Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich 10 (Mathematik und Informatik)

Ein Dualitätsansatz zur Bewertung von amerikanischen Optionen

Diplomarbeit
in Finanzmathematik

bei Herrn PD Dr. Volkert Paulsen
am Institut für Mathematische Statistik
vorgelegt von

Jan Rosenbaum

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das zentrale Thema dieser Diplomarbeit ist ein Dualitätsansatz von Rogers und Jamshidian aus dem Jahre 2002, der vorgestellt, und in einem Finanzmarktmodell angewendet wird. Ein grundlegendes Problem aus der Theorie des optimalen Stoppens ist die Berechnung von

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau],$$

mit $\mathcal{S}$ als Menge aller Stoppzeiten. Der Dualitätsansatz führt dieses Problem des optimales Stoppens in ein duales Problem über, in welchem ein Infimum, statt eines Supremums, berechnet werden soll. Die passende Formel hat dann die Form

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] = \inf_{X \in \mathcal{X}} f(X),$$

wobei noch spezifiziert werden muss, wie $\mathcal{X}$ und $f(X)$ aussehen. Man unterscheidet zwischen

1) dem additiven Ansatz von Rogers, sowie

2) dem multiplikativen Ansatz von Jamshidian,

denn bei Rogers hat $f(X)$ die Form einer Summe, und bei Jamhidian die eines Produktes. Grundlegendes Hilfsmittel bei der Herleitung der Formeln ist die (additive bzw. multiplikative) Doob-Meyer-Zerlegung der Snellschen Einhüllenden, die ein sogenanntes dominierendes Martingal liefert.
Nach der Bearbeitung des theoretischen Grundgerüsts wird die Anwendbarkeit der Dualitätsansätze in einem Finanzmarktmodell gezeigt: Die Berechnung des fairen Preises einer amerikanischen Option lässt sich, unter bestimmten Voraussetzungen, auf das Problem des optimalen Stoppens zurückführen, daher ist sie von zentralem Interesse. In den Anwendungen wird der Wert von $f(X)$ für ein passendes $X \in \mathcal{X}$ nach der Monte-Carlo-Methode berechnet, wobei Rogers ein Verfahren angibt, wie ein passendes $X \in \mathcal{X}$ zu finden ist (wobei bei diesem Verfahren ein wenig Kreativität benötigt wird). Diese Berechnungsmethode liefert, neben den klassischen Binomialbaum- und PDE-Verfahren, einen alternativen Zugang zur Berechnung

des Anfangspreises einer amerikanischen Option. Das neue Verfahren hat den Vorteil, dass es auch dann anwendbar ist, wenn die klassischen Verfahren aus Laufzeitgründen versagen, und man erhält mit $f(X)$ auf jeden Fall eine obere Schranke.

In dieser Diplomarbeit wird das neue Verfahren zur Berechnung des Anfangspreises von amerikanischen Optionen angewendet auf

- die amerikanische Put-Option,
- die amerikanische Min-Put-Option,
- die amerikanische Max-Call-Option, sowie
- den amerikanischen Put auf einen Aktienindex.

Die Ergebnisse werden mit den Ergebnissen aus dem Binomialbaum-Verfahren verglichen. Neben dem zentralen Thema, dem Dualitätsansatz und der Anwendung auf die Bewertung amerikanischer Optionen, wird in dieser Diplomarbeit auch ein allgemeines (stetiges) Finanzmarktmodell eingeführt und der Optionsbegriff im Rahmen dieses Modells erklärt. Der Fokus liegt auf der amerikanischen Option, bei der sich 3 grundlegende Fragen ergeben:

1) Wie lautet der Anfangspreis?
2) Wie sichert man die Option ab?
3) Wann ist eine optimale Ausübungszeit?

In dieser Diplomarbeit wird diesen Fragen in einem allgemeinen Finanzmarktmodell nachgegangen. Während sich in der Theorie exakte Ausdrücke ergeben, ist es in den Anwendungen meist schwierig, den konkreten Wert auszurechnen.
Im letzten Kapitel wird schließlich ein neues Verfahren vorgestellt, dessen Anwendbarkeit aus Laufzeitgründund (PC mit 1,6 GHz) allerdings noch nicht möglich ist, dafür aber ein systematisches, iteratives Vorgehen anbietet.
Im Anhang zu dieser Diplomarbeit befindet sich eine CD mit mehreren Matlab-Programmen, die in Kapitel 3 benutzt werden.

An dieser Stelle möchte ich ganz herzlich Herrn PD Dr. Volkert Paulsen für die Bereitstellung des interessanten Themas und seine breite Unterstützung danken.

Zusammenfassung

Hier wird eine kurze Zusammenfassung über die einzelnen Kapitel gegeben, um das Vorgehen zu verdeutlichen.

Kapitel 1: Grundlagen. In diesem Kapitel wird zunächst ein stetiges Finanzmarktmodell definiert, und anschließend werden die Derivate „Option“ und „amerikanischer Claim“(eine andere Bezeichnung für „amerikanische Option“) im Rahmen dieses Modells erklärt. Die Option wird entsprechend zu [Jam04], Abschnitt 3, definiert und ist grundlegend für das Verständnis des amerikanischen Claims. Für den Käufer und Verkäufer des amerikanischen Claims ergeben sich unterschiedliche Probleme, die kurz angesprochen werden. Grundlagen der stochastischen Analysis werden als bekannt vorausgesetzt.
Im letzten Abschnitt werden nützliche Hilfssätze bewiesen.

Kapitel 2: Snellsche Einhüllende. In diesem Kapitel geht es um die wichtige Senllsche Einhüllende, die grundlegend für die folgenden Kapitel ist. Der erste Abschnitt beschränkt sich auf eine endliche Zeitmenge, während die folgenden Abschnitte die Theorie in stetiger Zeit vorstellen: Die Snellsche Einhüllende V eines Auszahlungsprozesses Z wird als wesentliches bzw. essentielles Supremum definiert. Ziel ist es zu zeigen, dass die so definierte Snellsche Einhüllende ein Supermartingal von Klasse(D) ist. Im letzten Abschnitt geht es um die Doob- Meyer-Zerlegungen von V, wobei dieser Abschnitt sehr komplex ist und tieferes Wissen der stochastischen Analysis benötigt. Im Prinzip werden in den Abschnitten 2 - 5 die Aussagen, die im ersten Abschnitt für den Fall einer endlichen Zeitmenge gezeigt wurden, auf den stetigen Fall übertragen.

Kapitel 3: Dualitätsansatz. Hier werden der additive und multiplikative Dualitätsansatz aus [Jam07] und [Rog02] angegeben und angewendet. Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis von Satz 3.6 (additive Dualität) und Satz 3.7 (multiplikative Dualität) ist die Doob-Meyer-Zerlegung der Snellschen Einhüllenden aus Kapitel 2, dessen Martingalteil ein sogenanntes dominierendes Martingal bildet. In den Anwendungen wird das Verfahren von Rogers aus dem Jahr 2002 angewendet, und zum Vergleich werden die Werte mit einem Binomialbaum berechnet. Als Programmierumgebung wurde dabei MATLAB (auf einem PC mit 1,6 GHz) verwendet. Zum Schluss werden die beiden Dualitätsansätze, d.h. die Vorteile bei der numerischen Anwendung, verglichen.

Kapitel 4: Optimale Stoppzeiten. In diesem Kapitel geht es um die Frage, wann (im Fall stetiger Zeit) eine optimale Stoppzeit existiert. Im ersten Abschnitt wird nochmal die Erweiterung des Finanzmarktmodells um ein Finanzgut „amerikanischer Claim“ behandelt, und anschließend geht es um die Frage nach der Existenz der kürzesten, sowie längsten optimalen Stoppzeit.

Kapitel 5: Numerairewechsel. In den vorherigen Kapiteln wurden die Preisprozesse der Basisfinanzgüter in Einheiten des Numeraires $S_0(t)$ betrachtet. Auch die Auszahlungen der Kontrakte „Option“ und „amerikanischer Claim“ fanden in Einheiten von $S_0(t)$ statt. In diesem Kapitel wird neben $S_0(t)$ ein weiteres Numeraire $S_1(t)$ betrachtet und es geht um die Frage, wie sich die Option, der amerikanische Claim, die Doob-Meyer-Zerlegungen und der additive bzw. multiplikative Dualitätsansatz beim Wechsel des Numeraires verhalten.

Kapitel 6: Superlösungen. Zum Abschluss der Diplomarbeit wird eine neure Entwichlung aus [Jam07] und [CG07] aus dem Jahr 2007 vorgestellt. Während die ursprüngliche Methode von Rogers abhängig von einer geschickten Wahl der Absicherungsmartingale ist, wird hier ein systematisches Verfahren vorgestellt. Ausgehend von einem beliebigen Martingal nähert man sich mit dem additiven (bzw. multiplikativen) Verbesserungsprozess iterativ der Snellschen Einhüllenden. Da die Theorie der iterativen Verbesserungsprozesse im Fall stetiger Zeit noch nicht vollständig ist, werden nur die wichtigsten Ergebnisse vorgestellt, und anschließend wird der (deutlich leichtere) Fall endlicher Zeitmenge behandelt.

In der gesamten Diplomarbeit gelten Gleichungen und Ungleichungen zwischen Zufallsvariablen stets $\mathbb{P}$- fast sicher. Auf das „$\mathbb{P}$- f.s.“ hinter den Gleichungen (bzw. Ungleichungen) wird verzichtet.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Finanzmarktmodell

Wir führen nun ein allgemeines Finanzmarktmodell ein, wobei einige Forderungen, wie z.B. die *usual conditions*, technischer Natur sind, und nicht weiter erläutert werden. Gegeben sei ein Zeitintervall $\mathcal{T} = [0, \mathfrak{m}]$, an dem gehandelt wird, und ein Wahrscheinlichkeitsraum $\big(\Omega, (\mathcal{A}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P}\big)$ mit Filtration, für die gilt:

- $\mathcal{A}_0$ ist $\mathbb{P}$- trivial, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ für alle $A \in \mathcal{A}_0$.
- Es gelten die *usual conditions*:
  - (i) $\mathcal{A}_0$ enthält alle $\mathbb{P}$- Nullmengen.
  - (ii) $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist rechtsstetig (d.h. $\bigcap\limits_{s>t} \mathcal{A}_s = \mathcal{A}_t$ für alle $t \geq 0$).

Definition 1.1. *Ein stochastischer Prozess $(S_t)_{t\in\mathcal{T}}$ heißt Semimartingal, falls eine Zerlegung*

$$S_t = M_t + A_t$$

existiert, sodass $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein lokales cádlág[1]- Martingal und $(A_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein adaptierter cádlág- Prozess von beschränkter Variation ist.

Das Finanzmarktmodell besteht aus $d{+}1$ Basisfinanzgütern, dessen Preisprozesse nichtnegative Semimartingale sind, und wird durch den $\mathbb{R}^{d+1}$- wertigen Vektor

[1] M_t heißt cádlág- Prozess wenn die Pfade von M_t rechtsseitig stetig sind und linksseitige Grenzwerte besitzen.

$$S(t) = \big(S_0(t), ..., S_d(t)\big)$$

beschrieben. Dabei sei angenommen, dass $S_0(t)$ die Entwicklung eines Geldmarktkontos ist, d.h.

$$S_0(t) = e^{\int_0^t r(s)ds},$$

wobei $r(t)_{t \in \mathcal{T}}$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit $\int_0^{\mathfrak{m}} |r(s)|ds < \infty$ ist. $r(t)$ ist der Zinzsatz des Geldmarktkontos. $S_0(t)$ erfüllt die Rolle eines Numeraires, das heißt die Preise der d+1 Finanzgüter werden in Einheiten von $S_0(t)$ dargestellt. Wird $S_i^*(t) := S_i(t)/S_0(t)$ definiert, so erhält man mit

$$S^*(t) = \big(S_0^*(t), ..., S_d^*(t)\big)$$

den Vektor der abdiskontierten Preisprozesse. Für die übrigen Basisfinanzgüter $S_1, ..., S_d$ gibt es u.a. folgende Möglichkeiten:

- Aktien,
- festverzinzliche Wertpapiere, oder
- Rohstoffe.

Für das allgemeine mathematische Modell spielt es vorerst keine Rolle, um was für Güter es sich handelt, solange jeder Preisprozess ein Semimartingal ist. In einem konkreten Modell wird angegeben, um was für Semimartingale es sich handelt (und, welche Finanzgüter modeliert werden). Ein sehr berühmtes Modell ist das

Black-Scholes-Modell: Sei $S_0(t)$ wie oben, $\big(W^{(1)}(t), W^{(2)}(t), ..., W^{(n)}(t)\big)$ ein n-dimensionaler Wienerprozess, und $b_i(t)$ und $\sigma_{i,j}(t)$ (für $i \in \{1, ..., d\}$, $j \in \{1, ..., n\}$) stochastische, adaptierte reellwertige Prozesse (welche zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen, die hier aber nicht von Bedeutung sind). Durch $S_1, ..., S_d$ werden Aktienpreisprozesse modelliert, wobei es sich hierbei um Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$dS_i(t) = S_i(t) \left(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}(t)dW^{(j)}(t)\right), i \in \{1, ..., d\}$$

handelt. In [Irl03], Kapitel 13 wird gezeigt, unter welchen Bedingungen diese stochastischen Differentialgleichungen eindeutig lösbar sind.
Im einfachsten Fall ($n = 1, \sigma, r$ und b_1 konstant) handelt es sich bei der Lösung um einen geometrischen Wienerprozess mit Drift b_1:

$$S_1(t) = S_1(0)e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2}t + b_1 t}.$$

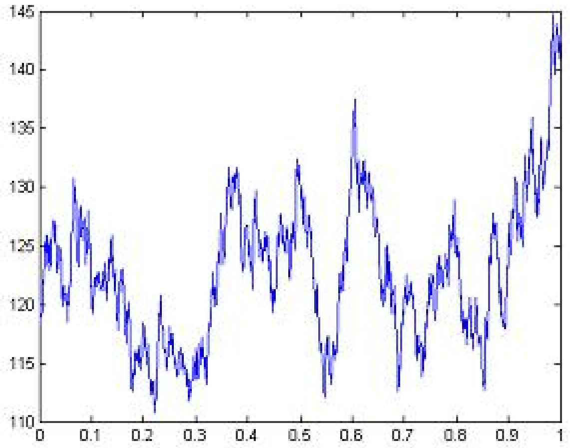

Abbildung 1.1: Beispielpfad eines geometrischen Wienerprozesses.

Abbildung 1.1 zeigt einen Beispielepfad eines geometrischen Wienerprozesses mit Drift $b_1 = 0,07$, $\mathfrak{m} = 1, \sigma = 0,3$ und $S_1(0) = 120$. Mit dem Satz von Girsanov ([Irl03], Satz 8.6) lässt sich zeigen, dass bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q, mit

$$\tfrac{dQ}{d\mathbb{P}} = e^{\theta W(t) - \frac{\theta^2}{2}t},$$

und $\theta = (r - b_1)/\sigma$, der Prozess $\overline{W}(t) = W(t) - \theta t$ ein Wienerprozess ist. Somit gilt für den abdiskontierten Preisprozess

$$S_1^*(t) = S_1(0)e^{\sigma\overline{W}(t) - \frac{\sigma^2}{2}t}, \tag{1.1}$$

welches ein Q- Martingal ist. In den Beispielen in Kapitel 3 beschränken wir uns auf ein Geldmarktkonto mit konstanter Zinsrate $r > 0$ und maximal 2 Aktien, dessen abdiskontierte Preisprozesse geometrische Wienerprozesse der Form 1.1 bilden (Die zwei Aktien unterscheiden sich also lediglich durch die Volatilität σ, wobei die 2 zugrunde gelegten Wienerprozesse unabhängig sind).
Ein Finanzmarktteilnehmer bzw. -händler kann im Rahmen dieses Modells mit den Finanzgütern handeln. Eine Handelsstrategie wird durch einen $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen stochastischen Prozess

$$H(t) = \big(H_0(t), ..., H_d(t)\big)$$

beschrieben, wobei jedes $H_i(t)$ ein vorhersehbarer, lokal beschränkter[2] cádlág-Prozess ist. $H_i(t)$ gibt die Anzahl des i-ten Finanzgutes im Portfolio zur Zeit t an. Der Wertprozess des Portfolios wird dann beschrieben durch

[2] [Ell82], Definition 6.37

$$
\begin{aligned}
W_t(H) &= \sum_{i=0}^{d} H_i(t) S_i(t), \qquad \text{bzw.} \\
W_t^*(H) &= \sum_{i=0}^{d} H_i(t) S_i^*(t) \qquad \text{für den abdiskontierten Wertprozess.}
\end{aligned}
$$

Da jedes $H_i(t)$ negativ sein kann, beinhaltet diese Definition der Handelsstrategie die Möglichkeit zu Leerverkäufen: Jeder Finanzmarktteilnehmer kann sich in jedem Finanzgut beliebig stark verschulden. Eine Handelsstrategie H heißt selbstfinanzierend, falls der Wertprozess folgende Form hat:

$$
\begin{aligned}
W_t(H) &= W_0(H) + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t H_i(u) dS_i(u), \text{bzw.} \\
W_t^*(H) &= W_0(H) + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t H_i(u) dS_i^*(u) \text{ für alle } t \in \mathcal{T},
\end{aligned}
$$

wobei die stochastischen Integrale nach [Ell82], Theorem 11.44 und Theorem 12.9 definiert sind und die Äquivalenz dieser Gleichungen (nach einer längeren Rechnung) aus der Itô-Formel folgt. Die selbstfinanzierenden Handelsstrategien haben also die Eigenschaft, dass der erzielte Gewinn bzw. Verlust sofort wieder in das Portfolio investiert wird. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie heißt Arbitrage, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $W_0(H) = 0$

2) $W_{\mathfrak{m}}(H) \geq 0$ und $\mathbb{P}\big(W_{\mathfrak{m}}(H) > 0\big) > 0$.

Wegen $S_0 > 0$ ist dies gleichbedeutend mit

1) $W_0^*(H) = 0$

2) $W_{\mathfrak{m}}^*(H) \geq 0$ und $\mathbb{P}\big(W_{\mathfrak{m}}^*(H) > 0\big) > 0$.

Das heißt: Eine Arbitrage ist ein Portfolio mit Anfangswert Null, das zum Zeitpunkt $\mathfrak{m}$ einen sicher nichtnegativen Wert und mit positiver Wahrscheinlichkeit einen positiven Wert hat. Da es auch in sinnvollen Modellen Arbitragemöglichkeiten gibt, schränkt man die Klasse der zu betrachtenden Handelsstrategien ein: Eine Handelsstrategie H heißt zulässig, falls ein $K > 0$ existiert sodass $W_t(H) \geq -KS_0(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}$ gilt, das heißt durch Anwenden von H darf man sich nicht um mehr als K Einheiten des Numeraieres verschulden. Damit läßt sich das No-Arbitrage-Prinzip formulieren:

No-Arbitrage-Prinzip: Das Finanzmarktmodell heißt arbitragefrei, falls es keine zulässigen Arbitragemöglichkeiten gibt.

Im Folgenden werden nur zulässige Handelsstrategien betrachtet. Es sei angenommen, dass $\mathbb{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß ist, das heißt die abdiskontierten Preisprozesse $S_i^*(t)$ sind lokale Martingale bzgl. $\mathbb{P}$. Dann folgt aus dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells. Wir führen nun folgende Bezeichungen ein:

$\mathcal{S}$ $\hat{=}$ Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\mathcal{T}$,

$\mathfrak{M}$ $\hat{=}$ Menge aller rechtsseitig stetigen, gleichgradig integrierbaren Martingale,

$\mathfrak{M}^+$ $\hat{=}$ Menge aller $M \in \mathfrak{M}$ mit $M_t > 0$ für alle $t \in \mathcal{T}$,

$\mathfrak{S}$ $\hat{=}$ Menge aller rechtsseitig stetigen Supermartingale von Klasse(D),

wobei $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ von Klasse(D) heißt genau dann, wenn $(M_T)_{T\in\mathcal{S}}$ gleichgradig integrierbar ist. Wegen [Ell82], Theorem 4.3 sind Elemente aus $\mathfrak{M}$ sowie $\mathfrak{S}$ cádlág- Prozesse, und wegen [Ell82], Anmerkung 8.5 sind die Martingale aus $\mathfrak{M}$ von Klasse(D), da $M_t = E[M_\mathfrak{m}|\mathcal{A}_t]$.

1.2 Die Option

Für gewöhnlich wird der Optionsbegriff in der Literatur folgendermaßen eingeführt: Ausgehend von einer beliebigen $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$-meßbaren Zufallsvariable C wird die Option als Kontrakt zwischen 2 Parteien A und B definiert: A verpflichtet sich, zum Zeitpunkt $\mathfrak{m}$ den zufälligen Betrag C an B zu überweisen. Im Gegenzug zahlt B zum Zeitpunkt Null einen Betrag an A.
Dieser Zugang reicht für unsere Zwecke nicht aus, daher wählen wir eine Definition nach [Jam04], in der nicht nur die Auszahlung, sondern auch der Auszahlungszeipunkt zufällig ist. Dazu sei definiert:

(i) Ein Paar (τ, C), bestehend aus einer Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}$ und einer $\mathcal{A}_\tau$-meßbaren Zufallsvariable C mit $E\left[\left|\frac{C}{S_0(\tau)}\right|\right] < \infty$, heißt Option.

(ii) Eine Option (τ, C) heißt hedgebar, falls eine zulässige, selbstfinanzierende Handelsstrategie H existiert, sodass $W_\tau(H) = C$ und $(W_t^*(H))_{0\leq t\leq \mathfrak{m}}$ ein Martingal ist. H heißt Martingalhedge der Option.

Gegeben sei eine hedgebare Option (τ, C). Wir lassen im Finanzmarktmodell die Möglichkeit zu, dass die Finanzmarktteilnehmer neben dem Handel mit Basisfinanzgütern auch untereinander bestimmte Kontrakte eingehen können. Dann kann die Option (τ, C) als Kontrakt zwischen 2 Parteien

V und K angesehen werden. Der Verkäufer V der Option verpflichtet sich, zum Auszahlungszeitpunkt τ die Auszahlung C an den Käufer K der Option zu überweisen. Der Käufer der Option muss zum Zeitpunkt 0 den Betrag $s(\tau, C)$ an den Verkäufer überweisen. $s(\tau, C)$ ist der Preis der Option. Die Möglichkeit, dass der Verkäufer der Option seiner Zahlungspflicht nicht nachkommt, wird im Modell nicht berücksichtigt. Der Begriff der Abitrage wurde im Abschnitt 1 nur für den Handel mit Basisfinanzgütern definiert. Um einen geeigneten Arbitragebegriff für den Kontrakt zu erhalten, sei definiert: Falls der Käufer der Option eine Handelsstrategie H_1 wählen kann, sodass

1) $W_0(H_1) - s(\tau, C) = 0$, und
2) $W_\tau(H_1) + C \geq 0$ mit $\mathbb{P}\big(W_\tau(H_1) + C > 0\big) > 0$,

oder der Verkäufer eine Handelsstrategie H_2 wählen kann, sodass

1) $W_0(H_2) + s(\tau, C) = 0$, und
2) $W_\tau(H_2) - C \geq 0$ mit $\mathbb{P}\big(W_\tau(H_2) - C > 0\big) > 0$,

so ergeben sich im Modell Arbitragemöglichkeiten. Diese Definition macht Sinn, da sie verhindert, dass entweder der Käufer oder der Verkäufer eine Möglichkeit zum risikolosen Profit hat. Sei H ein Martingalhedge der Option (τ, C), so ist der arbitragefreie Anfangspreis der Option eindeutig bestimmt und es gilt

$$s(\tau, C) = W_0(H) = E\left[\tfrac{C}{S_0(\tau)}\right].$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Martingaleigenschaft von $W_t^*(H)$, und es gilt sogar ganz allgemein

$$1_{\{t \leq \tau\}} W_t^*(H) = 1_{\{t \leq \tau\}} E\left[\tfrac{C}{S_0(\tau)}\middle| \mathcal{A}_t\right].$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der abdiskontierte Wertprozess der Handelsstrategie bis zum Zeitpunkt τ eindeutig durch C bestimmt ist.

Erweiterung des Finanzmarktmodells: Das Finanzmarktmodell lässt sich, ausgehend von einer hedgebaren Option (τ, C), erweitern, indem der Preisprozess des neuen Finanzgutes definiert wird durch:

$$S_{d+1}^*(t) := 1_{\{0 \leq t \leq \tau\}} E\left[\frac{C}{S_0(\tau)}\middle| \mathcal{A}_t\right] + 1_{\{\tau < t \leq \mathfrak{m}\}} \frac{C}{S_0(\tau)}. \tag{1.2}$$

Das Finanzgut hat also zum Zeitpunkt τ den abdiskontierten Wert $C/S_0(\tau)$, den es bis zum Handelsende $\mathfrak{m}$ behält. Dieses Finanzgut wird ebenfalls als Option bezeichnet, und das um die Option erweiterte Finanzmarktmodell, gegeben durch den abdiskontierten Preisprozessvektor

$$S^*(t) = \left(S_0^*(t), ..., S_{d+1}^*(t)\right)$$

ist arbitragefrei[3]. Diese Erweiterung des Finanzmarktmodells heißt Verbriefung der Option, und das neue Finanzgut heißt derivatives[4] Finanzgut, da sich dessen Preis aus den Preisen der übrigen Basisfinanzgüter ableiten lässt. Der Unterschied zum Kontrakt ist der, dass beim Finanzgut jederzeit ein Verkauf der Option möglich ist, während der Kontrakt bis zum Zeitpunkt τ gehalten werden muss. Aber weil die Option hedgebar ist, kann der Käufer des Kontrakts jederzeit die Gegenstrategie zum Hedge H, also $-H$, eingehen, und somit diesen Kontrakt neutralisieren (d.h. zum Zeipunkt τ entspricht die Auszahlung C gerade dem Negativen des Wertprozesses der Handelsstrategie $-H$). Im Modell ist es somit egal, ob der Käufer den Kontrakt oder das Finanzgut „Option“ kauft. Entsprechendes gilt für den Verkäufer, der jederzeit die Handelsstrategie H eingehen kann.
Die Option $\Big(\mathfrak{m}, \big(C/S_0(\tau)\big)S_0(\mathfrak{m})\Big)$ führt zum selben Preisprozess wie die Option (τ, C), denn es gilt:

$$\begin{aligned}
1_{\{0\leq t\leq \mathfrak{m}\}} E\left[\left.\frac{\frac{C}{S_0(\tau)} S_0(\mathfrak{m})}{S_0(\mathfrak{m})}\right| \mathcal{A}_t\right] &= E\left[\left.\frac{C}{S_0(\tau)}\right| \mathcal{A}_t\right] \\
= 1_{\{0\leq t\leq \tau\}} E\left[\left.\frac{C}{S_0(\tau)}\right| \mathcal{A}_t\right] &+ 1_{\{\tau< t\leq \mathfrak{m}\}} E\left[\left.\frac{C}{S_0(\tau)}\right| \mathcal{A}_t\right] \\
= 1_{\{0\leq t\leq \tau\}} E\left[\left.\frac{C}{S_0(\tau)}\right| \mathcal{A}_t\right] &+ E\left[\left.1_{\{\tau< t\leq \mathfrak{m}\}} \frac{C}{S_0(\tau)}\right| \mathcal{A}_t\right] \\
= 1_{\{0\leq t\leq \tau\}} E\left[\left.\frac{C}{S_0(\tau)}\right| \mathcal{A}_t\right] &+ 1_{\{\tau< t\leq \mathfrak{m}\}} \frac{C}{S_0(\tau)},
\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $\{\tau < t\} \in \mathcal{A}_t$ gilt, und für eine $\mathcal{A}_\tau$- messbare Zufallsvariable D, $1_{\{\tau<t\}}D$ $\mathcal{A}_t$- messbar ist. Letzteres lässt sich wegen

$$\{1_{\{\tau<t\}}D \leq \alpha\} = \begin{cases} \{\tau < t\} \cap \{D \leq \alpha\} & \text{für } \alpha < 0 \\ \big(\{\tau < t\} \cap \{D \leq \alpha\}\big) \cup \{\tau \geq t\} & \text{für } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

[3] Dies folgt aus dem ersten Fundamentasatz der Preistheorie, da $S_{d+1}^*(t)$ ein Martingal ist.

[4] lat. derivare = ableiten

leicht einsehen. Für den Preisprozess des derivativen Finanzgutes macht es somit keinen Unterschied, ob zum Zeitpunkt τ die Auszahlung C erfolgt, oder zum Zeitpunkt $\mathfrak{m}$ die Auszahlung $\big(C/S_0(\tau)\big)S_0(\mathfrak{m})$.

Ist $\tau = \mathfrak{m}$, so handelt es sich um eine europäische Option. Eine verbriefte Option ist somit stets europäischen Typs. Die wichtigsten europäischen Optionen sind die

- Call-Option auf das i-te Basisfinanzgut mit $(\tau, C) = \Big(\mathfrak{m}, \big(S_i(\mathfrak{m}) - K\big)^+\Big)$,
- Put-Option auf das i-te Basisfinanzgut mit $(\tau, C) = \Big(\mathfrak{m}, \big(K - S_i(\mathfrak{m})\big)^+\Big)$.

Dabei heißt K Strike-Preis und $\mathfrak{m}$ Laufzeit der Option. Eine weitere Klasse von Derivaten ist der amerikanische Claim.

1.3 Der amerikanische Claim

Definition 1.2. *Sei $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein adaptierter stochastischer Prozess und*

$$Z = (Z_t)_{t\in\mathcal{T}} = \left(\frac{\tilde{Z}_t}{S_0(t)}\right)_{t\in\mathcal{T}}.$$

*Z heißt **Auszahlungsprozess** zu $\tilde{Z}$, falls Z ein cádlág- Prozess von Klasse(D) ist.*

Der amerikanische Claim zum Auszahlungsprozess Z ist ein Kontrakt zwischen 2 Parteien V (=Verkäufer) und K (=Käufer). Der Käufer des amerikanischen Claims erwirbt das Recht, diesen Claim bis zum Zeitpunkt $\mathfrak{m}$ genau einmal auszuüben. Bei Ausübung des amerikanischen Claims zum Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$ zahlt der Verkäufer den Betrag $\tilde{Z}_t$ an den Käufer. Der Käufer des Claims muss zum Zeitpunkt 0 den Betrag $s\left(\tilde{Z}\right)$ an den Verkäufer überweisen. Der Unterschied zu den im letzen Abschnitt definierten Optionen ist der, dass kein (zufälliger) Zeitpunkt τ feststeht, an dem die Auszahlung stattfindet. Der Käufer des amerikanischen Claims kann also aus den Optionen

$$\left\{\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)\right\}_{\tau\in\mathcal{S}}$$

frei wählen. Dabei sei im Folgenden die Absicherbarkeit sämtlicher Optionen $\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)$ angenommen. Wir definieren: Der amerikanische Claim liefert eine Arbitragemöglichkeit, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) Es existiert ein $\tau \in \mathcal{S}$ mit $s(\tau, \tilde{Z}_\tau) > s\left(\tilde{Z}\right)$, oder

2) $s\left(\tilde{Z}\right) > s(\tau, \tilde{Z}_\tau)$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$.

Diese Definition macht Sinn, denn im ersten Fall hat der Käufer des amerikanischen Claims die Möglichkeit, eine Option $\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)$ zu realisieren, die er unterhalb ihres arbitragefreien Anfangspreises erworben hat. Im zweiten Fall kann der Käufer dagegen höchstens eine der Optionen $\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)$ realisieren, die er alle oberhalb ihrer arbitragefreien Anfangspreise erworben hat. Unter zusätzlichen Voraussetzungen wird in Kapitel 4 gezeigt, welche Möglichkeiten zum risikolosen Profit der Verkäufer dann hätte (siehe auch [Jam07], 8.11). Die einzige, sinnvolle Möglichkeit für den Anfangspreis des amerikanischen Claims ist dann

$$s\left(\tilde{Z}\right) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau], \tag{1.3}$$

das heißt es wird das Supremum über die Preise der zur Verfügung stehenden (hedgebaren) Optionen gebildet, wobei zusätzlich gewährleistet sein muss, dass das Supremum erreicht wird.
Auf die Frage nach der Erweiterung des Finanzmarktmodells um ein Finanzgut „amerikanischer Claim“ wird in Kapitel 2 und 4 näher eingegangen. Eine andere Bezeichnung für den amerikanischen Claim ist „amerikanische Option“, obwohl es sich um keine Option im Sinne des letzten Abschnittes handelt.

1.3.1 Die Käufersicht

Der Käufer eines amerikanischen Claims steht vor dem *Problem des optimalen Stoppens*. Es handelt sich um die Optimierungsaufgabe,

$$E[Z_\tau] \text{ über } \tau \in \mathcal{S} \text{ zu maximieren.}$$

Eine Stoppzeit τ^*, welche $E[Z_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau]$ erfüllt, heißt optimale Stoppzeit. In stetigen Finanzmarktmodellen muss keine optimale Stoppzeit existieren, dagegen zeigt Satz 2.1 im nächsten Kapitel, dass es in einem Modell mit nur endlichen vielen Zeitpunkten stets eine optimale Stoppzeit gibt. Zwar kann der Käufer des amerikanischen Claims eine beliebige Stoppzeiten wählen, aber sinnvoll ist nur die Wahl einer optimalen Stoppzeit. Der Wert

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau],$$

lässt sich nach der Methode von Rogers berechnen, aber die Frage nach der optimalen Stoppzeit bleibt unbeantwortet.

1.3.2 Die Verkäufersicht

Der Verkäufer eines amerikanischen Claims hat die Aufgabe, mögliche Forderungen des Käufers zu jeder Zeit erfüllen zu können, d.h. er sucht eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H, sodass für den Wertprozess $W(H)$ gilt:

$$W_t(H) \geq \tilde{Z}_t \text{ für alle } t \in \mathcal{T}.$$

H heißt dann Hedge bzw. Absicherung für Z. Das Probelm des Verkäufers besteht darin, dass er sich gegen jede mögliche Stoppzeit τ, die der Käufer wählen kann, absichern muss. Das heißt, selbst wenn der Verkäufer für eine optimale Stoppzeit τ_0 die Option $\left(\tau_0, \tilde{Z}_{\tau_0}\right)$ absichert (was nach Voraussetzung möglich ist), ist noch nicht klar, dass der amerikanische Claim abgesichert ist. Die Methode von Rogers geht auf die Frage, wie eine Absicherungsstrategie gebildet wird, ein. Der Verkäufer wird mindestens den Preis

$$s^* := \inf\{V_0(H)| \text{ H ist ein selbstfinanzierender, zulässiger Hedge für Z } \}$$

vom Käufer der amerikanischen Option verlangen.

1.4 Bayes' Regel

Sei $B = (B_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathfrak{M}^+$. Durch $\mathrm{d}\mathbb{P}^B/\mathrm{d}\mathbb{P} := B_{\mathfrak{m}}/B_0$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^B$ definiert. E^B bezeichne den Erwartungswert bzgl. $\mathbb{P}^B$. Dieser Maßwechsel sowie die folgenden 2 Sätze sind besonders im Kapitel 5 von Bedeutung, wenn es um den Wechsel des Numeraires geht.

Satz 1.1 (Bayes' Regel)**.** *Sei Y eine $\mathcal{A}$-messbare, integrierbare Zufallsvariable, und $\tau \in \mathcal{S}$ eine Stoppzeit. Dann gilt:*

$$E^B\left[Y|\mathcal{A}_\tau\right] B_\tau = E\left[Y B_{\mathfrak{m}}|\mathcal{A}_\tau\right].$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}_\tau$, dann gilt $\int\limits_A E[YB_{\mathfrak{m}}/B_0|\mathcal{A}_\tau]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_A YB_{\mathfrak{m}}/B_0\mathrm{d}\mathbb{P} =$

$$\int\limits_A Y\mathrm{d}\mathbb{P}^B = \int\limits_A E^B[Y|\mathcal{A}_\tau]\mathrm{d}\mathbb{P}^B = \int\limits_A E^B[Y|\mathcal{A}_\tau]B_{\mathfrak{m}}/B_0\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_A E^B[Y|\mathcal{A}_\tau]B_\tau/B_0\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Daraus folgt $E^B\left[Y|\mathcal{A}_\tau\right] B_\tau/B_0 = E\left[YB_{\mathfrak{m}}/B_0|\mathcal{A}_\tau\right]$.

□

Satz 1.2. *Für einen adaptierten cádlág- Prozess Y gilt:*

a) Y *ist von Klasse(D) bzgl.* $\mathbb{P}$. $\Leftrightarrow$ $\frac{Y}{B}$ *ist von Klasse(D) bzgl.* $\mathbb{P}^B$.

b) Y *ist ein Supermartingal bzgl.* $\mathbb{P}$. $\Leftrightarrow$ $\frac{Y}{B}$ *ist ein Supermartingal bzgl.* $\mathbb{P}^B$.

c) Y *ist ein Martingal bzgl.* $\mathbb{P}$. $\Leftrightarrow$ $\frac{Y}{B}$ *ist ein Martingal bzgl.* $\mathbb{P}^B$.

Beweis. a) „$\Rightarrow$“ Sei $\epsilon > 0$. Weil Y von Klasse(D) ist, existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$E[|Y_\tau| 1_A] < B_0 \epsilon / 2 \tag{1.4}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) < \delta$. Außerdem existiert ein $\xi > 0$ mit $\mathbb{P}(B_\tau \leq \xi) < \delta$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$, denn andernfalls ex. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\widetilde{\tau}^{(n)} \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}(B_{\widetilde{\tau}^{(n)}} \leq 1/n) \geq \delta$. Mit der Definition

$$\tau^{(n)} := \inf\{t \geq 0 | B_t \leq 1/n\} \wedge \mathfrak{m}$$

gilt wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von B $B_{\tau^{(n)}} \leq 1/n$, und somit $\{B_{\widetilde{\tau}^{(n)}} \leq 1/n\} \subset \{B_{\tau^{(n)}} \leq 1/n\}$. Sei $A_n := \{B_{\tau^{(n)}} \leq 1/n\}$, dann gilt $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, und $\mathbb{P}(A_n) \geq \delta$ für alle $n \geq 1$. Mit $A := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ ergibt sich daraus $\mathbb{P}(A) \geq \delta$ und

$$B_{\tau^{(n)}} 1_A \leq 1/n. \tag{1.5}$$

Da B ein Martingal von Klasse(D) ist und τ_n monoton wächst, gilt

$$B_{\tau^{(n)}} = E[B_m | \mathcal{A}_{\tau^{(n)}}] \overset{n\to\infty}{\to} E[B_m | \mathcal{G}] \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

mit $\mathcal{G} = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_{\tau^{(n)}}\right)$. Das heißt aus Gleichung (1.5) folgt

$$E\left[B_\mathfrak{m} | \mathcal{G}\right] 1_A \leq 0.$$

Wegen $B_m > 0$ und $E[B_m|\mathcal{G}]1_A = E[B_m 1_A | \mathcal{G}]$ steht dies im Widerspruch zu $\mathbb{P}(A) \geq \delta > 0$. Also folgt aus Gleichung (1.4), dass ein $\xi > 0$ existiert mit

$$E\left[|Y_\tau| 1_{\{B_\tau \leq \xi\}}\right] < B_0 \epsilon / 2 \tag{1.6}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$. Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von Y lässt sich ein $K > 0$ bestimmen sodass

$$E\left[|Y_\tau| 1_{\{|V_\tau| > \xi K\}}\right] < B_0 \epsilon / 2 \tag{1.7}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$. Und mit der Bayes' Regel, Gleichungen (1.6) und (1.7) folgt schließlich:

$$
\begin{aligned}
E^B\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\left\{\frac{|Y_\tau|}{B_\tau}>K\right\}}\right] &= E\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\left\{\frac{|Y_\tau|}{B_\tau}>K\right\}}B_{\mathfrak{m}}\right]\tfrac{1}{B_0}\\
&= E\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\left\{\frac{|Y_\tau|}{B_\tau}>K\right\}}E[B_{\mathfrak{m}}|\mathcal{A}_\tau]\right]\tfrac{1}{B_0}\\
&= E\left[|Y_\tau|1_{\left\{\frac{|Y_\tau|}{B_\tau}>K\right\}}\right]\tfrac{1}{B_0}\\
&\leq \tfrac{1}{B_0}\left(E\left[|Y_\tau|1_{\{|Y_\tau|>\xi K\}}\right]+E\left[|Y_\tau|1_{\{B_\tau\leq\xi\}}\right]\right)\\
&< \epsilon/2+\epsilon/2 \;=\; \epsilon
\end{aligned}
$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$.

„$\Leftarrow$“ Ein analoges Argument ergibt

$$
\begin{aligned}
E\left[|Y_\tau|1_{\{|Y_\tau|>K\}}\right] &= E\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\{|Y_\tau|>K\}}B_{\mathfrak{m}}\right]B_0\\
&= E^B\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\{|Y_\tau|>K\}}\right]B_0\\
&\leq B_0\left(E\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\left\{\frac{|Y_\tau|}{B_\tau}>\frac{K}{\xi}\right\}}\right]+E\left[\tfrac{|Y_\tau|}{B_\tau}1_{\{B_\tau\geq\xi\}}\right]\right)\\
&< \epsilon/2+\epsilon/2 \;=\; \epsilon
\end{aligned}
$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$.

b) „$\Rightarrow$“ • Mit der Bayes' Regel gilt für $s \leq t$: $E^B\left[\frac{Y_t}{B_t}\middle|\mathcal{A}_s\right] = \frac{1}{B_s}E\left[\frac{V_t}{B_t}B_{\mathfrak{m}}\middle|\mathcal{A}_s\right] = \frac{1}{B_s}E\left[E\left[\frac{Y_t}{B_t}B_{\mathfrak{m}}\middle|\mathcal{A}_t\right]\middle|\mathcal{A}_s\right] = \frac{1}{B_s}E\left[\frac{Y_t}{B_t}E\left[B_{\mathfrak{m}}|\mathcal{A}_t\right]\middle|\mathcal{A}_s\right] = \frac{1}{B_s}E\left[Y_t|\mathcal{A}_s\right] \leq \frac{Y_s}{B_s}$.

• Erneute Anwendung der Bayes' Regel ergibt $E^B[|Y_t/B_t|] = (1/B_0)E[|Y_t/B_t|B_{\mathfrak{m}}] = (1/B_0)E[|Y_t|]$, also ist Y_t/B_t integrierbar bzgl. $\mathbb{P}^B$.
• Da Y_t/B_t außerdem $\mathcal{A}_t$- meßbar ist, ist es ein Supermartingal bzgl. $\mathbb{P}^B$.

„$\Leftarrow$“ Folgt analog zu „$\Rightarrow$“ aus der Bayes' Regel.
Der Beweis von c) geht analog zu b). □

Eine triviale Folgerung aus diesem Satz ist das folgende Korollar:

Korollar 1.3. *Y ist genau dann ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{P}$, wenn $\frac{Y}{B}$ ein lokales Martingal bzgl. $\mathbb{P}^B$ ist.*

Kapitel 2

Snellsche Einhüllende

2.1 Prinzip der Rückwärtsinduktion

Bevor wir zu der Theorie in stetiger Zeit übergehen, betrachten wir ein Finanzmarktmodell mit endlicher Zeitmenge. Dies erfolgt aus drei Gründen:

- Zum Vergleich der Theorien in stetiger und endlicher Zeit, insbesondere des unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades.
- Satz 2.1 liefert die mathematische Grundlage für das Binomialbaum-Verfahren.
- Satz 2.1 ist ein wichtiger Hilfssatz für Lemma 2.5.

In Kapitel 6 kommen wir noch einmal auf den Fall endlicher Zeit zurück, und zwar gezwungenermaßen, aufgrund noch nicht gelöster Schwierigkeiten im Fall stetiger Zeit.
Es sei Z ein Auszahlungsprozess, $\mathcal{T}_n = \{t_0, ..., t_n\}$ eine endliche Teilmenge von $[0, \mathfrak{m}]$ mit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = \mathfrak{m}$ und $\mathcal{S}^{(n)}$ die Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\mathcal{T}_n$. Die Betrachtungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf ein sogenanntes n-Perioden-Modell[1]. Ausgehend vom stetigen Finanzmarktmodell erhält man ein n-Perioden-Modell, wenn man die Filtration $\mathcal{A}_t$ und die abdiskontierten Preisprozesse $S_i^*(t)$ auf die Zeitmenge $\mathcal{T}_n$ einschränkt. Die Begriffe „Handelsstrategie“, „Arbitragefreiheit“, etc. lassen sich analog zum stetigen Fall definieren. Für den folgenden Satz sei also der Auszahlungsprozess Z eingeschränkt auf die endliche Zeitmenge $\mathcal{T}_n$. Für den Anfangspreis eines amerikanischen Claims ergibt sich dann entsprechend zu Gleichung (1.3)

[1] [Irl03], Kapitel 3

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}^{(n)}} E[Z_\tau],$$

und es gilt

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}^{(n)}} E[Z_\tau] \leq \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau].$$

Mit Hilfe von Binomialbäumen lassen sich amerikanische Claims bewerten ([Hul09], Bsp. 17.1). Die mathematische Grundlage hierfür liefert der folgende Satz 2.1, der zusätzlich angibt, wie die Snellsche Einhüllende im Fall einer endlichen Zeitmenge konstruiert wird.

Satz 2.1 (Prinzip der Rückwärtsinduktion)**.** *Definiere induktiv*

$$\begin{array}{lcl} U_{t_n} & = & Z_{t_n},\ \textit{und} \\ U_{t_i} & = & \max\big\{Z_{t_i}, E[U_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}]\big\} \quad \textit{für } i=n-1,...,0. \end{array}$$

Ferner sei $\sigma\in\mathcal{S}$ *und*

$$\tau_\sigma = \min\big\{t_k \geq \sigma | Z_{t_k} = U_{t_k}\big\} = \min\big\{t_k\geq\sigma|Z_{t_k}\geq E[U_{t_{k+1}}|\mathcal{A}_k]\big\},$$

mit $U_{t_{n+1}} := U_{t_n}$*. Dann gilt für jede solche Stoppzeit* σ

$$E[Z_{\tau_\sigma}|\mathcal{A}_\sigma] = E[U_{\Phi(\sigma)}|\mathcal{A}_\sigma] \geq E[Z_\tau|\mathcal{A}_\sigma] \ \textit{für alle}\ \tau\in\mathcal{S}_\sigma^{(n)},$$

wobei $\mathcal{S}_\sigma^{(n)} := \{\tau\in\mathcal{S}^{(n)}|\sigma\leq\tau\}$ *und* $\Phi(\sigma) := \min\{t_k\in\mathcal{T}_n|t_k\geq\sigma\}$*.*

Beweis. **a)** Für konstantes $\sigma\equiv t_i\in\mathcal{T}_n$ folgt die Aussage aus [Irl03], 4.8.

b) Wegen

$$\begin{array}{rcl} \{\tau_\sigma = t_i\} & = & \big\{\sigma\leq t_i\big\}\cap\big\{Z_{t_i}\geq E[U_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}]\big\} \\ & & \cap\left(\bigcap\limits_{t_i>t_j\in\mathcal{T}_n}\big\{Z_{t_j}<E[U_{t_{j+1}}|\mathcal{A}_{t_j}]\big\}\right)\in\mathcal{A}_{t_i} \end{array}$$

ist τ_σ eine Stoppzeit in $\mathcal{S}^{(n)}$. Es gilt $\tau_\sigma = \sum\limits_{i=0}^n \tau_{t_i}1_{\{t_{i-1}<\sigma\leq t_i\}}$, und mit $t_{-1} := -1$ für alle $A\in\mathcal{A}_\sigma$:

$$\begin{array}{rcl} \int\limits_A Z_{\tau_\sigma}\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_A \left(\sum\limits_{i=0}^n Z_{\tau_{t_i}}1_{\{t_{i-1}<\sigma\leq t_i\}}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} & = & \sum\limits_{i=0}^n \int\limits_{A\cap\{t_{i-1}<\sigma\leq t_i\}} Z_{\tau_{t_i}}\mathrm{d}\mathbb{P} \\ \overbrace{=}^{a)} \sum\limits_{i=0}^n \int\limits_{A\cap\{t_{i-1}<\sigma\leq t_i\}} U_{t_i}\mathrm{d}\mathbb{P} & = & \int\limits_A\left(\sum\limits_{i=0}^n U_{t_i}1_{\{t_{i-1}<\sigma\leq t_i\}}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \end{array}$$

$$= \int_A U_{\Phi(\sigma)} d\mathbb{P}.$$

Weil $A \in \mathcal{A}_\tau$ beliebig war, ergibt sich $E[Z_{\tau_\sigma}|\mathcal{A}_\sigma] = E[U_{\Phi(\sigma)}|\mathcal{A}_\sigma]$.

Nun soll die Ungleichung gezeigt werden. Für $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{(n)}$ sei

$$\tau'_{t_i} = \begin{cases} \tau & \text{auf } \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\} \\ n & \text{auf } \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\}^c \end{cases}$$

für $i \in \{0, ..., n\}$. Es ist $\tau'_{t_i} \in \mathcal{S}_{t_i}$, denn $\{\tau'_{t_i} = t_n\} = \{\tau = t_n\} \cup \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\}^c \in \mathcal{A}_{t_n}$ und für $t_j \neq t_n$ gilt wegen $\tau \geq \sigma$

$$\begin{aligned} \{\tau'_{t_i} = t_j\} &= \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\} \cap \{\tau = t_j\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } i < j \\ \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\} \cap \{\tau = t_j\} & \text{für } i \leq j, \end{cases} \end{aligned}$$

was offensichtlich in $\mathcal{A}_{t_j}$ ist. Somit ergibt eine entsprechende Rechnung für $A \in \mathcal{A}_\sigma$:

$$\begin{aligned} \int_A Z_{\tau_\sigma} d\mathbb{P} &= \sum_{i=0}^{n} \int_{A \cap \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\}} Z_{\tau_{t_i}} d\mathbb{P} \quad \overbrace{\geq}^{a)} \quad \sum_{i=0}^{n} \int_{A \cap \{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\}} Z_{\tau'_{t_i}} d\mathbb{P} \\ &= \int_A \left(\sum_{i=0}^{n} Z_{\tau'_{t_i}} 1_{\{t_{i-1} < \sigma \leq t_i\}} \right) d\mathbb{P} \quad = \quad \int_A Z_\tau d\mathbb{P} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E[Z_{\tau_\sigma}|\mathcal{A}_\sigma] \geq E[Z_\tau|\mathcal{A}_\sigma]$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{(n)}$. □

2.1.1 Anmerkungen

Der Satz zeigt also, dass im endlichen Fall stets eine optimale Stoppzeit τ_0 existiert. Der im Satz konstruierte Prozess $U = (U_{t_i})_{t_i \in \mathcal{T}_n}$ heißt Snellsche Einhüllende von $(Z_{t_i})_{t_i \in \mathcal{T}_n}$, und der erste Zeitpunkt, an dem der Auszahlungsprozess und die Snellschen Einhüllende übereinstimmen bildet eine optimale Stoppzeit. Die Snellsche Einhüllende erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $U_{t_i} \geq Z_{t_i}$ für alle $t_i \in \mathcal{T}_n$,

2. U ist ein Supermartingal, und

3. ist Y ein weiteres Supermartingal mit $Y_{t_i} \geq Z_{t_i}$ für alle $t_i \in \mathcal{T}_n$, so gilt $Y_{t_i} \geq U_{t_i}$ für alle $t_i \in \mathcal{T}_n$.

Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition. Die letzte lässt sich mit dem Prinzip der Rückwärtsinduktion einsehen:

$$U_{t_i} = E[Z_{\tau_{t_i}}|\mathcal{A}_{t_i}] \leq E[Y_{\tau_{t_i}}|\mathcal{A}_{t_i}] \leq Y_{t_i},$$

wobei im letzten Schritt die Supermartingaleigenschaft von Y benutzt wurde. Dies zeigt, dass die Snellsche Einhüllende das *minimal dominierende Supermartingal* zu Z ist. Im nächsten Kapitel werden entsprechende Eigenschaften für den stetigen Fall gezeigt, wobei deutlich mehr Schwierigkeiten auftreten. Sei nun $(W_{t_i})_{t_i\in\mathcal{T}_n}$ ein beliebiges Supermartingal, dann gilt:

Satz 2.2 (Additive Doob-Zerlegung)**.** *Es existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$W = W^m + W^p,$$

wobei W^m ein Martingal, und W^p ein previsibler, monoton fallender Prozess mit $W_0^p = 0$ ist. Außerdem gilt

$$W_{t_j}^m = W_{t_0} + \sum_{i=1}^{j}\left(W_{t_i} - E[W_{t_i}|\mathcal{A}_{t_{i-1}}]\right). \tag{2.1}$$

Beweis. Siehe [Kle08], Satz 10.1. □

Satz 2.3 (Multiplikative Doob-Zerlegung)**.** *Sei W zusätzlich positiv. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$W = AM,$$

wobei M ein positives Martingal, und A ein previsibler, monoton fallender Prozess mit $A_0 = 1$ ist. Außerdem gilt

$$M_{t_j} = W_{t_0}\prod_{i=1}^{j}\frac{W_{t_i}}{E\left[W_{t_i}\middle|\,\mathcal{A}_{t_{i-1}}\right]}. \tag{2.2}$$

Beweis. Es sei der Prozess M wie in Gleichung (2.2) definiert, und A durch $A_0 = 1$ und

$$A_{t_j} = \frac{E\left[W_{t_j}\middle|\,\mathcal{A}_{t_{j-1}}\right]}{W_{t_0}}\prod_{i=1}^{j-1}\frac{E\left[W_{t_i}\middle|\,\mathcal{A}_{t_{i-1}}\right]}{W_{t_i}} \tag{2.3}$$

für $t_i > 0$. Dann gilt $W = AM$, und A ist offensichtlich previsibel und wegen der Supermartingaleigenschaft von W auch monoton fallend, da

$$A_{t_{j+1}} = A_{t_j} \frac{E\left[W_{t_{j+1}} \middle| \mathcal{A}_{t_j}\right]}{W_{t_j}}$$

für $t_j \geq 0$ gilt. Zu zeigen ist noch die Martingaleigenschaft von M:

$$\begin{aligned} E[M_{t_{j+1}}|\mathcal{A}_{t_j}] &= E\left[W_{t_0} \prod_{i=1}^{j+1} \frac{W_{t_i}}{E\left[W_{t_i} \middle| \mathcal{A}_{t_{i-1}}\right]} \middle| \mathcal{A}_{t_{j+1}}\right] \\ &= M_{t_j} \frac{1}{E\left[W_{t_{j+1}} \middle| \mathcal{A}_{t_j}\right]} E[W_{t_{j+1}}|\mathcal{A}_{t_j}] \quad = M_{t_j}, \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

$U = U^m + U^p$ sei die additive Doob-Zerlegung der Snellschen Einhüllenden $(U_{t_i})_{t_i \in \mathcal{T}_n}$. Unter der Annahme, dass U^m der abdiskontierte Wertprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H ist, wird in [Irl03], 4.11 gezeigt, dass $V(H)$ ein Hedge für den amerikanischen Claim ist, und $V_0(H)$ mit dem arbitragefreien Anfangspreis $s(\tilde{Z})$ übereinstimmt.

2.2 Essentielles Supremum

In den nächsten Abschnitten soll gezeigt werden, dass die Snellsche Einhüllende eines Auszahlungsprozesses $(Z_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ein Element aus $\mathfrak{S}$ ist. Die Beweise wurden zum Teil aus [Jam07], Abschnitt 3, entnommen. Bevor die Snellsche Einhüllende definiert werden kann, muss das essentielle Supremum sinnvoll eingeführt werden.
Sei $\big([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]}\big)$ ein Wahrscheinlichkeitraum, wobei $\mathfrak{B}_{[0,1]}$ die Borelsche Sigma-Algebra und $\lambda_{[0,1]}$ das Lebesque- Maß auf $[0,1]$ bezeichne, und $\mathcal{X}$ die Menge aller Zufallsvariablen $X^s(\omega) := 1_{\{s \neq \omega\}} + \infty 1_{\{s = \omega\}}$ mit $s \in [0,1]$. Dann folgt daraus $\sup \mathcal{X}(\omega) = \infty$ für alle $\omega \in \Omega$, obwohl bereits $X^s \leq 1$ für alle $X^s \in \mathcal{X}$ gilt. Dies zeigt, dass die 'ω- weise' Definition des Supremums nicht immer sinnvoll ist, das heißt eine Definition wie z.B.

$$V_t := \sup_{t \leq \tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_t]$$

wäre nicht sinnvoll.

Satz 2.4. *Es sei $\mathcal{X}$ eine nicht-leere Menge meßbarer Zufallsvariablen, dann existiert eine eindeutige Zufallsvariable $X^* = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{X}$ mit:*

(i) Für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt $X \leq X^*$, und

(ii) falls Y eine Zufallsvariable mit $X \leq Y$ für alle $X \in \mathcal{X}$ ist, so gilt $X^* \leq Y$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus (*ii*). Zur Existenz:
1) $\mathcal{X}$ bestehe nur aus nichtnegativen Zufallsvariablen. Dann wird der Beweis in [KS98], Appendix A erbracht. Außerdem läßt sich das essentielle Infimum definieren durch $\operatorname{ess\,inf} \mathcal{X} := 1/\operatorname{ess\,sup} \overline{\mathcal{X}}$ wobei $\overline{\mathcal{X}} = \{\frac{1}{X} | X \in \mathcal{X}\}$, und es gilt:

1. Für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt $\frac{1}{X} \leq \operatorname{ess\,sup} \overline{\mathcal{X}}$, und somit $X \geq \operatorname{ess\,inf} \overline{\mathcal{X}}$.
2. Ist $0 \leq Y \leq X$ für alle $X \in \mathcal{X}$, so gilt $\frac{1}{Y} \geq \frac{1}{X}$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und somit $\frac{1}{Y} \geq \operatorname{ess\,sup} \overline{\mathcal{X}} \Rightarrow Y \leq \operatorname{ess\,inf} \mathcal{X}$.

2) $\mathcal{X}$ sei beliebig. Definiere

$$\mathcal{X}^+ := \big\{X \vee 0 | X \in \mathcal{X}\big\},\ \mathcal{X}^- := \big\{(-X) \vee 0 | X \in \mathcal{X}\big\},$$

dann gilt $\operatorname{ess\,sup} \mathcal{X} = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{X}^+ - \operatorname{ess\,inf} \mathcal{X}^-$, denn:

(i) Für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt $X = (X \vee 0) - \big((-X) \vee 0\big) \leq \operatorname{ess\,sup} \mathcal{X}^+ - \operatorname{ess\,inf} \mathcal{X}^-$, und

(ii) sei $Y \geq X$ für alle $X \in \mathcal{X}$, dann folgt

(a) $(Y \vee 0) \geq (X \vee 0)$ für alle $X \in \mathcal{X} \Rightarrow (Y \vee 0) \geq \operatorname{ess\,sup} \mathcal{X}^+$,

(b) $0 \leq \big((-Y) \vee 0\big) \leq \big((-X) \vee 0\big)$ für alle $X \in \mathcal{X} \Rightarrow \big((-Y) \vee 0\big) \leq \operatorname{ess\,inf} \mathcal{X}^-$.

Also $Y = (Y \vee 0) - \big((-Y) \vee 0\big) \geq \operatorname{ess\,sup} \mathcal{X}^+ - \operatorname{ess\,inf} \mathcal{X}^-$.

□

Definition 2.1 (Snellsche Einhüllende)**.** *Für einen Auszahlungsprozess $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sei die Snellsche Einhüllende $(V_t)_{t\in\mathcal{T}}$ definiert durch:*

$$V_t := \operatorname*{ess\,sup}_{t\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau | \mathcal{A}_t].$$

$(V_t)_{t\in\mathcal{T}}$ kann als abdiskontierter Preisprozess des amerikanischen Claims zum Auszahlungsprozess $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ angesehen werden. Aber eine Erweiterung des Finanzmarktmodells um das Finanzgut mit Preisprozess V ist nicht ohne weiteres möglich, wie in Abschnitt 2.5 gezeigt wird. Zunächst werden die wichtigsten Eigenschaften der Snellschen Einhüllenden gezeigt.

2.3 Supermartingaleigenschaft

Das folgende grundlegende Lemma gibt an, wann das essentielle Supremum aus dem (bedingten) Erwartungswert herausgezogen werden darf.

Lemma 2.5. *Seien $S \leq T \in \mathcal{S}$ zwei Stoppzeiten, Z ein Auszahlungsprozess und α eine nichtnegative beschränkte $\mathcal{A}_T$- messbare Zufallsvariable. Dann gilt*

$$E\left[\alpha \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]\middle|\mathcal{A}_S\right] = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[\alpha Z_\tau|\mathcal{A}_S], \tag{2.4}$$

wobei $\mathcal{S}_T = \{\tau \in \mathcal{S}|\tau \geq T\}$.

Beweis. Sei $V'_T := \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]$.

„$\geq$“ Für $\tau \in \mathcal{S}_T$, gilt wegen $V'_T \geq E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]$:

$$E[\alpha V'_T|\mathcal{A}_S] \geq E\big[\alpha E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]|\mathcal{A}_S\big] = E\big[E[\alpha Z_\tau|\mathcal{A}_T]|\mathcal{A}_S\big] = E[\alpha Z_\tau|\mathcal{A}_S],$$

und somit

$$E\left[\alpha \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]\middle|\mathcal{A}_S\right] \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[\alpha Z_\tau|\mathcal{A}_S].$$

„$\leq$“ Es sei $\tau \in \mathcal{S}_T$ beliebig und $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ die Menge der rationalen Zahlen in $[0,\mathfrak{m}]$ wobei $t_0 = 0$. Es sei wie in Abschnitt 2.1

$$\mathcal{S}^{(n)} = \big\{S \in \mathcal{S}|\ S(\Omega) \subset \{t_0, ..., t_{n-2}, \mathfrak{m}\}\big\},\ n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Es gilt $\mathcal{S}^{(n)} \subset \mathcal{S}^{(n+1)} \subset \mathcal{S}$. Definiere die Stoppzeiten

$$\tau_n := \min\{t \in \{t_0, ..., t_{n-2}, \mathfrak{m}\}|\ t \geq \tau\} \in \mathcal{S}^{(n)}.$$

Es gilt $\tau_n \geq \tau_{n+1} \geq \tau$. Wegen der Dichtheit von $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ in $[0,\mathfrak{m}]$ gilt $\tau_n \searrow \tau$, und da Z rechtsseitig stetig ist, impliziert dies $Z_{\tau_n} \to Z_\tau$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Weil Z von Klasse(D) ist, gilt somit

$$E[Z_\tau|\mathcal{A}_T] = \lim_{n\to\infty} E[Z_{\tau_n}|\mathcal{A}_T] \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } L^1.$$

Nach Satz 2.1 existiert für jedes n eine Stoppzeit $\mu_n \in \mathcal{S}^{(n)}$, derart dass

$$E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \geq E[Z_\nu|\mathcal{A}_T]$$

für alle $\nu \in \mathcal{S}_T^{(n)} = \{\mu \in \mathcal{S}^{(n)}|\ \mu \geq T\}$. Insbesondere gilt

$$E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \geq E[Z_{\tau_n}|\mathcal{A}_T]$$

$$\Downarrow$$

$$\liminf_{n\to\infty} E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \geq E[Z_\tau|\mathcal{A}_T] \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Weil $\tau \in \mathcal{S}_T$ beliebig war (und $\{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$ nicht von τ abhängt), ergibt sich

$$\liminf_{n\to\infty} E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T] = V_T' \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Wegen $E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \leq V_T'$ und $E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \leq E[Z_{\mu_{n+1}}|\mathcal{A}_T]$ (da $\mathcal{S}^{(n)} \subset \mathcal{S}^{(n+1)}$) gilt damit $E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \nearrow V_T'$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Da α $\mathcal{A}_T$- meßbar ist, impliziert dies

$$E[\alpha Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T] \nearrow \alpha V_T' \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen ([Ell82], Lemma 1.8) ergibt sich:

$$\begin{aligned} E[\alpha V_T'|\mathcal{A}_S] = E\left[\lim_{n\to\infty} E[\alpha Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T]\middle|\, \mathcal{A}_S\right] &= \lim_{n\to\infty} E\big[E[\alpha Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_T]|\mathcal{A}_S\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[\alpha Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_S] \end{aligned}$$

$\mathbb{P}$-fast sicher. Und somit gilt (wegen $\mu_n \in \mathcal{S}_T$ für alle $n \in \mathbb{N}_{n\geq 2}$)

$$E[\alpha V_T'|\mathcal{A}_S] \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_T} E[\alpha Z_\tau|\mathcal{A}_S].$$

□

Für $t \in \mathcal{T}$ gilt selbstverständlich $V_t' = V_t$. Für eine allgemeine Stoppzeit $T \in \mathcal{S}$ muss dagegen $V_T' = V_T$ noch gezeigt werden. Für $S = 0$ ergibt sich die Integrierbarkeit von V_t für alle $t \in \mathcal{T}$, weil mit Z auch $|Z|$ ein Auszahlungsprozess ist und

$$E[|V_t|] \leq E\left[\operatorname*{ess\,sup}_{t\leq\tau\in\mathcal{S}} |Z_\tau|\right] \overbrace{=}^{\textit{Lemma } 2.5} \operatorname*{ess\,sup}_{t\leq\tau\in\mathcal{S}} E\left[|Z_\tau|\right] \leq \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[|Z_\tau|] < \infty$$

gilt.

Satz 2.6. *Die Snellsche Einhüllende ist ein Supermartingal.*

Beweis. Der Beweis des letzen Lemmas hat gezeigt, dass V_t adaptiert ist, da es als Limes von $\mathcal{A}_t$- meßbaren Zufallsvariablen dartellbar ist:

$$E[Z_{\mu_n}|\mathcal{A}_t] \nearrow V_t' = V_t \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Sei $s \leq t \in \mathcal{T}$, so folgt aus dem letzten Lemma mit $T = t$, $\alpha = 1$ und $S = s$:

$$E[V_t|\mathcal{A}_s] = \operatorname*{ess\,sup}_{t\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_s] \leq \operatorname*{ess\,sup}_{s\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_s] = V_s.$$

□

Satz 2.7. *Die Snellsche Einhüllende besitzt eine rechtsseitig stetige Version.*

Beweis. Da V ein Supermartingal ist, genügt es nach [Ell82], Theorem 4.6, (3) zu zeigen, dass $E[V_t]$ rechtsseitig stetig ist. Sei $t \geq 0$ und $(t_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $t_n \searrow t$. Nach Lemma 2.5 gilt mit $T = t$, $\alpha = 1$ und $S = 0$ $E[V_t] = \sup_{t\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau]$. Also gibt es eine Folge von Stoppzeiten $\tau_n \in \mathcal{S}$ mit $\tau_n \geq t$ derart dass $E[Z_{\tau_n}] \to E[V_t]$ für $n \to \infty$.

$$W_n := 1_{\{\tau_n<t_n\}}(Z_{t_n} - Z_{\tau_n})$$

konvergiert fast sicher gegen Null wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von Z. Weil Z von Klasse(D) ist, gilt dann $E[W_n] \to 0$. Mit $\tau_n^t := \tau_n \vee t_n$ ergibt sich:

$$E[Z_{\tau_n^t}] \quad = \quad E[Z_{\tau_n}] + E[Z_{\tau_n^t} - Z_{\tau_n}] \quad = \quad E[Z_{\tau_n}] + E[1_{\{\tau_n<t_n\}}(Z_{t_n} - Z_{\tau_n})]$$

$$= E[Z_{\tau_n}] + E[W_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E[V_t] \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Mit der Supermartingaleigenschaft von V und $Z \leq V$ gilt somit:

$E[Z_{\tau_n^t}] \leq E[V_{\tau_n^t}] \leq E[V_{t_n}] \leq E[V_t]$. Und somit $\lim\limits_{n\to\infty} E[V_{t_n}] = E[V_t]$.

□

Von nun an ist stets die rechtsseitig stetige Version von V_t gemeint. Wegen [Kle08], Lemma 21.5, (ii) ist dann die Snellsche Einhüllende eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit[2].

2.4 Gleichgradige Integrierbarkeit

Satz 2.8. *Die Snellsche Einhüllende ist gleichgradig integrierbrar.*

Beweis. 1) Sei $Z \geq 0$ (Dann ist auch $V_t \geq 0$).

Sei $\epsilon > 0$. Da Z von Klasse(D) ist, existiert ein $\delta > 0$ derart dass $E[1_\Lambda Z_\tau] < \epsilon$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$ und $\Lambda \in \mathcal{A}_\mathfrak{m}$ mit $\mathbb{P}(\Lambda) < \delta$. Es sei $K > (V_0/\delta)$, dann gilt wegen $E[V_t] = E[1_{\{V_t>K\}}V_t] + E[1_{\{V_t\leq K\}}V_t] \geq K\mathbb{P}(\{V_t > K\})$ und der Supermartingaleigenschaft von V:

$$\mathbb{P}\big(\{V_t > K\}\big) \leq \frac{E(V_t)}{K} \leq \frac{E(V_0)}{K} \leq \delta$$

für alle $t \in \mathcal{T}$. Nach Lemma 2.5 mit $T = t$, $S = 0$ und $\alpha = 1_{\{V_t>K\}}$ gilt damit

$$E[1_{\{V_t>K\}}V_t] = \sup_{t\leq\tau\in\mathcal{S}} E[1_{\{V_t>K\}}Z_\tau] < \epsilon$$

[2] $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}, (Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ununterscheidbar $\Leftrightarrow \mathbb{P}(\{\omega|X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ für alle } t \in \mathcal{T}\}) = 1$

für alle $t \in \mathcal{T}$.
2) Sei Z ein beliebiger Auszahlungsprozeß. Dann ist die Snellsche Einhüllende W des Auszahlungsprozesses $|Z|$ gleichgradig integrierbar. Wegen $V \leq W$ impliziert dies, dass V gleichgradig integrierbar ist.

□

Für den folgenden Satz beachte man, dass wenn X_t und Y_t Modifikationen sind (d.h. $X_t = Y_t \mathbb{P} - f.s.$ für alle $t \in \mathcal{T}$), es durchaus Stoppzeiten $T \in \mathcal{S}$ geben kann, sodass $X_T \neq Y_T$ gilt.

Lemma 2.9. *Sei V von Klasse(D) oder $V \geq 0$, dann gilt*

$$V_T = V'_T$$

für alle $T \in \mathcal{S}$, wobei wie im Beweis von Lemma 2.5 gilt:

$$V'_T := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_T} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]$$

Beweis. • Seien $\tau \geq T$ Stoppzeiten aus $\mathcal{S}$. Da V_t ein gleichgradig integrierbares, rechtsseitig stetiges Supermartingal ist, gilt nach dem Optional Sampling Theorem, [Ell82] 4.12, $V_T \geq E[V_\tau|\mathcal{A}_T] \geq E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]$, und damit $V_T \geq V'_T$.
• Es sei nun $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ und $\mathcal{S}^{(n)}$ wie im Beweis von Lemma 2.5, und $T \in \mathcal{S}$. Wir wollen nun

$$E[V_T] \leq E[V'_T]$$

zeigen, wobei wir zunächst annehmen, dass
a) $T \in \mathcal{S}^{(n)}$ für ein $n \geq 2$. Dann gilt für $t_i \in \{t_1, ..., t_{n-1}, \mathfrak{m}\}$:

$$\begin{aligned}
1_{\{T=t_i\}} V_T = 1_{\{T=t_i\}} V_{t_i} &= 1_{\{T=t_i\}} \operatorname*{ess\,sup}_{t_i \leq \tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_{t_i}] \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{t_i \leq \tau \in \mathcal{S}} E[1_{\{T=t_i\}} Z_\tau|\mathcal{A}_{t_i}] \\
&\overbrace{=}^{(1)} \operatorname*{ess\,sup}_{T \leq \tau \in \mathcal{S}} E[1_{\{T=t_i\}} Z_\tau|\mathcal{A}_{t_i}] \\
&\overbrace{=}^{(2)} \operatorname*{ess\,sup}_{T \leq \tau \in \mathcal{S}} E[1_{\{T=t_i\}} Z_\tau|\mathcal{A}_T] \\
&= 1_{\{T=t_i\}} \operatorname*{ess\,sup}_{T \leq \tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T] \\
&= 1_{\{T=t_i\}} V'_T
\end{aligned}$$

(1) Für jede Stoppzeit $\tau \geq t_i$ existiert eine Stoppzeit $\tau' = 1_{\{T=t_i\}}\tau + 1_{\{T\neq t_i\}}\mathfrak{m}$ sodass $\tau' \geq T$ und $1_{\{T=t_i\}}Z_{\tau'} = 1_{\{T=t_i\}}Z_\tau$.

(2) Für $A \in \mathcal{A}_{t_i}$ gilt $\int_A E[1_{\{T=t_i\}}Z_\tau|\mathcal{A}_T]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap\{=t_i\}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A 1_{\{T=t_i\}}Z_\tau\mathrm{d}\mathbb{P}$, und $E[1_{\{T=t_i\}}Z_\tau|\mathcal{A}_T] = 1_{\{T=t_i\}}E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]$ ist $\mathcal{A}_{t_i}$- messbar. Letzteres lässt sich mit $D = E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]$ wegen

$$\{1_{\{T=t_i\}}D \leq \alpha\} = \begin{cases} \{D \leq \alpha\} \cap \{T = t_i\} & \text{für } \alpha < 0 \\ (\{D \leq \alpha\} \cap \{T = t_i\}) \cup \{T = t_i\}^c & \text{für } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

leicht erkennen.

Somit ist $V_T = V'_T$ für $T \in \mathcal{S}^{(n)}$ gezeigt.

b) Sei nun $T \in \mathcal{S}$ beliebig. Definiere $T_n := \min\{t \in \{t_0, ..., t_{n-n}, \mathfrak{m}\}|t \geq T\}$. Dann gilt $T_n \in \mathcal{S}^{(n)}$ und $T_n \searrow T$. Ist $V \geq 0$, so gilt wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von V und dem Lemma von Fatou

$$E[V_T] \leq \liminf_{n\to\infty} E[V_{T_n}]. \tag{2.5}$$

Und falls V von Klasse(D) ist, ist diese Ungleichung auch erfüllt denn es gilt dann sogar $E[V_T] = \lim_{n\to\infty} E[V_{T_n}]$. Nach Lemma 2.5 gilt mit $\alpha = 1$ und $S = 0$

$$E[V_T] \overbrace{=}^{a)} E[V'_T] = \sup_{T\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau]. \tag{2.6}$$

für alle $T \in \mathcal{S}^{(n)}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} E[V_T] \overbrace{\leq}^{(2.5)} \liminf_{n\to\infty} E[V_{T_n}] &\overbrace{=}^{(2.6)} \liminf_{n\to\infty} \sup_{T_n\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] \leq \sup_{T\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] \\ = \sup_{T\leq\tau\in\mathcal{S}} E\big[E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]\big] &\leq E\left[\operatorname*{ess\,sup}_{T\leq\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau|\mathcal{A}_T]\right] \end{aligned}$$

Also gilt $E[V_T] \leq E[V'_T]$, und weil vorher bereits $V_T \geq V'_T$ gezeigt wurde, folgt

$$V_T = V'_T.$$

$\square$

Satz 2.10. *Die Snellsche Einhüllende ist von Klasse(D).*

Beweis. 1) Sei $Z \geq 0$.
Sei $\epsilon > 0$. Da Z von Klasse(D) ist, existiert ein $\delta > 0$ sodass $E[1_\Delta Z_\tau] < \epsilon$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$ und $\Delta \in \mathcal{A}_\mathfrak{m}$ mit $\mathbb{P}(\Delta) < \delta$. Sei $K > V_0/\delta$, dann gilt wie im Beweis von Satz 2.8:

$$\mathbb{P}\big(\{V_T > K\}\big) \leq \frac{E(V_T)}{K} \leq \frac{E(V_0)}{K} \leq \delta$$

für alle $T \in \mathcal{S}$. Da $V \geq 0$, gilt nach Lemma 2.9 mit $T = t$, $\alpha = 1_{\{V_t > K\}}$ und $S = 0$:

$$E[1_{\{V_T > K\}} V_T] = \sup_{T \leq \tau \in \mathcal{S}} E[1_{\{V_T > K\}} Z_\tau] < \epsilon$$

für alle $T \in \mathcal{S}$. Also ist V von Klasse(D).
2) Sei Z beliebig. Dann ist $|Z|$ ein Auszahlungsprozess von Klasse(D), dessen Snellsche Einhüllende W nach Punkt 1 ebenfalls von Klasse(D) ist. Wegen $V \leq W$ ist dann auch V von Klasse(D).

□

Satz 2.11. *Die Snellsche Einhüllende V ist das minimal dominierende Supermartingal zu Z, d.h. ist $W \in \mathfrak{S}$ mit $W \geq Z$, so gilt $W \geq V$.*
Seien $S \leq T \in \mathcal{S}$ zwei Stoppzeiten und α eine nichtnegative beschränkte $\mathcal{A}_T$-messbare Zufallsvariable. Dann gilt

$$E[\alpha V_T | \mathcal{A}_S] = \operatorname*{ess\,sup}_{T \leq \tau \in \mathcal{S}} E[\alpha Z_\tau | \mathcal{A}_S]. \tag{2.7}$$

Beweis. Sei $Z \leq W \in \mathfrak{S}$, $t \in \mathcal{T}$ und $T \in \mathcal{S}$ mit $T \geq t$. Wegen dem Optional Sampling Theorem gilt $W_t \geq E[W_T|\mathcal{A}_t] \geq E[Z_T|\mathcal{A}_t]$, und somit $W_t \geq V_t$.
Weil V von Klasse(D) ist gilt nach Lemma 2.9 $V_t = V_t'$ und somit folgt Gleichung (2.7) aus Gleichung (2.4). □

Satz 2.11 zeigt also, dass die in Definition 2.1 definierte Snellsche Einhüllende V zum Auszahlungsprozess Z ebenfalls die Eigenschaften aus 2.1.1 erfüllt:

1. $V_t \geq Z_t$ für alle $t \in \mathcal{T}$,

2. V ist ein Supermartingal,

3. ist Y ein weiteres Supermartingal mit $Y_t \geq Z_t$ für alle $t \in \mathcal{T}$, so gilt $Y_t \geq V_t$ für alle $t \in \mathcal{T}$.

2.5 Doob-Meyer-Zerlegung

Sei $W \in \mathfrak{S}$, dann gilt:

Satz 2.12 (Additive Doob-Meyer-Zerlegung). *Es existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$W = W^m + W^p,$$

wobei W^m ein Martingal aus $\mathfrak{M}$, und W^p ein previsibler, monoton fallender Prozess mit $W_0^p = 0$ ist.

Beweis. Siehe [Ell82], Theorem 8.15. □

Es handelt sich hierbei um die stetige Entsprechung der Doob-Zerlegung aus Kapitel 1, Satz 2.2. Weil die Snellsche Einhüllende V ein Element aus $\mathfrak{S}$ ist, besitzt sie eine eindeutige Doob-Meyer-Zerlegung

$$V_t = V_t^m + V_t^p. \tag{2.8}$$

Ist V^m der abdiskontierte Wertprozess einer zulässigen, selbstfinanzierenden Handelsstrategie, so zeigt diese Zerlegung, dass sich der amerikanische Claim damit absichern lässt (siehe 1.3.2), denn es gilt $V_t^m \geq V_t \geq Z_t$ $\mathbb{P}$- f.s. für alle $t \in \mathcal{T}$. Existiert eine optimale Stoppzeit, so können sich wegen $V_0^m = V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau]$ Käufer und Verkäufer des amerikanischen Claims auf einen gemeinsamen Preis einigen. Im Prinzip wurde damit aber nur

$$s^* \leq s\left(\tilde{Z}\right)$$

gezeigt (wobei $s^* := \inf\{V_0(H)|$ H ist ein selbstfinanzierender, zulässiger Hedge für Z $\}$, entsprechend zu Abschnitt 1.3.2). $s^* \geq s\left(\tilde{Z}\right)$ lässt sich folgendermaßen einsehen: Sei H ein Hedge für Z, so ist der abdiskontierte Wertprozess $W_t^*(H)$ ein lokales Martingal mit $W_t^*(H) \geq Z_t$. Weil H eine zulässige Handelsstrategie ist, exisitert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $W_t^*(H) \geq K$, und [Irl03], Lemma 11.20 ergibt, dass $W_t^*(H)$ ein Supermartingal ist. Da V wegen Satz 2.11 das minimal dominierende Supermartingal zu Z bildet, folgt

$$W_t^*(H) \geq V_t$$

für alle $t \in \mathcal{T}$, insbesondere $W_0^*(H) \geq V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau]$.
Obwohl der Kontrakt damit zustande kommen kann, würde die Erweiterung des Finanzmarktmodells um ein Finanzgut mit dem abdiskontierten Preisprozess $S_{d+1}^*(t) := V_t$ im Allgemeinen zu Arbitragemöglichkeiten führen. Denn ist H die Handelsstrategie zum abdiskontierten Wertprozess V^m im

ursprünglichen Modell, und führt man im erweiterten Modell die Handelsstrategie $(H, -1)$ durch, so erhält man einen abdiskontierten Wertprozess W^*, für den gilt:

- $W_0^*(H, -1) = 0$, und
- $W_{\mathfrak{m}}^*(H, -1) = V_{\mathfrak{m}}^m - V_{\mathfrak{m}} = -V_{\mathfrak{m}}^p \geq 0$.

Und ist V ein echtes Supermartingal, so gilt $\mathbb{P}\big(W_{\mathfrak{m}}^*(H,-1) > 0\big) = \mathbb{P}\big(V_{\mathfrak{m}}^p < 0\big) > 0$, und somit existiert eine Arbitragemöglichkeit. Das Finanzmarktmodell lässt sich also nicht ohne weiteres um das derivative Finanzgut „amerikanischer Claim“ erweitern. Dies lässt sich dadurch begründen, dass im Modell von rational handelnden Finanzmarktteilnehmern ausgegangen wird, die stets in einem optimalen Zeitpunkt den amerikanischen Claim ausüben und nicht bis zum Ende warten. Man müsste also das Finanzgut „amerikanischer Claim“ um die Bedingung erweitern, dass zu einer optimalen Stoppzeit ausgeübt wird. Die Definition

$$S_{d+1}^*(t) = V_t^m$$

wäre z.B. sinnvoll. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass es noch weitere Möglichkeiten gibt.
Als nächstes soll eine weitere additive Zerlegung gezeigt werden. Dazu wird der Begriff des speziellen Semimartingals gebraucht:

Definition 2.2. *Ein Semimartingal $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ heißt spezielles Semimartingal, falls eine Semimartingalzerlegung wie Definition 1.1,*

$$X_t = M_t + A_t, \tag{2.9}$$

existiert, in der A previsibel ist.

Aus [Ell82], Theorem 12.38 folgt dann die Eindeutigkeit dieser Zerlegung, und man kann diese Zerlegung in der Form

$$X_t = X_t^m + X_t^p, \tag{2.10}$$

schreiben, denn ist $X \in \mathfrak{M}$, so handelt es sich bei dieser Zerlegung wegen der Eindeutigkeit bereits um die Doob-Meyer-Zerlegung.
Zu einem cádlág- Prozess $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ wird der Prozess $(X_{t-})_{t \in \mathcal{T}}$ definiert durch die linksseitigen Grenzwerte von X, das heißt

$$X_{t-} = \lim_{s \nearrow t} X_s \ \mathbb{P}\text{- fast sicher,}$$

für $t > 0$, und X_{0-} ist ein beliebiger Anfangswert. Dieser Prozess wird mit X_- abgekürzt. X_- ist wegen [Ell82], Theorem 6.32 previsibel. Der Sprung von X an der Stelle $t \in \mathcal{T}$ ist

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}$$

Satz 2.13. *Sei $W \in \mathfrak{S}$ und $B \in \mathfrak{M}^+$. Dann existiert ein eindeutiges $C \in \mathfrak{M}$ und ein wachsender previsibler Prozess E mit $E_0 = 0$ sodass*

$$W = C - EB. \tag{2.11}$$

Dabei ist $E_t = -\int_{]0,t]} \frac{1}{B_{s-}} dW_s^p$ und $C_t = W_t^m + \int_{]0,t]} E_{s-} dB_s + [E, B]_t$.

Beweis. Wegen Korollar 1.2 ist W/B ein rechtsseitig stetiges Supermartingal von Klasse(D) bzgl. $\mathbb{P}^B$, und somit besitzt W/B eine eindeutige Doob-Meyer-Zerlegung bzgl. $\mathbb{P}^B$. Sei

$$\begin{aligned} E'_t &= -\int_{]0,t]} \frac{1}{B_{s-}} dW_s^p, \\ C'_t &= W_t^m + \int_{]0,t]} E'_{s-} dB_s + [E', B]_t. \end{aligned}$$

E' (als pfadweise definiertes Lebesgue- Stieltjes- Integral) ist previsibel und wachsend, B ein (lokales) Martingal, und aus [JŠ87], Prop. I.4.49 (c) ergibt sich, dass auch die optionale quadratische Variation $[E', B]$ ein lokales Martingal ist. Also ist C' ein lokales Martingal. Man beachte, dass E'_{t-} lokal beschränkt ist, denn wegen $B_{s-} > 0$ und $B_s > 0$ existiert für fast alle $\omega \in \Omega$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_{s-}(\omega) > \epsilon$, und somit $E'_{t-}(\omega) \leq E'_{\mathfrak{m}}(\omega) \leq 1/\epsilon |W_{\mathfrak{m}}^p(\omega)| < \infty$, also bildet

$$\tau_n = \inf\{t \in \mathcal{T} | E'_{t-} > n\}$$

eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten. [Ell82], Theorem 12.22, angewendet auf E' und B ergibt

$$\begin{aligned} E'_t B_t &= \int_{]0,t]} E'_{s-} dB_s + \int_{]0,t]} B_{s-} dE'_s + [E', B]_t \\ &= C'_t - W_t. \end{aligned}$$

Weil E'_t previsibel und von beschränkter Variation ist, ist

$$\frac{W}{B} = \frac{C'}{B} - E'$$

die eindeutige Zerlegung des speziellen Semimartingals W/B bzgl $\mathbb{P}^B$. Dann ist dies die Doob-Meyer-Zerlegung von W/B und somit C'/B ein gleichgradig integrierbares Martingal bzgl $\mathbb{P}^B$, und Korollar 1.2 impliziert dass C' ein gleichgradig integrierbares Martingal (bzgl. $\mathbb{P}$) ist. D.h. Gleichung 2.11 ist erfüllt mit $C = C'$ und $E = E'$.

□

Zum Abschluss dieses Kapitels soll die multiplikative Doob-Meyer-Zerlegung gezeigt werden. Dazu wird zunächst Lemma 2.14 bewiesen, welches [Ell82], Theorem 13.5, benötigt: Zu einem Semimartingal X mit $X_{0-} = 0$ hat die stochastische Differentialgleichung

$$Z_t = Z_{0-} + \int_{[0,t]} Z_{s-} dX_s \tag{2.12}$$

genau eine Lösung, nämlich

$$Z_t = Z_{0-} e^{\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\right)} \prod_{0 \le s \le t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}.$$

Man beachte, dass aus Gleichung (2.12) folgt :

1) X_t ist ein lokales Martingal $\Rightarrow$ Z_t ist ein lokales Martingal,
2) X_t ist previsibel und von beschr. Var. $\Rightarrow$ Z_t ist previsibel und von beschr. Var.

Z_t heißt Doléansexponential und wird mit $Z_{0-}\mathcal{E}(X)$ bezeichnet. Hierbei ist Z_{0-} ein beliebiger Anfangswert. Nach [Ell82], Theorem 13.8 gilt

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}\big(X + Y + [X, Y]\big). \tag{2.13}$$

Lemma 2.14. *Sei X ein spezielles Semimartingal mit Zerlegung $X = X^m + X^p$, und $X_0 = 0$, sowie $1 + \Delta X^p \neq 0$ überall. Dann ist der Prozess*

$$\sum_{s \le t} \frac{\Delta X_s^p \Delta X_s^m}{1 + \Delta X_s^p} = \left[\sum_{s \le \cdot} \frac{\Delta X_s^p}{1 + \Delta X_s^p}, X^m\right]_t$$

ein lokales Martingal von beschränkter Variation und

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X^p)\mathcal{E}\left(X^m - \sum_{s \le \cdot} \frac{\Delta X_s^p \Delta X_s^m}{1 + \Delta X_s^p}\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{s\leq\cdot}\left|\frac{\Delta X^p_s}{1+\Delta X^p_s}\right| \leq 2\sum_{s\leq\cdot}|\Delta X^p_s| + \sum_{s\leq\cdot} 1_{\{\Delta X_s<-\frac{1}{2}\}}\left|\frac{\Delta X^p_s}{1+\Delta X^p_s}\right| < \infty,$$

weil X^p von beschränkter Variation und die zweite Summe endlich ist (ein cádlág- Prozess kann auf dem kompakten Intervall maximal endlich viele Sprünge vom Absolutbetrag größer als $\epsilon > 0$ haben). Die absolut konvergente Summe $\sum_{s\leq\cdot}\Delta X^p/(1+\Delta X^p_s)$ ist somit ein previsibler Prozess von endlicher Variation, und dies impliziert dass die optionale quadratische Variation $[\sum_{s\leq\cdot}\Delta X^p/(1+\Delta X^p_s), X^m]$ ein lokales Martingal ist ([JŠ87], Prop. I.4.49 (c)), und aus [Ell82], Theorem 12.8 folgt die Gültigkeit der ersten Gleichung.
Zum Nachweis der zweiten Gleichung sei $W := \sum_{s\leq\cdot}(\Delta X^p_s\Delta X^m_s/(1+\Delta X^p_s))$ und $Y = X^m - W$. Es muss $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X^p)\mathcal{E}(Y)$ gezeigt werden, also wegen Gleichung (2.13) $X = X^p + Y + [X^p, Y]$ bzw. $W + [X^p, W] = [X^p, X^m]$. Wieder aus [Ell82], Theorem 12.8 folgt:

$$\begin{aligned}
[X^p, W]_t &= \sum_{s\leq t}\Delta X^p_s\Delta W_s\\
[X^p, X^m]_t &= \sum_{s\leq t}\Delta X^p_s\Delta X^m_s,
\end{aligned}$$

denn X^p ist previsibel und von beschränkter Variation. Damit ergibt sich $\Delta W + \Delta X^p\Delta W = (1+\Delta X^p)\Delta W = \Delta X^p\Delta X^m$. Weil W ein reiner Sprungprozess ist, ist damit die zweite Gleichung bewiesen. □

Satz 2.15 (Multiplikative Doob-Meyer-Zerlegung)**.** *Es sei Y ein spezielles Semimartingal mit $Y > 0$ und $Y_- > 0$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$Y = AM \tag{2.14}$$

mit einem lokalen Martingal M und einem previsiblen Prozess A von beschränkter Variation mit $A_0 = 1$. Außerdem gilt $A > 0$, $M > 0$, $Y_- + \Delta Y^p > 0$ und

$$A_t = \mathcal{E}\left(\int\limits_{[0,t]}\frac{1}{Y_{s-}}dY^p_s\right), \quad M_t = Y_{0-}\mathcal{E}\left(\int\limits_{[0,t]}\frac{1}{Y_{s-}}dY^m_s - \sum_{s\leq t}\frac{\Delta Y^p_s\Delta Y^m_s}{(Y_{s-}+\Delta Y^p_s)Y_{s-}}\right).$$

Beweis. Existenz: Sei $X_t := \int_{[0,t]} 1/Y_{s-} dY_s$[3], sodass

$$Y = Y_{0-}\mathcal{E}(X), \tag{2.15}$$

denn es gilt:

$$Y_{0-} + \int\limits_{[0,t]} Y_{s-} d\left(\int_{[0,t]} 1/Y_{s-} dY_s\right) = Y_{0-} + \int\limits_{[0,t]} dY_s = Y_{0-} + Y_t - Y_{0-} = Y_t.$$

Wegen $Y > 0$ gilt $1 + \Delta X > 0$, denn

$$1 + \Delta X_s = 1 + \tfrac{1}{Y_{s-}} \Delta Y_s = 1 + \tfrac{Y_s - Y_{s-}}{Y_{s-}} = Y_s$$

und nach [JŠ87], 2.31 auch $1 + \Delta X^p > 0$. Also ist Lemma 2.14 anwendbar. Mit

- $X_t^p = \int_{[0,t]} 1/Y_{s-} dY_s^p$,
- $X_t^m = \int_{[0,t]} 1/Y_{s-} dY_s^m$,
- $\Delta X^p = \Delta Y^p / Y_-$,
- $\Delta X^m = \Delta Y^m / Y_-$ erhält man:

$$\mathcal{E}(X^p) = \mathcal{E}\left(\int\limits_{[0,t]} \frac{1}{Y_{s-}} dY_s^p\right),$$

$$\mathcal{E}\left(X^m - \sum_{s \leq \cdot} \frac{\Delta X_s^p \Delta X_s^m}{1 + \Delta X_s^p}\right) = \mathcal{E}\left(\int\limits_{[0,t]} \frac{1}{Y_{s-}} dY_s^m - \sum_{s \leq t} \frac{\Delta Y_s^p \Delta Y_s^m}{(Y_{s-} + \Delta Y_s^p) Y_{s-}}\right).$$

Wegen Lemma 2.14 und Gleichung (2.15) gilt

$$\begin{array}{ccccc} Y_{0-}\mathcal{E}(X) & = & \mathcal{E}(X^p) & Y_{0-}\mathcal{E}\left(X^m - \sum_{s \leq \cdot} \frac{\Delta X_s^p \Delta X_s^m}{1 + \Delta X_s^p}\right), & \text{bzw.} \\ \| & & \| & \| & \\ Y & = & A & M. & \end{array}$$

[3]Die lokale Beschränktheit von $1/Y_-$ gilt wegen $Y > 0$ und $Y_- > 0$.

Da X^p previsibel und von veschränkter Variation ist, ist es auch A, und weil nach Lemma 2.14 $\sum_{s\le t}\big((\Delta X^p_s \Delta X^m_s)/(1+\Delta X^p_s)\big)$ ein lokales Martingal ist (und somit auch $X^m - \sum_{s\le t}\big((\Delta X^p_s \Delta X^m_s)/(1+\Delta X^p_s)\big)$), ist auch M ein lokales Martingal.

Eindeutigkeit: Sei $Y = AM$ eine solche Zerlegung. Nach der Itô- Formel gilt

$$Y_t = \int\limits_{]0,t]} M_{s-} dA_s + \int\limits_{]0,t]} A_{s-} dM_s + [A,M]_t.$$

Dabei ist der erste Summand previsibel und von beschränkter Variation, und die 2 anderen Summanden sind lokale Martingale. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung des speziellen Semimartingals Y gilt $Y^p = \int M_- dA$ und $Y^m = \int A_- dM + [A,M]$. Die erste Gleichung ergibt $dY^p = M_- dA$ und Division durch Y_- ergibt $dY^p/Y_- = dA/A_-$. Daraus folgt $A = \mathcal{E}(\int (1/A_-) dA) = \mathcal{E}(\int (1/Y^p_-) dY)$, und somit ist A eindeutig. Die zweite Gleichung ergibt für den stetigen Martingalanteil $Y^c = \int A_- dM^c$ ($[A,M]$ ist rein unstetig). Also ist $M^c = \int (1/A_-) dY^c$ eindeutig. Wegen $\Delta Y^m = A_- \Delta M + \Delta A \Delta M = A \Delta M$ (wieder zweite Gleichung) ist auch $\Delta M = \Delta Y^m / A$ eindeutig. $\square$

Die Formel (2.14) ist die stetige Entsprechung der multiplikativen Doob-Zerlegung aus Kapitel 1, Satz 2.3. Die Snellsche Einhüllende V besitzt also im Falle $Z > 0$ eine Zerlegung

$$V = AM,$$

wobei A monoton fallend ist, weil $A_t = \mathcal{E}\left(\int_{[0,t]} 1/V_{t-} dV^p_t\right)$ und V^p_t monoton fallend ist. Da M nach Satz 2.15 aber nur ein positives lokales Martingal ist, wird man $M \in \mathfrak{M}^+$ zusätzlich fordern müssen.

Kapitel 3

Der Dualitätsansatz

3.1 Dominierende Martingale

Satz 3.1. *Sei Z ein Auszahlungsprozess und $C \in \mathfrak{M}$ mit $C \geq Z$. Dann gilt*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] \leq C_0.$$

Falls die Stoppzeit $\tau_* := \inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t = C_t\}$ endlich ist, dann gilt sogar

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] = C_0 = E[Z_{\tau_*}].$$

Beweis. Wegen $Z \leq C$ und dem Optional Sampling Theorem gilt $E[Z_\tau] \leq E[C_\tau] = C_0$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$, und daraus folgt die erste Behauptung. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von $Z - C$ gilt $Z_{\tau_*} = C_{\tau_*}$, und erneute Anwendung des Optional Sampling Theorems ergibt

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] \leq C_0 = E[C_{\tau_*}] = E[Z_{\tau_*}] \leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau],$$

woraus die zweite Behauptung folgt. □

Definition 3.1. *Ein Martingal $C \in \mathfrak{M}$ dominiert einen Auszahlungsprozess Z, falls*

(i) $C \geq Z$, *und*

(ii) $C_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau]$.

Satz 3.2. *Sei Z ein Auszahlungsprozess, und sei*

$$V = V^m + V^p$$

die additive Doob-Meyer-Zerlegung der Snellschen Einhüllenden V. Dann wird Z von V^m dominert. Ist außerdem $V > 0$ und

$$V = AM$$

die multiplikative Doob-Meyer-Zerlegung und gilt $M \in \mathfrak{M}^+$, so wird Z auch von M dominiert.

Beweis. Folgt direkt aus Satz 2.12 und 2.15. □

Es gilt also insbesondere:

Korollar 3.3. *Ist Z ein Auszahlungsprozess, dann existiert ein $C \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert.*

Für dominierende Martingale gibt es eine pfadweise Charakterisierung, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.4. *Sei Z ein Auszahlungsprozess, $C \in \mathfrak{M}$ und $B \in \mathfrak{M}^+$. Dann gilt:*

(i) C *dominiert* $Z \;\Leftrightarrow\; \sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t) = 0$,

(ii) B *dominiert* $Z \;\Leftrightarrow\; \sup_{t\in\mathcal{T}} \frac{Z_t}{B_t} = 1$.

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“ Das Optional Sampling Theorem liefert:

$$0 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] - C_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau - C_\tau] \leq E\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t)\right].$$

Wegen $Z \leq C$ impliziert dies $\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t) = 0$.

„$\Leftarrow$“ Sei $\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t) = 0$. Dann gilt $Z \leq C$ und somit $E[Z_\tau] \leq E[C_\tau] = C_0$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$, und daraus folgt:

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] \leq C_0.$$

Für die umgekehrte Ungleichung muss für jedes $\epsilon > 0$ eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}$ existieren sodass $E[Z_\tau] \geq C_0 - \epsilon$. Sei also $\epsilon > 0$. Dann ist wegen der Voraussetzung die Menge $\{t \in \mathcal{T} | Z_t - C_t \geq -\epsilon\}$ $\mathbb{P}$- f.s. nicht leer. Also ist die Stoppzeit $T := \inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t - C_t \geq -\epsilon\}$ endlich und somit in $\mathcal{S}$. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von $Z - C$ gilt $Z_T - C_T \geq -\epsilon$. Also gilt $E[Z_T] \geq E[C_T] - \epsilon = C_0 - \epsilon$.

(ii) „$\Rightarrow$“ Nach Korollar 1.2, a) ist Z/B ein $\mathbb{P}^B$- Auszahlungsprozess. Außerdem gilt wegen der Bayes' Regel $E[Z_\tau] = B_0 E^B[Z_\tau/B_\tau]$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$, und somit folgt aus $B_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau]$, dass $1 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E^B[Z_\tau/B_\tau]$. $Z \leq B$ impliziert $Z/B \leq 1$ wegen $B > 0$. Also dominiert 1 den Auszahlungsprozess Z/B bzgl. $\mathbb{P}^B$, und nach (i) folgt $\sup_{t\in\mathcal{T}}\big((Z_t/B_t) - 1\big) = 0$, und somit $\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t/B_t) = 1$.

„$\Leftarrow$“ Gilt $\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t/B_t) = 1$, so folgt daraus $\sup_{t\in\mathcal{T}}\big((Z_t/B_t) - 1\big) = 0$, und Anwendung von (i) auf den $\mathbb{P}^B$- Auszahlungsprozess Z/B ergibt, dass Z/B von 1 bzgl. $\mathbb{P}^B$ dominiert wird. Dies bedeutet $1 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E^B[Z_\tau/B_\tau]$ und $Z/B \leq 1$. Aus ersterem folgt mit der Bayes' Regel $B_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau]$, und aus letzterem folgt $Z \leq B$.

□

Satz 3.5 (Dualität)**.** *Sei Z ein Auszahlungsprozess. Dann gilt*

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] = \min_{Z\leq C\in\mathfrak{M}} C_0$$

Das Minimum wird erreicht durch jedes $C \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert.

Beweis. „$\leq$“ folgt aus Satz 3.1, und „$\geq$“ folgt aus Satz 3.3 und Definition 3.1. □

Dieser Dualitätsansatz hat den Nachteil, dass die Menge der Martingale $C \in \mathfrak{M}$ durch die Bedingung $Z \leq C$ eingeschränkt wird. Der additive Dualitätsansatz besitzt keine solche Einschränkung.

3.2 Additiver Dualitätsansatz

Wir kommen nun zum zentralen Satz dieser Diplomarbeit:

Satz 3.6 (Additive Dualität)**.** *Sei Z ein Auszahlungsprozess. Dann gilt*

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] = \min_{C\in\mathfrak{M}} \left(C_0 + E\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t)\right]\right) \tag{3.1}$$

Das Minimum wird erreicht durch jedes $C \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert.

Beweis. „$\leq$“ Wegen dem Optional Sampling Theorem gilt für jedes $C \in \mathfrak{M}$ und jede Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}$,

$$E[Z_\tau] = C_0 + E[Z_\tau - C_\tau] \leq C_0 + E\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t)\right],$$

also auch $\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] \leq C_0 + E\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t)\right]$.
„$\geq$“ Nach Korollar 3.3 existiert ein $C \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert. Nach Satz 3.4, (i) und der zweiten Eigenschaft eines dominierenden Martingals gilt

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] = C_0 = C_0 + E\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t)\right].$$

Daraus folgt Gleichung 3.1 und die zweite Aussage. □

Für die folgenden Beispiele wird nun angegeben, wie Beispielpfade eines Preisprozesses konstruiert werden:

Konstruktion eines Beispielpfades. Sei $\beta \in \mathbb{N}$, und $i \in \{0, ...d\}$ beliebig. Die Zeitmenge sei

$$\left\{0, \tfrac{m}{\beta}, \tfrac{2m}{\beta}, ..., \tfrac{(\beta-1)m}{\beta}, \mathfrak{m}\right\}.$$

Zunächst wird ein β- dimensionaler Vektor

$$v = (v_1, ..., v_\beta)$$

gebildet, wobei der Eintrag v_k eine zufällige Realisierung der Zufallsvariable

$$S_i\left(k\tfrac{m}{\beta}\right) - S_i\left((k-1)\tfrac{m}{\beta}\right)$$

ist. Da $\mathcal{A}_0$ $\mathbb{P}$- trivial ist, ist $S_i(0)$ konstant, und mit der Formel

$$S_i\left(k\tfrac{m}{\beta}\right) := S_i\left((k-1)\tfrac{m}{\beta}\right) + v_k$$

lassen sich iterativ die Einträge des Vektors

$$S_i(t)(\omega) = \left(S_i(0), S_i(\tfrac{m}{\beta}), ..., S_i(\mathfrak{m})\right)$$

bestimmen. Dieser Vektor bildet dann einen Beispielpfad des Preisprozesses $S_i(t)$ in β Zeitschritten.

Rogers gibt in [Rog02] ein Verfahren zur Anwendung des additiven Dualitätsansatzes an. Dazu wähle man eine Menge an Martingalen $\left\{M^{(1)}, ..., M^{(f)}\right\}$, wobei die Wahl dieser Martingale willkürlich ist. Wir bezeichnen diese Menge als Absicherungsmenge. Mit der Monte-Carlo-Methode wird in 2 Schritten ein Näherungswert berechnet, wobei zusätzlich angenommen sei, dass der Auszahlungsprozess Z und die Martingale der Absicherungsmenge Funktionen vom Preisprozessvektor

$$S(t) = \big(S_0(t), ..., S_d(t)\big)$$

sind.
Schritt 1 Das Ziel des ersten Schrittes ist es, eine Linearkombination der Martingale $M^{(1)}, ..., M^{(f)}$ zu finden, sodass

$$\sum_{j=1}^{f} \lambda_j M_0^{(j)} + E\left[\sup_{0\le t\le \mathfrak{m}} \left(Z_t - \sum_{j=1}^{f} \lambda_j M_t^{(j)}\right)\right]$$

möglichst klein wird. Dazu generiere man mit einem Computerprogramm[1] in β Zeitschritten N Beispielpfade der Preisprozesse aller Finanzgüter:

$$\begin{aligned}&\big\{S_0(t)(\omega_1), ..., S_0(t)(\omega_N)\big\},\\ &\qquad\vdots\\ &\big\{S_d(t)(\omega_1), ..., S_d(t)(\omega_N)\big\}.\end{aligned}$$

Die dazugehörigen Pfade des Auszahlungsprozesses $\big\{Z_t(\omega_1), ..., Z_t(\omega_N)\big\}$ und der gewählten Martingale $\big\{M_t^{(j)}(\omega_1), ..., M_t^{(j)}(\omega_N)\big\}$ für $j \in \{1, ..., f\}$, können nach Annahme direkt aus diesen Pfaden berechnet werden. $M_0^{(j)}(\omega_i)$ ist unabhängig vom generierten Pfad, das heißt $M_0^{(j)} := M_0^{(j)}(\omega_i)$ für $i \in \{1, ...N\}$, und numerische Minimierung der Funktion

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}\\ (\lambda_1, ..., \lambda_f) & \mapsto & \sum_{j=1}^{f} \lambda_j M_0^{(j)} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\max_t \left(Z_t(\omega_i) - \sum_{j=1}^{f} \lambda_j M_t^{(j)}(\omega_i)\right)\right]\end{array}$$

ergibt ein Martingal $M_t^\star := \sum_{j=1}^{f} \lambda_j^* M_t^{(j)}$, welches mit großer Wahrscheinlichkeit besser ist als jedes der Martingale aus $\big\{M^{(1)}, ..., M^{(f)}\big\}$.

Schritt 2 Nun soll der tatsächliche Wert

$$M_0^\star + E\left[\sup_{0\le t\le \mathfrak{m}} (Z_t - M_t^\star)\right]$$

berechnet werden. Dazu werden wieder in β Zeitschritten $\widehat{N} >> N$ Beispielpfade der Preisprozesse $\big\{S_i(t)(\omega_1), ..., S_i(t)(\omega_{\widehat{N}})\big\}$ für $i \in \{1, ..., d\}$, sowie die dazugehörigen Pfade des Auszahlungsprozesses $\big\{Z_t(\omega_1), ..., Z_t(\omega_{\widehat{N}})\big\}$ und des optimalen Martingals $\big\{M_t^\star(\omega_1), ..., M_t^\star(\omega_{\widehat{N}})\big\}$ generiert. Der Wert

$$M_0^* + \frac{1}{\widehat{N}}\sum_{i=1}^{\widehat{N}}\left[\max_{t\in\mathcal{T}_\beta} \left(Z_t(\omega_i) - M_t^*(\omega_i)\right)\right]$$

[1] In den folgenden Beispielen wird das Programm *MATLAB* verwendet.

ergibt dann einen Näherungswert für den Preis des amerikanischen Claims.

Der so berechnete Wert weicht aus 2 Gründen vom tatsächlichen Wert des amerikanischen Claims ab:

(i) Die Anwendung des Dualitätsansatzes auf $M^* \in \mathfrak{M}$ ergibt lediglich eine obere Schranke für den Preis des amerikanischen Claims. Nur im optimalen Fall, d.h. wenn Z von M^* dominiert wird, ist $M_0^* + E\left[\sup_{0\leq t\leq \mathfrak{m}}(Z_t - M^*)\right]$ der echte Wert.

(ii) Durch die Benutzung der Monte-Carlo-Methode wird sogar im optimalen Fall lediglich ein Näherungswert berechnet, welcher auch nach unten abweichen kann.

Rogers geht auch auf die Frage nach der Absicherung (siehe 1.3.2) eines amerikanischen Claims ein. Dazu sei angenommen, dass das Martingal M^* der abdiskontierte Wertprozess einer selbsfinanzierenden Handelsstrategie ist. Sei

$$\begin{aligned} \eta &= \sup_{0\leq t\leq \mathfrak{m}} (Z_t - M_t^*), \\ \eta_t &= E[\eta|\mathcal{A}_t]. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $\eta = \eta_{\mathfrak{m}}$

$$Z_t \leq \eta_{\mathfrak{m}} + M_t^*,$$

und wenn auf beiden Seiten der bedingte Erwartungswert bzgl. $\mathcal{A}_t$ genommen wird, erhält man

$$Z_t \leq E[\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0|\mathcal{A}_t] + M_t^* + \eta_0. \tag{3.2}$$

Benutzt man die Handelsstrategie zum abdiskontierten Wertprozess M^* und investiert η_0 Einheiten in das Geldmarktkonto, so ist der amerikanische Claim abgesichert solange $E[\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0|\mathcal{A}_t] \leq 0$. Da dies im Allgemeinen nicht erfüllt ist, liefert $E[E[\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0|\mathcal{A}_t]^+]$ ein Maß dafür, wie gut die Absicherung ist. Für diese erwartete Abweichung ist

$$E[|\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0|] \tag{3.3}$$

eine obere Schranke. Im optimalen Fall ist diese Null, da η wegen Satz 3.4 Null ist.

3.2.1 Beispiel A1: Die Put-Option

Wir betrachten nun als erstes Beispiel die amerikanische Put-Option auf eine Aktie im Black-Scholes-Modell. Das heißt es existieren 2 Finanzgüter $\{S_0(t), S_1(t)\}$. $S_0(t)$ ist ein Geldmarktkonto mit konstanter Zinsrate $r > 0$, also

$$S_0(t) = e^{rt},$$

und für einen Wienerprozess $(W(t))_{t\in\mathcal{T}}$ sei der Preisprozess des zweiten Finanzgutes gegeben durch

$$S_1(t) = S_1(0)e^{\sigma W(t)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t},$$

mit Anfagspreis $S_1(0)$ und Volatilität σ. $S_1(t)$ beschreibt den Preisverlauf der Aktie. Der Auszahlungsprozess sei

$$Z_t = e^{-rt}\big(K - S_1(t)\big)^+,$$

mit Strike-Preis $K > 0$. Die Absicherungsmenge $\{M^{(1)}\}$ besteht nur aus dem abdiskontierten Wertprozess der europäischen Put-Option. Der Wert der europäischen Put-Option wird mit der Black-Scholes-Formel, d.h.

$$Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{K}{S_1(0)}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\mathfrak{m}}}\right) - S_1(0)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{K}{S_1(0)}\right) - (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\mathfrak{m}}}\right)$$

berechnet. Im Programm *AmericanPut* (die Dateien befinden sich auf der beigefügten CD) wird das Verfahren von Rogers angewendet, mit 300 Pfaden im ersten Schritt, 20000 Pfaden im zweiten Schritt und 50 Zeitschritten in beiden Fällen. Außerdem wird zusätzlich mit einem Binomialbaum in 1000 Zeitschritten, Programm *BinPut*, der Wert der amerikanischen Put-Option berechnet. Tabelle 3.1 zeigt für den Strike-Preis $K = 120$, Volatilität $\sigma = 0,3$, Zinsrate $r = 0,05$, Laufzeit $\mathfrak{m} = 0,5$ und verschiedene Anfagspreise S_0 der Aktie die Ergebnisse, sowie den Wert aus (3.3) und λ^* aus Schritt 1.

$S_1(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik. (Rogers)	$E[\lvert\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0\rvert]$	λ^*
90	28,1614	30,0100	30,0729	0,0528	1,06
100	20,0813	21,0873	21,1492	0,1983	1,05
110	13,5126	14,0464	14,0822	0,1885	1,05
120	8,5990	8,8715	8,8892	0,1104	1,03
130	5,1997	5,3362	5,3527	0,1912	1,00
140	3,0055	3,0747	3,0754	0,0412	1,02
150	1,6709	1,7043	1,7040	0,0229	1,01

Tabelle 3.1: Parameter $K = 120$; $\sigma = 0,3$; $r = 0,05$ und $\mathfrak{m} = 0,5$

Rogers Methode liefert eine gute Näherung an den tatsächlichen Wert der amerikanischen Put-Option.

3.2.2 Beispiel A2: Die Min-Put-Option

Als zweites Beispiel betrachten wir den amerikanischen Min-Put auf 2 Aktien im Black-Scholes-Modell. Das heißt, es existieren 3 Finanzgüter $\{S_0(t), S_1(t), S_2(t)\}$ mit dem Geldmarktkonto $S_0(t)$ aus dem vorherigen Beispiel,

$$S_0(t) = e^{rt},$$

mit $r > 0$, und für 2 unabhängige Wienerprozesse $(W_1(t))_{t\in\mathcal{T}}$, $(W_2(t))_{t\in\mathcal{T}}$ seien die Preisprozesse der weiteren Finanzgüter gegeben durch

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0)e^{\sigma_1 W_1(t) + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t}, \\ S_2(t) &= S_2(0)e^{\sigma_2 W_2(t) + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t}, \end{aligned}$$

mit Anfagspreisen $S_1(0)$, $S_2(0)$ und Volatilitäten σ_1 und σ_2. $S_1(t)$ und $S_2(t)$ beschreiben die Preisverläufe von 2 unkorrelierten Aktien. Der Auszahlungsprozess sei

$$Z_t = \max_{i\in\{1,2\}} e^{-rt}\big(K - S_i(t)\big)^+,$$

mit Strike-Preis $K > 0$. Die Absicherungsmenge $\{M^{(1)}, M^{(2)}\}$ besteht aus den abdiskontierten Wertprozessen der beiden europäischen Put-Optionen. Im Programm *AmericanMinPut* wird das Verfahren von Rogers angewendet, mit 300 Pfaden im ersten Schritt, 20000 Pfaden im zweiten Schritt und 50 Zeitschritten in beiden Fällen. Außerdem wird zusätzlich mit einem Binomialbaum in 100 Zeitschritten, Programm *BinMinPut*, der Wert der amerikanischen Min-Put-Option berechnet. Der Wert der europäischen Min-Put-Option wird im Programm *EuropeanMinPutVektor* berechnet. Tabelle 3.2 zeigt für den Strike-Preis $K = 120$, Volatilität $\sigma_1 = 0,3$, $\sigma_2 = 0.5$, Zinsrate $r = 0,05$, Laufzeit $\mathfrak{m} = 0,5$ und verschiedene Anfagspreise $S_1(0)$ und $S_2(0)$ der Aktien die Ergebnisse, sowie den Wert aus (3.3).

$S_1(0)$	$S_2(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik. (Rogers)	$E[\lvert\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0\rvert]$
100	100	33,9319	34,3765	39,0820	5,0344
100	120	27,7537	28,1862	31,7316	3,6231
100	140	24,2183	24,7558	27,0171	5,4888
120	120	20,2459	20,5081	22,8176	2,4862
120	140	15,1501	15,3706	16,8945	1,4721
140	120	16,8822	17,1300	17,9348	0,8271
140	140	10,9527	11,1126	11,8122	1,9426

Tabelle 3.2: Parameter $K = 120$; $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; $r = 0,05$; $\mathfrak{m} = 0,5$

Hier weichen die nach Rogers' Methode berechneten Werte teilweise um über 10% nach oben ab. Diese Abweichung begründet sich dadurch, dass die gewählte Absicherungsmenge $\{M^{(1)}, M^{(2)}\}$ der europäischen Put-Optionen keine bessere Näherung ermöglicht. Rogers schreibt, dass die Wahl der Absicherungsmenge intuitiv erfolgt. Wir erweitern die Absicherungsmenge $\{M^{(1)}, M^{(2)}\}$ um die abdiskontierten Wertprozesse der europäischen Exchange-Optionen. Die Exchange-Optionen liefern zum Zeitpunkt $\mathfrak{m}$ die Auszahlungen

$$\begin{aligned}&\big(S_2(\mathfrak{m}) - S_1(\mathfrak{m})\big)^+, \quad \text{bzw.}\\ &\big(S_1(\mathfrak{m}) - S_2(\mathfrak{m})\big)^+.\end{aligned}$$

Die Preise der europäischen Exchange-Optionen lassen sich mit der Formel

$$\begin{aligned} M_0^{(3)} &= S_2(0)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_2(0)}{S_1(0)}\right)+\frac{\overline{\sigma}^2}{2}\mathfrak{m}}{\overline{\sigma}\sqrt{\mathfrak{m}}}\right) - S_1(0)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_2(0)}{S_1(0)}\right)+\frac{\overline{\sigma}^2}{2}\mathfrak{m}}{\overline{\sigma}\sqrt{\mathfrak{m}}}\right), \quad \text{bzw.}\\ M_0^{(4)} &= S_1(0)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_1(0)}{S_2(0)}\right)+\frac{\overline{\sigma}^2}{2}\mathfrak{m}}{\overline{\sigma}\sqrt{\mathfrak{m}}}\right) - S_2(0)\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_1(0)}{S_2(0)}\right)+\frac{\overline{\sigma}^2}{2}\mathfrak{m}}{\overline{\sigma}\sqrt{\mathfrak{m}}}\right)\end{aligned}$$

berechnen, wobei $\overline{\sigma} := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Mit dieser größeren Absicherungsmenge $\{M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, M^{(4)}\}$ berechnen wir erneut den Wert der amerikanischen Min-Put-Option nach der Methode von Rogers. In dem Programm *American-MinPut2* werden mit 500 Pfaden im ersten Schritt, 10000 Pfaden im zweiten Schritt und 50 Zeitschritten in beiden Fällen folgende Werte berechnet:

$S_1(0)$	$S_2(0)$	amerik. (Baum)	amerik. (Rogers)	$E[\|\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0\|]$	λ_1^*	λ_2^*	λ_3^*	λ_4^*
100	100	34,3765	35,9591	1,1456	0,96	0,10	0,04	0,83
100	120	28,1862	29,5286	0,8950	0,99	0,06	0,01	0,90
100	140	24,7558	25,7664	0,9041	1,00	0,07	0,01	0,90
120	120	20,5081	22,3892	1,7214	0,86	0,77	0,03	0,14
120	140	15,3706	16,7089	1,1508	0,99	0,78	0,01	0,09
140	120	17,1300	17,9275	2,0357	0,47	0,99	0,00	0,00
140	140	11,1126	11,6670	0,6719	0,87	1,00	0,00	0,00

Tabelle 3.3: Parameter $K = 120$; $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; $r = 0,05$; $\mathfrak{m} = 0,5$

Man erkennt eine geringere Abweichung in Tabelle 3.3 als in Tabelle 3.2. Die Exchange- Optionen liefern also eine kleine Verbesserung. Wir versuchen im letzten Schritt die europäische Min-Put-Option in die Absicherungsmenge aufzunehmen. *MatLab* benötigt für die Berechnung des Wertes der europäischen Min-Put-Option, also für die Berechnung des Doppelintegrals

$$\frac{e^{-r\mathfrak{m}}}{2\pi\gamma_1\gamma_2}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \max\{(K - S_1(0)e^x)^+, (K - S_2(0)e^y)^+\} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}} dxdy\right) \tag{3.4}$$

ca. 1 Sekunde. Die Konstruktion von 20000 Pfaden in 50 Zeitschritten würde dann ca. 10^6 Sekunden dauern, das sind 11 Tage. Selbst 300 Pfade in 20 Zeitschritten dauern noch ca. 1,6 Stunden. Da *MatLab* Einfachintegrale deutlich schneller vektoriell ausrechnen kann, wird der Ausdruck (3.4) zunächst in ein Einfachintegral umgewandelt. Mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\mathfrak{m}, \\
a_2 &= \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\mathfrak{m}, \\
\gamma_1 &= \sigma_1\sqrt{\mathfrak{m}}, \\
\gamma_2 &= \sigma_2\sqrt{\mathfrak{m}}, \\
b_1 &= S_1(0), \\
b_2 &= S_2(0), \\
A_1 &= \left\{x \,\middle|\, K - S_1(0)e^x > 0\right\} = \left\{x \,\middle|\, \log\left(\frac{K}{S_1(0)}\right) > x\right\}, \\
A_2 &= \left\{y \,\middle|\, K - S_2(0)e^y > 0\right\} = \left\{y \,\middle|\, \log\left(\frac{K}{S_2(0)}\right) > y\right\}, \\
B_1 &= \left\{x \,\middle|\, K - S_1(0)e^x > K - S_2(0)e^y\right\} = \left\{x \,\middle|\, y - \log\left(\frac{S_1(0)}{S_2(0)}\right) > x\right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \left\{ y \,\middle|\, K - S_2(0)e^y > K - S_1(0)e^x \right\} = \left\{ y \,\middle|\, x - \log\left(\tfrac{S_2(0)}{S_1(0)}\right) > y \right\}, \\
\xi_1(y) &= \min\left\{ y - \log\left(\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)}\right), \log\left(\tfrac{K}{S_1(0)}\right) \right\}, \text{ und} \\
\xi_2(x) &= \min\left\{ x - \log\left(\tfrac{S_2(0)}{S_1(0)}\right), \log\left(\tfrac{K}{S_2(0)}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

gilt:

$$
\frac{1}{2\pi\gamma_1\gamma_2} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \max\{(K - b_1e^x)^+, (K - b_2e^y)^+\} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}} \, dxdy
$$

$$
= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{A_1 \cap B_1}(K - b_1e^x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}} dy
$$

$$
+ \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{A_2 \cap B_2}(K - b_2e^y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}} dy \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} dx.
$$

Das erste Integral lässt sich umformen zu

$$
\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{A_1 \cap B_1}(K - b_1e^x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} dx = \int\limits_{-\infty}^{\xi_1(y)} (K - b_1e^x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= K\Phi\left(\tfrac{\xi_1(y)-a_1}{\gamma_1}\right) \quad - \quad b_1 e^{a_1 + \frac{\gamma_1^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\xi_1(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}} e^{-\frac{(x-a_1-\gamma_1^2)^2}{2\gamma_1^2}} dx \\
&= K\Phi\left(\tfrac{\xi_1(y)-a_1}{\gamma_1}\right) \quad - \quad b_1 e^{r\mathfrak{m}} \Phi\left(\tfrac{\xi_1(y)-\gamma_1^2-a_1}{\gamma_1}\right)
\end{aligned}
$$

erhalten wir mit einer enstsprechenden Rechnung für das zweite Integral, sowie den Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
\Omega_1(y) &= K\Phi\left(\tfrac{\xi_1(y)-a_1}{\gamma_1}\right) - b_1 e^{r\mathfrak{m}} \Phi\left(\tfrac{\xi(y)-\gamma_1^2-a_1}{\gamma_1}\right), \text{ und} \\
\Omega_2(x) &= K\Phi\left(\tfrac{\xi_2(x)-a_2}{\gamma_2}\right) - b_2 e^{r\mathfrak{m}} \Phi\left(\tfrac{\xi(x)-\gamma_2^2-a_2}{\gamma_2}\right)
\end{aligned}
$$

für den Anfangswert der europäischen Min-Put-Option den Ausdruck

$$
\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-r\mathfrak{m}} \Omega_1(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}} dy + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-r\mathfrak{m}} \Omega_2(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} dx. \tag{3.5}
$$

Da die Verteilungsfunktion der Normalverteilung eine spezielle Funktion in *MatLab* ist, und Einfachintegrale vektoriell ausgerechnet werden, lassen sich Pfade des abdiskontierten Preisprozesses der europäischen Min-Put-Option mit Hilfe von Ausdruck (3.5) berechnen. Als Absicherungsmenge seien die zwei europäischen Exchange-Optionen $M^{(3)}$ und $M^{(4)}$, sowie die europäische Min-Put-Option $M^{(5)}$ gewählt. Das Programm *lambdaMinPut3* bildet den Optimierungsschritt, welchen wir hier getrennt durchführen, und *American-MinPut3* berechnet anschließend den Wert. Wir nehmen 200 Pfade im ersten Schritt, 500 Pfade im zweiten Schritt und 30 Zeitschritte in beiden Fällen. Die folgende Tabelle 3.4 zeigt die Ergebnisse:

$S_1(0)$	$S_2(0)$	amerik. (Baum)	amerik. (Rogers)	$E[\lvert\eta_{\mathfrak{m}} - \eta_0\rvert]$	λ_3^*	λ_4^*	λ_5^*
100	100	34,3765	34,4196	0,2797	0,00	0,00	1,02
100	120	28,1862	28,2054	0,3148	0,01	0,01	1,03
100	140	24,7558	24,7909	0,3471	0,01	-002	1,02
120	120	20,5081	20,5311	0,1796	0,00	0,00	1,02
120	140	15,3706	15,3794	0,1741	0,00	0,00	1,01
140	120	17,1300	17,1485	0,1483	0,00	-0,01	1,02
140	140	11,1126	11,0935	0,1118	0,00	0,00	1,01

Tabelle 3.4: Parameter $K = 120$; $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; $r = 0,05$; $\mathfrak{m} = 0,5$

Die Rechenzeit im Optimierungsschritt, sowie im Schritt 2 betragen jeweils ca. 1 Minute. Man erkennt eine gute Übereinstimmng, und die λ-Werte zeigen, dass zur Absicherung bereits die europäische Min-Put-Option ausreicht.

3.2.3 Beispiel A3: Die Max-Call-Option

Als drittes Beispiel betrachten wir den amerikanischen Max-Call auf 2 Aktien im Black-Scholes-Modell, d.h. für die Preisprozesse gilt erneut

$$\begin{aligned} S_0(t) &= e^{rt}, \\ S_1(t) &= S_1(0)e^{\sigma_1 W_1(t) + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t}, \\ S_2(t) &= S_2(0)e^{\sigma_2 W_2(t) + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t} \end{aligned}$$

und der Auszahlungsprozess sei definiert durch

$$Z_t = e^{-rt}\big(\max\{S_1(t), S_2(t)\} - K\big)^+,$$

mit Strike-Preis $K > 0$.

Die Absicherungsmenge $\{M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}\}$ besteht aus den abdiskontierten Wertprozessen der 2 europäischen Exchange-Optionen sowie der europäischen Max-Call-Option. Entsprechend zum letzten Abschnitt und mit den selben Bezeichnungen wird der Ausdruck

$$\frac{e^{-r\mathfrak{m}}}{2\pi\gamma_1\gamma_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}(\max\{b_1e^x, b_2e^y\} - K)^+ e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}} dxdy\right) \tag{3.6}$$

in ein Einfachintegral umgeformt. Mit

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y) &= \max\left\{\log\left(\tfrac{b_1}{b_2}\right) + y, \log\left(\tfrac{K}{b_1}\right)\right\},\\
\varphi_2(x) &= \max\left\{\log\left(\tfrac{b_2}{b_1}\right) + x, \log\left(\tfrac{K}{b_2}\right)\right\},\\
\Theta_1(y) &= b_1e^{r\mathfrak{m}}\Phi\left(\tfrac{\varphi_1(y)+a_1+\gamma_1^2}{\gamma_1}\right) - K\Phi\left(\tfrac{\varphi(y)+a_1}{\gamma_1}\right), \text{ und}\\
\Theta_2(x) &= b_2e^{r\mathfrak{m}}\Phi\left(\tfrac{\varphi_2(x)+a_2+\gamma_2^2}{\gamma_2}\right) - K\Phi\left(\tfrac{\varphi_2(x)+a_2}{\gamma_2}\right)
\end{aligned}$$

ergibt sich mit einer Rechnung wie im letzten Abschnitt für den Anfangswert der europäischen Max-Call-Option

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-r\mathfrak{m}}\Theta_1(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}}dy + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-r\mathfrak{m}}\Theta_2(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}}dx.$$

Wir berechnen den Wert der europäischen Max-Call-Option mit dem Programm *EuropeanMaxCallVektor*. Die amerikanische Max-Call-Option wird mit einem Binomialbaum, Programm *BinMaxCall*, mit 300 Zeitschritten berechnet, und mit der Methode von Rogers, Programm *AmericanMaxCall*, wobei 500 Pfade in 30 Zeitschritten konstruiert werden. Das Programm *lambdaMaxCall* bildet den Optimierungsschritt mit 200 Pfaden in 30 Zeitschritten. Tabelle 3.5 zeigt die Ergebnisse:

$S_1(0)$	$S_2(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik. (Rogers)	$E[\|\eta_\mathfrak{m} - \eta_0\|]$	λ_3^*	λ_4^*	λ_5^*
100	100	10,6547	10,6650	10,6547	0,0000	0,00	0,00	0,99
100	120	20,1448	20,1358	20,1447	0,0000	0,00	0,00	0,97
100	140	33,2421	33,2477	33,2422	0,0000	-0,04	0,00	1,03
120	120	26,1054	26,0949	26,1054	0,0000	0,01	0,02	1,00
120	140	37,8751	37,8759	37,8750	0,0000	0,02	0,00	0,99
140	120	36,9516	36,9516	36,9515	0,0000	0,02	0,00	0,99
140	140	46,6696	46,6742	46,6695	0,0000	0,03	0,02	0,97

Tabelle 3.5: Parameter $K = 120$; $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; $r = 0,05$; $\mathfrak{m} = 0,5$

Die Preisgleichheit des amerikanischen und europäischen Max-Calls ist kein Zufall, sondern folgt aus [Irl03], Satz 4.5. In diesem Beispiel wird also lediglich der Dualitätsansatz überprüft, und man erkennt wieder eine gute Übereinstimmung der Werte. Wie im Beipiel der Min-Put-Option spielen die Exchange-Optionen keine Rolle.

3.2.4 Beispiel A4: Put auf einen Aktienindex

Mit den gleichen Preisprozessen $\{S_0(t), S_1(t), S_2(t)\}$ wie in den letzten beiden Beispielen sei der Auszahlungsprozess definiert durch

$$Z_t = e^{-rt}\Big(K - \big(a_1S_1(t) + a_2S_2(t)\big)\Big)^+,$$

mit Strike- Preis $K > 0$ und Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Die Absicherungsmenge $\{M^{(1)}\}$ besteht aus dem abdiskontierten Wertprozess der europäischen Put-Option auf den Aktienindex. Wir wählen $a_1 = a_2 = 1$ und benutzen die Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2.2. Um den Ausdruck

$$\frac{e^{-r\mathfrak{m}}}{2\pi\gamma_1\gamma_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}(K-(b_1e^x+b_2e^y))^+e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}}\,dxdy\right) \tag{3.7}$$

umzuformen wird mit $\varsigma(y) := \log\Big(\max(\frac{K-b_2e^y}{b_1}, 0)\Big)^2$ das Integral (mit dem Faktor $1/(2\pi\gamma_1\gamma_2)$) in eine Summe von 3 Integralen umgeformt:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\int\limits_{-\infty}^{\varsigma(y)} K\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}}dx\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}}dy\\
-&\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\int\limits_{-\infty}^{\varsigma(y)} b_1e^x\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}}dx\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}}dy\\
-&\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\int\limits_{-\infty}^{\varsigma(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1^2}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\gamma_1^2}}dx\right]b_2e^y\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}}dy,
\end{aligned}$$

wobei sich jedes Einfachintegral wieder auf die Verteilungsfunktion der Normalverteilung zurückführen lässt. Mit

[2] Dabei gelte $log(0) := -\infty$.

$$\begin{aligned}\Upsilon_1(y) &= K\Phi\left(\tfrac{\varsigma(y)-a_1}{\gamma_1}\right),\\ \Upsilon_2(y) &= e^{r\mathfrak{m}}b_1\Phi\left(\tfrac{\varsigma(y)-a_1-\gamma_1}{\gamma_1}\right), \text{ und}\\ \Upsilon_3(y) &= \Phi\left(\tfrac{\varsigma(y)-a_1}{\gamma_1}\right)b_2e^y\end{aligned}$$

ergibt sich für den Ausdruck (3.7)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-r\mathfrak{m}}\left[\Upsilon_1(y)-\Upsilon_2(y)-\Upsilon_3(y)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2^2}}e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\gamma_2^2}}\,dy.$$

Wir berechnen den Wert der europäischen Put-Option auf den Aktienindex mit dem Programm *EuropeanIndexPutVektor*. Der amerikanische Put auf den Aktienindex wird mit einem Binomialbaum, Programm *BinPutInd*, mit 300 Zeitschritten berechnet, und mit der Methode von Rogers, Programm *AmericanIndexPut*, wobei 300 Pfade in 30 Zeitschritten konstruiert werden. Das Programm *lambdaIndexPut* bildet den Optimierungsschritt mit 200 Pfaden in 30 Zeitschritten. Tabelle 3.6 zeigt die Ergebnisse:

$S_1(0)$	$S_2(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik. (Rogers)	$E[\lvert\eta_{\mathfrak{m}}-\eta_0\rvert]$	λ_1^*
40	40	37,3747	40,0000	40,0000	0,0000	1,04
40	50	28,4442	30,0999	30.1780	0,1162	1,06
50	60	13,7598	14,2970	14,3007	0,1991	1,05
60	60	8,3375	8,6196	8,6474	0,2344	1,02
60	70	5,1982	5,3425	5,3451	0,0980	1,02
70	80	1,5650	1,5976	1,6038	0,0672	1,05
80	80	0,7145	0,7274	0,7280	0,0149	1,03

Tabelle 3.6: Parameter $K = 120$; $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; $r = 0,05$; $\mathfrak{m} = 0,5$

3.3 Multiplikativer Dualitätsansatz

Satz 3.7 (Multiplikative Dualität). *Sei Z ein Auszahlungsprozess mit $Z \geq 0$. Dann gilt*

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] = \inf_{D\in\mathfrak{M}^+} E\left[D_{\mathfrak{m}}\sup_{t\in\mathcal{T}}\frac{Z_t}{D_t}\right] \tag{3.8}$$

Ist $Z > 0$, so wird das Infimum erreicht durch jedes $D \in \mathfrak{M}^+$, welches Z dominiert.

Beweis. 1) Sei zunächst $Z > 0$. „$\leq$“ Für beliebiges $D \in \mathfrak{M}^+$ und $\tau \in \mathcal{S}$ gilt:

„$\geq$“ Nach Satz 3.2 existiert ein $D \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert. Wegen $Z > 0$ gilt $D \in \mathfrak{M}^+$. Nach Satz 3.4, (ii) und der Eigenschaft (ii) eines dominierenden Martingals erhält man

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] = D_0 = E[D_\mathfrak{m}] = E\left[D_\mathfrak{m} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t}{D_t}\right].$$

Daraus folgt die Aussage für $Z > 0$.
2) Sei nun $Z \geq 0$. „$\leq$“ Siehe Schritt 1.
„$\geq$“ Sei $\epsilon > 0$ und C ein Martingal, welches Z dominiert. Setze $D^\epsilon := C + \epsilon$. Dann dominiert $D^\epsilon \in \mathfrak{M}^+$ den Auszahlungsprozess $Z + \epsilon$. Schritt 1, angewandt auf $Z + \epsilon$, ergibt:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] + \epsilon = E\left[D^\epsilon_\mathfrak{m} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t + \epsilon}{D^\epsilon_t}\right] \geq E\left[D^\epsilon_\mathfrak{m} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t}{D^\epsilon_t}\right] \geq \inf_{D \in \mathfrak{M}^+} E\left[D_\mathfrak{m} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t}{D_t}\right].$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt „$\geq$“.

□

Rogers Methode kann entsprechend auf den multiplikativen Dualitätsansatz übertragen werden, obwohl Roger selbst in [Rog02] nur die additive Methode anwendet und Jamshidian in [Jam07] keine Anwendungen angibt. Der multiplikative Ansatz scheint auch weniger anwendungsfreundlich zu sein. Der erste Schritt wird entsprechend zum Schritt 1 in Abschnitt 3.2 unter der Nebenbedigung $\sum_{i=1}^d \lambda_i D^{(i)} > 0$ ein $(\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ gesucht, sodass der Ausdruck

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i D^{(i)}_\mathfrak{m}\right) \sup_{0 \leq t \leq \mathfrak{m}} \frac{Z_t}{\sum_{i=1}^d \lambda_i D^{(i)}_t}\right]$$

minimal wird, und im zweiten Schritt wird dieser Wert für das optimale $(\lambda_1^*, ..., \lambda_d^*)$ berechnet. Der Optimierungsschritt wird aber deutlich aufwändiger, denn die λ_i tauchen nun auch im Nenner auf, und es muss die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^d \lambda_i D^{(i)} > 0$ beachtet werden. In den Beispielen M1 und M2 werden sich keine sinnvollen Werte beim Optimierungsschritt ergeben.
Nun wird versucht, die Absicherung auf den multiplikativen Fall zu übertragen. Dazu sei angenommen, dass das Martingal D^* der abdiskontierte Wertprozess einer selbsfinanzierenden Handelsstrategie ist. Sei

$$\eta = \sup_{0\le t\le \mathfrak{m}} \frac{Z_t}{D_t^*},$$

$$\eta_t = E[D_m^* \eta | \mathcal{A}_t].$$

Daraus folgt

$$Z_t \le \eta D_t^*,$$

und wenn auf beiden Seiten der bedingte Erwartungswert bzgl. $\mathcal{A}_t$ genommen wird, erhält man

$$Z_t \le E\left[\eta - \frac{\eta_0}{D_0}\middle| \mathcal{A}_t\right] D_t^* + \frac{\eta_0}{D_0} D_t^*.$$

Investiert man η_0/D_0 Anteile in die Handelsstrategie zum abdiskontierten Wertprozess D^*, so ist der amerikanische Claim abgesichert solange $E[\eta - \eta_0/D_0|\mathcal{A}_t]D_t^* \le 0$. Da dies im Allgemeinen nicht erfüllt ist, wird wie im additiven Fall der Erwartungswert der Abweichung nach oben, $E\big[(E[\eta - \eta_0/D_0|\mathcal{A}_t]D_t^*)^+\big] \le E\big[|(\eta - \frac{\eta_0}{D_0})D_t|\big]$, gebildet, um ein Maß für die Abweichung zu erhalten. Dieser Wert ist aber abhängig von $t \in [0, \mathfrak{m}]$, weswegen als Maß folgender Wert gewählt werden kann:

$$\int_{[0,\mathfrak{m}]} E\left[\left|(\eta - \frac{\eta_0}{D_0})D_t\right|\right] dt. \tag{3.9}$$

Im optimalen Fall ist diese Null, da η wegen Satz 3.4 konstant Eins ist und somit:

$$\eta - \frac{\eta_0}{D_0} = 1 - \frac{E[D_m]}{D_0} = 0.$$

Für das nächste Beispiel benutzen wir folgende Aussage, die sich aus [Pau01], Lemma 2.2 ergibt: Gegeben seien d unabhängige Wienerprozesse $W_1(t), ..., W_d(t)$, und $r, \sigma_1, ..., \sigma_d \in \mathbb{R}^+$. Die Preisprozesse $\{S_0(t), ..., S_d(t)\}$ im Finanzmarktmodell seien

$$\begin{aligned} S_0(t) &= e^{rt}, \\ S_1(t) &= e^{\sigma_1 W_1(t) + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} t\right)}, \\ &\vdots \\ S_d(t) &= e^{\sigma_d W_d(t) + \left(r - \frac{\sigma_d^2}{2} t\right)}. \end{aligned}$$

Sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ eine Lösung der Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\alpha_i + 1)\sigma_i^2 - r \sum_{i=1}^{d} \alpha_i - r,$$

dann beschreibt

$$M_\alpha(t) = \frac{S_1(t)^{-\alpha_1} \cdots S_d(t)^{-\alpha_d}}{S_0(t)} \tag{3.10}$$

ein positives Martingal.

3.3.1 Beispiel M1: Die Put-Option

Wir betrachten nun, wie in Abschnitt 3.2.1 die amerikanische Put-Option auf eine Aktie im Black-Scholes-Modell. Das heißt, es existieren 2 Finanzgüter, das Geldmarktkonto $S_0(t)$ und die Aktie mit Preisprozess

$$S_1(t) = S_1(0)e^{\sigma W(t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}.$$

mit Anfangspreis $S_1(0)$ und Volatilität σ. Der Auszahlungsprozess ist

$$Z_t = e^{-rt}\big(K - S_1(t)\big)^+,$$

mit Strike- Preis $K > 0$. Die Absicherungsmenge besteht nur aus den Martingalen, die sich aus Gleichung (3.10) ergeben. Dazu müssen die Nullstellen des Polynoms

$$p(\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\sigma^2 - r\alpha - r = (\alpha + 1)\left(\alpha - \tfrac{2r}{\sigma^2}\right)$$

bestimmt werden. Die Martingale sind somit

$$M_{-1}(t) = e^{-rt}S_1(t)$$
$$M_{\frac{2r}{\sigma^2}}(t) = e^{-rt}S_1(t)^{-\frac{2r}{\sigma^2}},$$

wobei M_{-1} der abdiskontierte Preisprozess der Aktie ist, welcher nicht in die Absicherungsmenge aufgenommen wird. Somit besteht die Absicherungsmenge nur aus einem Martingal,

$$M_{\frac{2r}{\sigma^2}} = S_1(0)^{\frac{-2r}{\sigma^2}} e^{\frac{-2r}{\sigma^2}(\sigma W(t) + rt)}.$$

Auf den Optimierungsschritt wird verzichtet, weil sich keine sinnvollen Werte ergeben, und es wird einfach $\lambda = 1$ gewählt. Im Programm *AmericanPutMulti* wird der Wert ausgerechnet, mit 20000 Pfaden in 80 Zeitschritten. Tabelle 3.7 zeigt für den Strike-Preis $K = 120$, Volatilität $\sigma = 0,3$, Zinsrate $r = 0,05$, Laufzeit $\mathfrak{m} = 0,5$ und verschiedene Anfagspreise S_0 der Aktie die Ergebnisse:

$S_1(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik.(mult.) (Rogers)
90	28,1614	30,0100	35,4533
100	20,0813	21,0873	28,2605
110	13,5126	14,0464	21,2390
120	8,5990	8,8715	14,0071
130	5,1997	5,3362	8,4303
140	3,0055	3,0747	4,7989
150	1,6709	1,7043	2,8348

Tabelle 3.7: Parameter $K = 120$; $\sigma = 0,3$; $r = 0,05$ und $\mathfrak{m} = 0,5$

Hier weichen die Werte des Dualitätsansatzes teilweise um über 30% nach oben ab. Auch die Wahl anderer Werte für λ ergibt keine besseren Ergebnisse, woraus sich schließen lässt, dass die Absicherungsmenge keine bessere untere Schranke liefert. Zum Vergleich wird, entsprechend zum additiven Dualitätsansatz, der Fall betrachtet, in dem die Absicherungsmenge nur aus dem abdiskontierten Wertprozess der europäischen Put-Option besteht. Auf den Optimierungsschritt wird wieder verzichtet. Im Programm *AmericanPutMulti2* werden die Werte mit 20000 Pfaden in 80 Zeitschritten berechnet (mit $\lambda = 1$). Zum Verlgeich werden in der folgenden Tabelle 3.8 die additiven Werte hinzugefügt:

$S_1(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik.(add.) (Rogers)	amerik.(mult.) (Rogers)
90	28,1614	30,0100	30,0729	30,0976
100	20,0813	21,0873	21,1492	21,1112
110	13,5126	14,0464	14,0822	14,1737
120	8,5990	8,8715	8,8892	8,9655
130	5,1997	5,3362	5,3527	5,3748
140	3,0055	3,0747	3,0754	3,1812
150	1,6709	1,7043	1,7040	1,6941

Tabelle 3.8: Parameter $K = 120$; $\sigma = 0,3$; $r = 0,05$ und $\mathfrak{m} = 0,5$

Man erkennt eine deutliche Verbesserung. Die multiplikativen Werte lassen sich also mit den additiven Werten vergleichen, wobei der letzte Wert zeigt, dass eine Abweichung nach unten auch möglich ist. Es lässt sich somit vermuten, dass die multiplikativen Werte stärker schwanken.

Wir versuchen nocheinmal, das zuerst benutzte Martingal $M_{\frac{2r}{\sigma^2}}$, und überprüfen, ob eine längere Laufzeit ($\mathfrak{m} = 6$) bessere Ergebnisse liefert. Auf den Optimierungsschritt wird verzichtet, weil sich keine sinnvollen Werte ergeben, und es wird einfach $\lambda = 1$ gewählt. Es wird wieder das Programm *AmericanPut-Multi* benutzt, mit 10000 Pfaden in 100 Zeitschritten. Tabelle 3.7 zeigt für den Strike-Preis $K = 120$, Volatilität $\sigma = 0,3$, Zinsrate $r = 0,05$, Laufzeit $\mathfrak{m} = 6$ und verschiedene Anfagspreise S_0 der Aktie die Ergebnisse, außerdem die mit *binPut* einem Binomialbaum berechneten Vergleichswerte (in 1000 Zeitschritten):

$S_1(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik.(mult.) (Rogers)
90	25,0973	34,7573	37,11780
100	21,8580	29,4310	33,6526
110	19,0922	25,1212	29,6275
120	16,7251	21,5845	25,7152
130	14,6936	18,6597	22,1628
140	12,9453	16,2105	19,5438
150	11,4362	14,1469	17,2901

Tabelle 3.9: Parameter $K = 120$; $\sigma = 0,3$; $r = 0,05$ und $\mathfrak{m} = 6$

Die Vermutung, dass bei erhöhter Laufzeit das Martingal $M_{\frac{2r}{\sigma^2}}$ besser geeignet ist, bestätigt sich nur teilweise. Zwar sind die relativen Abweichungen geringer als im Fall $\mathfrak{m} = 0,5$, doch die Werte weisen trotzdem noch eine zu hohe Abweichung auf. Bei höherer Laufzeit wird dieser Abweichung vermutlich noch kleiner, doch für das nächste Beispiel wird dieser Ansatz nicht weiter verfolgt.

3.3.2 Beispiel M2: Put auf einen Aktienindex

Wir kommen nochmal auf die amerikanische Put-Option auf einen Aktienindex im Black-Scholes-Modell zurück. Für die Preisprozesse gilt also

$$\begin{aligned} S_0(t) &= e^{rt}, \\ S_1(t) &= S_1(0)e^{\sigma_1 W_1(t)+(r-\sigma_1^2/2)t}, \\ S_2(t) &= S_2(0)e^{\sigma_2 W_2(t)+(r-\sigma_2^2/2)t}, \end{aligned}$$

mit Anfagspreisen $S_1(0)$, $S_2(0)$, Zinsrate r und Volatilitäten σ_1 und σ_2. Der Auszahlungsprozess sei

$$Z_t = e^{-rt}\Big(K - \big(a_1 S_1(t) + a_2 S_2(t)\big)\Big)^+,$$

mit Strike-Preis K und Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Wir wählen $a_1 = a_2 = 1$. Die Absicherungsmenge besteht nur aus dem abdiskontierten Wert der europäischen Put-Option auf den Aktienindex. Auf den Optimierungsschritt wird wieder verzichtet, weil sich keine sinnvollen Werte ergeben. Im Programm *AmericanIndexPutMulti* wird der Wert ausgerechnet, mit 300 Pfaden in 30 Zeitschritten. Tabelle 3.10 zeigt für den Strike Preis K = 120, Volatilität $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; Zinsrate $r = 0,05$; Laufzeit $\mathfrak{m} = 0,5$ und verschiedene Anfagspreise $S_1(0)$ und $S_2(0)$ die Ergebnisse:

$S_1(0)$	$S_2(0)$	europ.	amerik. (Baum)	amerik.(mult.) (Rogers)	amerik.(mult.) (Rogers)
40	40	37,3747	40,0000	40,8780	40,0000
40	50	28,4442	30,0999	29,5197	30.1780
50	60	13,7598	14,2970	13,1026	14,3007
60	60	8,3375	8,6196	8,6410	8,6474
60	70	5,1982	5,3425	5,1772	5,3451
70	80	1,5650	1,5976	1,4319	1,6038
80	80	0,7145	0,7274	0,8812	0,7280

Tabelle 3.10: Parameter $K = 120$; $\sigma_1 = 0,3$; $\sigma_2 = 0,5$; $r = 0,05$; $\mathfrak{m} = 0,5$

Hier sind wieder Abweichungen nach unten (und auch nach oben) erkennbar. Bei vergleichbarer Rechenzeit scheint der multiplikative Dualitätsansatz wesentlich unzuverlässiger zu sein als der additive Ansatz.

3.4 Vergleich der Dualitätsansätze

In diesem Abschnitt wird zunächst die Varianz des additiven mit dem multiplikativen Dualitätsansatz verglichen.

Satz 3.8. *Sei $Z \geq 0$ ein Auszahlungsprozess mit positiver Snellscher Einhüllenden V. Seien $V = V^m + V^p$ und $V = MA$ die additive bzw. multiplikative Doob-Meyer-Zerlegung und $M \in \mathfrak{M}^+$. Dann gilt*

$$V_0 = V_0^m + \sup_{t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t^m) = M_0 \sup_{t \in \mathcal{T}} \left(\frac{Z_t}{M_t} \right). \tag{3.11}$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.4 und Satz 3.2. □

Ein Vergleich mit den Ausrücken aus Gleichung (3.1) bzw. (3.8), d.h.

1. $\min_{C \in \mathfrak{M}} \left(C_0 + E\left[\sup_{t \in \mathcal{T}} (Z_t - C_t) \right] \right)$, und

2. $\inf_{D \in \mathfrak{M}^+} E\left[D_{\mathfrak{m}} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t}{D_t} \right]$

zeigt, dass der mittlere Teil von Gleichung (3.11) gerade der Schätzung aus dem additiven Dualitätsansatz entspricht, wenn für das Martingal C das Martingal V^m eingesetzt wird. Das heisst, es wird der Erwartungswert einer konstanten Zufallsvariable gebildet, und die Varianz ist diesem Fall Null. Der rechte Teil von Gleichung (3.11) dagegen entspricht nicht der Schätzung aus dem multiplikativen Dualitätsansatz. Denn selbst im optimalen Fall, d.h. wenn im multiplikativen Ansatz das optimale Martingal M gewählt wird, wird dort nicht der Erwartungswert der konstanten Zufallsvariable $M_0 \sup_{t \in \mathcal{T}} (Z_t/M_t)$ genommen. Das heisst, beim multiplikativen Dualitätsansatz wird sogar im optimalen Fall eine positive Varianz erwartet. Wir untersuchen dies am Beispiel einer amerikanischen Put-Option auf eine Aktie im Black- Scholes- Modell. Dazu benutzen wir den abdiskontierten Wertprozess der europäischen Put-Option für das Martingal C in Punkt 1 bzw. D in Punkt 2, und berechnen (mit der Monte-Carlo-Methode) Erwartungswert und Varianz mit den Programmen *AddVarianz* und *MultVarianz*. Die Volatilität sei $\sigma = 0{,}3$, der Strikepreis $K = 100$, die Zinsrate $r = 0.04$ und die Laufzeit $\mathfrak{m} = 0{,}5$. Bei jeder Berechnung werden 5000 Pfade in 50 Zeitschritten generiert.

S_0	Erwartungswert (additiv)	Varianz (additiv)	Erwartungswert (multiplikativ)	Varianz (multiplikativ)
80	20,7413	0,1243	20,9351	212,5931
90	13,0557	0,1773	12,6686	165,3106
100	7,6281	0,0953	7,8015	114,7952
110	4,1449	0,0363	4,2267	66,5310
120	2,1253	0,0161	2,2585	36,0566

Tabelle 3.11: Parameter $K = 100$; $\sigma = 0,3$; $r = 0,04$ und $\mathfrak{m} = 0,5$

Tabelle 3.11 zeigt: Die Varianz beim additiven Dualitätsansatz ist fast Null, während die Varianz beim multiplikativen Dualitätsansatz sehr groß ist. Trotzdem liegen die Erwartungswerte in beiden Fällen dicht beieinander. Insgesamt lassen sich folgende Punkte als klare Vorteile des additiven Ansatzes nennen:

(i) Die bereits erwähnte Varianz. Dies hat zur Folge, dass die Werte im multiplikativen Fall deutlich unzuverlässiger sind, wie die Beispiele M1 und M2 gezeigt haben. Beim multiplikativen Ansatz müssen also mehr Pfade generiert werden, was eine höhere Rechenzeit zur Folge hat.

(ii) Addition statt Division. Die Berechnung eines Produktes bzw. Quotienten ist rechenintensiver als die Berechnung einer Summe oder Differenz. Die nicht- lineare Form des Ausdrucks im multiplikativen Ansatz könnte der Grund sein, warum der Optimierungsschritt keine sinnvollen Werte geliefert hat.

(iii) Der multiplikative Ansatz funktioniert nur bei $Z \geq 0$.

(iv) Der multiplikative Ansatz bildet nur ein Infimum. Damit das Infimum erreicht wird, muss zusätzlich $Z > 0$ gefordert werden.

(v) Der multiplikative Ansatz bildet das Minimum bzw Infimum nur über positive Martingale. Dies erschwert den Optimierungsschritt zusätzlich.

Für die Berechnung des Wertes ist der additive Ansatz somit eindeutig besser. Im Kapiel 5 wird dagegen unter Betrachtung eines Numerairewechsels ein Vorteil des multiplikativen Ansatzes gezeigt.

Kapitel 4

Optimale Stoppzeiten

4.1 Einige Eigenschaften

Laut Abschnitt 1.3.1 heißt τ^* optimale Stoppzeit zum Auszahlungsprozess Z, falls

$$E[Z_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau].$$

Satz 4.1. *Sei Z eine Auszahlungsprozess. Dann sind äquivalent:*

(i) τ^* ist eine optimale Stoppzeit,

(ii) $Z_{\tau^*} = C_{\tau^*}$ für alle $C \in \mathfrak{M}$, die Z dominieren.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Dominiert $C \in \mathfrak{M}$ den Auszahlungsprozess Z, so gilt wegen dem Optional Sampling Theorem, sowie der Eigenschaft (ii) des dominierende Martingals (siehe Definition 3.1) und der Voraussetzung:

$$E[C_{\tau^*}] = C_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] = E[Z_{\tau^*}]. \tag{4.1}$$

Wegen $Z \leq C$ folgt daraus $C_{\tau^*} = Z_{\tau^*}$.
„$\Leftarrow$“ Es gilt nach Voraussetzung $E[Z_{\tau^*}] = E[C_{\tau^*}]$ für alle $C \in \mathfrak{M}$, die Z dominieren. Wegen Satz 3.3 existiert mindestens ein dominierendes Martingal, und somit ergibt sich mit $E[C_{\tau^*}] = C_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau]$ die Behauptung. □

Ist $V = V^m + V^p$ die Doob- Meyer Zerlegung der Snellschen Einhüllenden V von Z, so wird Z nach Satz 3.2 von V^m dominert. Also gilt wegen $Z \leq V \leq V^m$ für jede optimale Stoppzeit τ^*

$$V_{\tau^*} = Z_{\tau^*}. \tag{4.2}$$

Satz 4.2. *Ist τ^* eine optimale Stoppzeit zu Z, und $C \in \mathfrak{M}$ ein dominierendes Martingal, so gilt*

1. $C = V$ *auf* $[[0, \tau^*]]$.
2. $C = V^m$ *auf* $[[0, \tau^*]]$.
3. $V^p = 0$ *auf* $[[0, \tau^*]]$.

Beweis. Es ist nur 1. zu zeigen, 2. und 3. sind eine direkte Folgerung. Dazu ist zu zeigen, dass die Prozesse $(C_{t\wedge\tau^*})_{t\in\mathcal{T}}$ und $(V_{t\wedge\tau^*})_{t\in\mathcal{T}}$ ununterscheidbar sind. Wegen Satz 2.11 gilt

$(a) V_{t\wedge\tau^*} \leq C_{t\wedge\tau^*}$ für alle $t \in \mathcal{T}$.

Wegen dem Optional Sampling Theorem ist $(C_{t\wedge\tau^*})_{t\in\mathcal{T}}$ ein Martingal auf $[0, \mathfrak{m}]$ und $(V_{t\wedge\tau^*})_{t\in\mathcal{T}}$ ein Supermartingal auf $[0, \mathfrak{m}]$. Wegen Satz 4.1 und Gleichung (4.2) gilt $C_{\tau^*\wedge\mathfrak{m}} = C_{\tau^*} = Z_{\tau^*} = V_{\tau^*} = V_{\tau^*\wedge\mathfrak{m}}$. Also gilt

$(b) V_{t\wedge\tau^*} \geq E[V_{\tau^*\wedge\mathfrak{m}}|\mathcal{A}_t] = E[C_{\tau^*\wedge\mathfrak{m}}|\mathcal{A}_t] = C_{t\wedge\tau^*}$ für alle $t \in \mathcal{T}$.

(a) und (b) zusammen ergeben schließlich die Aussage 1. □

Wir führen nun die Überlegungen aus Abschnitt 2.5 fort. Erweitert man das Finanzmarktmodell um das derivative Finanzgut zum abdiskontierten Preisprozess

$$S^*_{d+1}(t) := V^m(t),$$

so ist das erweiterte Modell wegen der Martingaleigenschaft von V^m arbitragefrei. Ist $\tau \in \mathcal{S}$ eine optimale Stoppzeit, so besagt Satz 4.2, dass bis τ der abdiskontierte Preis dieses Finanzgutes mit dem abdiskontierten Preis des amerikanischen Claims V übereinstimmt. Sobald $V^p < 0$, ist $V^m > V$, und somit der Preis des $(d+1)$-ten Finanzgutes größer als der Preis des amerikanischen Claims. Die Erweiterung des Modells impliziert also, dass der amerikanische Claim zu einer optimalen Stoppzeit ausgeübt wird. Es sei aber angemerkt, dass es sich beim $(d+1)$-ten Finanzgut nicht einfach um die Option $\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)$ (mit einer optimalen Stoppzeit τ) handelt. Bei der Option $\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)$ wird nach Abschnitt 1.1 zum Zeitpunkt τ das gesamte Vermögen in das Geldmarktkonto investiert, d.h. der abdiskontierte Wertprozess der Option lautet Z_τ für $t > \tau$. Es ist nicht ausgeschlossen, dass der Auszahlungsprozess Z_t mit positiver Wahrscheinlichkeit größer als Z_τ für $t > \tau$ ist. Aber wegen Satz 4.1 stimmen $S^*_{d+1}(t)$ und der abdisknotierte Preisprozess der Option $\left(\tau, \tilde{Z}_\tau\right)$ bis zum Zeitpunkt τ überein. Bei V^m ist zusätzlich sichergestellt, dass auch über jede optimale Stoppzeit hinaus $V^m_t \geq Z_t$ gilt.

Betrachtet man die Doob- Meyer Zerlegungen aus Kapitel 2, Satz 2.13 und 2.15, d.h.

$$V_t = C_t - E_t B_t, \text{ und}$$

$$V_t = A_t M_t,$$

wobei zusätzlich voraussgesetzt sei, dass M und C jeweils abdiskontierte Wertprozesse von selbstfinanzierenden Handelsstrategien sind, so ergeben sich folgende Möglichkeiten für die Erweiterung des Modells um ein $(d+1)$-tes Finanzgut:

$$1) \quad S^*_{d+1}(t) = C_t = V_t + E_t B_t \text{ , oder}$$

$$2) \quad S^*_{d+1}(t) = M_t = \tfrac{1}{A_t} V_t.$$

Punkt 1 ergibt mehrere Möglichkeiten für verschiedene $B \in \mathfrak{M}^+$, und der oben betrachtete Fall mit $S^*_{d+1}(t) = V^m_t$ ist der Speziallfall für $B = 1$. Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass B der abdiskontierte Wertprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H ist (Der Fall $B = 1$ ergibt die Handelsstrategie, die eine Einheit in das Gelmarktkonto $S_0(t)$ investiert und bis zum Ende hält). Falls die Finanzmarktteilnehmer zu jedem Zeitpunkt die Möglichkeit haben einen amerikanischen Claim einzugehen, dann werden durch die Punkte 1 und 2 folgende Strategien beschrieben:

Punkt 1) $\rightarrow$ „Halten des amerikanischen Claims und E_t Anteile des Portfolios H“.

Punkt 2) $\rightarrow$ „Halten von $\frac{1}{A_t}$ Anteilen des amerikanischen Claims“.

Da aber bis zur optimalen Stoppzeit $V_t = M_t = C_t$ gilt, geht es nur um die Frage, was (bei optimaler Ausübung) mit dem zusätzlichen Vermögen geschieht: Investition in ein Portfolio H (bei Punkt 1) oder in weitere Einheiten des amerikanischen Claims (bei Punkt 2). Auch eine Kombination beider Strategien ist möglich.
C_t und M_t werden durch Handelsstrategien H^C und H^M beschrieben die nur von den Basisfinanzgütern $\{S_0(t), ..., S_d(t)\}$ abhängen, d.h. es gilt:

$$M_t = \sum_{i=0}^{d} H^M_i(t) S^*_i(t), \text{ und } C_t = \sum_{i=0}^{d} H^C_i(t) S^*_i(t).$$

Während die Strategien aus Punkt 1) oder 2) für den Käufer des amerikanischen Claims interessant sind, wird der Verkäufer zur Absicherung die Handelsstrategie H^M oder H^C ausführen.
In den nächsten beiden Abschnitten geht es um die Existenz einer optimalen

Stoppzeit und es wird gezeigt, dass in diesem Fall auch die kürzeste optimale Stoppzeit existiert. Unter Zusatzvoraussetzungen existiert dann auch die längste optimale Stoppzeit. Anders als im endlichen Fall, wo durch Satz 2.1 die Existenz einer optimalen Stoppzeit für alle Auszahlungsprozesse bewiesen wurde, gibt es im stetigen Fall Auszahlungsprozesse ohne optimale Stoppzeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.1. *Es sei $\mathfrak{m} = 1$, und $Z_t = t1_{[[0,1[[}$. Dann gilt für die Snellsche Einhüllende offensichtlich $V_t = 1_{[[0,1[[}$ und $V_t^m = 1$. Gäbe es eine optimale Stoppzeit τ^* zu Z, so würde wegen Satz 4.1, da Z von V^m dominiert wird, $Z_{\tau^*} = V_{\tau^*}^m$ gelten. Wegen $Z < 1 = V^m$ ist dies aber unmöglich.*

Dieses (triviale) Beispiel verdeutlicht, welches Problem bei Auszahlungsprozessen in stetiger Zeit auftritt: Um eine möglichst große Auszahlung zu erhalten, muss man so nah wie möglich im Zeitpunkt $t = 1$ stoppen, aber nicht in 1 selbst. Die fehlende linksseitige Stetigkeit im optimalen Zeitpunkt ist also der Grund für das Fehlen einer optimalen Stoppzeit. Satz 4.5 zeigt, dass z.B. die Stetigkeit von Z_t für die Existenz einer optimalen Stoppzeit genügt.

4.2 Kürzeste optimale Stoppzeit

Definition 4.1. *Ein Auszahlungsprozess Z heißt quasi- linksstetig, falls für jede vorhersehbare[1] Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\Delta Z_\tau = 0.$$

Insbesondere gilt für jede Stoppzeit τ mit $\tau_n \nearrow \tau$ für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} Z_{\tau_n} = Z_\tau.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass für quasi- linksstetige Auszahlungsprozesse stets eine optimale Stoppzeit existiert. Für einen beliebigen Auszahlungsprozess Z und ein Martingal $C \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert, sei folgende Folge von Stoppzeiten definiert:

$$\tau_n^{(C)} := \inf\left\{t \in \mathcal{T} | Z_t \geq C_t - \tfrac{1}{n}\right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Satz 4.3. *Mit den obigen Bezeichungen gilt $\tau_n^{(C)} \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und*

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_{\tau_n^{(C)}}] = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau]. \tag{4.3}$$

[1] [Ell82], Definition 5.2

Beweis. Wegen Satz 3.4 ist die Menge $\{t \in \mathcal{T} | Z_t \geq C_t - 1/n\}$ nichtleer. Also gilt $\tau_n^{(C)} < \infty$ und somit $\tau_n^{(C)} \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von $Z - C$ und der Definition von $\tau_n^{(C)}$ gilt $Z_{\tau_n^{(C)}} \geq C_{\tau_n^{(C)}} - 1/n$. Wegen dem Optional Sampling Theorem und der Tatsache, dass Z von C dominiert wird, gilt

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] \geq E\left[Z_{\tau_n^{(C)}}\right] \geq E\left[C_{\tau_n^{(C)}}\right] - \tfrac{1}{n} = C_0 - \tfrac{1}{n} = \sup_{T \in \mathcal{S}} E[Z_T] - \tfrac{1}{n}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Weil $(\tau_n^{(C)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von Stoppzeiten ist, existiert der Grenzwert $\tau^\star := \lim_{n \to \infty} \tau_n^{(C)}$, mit $\tau^\star \in \mathcal{S}$.

Satz 4.4. *Die Stoppzeit $\tau^\star$ ist unabhängig von der Wahl des dominierenden Martingals C.*

Beweis. Es seien $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ zwei Martingale, die Z dominieren, und es sei

$$\tau^{\star 1} \ := \lim_{n \to \infty} \tau_n^1, \ \tau^{\star 2} \ := \lim_{n \to \infty} \tau_n^2,$$

wobei $\tau_n^i := \tau_n^{C^{(i)}}$. Dann gilt

$$\left(C_{\tau_n^1}^{(1)} - C_{\tau_n^1}^{(2)}\right) = \left(C_{\tau_n^1}^{(1)} - Z_{\tau_n^1}\right) + \left(Z_{\tau_n^1} - C_{\tau_n^1}^{(2)}\right) \leq \tfrac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und daraus folgt

$$\left(C_{\tau^{\star 1}-}^{(1)} - C_{\tau^{\star 1}-}^{(2)}\right) \leq 0.$$

Weil $C^{(1)}$ ein Martingal von Klasse(D) ist, ergibt sich daraus

$$C_t^{(1)} \leq C_t^{(2)}$$

auf $[[0, \tau^{\star 1}[[$. Somit gilt $\tau^{\star 2} \geq \tau^{\star 1}$. Ein anaolges Argument ergibt $\tau^{\star 1} \geq \tau^{\star 2}$ und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.5. *Sei Z ein quasi- linksstetiger Auszahlungsprozess, dann ist die Stoppzeit $\tau^\star$ optimal.*

Beweis. Weil Z quasi- linksstetig ist, gilt mit den oben definierten Stoppzeiten $\tau_n^{(C)}$:

$$Z_{\tau_n^{(C)}} \to Z_{\tau^\star} \text{ für } n \to \infty.$$

Da Z von Klasse(D) ist, folgt daraus

$$E[Z_{\tau_n^{(C)}}] \to E[Z_{\tau^\star}] \text{ für } n \to \infty.$$

Die Aussage folgt dann aus Gleichung (4.3). □

Der nächste Satz erweitert die Aussage aus Kapitel 3, Satz 3.1.

Satz 4.6. *Sei Z ein Auszahlungsprozess, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Z besitzt eine optimale Stoppzeit,

(ii) Für jedes Martingal $C \in \mathcal{M}$, welches Z dominiert, ist die Stoppeit $\inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t = C_t\}$ endlich,

(iii) Es existiert ein Martingal $C \in \mathcal{M}$, welches Z dominiert, sodass die Stoppzeit $\tau_* := \inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t = C_t\}$ endlich ist.

Diese Stoppzeit τ_* ist dann optimal und unabhängig von der Wahl von C, und für jede andere optimale Stoppzeit τ^* gilt $\tau_* \leq \tau^*$.

Beweis. „$(ii) \Rightarrow (iii)$“ Klar, weil der Martingalanteil der Snellschen Einhüllenden V den Auszahlungsprozess Z dominiert, und somit mindestens ein Martingal mit dieser Eigenschaft existiert.

„$(iii) \Rightarrow (i)$“ Folgt direkt aus Satz 3.1.

„$(i) \Rightarrow (ii)$“ Existiert eine optimale Stoppzeit τ^* und wird Z von $C \in \mathcal{M}$ dominiert, so folgt aus Satz 4.1 $Z_{\tau^*} = C_{\tau^*}$. Somit ist die Menge $\{t \in T | Z_t = C_t\}$ pfadweise nicht-leer, und es folgt die Aussage (ii).

Wird Z von C definiert und die Stoppzeit $\inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t = C_t\}$ endlich, so ist wegen Satz 3.1 diese Stoppzeit optimal. Ist nun τ^* eine beliebige optimale Stoppzeit, so gilt wegen Satz 4.1 $Z_{\tau^*} = C_{\tau^*}$ für jedes $C \in \mathfrak{M}$, welches Z dominiert. Somit gilt $\inf\{t \in T | Z_t = C_t\} \leq \tau^*$. Da wegen Satz 3.1 für jedes dominierende Martingal $C \in \mathfrak{M}$ $\inf\{t \in T | Z_t = C_t\}$ eine optimale Stoppzeit ist, ist die Definition $\tau_* := \inf\{t \in T | Z_t = C_t\}$ unabhängig von der Wahl von C. □

Wegen Satz 4.2 gilt dann auch

$$\tau_* = \inf\{t \in T | Z_t = V_t\},$$

und τ_* heisst kürzeste optimale Stopzeit.
Mit Satz 4.6 ist auch klar, warum die Handelsstrategie zum Wertprozess V^m für den Verkäufer des amerikanischen Claims zu einem risikolosen Profit führt, falls keine optimale Stoppzeit existiert: Da der Käufer keine optimale Stoppzeit wählen kann, gilt bei jeder Stoppzeit τ mit positiver Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(V_\tau^m > Z_\tau) > 0$, d.h. der Verkäufer macht mit positiver Wahrscheinlichkeit einen risikolosen Profit (siehe Abschnitt 1.3).

Es wird nun eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass die oben definierte Stoppzeit $\tau^\star$ optimal ist, und es wird gezeigt, dass in diesem Fall $\tau_* = \tau^\star$ gilt.

Satz 4.7. *Sei Z ein Auszahlungsprozess, C ein dominierendes Martingal und $\tau_n^{(C)}$, $\tau^\star$ wie oben. Dann gilt*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] = E[Z_{\tau^\star}] - E[1_\Lambda \Delta Z_{\tau^\star}]$$

wobei $\Lambda = \bigcap_{n=1}^\infty \{\tau_n^{(C)} < \tau^\star\}$. Insebsondere ist $\tau^\star$ optimal genau dann wenn $E[1_\Lambda \Delta Z_{\tau^\star}] = 0$ und in diesem Fall gilt $\tau_* = \tau^\star$.

Beweis. Auf Λ gilt $Z_{\tau_n^{(C)}} \to Z_{\tau^\star -}$. Auf Λ^c gilt für fast alle $\omega \in \Omega$: $\tau_n^{(C)}(\omega) = \tau^\star(\omega)$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, also $Z_{\tau_n^{(C)}} \to Z_{\tau^\star}$ auf Λ^c. Somit gilt

$$Z_{\tau_n^{(C)}} \to 1_\Lambda Z_{\tau^\star -} + 1_{\Lambda^c} Z_{\tau^\star} = Z_{\tau^\star} - 1_\Lambda \Delta Z_{\tau^\star},$$

und daraus ergibt sich

$$E[Z_{\tau_n^{(C)}}] \to E[Z_{\tau^\star}] - E[1_\Lambda \Delta Z_{\tau^\star}],$$

da Z von Klasse(D) ist. Nach Satz 4.3 gilt $E[Z_{\tau_n^{(C)}}] \to \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau]$, und somit gilt $\sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathrm{E}[\mathrm{Z}_\tau] = E[Z_{\tau^\star}] - E[1_\Lambda \Delta Z_{\tau^\star}]$. Somit ist $\tau^\star$ optimal genau dann wenn $E[1_\Lambda \Delta Z_{\tau^\star}] = 0$.
Es gilt ganz allgemein $\tau_n^{(C)} \leq \tau^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was aufgrund der Definition

$\tau_n^{(C)} \ = \inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t \geq C_t - 1/n\}$ und
$\tau_* \quad = \inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t = C_t\}$

klar ist. Somit folgt $\tau^\star = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{(C)} \leq \tau_*$. Ist $\tau^\star$ eine optimale Stoppzeit, so stimmt sie somit mit der kürzesten optimalen Stoppzeit, τ_*, überein. □

Es wird nun ein Beispiel eines Auszahlungsprozesses Z mit existierender optimaler Stoppzeit angegeben, sodass $\tau_* = \tau^\star$, aber Z nicht quasi- linksstetig ist.

Beispiel 4.2. *Es sei $\mathfrak{m} = 1$, und R eine $\mathcal{A}_1$- messbare Zufallsvariable mit $E[R|\mathcal{A}_{1-}] = 0$, und $R(\omega) \neq 0$ für fast alle $\omega \in \Omega$. Der Auszahlungsprozess sei gegeben durch*

$$Z_t = t 1_{[[0,1]]} + R 1_{[[1]]}.$$

Dann gilt für die Snellsche Einhüllende V

$$V_t = 1_{[[0,1]]} + R 1_{[[1]]}.$$

Ist $T \in \mathcal{S}$, so gilt wegen [Ell82], Theorem 5.13 (2), $\{T = 1\} \in \mathcal{A}_{T-} \subseteq \mathcal{A}_{1-}$. Somit ergibt sich $E[Z_T] = T + E\left[R1_{\{T=1\}}\right] = T + E\left[E\left[R1_{\{T=1\}}\middle| \mathcal{A}_{1-}\right]\right] = T + E\left[E[R|\mathcal{A}_{1-}]1_{\{T=1\}}\right] = T$. Somit ist $\tau_* = 1$ die (eindeutig bestimmte) optimale Stoppzeit. Da V ein Martingal ist, ergibt sich mit $C = V$

$$\tau_n^{(C)} = \frac{n-1}{n},$$

und daraus folgt $\tau^\star = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{(C)} = 1$.
Z macht aber einen Sprung bei $t = 1$, und ist somit nicht quasi- linksstetig.

Es wird nun ein Beispiel für den Fall angegeben, dass die optimale Stoppzeit τ_* existiert, aber nicht mit $\tau^\star$ übereinstimmt.

Beispiel 4.3. *Es sei $\mathfrak{m} = 2$ und der Auszahlungsprozess*

$$Z_t = t1_{[[0,1[[} + (t-1)1_{[[1,2]]}.$$

Dann gilt für die Snellsche Einhüllende V

$$V_t = 1_{[[0,2]]}.$$

Offensichtlich gilt $\tau_* = 2$, aber

$$\tau_n^{(C)} = \frac{n-1}{n},$$

und daraus folgt $\tau^\star = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{(C)} = 1$. Somit ist $\tau^\star$ keine optimale Stoppzeit.

4.3 Längste optimale Stoppzeit

Ist die optimale Stoppzeit eindeutig, so stimmt sie mit der kürzesten optimalen Stoppzeit $\tau_* = \inf\{t \in \mathcal{T} | Z_t = V_t\}$ überein. Gilt aber z.B. $Z \in \mathfrak{M}$, so sind alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{S}$ optimal. Es stellt sich die Frage, ob es auch eine längste optimale Stoppzeit gibt.

Definition 4.2. *Es sei Z ein Auszahlungsprozess und V die Snellsche Einhüllende von Z. Dann gilt*

$$\tau_\diamond = \mathfrak{m} \wedge \inf\{t \in \mathcal{T} | V_t^p < 0\} = \mathfrak{m} \wedge \inf\{t \in \mathcal{T} | V_t < V_t^p\}.$$

Ist τ^* eine optimale Stoppzeit, so gilt $\tau^* \le \tau_\diamond$, denn Satz 4.2 besagt $V_t^p = 0$ auf $[[0, \tau^*]]$. Ist $\tau_\diamond$ optimal, so ist es somit die längste optimale Stoppzeit.

Satz 4.8. *$\tau_\diamond$ ist optimal. $\Leftrightarrow$ $V_{\tau_\diamond}^p = 0$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Ist $\tau_\diamond$ optimal, so gilt nach Satz 4.2 $V_{\tau_\diamond} = V^m_{\tau_\diamond}$, also $V^p_{\tau_\diamond} = 0$.
„$\Leftarrow$“ Gilt $V^p_{\tau_\diamond} = 0$, so gilt $V^p_t < 0$ auf $]]\tau_\diamond, \mathfrak{m}]]$. Nach Satz 6.4 [2] gilt

$$V^p_\tau = \sup_{\tau \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - V^m_s),$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$, und daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau_\diamond \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - V^m_s) \quad &= 0, \\ \sup_{t \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - V^m_s) \quad &< 0 \text{ auf }]]\tau_\diamond, \mathfrak{m}]]. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $Z_{\tau_\diamond} = V^m_{\tau_\diamond}$, und somit

$$E[Z_{\tau_\diamond}] = E[V^m_{\tau_\diamond}] = V^m_0 = V_0.$$

Also ist $\tau_\diamond$ eine optimale Stoppzeit. $\square$

Falls die längste optimale Stoppzeit exisitiert, so kann auf dem gesamten Intervall $[[\tau_*, \tau_\diamond]]$ der Auszahlungsprozess optimal gestoppt werden. Mit den Sätzen 4.1 und 4.2 lässt sich dann zeigen, dass die Preisprozesse der Optionen $\left(\tau_*, \tilde{Z}_{\tau_*}\right)$ und $\left(\tau_\diamond, \tilde{Z}_{\tau_\diamond}\right)$ auf dem stochastischen Intervall $[[0, \tau_*]]$ übereinstimmen.

[2] siehe Kapitel 6

Kapitel 5

Numerairewechsel

5.1 Das Numeraire

Wir betrachten nun erneut das Finanzmarktmodell aus Abschnitt 1.1,

$$S(t) = \big(S_0(t), ..., S_d(t)\big),$$

mit $S_0(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$, und definieren:

Definition 5.1. *Ein Preisprozess $S_i(t)$ für $i \in \{0, ..., d\}$ heißt Numeraire, falls $S_i(0) = 1$ und $S_i^*(t) = \frac{S_i(t)}{S_0(t)}$ ein positives Martingal von Klasse(D) ist, das heißt $S_i^*(t) \in \mathfrak{M}^+$.*

Betrachtet man das Numeraire $S_0(t)$[1], so erhält man den abdiskontierten Preisprozessvektor

$$S^*(t) = \big(S_0^*(t), ..., S_d^*(t)\big),$$

der nach Voraussetzung aus lokalen Martingalen (bzgl. $\mathbb{P}$) besteht. Es sei nun angenommen, dass $S_1(t)$ ein Numeraire ist. Dann lassen sich die Preisprozesse der übrigen Basisfinanzgüter in Einheiten von $S_1(t)$ darstellen, d.h. mit $S_i^{(1)}(t) = S_i(t)/S_1(t)$ für $i \in \{0, ..., d\}$ erhält man den Preisprozessvektor

$$S^{(1)}(t) = \Big(S_0^{(1)}(t), ..., S_d^{(1)}(t)\Big).$$

$S^{(1)}(t)$ besteht nicht aus lokalen Martingalen (bzgl. $\mathbb{P}$). Deswegen wird ein Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß Q vorgenommen, sodass die $S_i^{(1)}(t)$ lokale Martingale bzgl. Q bilden. Sei $B(t) = S_1^*(t)$. Wegen

$$\tfrac{S_i(t)}{S_1(t)} = \tfrac{S_i^*(t)}{B(t)}$$

[1] $S_0^*(t) = 1$ ist ein positives Martingal von Klasse(D).

für $i \in \{0,...,d\}$ besteht der Vektor $S^{(1)}(t)$ nach Korallar 1.3 aus lokalen Martingalen bzgl. $\mathbb{P}^B$. Somit ist $Q = \mathbb{P}^B$ ein äquivalentes Martingalmaß für das Numeraire $S_1(t)$. $S_0(t)$ und $S_1(t)$ bilden also die Geldeinheiten, die zu verschiedenen Preisprozessen und Wahrscheinlichkeitsmaßen führen:

1) Geldeinheit $S_0(t)$ $\rightarrow$ Preisprozesse $\{S_0^*(t),...,S_d^*(t)\}$, Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.

2) Geldeinheit $S_1(t)$ $\rightarrow$ Preisprozesse $\left\{S_0^{(1)}(t),...,S_d^{(1)}(t)\right\}$, Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^B$.

Zu beachten ist, dass die Preisprozesse in den Punkten 1) und 2) die Anzahl an Geldeinheiten $S_0(t)$ bzw. $S_1(t)$ angeben, die das Finanzgut wert ist. Ob man die Preisprozesse in Einheiten von $S_0(t)$, oder $S_1(t)$ betrachtet, spielt für den absoluten Wert keine Rolle, denn es gilt für $i \in \{0,...,d\}$:

$$S_i^*(t)S_0(t) = S_i(t) = S_i^{(1)}(t)S_1(t). \tag{5.1}$$

Diese Eigenschaft ist nicht nur bei den Preisprozessen der Finanzgüter, sondern auch bei den Wertprozessen von Portfolios erfüllt, das heißt wenn $H = (H_0,...,H_d)$ eine Handelsstrategie mit (bzgl. $S_0(t)$) abdiskontiertem Wertprozess W ist, so gilt wegen

$$\sum_{i=0}^{d} H_i(t)S_i^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{d} H_i(t)\frac{S_i^*(t)}{B_t} = \frac{W_t}{B_t},$$

dass $W_t^{(1)} := W_t/B_t$ den Wertprozess derselben Handelsstrategie bzgl. $S_1(t)$ darstellt. Es gilt also entsprechend zu Gleichung (5.1)

$$W_tS_0(t) = W_t^{(1)}S_1(t)$$

5.2 Numerairewechsel bei der Option

Entsprechend zu den Preisprozessen wird auch die Auszahlung einer Option (τ, C) in Einheiten eines Numeraires betrachtet. In Abschnitt 1.1 wurde dazu das Geldmarktkonto $S_0(t)$ betrachtet, und es ergab sich, dass die abdiskontierten Preisprozesse der Optionen (τ, C) und $\big(\mathfrak{m}, \big(C/S_0(\tau)\big)S_0(\mathfrak{m})\big)$ gleich sind, nämlich

$$S_{d+1}^*(t) := 1_{\{0\leq t\leq\tau\}}E\left[\left.\frac{C}{S_0(\tau)}\right|\mathcal{A}_t\right] + 1_{\{\tau<t\leq\mathfrak{m}\}}\frac{C}{S_0(\tau)}.$$

Betrachtet man das Numeraire $S_1(t)$, so ergeben identische Überlegungen für die Option (τ, C) bzw. $\big(\mathfrak{m}, \big(C/S_1(\tau)\big)S_1(\mathfrak{m})\big)$ folgenden Preisprozess:

$$S_{d+1}^{(1)}(t) := 1_{\{0\le t\le\tau\}} E^B\left[\frac{C}{S_1(\tau)}\middle| \mathcal{A}_t\right] + 1_{\{\tau<t\le\mathfrak{m}\}}\frac{C}{S_1(\tau)}. \tag{5.2}$$

Wir formen nun den ersten Summanden der rechten Seite von Gleichung (5.2) unter Benutzung der Bayes' Regel um. Dazu sei zunächst angemerkt: Für eine beliebige $\mathcal{A}_t$- messbare Zufallsvariable C ist $1_{\{t\le\tau\}}C$ $\mathcal{A}_\tau$- messbar, denn

$$\{1_{\{t\le\tau\}}C \le \alpha\} = \begin{cases} \{t\le\tau\}\cap\{C\le\alpha\} & \text{für } \alpha\le 0 \\ \big(\{t\le\tau\}\cap\{C\le\alpha\}\big)\cup\{t>\tau\} & \text{für } \alpha>0 \end{cases}$$

ist in $\mathcal{A}_\tau$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
1_{\{0\le t\le\tau\}}E^B\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}\middle|\mathcal{A}_t\right] &= 1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}\tfrac{S_1(\mathfrak{m})}{S_0(\mathfrak{m})}\middle|\mathcal{A}_t\right]\tfrac{1}{B(t)} \\
&= E\left[1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}\tfrac{S_1(\mathfrak{m})}{S_0(\mathfrak{m})}\middle|\mathcal{A}_t\right]\middle|\mathcal{A}_\tau\right]\tfrac{1}{B(t)} \\
&= 1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[E\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}\tfrac{S_1(\mathfrak{m})}{S_0(\mathfrak{m})}\middle|\mathcal{A}_t\right]\middle|\mathcal{A}_\tau\right]\tfrac{1}{B(t)} \\
&= 1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[E\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}\tfrac{S_1(\mathfrak{m})}{S_0(\mathfrak{m})}\middle|\mathcal{A}_\tau\right]\middle|\mathcal{A}_t\right]\tfrac{1}{B(t)} \\
&= 1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}E\left[\tfrac{S_1(\mathfrak{m})}{S_0(\mathfrak{m})}\middle|\mathcal{A}_\tau\right]\middle|\mathcal{A}_t\right]\tfrac{1}{B(t)} \\
&= 1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[\tfrac{C}{S_1(\tau)}\tfrac{S_1(\tau)}{S_0(\tau)}\middle|\mathcal{A}_t\right]\tfrac{1}{B(t)} \\
&= 1_{\{0\le t\le\tau\}}E\left[\tfrac{C}{S_0(\tau)}\middle|\mathcal{A}_t\right]\tfrac{1}{B(t)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also $1_{\{t\le\tau\}}S_{d+1}^{(1)}(t) = 1_{\{t\le\tau\}}S_{d+1}^*(t)/B(t)$, bzw. entsprechend zu Gleichung (5.1)

$$S_{d+1}^*(t)S_0(t) = S_{d+1}^{(1)}(t)S_1(t) \tag{5.3}$$

auf dem stochastischen Intervall $[[0,\tau]]$. Das bedeutet, dass es für den Preisprozess der Option (τ, C) bis zum Zeitpunkt τ keine Rolle spielt, welches Numeraire betrachtet wird. Es wurde sogar gezeigt, dass Gleichung (5.3) unabhängig von der Tatsache gilt, dass die Option (τ, C) hedgebar ist. Unter Ausnutzung der Hedgebarkeit ist die Gültigkeit der Gleichung leichter einzusehen: Ist H ein Martingalhedge der Option, so gilt

$$\begin{aligned} 1_{\{t\le\tau\}} S^*_{d+1}(t) &= 1_{\{t\le\tau\}} \sum_{i=0}^{d} H_i(t) S_i^*(t), \text{ und} \\ 1_{\{t\le\tau\}} S^{(1)}_{d+1}(t) &= 1_{\{t\le\tau\}} \sum_{i=0}^{d} H_i(t) S_i^{(1)}(t), \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich wie am Ende des letzen Abschnittes

$$1_{\{t\le\tau\}} S^{(1)}_{d+1} = 1_{\{t\le\tau\}} \tfrac{S^*_{d+1}(t)}{B_t}.$$

Somit ist der Wertprozess einer Option bis zum Auszahlungszeitpunkt numeraire-invariant ist.

5.3 Numerairewechsel beim amerikanischen Claim

Gegeben sei der Prozess $\left(\tilde{Z}_t\right)_{t\in\mathcal{T}}$. In Definition 1.2 wurde unter der Annahme, dass die Auszahlung in Geldeinheiten $S_0(t)$ geschieht, der Auszahlungsprozess Z definiert durch $Z_t = \tilde{Z}_t / S_0(t)$, und vorausgesetzt, dass dieser von Klasse(D) ist. Entsprechend wird unter der Annahme, dass im Numeraire $S_1(t)$ ausgezahlt wird, folgender Auszahlungsprozess definiert:

$$Z_t^{(1)} = \frac{\tilde{Z}_t}{S_1(t)},$$

wobei $Z_t^{(1)}$ von Klasse(D) bzgl. $\mathbb{P}^B$ sein soll. Damit ergibt sich für die Snellsche Einhüllende bzgl. $S_1(t)$:

$$V_t^{(1)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\in\mathcal{S}} E^B \left[Z_\tau^{(1)} \middle| \mathcal{A}_t \right].$$

Die Ausführungen in Kapitel 2 können übernommen werden, sodass $V_t^{(1)}$ ein Supermartingal von Klasse(D) bzgl. $\mathbb{P}^B$ ist. Mit Hilfe der Bayes' Regel wird dieser Ausdruck nun umgeformt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} V_t^{(1)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\in\mathcal{S}} E^B \left[\tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] = \operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\in\mathcal{S}} E \left[B_{\mathfrak{m}} \tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] \tfrac{1}{B(t)} \\ &= \tfrac{1}{B(t)} \operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\in\mathcal{S}} 1_{\{t\le\tau\}} E \left[B_{\mathfrak{m}} \tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] \\ &= \tfrac{1}{B(t)} \operatorname*{ess\,sup}_{t\le\tau\in\mathcal{S}} E \left[1_{\{t\le\tau\}} E \left[B_{\mathfrak{m}} \tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] \middle| \mathcal{A}_\tau \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{B(t)} \operatorname*{ess\,sup}_{t \le \tau \in \mathcal{S}} 1_{\{t \le \tau\}} E\left[E\left[B_{\mathfrak{m}} \middle| \mathcal{A}_\tau \right] \tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&= \tfrac{1}{B(t)} \operatorname*{ess\,sup}_{t \le \tau \in \mathcal{S}} 1_{\{t \le \tau\}} E\left[B_\tau \tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&= \tfrac{1}{B(t)} \operatorname*{ess\,sup}_{t \le \tau \in \mathcal{S}} 1_{\{t \le \tau\}} E\left[\tfrac{S_1(\tau)}{S_0(\tau)} \tfrac{\tilde{Z}_\tau}{S_1(\tau)} \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&= \tfrac{V_t}{B(t)}.
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$V_t^{(1)} = \frac{V_t}{B_t}, \tag{5.4}$$

und wegen $B(t) = \frac{S_1(t)}{S_0(t)}$ gilt entsprechend zu Gleichung (5.1) und (5.3):

$$V_t S_0(t) = V_t^{(1)} S_1(t). \tag{5.5}$$

Der Wert des amerikanischen Claims ist also ebenfalls numeraire- invariant. Es wird nun versucht, die Doob- Meyer Zerlegungen von V,

$$V_t = A_t M_t, \tag{5.6}$$

$$V_t = V_t^m + V_t^p \tag{5.7}$$

auf $V_t^{(1)}$ (bzgl. $\mathbb{P}^B$) zu übertragen.
1) Wegen Satz 1.2 und Gleichung (5.4) ergibt sich für die multiplikative Zerlegung sofort

$$V_t^{(1)} = A_t \frac{M_t}{B_t}, \tag{5.8}$$

und die Ausführungen am Ende von Abschnitt 5.1 zeigen, dass die Handelsstrategie, die zum Wertprozess M (bzgl. $S_0(t)$) führt, auch zum Wertprozess M_t/B_t (bzgl. $S_1(t)$) führt.

2) Die additive Zerlegung lässt sich aber nicht so einfach übertragen, denn für $V_t^{(1)} = V_t^m/B_t + V_t^p/B_t$ wäre zwar der erste Summand ein Martingal von Klasse(D) (bzgl. $\mathbb{P}^B$), aber der zweite Summand nicht unbedingt previsibel und nicht monoton fallend, außer B ist konstant, was aber augeschlossen sei, weil dann $S_1(t)$ ein Vielfaches von $S_0(t)$ wäre. Stattdessen muss die Zerlegung aus Satz 2.13 gewählt werden, und es ergibt sich:

$$V_t^{(1)} = \frac{C_t}{B_t} - E_t. \tag{5.9}$$

Da C_t und E_t von B_t abhängen, ergeben sich 2 verschiedene (additive) Zerlegungen. In Abschnitt 4.1 wurde bereits erwähnt, dass es mehrere additive Zerlegungen gibt. Dort lautete die Zerlegung (5.9)

$$V_t = C_t - E_t B_t. \tag{5.10}$$

Vergleicht man die beiden additiven Doob- Meyer Zerlegungen, d.h. Gleichung (5.7) und (5.9) so gilt nicht $V_t^m S_0(t) = \big(C_t/B_t\big)S_1(t) = C_t S_0(t)$, bzw. $V_t^m = C_t$, das heißt den Martingalanteilen liegen verschiedene Handelsstrategien zugrunde.
Im Gegensatz zur multiplikativen Zerlegung ist die additive Zerlegung also nicht numeraire- invariant. Es sei aber angemerkt, dass die gewöhnliche additve Doob- Meyer Zerlegung von V auch aus einer Zerlegung von $V^{(1)}$ folgt: $\beta = 1/B$ ist ein Martingal von Klasse(D) bzgl. $\mathbb{P}^B$, und Satz 2.13, angewandt auf das Supermartingal $V^{(1)}$ bzgl. $\mathbb{P}^B$, ergibt die Zerlegung:

$$V_t^{(1)} = C_t^{(1)} - A_t^{(1)}\beta_t.$$

Multiplikation mit B_t ergibt die Doob- Meyer Zerlegung von V und man wegen Eindeutigkeit gilt $C_t^{(1)} = V_t^m/B_t$, sowie $A_t^{(1)} = V_t^p$.

5.4 Numerairewechsel beim Dualitätsansatz

Betrachten wir nochmal die Dualitätsansätze, Satz 3.6 und 3.7, und sei $Z \geq 0$ vorausgesetzt:

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] = \inf_{D\in\mathfrak{M}^+} E\left[D_\mathfrak{m} \sup_{t\in\mathcal{T}} \tfrac{Z_t}{D_t}\right], \text{ und}$$

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E[Z_\tau] = \min_{C\in\mathfrak{M}} \left(C_0 + E\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t - C_t)\right]\right),$$

so ergibt eine entsprechende Betrachtung für das Numeraire $S_1(t)$:

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E^B\left[Z_\tau^{(1)}\right] = \inf_{D\in\mathfrak{M}^+} E^B\left[\tfrac{D_\mathfrak{m}}{B(\mathfrak{m})} \sup_{t\in\mathcal{T}} \tfrac{Z_t^{(1)}}{D_t/B(t)}\right], \text{ und}$$

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E^B\left[Z_\tau^{(1)}\right] = \min_{C\in\mathfrak{M}} \left(C_0 + E^B\left[\sup_{t\in\mathcal{T}}(Z_t^{(1)} - \tfrac{C_t}{B(t)}\right]\right).$$

Wegen den Ausführungen im letzten Abschnitt gilt wegen $B(0) = 1$

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[Z_\tau] = V_0 = V_0^{(1)} = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E^B \left[Z_\tau^{(1)} \right].$$

Beim multiplikativen Dualitätsansatz ergibt sich wegen $Z^{(1)} B_t = Z_t$ und der Bayes Regel diese Aussage direkt:

$$\inf_{D \in \mathfrak{M}^+} E^B \left[\frac{D_{\mathfrak{m}}}{B(\mathfrak{m})} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t^{(1)}}{D_t / B_t} \right] = \inf_{D \in \mathfrak{M}^+} E \left[D_{\mathfrak{m}} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{Z_t}{D_t} \right],$$

Dagegen ist beim additiven Dualitätsansatz

$$\min_{C \in \mathfrak{M}} \left(C_0 + E \left[\sup_{t \in \mathcal{T}} (Z_t - C_t) \right] \right) = \min_{C \in \mathfrak{M}} \left(C_0 + E^B \left[\sup_{t \in \mathcal{T}} (Z_t^{(1)} - \frac{C_t}{B(t)} \right] \right)$$

nicht ohne weiteres erkennbar.

S_1, bzw. S_1^* kann in diesem Kapitel durch den Wertprozess eines Portfolios $W_t = \sum_{i=0}^d H_i(t) S_i(t)$, bzw. $B_t = \sum_{i=0}^d H_i(t) S_i^*(t)$ für den abdiskontierten Wert, ersetzt werden. Unter der Voraussetzung $B_0 = 1$ und $B \in \mathfrak{M}^+$ gelten dann alle Ausführungen entsprechend.

Kapitel 6

Superlösungen

6.1 Dominierende Martingale in τ

Entsprechend zur Definition 3.1 definieren wir:

Definition 6.1. *Sei $\tau \in \mathcal{S}$. Ein Martingal $C \in \mathfrak{M}$ dominiert einen Auszahlungsprozess Z in τ, falls*

(i) $C_\tau = V_\tau$

(ii) $C \geq Z$ *auf* $[[\tau, \mathfrak{m}]]$.

Lemma 6.1. *Dominiert $C \in \mathfrak{M}$ den Auszahlungsprozess Z in τ, so gilt:*

$$C \geq V \text{ auf } [[\tau, \mathfrak{m}]],$$

wobei V die Snellsche Einhüllende von Z ist.

Beweis. Wegen $C \geq Z$ auf $[[\tau, \mathfrak{m}]]$ gilt für alle $\tau_2 \in \mathcal{S}$ mit $\tau_2 \geq \tau$:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau_2 \leq \tau' \in \mathcal{S}} E[C_{\tau'} | \mathcal{A}_{\tau_2}] \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau_2 \leq \tau' \in \mathcal{S}} E[Z_{\tau'} | \mathcal{A}_{\tau_2}].$$

Nach dem Optional Sampling Theorem ist die linke Seite C_{τ_2}, nach Satz 2.9 die rechte Seite V_{τ_2}. Das heisst es gilt

$$C_\tau \geq V_{\tau_2}$$

für alle $\tau_2 \geq \tau$, und somit $C \geq V$ auf dem stochastischen Intervall $[[\tau, m]]$. □

Entsprechend zu Satz 3.4 existiert eine pfadweise Charakterisierung:

Satz 6.2. *Sei $C \in \mathfrak{M}$ und $\tau \in \mathcal{S}$. Dann gilt:*

$$C \text{ dominiert } Z \text{ in } \tau \;\Leftrightarrow\; \sup_{\tau \leq t \in \mathcal{T}} (Z_t - C_t) = 0$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Wegen $C_\tau = E[C_T|\mathcal{A}_\tau]$ für $\tau \leq T \in \mathcal{S}$ gilt

$$0 = V_\tau - C_\tau = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \leq T \in \mathcal{S}} E[Z_T - C_T|\mathcal{A}_\tau] \leq E\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \leq t \in \mathcal{T}} (Z_t - C_t) \middle| \mathcal{A}_\tau\right].$$

Da $Z \leq C$ auf $[[\tau, \mathfrak{m}]]$, impliziert dies ${}_{\tau \leq t \in \mathcal{T}}(Z_t - C_t) = 0$.
„$\Leftarrow$“ Wegen der Voraussetzung gilt $Z \leq C$ auf $[[\tau, \mathfrak{m}]]$, also $E[Z_T|\mathcal{A}_\tau] \leq E[C_T|\mathcal{A}_\tau] = C_\tau$. Somit gilt $\operatorname{ess\,sup}_{T \geq \tau} E[Z_T|\mathcal{A}_\tau] \leq C_\tau$. Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, zeigen wir $E[Z_T|\mathcal{A}_\tau] \geq C_\tau - \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$. Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen der Voraussetzung ist die Menge $\{\tau \leq t \in \mathcal{T} | Z_t - C_t \geq -\epsilon\}$ nichtleer, und somit die Stoppzeit $T := \inf\{\tau \leq t \in \mathcal{T} | Z_t - C_t \geq -\epsilon\}$ endlich. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit gilt $Z_T - C_T \geq -\epsilon$. Daraus folgt

$$E[Z_T|\mathcal{A}_\tau] \geq E[C_T - \epsilon|\mathcal{A}_\tau] = C_\tau - \epsilon.$$

Also gilt $\operatorname{ess\,sup}_{T \geq \tau} E[Z_T|\mathcal{A}_\tau] = C_\tau$, und aus Lemma 2.9 folgt die Behauptung. □

Lemma 6.3. *Sei Z ein Auszahlungsprozess mit Snellscher Einhüllenden V und $\tau \in \mathcal{S}$. Dann wird Z in τ dominiert von*

$$C_t := V_t^m + E[V_\tau^p|\mathcal{A}_t].$$

Beweis. $C \in \mathcal{M}$ folgt aus der Definition von C. Setze $M_t := E[V_\tau^p|\mathcal{A}_t]$. Wegen $M_\tau = V_\tau^p$ gilt $C_\tau = V_\tau^m + V_\tau^p = V_\tau$. Nun ist $1_{\{t \geq \tau\}} V_\tau^p \mathcal{A}_t$- messbar für alle $t \in \mathcal{T}$, und somit $1_{\{t \geq \tau\}} M_\tau = E[1_{\{t \geq \tau\}} V_\tau^p|\mathcal{A}_t] = 1_{\{t \geq \tau\}} V_\tau^p$. Also gilt $M_t = V_\tau^p$ auf $\{t \geq \tau\}$, und somit

$$C_t = V_t^m + V_\tau^p \geq V_t \geq Z_t$$

auf $\{t \geq \tau\}$.

□

Satz 6.4. *Sei V die Snellsche Einhüllende des Auszahlungsprozesses Z und $\tau \in \mathcal{S}$ eine Stoppzeit. Dann gilt*

$$V_\tau^p = \sup_{\tau \leq t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t^m). \tag{6.1}$$

Insbesondere, da V^p monoton fallend ist, gilt $\sup_{\tau \leq t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t) = 0$.

Beweis. Wegen Lemma 6.3 wird Z in τ dominiert von $C_t := V_t^m + E[V_\tau^p|\mathcal{A}_t]$. Wegen Satz 6.2 gilt also wegen $C_t = V_t^m + V_\tau^p$ für alle $t \geq \tau$

$$0 = \sup_{\tau \leq t \in \mathcal{T}} (Z_t - C_t) = \sup_{\tau \leq t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t^m - V_\tau^p).$$

Daraus folgt die Gleichung (6.1). Wegen $\sup_{\tau \le t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t^m - V_\tau) = \sup_{\tau \le t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t + V_t^p - V_\tau)$ und weil $Z \le V$ und V^p monoton fallend ist, ergibt sich $\sup_{\tau \le t \in \mathcal{T}} (Z_t - V_t) = 0$. □

6.2 Additiver Verbesserungsprozess

In diesem Abschnitt soll ein iteratives Verfahren zur Konstruktion der Snellschen Einhüllenden vorgestellt werden. Es geht darum, sich Schrittweise der Snellschen Einhüllende V zu nähern.

Definition 6.2 (Superlösung)**.** *Sei Z ein Auszahlungsprozess. Ein Supermartingal $W \in \mathfrak{S}$ heißt Superlösung zu Z, falls $W \ge Z$.*

Insbesondere ist die Snellsche Einhüllende V eines Auszahlungsprozesses Z eine Superlösung. Wegen Satz 2.11 ist es sogar die kleinste Superlösung zu Z.

Definition 6.3. *Sei $W \in \mathfrak{S}$ eine Superlösung mit additiver Doob- Meyer Zerlegung $W = W^m + W^p$. Dann sei W' definiert durch*

$$W'_t := W_t^m + E\left[\sup_{t \le s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m) \middle| \mathcal{A}_t \right]. \tag{6.2}$$

Satz 6.5. *Sei $W \in \mathfrak{S}$ eine Superlösung zum Auszahlungsprozess Z und $t \in \mathcal{T}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$W_t = V_t$.*
2. *$W'_t = W_t$.*

Beweis. „⇒“ Wegen Satz 6.4 gilt $V_t = V_t^m + \sup_{t \le s \in \mathcal{T}} (Z_s - V_s^m)$. Nimmt man auf beiden Seiten den Erwartungswert bedingt unter $\mathcal{A}_t$, so folgt $V_t = V'_t$.

„⇐“ Sei $W_t = W'_t$. Dann gilt $E\big[\sup_{t \le s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s + W_s^p - W_t^p) | \mathcal{A}_t\big] = 0$. Aber weil $Z \le W$, und W^p monoton fallend ist, ist $\sup_{t \le s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s + W_s^p - W_t^p) = 0$. Daraus ergibt sich

$$\sup_{t \le s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m - W_t^p) = 0.$$

Setzt man $C_s := W_s^m + E[W_t^p | \mathcal{A}_s]$, so gilt also

$$\sup_{t \le s \in \mathcal{T}} (Z_s - C_s) = 0.$$

Satz 6.2 impliziert dann, dass C den Auszahlungsprozess Z in t dominiert. Also gilt:

$$V_t = C_t = W_t^m + W_t^p = W_t.$$

□

Satz 6.6. *Sei Z ein Auszahlungsprozess und W eine Superlösung zu Z. Dann ist auch W' eine Superlösung zu Z und es gilt $W' \leq W$.*

Beweis. 1) $W' \geq Z$. Es gilt

$$W_t' \geq W_t^m + \operatorname*{ess\,sup}_{t \leq s \in \mathcal{T}} E[Z_s - W_s^m | \mathcal{A}_t] \geq W_t^m + E[Z_t - W_t^m | \mathcal{A}_t] = Z_t.$$

2) $W \geq W'$. Wegen $Z \leq W$, und da W^p monoton fallend ist, gilt

$$W_t' = W_t + E\left[\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s + W_s^p - W_t^p \middle| \mathcal{A}_t\right] \leq W_t.$$

3) $W' \in \mathfrak{S}$. Dazu sind 3 Eigenschaften zu zeigen:
3a) W' ist von Klasse(D), was wegen $Z \leq W' \leq W$ klar ist.
3b) W' ist ein Supermartingal. Es reicht zu zeigen, dass $E[\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}}(Z_s - W_s^m)|\mathcal{A}_t]$ ein Supermartingal ist. Für $u \leq t$ gilt:

$$\begin{aligned} E\left[E\left[\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m) \middle| \mathcal{A}_t\right] \middle| \mathcal{A}_u\right] &= E\left[\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m) \middle| \mathcal{A}_u\right] \\ &\leq E\left[\sup_{u \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m) \middle| \mathcal{A}_u\right]. \end{aligned}$$

3c) W' ist rechtsseitig stetig. Wegen [Ell82], Theorem 4.6, (3) genügt es zu zeigen, dass $E[W_t']$ rechtsseitig stetig ist. Nun ist $E[W_t^m]$ rechtsseitig stetig, weil W^m rechtsseitig stetig ist. Ist nun $t \in \mathcal{T}$ und $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $t_n \searrow t$, so gilt wegen monotoner Konvergenz und der rechtsseitigen Stetigkeit von $\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}}(Z_s - W_s^m)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} E\left[\sup_{t_n \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m)\right] &= E\left[\lim_{n \to \infty} \sup_{t_n \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m)\right] \\ &= E\left[\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - W_s^m)\right]. \end{aligned}$$

□

Der Beweis von Satz 6.6 zeigt, dass für ein beliebiges Martingal $C \in \mathfrak{M}$ der Prozess

$$W_t = C_t + E\left[\sup_{t \leq s \in \mathcal{T}} (Z_s - C_s) \middle| \mathcal{A}_t\right]$$

eine Superlösung zu Z ist. Gleichung (6.3) definiert den additiven Verbesserungsprozess. Startet man mit einer Superlösung $W^{(1)} \in \mathfrak{S}$, so definiert $W^{(n+1)} := W^{(n)\prime}$ eine fallende Folge von Superlösungen. Es gilt:

Satz 6.7. *$(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sei die durch den additiven Verbesserungsprozess definierte Folge von Superlösungen zum Auszahlungsprozess Z. Dann konvergiert $(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, das heißt es exisitiert ein $W \in \mathfrak{S}$, sodass*

$$\lim_{n\to\infty} W_t^{(n)} = W_t$$

für alle $t \in \mathcal{T}$.

Beweis. Wegen der Monotonie gilt $\lim_{n\to\infty} W_t^n = W_t$ für $t \in \mathcal{T}$, und wegen $Z \leq W \leq W^{(0)}$ ist W von Klasse(D). Die Supermartingaleigenschaft von W folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz:

$$E[W_t|\mathcal{A}_s] = E\left[\lim_{n\to\infty} W_t^{(n)} \middle| \mathcal{A}_s\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[W_t^{(n)}|\mathcal{A}_s\right] \leq \lim_{n\to\infty} W_s^{(n)} = W_s.$$

Nun bleibt zu zeigen, dass W eine rechtsseitig stetige Version besitzt, wofür die rechtsseitige Stetigkeit von $E[W_t]$ gezeigt werden muss. Sei $t \in \mathcal{T}$ und $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $t_j \searrow t$. Dann gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz:

$$\lim_{t_j\to t} E[W_{t_j}] = \lim_{t_j\to t} E\left[\lim_{n\to\infty} W_{t_j}^{(n)}\right] = \lim_{t_j\to t}\lim_{n\to\infty} E\left[W_{t_j}^{(n)}\right].$$

Nun dürfen die Limiten vertauscht werden, denn $E[W_{t_j}^{(n)}]$ ist eine in $j \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ fallende Folge. Da $W^{(n)}$ rechsseitig stetig ist, ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t_j\to t} E\left[W_{t_j}^{(n)}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[W_t^{(n)}\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} W_t^{(n)}\right] = E[W_t].$$

□

Es ist nicht klar, ob W die Snellsche Einhüllende V von Z ist. Dies ist ein offenes Problem, welches in [Jam07] von Jamishidian vermutet wird. Wird zusätzlich

1. $\lim_{i\to\infty} W_t^{(i)m} = W_t^m$ $\mathbb{P}$- f.s., und

2. $\lim_{i\to\infty} E\left[\sup_{t\le s\in\mathcal{T}}(Z_s - W_t^{(i)m})\middle|\mathcal{A}_t\right] = E\left[\sup_{t\le s\in\mathcal{T}}(Z_s - W_t^{m})\middle|\mathcal{A}_t\right]$ $\mathbb{P}$- f.s.

für alle $t\in\mathcal{T}$ vorausgesetzt, so gilt

$$\begin{aligned} W'_t &= W_t^m + E\left[\sup_{t\le s\in\mathcal{T}}(Z_s - W_s^m)\middle|\mathcal{A}_t\right] \\ &= \lim_{i\to\infty}\left(W_t^{(i)m} + E\left[\sup_{t\le s\in\mathcal{T}}(Z_s - W_s^{(i)m})\middle|\mathcal{A}_t\right]\right) \\ &= \lim_{i\to\infty} W_t^{(i+1)} = W_t \text{ für alle } t\in\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Also folgt aus Satz 6.5 $W_t = V_t$ für alle $t\in\mathcal{T}$. Im Allgemeinen wird die Vermutung unterstützt durch die entsprechende Aussage im endlichen Fall, die im Folgenden gezeigt werden soll. Sei nun, wie in Abschnitt 2.1, $\mathcal{T}_n = \{t_0, ..., t_n\}$ eine endliche Teilmenge von $[0,\mathfrak{m}]$ mit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = \mathfrak{m}$, $Z = (Z_{t_i})_{t_i\in\mathcal{T}_n}$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit $E[|Z_{t_i}|] < \infty$ für $i\in\{0,...,n\}$ und $(U_{t_i})_{t_i\in\mathcal{T}_n}$ die Snellsche Einhüllende aus Satz 2.1. Analog zu Definition 6.2 heißt ein Supermartingal $(W_{t_i})_{t_i\in\mathcal{T}_n}$ Superlösung zu Z, falls $W\ge Z$, und analog zu Definition 6.3 wird zu einer Superlösung $(W_{t_i})_{t_i\in\mathcal{T}_n}$ mit additiver Doob Zerlegung $W = W^m + W^p$ der additive Verbesserungsprozess definiert durch:

$$W'_{t_i} = W_{t_i}^m + E\left[\max_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}(Z_{t_j} - W_{t_j}^m)\middle|\mathcal{A}_{t_i}\right].$$

Die Tatsache, dass mit W auch W' eine Superlösung zu Z bildet, und dass $W\ge W'\ge U$ gilt, lässt sich im endlichen Fall leicht einsehen.

Lemma 6.8. *Sei W eine Superlösung zu Z. Dann gilt*

$$W'_{t_i} \le \max\{Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}]\}$$

für $i\in\{0,...,n\}$, wobei $W_{t_{n+1}} := W_{t_n}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} W'_{t_i} &= W_{t_i}^m + E\big[\max\nolimits_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}(Z_{t_j} - W_{t_j}^m)|\mathcal{A}_{t_i}\big] \\ &= E\big[\max\nolimits_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}(Z_{t_j} - (W_{t_j}^m - W_{t_i}^m)|\mathcal{A}_{t_i}\big], \end{aligned}$$

und wegen Gleichung 2.1

$$W_{t_j}^m - W_{t_i}^m = \sum_{k=i+1}^{j} \Big(W_{t_k} - E[W_{t_k}|\mathcal{A}_{t_k}] \Big).$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
W'_{t_i} &= E\left[\max_{t_i \le t_j \in \mathcal{T}_{t_i}} \left\{ Z_{t_j} - \sum_{k=i+1}^{j} (W_{t_k} - E[W_{t_k}|\mathcal{A}_{t_k}]) \right\} \Bigg| \mathcal{A}_{t_i} \right] \\
&= E\left[\max \left\{ Z_{t_i}, \max_{t_{i+1} \le t_j \in \mathcal{T}_{t_i}} \left\{ Z_{t_j} - \sum_{k=i+1}^{j} (W_{t_k} - E[W_{t_k}|\mathcal{A}_{t_k}]) \right\} \right\} \Bigg| \mathcal{A}_{t_i} \right] \\
&= E\Bigg[\max \Bigg\{ Z_{t_i}, \max_{t_{i+1} \le t_j \in \mathcal{T}_{t_i}} \Bigg\{ (Z_{t_j} - W_{t_j}) \\
&\qquad + \left(\sum_{k=i+2}^{j} (E[W_{t_k}|\mathcal{A}_{t_k}] - W_{t_{k-1}}) \right) + E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}] \Bigg\} \Bigg\} \Bigg| \mathcal{A}_{t_i} \Bigg] \\
&\le E\left[\max \left\{ Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}] \right\} |\mathcal{A}_{t_i} \right] = \max \left\{ Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}] \right\},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $Z_{t_j} \le W_{t_j}$ und $E[W_{t_k}|\mathcal{A}_{t_k}] \le W_{t_{k-1}}$ gilt. $\square$

Satz 6.9. *Sei* $(W^{(0)})_{t \in \mathcal{T}_n}$ *eine Superlösung zu* $(Z)_{t \in \mathcal{T}_n}$ *mit* $W_{t_n}^{(0)} = Z_{t_n}$. $(W^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ *sei die Folge von Superlösungen zu* Z*, die durch den additiven Verbesserungsprozess definiert ist, d.h.* $W^{(m+1)} = W^{(m)\prime}$. *Dann gilt*

$$W_{t_i}^{(m-j)} = U_{t_i}$$

für alle $i \ge j$, *und* $0 \le j \le n$.

Beweis. Per Induktion. Für $m-j=0$ gilt nach Voraussetzung $W_{t_n}^{(0)} = Z_{t_n} = U_{t_n}$.
Sei nun $W_{t_i}^{(m-j-1)} = U_{t_i}$ für $i \ge j+1$. Dann gilt nach Lemma 6.8 für $i \ge j$

$$W_{t_i}^{(m-j)} \le \max\big\{ Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}^{(m-j-1)}|\mathcal{A}_{t_i}] \big\} = \max\big\{ Z_{t_i}, E[V_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}] \big\} = V_{t_i},$$

Aber weil $W_{t_i}^{(m-j)}$ eine Superlösung ist gilt, $W^{(m-j)} \ge U$, und somit $W_{t_i}^{(m-j)} = U_{t_i}$ für alle $i \ge j$. $\square$

Insbesondere konvergiert im diskreten Fall $W^{(m)}$ für $m \to \infty$ gegen die Snellsche Einhüllende U.

6.3 Multiplikativer Verbesserungsprozess

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Fall endlicher Zeit. Ensprechend zum additiven Verbesserungsprozess sei im multiplikativen Fall definiert:

Definition 6.4. *Sei $(W_{t_i})_{t_i\in\mathcal{T}_n}$ eine Superlösung zu Z mit multiplikativer Doob Zerlegung $W = AM$. Dann sei $\overline{W}$ definiert durch*

$$\overline{W}_{t_i} = E\left[M_{t_n} \max_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left(\frac{Z_{t_j}}{M_{t_j}}\right)\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right]. \tag{6.3}$$

Entsprechend zu Lemma 6.8 gilt:

Lemma 6.10. *Sei W eine Superlösung zu Z. Dann gilt*

$$\overline{W}_{t_i} \le \max\big\{Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}]\big\}$$

für $i \in \{0, ..., n\}$, wobei $W_{t_{n+1}} := W_{t_n}$.

Beweis. Mit der multiplikativen Doob Zerlegung $W = AM$ gilt wegen der Bayes' Regel

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{t_i} &= E\left[M_{t_n} \max_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left(\tfrac{Z_{t_j}}{M_{t_j}}\right)\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right]\\
&= E^M\left[\max\nolimits_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left(\tfrac{Z_{t_j}}{M_{t_j}}\right)\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right]M_{t_i}\\
&= E^M\left[\max\nolimits_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left(\tfrac{Z_{t_j}M_{t_i}}{M_{t_j}}\right)\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right],
\end{aligned}$$

und wegen Gleichung (2.2) aus Kapitel 1

$$\frac{M_{t_i}}{M_{t_j}} = \prod_{k=i+1}^{j}\left(\frac{E\left[W_{t_k}\middle|\,\mathcal{A}_{t_{k-1}}\right]}{W_{t_k}}\right).$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{t_i} &= E^M\left[\max_{t_i\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left\{Z_{t_j}\prod\nolimits_{k=i+1}^{j}\left(\tfrac{E\left[W_{t_k}\middle|\mathcal{A}_{t_{k-1}}\right]}{W_{t_k}}\right)\right\}\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right]\\
&= E^M\left[\max\left\{Z_{t_i}, \max_{t_{i+1}\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left\{Z_{t_j}\prod\nolimits_{k=i+1}^{j}\left(\tfrac{E\left[W_{t_k}\middle|\mathcal{A}_{t_{k-1}}\right]}{W_{t_k}}\right)\right\}\right\}\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right]\\
&= E^M\left[\max\left\{Z_{t_i}, \max_{t_{i+1}\le t_j\in\mathcal{T}_n}\left\{\tfrac{Z_{t_j}}{W_{t_j}}\prod\nolimits_{k=i+2}^{j}\left(\tfrac{E\left[W_{t_k}\middle|\mathcal{A}_{t_{k-1}}\right]}{W_{t_{k-1}}}\right)E\left[W_{t_{i+1}}\middle|\,\mathcal{A}_{t_i}\right]\right\}\right\}|\mathcal{A}_{t_i}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq E^M \left[\max\left\{Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}]\right\} |\mathcal{A}_{t_i}\right] = \max\left\{Z_{t_i}, E[W_{t_{i+1}}|\mathcal{A}_{t_i}]\right\},$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $Z_{t_j} \leq W_{t_j}$ und $E[W_{t_k}|\mathcal{A}_{t_k}] \leq W_{t_{k-1}}$ gilt. □

Satz 6.11. *Sei $(W^{(0)})_{t\in\mathcal{T}_n}$ eine Superlösung zu $(Z)_{t\in\mathcal{T}_n}$ mit $W^{(0)}_{t_n} = Z_{t_n}$. $(W^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Superlösungen zu Z, die durch den multiplikativen Verbesserungsprozess definiert ist, d.h. $W^{(m+1)} = \overline{W^{(m)}}$. Dann gilt*

$$W^{(m-j)}_{t_i} = U_{t_i}$$

für alle $i \geq j$, und $0 \leq j \leq n$.

Beweis. Der Beweis zu Satz 6.9 lässt sich übernehmen. □

Insbesondere konvergiert also auch im multiplikativen Fall die durch den multiplikativen Verbesserungsprozess definierte Folge von Superlösungen gegen die Snellsche Einhüllende.

Literaturverzeichnis

[CG07] N. Chen and P. Glasserman. Additive and multiplicative duals for American option pricing. *Finance and Stochastics*, 11(2):153–179, 2007.

[Ell82] R.J. Elliott. *Stochastic calculus and applications*, volume 18. 1982.

[Hul09] J.C. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate.* Pearson Education, 2009.

[Irl03] A. Irle. *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten.* Vieweg+ Teubner Verlag, 2003.

[Jam04] F. Jamshidian. Numeraire-invariant option pricing & american, bermudan, and trigger stream rollover. 2004.

[Jam07] F. Jamshidian. The duality of optimal exercise and domineering claims: a Doob–Meyer decomposition approach to the Snell envelope. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 79(1):27–60, 2007.

[JŠ87] J. Jacod and A.N. Širjaev. *Limit theorems for stochastic processes.* Springer Berlin, 1987.

[Kle08] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, 2008.

[KS98] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance.* Springer Verlag, 1998.

[Pau01] V. Paulsen. Bounds for the American perpetual put on a stock index. *Journal of Applied Probability*, 38(1):55–66, 2001.

[Rog02] L.C.G. Rogers. Monte Carlo valuation of American options. *Mathematical Finance*, 12(3):271–286, 2002.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegenden Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner

anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Münster, 10. November 2010 ____________________

Unterschrift