2002)
- [24] Winker, Peter (2007). *Empirische Wirtschaftsforschung und Ökonometrie*. Springer
- [25] *Shapiro-Wilk Normality Test*. <http://dittami.gmxhome.de/shapiro> (aufgerufen am 22. 09. 2009)

Anhang

Im Folgenden noch eine Übersicht über die kompletten DAT-Werte der Jahre 1945 - 2008, die als Grundlage für meine Berechnungen dienen:

| Datum | 1945 | 1946 | 1947 | 1948 | 1949 | 1950 | 1951 | 1952 | 1953 | 1954 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01.01. | 51 | 31 | 18,95 | 33 | 38,5 | 37,5 | 31,45 | 47 | 29 | 24,95 |
| 02.01. | 38,5 | 21,05 | 25,5 | 33 | 33,45 | 35,4 | 38,45 | 45,5 | 33,5 | 27,5 |
| 03.01. | 23,45 | 24,1 | 33 | 33,95 | 32,95 | 47,45 | 45,95 | 34,4 | 42,45 | 35,95 |
| 04.01. | 37,5 | 38,9 | 27,5 | 33,95 | 34,95 | 59 | 54,05 | 30,5 | 35,95 | 36,5 |
| 05.01. | 29,9 | 44 | 27,05 | 32 | 36,95 | 53 | 37,05 | 31 | 29,5 | 30,6 |
| 06.01. | 13,55 | 49,45 | 29,6 | 30,45 | 49,45 | 44,5 | 38,05 | 31 | 31 | 36,5 |
| 07.01. | 13 | 53,95 | 31,45 | 28,05 | 42,45 | 33 | 37,5 | 24,45 | 27,5 | 31,55 |
| 08.01. | 22,55 | 46,95 | 35,5 | 28,05 | 46,9 | 16,1 | 22,55 | 28,45 | 26,95 | 21,5 |
| 09.01. | 32 | 35,95 | 19,5 | 35,55 | 42,4 | 23 | 21,45 | 28,05 | 31,55 | 19,05 |
| 10.01. | 18,05 | 43,5 | 16,55 | 24,95 | 42,45 | 31,45 | 34,55 | 32 | 33,95 | 20,5 |
| 11.01. | 12,9 | 39,5 | 35 | 14 | 36 | 39,45 | 36,95 | 28,5 | 33,55 | 13,55 |
| 12.01. | 27,05 | 39,05 | 36,5 | 28,5 | 26 | 26 | 38,5 | 32,45 | 34,4 | 19,5 |
| 13.01. | 37,05 | 34,1 | 19,9 | 35,05 | 33,5 | 36,05 | 34,5 | 36,5 | 35,55 | 13,55 |
| 14.01. | 24,55 | 18,05 | 32,95 | 29,6 | 35,4 | 53,1 | 34,1 | 34,5 | 41 | 16,55 |
| 15.01. | 25,5 | 23,45 | 34,95 | 13 | 21,45 | 37,05 | 44,05 | 40,45 | 38,05 | 31 |
| 16.01. | 27,05 | 9,5 | 41,45 | 22 | 38,05 | 45,05 | 36,05 | 43,95 | 48 | 31,05 |
| 17.01. | 21,45 | 15 | 38,05 | 31,45 | 48,55 | 32,95 | 34,1 | 33 | 27,95 | 21,05 |
| 18.01. | 19,9 | 25,95 | 38,5 | 24,55 | 40 | 41,55 | 46,5 | 44 | 40,45 | 10,5 |
| 19.01. | 28,05 | 22,55 | 21,9 | 11,45 | 48,45 | 29 | 48,5 | 34,95 | 41 | 25,1 |
| 20.01. | 26,5 | 6,55 | 42 | 23,55 | 42,55 | 22,55 | 49 | 40 | 39,5 | 42,1 |
| 21.01. | 26,55 | 26,05 | 45,5 | 30,55 | 24,95 | 18,5 | 43,5 | 33,55 | 36,95 | 43,55 |
| 22.01. | 30,55 | 28,5 | 24 | 30,6 | 35,55 | 29,05 | 21,55 | 24 | 33 | 23 |
| 23.01. | 32,45 | 21,45 | 20,5 | 22 | 33,5 | 40,55 | 25,55 | 45,5 | 35,5 | 13,45 |
| 24.01. | 22 | 30 | 39,5 | 10,9 | 38,6 | 41 | 44,1 | 28,45 | 47,45 | 26,5 |
| 25.01. | 5 | 34,95 | 48,05 | 15,55 | 35,5 | 32,55 | 41,5 | 22,55 | 44,5 | 37,5 |
| 26.01. | 12,45 | 34,95 | 39,05 | 18,95 | 25,4 | 53,1 | 32,95 | 41 | 26,4 | 43,55 |
| 27.01. | 19 | 18,5 | 40 | 22,55 | 23 | 45,05 | 27,05 | 49,05 | 23,45 | 41 |
| 28.01. | 25,55 | 25,55 | 47,05 | 15,55 | 32,45 | 26,55 | 23,95 | 38,6 | 41,45 | 25,55 |
| 29.01. | 32 | 30,05 | 41,55 | 23,55 | 38,05 | 48,6 | 27,5 | 22,45 | 32,95 | 17,05 |
| 30.01. | 25,5 | 22,45 | 36,5 | 12,05 | 22 | 41,55 | 18 | 9,5 | 29,05 | 27,95 |
| 31.01. | 21,6 | 26,1 | 49 | 14 | 29,9 | 25,5 | 6,95 | 22 | 42 | 25,95 |

| Datum | 1955 | 1956 | 1957 | 1958 | 1959 | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01.01. | 37,5 | 12 | 19,05 | 44,95 | 29,05 | 31 | 35,5 | 30,5 | 14 | 26,05 |
| 02.01. | 41 | 16,1 | 12 | 36 | 37,5 | 34,1 | 31,05 | 24,45 | 30,55 | 37,05 |
| 03.01. | 37,5 | 29,45 | 17 | 24,95 | 38,5 | 47,9 | 27,5 | 29,05 | 35,05 | 40 |
| 04.01. | 35,4 | 33,95 | 29,9 | 14 | 39,05 | 37,95 | 24,95 | 27,05 | 34,5 | 38,6 |
| 05.01. | 28,95 | 34,95 | 31 | 18,05 | 25 | 32,5 | 24 | 18,05 | 34 | 35,95 |
| 06.01. | 31,45 | 29,05 | 18,95 | 32,55 | 9,95 | 29,05 | 36,95 | 31,55 | 32 | 36,05 |
| 07.01. | 29,6 | 28,45 | 25,95 | 36,5 | 23 | 32 | 43,95 | 43,1 | 35,5 | 41,45 |
| 08.01. | 30 | 31 | 31,5 | 31,55 | 22 | 37,5 | 40,05 | 41 | 33,95 | 31,45 |
| 09.01. | 32 | 43,1 | 32,45 | 23,45 | 20,05 | 26,4 | 27,95 | 33,95 | 36,95 | 32,95 |
| 10.01. | 33,5 | 42 | 31,5 | 27,5 | 19,5 | 12,05 | 24,55 | 24,45 | 44 | 34 |
| 11.01. | 28,5 | 38,45 | 16,55 | 33,95 | 19,45 | 17,5 | 34,55 | 19,95 | 41,95 | 27,95 |
| 12.01. | 24,95 | 38 | 27,5 | 21 | 29,9 | 25,55 | 34 | 23,55 | 34,4 | 18,05 |
| 13.01. | 28,5 | 39 | 24,55 | 30,45 | 34,4 | 30,6 | 31,55 | 24,55 | 29,5 | 20,5 |
| 14.01. | 24,55 | 34 | 6,55 | 29 | 32 | 36,5 | 47 | 31 | 27,5 | 14,5 |
| 15.01. | 25,95 | 35,05 | 0,05 | 38,5 | 34,95 | 33,95 | 40 | 44 | 28,05 | 19,45 |
| 16.01. | 33,5 | 35,95 | 9,5 | 36,05 | 41,55 | 32,5 | 30,05 | 43,5 | 23,55 | 28 |
| 17.01. | 29,5 | 32,95 | 15,45 | 35,95 | 38,05 | 31 | 36 | 30,5 | 32,55 | 32 |
| 18.01. | 26,1 | 29,05 | 13 | 31,05 | 22,55 | 29,5 | 34,5 | 17,05 | 33,5 | 31 |
| 19.01. | 28,5 | 24 | 18,5 | 21,6 | 25 | 32,45 | 18,5 | 20,6 | 35,5 | 36,5 |
| 20.01. | 23,95 | 26,95 | 26 | 21,45 | 35,95 | 30,05 | 14 | 23,5 | 43,55 | 37,6 |
| 21.01. | 21 | 28,5 | 41 | 27,95 | 34,5 | 28,5 | 12,45 | 25 | 33,4 | 40,45 |
| 22.01. | 30,05 | 32,45 | 47,05 | 41 | 48,5 | 30,5 | 15,55 | 37,95 | 20 | 41 |
| 23.01. | 33,95 | 30,05 | 42,5 | 39,5 | 27,95 | 32 | 12,5 | 38,45 | 37,5 | 33,95 |
| 24.01. | 33 | 25,5 | 17,5 | 33,45 | 18,5 | 29,45 | 13,05 | 30,45 | 27,05 | 39,45 |
| 25.01. | 32,45 | 27,05 | 24,5 | 39,05 | 32 | 29,05 | 11,45 | 41,5 | 13 | 44,55 |
| 26.01. | 32,95 | 26,5 | 27,5 | 43,1 | 22,05 | 34,95 | 15,5 | 35,4 | 19,95 | 42,55 |
| 27.01. | 31,55 | 30,05 | 33 | 42 | 23 | 31,05 | 15,4 | 39,45 | 30,5 | 33 |
| 28.01. | 15,95 | 26,95 | 29,05 | 37,05 | 28,5 | 34,95 | 17,05 | 23 | 23 | 31,45 |
| 29.01. | 21,05 | 31,55 | 29,05 | 35,95 | 32 | 35,55 | 20,45 | 13,55 | 17 | 21,45 |
| 30.01. | 21,05 | 37,05 | 24,55 | 39,5 | 45,95 | 33,95 | 17,5 | 28,6 | 25,95 | 29,5 |
| 31.01. | 20,05 | 30 | 30 | 35,95 | 31,45 | 28,6 | 19,5 | 16,1 | 23,45 | 29,9 |

| Datum | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01.01. | 25,5 | 55,05 | 32 | 24 | 23 | 22 | 28,05 | 21,9 | 47,05 | 38,05 |
| 02.01. | 23,5 | 42 | 38,05 | 9,5 | 18,05 | 23,5 | 30,05 | 39,45 | 39 | 35,4 |
| 03.01. | 24,95 | 36,05 | 32,5 | 26,55 | 24,95 | 23,45 | 33,5 | 41 | 31,05 | 31,3 |
| 04.01. | 31,55 | 36,95 | 35 | 28,6 | 25,4 | 23 | 29,5 | 38,5 | 33,4 | 30,5 |
| 05.01. | 33 | 39,05 | 33,55 | 26,95 | 22,45 | 24 | 38,5 | 34,55 | 37,95 | 28,4 |
| 06.01. | 38,6 | 35,95 | 31,05 | 23 | 26,5 | 27,5 | 31,55 | 18,5 | 26 | 29,05 |
| 07.01. | 28,5 | 37,5 | 26,5 | 26,05 | 35,5 | 23,95 | 24,5 | 29,5 | 14 | 32,2 |
| 08.01. | 32 | 30,5 | 42,45 | 8,05 | 30,05 | 19,05 | 19,05 | 29,05 | 7,95 | 28,75 |
| 09.01. | 45,5 | 15,95 | 38,5 | 3 | 24 | 16,95 | 19,05 | 34 | 11,45 | 21,75 |
| 10.01. | 33,55 | 29,05 | 32 | 10,5 | 25,4 | 18,95 | 26,55 | 49,5 | 23,45 | 21,85 |
| 11.01. | 25,55 | 32 | 32,45 | 7,55 | 22,05 | 21 | 33,95 | 43,4 | 24,95 | 26,6 |
| 12.01. | 31 | 15,55 | 31 | 16,95 | 28,5 | 19,5 | 28,95 | 43,95 | 23,45 | 22,65 |
| 13.01. | 34,5 | 18,05 | 35,5 | 23,55 | 29,5 | 24,95 | 12 | 46,05 | 18,95 | 17,6 |
| 14.01. | 28,45 | 31,05 | 36,5 | 28,95 | 32,55 | 19,5 | 16,5 | 45,5 | 28,45 | 18,85 |
| 15.01. | 4,45 | 30,6 | 41,95 | 38,5 | 29,05 | 17,55 | 25 | 31 | 36,5 | 33,95 |
| 16.01. | 6,45 | 17,05 | 37,6 | 23 | 26,5 | 25,55 | 18,5 | 20,45 | 38,5 | 31 |
| 17.01. | 12,05 | 22,55 | 35,5 | 17,5 | 30,5 | 36,05 | 10,95 | 19,5 | 45,95 | 12,45 |
| 18.01. | 13 | 31,45 | 31,45 | 30,9 | 39,5 | 33,55 | 14,95 | 38 | 50,45 | 8,05 |
| 19.01. | 18,95 | 29,05 | 14 | 41 | 42,45 | 17 | 8,5 | 47,9 | 48,5 | 31,55 |
| 20.01. | 27,5 | 35,05 | 28,95 | 40,5 | 34,95 | 15,95 | 9,5 | 37,05 | 39,45 | 28,4 |
| 21.01. | 25,5 | 35,5 | 39,45 | 39,55 | 32,45 | 15,95 | 19,45 | 36,5 | 30 | 28,4 |
| 22.01. | 35,95 | 33 | 43,95 | 34 | 34,5 | 11 | 33,5 | 31,55 | 33,4 | 41,25 |
| 23.01. | 33 | 33,45 | 48,5 | 39,55 | 38,5 | 18,5 | 32,45 | 43,1 | 49,45 | 44,85 |
| 24.01. | 25,5 | 33,55 | 53,95 | 33,95 | 40 | 18,95 | 31,45 | 42,95 | 41,55 | 44,6 |
| 25.01. | 29,9 | 30,05 | 46,45 | 23,45 | 43,4 | 24 | 35,5 | 43,4 | 32 | 41,8 |
| 26.01. | 28,05 | 21,05 | 51 | 29,45 | 33,95 | 29,05 | 36,5 | 24,5 | 40,45 | 43,55 |
| 27.01. | 36,95 | 24,95 | 40,5 | 36,05 | 23,95 | 30,05 | 23,95 | 22,55 | 39,5 | 49,3 |
| 28.01. | 26,5 | 18,95 | 36,05 | 35,5 | 16 | 28,5 | 11,45 | 24,45 | 35,95 | 51,8 |
| 29.01. | 21,45 | 20,45 | 32 | 33,55 | 22,5 | 40,45 | 18,5 | 25,4 | 29 | 46,4 |
| 30.01. | 12,05 | 29,9 | 23,55 | 36,05 | 30,05 | 40 | 32 | 28,95 | 16,1 | 44,35 |
| 31.01. | 18,5 | 23,5 | 27,05 | 36,5 | 40,55 | 26,05 | 25,1 | 25,95 | 15,55 | 46,65 |

| Datum | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|-------|-------|
| 01.01. | 37,5 | 39,45 | 17,4 | 33,45 | 43,95 | 31,55 | 17,5 | 36,95 | 36,05 | 23 |
| 02.01. | 36,5 | 27,05 | 25,4 | 24,45 | 51,55 | 31,9 | 21,45 | 34,95 | 37,05 | 25,4 |
| 03.01. | 29,9 | 29,05 | 28,4 | 24 | 41 | 30 | 18,5 | 26,55 | 35,95 | 28,95 |
| 04.01. | 33,95 | 35,05 | 27,5 | 22,45 | 21,05 | 23 | 5,55 | 35,55 | 25,95 | 33,55 |
| 05.01. | 37,45 | 25,5 | 28,95 | 28,5 | 21,5 | 22,45 | 10,05 | 42,95 | 28,5 | 35,55 |
| 06.01. | 31 | 21 | 26,45 | 36,95 | 25,85 | 23 | 22,45 | 39,55 | 33 | 37,5 |
| 07.01. | 33,55 | 35,05 | 27,05 | 34,55 | 28,5 | 31 | 25 | 36,5 | 39 | 37,05 |
| 08.01. | 40 | 35 | 29,05 | 32,45 | 41,5 | 35,5 | 22,45 | 25,55 | 39 | 31 |
| 09.01. | 40,55 | 25,95 | 23,55 | 42 | 31,45 | 31,9 | 14 | 24,95 | 31,55 | 25,95 |
| 10.01. | 39 | 18,5 | 33,95 | 21,05 | 26,95 | 25,4 | 15,95 | 18,5 31,55 | 27,95 | |
| 11.01. | 48 | 16,1 | 32,9 | 20,45 | 22,55 | 36,95 | 13 | 12 | 44,95 | 26,95 |
| 12.01. | 51,55 | 18,05 | 23 | 22,55 | 15 | 41 | 7,55 | 8,95 | 49 | 16,1 |
| 13.01. | 48,5 | 22 | 14,45 | 29,05 | 22,55 | 24,95 | 10,5 | 12,45 | 37,5 | 12,55 |
| 14.01. | 33 | 42,55 | 17,1 | 29,05 | 34 | 33 | 14 | 17,5 | 26,05 | 18,5 |
| 15.01. | 28,5 | 32 | 21,05 | 27,5 | 31,9 | 36,05 | 17,5 | 22,55 | 27,5 | 22,55 |
| 16.01. | 28,95 | 30 | 22 | 23,45 | 27,05 | 38,45 | 21 | 22 | 31,5 | 18,5 |
| 17.01. | 28,5 | 29,45 | 16,5 | 25 | 23,55 | 30,45 | 22 | 19,05 | 28,05 | 19,45 |
| 18.01. | 30,5 | 11,5 | 9,4 | 32,45 | 22,45 | 31 | 17,1 | 6 | 20,45 | 23,95 |
| 19.01. | 43,95 | 14 | 15 | 29,9 | 14,45 | 37,5 | 25,55 | 9,95 | 11,5 | 23,95 |
| 20.01. | 34,95 | 27,5 | 23,95 | 28,45 | 16,95 | 38,5 | 33,55 | 21,6 | 10,05 | 19,9 |
| 21.01. | 24,95 | 29 | 29,9 | 25 | 42 | 31,35 | 24,55 | 22,05 | 16,5 | 15 |
| 22.01. | 27,5 | 23,95 | 25,1 | 23,55 | 43 | 29,5 | 23 | 10,9 | 24,55 | 11 |
| 23.01. | 30,6 | 6 | 21,05 | 27,05 | 38,45 | 29,5 | 27,05 | 17,95 | 31 | 16,5 |
| 24.01. | 31,55 | 7 | 21,55 | 30 | 33,9 | 26 | 32,9 | 29,9 | 36,5 | 29,45 |
| 25.01. | 40 | 20,45 | 28,45 | 30,55 | 36,05 | 22 | 27,5 | 23 | 38,45 | 43,95 |
| 26.01. | 41,45 | 29,05 | 32,45 | 41,45 | 39,05 | 25 | 33,4 | 14,45 | 37,95 | 40,45 |
| 27.01. | 36,95 | 45,05 | 28,5 | 37,9 | 38,95 | 28,5 | 37,95 | 12 | 32 | 41,55 |
| 28.01. | 34,55 | 45,5 | 24 | 28,05 | 41,45 | 29,45 | 40,9 | 18,5 | 27,5 | 38,05 |
| 29.01. | 35,95 | 42,95 | 26 | 21,9 | 42 | 29,5 | 30,45 | 32,95 | 29,5 | 31 |
| 30.01. | 40,55 | 35,5 | 16 | 22 | 42,4 | 23,55 | 24 | 30 | 32 | 29,05 |
| 31.01. | 24,95 | 28 | 15,95 | 24 | 35,95 | 18,05 | 24,45 | 31 | 35,1 | 32 |

| Datum | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01.01. | 35,55 | 36,95 | 33,1 | 41,55 | 31,55 | 40,05 | 24,95 | 32 | 41,55 | 26,95 |
| 02.01. | 37,95 | 34,1 | 31,55 | 36,5 | 31 | 39,05 | 33,5 | 35,1 | 26,5 | 34,4 |
| 03.01. | 32,45 | 38,05 | 32,55 | 26,95 | 37,6 | 37,05 | 37,5 | 35,1 | 25,55 | 35,95 |
| 04.01. | 27,05 | 35,5 | 27,5 | 26,95 | 23,45 | 39,45 | 32,45 | 38,5 | 48,5 | 26 |
| 05.01. | 26,5 | 30,45 | 28,5 | 25 | 14,55 | 40 | 30,5 | 42,95 | 52,55 | 24,55 |
| 06.01. | 27,5 | 32 | 30 | 18,95 | 16,5 | 38,9 | 32,45 | 42,5 | 48,05 | 20 |
| 07.01. | 28 | 26 | 33,55 | 14,45 | 22,45 | 33 | 33,45 | 40,45 | 38,5 | 15,5 |
| 08.01. | 26,5 | 17,1 | 36,05 | 18,95 | 39,05 | 33,55 | 22,45 | 36,95 | 39,6 | 22,05 |
| 09.01. | 21,05 | 23,55 | 31,55 | 21,5 | 41 | 38,05 | 20,45 | 32 | 34,55 | 25,55 |
| 10.01. | 15,45 | 38,05 | 32,45 | 24,4 | 35,95 | 38,05 | 27,5 | 34,55 | 24,55 | 19 |
| 11.01. | 17,5 | 33,55 | 36,05 | 18,5 | 31,45 | 40,05 | 22,05 | 33 | 23 | 20,5 |
| 12.01. | 21 | 36,5 | 36,5 | 22,05 | 32,45 | 38,5 | 22,55 | 23 | 27,05 | 30,5 |
| 13.01. | 25 | 37,5 | 34,5 | 35,4 | 33,95 | 35,1 | 29,45 | 34,1 | 33,45 | 31,55 |
| 14.01. | 28 | 27,5 | 36,95 | 15 | 36,05 | 23,55 | 25,55 | 46,05 | 27,95 | 32,5 |
| 15.01. | 30,45 | 11,45 | 38,5 | 7 | 38,05 | 26,05 | 30,5 | 40,45 | 26,5 | 22,05 |
| 16.01. | 22,45 | 16,5 | 42 | 20 | 42 | 33,95 | 35,95 | 23,45 | 32 | 2,05 |
| 17.01. | 14 | 31,45 | 30,55 | 36,05 | 37,05 | 41,45 | 38,45 | 14,45 | 33,45 | 14,1 |
| 18.01. | 20,9 | 48,45 | 25,1 | 36,95 | 37,5 | 48,5 | 40,55 | 17 | 29,05 | 31 |
| 19.01. | 27,5 | 46,95 | 26,1 | 42 | 39,45 | 48,5 | 30,45 | 17 | 26,1 | 7,4 |
| 20.01. | 24 | 44,55 | 24,45 | 40 | 41,45 | 34,1 | 35,95 | 14 | 29,6 | 8,5 |
| 21.01. | 16,1 | 45,5 | 24 | 40 | 34,1 | 28,05 | 33,95 | 22,55 | 31 | 12,45 |
| 22.01. | 18,5 | 39,55 | 25,55 | 37,5 | 26,95 | 24 | 12,45 | 24 | 37,05 | 17,05 |
| 23.01. | 30,05 | 40 | 36,5 | 30,5 | 31 | 27,5 | 16,95 | 37,5 | 43 | 17,5 |
| 24.01. | 29,6 | 29,6 | 23,95 | 32 | 39,55 | 35,05 | 31,45 | 42 | 43,1 | 24,1 |
| 25.01. | 29,05 | 25,55 | 17,55 | 32,55 | 40 | 40 | 24 | 26,55 | 43,55 | 31,55 |
| 26.01. | 25,55 | 43,55 | 17,55 | 35,95 | 36,5 | 47 | 20,45 | 21,05 | 28,5 | 21,55 |
| 27.01. | 23 | 45,95 | 17,1 | 28 | 37,5 | 45,5 | 24,45 | 20 | 29,5 | 12,05 |
| 28.01. | 26,55 | 27,5 | 17,55 | 20,05 | 37,45 | 43,55 | 35,5 | 30 | 32,5 | 34,55 |
| 29.01. | 28,5 | 23 | 22,45 | 20,5 | 41 | 43,1 | 38,45 | 36,05 | 35 | 45,95 |
| 30.01. | 24,55 | 21,45 | 26,55 | 31 | 46,05 | 39,05 | 39,45 | 36,05 | 30,6 | 35,5 |
| 31.01. | 25,55 | 28,5 | 27 | 48,45 | 42,5 | 37,5 | 37,95 | 35,95 | 20 | 20,9 |

| Datum | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01.01. | 31,55 | 35,95 | 12,45 | 14,45 | 22,05 | 38,3 | 29,05 | 28,5 | 36,5 | 41,5 |
| 02.01. | 37,05 | 30,05 | 29 | 32,55 | 9,95 | 40,5 | 27,05 | 30,45 | 33,55 | 35,55 |
| 03.01. | 33 | 25,55 | 37,4 | 48,45 | 31,05 | 49 | 25 | 31 | 30,45 | 40,75 |
| 04.01. | 30,5 | 23 | 38,05 | 48,55 | 37,2 | 51,95 | 26 | 31,55 | 32 | 42,55 |
| 05.01. | 24,55 | 16,95 | 43,95 | 47 | 23 | 45,95 | 26,95 | 32 | 31,45 | 41 |
| 06.01. | 27,95 | 13,55 | 44 | 48,1 | 23 | 33,45 | 28,9 | 38,9 | 29,5 | 33,8 |
| 07.01. | 46,45 | 11,35 | 32 | 39,9 | 28,05 | 31,5 | 31,5 | 39,45 | 27,05 | 26,1 |
| 08.01. | 33 | 17,95 | 27,5 | 37,75 | 22,3 | 37,5 | 32,55 | 27,6 | 28,65 | 16,7 |
| 09.01. | 31,05 | 22 | 28,6 | 36,85 | 42,95 | 40,55 | 32,55 | 30,9 | 29,9 | 11 |
| 10.01. | 27,5 | 22,45 | 36,25 | 39,55 | 29,9 | 42,55 | 22,55 | 39,45 | 32,8 | 5,55 |
| 11.01. | 20,45 | 22,45 | 30,6 | 40,45 | 24,95 | 47,45 | 25,95 | 42,15 | 25,7 | 10,05 |
| 12.01. | 20,45 | 26,5 | 23,45 | 30,9 | 32 | 39,3 | 29,45 | 39,5 | 27,95 | 28,4 |
| 13.01. | 35,5 | 38,6 | 30,05 | 36,95 | 32 | 28,6 | 27,7 | 37,6 | 30 | 32,9 |
| 14.01. | 50,45 | 36,05 | 29,6 | 32,55 | 13,65 | 20,05 | 31,45 | 35,4 | 23,9 | 11,05 |
| 15.01. | 54,5 | 32,55 | 30,55 | 25,45 | 27,95 | 3,05 | 35,5 | 34,95 | 20,05 | 2,05 |
| 16.01. | 56,45 | 25,4 | 40,9 | 30,85 | 30,9 | 26,95 | 32,9 | 36,15 | 21 | 3,2 |
| 17.01. | 54,5 | 41 | 24,95 | 24,95 | 41 | 16,8 | 33 | 36 | 24 | 23,9 |
| 18.01. | 47 | 43 | 12,05 | 27,5 | 39 | 10,95 | 31 | 36 | 12,75 | 31,1 |
| 19.01. | 36,95 | 47,05 | 10 | 31,05 | 41,95 | 12 | 33,7 | 28,95 | 13 | 26,7 |
| 20.01. | 37,95 | 43,1 | 25 | 35,25 | 41 | 14,45 | 31,2 | 28,6 | 21 | 21,55 |
| 21.01. | 42,45 | 29,5 | 30,5 | 33 | 33,4 | 15,8 | 24,8 | 31,75 | 20 | 22 |
| 22.01. | 40,05 | 30,5 | 39 | 25,95 | 38,05 | 7,7 | 26,05 | 34,55 | 14 | 25,55 |
| 23.01. | 36,5 | 35 | 42 | 30,05 | 37,6 | 14 | 28 | 41,45 | 10,5 | 25,55 |
| 24.01. | 32 | 45,4 | 23,45 | 33,55 | 48,6 | 19,5 | 29,45 | 41,45 | 14,55 | 15,95 |
| 25.01. | 31,45 | 43,95 | 43 | 34,7 | 49,05 | 30,3 | 33 | 41,8 | 17,95 | 10 |
| 26.01. | 29,45 | 32 | 37,5 | 31 | 33 | 29,6 | 30 | 42,55 | 24 | 12,2 |
| 27.01. | 28,5 | 45,05 | 19,05 | 24,55 | 33 | 23 | 28,5 | 43,45 | 22 | 18,5 |
| 28.01. | 21,45 | 42,5 | 37,5 | 34 | 28,6 | 13,45 | 31,3 | 44,5 | 14 | 19,5 |
| 29.01. | 21,9 | 29,9 | 26,4 | 38,05 | 20,05 | 19,05 | 29,5 | 50,45 | 23,7 | 24,8 |
| 30.01. | 28,95 | 31 | 17,5 | 38,05 | 21,05 | 29,45 | 32,55 | 44,35 | 26,5 | 21,2 |
| 31.01. | 33,45 | 33,55 | 23 | 35,5 | 17,1 | 32,45 | 36,05 | 34,05 | 28 | 21,05 |

| Datum | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 01.01. | 47,05 | 28,5 | 40,1 | 34,5 |
| 02.01. | 40 | 29,9 | 41 | 29,45 |
| 03.01. | 44,35 | 36,5 | 43,7 | 12,9 |
| 04.01. | 46,05 | 32,55 | 46,4 | 19,5 |
| 05.01. | 37,5 | 33,15 | 51 | 33,8 |
| 06.01. | 31,1 | 33,95 | 58,55 | 37 |
| 07.01. | 31,45 | 31,55 | 51,9 | 45,5 |
| 08.01. | 33,95 | 30,85 | 48,2 | 51 |
| 09.01. | 29,5 | 37,4 | 40,35 | 56,9 |
| 10.01. | 32,45 | 39 | 36,5 | 45,7 |
| 11.01. | 34,6 | 41 | 28,5 | 44,6 |
| 12.01. | 33,15 | 44,5 | 35,5 | 47,45 |
| 13.01. | 42 | 46,2 | 43,55 | 39 |
| 14.01. | 46,95 | 47,05 | 41 | 36,05 |
| 15.01. | 32 | 35,4 | 35,6 | 31,55 |
| 16.01. | 28,05 | 25,5 | 32,55 | 29,05 |
| 17.01. | 23,25 | 23,5 | 16,7 | 27,5 |
| 18.01. | 14,55 | 41,55 | 23,65 | 34,15 |
| 19.01. | 13,45 | 38,4 | 37,4 | 38,2 |
| 20.01. | 23,7 | 47,3 | 28,4 | 28,15 |
| 21.01. | 10,65 | 50,9 | 19,4 | 24,55 |
| 22.01. | 10,4 | 44,05 | 24 | 27,5 |
| 23.01. | 12,5 | 32,95 | 26,5 | 30 |
| 24.01. | 15 | 34,95 | 31,55 | 31,55 |
| 25.01. | 22,1 | 36,5 | 26,35 | 23 |
| 26.01. | 22,35 | 37,05 | 15,5 | 24,55 |
| 27.01. | 17,95 | 29,3 | 16,35 | 29,05 |
| 28.01. | 11,3 | 43,35 | 32 | 32 |
| 29.01. | 18,5 | 44,1 | 26,6 | 32 |
| 30.01. | 31,3 | 40,1 | 23,9 | 38,55 |
| 31.01. | 27,5 | 34,15 | 25,55 | 32 |

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig verfasst und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Datum und Unterschrift