

Diplomarbeit:

**„Eine Anwendung von Collateralised Debt Obligations  
auf die Diversifizierung von Kreditrisiken“**

vorgelegt von:

Dennis Riedl

betreut von:

PD Dr. Volkert Paulsen

Münster, den 1. April 2010

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>Kreditderivate und CDOs</b>                               | <b>7</b>  |
| 2.1      | Einführung . . . . .   | 8         |
| 2.2      | Kreditderivate und Motive ihrer Verwendung . . . . .         | 8         |
| 2.3      | Kennzeichen und Vertragsbestandteile . . . . .               | 11        |
| 2.4      | Zweckgesellschaften und der Verbriefungsprozess . . . . .    | 12        |
| 2.5      | Überblick über die Kreditderivatetypen . . . . .             | 14        |
| 2.5.1    | Kreditderivate auf ein einzelnes Referenzaktivum . . . . .   | 14        |
| 2.5.2    | Kreditderivate auf einen Pool von Referenzaktiva . . . . .   | 16        |
| 2.6      | Chancen und Risiken . . . . .                                | 20        |
| 2.6.1    | Chancen durch Kreditderivate . . . . .                       | 21        |
| 2.6.2    | Risiken durch Kreditderivate . . . . .                       | 22        |
| <b>3</b> | <b>iTraxx</b>  | <b>25</b> |
| 3.1      | Historie und Aufbau von iTraxx . . . . .                     | 25        |
| 3.2      | Vorstellung der Indexfamilie . . . . .                       | 27        |
| 3.3      | Handel in iTraxx . . . . .                                   | 28        |
| <b>4</b> | <b>Kreditrisikomodellierung</b>                              | <b>31</b> |
| 4.1      | Formaler Rahmen . . . . .                                    | 31        |
| 4.2      | Verlustverteilung und Value at Risk . . . . .                | 35        |
| 4.3      | Beispiel einer Anwendung . . . . .                           | 40        |
| 4.4      | Modellklassen für das individuelle Ausfallereignis . . . . . | 42        |
| 4.4.1    | Unternehmenswertmodelle . . . . .                            | 43        |
| 4.4.2    | Intensitätsmodelle . . . . .                                 | 46        |
| 4.4.3    | Incomplete Information Prozesse . . . . .                    | 49        |
| 4.5      | Modellierung korrelierter Ausfälle . . . . .                 | 50        |
| 4.5.1    | Faktormodelle . . . . .                                      | 51        |
| 4.5.2    | Copula-Modelle . . . . .                                     | 55        |
| 4.5.3    | Tail dependence . . . . .                                    | 59        |
| 4.5.4    | Verteilungsmodelle . . . . .                                 | 62        |
| 4.5.5    | Industriemodelle . . . . .                                   | 64        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.6      | Kalibrierung von Parametern . . . . .   | 68         |
| 4.6.1    | Intensitätsfunktion . . . . .   | 69         |
| 4.6.2    | Copula-Parameter . . . . .  | 72         |
| <b>5</b> | <b>CDO-Bewertung</b>  | <b>75</b>  |
| 5.1      | Generalvoraussetzungen . . . . .  | 75         |
| 5.2      | Herleitung der Bewertungsformel . . . . .   | 76         |
| 5.3      | Simulation . . . . .  | 78         |
| 5.4      | Ergebnisse . . . . .  | 85         |
| 5.5      | Regionalbanken: Ergebnisse für das Potential einer Portfoliodiversifizierung mittels CDO-Geschäften . . . . . | 92         |
| <b>6</b> | <b>Anhang</b>   | <b>103</b> |

# Abbildungsverzeichnis

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Das weltweite Marktvolumen ausstehender Kreditderivate (in Billionen USD), Quelle: Kiff, J. et al. (2009) . . . . .   | 7  |
| 2.2  | Ratingklassen und durchschnittliche Ausfallraten zu verschiedenen Laufzeiten in % (nach S&P, 1981-2007), Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Vazza, D. et al. (2008), S. 11. . . . . | 9  |
| 2.3  | Die am Verbriefungsprozess beteiligten Akteure . . . . .  | 12 |
| 2.4  | Instrumente des Kreditrisikotransfers. Nach: Rudolph, B. et al. (2007), S. 14. . . . .  | 13 |
| 2.5  | Volumenmäßige Aufteilung der gehandelten Kreditderivate. Quelle: Eigene Darstellung auf Grundlage von Daten der BBA [2] . . . . .   | 14 |
| 2.6  | Die Zahlungsströme beim CDS . . . . .   | 15 |
| 2.7  | Die Zahlungsströme bei der CLN . . . . .  | 16 |
| 2.8  | Schematische Wirkungsweise der CDO-Verbriefung. Nach Martin, M. et al. (2006), S. 47. . . . .   | 18 |
| 2.9  | Die Zahlungsströme beim klassischen CDO-Geschäft . . . . .  | 19 |
| 2.10 | Die Zahlungsströme beim synthetischen (funded) CDO-Geschäft . . . . .   | 20 |
| 3.1  | Veranschaulichung der aktuell angebotenen iTraxx-Indizes . . . . .  | 26 |
| 3.2  | Die Tranchen des iTraxx-Benchmark-Portfolios . . . . .  | 29 |
| 4.1  | Grafische Veranschaulichung diverser Risikomaße. Nach: Ridder, T. (2006), S. 4. . . . .   | 39 |
| 4.2  | Die Firma Viessmann in Allendorf/Eder. Quelle: <a href="http://www.sicher-heizen.de">http://www.sicher-heizen.de</a> . . . . .  | 41 |
| 4.3  | Ansätze der Portfoliomodellierung und Anwendungsbeispiele aus der Industrie. Nach: Bluhm, C. et al. (2002), S. 67. . . . .  | 65 |
| 5.1  | Umrechnung von Korrelationsparametern für Gauss- und Gumbel Copula vermöge Kendall's tau . . . . .  | 82 |
| 5.2  | Ergebnisse für die fairen Tranchen-Spreads unter der Gauss- (links) sowie der Gumbel-Copula (rechts) bei jeweils 200.000 Simulationen . . . . .   | 87 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 5.3 | Verteilung der Verlusthäufigkeiten des Sparkassen-Portfolios im Gauss-Fall bei unterschiedlicher Höhe des großen Kredits, aber gleicher Korrelation ( $K = 200.000$ Simulationen) . . . . . | 90  |
| 5.4 | Anzahl an Ausfällen kleiner Kreditforderungen, die beim Überleben des großen Kredits für ein Erreichen des Detachment Points der jeweiligen Tranche nötig sind. . . . .                     | 91  |
| 5.5 | Durch MC-Simulation approximierte Werte für Gauss- (links) und Gumbel-Copula (rechts) bei jeweils 200.000 Simulationen . . . . .  | 92  |
| 5.6 | Approximierte 99,9%-Quantile der Verlustfunktion des iTraxx-CDOs ( $K = 200.000$ Simulationen) . . . . .  | 95  |
| 6.1 | Die Spreads aus der Simulation des Sparkassen-CDOs mit der Gauss-Copula (links) und der Gumbel-Copula (rechts) . . . . .  | 103 |
| 6.2 | Die Werte der Verlustmatrizen aus der Gauss- (links) bzw. Gumbel-Copula (rechts) . . . . .  | 103 |

# 1 Einleitung

Die Lage der Weltwirtschaft wird seit mittlerweile über zwei Jahren durch die Bewältigung der weltweiten Wirtschafts- und Finanzkrise geprägt. Einher gegangen damit sind erhebliche Turbulenzen an den Finanzmärkten. Der Immobilienkollaps mit anschließender Hypothekenkrise in den USA hatte sich dabei rasch zu einer schweren Rezession in vielen Ländern ausgeweitet. Eine bedeutende Rolle für die Bildung der Immobilienblase, die dessen Crash voraus gegangen ist, hat dabei u.a. die Collateralized Debt Obligation (CDO) gespielt.

CDOs bilden eine der vielen Finanzinnovationen der letzten beiden Dekaden. Einerseits bieten sie Investoren prinzipiell exzellente Möglichkeiten zur Risikosteuerung und zur Portfolio-Diversifikation. Sie haben u.a. aufgrund ihrer Komplexität aber auch den Weg der Welt in die Krise begünstigt, weshalb ihr Ruf in der breiten Öffentlichkeit zum heutigen Tage zerstört ist.

Mit den sich aktuell mehrenden Anzeichen der Überwindung dieser Phase wirtschaftlicher Depression könnte - und viele Anzeichen deuten bereits darauf hin<sup>1</sup> - der CDO oder verwandte Formen des CDOs wieder in Mode kommen, nicht zuletzt, da das Prinzip des aktiven Forderungsmanagements sich bei Banken nach wie vor großer Beliebtheit erfreut.<sup>2</sup> Vielleicht werden ihnen dann auch kleinere Geldinstitute, die bislang kaum in diesem Markt involviert waren, die Türe öffnen, da sich der Nutzen gerade für sie als besonders hoch erweisen könnte.

In meiner Diplomarbeit stelle ich das Konzept des CDO vor und beleuchte damit grundsätzlich verbundene Möglichkeiten und Risiken, sowie verschiedene Klassen von Bewertungsmodellen. Das Ziel dieser Arbeit ist es dann, anhand eines fiktiven und selbst konstruierten, aber dennoch möglichst realitätsnahen Beispiels das Potential von CDOs speziell für kleinere Kreditinstitute zu bewerten.

---

<sup>1</sup>Siehe z.B. den Artikel „Banken: Neuer Mut zum Risiko“ aus der Süddeutschen Zeitung [84].

<sup>2</sup>Siehe z.B. den mitten in der Finanzkrise veröffentlichten Artikel von G. Platt [68].

## 2 Kreditderivate und CDOs

Kreditderivate sind ein relativ neues Konzept in der Welt der Finanzprodukte - verglichen mit dem schon jahrhundertealten Aktienhandel oder gar dem Einsatz von Geld und Umgang mit Krediten (es gibt verschiedene Hinweise auf zinstragende Geschäfte bereits um 1800 vor Christus.<sup>3</sup>) haben die ersten Transaktionen kreditderivativen Charakters erst Anfang der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts stattgefunden.<sup>4</sup> Seither hat das (am Nominal gemessene) Kreditderivate-Volumen bis zum Beginn der Finanzkrise im Jahr 2007 zum Teil stürmisch zugenommen und sich auch die Produktvielfalt erheblich erweitert.<sup>5</sup> Vor allem strukturierte Finanzinstrumente, also Kombinationen aus mehreren Basisfinanzgütern inklusive mindestens eines Derivats, haben in den letzten Jahren wesentlich an Bedeutung gewonnen.<sup>6</sup>

Ökonomisch gesehen bilden Kreditderivate zwar kein wesentlich neuartiges Konzept - denn den Zweck der Absicherung von Kreditrisiken haben auch die bereits schon viel länger existierenden (Kredit-)Versicherungen, Garantien oder Bürgschaften erfüllt - jedoch bringen Kreditderivate Neuerungen mit sich, die ihnen besondere Attraktivität verleihen.

Nach einer kurzen Einführung in grundlegende Begrifflichkeiten und Motive für den Einsatz von Kreditderivaten in den Abschnitten 2.2 bis 2.3 werden die gängigsten Kreditde-

---

<sup>3</sup>Vgl. den Artikel „Die Geschichte der Kredite und Zinsen begann lange vor Christi Geburt“ aus dem Tagesspiegel [78]

<sup>4</sup>Vgl. Burghof, H.-P. / Henke, S. (2005), S. 40.

<sup>5</sup>Siehe die Abbildungen 2.1 und 2.4

<sup>6</sup>Vgl. Kremers, T. (2007), S. 6.

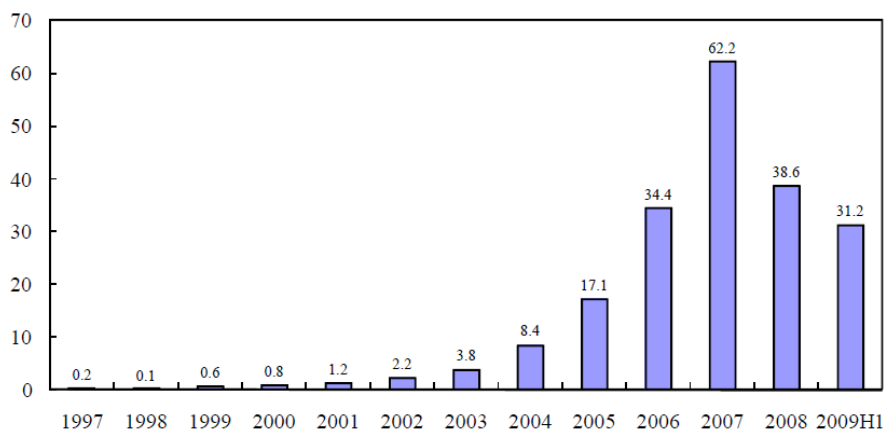


Abbildung 2.1: Das weltweite Marktvolumen ausstehender Kreditderivate (in Billionen USD), Quelle: Kiff, J. et al. (2009)

private vorgestellt (2.5). Zuvor wird im Zusammenhang mit dem Konzept des CDOs in 2.4 auf den dazu nötigen Prozess der Verbriefung von Kreditforderungen eingegangen. Schließlich werden die wesentlichen Chancen und Risiken dieser Produkte vorgetragen.

## 2.1 Einführung

Die Ertragslage jedes Wirtschaftsbetriebs birgt aufgrund sich zufällig verändernder Größen und eines zudem meist unvollkommenen Informationsstandes Ungewissheit über die zukünftige Ertragslage. Insbesondere die (negative) Abweichung der Erträge vom erwarteten Wert, bezeichnet als (ökonomisches) *Risiko*, bildet für Unternehmen eine Kernproblematik. Je nach Herkunft des Risikos unterscheidet man zwischen Kredit-, Markt- und operationellem Risiko, worauf in Abschnitt 2.6.2 näher eingegangen wird.

Für die Steuerung und Überwachung von Kreditrisiken bedürfen Finanzinstitute naturgemäß deren Quantifizierung. Zur Risikomessung dient heutzutage trotz einiger Nachteile standardmäßig der *Value at Risk (VaR)*, der den maximalen, in Geldeinheiten bewerteten Wertverlust eines Kreditportfolios bezeichnet, der mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Betrachtungszeitraums nicht überschritten wird (vgl. Definition 4.2). Zur Einschätzung des Kreditrisikos eines Schuldners hilft ein sogenanntes *Rating*, welches ein ordinales System zur Einstufung der Bonität (Kreditwürdigkeit) bildet und welches Ratingagenturen für diverse Unternehmen verteilen. In Abbildung 2.2 sind die Ratingbezeichnungen der drei größten amerikanischen Ratingunternehmen mit zugehörigen durchschnittlichen 1- bis 5-jährigen Ausfallraten (nach Moody's) aufgetragen. Banken bilden sich über diese externen (oder auch interne) Ratings einen Überblick über das Risiko jedes einzelnen Schuldners.

Wenn es darum geht, dem so erworbenen Wissen um die Risiken der Kreditgeschäfte auch entsprechende Handlungsmöglichkeiten folgen lassen zu können, stößt man heutzutage auf die Welt der Kreditderivate.

## 2.2 Kreditderivate und Motive ihrer Verwendung

Als Derivat (lat. „derivare“ = ableiten) wird allgemein ein Finanzprodukt bezeichnet, dessen Auszahlung sich von einem zugrundeliegenden Basisfinanzgut ableitet.<sup>7</sup> Solche Basisinstrumente können sowohl konkreter als auch synthetischer (künstlicher) Natur sein, wie z.B. andere Derivate. Gemeinsames Merkmal aller Derivate ist jedenfalls die Möglichkeit, Bestandteile des Marktrisikos, sei es etwa in Form von Zins-, Währungs- oder Aktienrisiken, von den ihnen zugrunde liegenden Underlyings (engl.: Basisinstrumenten) zu trennen und separat zu handeln.

Kreditderivaten im Speziellen liegen dabei dem Namen folgend Kreditforderungen zu-

---

<sup>7</sup>Vgl. Kern, M. (2003), S. 5.



| S&P, Fitch    | Moody's | Einstufung                          | Ausfallrate<br>(1 Jahr) | Ausfallrate<br>(2 Jahre) | Ausfallrate<br>(3 Jahre) | Ausfallrate<br>(4 Jahre) | Ausfallrate<br>(5 Jahre) |
|---------------|---------|-------------------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| AAA           | Aaa     | Investmentgrade                     | 0,00                    | 0,00                     | 0,09                     | 0,18                     | 0,28                     |
| AA+           | Aa1     |                                     | 0,00                    | 0,06                     | 0,06                     | 0,13                     | 0,2                      |
| AA            | Aa2     |                                     | 0,00                    | 0,00                     | 0,00                     | 0,09                     | 0,18                     |
| AA-           | Aa3     |                                     | 0,02                    | 0,09                     | 0,20                     | 0,32                     | 0,45                     |
| A+            | A1      |                                     | 0,05                    | 0,10                     | 0,25                     | 0,45                     | 0,61                     |
| A             | A2      |                                     | 0,07                    | 0,18                     | 0,30                     | 0,42                     | 0,6                      |
| A-            | A3      |                                     | 0,06                    | 0,20                     | 0,32                     | 0,49                     | 0,73                     |
| BBB+          | Baa1    |                                     | 0,15                    | 0,46                     | 0,91                     | 1,30                     | 1,74                     |
| BBB           | Baa2    |                                     | 0,23                    | 0,54                     | 0,85                     | 1,39                     | 1,95                     |
| BBB-          | Baa3    |                                     | 0,31                    | 1,02                     | 1,78                     | 2,78                     | 3,74                     |
| BB+           | Ba1     | Non-investmentgrade<br>(spekulativ) | 0,52                    | 1,41                     | 2,85                     | 4,20                     | 5,41                     |
| BB            | Ba2     |                                     | 0,81                    | 2,50                     | 4,62                     | 6,53                     | 8,38                     |
| BB-           | Ba3     |                                     | 1,44                    | 4,16                     | 7,04                     | 9,90                     | 12,32                    |
| B+            | B1      |                                     | 2,53                    | 6,97                     | 11,22                    | 14,92                    | 17,65                    |
| B             | B2      |                                     | 6,27                    | 12,74                    | 17,75                    | 21,27                    | 23,84                    |
| B-            | B3      |                                     | 9,06                    | 16,94                    | 22,75                    | 26,66                    | 29,44                    |
| C+            | Caa1    | Junk bonds<br>(„Ramschanleihen“)    | 25,59                   | 34,06                    | 39,04                    | 41,86                    | 44,5                     |
| C             | Caa2    |                                     |                         |                          |                          |                          |                          |
| C-            | Caa3    |                                     |                         |                          |                          |                          |                          |
| D             | D       | ausgefallene Schuldner              | 1                       | 1                        | 1                        | 1                        | 1                        |
| alle (ohne D) |         |                                     | 0,98                    | 2,30                     | 3,53                     | 4,62                     | 5,52                     |

Abbildung 2.2: Ratingklassen und durchschnittliche Ausfallraten zu verschiedenen Laufzeiten in % (nach S&P, 1981-2007), Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Vazza, D. et al. (2008), S. 11.

grunde - sie erweitern also die oben beschriebenen Möglichkeiten auf Kreditrisiken. Das Auszahlungsprofil eines Kreditderivats lässt sich dann aus der konkreten Ausgestaltung des Derivatkontrakts, der Bonität des Schuldners und den allgemeinen aktuellen Marktgegebenheiten ableiten.

Der Einsatz von Kreditderivaten zum Umgang mit Kreditrisiken entspringt - auch je nach Wirtschaftssubjekt - aus einer Vielzahl an Beweggründen, wobei hier vor allem Banken beleuchtet werden. Das Kreditrisiko bildet in diesem Fall den maßgeblichen Bestandteil des Gesamtrisikos. Das alles überragende Motiv für eine Bank, Kreditderivate einzusetzen, besteht nun in der Möglichkeit des aktiven Risikomanagements, indem Kreditrisiken isoliert, separat gehandelt, marktgerecht bewertet und gegebenenfalls auch gehedged werden können.<sup>8</sup> Damit können Bonitäts- und Ausfallrisiken umfangreich, flexibel und oft auch vergleichsweise einfach gesteuert werden, was zur Reduzierung von Unsicherheiten führt.<sup>9</sup>

Im Vergleich zu traditionellen Besicherungsmaßnahmen wie Versicherungen oder Garantien lassen sich insbesondere bei gängigen Schuldnern flexiblere Handelsstrategien als ein „Buy and Hold“ anwenden und der Vertrag endet i.d.R. umgehend im Falle eines Schuldnerausfalls („Kreditereignis“) sowie entsprechender Ausgleichszahlung. Letzteres ergibt sich daraus, dass der Sicherungsgeber mit einem Kreditderivat keine direkten Ansprüche gegenüber dem Referenztitel erwirbt. Da im Gegenzug bei vielen Produkten (noch) kein

<sup>8</sup>Vgl. Heidorn, T. (2007), S. 3.

<sup>9</sup>Es wird hier bereits bemerkt, dass bei der Bewertung von Kreditrisiko-Positionen oft deterministische Verzinsungen angenommen werden. Um sich auch gegen Zinsänderungen abzusichern, können etwa zusätzlich Zinsswaps eingesetzt werden. Auf dieses Thema wird hier nicht näher eingegangen und auf die umfangreiche Literatur zu dem Thema verwiesen, z.B. [37].

Kapital beim Sicherungsnehmer unterlegt werden muss, sind Kreditderivatgeschäfte in solchen Fällen zudem außerbilanzieller Natur.<sup>10</sup>

Insgesamt können Banken nun beispielsweise die Markowitzsche Portfoliotheorie umsetzen und eine Maximierung der Diversifikation ihres Kreditportfolios unter Festlegung eines bestimmten (erwarteten) Gewinns anstreben. Dies kann durch Veräußerung stark korrelierter Kredite und Erwerb individuell „gleich teurer“, nicht so stark abhängiger Fremdrisiko-Positionen geschehen. In Kapitel 5.5 wird angestrebt, dieses Vorgehen in die Tat umzusetzen.

Insgesamt versetzen diese Möglichkeiten ein Unternehmen theoretisch nun in die Lage, ein auf die eigenen Bedürfnisse maßgeschneidertes Risiko- und Auszahlungsprofil im Kreditbereich zu erzeugen. Dieses wird i.d.R. maßgeblich geleitet durch die v.a. von Unternehmensinvestoren geforderte Maximierung der Eigenkapitalrendite. Daneben sind Passivmanagement<sup>11</sup> und auf Spekulationsgewinne oder Arbitrage abzielender Eigenhandel Zielfelder für den Kreditderivate-Handel.<sup>12</sup> Letztere Möglichkeiten haben dabei seit ihrer Entstehung wesentlich zu effizienteren Kreditmärkten beigetragen. Diese theoretischen Möglichkeiten lassen sich immer besser in die Tat umsetzen, da durch Deregulierung und Globalisierung auch der weltweite Handel mit Finanzgütern gefördert wird - gleichzeitig verbessert sich also auch von praktischer Seite aus die Möglichkeit der Aufnahme und Abgabe von Kreditrisiken diverser Regionen und Sektoren. Stetige Fortschritte in der Informationstechnologie und der Unternehmen ständig beeinflussende Wettbewerbsdruck wirken tendenziell verschärfend auf den Drang nach einer Öffnung für diese Geschäftsart.<sup>13</sup> Schließlich kann auch die Möglichkeit der Ausnutzung von Steuervorteilen als motivationaler Faktor zugunsten von Kreditderivatgeschäften wirken.

Ein großes Hemmnis für die Weitergabe von Kreditrisiken hat langezeit darin bestanden, dass für die Weitergabe von Kreditforderungen das ausdrückliche Einverständnis des Schuldners zu benötigen, weshalb Banken diese Option etwa aufgrund der Furcht vor einer Verschlechterung der Kunde-Bank-Beziehung in der Regel eher gemieden haben. Beim Gebrauch vieler Formen von Kreditderivaten muss der Schuldner jedoch nicht vor der Weitergabe gefragt, noch nicht einmal in Kenntnis gesetzt, werden.<sup>14</sup>

Aus dieser Sicht wird Banken also ein günstiges und a priori viele Vorteile aufweisendes Mittel an die Hand gelegt, um diverse Ziele der Bank (besser) umsetzen zu können.

---

<sup>10</sup>Vgl. Martin, M. et al. (2006), S. 9.

<sup>11</sup>Das Passivmanagement bezeichnet den Bereich der Refinanzierung einer Bank, bei dem Kreditderivate mit dem Ziel eingesetzt werden, die Refinanzierungskosten des Unternehmens so weit wie möglich zu senken.

<sup>12</sup>Vgl. Kern, M. (2003), S. 17.

<sup>13</sup>Vgl. Oriwol, D. (2005), S. 85.

<sup>14</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 24.

## 2.3 Kennzeichen und Vertragsbestandteile

Neben dem zu Beginn lediglich außerbörslichen Handel (engl.: „over the counter“, OTC) von Kreditderivaten, bei dem individuell die Ausstattungsmerkmale und Abwicklungsmodalitäten des Geschäfts geregelt werden, haben sich mittlerweile vertragliche Standards für viele Kreditderivatgeschäfte herausgebildet. Diese werden derzeit v.a. durch die Standarddokumentationen der International Swaps and Derivatives Association (ISDA)<sup>15</sup> bereit gestellt und aktuellen Entwicklungen laufend angepasst. Die unabhängig vom Geschäft notwendigen Vertragspunkte umfassen die Vertragspartner, eine Spezifizierung von Underlying (abzusicherndem Vermögensgegenstand) und Referenzaktivum<sup>16</sup> sowie die genaue Definition eines „Kreditereignisses“<sup>17</sup>, die Vertragslaufzeit, den Nominalwert des Geschäfts und schließlich die Regelung der Prämien- und Ausgleichszahlungen. Auf diese Zahlungen wird nun genauer eingegangen:

Bei einem Kreditderivatgeschäft reicht der Sicherungsnehmer (engl. Protection Buyer) aus einem originärem Geschäft aufgenommene Kreditrisiken gegen Zahlung von Prämien an eine Drittpartei, den Sicherungsgeber (engl. Protection Seller), weiter.<sup>18</sup> Das ursprüngliche Kreditgeschäft bleibt dabei unangetastet.

Für die Übernahme von Kreditrisiko verlangt der Protection Seller i.d.R. die Zahlung einer Prämie - den Credit Spread.<sup>19</sup> Dieser kann einmalig am Beginn der Laufzeit erfolgen und/oder in periodischen Abständen. Die periodische Prämienzahlung wird standardmäßig in Basispunkten (bps) in Bezug auf den Nominalwert des Referenzaktivums angegeben. 1 bp entspricht dabei 0,01% dieses Werts.<sup>20</sup>

Die Ausgleichszahlung des Protection Buyers im Falle eines Kreditereignisses kann physisch (Physical Settlement) oder per Barausgleich (Cash Settlement) geschehen und ist im Vorfeld klar festzulegen. Physisch bedeutet, dass der Protection Seller seinem Vertragspartner das Underlying zu einem im Vorhinein festgesetzten Betrag (meist zum Nominalwert) abkauft. Die Ausgleichszahlung beim Cash Settlement kann entweder als Differenz

---

<sup>15</sup>Die ISDA ist eine 1998 gegründete Handelsorganisation von hauptsächlich privaten Marktteilnehmern auf OTC-Märkten, die sich u.a. um vereinheitlichte Rahmenverträge zum Handel von Kreditderivaten engagiert.

<sup>16</sup>Das Referenzaktivum ist nach Oriwol, D. (2005), S. 34 derjenige Vermögenswert, dessen Kreditrisiko tatsächlich übertragen wird, z.B. einzelne oder gebündelte Kredite, Ratings, Aktienkurse oder das Underlying selbst

<sup>17</sup>Ein solches Ereignis umfasst typischerweise die Insolvenz des Schuldners, ein Zahlungsver säumnis (in der Regel nach Ablauf einer Toleranzfrist), bewusste Nichterfüllung von Zahlungsverpflichtungen oder (potentielle) Vorfälligkeit beispielsweise bei Kreditereignissen anderer Verpflichtungen oder im Fall einer Schuldenrestrukturierung. Es kann aber auch anders festgelegt werden. Der Eintritt in das Kreditereignis sollte von einer neutralen, öffentlichen Quelle als solches bestätigt werden (vgl. hierzu Kern, M. (2003), S.7).

<sup>18</sup>Der Protection Buyer ist also Verkäufer des Kontrakts.

<sup>19</sup>Der Credit Spread stellt den Risikoaufschlag dar, der bei Kreditgeschäften zusätzlich zum (kredit-)risikolosen Zinssatz gezahlt werden muss, vgl. Martin, M. et al. (2006), S.3.

<sup>20</sup>Des Weiteren ist eine Zeitangabe nötig: Zahlt ein Sicherungsnehmer beispielsweise 200bp per annum (pro Jahr) für die Besicherung eines Kreditderivats mit Nominalwert 1 Mio. €, so entspricht dies also  $0,02 * 1.000.000€ = 20.000€$  p.a.

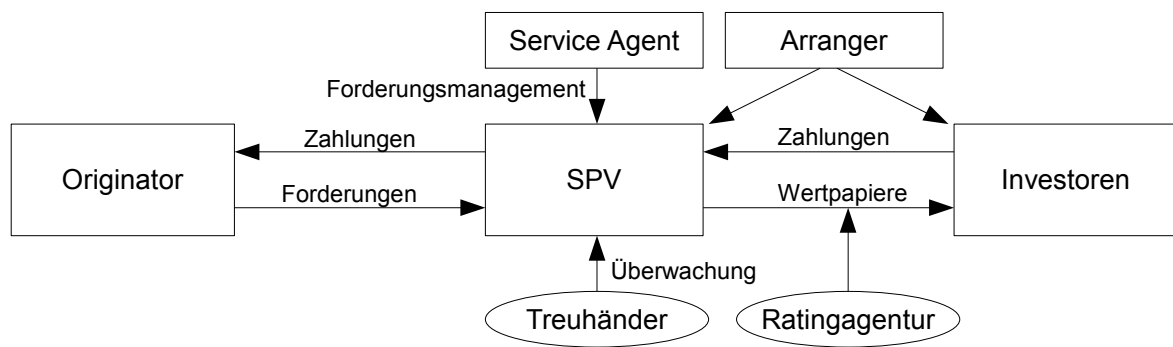


Abbildung 2.3: Die am Verbriefungsprozess beteiligten Akteure

aus Nominalbetrag und Underlyingwert nach dem Kreditereignis erfolgen (in Form des Recovery Werts oder Marktpreises) oder als Zahlung eines bei Vertragsabschluss bereits fixierten Anteils am Nominalbetrag der Transaktion („Binary Payment“.<sup>21</sup>) Binary Payments werden v.a. deshalb verwendet, da die objektive Feststellung des Referenztitel-Restwerts nach seinem Ausfall oft problematisch ist oder Gewissheit über den Zahlungsstrom in Folge eines Ausfalls gewünscht wird.

## 2.4 Zweckgesellschaften und der Verbriefungsprozess

Will eine Bank Kreditforderungen weiter geben, so kann sie das über eine sogenannte Zweckgesellschaft (Special Purpose Vehicle, SPV) einleiten. Mit einem solchen von der Bank ausgegliederten Unternehmen wird einzig das Ziel verfolgt, dass dieses SPV den von der Bank abzutretenden Pool an Kreditforderungen regresslos ankauft und dessen Refinanzierung durch die Emission bestimmter Wertpapiere verwirklicht.<sup>22</sup> Die Schaffung handelbarer Wertpapiere aus (Kredit-)Forderungen oder Eigentumsrechten wird dabei als Verbriefung bezeichnet. Das SPV bündelt hierbei die Kreditforderungen und teilt sie vermöge einer produktspezifischen Systematik in anders strukturierte Zahlungsansprüche auf. Es deckt die entstandenen Kosten durch anschließende Veräußerung der erzeugten Wertpapiere an (meist institutionelle oder private) Investoren.<sup>23</sup>

Die Zweckgesellschaft wird dabei insolvenzfest gegen die sie gründende Bank - im Folgenden Originator genannt - isoliert, wodurch bei einer möglichen Insolvenz des Originators die SPV-Aktiva nicht mehr zu dessen Insolvenzmasse zugerechnet werden können.<sup>24</sup> Des Weiteren erwirbt die Zweckgesellschaft die vollständigen Eigentumsrechte der Kreditforderungen vom Originator („True Sale“-Kauf). Diese Maßnahmen verleihen der Zweck-

<sup>21</sup> Vgl. Heidorn, T. (2007), S. 6.

<sup>22</sup> Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 41,44.

<sup>23</sup> Es ist zu beachten, dass Kreditinstitute künftig für verbrieft und veräußerte Wertpapiere allerdings vermehrt Eigenkapital proportional zum Nominalwert der Kreditforderungen vorhalten sollen, womit die Effizienz dieser Geschäfte ceteris paribus gesenkt würde. Siehe dazu z.B. den Artikel „EU rückt Finanzjongleuren auf die Pelle“ aus dem Handelsblatt [4].

<sup>24</sup> Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 44.

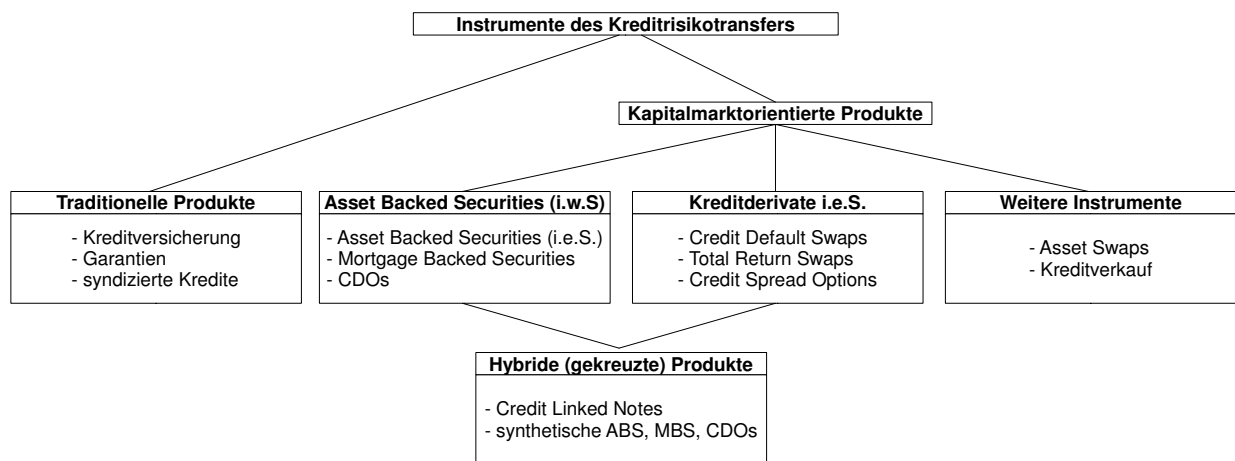


Abbildung 2.4: Instrumente des Kreditrisikotransfers. Nach: Rudolph, B. et al. (2007), S. 14.

gesellschaft i.d.R. einen vergleichsweise guten Bonitätsstatus, weshalb sie günstiger an Liquidität gelangt. Der Originator zieht auch seine Vorteile daraus, da an ihn die Gewinne der Zweckgesellschaft weiter geleitet werden.<sup>25</sup>

Der Originator bleibt i.d.R. trotz des True Sale-Verkaufs auch in Besitz der Akten der Forderungspositionen. Die Zweckgesellschaft wird allgemein nur mit minimalen Betriebsmitteln ausgestattet und ihre Aufgabenbereiche von externen Dienstleistern ausgefüllt. Ein sogenannter Service Agent managed dann die Forderungen und den Kontakt zum Schuldner.<sup>26</sup> Der gesamte Prozess wird dabei stets von einem unabhängigen Treuhänder<sup>27</sup> überwacht. Bei der Strukturierung und Emission der Wertpapiere wird dabei zudem die Hilfe eines Arrangers in Anspruch genommen. Diese Rolle wird meist von einer Investmentbank ausgefüllt. In Abbildung 2.3 werden die am Verbriefungsprozess beteiligten Akteure zusammenfassend veranschaulicht.

Investoren von SPV-Wertpapieren können oder dürfen standardmäßig nur sehr begrenzt über die Kreditschuldner informiert werden. Meist werden lediglich die Forderungsart, Laufzeit, Anzahl und die durchschnittliche Höhe der Forderungen, jedoch weder Namen noch andere Details der Schuldner bekannt gegeben, um einerseits die Anonymität der Kreditschuldner im Kontext der Kreditweitergabeverfahren zu wahren und andererseits die Mindestanforderungen für die Vergabe von Ratings durch externe Agenturen zu erfüllen. Um das Vertrauen in die Schuldtitel zu stärken bzw. das Kreditrisiko des zugrunde liegenden Forderungspools zu senken, werden den potentiellen Investoren häufig verschiedene Möglichkeiten sogenannter *Sicherheitenverstärkungen* (engl. *Credit Enhancements*) geboten.<sup>28</sup>

Neben der klassischen „True Sale“-Verbriefung kann der Originator das Kreditrisiko auf

<sup>25</sup>Vgl. Oriwol, D. (2005), S. 66.

<sup>26</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 43.

<sup>27</sup>Auch Trustee genannt - in der Regel eine Rechtsanwaltskanzlei oder Wirtschaftsprüfungsgesellschaft.

<sup>28</sup>Ein Überblick über verschiedene Möglichkeiten an Sicherheitenverstärkungen wird in London, J. (2002), Kap. 4.1 gegeben.

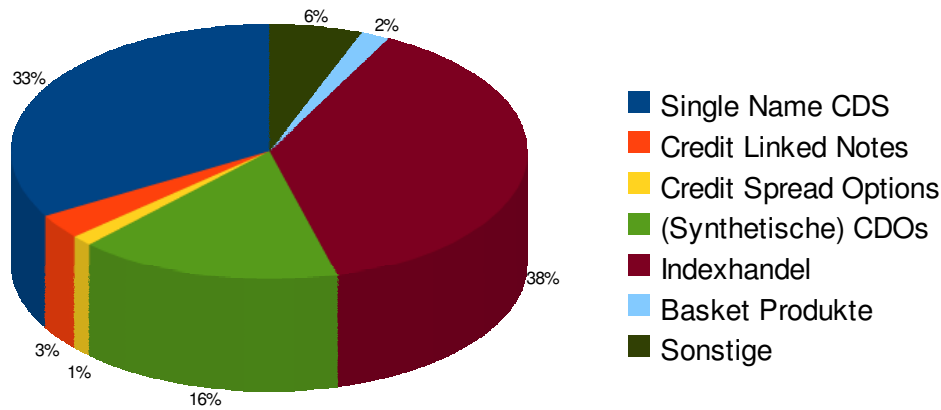


Abbildung 2.5: Volumenmäßige Aufteilung der gehandelten Kreditderivate. Quelle: Eigene Darstellung auf Grundlage von Daten der BBA [2]

das SPV auch über ein Kreditderivat transferieren. In diesem Fall spricht man bei der darauf ansetzenden Erzeugung von Wertpapieren von synthetischer Verbriefung.

Die von Zweckgesellschaften emittierten (festverzinslichen) Wertpapiere werden unter dem Oberbegriff des Forderungsbesicherten Wertpapiers i.w.S. (Asset Backed Security i.w.S., ABS i.w.S.) zusammengefasst.<sup>29</sup> Darunter fallen neben den bereits erwähnten MBS die Klasse der CDOs sowie der ABS im engeren Sinne<sup>30</sup>, vgl. Abbildung 2.4.

## 2.5 Überblick über die Kreditderivatetypen

Über die Vielzahl unterschiedlicher Kreditderivate, die zudem oft variantenreich ausgestaltet sind, existieren in der Literatur verschiedenartige Klassifizierungen. Ein Grund hierfür ist das Problem der Abgrenzung von Kreditderivaten zu ähnlichen Produkten wie Swaps oder Verbriefungen. In Abbildung 2.4 sind die am Markt gängigsten Instrumente des Kreditrisikotransfers nach Funktionsweise gegliedert aufgezeichnet.

### 2.5.1 Kreditderivate auf ein einzelnes Referenzaktivum

Zu den verbreitetsten Kreditderivaten dieser Klasse zählen v.a. Credit Default Swaps (CDS), Total Return Swaps (TRS), Credit Spread Options (CSOs) und Credit Linked Notes (CLNs). Der Protection Buyer zielt mit dem Kauf eines CDS auf eine Absicherung gegen einen Ausfall, beim TRS gegen Marktrisiken und im Falle des CSOs gegen das Risiko einer Bonitätsveränderung. Die CLN stellt eine Kombination eines Kreditderivats mit einer Anleihe dar und ist als solche im Gegensatz zu den anderen ein bilanzwirksames Produkt, welches aber wie der CDS das Kreditrisiko des Referenzaktivums synthetisch

<sup>29</sup>Denn diese Wertpapiere sind so gestrickt, dass die daraus resultierenden Zahlungsverbindlichkeiten des SPV durch den Kreditforderungenbestand (die Assets) mindestens gedeckt (backed) werden, vgl. auch Rudolph et al. (2007), S. 40.

<sup>30</sup>ABS i.e.S. sind den MBS ähnlich, ihnen liegen aber als Aktiva sonstige Forderungen, wie Automobilfinanzierungen, Kreditkartenforderungen, etc. zugrunde

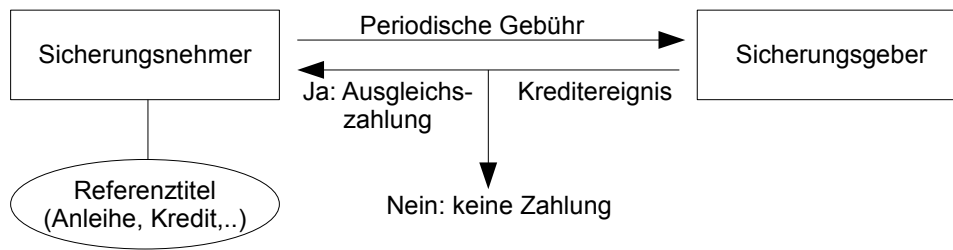


Abbildung 2.6: Die Zahlungsströme beim CDS

nachbildet. Hier wird nur auf den CDS und die CLN näher eingegangen, da sie elementare Bausteine der später betrachteten CDOs bilden.

### Credit Default Swap (CDS)

Der CDS ist das mit Abstand meistgehandelte Kreditderivat bezüglich nur eines Referenzaktivums (siehe Abb. 2.5) und eine Art Grundbaustein vieler anderer Vertreter aus seiner Familie. Er bezeichnet einen Kontrakt zwischen zwei Parteien A und B, bei dem der Sicherungsnehmer A (CDS-Käufer) das Referenzaktivum (mit festgelegtem Nennwert) vom Sicherungsgeber B (CDS-Verkäufer) für die Dauer  $T$  der Vertragszeit besichern lässt. Dafür zahlt er an B im typischen Fall eine regelmäßige und u.a. von der Laufzeit abhängige Risikoprämie  $s_{CDS}(T)$ , den sogenannten *CDS-Spread*. Die Höhe des Spreads wird i.d.R. so festgesetzt, dass der CDS bei Vertragsabschluss den Wert Null hat (ein solcher CDS-Spread wird als „fair“ bezeichnet). Durch diese Festlegungen lässt sich die Risikoprämie verschiedener CDS unabhängig vom Nominalwert vergleichen.

Im Fall eines vertraglich spezifizierten Kreditereignisses zahlt A nur noch die bis zum Ausfallzeitpunkt „anteilige“ Prämie, B entrichtet derweil die vertragsgemäße Ausgleichszahlung (siehe Kapitel 2.3). Im Falle des Binary Payments spricht man auch von einem Digital CDS (DCDS). Zu bemerken ist, dass Bonitätsveränderungen oder auch ein Ausfall in einer Weise, die nicht Vertragsbestandteil ist, von B nicht abgesichert wird, also als Risiko für A bestehen bleibt.

**Bemerkung 2.1** *Es ist fest zu halten, dass bei Vertragsabschluss die Klärung von Referenzschuldner, -aktivum, Kreditereignisdefinition (und Verfahren bei der Ausgleichszahlung), Nominalbetrag, Start- und Fälligkeitstermin sowie der Prämienzahlungstermine und -modalitäten notwendige Voraussetzung für die vollständige Spezifikation eines CDS und damit auch für dessen Bewertung sind.*

### Synthetische Unternehmensanleihe (Credit Linked Note, CLN)

Eine CLN kombiniert ein Kreditderivat mit einer Anleihe, die der Sicherungsnehmer an den -geber in Höhe des CLN-Nominals emittiert. Dieses Produkt wirkt damit im Gegensatz zum CDS bilanzverlängernd.<sup>31</sup> Hier wird aufgrund der späteren Zwecke stets

<sup>31</sup>Vgl. Oriwol, D. (2005), S. 74f.

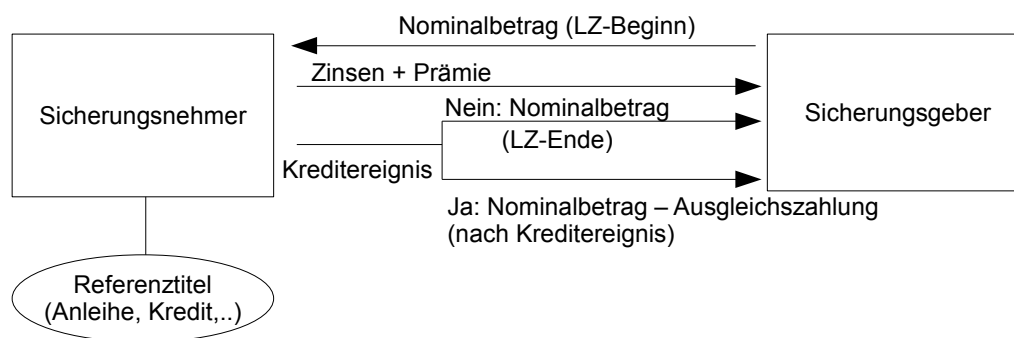


Abbildung 2.7: Die Zahlungsströme bei der CLN

der Spezialfall der Credit Default Linked Note betrachtet, die aus einem CDS und einer Anleihe besteht.

Der Sicherungsgeber erhält dann bei der CLN regelmäßige Zinszahlungen sowie Prämien, die vom Kreditausfallrisiko und der Bonität des Sicherungsnehmers abhängen. Tritt ein Kreditereignis ein, kann der Sicherungsnehmer die Ausfallkosten direkt und in entsprechender Höhe aus dieser Anleihe abschöpfen, weshalb man CLNs auch als *unterlegte CDS* bezeichnet - das Kontrahentenrisiko geht durch die Anleihe vom Sicherungsnehmer auf den Sicherungsgeber über.

Dieser Adressrisikoübergang hat den Vorteil, dass im Gegensatz zu nicht-unterlegten Kreditderivaten Credit Linked Notes von einer größeren Zahl an Wirtschaftssubjekten, wie privaten Investoren, gehandelt werden dürfen - darin besteht auch der ursprüngliche Grund für die Entwicklung der CLN.<sup>32</sup>

Im Übrigen kann eine Credit Linked Note auch über eine Zweckgesellschaft veräußert werden, was v.a. für Sicherungsnehmer mit schlechterer Bonität Sinn macht oder wenn die Absicherung für den Originator nicht bilanzverlängernd wirken soll, was nur bei der SPV-Variante der Fall wäre, da das Anleihengeschäft nur die Zweckgesellschaft und den Sicherungsgeber betrifft.<sup>33</sup>

## 2.5.2 Kreditderivate auf einen Pool von Referenzaktiva

Kreditderivate, die eine Besicherung von mehr als nur einem Referenzaktivum herbeiführen, spielen eine immer größere Rolle. Die weitaus namhaftesten Vertreter bilden die Collateralised Debt Obligations sowie die Klasse der Basket Default Swaps (BCDS), welche Produkte ganz verschiedener Besicherungsformen umfasst. Eine in der Praxis häufig verwendete Ausgestaltung ist die des *n*-th-to-CDS, bei dem der Protection Seller nur für den *n*-ten Ausfall in einem Korb mit  $N > n$  Underlyings aufkommt.

Detaillierter wird nun der CDO vorgestellt.

<sup>32</sup>Vgl. Heidorn, T. (2007), S. 9.

<sup>33</sup>Vgl. Oriwol, D. (2005), S. 76.



## Die Collateralised Debt Obligation (CDO)

Ein „klassischer“ CDO referenziert auf einen Assetpool, der aus Krediten, Corporate Bonds, Mortgages oder Loans bestehen kann.<sup>34</sup> Als Referenz können aber auch Kreditderivate dienen - im Spezialfall der Verbriefung von CDS wird dann von einem „synthetischen“ CDO gesprochen (aufgrund der vorherigen künstlichen Nachbildung der Kreditrisiken durch CDS). Marktübliche Größen des Assetpools liegen zwischen 25 und 250 Titeln.

## Konstruktion: Tranchen und Tranchierung

Beim CDO-Geschäft wird das verbrieft Forderungsportfolio in gewissen Teilen einer neu geordneten Forderungsstruktur (sogenannten „Tranchen“) weiter veräußert.<sup>35</sup>

Will eine Bank einen CDO begeben, so stellt sie - wie oben beschrieben - zunächst den im Folgenden stets aus Kreditforderungen bestehenden Pool der Referenzaktiva zusammen und verkauft ihn an die dafür gegründete Zweckgesellschaft (per True Sale oder synthetisch). Diese „tranchiert“<sup>36</sup> den Forderungspool: Dazu seien die Forderungshöhen der ursprünglichen Kreditforderungen durch  $M_1, \dots, M_n$  und die Gesamtforderungshöhe durch  $M = \sum_{i=1}^n M_i$  gegeben. Betrachtet über einen festen Zeithorizont fällt jede Forderung mit einer Bernoulliwahrscheinlichkeit  $0 < p_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , aus.

Das SPV teilt nun die Gesamtforderungshöhe  $M$  in  $d$  Gruppen - die Tranchen - mit Nominalwerten  $T_1, \dots, T_d$  auf (i.d.R. gilt  $d \ll n$ ). Setzt man noch  $T_0 := 0$ , gilt also

$$\sum_{i=0}^d T_i = M.$$

Die Tranchen werden nun von den Forderungsansprüchen sowie Ausgleichsverpflichtungen der Kontraktpartner her in eine Reihenfolge gebracht und dadurch in solche mit sehr guter bis sehr schlechter Bonität eingeteilt. Dies erfolgt mittels des sogenannten *Waterfall*- oder *Subordinationsprinzips*.<sup>37</sup> Verluste aus möglichen Kreditereignissen müssen zunächst die Besitzer der unteren Tranchen tragen und erhalten fortan zudem nur noch auf den verbliebenen Rest ihres eingesetzten Nominals weiterhin Prämienzahlungen. Andersherum gesprochen wird zunächst die Prämie für die höchste (=Senior) Tranche ausgeschüttet und überschüssige Prämien fließen der Reihe nach in die folgenden, bis alle Tranchen bedient sind (kein Ausfall) oder der Prämientopf aufgebraucht ist. Dieses Tranchierungsprinzip spricht den Tranchen auf diese Weise nachrangige Senioritäten (=Rangfolge von Entlohnungen) zu, und zu jedem Zeitpunkt ist zu gegebenem

---

<sup>34</sup>Die bekanntesten Vertreter von CDOs sind Collateralised Bond Obligations (CBOs) mit hauptsächlich hochverzinsten Schuldverschreibungen als Referenztiteln, sowie Collateralised Loan Obligations (CLOs), die also v.a. auf Loans (=Darlehnsforderungen gegenüber Staaten oder Großunternehmen) referenzieren.

<sup>35</sup>Vgl. Obrist, M. (2007), Kap. CDOs

<sup>36</sup>Der Begriff Tranche (frz.: „Scheibe“) beschreibt allgemein einen Teil eines Ganzen und Tranchierung dann das Teilen oder „in Scheiben schneiden“ dieses Ganzen.

<sup>37</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 55.

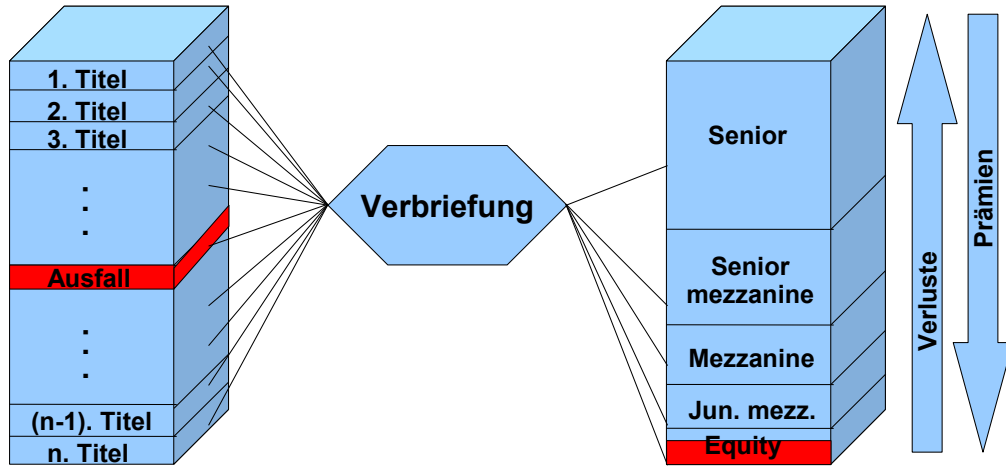


Abbildung 2.8: Schematische Wirkungsweise der CDO-Verbriefung. Nach Martin, M. et al. (2006), S. 47.

Gesamtverlust  $S$  die Ausfallhöhe der  $i$ -ten Tranche damit gegeben durch

$$\min\{S - T_{i-1}, T_i\}. \quad (2.1)$$

Das Investment in eine CDO-Tranche entspricht damit einem Bullish Vertical Spread auf die (prozentuale) Verlusthöhe der Tranche. Die Spezifizierung jeder Tranche erfolgt über die Angabe eines sogenannten

- unteren Tranchierungspunkts (*Attachment Point*)  $a \in [0\%, 100\%)$  sowie eines
- oberen Tranchierungspunkts (*Detachment Point*)  $b \in (a, 100\%]$ ,

die den prozentualen Anteil des Nominalbetrags angeben, ab und bis zu dem der Investor für Verluste aufzukommen hat und für deren nominellen Gegenwert er Prämien erhält.<sup>38</sup> Die Tranche  $[0, \frac{T_1}{M}]$  wird *Equity Tranche*,  $(\frac{1-T_{d-1}}{M}, 1]$  (*Super*) *Senior Tranche* genannt. Dazwischen liegende Tranchen werden meist als *Mezzanine Tranchen* bezeichnet (die Nomenklatur hängt von der Anzahl  $d$  der Tranchen ab und ist in der Literatur dennoch nicht einheitlich). Mit  $A = a \cdot M$  bzw.  $B = b \cdot M$  werden hier die  $a$  und  $b$  entsprechenden Nominalbeträge bezeichnet.

Die Tranchen des CDO können nun als Forderungen mit in aufsteigender Seniorität monoton fallenden Ausfallwahrscheinlichkeiten aufgefasst und als solche vom SPV weiter verkauft werden.<sup>39</sup> Die Equity Tranche wird dabei meist vom Originator zurück gekauft, was dessen Anreiz zum Durchleuchten des selbst zusammen gestellten Forderungspools im Hinblick auf dessen Güte tendenziell steigern und damit Signalwirkung an andere potentielle Investoren haben soll.<sup>40</sup> Marktüblich bei der Equity Tranche ist ansonsten eine

<sup>38</sup>Vgl. Obrist [65], Kap. CDOs.

<sup>39</sup>Da der Investor gegen Prämienzahlungen seitens des SPV also bei in der Tranche auflaufenden Verlusten haftet, erfüllt der CDO wegen dieser Vereinbarung des Austauschs von zukünftigen Zahlungsströmen auch die Definition eines Swageschäfts und wird daher auch manchmal als CDO Swap bezeichnet.

<sup>40</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 50,55.

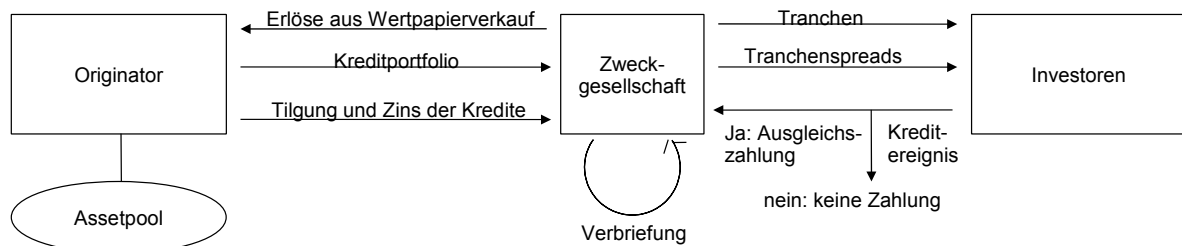


Abbildung 2.9: Die Zahlungsströme beim klassischen CDO-Geschäft

fixe Prämienhöhe von 500bps p.a. zuzüglich eines Upfront Payments, über das hier also die Höhe des Risikos justiert wird.<sup>41</sup> Die übrigen Tranchen werden von externen Ratingagenturen dann häufig auch mit einem Rating versehen. Gerade die Klasse der Tranchen sehr guter Bonität ist typischerweise besonders groß und wird gleichzeitig bei Investoren aus verschiedenen Gründen stark nachgefragt. In Kapitel 5.2 wird hierzu auf die Frage nach „vernünftigen“ Spreadpreisen für die einzelnen Tranchen von CDOs eingegangen.

### Varianten von CDOs

CDO-Geschäfte finden in diversen Formen und aufgrund verschiedener Zielsetzungen der Emittenten statt. Unterschieden werden folgende Varianten:

*Market Value und Cash Flow CDOs:* Bei Market Value CDOs erfolgt eine regelmäßige Neubewertung des zugrunde liegenden Assetpools, sodass auch die Prämienzahlungen des Sicherungsnehmers in der Zeit schwanken.<sup>42</sup> Dabei gibt es einen Assetmanager, der den Assetpool während der Laufzeit durch Austausch von Referenzaktiva umschichtet und damit die Einnahmen aus den Assets stets zu optimieren versucht.<sup>43</sup> Cash Flow CDOs sind weiter verbreitet, die Zahlungsströme aus den Referenzassets, wie auch die Prämienzahlungen zwischen den Kreditderivatkontrahenten bleiben hier über die Zeit konstant (solange kein Ausfall auftritt). Bonitätsveränderungen und der Marktwert der Assets nach der Transaktion spielen hier nur insofern eine Rolle, als dass sie eine geänderte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kreditereignis-Rate widerspiegeln und damit schließlich auch Veränderungen bei Cash Flows und Prämien nach sich ziehen können.

*Arbitrage und Balance Sheet CDOs:* Es hat sich gezeigt, dass durch bloße Umstrukturierungen der ursprünglichen Zahlungsansprüche Arbitragemöglichkeiten aufgedeckt und auch Fehlbewertungen zwischen verschiedenen Bonitätsklassen ausgenutzt werden können.<sup>44</sup> Aus diesem Grund begebene CDOs werden Arbitrage-CDOs und die nicht für die Tranchen benötigten ursprünglichen Prämienzahlungen „Excess Spread“ genannt. Die Motivation des Emittenten eines Balance-Sheet CDOs besteht hingegen in erster Linie

<sup>41</sup>Vgl. Heidorn, T. / König, L. (2003), S. 7.

<sup>42</sup>Vgl. Heidorn, T. / König, L. (2003), S. 10.

<sup>43</sup>Diese Eigenschaft führt zur Bezeichnung des *Managed CDO*. Demgegenüber wird der Assetpool eines *Static CDO* während der Laufzeit nicht umgeschichtet.

<sup>44</sup>Vgl. Elizalde, A. (2005), S. 23.

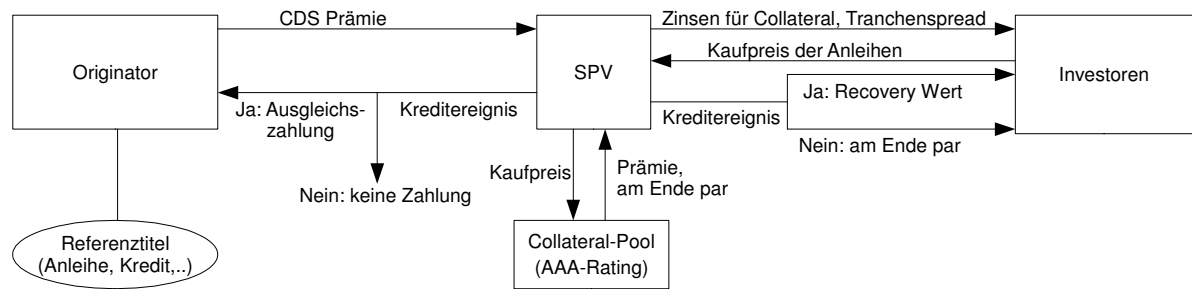


Abbildung 2.10: Die Zahlungsströme beim synthetischen (funded) CDO-Geschäft

darin, Vermögenspositionen aus der eigenen Bilanz zu entfernen, um damit etwa regulatorisches Eigenkapital zu befreien.

*Cash- und synthetische CDOs:* Mit dem Cash CDO ist die Eigentumsübertragung von Kreditforderungen vom Originator an das SPV verbunden. Im Gegensatz dazu werden bei synthetischen CDOs die Kreditrisiken „synthetisch“ (künstlich) und meist durch CDS erzeugt, was zur bereits erwähnten synthetischen Verbriefung führt.<sup>45</sup> Für jede zu besichernde Kreditforderung wird hierbei zwischen Originator und SPV ein CDS abgeschlossen, welcher die originären Zahlungsströme durch Prämien und Kreditereignisse kopiert. Nur hier ergibt sich der Vorteil der Nicht-Auskunftspflicht gegenüber dem ursprünglichen Kreditschuldner.<sup>46</sup>

*Funded und unfunded CDOs:* Hinsichtlich der synthetischen CDOs kann weiter unterschieden werden zwischen funded und unfunded CDOs: nur in der gefundeten Version unterlegt der Protection Seller sein Garantieverprechen, indem er Kapital in Höhe des Nominals des Kontrakts („fully funded“<sup>47</sup>) oder zumindest einen Teil („partially funded“) während der Laufzeit bei seinem Vertragspartner hinterlegt, indem er in einen meist vom SPV erworbenen Anleihenpool sehr guter Bonität investiert.<sup>48</sup> Im Falle eines Kreditereignisses werden Anleihen in Höhe des tatsächlich aufgetretenen Verlusts veräußert und der Erlös verbleibt beim Originator. Nicht für Kreditereignisse benötigte Anleihen werden am Ende der Laufzeit zu „par“ getilgt. Die Abbildung 2.10 illustriert die Zahlungsströme bei einem solchen synthetischen (gefundeten) CDO.

## 2.6 Chancen und Risiken

Nun wird überblicksweise auf die Anwendungsmöglichkeiten und positiven Auswirkungen, die das Geschäft mit Kreditderivaten haben kann, sowie auf mögliche Risiken eingegangen und erläutert, was ein Finanzmarktteilnehmer im Umgang mit diesen Produkten zu beachten hat.

<sup>45</sup>Vgl. Oriwol, D. (2005), S. 78f.

<sup>46</sup>In diesem Fall übernimmt meist der Originator die Aufgaben des Service Agent, da ansonsten die Zweckgesellschaft nach dem Recht vieler Länder auskunftspflichtig gegenüber dem Service Agent ist.

<sup>47</sup>Cash CDOs sind also immer fully funded.

<sup>48</sup>Vgl. Heidorn, T. / König, L. (2003), S. 6.

### 2.6.1 Chancen durch Kreditderivate

Auf der Grundlage der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Motive für den Einsatz von Kreditderivaten wird hier ein Überblick gegeben, wie v.a. kleinere Institute in konkreten Situationen besonders davon profitieren können.

**Risikodiversifikation:** Speziell einer Regionalbank wie der örtlichen Sparkasse erschließt sich in aller Regel kaum die Möglichkeit, im originären Kreditgeschäft ein diversifiziertes Kreditportfolio aufzubauen.<sup>49</sup> Der regional begrenzte Geschäftsbereich bei der Akquisition neuer Forderungsbestände führt im Gegenteil dazu, dass ein solches Kreditinstitut besonders häufig strukturelle, etwa regionale oder branchenspezifische, Konzentrationen im eigenen Kreditforderungsbestand aufbaut. Deshalb kann der potentielle Nutzen des Einsatzes von Kreditderivaten hier als prinzipiell vergleichsweise hoch eingestuft werden. Sollen die Vorteile einer im Neugeschäft auf eine Region fokussierten Bank nicht aufgegeben werden, bleibt für die Bank in jedem Falle nur die Möglichkeit, nachträgliche Maßnahmen zu ergreifen, um das Gesamtportfolio zu diversifizieren.

#### **Absicherung einzelner Kredite**

Klumpenrisiken können neben einer hohen Abhängigkeit mehrerer Einzelkredite natürlich auch durch einzelne Forderungen entstehen, wenn diese ein verhältnismäßig großes Volumen im Gesamtkreditportfolio einer Bank besitzen. Dies liegt vor allem in den Forderungsportfolien kleinerer Kreditinstitute häufiger vor.<sup>50</sup> Der Ausfall eines einzelnen solchen Kredits kann die Solvenz einer kleinen Bank u.U. bereits deutlich spürbar belasten. Durch die Weitergabe von Teilen solcher Forderungspositionen kann sich die Bank dieses Klumpenrisikos entledigen.

#### **Kreditlinienmanagement**

Um die Aufnahme zu großer Einzelrisiken zu verhindern, verordnen sich viele Banken auch interner Kreditlinien, welche Obergrenzen für die Kredithöhe pro Kunde festlegen. Auch von staatlicher Seite werden Kreditlinien vorgeschrieben. Durch die Forderungsweitergabe kann eine Bank über diese Grenze hinausgehendes Kapital an einen Kunden leihen und damit u.U. Kundenwünschen auch flexibler begegnen.<sup>51</sup>

#### **Erschließung neuer Märkte und Bilanzbereinigung**

Kreditderivate eröffnen völlig neue Möglichkeiten hinsichtlich des Einstiegs in neue Märkte. Vor allem Märkte in Regionen, in denen die Bank keine eigenen Standorte besitzt, sind im originären Geschäft kaum zugänglich. Durch die Übernahme von Risiken dort angesie-

---

<sup>49</sup>Vgl. Heidorn, T. (2007), S. 3.

<sup>50</sup>Vgl. Kern, M. (2003), S. 18.

<sup>51</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), Kap. 8.3.3.

delter Kreditinstitute mittels kreditderivativer Geschäfte lässt sich nun ohne große Vorlaufkosten und sogar ohne Kreditengagement der Einstieg in unternehmensferne Märkte vollziehen.<sup>52</sup> Gibt die Bank dafür risikobehaftete Assets aus ihrem Bestand ab, für die sie aus ihrer Sicht der Dinge keine das Risiko marktgerecht widerspiegelnde Verzinsung erhält, so spricht man hierbei auch von „Bilanzbereinigung“.<sup>53</sup>

### **Spekulation und Arbitrage**

Wie bereits bei den Arbitrage CDOs angedeutet, werden nicht nur aus der Risikotransfer-Motivation Kreditderivatgeschäfte getätigt. Vielmehr streben Banken konkrete Risikoniveaus an. Mit Hilfe von den Optionen immanenten Hebelwirkungen können dazu auch im Kreditgeschäftsbereich hohe Renditen bei wenig eingesetztem Kapital (und entsprechend hohem Risiko) erreicht werden.<sup>54</sup> Durch eine geschickte Zusammensetzung des Gesamtportfolios kann auch die staatlich vorgegebene Eigenkapitalunterlegung in nicht unerheblichem Maße gesenkt werden („regulatorisches Arbitrage“).<sup>55</sup>

## **2.6.2 Risiken durch Kreditderivate**

Das Engagement in Kreditderivate ist für eine Bank zunächst einmal ursprünglich mit notwendigen Aufwendungen zur Erfüllung technischer Voraussetzungen und organisatorischen sowie aufsichtsrechtlichen Anforderungen verbunden. Zudem bedarf es hinreichend geschulter Mitarbeiter. Jedoch verbleibt selbst unter diesen Voraussetzungen mit ihren relativ planbaren Aufwendungen für die Bank eine Reihe viel schwieriger einzuschätzender Geschäftsrisiken, auf die nun kurz eingegangen wird. Grundsätzlich ist vorweg festzuhalten, dass die Komplexität vieler Kreditderivate die potentielle Sprengkraft dieser Gefahren wesentlich zu erhöhen vermag.

### **Überblick**

Die Risiken einer Bank lassen sich nach ihrer Ursache unterteilen in Kredit-, Markt- und operationale Risiken.<sup>56</sup> Das Marktrisiko (Risiko von Wertänderungen betrachteter Güter auf einem Markt) und das operationelle Risiko (technische, personelle oder sonstige strukturelle Risiken im Geschäftsablauf) stehen nicht im Zentrum der vorliegenden Arbeit und werden daher weitgehend vernachlässigt. Das Kreditrisiko beschreibt bei der Betrachtung von Instrumenten zum Kreditrisikotransfer den z.T. erheblichen Schaden für eine Bank, der mit einem Kreditereignis einhergehen kann.<sup>57</sup> Das Kreditrisiko er-

---

<sup>52</sup>Vgl. Müller, F. (2000), S. 46.

<sup>53</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 57.

<sup>54</sup>Neben der Spekulation auf Ausfälle betrachteter Schuldner kann auch eine auf Veränderung der Bonität eines Schuldners im betrachteten Zeitintervall spekuliert werden, da sie i.d.R. eine Veränderung der Marktpreise für Kredite des Schuldners nach sich ziehen.

<sup>55</sup>Vgl. Martin, M. et al. (2006), S. 9.

<sup>56</sup>Vgl. Martin, M. et al. (2006), S. 2

<sup>57</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 102.

gibt sich durch Unsicherheit über die Solvabilität von Schuldern (Adressenausfallrisiko) sowie Geschäftspartnern (Kontrahentenrisiko). Es lässt sich weiter unterteilen in das Bonitätsrisiko, also die Gefahr einer Verschlechterung der Bonität (Kreditwürdigkeit) des Schuldners, die sich i.d.R. im Marktpreis des Risikos für das Unternehmen niederschlägt, sowie in das Ausfallrisiko und in dessen Folge das Recovery Risiko. Letzteres meint das Risiko, dass der erwartete Recovery Betrag geringer als erwartet ausfällt.

Haben Wertpapiergeschäfte einen Fälligkeitszeitpunkt oder hat eine Partei einen festen Termin vor Augen, zu dem er ein Geschäft abschließen möchte, so ist ein wesentlicher Bestandteil des Kreditausfallrisikos auch das Ankunftsrisiko, welches die Unsicherheit ausdrückt, ob ein Kreditereignis während der Laufzeit stattfindet. Noch genauer beschreibt das Timingrisiko gerade die Unsicherheit über den konkreten Ausfallzeitpunkt.<sup>58</sup> Bei Kreditportfolios ergibt sich zudem die Unsicherheit über die Abhängigkeiten zwischen Ausfallereignissen, womit sich auch diese Arbeit maßgeblich beschäftigt. Bei CDO-Geschäften spielen die beiden letztgenannten Risiken herausragende Rollen.

### **Informationsasymmetrien**

Die typischen Folgen von Informationsasymmetrien, wie Adverse Selection und Moral Hazard ergeben sich auch beim Kreditderivatemarkt. Einige sind regional besonders relevant, beispielsweise durch das Fehlen externer, öffentlich zugänglicher Ratings im europäischen Raum. Auf dieses weite Thema wird hier nicht näher eingegangen, sondern auf die zahlreiche Literatur darüber verwiesen<sup>59</sup> und nur angemerkt, dass die oben angedeuteten Credit Enhancements einige dieser Gefahren mindern sollen.

### **Gefahren bei OTC-Kontrakten**

Obwohl beim Handel mit Kreditderivaten seit einigen Jahren eine steigende Tendenz zur Standardisierung zu verzeichnen ist, wird immer noch der überwiegende Anteil der Geschäfte individuell zwischen zwei Vertragspartnern (OTC) ausgehandelt.<sup>60</sup> Daraus resultiert jedoch für die Vertragspartner Aufwand für die Festlegung der Vertragsgestaltung - die OTC-Methode impliziert i.d.R. dennoch erhöhte Gefahren durch Kontrahentenrisiken, welche die Durchsetzung beanspruchter Zahlungen gefährden.<sup>61</sup>

### **Bewertungsprobleme**

Selbst bei vollständig symmetrisch verteilten Informationen aller Marktteilnehmer, der Vernachlässigung etwa von Problemen bei OTC-Geschäften oder der Annahme vollkom-

---

<sup>58</sup>Vgl. Heidorn, T. / König, L. (2003), S. 13.

<sup>59</sup>Ausführliche Darstellungen finden sich beispielsweise in Kern, M. (2003) sowie Duffie, D. und Garleanu (2001).

<sup>60</sup>Vor allem neuere Derivatprodukte werden fast gänzlich OTC gehandelt, da ihr Handelsvolumen noch nicht für eine Börseneinführung ausreicht und auch Standarddokumentationen hierfür fehlen; vgl. Rudolph et al. (2007), S. 63.

<sup>61</sup>Vgl. Oriwol, D. (2005), S. 37.

mener Märkte<sup>62</sup> ist die Bestimmung einer fairen Prämie für die Übernahme von Kreditrisiken mittels Kreditderivaten z.T. noch eine anspruchsvolle Aufgabe. Besonders die Bestimmung von Abhängigkeiten verschiedener Schuldner und auch der (zeitlich) exakten Lage der Ausfallzeitpunkte bilden zentrale Probleme, wenn es um die Betrachtung von Kreditderivaten mit einem Kreditportfolio als Referenzaktivum geht. Auf diese Probleme wird ab Kapitel 4 eingegangen.

Neben diesem Anspruch einer „objektiven“ Bewertung sei noch angemerkt, dass es davon abgesehen in der Realität auch die Aufgabe des CDO-Emittenten ist, die tatsächlichen aktuellen Risikoeinstellungen unterschiedlicher Investorengruppen, wie z.B. (Rück-)Versicherern, Banken und Privatanleger zu kennen und deren Renditevorstellungen in Abhängigkeit vom Rating einzuschätzen, um alle Tranchen am Markt auch wirklich platzieren zu können und andererseits „kein Geld zu verschenken“.<sup>63</sup>

---

<sup>62</sup>Auf vollkommenen Kapitalmärkten fallen weder Informations-, noch Transaktionskosten oder Steuern an. Käufe sowie Leerverkäufe von Finanztiteln sind unbeschränkt und in beliebiger Teilbarkeit möglich. Alle Investoren haben ferner gleichen Marktzugang und jeder Marktteilnehmer sieht die Preise von Wertpapieren und Derivaten als von seiner Disposition unabhängig an.

<sup>63</sup>Vgl. Heidorn, T. / König, L. (2003), S. 8.



## 3 iTraxx

Eine wichtige Innovation im Kreditderivate-Markt ist durch die Schaffung von standardisierten und mittlerweile z.T. sehr liquiden Kreditderivate-Indizes gelegt worden. Für den europäischen Bereich hat im Jahre 2004 die Börse iTraxx ihre Pforten geöffnet. Sie hat sich seitdem zu einem etablierten Benchmark im europäischen (sowie asiatischen und australischen) Kreditbereich entwickelt und ermöglicht in diesen Regionen erstmals einen diversifizierten und liquiden Zugang zu unterschiedlichsten Kreditderivaten, an der diverse Investment-, Trading- und Hedging-Strategien realisiert werden können.<sup>64</sup> Dies eröffnet auch kleineren Regionalbanken die Möglichkeit, in ihren Kreditbüchern bestehende Branchenrisiken (komfortabler) aktiv zu managen und auf direktem Wege diversifizierte Forderungen in das eigene Portfolio aufzunehmen.

### 3.1 Historie und Aufbau von iTraxx

Im Jahre 2004 ist die International Index Company<sup>65</sup> (IIC) aus einer Fusion der Kreditindizes iBoxx Ltd und Trac-x LLC entstanden. Unter der Feder von IIC ist in der Folge der Anleihenindex „Dow Jones iBoxx“ sowie die Kreditderivatbörse „Dow Jones iTraxx“ gegründet worden.<sup>66</sup> Dahinter verbirgt sich eine Indexfamilie, die einen diversifizierten Zugang zum gesamten europäischen Kreditmarkt bietet.<sup>67</sup> Die Abbildung 3.1 gibt einen Überblick über die aktuelle DJ iTraxx-Produktpalette, deren wichtigste Vertreter im folgenden Abschnitt näher vorgestellt werden.

iTraxx ermöglicht die Einnahme von Long- und Shortpositionen, d.h. der Investor kann als Versicherer auftreten oder aber selbst Versicherungsschutz in Anspruch nehmen und dafür eine Prämie (Spread) zahlen.

Die Indizes werden meist zu unterschiedlichen Laufzeiten angeboten, der iTraxx Europe Benchmark Index ist mittlerweile z.B. zu 1, 2, 3, 5, 7 und 10 Jahren handelbar.

---

<sup>64</sup> Vgl. Haas, P. (2005), S. 1.

<sup>65</sup> IIC ist eine hundertprozentige Tochterfirma des Finanzdienstleisters Markit Group.

<sup>66</sup> Vgl. Felsenheimer, J. / Gisdakis, P. / Zaiser, M. (2005), S. 2.

<sup>67</sup> Ein zweiter Schwerpunkt der IIC wurde auf den asiatischen sowie australischen Markt gelegt, wird in dieser Arbeit jedoch vernachlässigt.

| Region               | Typ   | Index Name               | Anzahl der Mitglieder | Beschreibung  | gehandelte Laufzeiten (in Jahren) |
|----------------------|---|--------------------------|-----------------------|---|-----------------------------------|
| Europa               | Benchmark Indizes                                   | iTraxx Europe            | 125                   | Die liquiden Adressen der letzten 6 Monate vor Indexzusammenstellung    | 3, 5, 7, 10                       |
|                      |   | iTraxx Europe HiVol      | 30                    | Adressen mit den höchsten spreads des iTraxx Europe                     | 3, 5, 7, 10                       |
|                      |   | iTraxx Europe Crossover  | 45                    | Adressen unterhalb Investment- Grad-Niveau                              | 3, 5, 7, 10                       |
|                      |   | iTraxx LevX              | 50+50                 | Leveraged Loan CDS (vorrangig, nachrangig)                              | 5                                 |
|                      |   | iTraxx Total Return      |                       | Misst jeweils den Erfolg von Besitzern der iTraxx-Europe-Indizes (5 J.) | 5                                 |
|                      | Sektor Indizes (= Subindizes der Benchmark Indizes) | iTraxx Non-Financials    | 100                   | Adressen außerhalb des Finanzsektors                                    | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Senior Financials | 25                    | nachrangige Senior Adressen   | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Sub Financials    | 25                    | nachrangige Junior Adressen (d.h. ??)                                   | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx TMT               | 20                    | Telekommunikation, Medien und Technologie*                              | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Industrials       | 20                    | Adressen aus dem Industrie-Sektor*                                      | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Energy            | 20                    | Adressen aus dem Energie-Sektor*  | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Consumers         | 30                    | Adressen aus dem Konsumbereich*   | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Autos             | 10                    | Adressen aus der Automobilbranche*                                      | 5, 10                             |
| Asien/<br>Australien | Benchmark Indizes                                   | iTraxx Japan**           | 50                    | Die liquiden Adressen Japans  | 3, 5, 10                          |
|                      |   | iTraxx Asia ex-Japan***  | 50                    | Die liquiden Adressen Asiens (ohne Japan)                               | 5, 10                             |
|                      |   | iTraxx Australia         | 25                    | Die liquiden Adressen Australiens                                       | 5, 10                             |

\* nach dem Oktober 2006 wurden keine weiteren Serien mehr aufgelegt

\*\* Die Kategorie ist untergliedert in Indizes diverser Branchen (ähnlich wie beim iTraxx Europe)

\*\*\* In dieser Kategorie befinden sich Indizes mit Titeln diverser Sub-Regionen

Abbildung 3.1: Veranschaulichung der aktuell angebotenen iTraxx-Indizes

## 3.2 Vorstellung der Indexfamilie

Der DJ iTraxx Europe Benchmark-Index bildet den Hauptindex und das liquideste Produkt der Börse, da er die größten (europäischen) Adressen „guter“ Bonität aus allen Branchen aufnimmt und als Underlying für viele weitere iTraxx-Kreditderivate fungiert. Der Index enthält - mit einigen Einschränkungen - die 125 innerhalb der letzten sechs Monate volumenmäßig meistgehandelten Titel des CDS-Marktes. Die Volumenbestimmung erfolgt über eine regelmäßige Händlerumfrage. Zu den Einschränkungen zählt eine feste Anzahl an Titeln pro Branche (sodass zu den größten 125 gehörige Titel wegen der fixen Branchengröße u.U. unberücksichtigt bleiben). Zudem werden keine Titel mit Junk-Status (d.h. mit Rating BBB- und negativem Ausblick oder schlechter geratete Titel) aufgenommen. Jeder der 125 Titel geht mit einem Gewicht von 0,8% in den Index ein. Der DJ iTraxx Europe Benchmark ist im engeren Sinne aber kein Index, da keine Indexstände durch die IIC berechnet werden, weshalb es sich vielmehr um einen Basket von Einzeltiteln handelt, der auch als Underlying für diverse andere derivative Instrumente fungiert.<sup>68</sup>

Des Weiteren umfasst die iTraxx-Familie die Indizes

- DJ iTraxx HiVol: Dieser Index nimmt sektorunabhängig die 30 Titel aus dem Benchmark-Index mit den höchsten 5-Jahres-CDS-Spreads auf. Alle Titel gehen gleichgewichtet in den Index ein, der nur als Indexswap handelbar ist<sup>69</sup> und in der alle sechs Monate eine neue Serie aufgelegt wird.
- DJ iTraxxCorporate: Der Index läuft unabhängig vom Benchmark-Portfolio und beinhaltet derzeit 45 Titel - auch nichteuropäische, solange sie Euro-Anleihen emittieren. Die Gewichtung in dem Index hängt von der Marktkapitalisierung der einzelnen Titel sowie der Duration<sup>70</sup> der Titel<sup>71</sup> ab.
- DJ iTraxx Crossover: Er umfasst 30 wiederum durch Händlerumfragen ausgewählte, gleichgewichtete Titel, die hier aber gerade Junk-Status besitzen müssen („Crossover- und High Yield-Titel“), also die vom Hauptindex kategorisch ausgeschlossenen Titel, die zudem nicht aus dem Finanzsektor stammen dürfen und gewisse Kriterien hinsichtlich der Spreadhöhe und des ausstehenden Anleihevolumens einhalten müssen.<sup>72</sup>

---

<sup>68</sup>Vgl. Felsenheimer, J. et al. (2005), S. 3,7.

<sup>69</sup>D.h. es finden bei Vertragsabschluss noch keine Zahlungsströme statt.

<sup>70</sup>D.h. des gewichteten Mittelwerts der Zeitpunkte, zu denen der Anleger Zahlungen aus einem Wertpapier erhält. Die Duration ist also eine Kennzahl für die durchschnittliche *Bindungsdauer* einer Kapitalanlage eines festverzinslichen Wertpapiers (z.B. einer Anleihe).

<sup>71</sup>Vgl. Felsenheimer, J. et al. (2005), S. 4.

<sup>72</sup>Der Spread muss mindestens die doppelte Spreadhöhe des DJ iTraxx Europe Non-Financials-Index aufweisen, höchstens 1.250 bps oder ein Upfront-Payment von höchstens 35% besitzen und ein ausstehendes Volumen von öffentlich handelbaren Anleihen in Höhe von 100 Mio.€ überschreiten - vgl. Felsenheimer, J. et al. (2005), S. 4.

- DJ iTraxx LevX: Der LevX umfasst zwei Indizes, die sich auf vorrangige (LevX senior Index) bzw. nachrangige<sup>73</sup> (LevX subordinated Index) Leveraged Loans an europäische Unternehmen beziehen, d.h. auf besicherte Darlehen an Unternehmen im Junk-Status. Die erste Serie wurde im Oktober 2006 aufgelegt.<sup>74</sup>
- Der iTraxx Total Return wird bezüglich des iTraxx Europe Benchmark, HiVol und Crossover-Indexes angeboten und misst jeweils den Erfolg eines Risikoverkäufers, der in die einzelnen, entsprechenden CDS der drei Indizes investiert. Die ausgeschütteten Prämien werden dazu umgehend wieder in den Index reinvestiert. Der Index wird dabei stets mit neuesten iTraxx mitgerollt.<sup>75</sup>

Neben den Indizes existieren eine Reihe weiterer Produkte, die oft gerade einen der obigen Indizes als Underlying verwenden. Wie bereits angedeutet, bietet IIC z.B. für den iTraxx Europe standardisierte Indextranchen an. Zu beachten ist, dass die iTraxx-Tranchen zwar synthetischen CDO-Transaktionen des OTC-Bereichs entsprechen, demgegenüber aber standardisierte, aktiv handelbare und damit liquide Produkte sind.<sup>76</sup> Weitere Produkte der Börse sind Optionen, mit denen komplexere Handelsstrategien realisiert werden können (wie z.B. Spreadoptionen) und spezielle Produkte wie Recovery Default Swaps, die über einen Forward-Kontrakt den Recoverywert festlegen, sodass im Ausfallszenario die Unsicherheit über die Höhe des Recovery-Werts des betroffenen Schuldners eliminiert wird. Auf diese diversen Produkte wird hier jedoch nicht näher eingegangen.

### 3.3 Handel in iTraxx

Neben der Zusammensetzung der Indizes erfolgt auch der Handel in iTraxx in möglichst transparenter Weise.<sup>77</sup> Bei allen iTraxx-Produkten tritt IIC als zentrale Gegenpartei auf, weshalb Geld- und Briefkurse auftreten, zu denen IIC bereit ist zu handeln. Bei der Auflage einer neuen Indexserie wird allerdings ein über die ganze Laufzeit konstanter Spread festgelegt, der sogenannte Strike Spread. Dies ist aus Standardisierungsgründen und zur Erleichterung des Hedgings sinnvoll.<sup>78</sup>

Wertänderungen, die den Handel nach dem Zeitpunkt der Indexauflage betreffen, werden über ein flexibles Upfront Payment, welches der Indexkäufer leisten muss oder erhält, beim Erwerb des Swaps ausgeglichen. Kreditereignisse werden spezifiziert auf der Grund-

<sup>73</sup>Im Insolvenzfall werden die Darlehensgläubiger in der Reihenfolge des Rangs ihrer Forderungen aus der Insolvenzmasse bedient. Vorrangige Darlehen werden zuerst bedient, bei nachrangigen Darlehen steigt deshalb im Insolvenzfall das Ausfallrisiko. Der Darlehensgeber eines nachrangigen Darlehens erhebt im Allgemeinen einen Zinssatz oberhalb demjenigen von vorrangigen Krediten.

<sup>74</sup>Vgl. Rudolph et al. (2007), S. 97.

<sup>75</sup>Vgl. den Markit iTraxx Total Return Index Guide (2009). Zum „Roll“-Begriff siehe weiter unten.

<sup>76</sup>Vgl. den Monatsbericht der Deutschen Bundesbank (April, 2004), S. 30.

<sup>77</sup>Für Details wird auf den Markit-Regelkatalog verwiesen: Siehe <http://indices.markit.com/> unter der Rubrik „Publications“.

<sup>78</sup>Vgl. die Cashvariante bei CDOs.

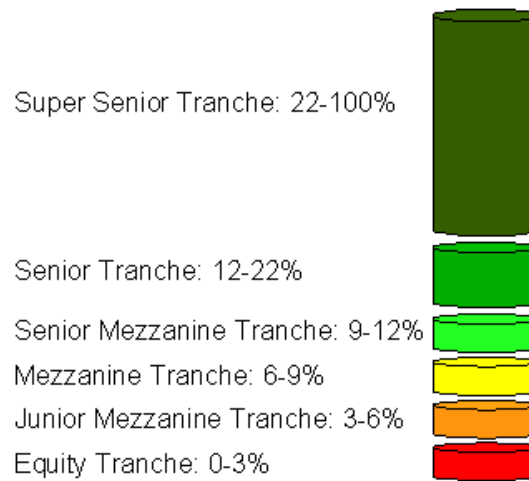


Abbildung 3.2: Die Tranchen des iTraxx-Benchmark-Portfolios

lage der Dokumentationen der ISDA. Beim Handel mit den Indizes wird unterschieden zwischen der gefundeten Version (Risikokäufer erwirbt eine CLN) und nicht gefundetem Handel (CDS-Format).<sup>79</sup>

Unabhängig vom Funding werden alle Indizes halbjährig aktualisiert - man spricht hierbei auch vom Roll(over) des iTraxx. Jedoch findet dabei kein Austausch von Unternehmen in dem jeweiligen Index statt (anders als etwa bei Aktienindizes wie dem DAX), sondern es wird ein gänzlich neuer Index mit denselben, jedoch auf die aktuelle Situation bezogenen Kriterien, aufgelegt. Auch die älteren Indizes werden weiter bis zu ihrem Laufzeitende gehandelt. Um die verschiedenen Versionen daher zu identifizieren, werden die nacheinander aufgelegten Indizes durchnummeriert und als "Serien" des Index bezeichnet.<sup>80</sup> Die jeweils neueste Serie nennt man "on the run" - sie liegt meist auch im Fokus des Publikumsinteresses, da viele Marktteilnehmer infolge eines Rolls ihre Positionen "mitrollen" (also ältere Serien verkaufen und neue erwerben). Die erste Serie des iTraxx Europe ist im Juni 2004 gestartet. Danach wurden die Neuauflagen - und damit auch die Fälligkeiten - jedoch auf den März und September jedes Jahres gelegt, sodass der Index nun synchron zu seinem größten Pendant im nordamerikanischen Raum läuft - dem ebenfalls von Markit betreuten Dow Jones CDX.

### CDO-Tranchen auf den iTraxx-Hauptindex

Gegenüber gewöhnlichen synthetischen CDO-Geschäften stellen DJ iTraxx-Tranchenprodukte hochliquide Wertpapiere dar. Wegen ihrer Standardisierung eignen sie sich jedoch nicht, um maßgeschneiderte Absicherungsstrategien eines spezifischen Portfolios einer Bank abzusichern. Daher bilden spekulative Investoren und (Kredit-)Hedgefonds die Hauptakteure beim Handel mit diesen Produkten.<sup>81</sup> Während voll-tranchierte CDOs das gesamte Forderungsportfolio verbriefen, können die iTraxx-Tranchen auf den Assetpool einzeln

<sup>79</sup>Felsenheimer, J. et al. (2005), S. 12f.

<sup>80</sup>Vgl. Martin, M. et al. (2006), S. 51.

<sup>81</sup>Vgl. Felsenheimer, J. et al. (2005), S. 29f.

und in verschiedenen Höhen gehandelt werden.<sup>82</sup> Man bezeichnet sie daher auch als Single Tranche CDOs<sup>83</sup> (STCDOs). Der CDO-Manager hat hierbei also das Risiko der nicht veräußerten Tranchen zu hedgen.

Die iTraxx-Tranchen des Benchmark-Index werden später wieder aufgegriffen und zum Vergleich mit Tranchen anderer Portfolios herangezogen.

---

<sup>82</sup>Die Super Senior Tranche des iTraxx-Europe wird allerdings nicht zum Handel angeboten.

<sup>83</sup>Ein "voller" CDO ist also eine Zusammenstellung von STCDOs, die genau den gesamten Portfolioverlust überdecken.

# 4 Kreditrisikomodellierung

Ziel dieses Kapitels ist die Darstellung gegenwärtiger Bewertungsmodelle für Kreditderivate, wobei hier v.a. auf die Bepreisung von CDO-Tranchen abgezielt wird.<sup>84</sup>

Für die Bewertungszwecke wird hier zunächst in 4.1 der formale Rahmen für die folgenden Kapitel abgesteckt und in diesem dann die mathematischen Grundlagen (4.2) geschaffen. In Abschnitt 4.3 wird das spätere Anwendungsziel formuliert. Die Vorstellung derzeit üblicher Modelle für den Ausfall eines einzelnen Schuldners sowie Modelle auf Portfolioebene erfolgt in 4.4 sowie 4.5. Schließlich wird in Vorbereitung auf das nächste Kapitel eine Bewertungsformel für den risikoneutralen CDS-Spread in Intensitätsmodellen hergeleitet und gezeigt, wie daraus an Marktdaten kalibrierte Intensitäten für die spätere CDO-Bewertung mit dem Copula-Ansatz gewonnen werden können.<sup>85</sup>

## 4.1 Formaler Rahmen

### Arbitragefreies Marktmodell

Die Formulierung eines passenden Modellrahmens erfolgt in aus finanzmathematischer Sicht kanonischer Form.<sup>86</sup> Betrachtet wird ein Finanzmarktmodell mit  $d + 1$  Basisfinanzinstrumenten ( $d \in \mathbb{N}$ ), welche stets und in beliebiger Höhe gehandelt werden können (auch Leerverkäufe möglich). Von Transaktionskosten, Steuern und anderen Friktionen wird aus Gründen der Einfachheit abgesehen (insbesondere treten keine Geld- und Briefspannen - wie beim iTraxx - auf). Gehandelt werden kann innerhalb eines Zeitintervalls  $[0, T]$ ,  $T \in (0, \infty)$ , wobei der Zeitpunkt 0 den Ist-Zustand bezeichnet. Für Anwendungsfälle symbolisiert  $T$  meist eine Jahresanzahl und wird so groß gewählt, dass die Fälligkeitstermine aller betrachteten, endfälligen Finanzinstrumente in diesem Zeitintervall liegen. Zur Modellierung der wirtschaftlichen Unsicherheit dient ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ , bei dem  $\Omega$  die möglichen Zustände in

---

<sup>84</sup>Nicht zuletzt auch vor dem Hintergrund der Finanzkrise und ihrem direkten Bezug zum Preisniveau von Basket-Kreditderivaten auf dem Weltmarkt ist einsehbar, dass das Abbildungsvermögen der Realität vieler derzeitiger Modelle noch unzureichend zu sein scheint, gleichzeitig natürlich aber die dringliche Forderung nach praktikablen und dennoch einfach zu bestimmenden Modellen besteht. Insofern kann das Thema dieses Kapitels also als weiterhin in einer Entwicklungsphase befindlich angesehen werden.

<sup>85</sup>Das Kapitel orientiert sich v.a. an den Darstellungen in Bielecki&Rutkowski (2002), Bluhm et al. (2002), Martin et al. (2006) sowie Schönbucher (2003).

<sup>86</sup>Die Darstellungen in diesem Kapitel orientieren sich an Bielecki&Rutkowski (2002), Martin et al. (2006) sowie

der realen Welt beschreibe, der die usual conditions erfülle<sup>87</sup> und in dem  $\mathcal{F}_0$  zudem bezüglich  $\mathbb{P}$  trivial sei (d.h.  $\forall A \in \mathcal{F}_0$  gilt  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ ).

Der Preisverlauf

$$S(t) := \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ \dots \\ S_d(t) \end{pmatrix}_{t \in [0, T]}$$

der Finanzgüter in dem Markt sei ein aus lokal-beschränkten, nichtnegativen Semimartingalen bestehender stochastischer Prozess.<sup>88</sup>  $S_0$  sei dabei das *Numéraire*, also ein Finanzgut, bezüglich dessen Wert die Preise anderer Finanzgüter relativ gemessen werden. Hier ist  $S_0$  stets eine risikolose Anlage mit stetiger Verzinsung. Als solches wird es fortan auch *Bankkonto* genannt und wird im Falle keiner anderen Angaben modelliert in der Gestalt

$$S_0(t) := B(0, t) := \exp \left( \int_0^t r(u) du \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

mit der sogenannten (deterministischen) *Short-Rate*

$$r : [0; T] \rightarrow [0, \infty),$$

die  $\int_0^T r(t) dt < \infty$  erfülle. Anschaulich beschreibt die Short-Rate den kreditrisikolosen Zinssatz „infinitesimaler Dauer“.

Es wird in der Folge die wichtige Grundannahme getroffen, dass sowohl das Ausgangs-, als auch um derivative Finanzgüter erweiterte Modelle arbitragefrei und vollständig sind. Nach Harrison&Pliska [36] existiert dann ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß.<sup>89</sup> Das zu  $\mathbb{P}$  äquivalente W-Maß  $\mathbb{P}^*$  sei also das in dem Finanzmarkt eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß, von dem ab Abschnitt 4.4 Gebrauch gemacht wird. Ebenfalls nach Harrison&Pliska [35] folgt damit die Existenz eines eindeutig bestimmten Preisprozesses der Finanzgüter in dem Markt. Genauer bilden alle unter  $\mathbb{P}^*$  mit  $S_0(t)_{t \in [0, T]}$  abdiskontierten Finanzgüter Martingale, und der Preis  $P(t)$  eines Claims  $C$  mit Fälligkeit  $T$  ist für alle  $t \in [0, T]$  durch

$$P(t) := S_0(t) \mathbb{E}^* \left( \frac{C}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}^* \left( S_0(t) \cdot \frac{C}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t \right). \quad (4.1)$$

<sup>87</sup> $\mathcal{F}_0$  enthält also alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen und  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  ist eine rechtsseitig stetige Filtration des W-Raums, d.h.  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \sigma(\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon})$  gelte  $\forall t \in [0, T]$ .

<sup>88</sup>Diese Klasse von Prozessen ist „klein“ genug, um noch stochastisch integrierbar zu sein, beinhaltet aber gleichzeitig schon die wesentlichen, zur Modellierung gewünschten Prozesse wie Wiener Prozesse und geometrisch Brownsche Bewegungen.

<sup>89</sup>Wenn nicht das Hedgen, sondern wie hier das Bewerten von Claims im Vordergrund steht, werden aus einer ökonomischen Herangehensweise heraus z.T. auch alternative Ansätze mit „weicheeren“ Voraussetzungen verfolgt. So wird etwa nur die No free lunch with vanishing risk-Bedingung vorausgesetzt und anstelle der Vollständigkeit anhand von ökonomischen Argumenten dann ein einziges äquivalentes Martingalmaß identifiziert. Hierzu wird beispielsweise auf Elizalde, A. (2006), S.46 verwiesen.



eindeutig bestimmt. Im Folgenden gilt das Interesse derweil vornehmlich dem Auffinden arbitragefreier Preise aus heutiger Sicht, also in  $t = 0$ .

### Kreditrisikomodellierung

Nun werden die grundlegenden Begriffe speziell für die Kreditrisikomodellierung eingeführt. Dazu wird zunächst die Existenz folgender Finanzgüter auf dem obigen W-Raum vorausgesetzt:

- Gibt es in dem Markt  $k \in \mathbb{N}$  ausfallgefährdete Finanzgüter, so seien  $\tau_i : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , jeweils an  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierte Stopzeiten, die den Ausfallzeitpunkt der jeweiligen Forderung modellieren.
- Im Falle von Unternehmenswertmodellen bezeichne  $V = (V_t)_{t \in (0, T]}$  den Firmenwertprozess eines Schuldners. Er bildet in diesen Modellen die Grundlage für die Modellierung der Firmensolvabilität.  $V$  sei adaptiert und progressiv messbar bezüglich  $\mathcal{F}$  (d.h.  $\forall t \geq 0$  ist  $V : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(s, \omega) \mapsto V_t(\omega)$   $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_t$ -messbar)
- Im Falle einer Kreditforderung beschreibe der Prozess  $RB = (RB_t)_{t \in (0, T]}$  den (zufälligen) Recovery Betrag in  $\tau$ , d.h. den Teil einer Forderung, den ein Gläubiger zur Zeit des Schuldnerausfalls in  $\tau \in (0, T]$  noch aus der Verwertung von Sicherheiten oder sonstigen Rechten erhält.<sup>90</sup>  $RB$  sei wie  $V$  progressiv messbar bezüglich  $\mathcal{F}$ . Die  $\mathcal{F}_T$ -messbare Zufallsvariable  $RB_T^*$  bezeichne zudem den Recovery Betrag in  $T$  (bei Ausfall in  $\tau \leq T$ ).

Für jede Ausfallzeit  $\tau_i$  gelte  $\mathbb{P}(0 < \tau_i < \infty) = 1$  (Ausfälle haben  $\mathbb{P}$ -f.s. noch nicht stattgefunden, tun es aber in endlicher Zeit). Der zugehörige „Ausfallindikator“

$$D_t := \mathbb{1}_{[0, t]}(\tau), \quad t \in (0, T],$$

beschreibt im Falle  $D_t = 1$  den Ausfall der Kreditforderung bis zum Zeitpunkt  $t$ . Die Ausfallwahrscheinlichkeit des Finanzguts im gesamten Betrachtungszeitraum ist damit gegeben durch

$$p_D := \mathbb{P}(D_T = 1) = \mathbb{P}(0 < \tau \leq T).$$

Allgemeiner wird mit

$$p_D(t_1, t_2) = \mathbb{P}(t_1 < \tau \leq t_2), \quad t_1, t_2 \in (0, T], \quad t_1 < t_2,$$

die Ausfallwahrscheinlichkeit des Finanzguts in der Zeitspanne  $(t_1, t_2]$  bezeichnet. Wird ein Portfolio von  $N > 1$  Geschäften betrachtet, so werden die oben eingeführten Größen

---

<sup>90</sup>In diesem Fall wird also vereinfachend angenommen, dass im Falle eines Ausfalls dadurch ausgelöste Forderungen unverzüglich beglichen werden.

mit dem Index  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , versehen.

Es sei nun  $Y(T)$  der in  $T$  fällige Rückzahlungsbetrag einer Forderung. Mit

$$Y^d(T) := Y(T) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + RB_T^* \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}$$

wird dann der Auszahlungsbetrag in Abhängigkeit von einem eventuellen Kreditereignis beschrieben. Zum Zeitpunkt  $t \in (0, T]$  steht dem Kreditgeber also der Betrag

$$Z_t = Y^d(T) \mathbb{1}_{\{\tau \geq T\}} + \int_0^t RB_u dD_u \quad (4.2)$$

zu. Des Weiteren sei  $Y^d(t, T)$  der Marktwert der ausfallgefährdeten Forderung in  $t$ , also der Barwert aller nach  $t$  noch ausstehenden Zahlungen. Insbesondere ist  $Y^d(T, T) = 0$ . Der arbitragefreie Preisprozess des risikobehafteten Finanzguts ( $\mathbb{P}^*$ -Martingal) sei  $S_t^1 = Y^d(t, T)$ . Nun lässt sich verifizieren:

**Satz 4.1** *Es gilt*

$$Y^d(t, T) = B(0, t) \mathbb{E}^* \left( \int_t^T B(0, u)^{-1} dZ_u \mid \mathcal{F}_t \right). \quad (4.3)$$

**Beweis:** Für  $t \in [0, T]$  wird die Handelsstrategie  $H = \begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_u^1 \end{pmatrix}_{u \in [0, T]}$  betrachtet, bei der in  $[t, T]$   $H^0$  Anteile des Numéraires gehalten werden und das kreditrisikobehaftete Gut in  $u = 0$  zum Preis  $S_0^1$  gekauft wurde und bis  $T$  gehalten wird. Es ist  $S_t^1 = Y^d(t, T)$ , also  $S_T^1 = 0$ . Für den Gewinn  $G_T(H)$  in  $T$  aus dieser Strategie gilt dann

$$G_T(H) = G_t(H) + S_T^1 - S_t^1 + \int_t^T B(0, u)^{-1} dZ_u.$$

Da der Gewinnprozess  $(G_t(H))_{t \in (0, T]}$  von  $H$  unter  $\mathbb{P}^*$  ein Martingal ist, d.h.

$$\mathbb{E}^*(G_T(H) - G_t(H) \mid \mathcal{F}_t) = 0$$

gilt, ergibt sich damit

$$Y^d(t, T) = B(0, t) \cdot S_t^1 = B(0, t) \cdot \mathbb{E}^* \left( S_T^1 + \int_t^T B(0, u)^{-1} dZ_u \mid \mathcal{F}_t \right),$$

also wegen  $S_T^1 = Y^d(T, T) = 0$  die Behauptung.  $\square$

Weitere wichtige Größen im Zusammenhang mit dem Kreditrisiko sind die zum Zeitpunkt  $\tau$  des Ausfalls ausstehende Forderungshöhe, das sogenannte *Exposure at Default* (EAD) sowie die Verlustquote im Falle eines Ausfalls, der *Loss Given Default* (LGD).

Der Anteil an der Gesamtforderung, der hingegen auch nach dem Ausfall noch bedient werden kann, wird *Erlösquote* (engl.: *Recovery Rate*) genannt.<sup>91</sup>

## 4.2 Verlustverteilung und Value at Risk

Mit den Begriffen und Bezeichnungen aus 4.1 wird nun die Verlustverteilung im Zusammenhang mit Kreditgeschäften erklärt. Hierzu sei wiederum ein Portfolio  $\Pi$  aus  $N$  Kreditforderungen gegeben. Die Größe

$$L_i(t) := EAD_i \cdot LGD_i \cdot D_i(t), \quad t \in (0, T]$$

definiert zunächst die „Verlustvariable“ des  $i$ -ten Finanzguts - sie gibt die Höhe des tatsächlich auftretenden Verlusts bis  $t$  infolge eines Kreditereignisses an. Der Portfolioverlust  $L_\Pi(t)$  bis zum Zeitpunkt  $t \in (0, T]$  beschreibt dann die akkumulierten Einzelverluste:

$$L_\Pi(t) := \sum_{i=1}^N L_i(t) = \sum_{i=1}^N EAD_i \cdot LGD_i \cdot D_i(t), \quad t \in (0, T].$$

Die Verlustverteilung (in  $t \in [0, T]$ ) ist schließlich die Verteilung  $\mathbb{P}(L_\Pi(t) \leq \cdot)$  des Portfolioverlusts  $L_\Pi(t)$ .

Kreditportfolios mit speziellen Eigenschaften erhalten eine eigene Benennung:

**Definition 4.1** *Gegeben sei ein Portfolio  $\Pi$  aus  $N > 1$  Krediten mit Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{D_i}$ ,  $i = \{1, \dots, N\}$ .*

(i) *Gilt  $LGD_i = EAD_i = 1 \ \forall i = \{1, \dots, N\}$ , so nennt man  $\Pi$  normiert.*

(ii) *Gilt  $p_{D_1} = \dots = p_{D_N}$ , so heißt  $\Pi$  homogen.*

(iii) *Ist das Portfolio homogen mit  $LGD_i = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, N\}$  und (deterministischen)  $EAD_j > 0$  mit  $w_i^{(N)} := \frac{EAD_i}{\sum_{j=1}^N EAD_j}$ , so heißt*

$$LGD^{(N)} := \sum_{i=1}^N w_i^{(N)} \cdot LGD_i \cdot D_i = \sum_{i=1}^N w_i^{(N)} \cdot D_i$$

*die (zufällige) Verlustquote von  $\Pi$ . Das Portfolio  $\Pi$  nennt man zudem Large Homogeneous Portfolio (LHP), falls gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left( w_i^{(N)} \right)^2 = 0. \quad (4.4)$$

**Bemerkung 4.1** *Die technische Bedingung 4.4 besagt, dass der Anteil keines einzelnen Nominals die anderen „wesentlich“ überragt. In Anwendungsfällen erfüllt wäre die Be-*

---

<sup>91</sup>Die Recovery Rate  $R$  ist also im Gegensatz zum Recovery Betrag nominalwertunabhängig und es gilt also die Beziehung  $R + LGD = 1$ .

dingung insbesondere im Falle der Existenz einer Kreditlinie als oberer Schranke für das Kreditvolumen je Schuldner.

Für die beiden wichtigsten Momente einer Verlustverteilung, dem *erwarteten Verlust* (engl.: expected loss)  $EL := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(L)$  sowie dem *unerwarteten Verlust* (unexpected loss)  $UL := \sqrt{\text{Var}(L)}$ , ergibt sich für obiges Portfolio der..

**Satz 4.2** Für die Laufzeit  $[0, T]$  sei  $\Pi$  ein Portfolio aus  $N$  Krediten mit deterministischen  $EAD_i$  und zufälligen  $LGD_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$  mit Ausfallindikatorvektor

$$(D_1, \dots, D_N) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^N.$$

$LGD_1^*, \dots, LGD_N^*, (D_1, \dots, D_N)$  seien stochastisch unabhängig. Dann gilt:

$$(1) \quad EL_{\Pi}(T) = \sum_{i=1}^N EAD_i \cdot LGD_i \cdot p_{D_i(T)}$$

$$(2) \quad UL_{\Pi}(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N EAD_i^2 \cdot LGD_i^2 \cdot \text{Var}(D_i(T)) + \sum_{(i,j), i \neq j} \text{Corr}(D_i(T), D_j(T)) \cdot s_i \cdot s_j}$$

$$\text{mit } s = EAD \cdot LGD \cdot \sqrt{p_{D(T)} \cdot (1 - p_{D(T)})}$$

**Beweis:** (1) Ergibt sich direkt aus der Definition der  $L_i$ :

$$EL_{\Pi} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(L_{\Pi}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}L_i = \sum_{i=1}^n EAD_i \cdot \mathbb{E}(LGD_i^* \cdot D_i) = \sum_{i=1}^n EAD_i \cdot LGD_i \cdot p_{D_i}.$$

(2) Es ist

$$\begin{aligned} UL_{\Pi}^2 &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N L_i\right) = \sum_{i,j=1}^N \text{Cov}(L_i, L_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^N EAD_i \cdot EAD_j \cdot \text{Cov}(LGD_i^* \cdot D_i, LGD_j^* \cdot D_j). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der Kovarianzterm wird weiter untersucht:

a) Im Fall  $i \neq j$  gilt nach der Unabhängigkeits-Voraussetzung

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(LGD_i^* \cdot D_i, LGD_j^* \cdot D_j) \\ &= \mathbb{E}(LGD_i^* \cdot D_i \cdot LGD_j^* \cdot D_j) - \mathbb{E}(LGD_i^* \cdot D_i) \cdot \mathbb{E}(LGD_j^* \cdot D_j) \\ &= LGD_i \cdot LGD_j \cdot (\mathbb{E}(D_i \cdot D_j) - \mathbb{E}(D_i) \cdot \mathbb{E}(D_j)) \\ &= LGD_i \cdot LGD_j \cdot \text{Cov}(D_i, D_j) \end{aligned} \quad (4.6)$$

b) Im Fall  $i = j$  ergibt sich

$$\text{Cov}(LGD_i^* \cdot D_i, LGD_j^* \cdot D_j) = \text{Var}(LGD_i^* \cdot D_i). \quad (4.7)$$

Einsetzen von (4.6) und (4.7) in (4.5) und anschließendes Wurzelziehen liefert die Behauptung.  $\square$

### Risikomaße

Wie in den Abschnitten 2.1 und 2.6.2 beschrieben, bedürfen Banken einer Quantifizierung ihres Kreditrisikos. Dies erfolgt unter Verwendung sogenannter Risikomaße. Dazu sei  $\mathcal{X} = \{X \mid X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$  die Menge aller möglichen zufälligen Portfolioverluste  $X$  aus einem Kredit(-Portfolio) bis zu einem festen Zeitpunkt  $T$ . Als Risikomaß wird grundsätzlich jede Abbildung  $R : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  verstanden, die jeder Verlustvariable (eines einzelnen Finanzguts oder eines Portfolios aus Finanzgütern) im Zeithorizont  $[0, T]$  eine Kennzahl - das Risiko - zuordnet.

Ein im Kreditbereich standardmäßig verwendetes Beispiel hierfür ist der Value at Risk (VaR).

**Definition 4.2** *Gegeben sei ein Portfolio aus  $N \in \mathbb{N}$  Finanzgütern mit Haltedauer  $T \in (0, \infty)$  und Portfolioverlust  $L_\Pi(T)$ . Dann heißt*

$$\text{VaR}(\alpha, L_\Pi, T) := v_\alpha := \inf \{x \geq 0 : \mathbb{P}(L_\Pi(T) \leq x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

*der Value-at-Risk des Portfolios  $\Pi$  (zum Niveau  $\alpha$ ).*

Der VaR ist also das  $\alpha$ -Quantil der Verlustverteilung. In der Praxis werden  $\alpha$ -Werte von mindestens 99% gewählt, da es bei der Wahl des Absicherungskapitals in Höhe des VaR in  $1 - \alpha$  % der Fälle zur Zahlungsunfähigkeit der Bank kommt.

**Bemerkung 4.2** *Für ein Zeitintervall  $[0, T]$  und ein Portfolio  $\Pi \in \mathbb{R}^N$  aus  $N$  Finanzgütern mit Anfangswert  $V_0$  und (zufälligem) Endwert  $V_T$  ist der VaR diejenige Differenz aus Anfangs- und Endvermögen, die mit höchstens Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  nicht unterschritten wird, also*

$$\text{VaR}(\alpha) = V_0 - v_\alpha := V_0 - \inf \{V_T \geq 0 : \mathbb{P}(V_T \leq v_\alpha) \geq \alpha\}, \quad (4.8)$$

*mit dem  $\alpha$ -Quantil  $v_\alpha$  der Verteilungsfunktion des Portfoliowerts in  $T$ .*

Anhand der folgenden „Gütekriterien“ für Risikomaße wird gezeigt, warum der VaR trotz seiner Verbreitung als Risikomaß nicht unumstritten ist.

**Definition 4.3** *Ein Risikomaß  $R$  heißt kohärent, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- a) *Monotonie:* Für  $X, X' \in \mathcal{X}$  mit  $X' \leq X$  gilt  $R(X) \leq R(X')$  (Eine Position mit  $\mathbb{P}$ -f.s. niedrigerem Verlust besitzt auch ein niedrigeres Risiko)
- b) *Subadditivität:*  $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2) \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{X}$  (das Risiko einer aggregierten Position ist nicht größer als das Risiko zweier Einzelpositionen)
- c) *Positive Homogenität:*  $R(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot R(X) \quad \forall \lambda \geq 0$  und  $\forall X \in \mathcal{X}$  (Ein Vielfaches eines Portfolioverlusts führt zu einer Risikoänderung im selben Verhältnis)
- d) *Translationsinvarianz:* Für  $X \in \mathcal{X}$  gilt  $R(X + a) = R(X) + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$  (Steigt der Portfolioverlust um einen deterministischen Geldbetrag, so steigt auch dessen Risiko um diesen Wert an).

Die Eigenschaft der Subadditivität ist für die Theorie über die Portfolio-Diversifikation von zentraler Bedeutung. Für den VaR gilt aber:

**Satz 4.3** *Der VaR ist i.A. nicht subadditiv. Insbesondere ist der VaR nicht kohärent.*

**Beweis:** Für ein Gegenbeispiel betrachte den W-Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit  $A, B \in \mathcal{F}$ . Es gelte  $A \cap B = \emptyset$  mit  $\mathbb{P}(A) = \frac{\alpha}{2}$  und  $\mathbb{P}(B) = \frac{2\alpha}{3}$  für ein  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ . Ferner seien  $a < b < 0$  gegeben. Ein Portfolio  $\Pi$  aus Finanzgütern besitze den Anfangswert  $V_0 = 0$  und Endwert

$$V_T(\omega) = \begin{cases} a & , \text{ falls } \omega \in A \\ b & , \text{ falls } \omega \in B \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$V_T$  lässt sich vermöge der Werte  $V_A$  und  $V_B$  mit

$$V_{A,0} = 0, \quad V_{A,T}(\omega) = \begin{cases} a & , \text{ falls } \omega \in A \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$V_{B,0} = 0, \quad V_{B,T}(\omega) = \begin{cases} b & , \text{ falls } \omega \in B \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

darstellen als  $V_T = V_A + V_B$ . Die Verteilungsfunktionen  $F_A$  und  $F_B$  von  $V_A$  bzw.  $V_B$  sind dann gegeben durch

$$F_A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x < a \\ \frac{1}{2}\alpha & , \text{ falls } a < x < 0 \\ 1 & , \text{ falls } 0 \leq x \end{cases}$$

und

$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x < b \\ \frac{2}{3}\alpha & , \text{ falls } b < x < 0 \\ 1 & , \text{ falls } 0 \leq x \end{cases}$$

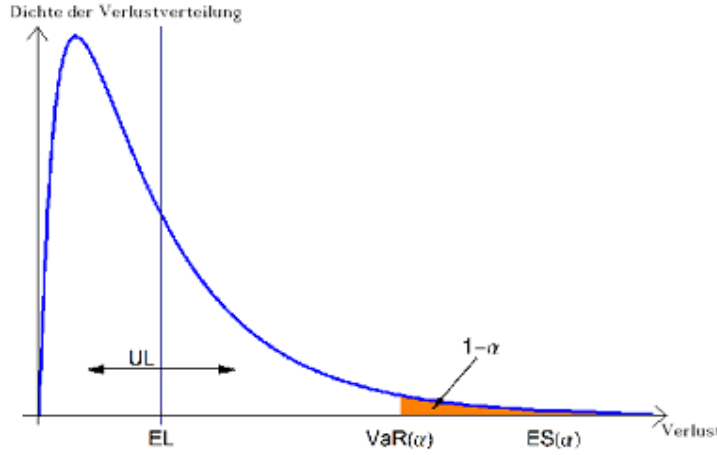


Abbildung 4.1: Grafische Veranschaulichung diverser Risikomaße. Nach: Ridder, T. (2006), S. 4.

Für den VaR zum Niveau  $\alpha$  ergibt sich nun wegen (4.8) und den Definitionen von  $V$ ,  $V_A$  und  $V_B$ :

$$\begin{aligned} VaR(V) &= V_0 - v_\alpha = 0 - \inf\{v \mid \mathbb{P}(V_T \leq v_\alpha) \geq \alpha\} = -b \\ &> 0 = 0 - \inf\{v \mid F_A(v) \geq \alpha\} + 0 - \inf\{v \mid F_B(v) \geq \alpha\} = VaR(V_A) + VaR(V_B) \end{aligned}$$

also

$$VaR(V_A + V_B) > VaR(A) + VaR(B). \quad \square$$

Es lässt sich allerdings zeigen, dass der VaR die 3 anderen Kohärenz-Bedingungen erfüllt<sup>92</sup> und dass er kohärent ist im Falle sogenannter elliptischer Verteilungen<sup>93</sup>, also insbesondere im Falle von Gauss-Verteilungen. Da in der späteren Anwendung das Modell über die Gauss-Copula kalibriert wird und der VaR eine einfache Berechenbarkeit bietet, wird er später in Kapitel 5 als Risikomaß herangezogen.

Die nichterfüllte Subadditivität hat jedoch zusammen mit der Unfähigkeit des VaR, etwas über die Größenordnung der über das  $\alpha$ -Quantil hinausgehenden Verlusthöhen auszusagen, Anlass zur folgenden Weiterentwicklung des VaR-Konzepts gegeben:

**Definition 4.4** *Mit den Voraussetzungen aus Definition 4.2 heißt*

$$ES(\alpha, L_\Pi, T) = \mathbb{E}(L_\Pi \mid L_\Pi \geq VaR(\alpha, L_\Pi, T))$$

*der Conditional Value at Risk oder Expected Shortfall von  $\Pi$  (zum Niveau  $\alpha$ ).*

Der ES gibt also den erwarteten Portfolioverlust, gegeben er überschreitet das  $\alpha$ -Quantil

<sup>92</sup>Vgl. Kremer, J. (2008), S. 38.

<sup>93</sup>Vgl. Embrechts, P. et al. (1999), Theorem 1.

der Verlustverteilung, an. ES und VaR stehen in folgender Beziehung zueinander

$$\begin{aligned} ES(\alpha, L_{\Pi}, T) &= VaR(\alpha, L_{\Pi}, T) + \mathbb{E}[L_{\Pi} - VaR(\alpha, L_{\Pi}, T) \mid L_{\Pi} \geq VaR(\alpha, L_{\Pi}, T)] \\ &\geq VaR(\alpha, L_{\Pi}, T). \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt der wichtige..

**Satz 4.4** *Der ES ist kohärent.*

**Beweis:** Siehe Kremer, J. (2008), Satz 1.41.  $\square$

## 4.3 Beispiel einer Anwendung

Anhand einer fiktiven Situation wird nun ein Portfolio, wie es typischerweise in einer örtlichen Sparkasse vorliegen könnte, beschrieben und untersucht. Anschließend wird ein reales Beispiel einer deutschen Region gegeben, die eine gewisse Anwendbarkeit und damit Realitätsnähe dieses allgemeinen, fiktiven Beispiels illustrieren soll. Das vorgestellte Portfolio wird in den folgenden Kapiteln wieder aufgegriffen und die theoretischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit schließlich hierauf angewandt.

### Die Situation

Angenommen sei die Ansiedlung eines großen Unternehmens in der Region einer örtlichen Sparkasse oder einer anderen Regionalbank. Das Unternehmen dominiere die Wirtschaft in dieser Region, z.B. in dem Sinne, dass es den Hauptarbeitgeber stellt. Darüber hinaus existieren in der Region mehrere zuarbeitende kleinere Unternehmen, die es durch das Großunternehmen in diese Region gezogen hat.

Das Geschäftsfeld regionaler Banken ergibt sich gerade aus der direkten „Anbindung“ an ihre Region, da Geldanlagen bei der Bank sowie Kreditaufnahmen zu einem großen Teil von Wirtschaftssubjekten aus der Region der ansässigen Bank getätigt werden.<sup>94</sup> Als mögliche Folgen ergeben sich für die beschriebene Region,

1. dass ein nicht unerheblicher Anteil der Kreditforderungen der Bank gegen das große Unternehmen in der Region aufgebaut wird.
2. dass im gesamten Forderungsbestand der Bank ein hoher Forderungsanteil gegen Unternehmen aus der gleichen Branche vorliegt oder aufgrund sonstiger Gründe Abhängigkeiten in der Solvenz der Unternehmen der Region existieren.

Beide Fälle lassen vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Periode, in der es durch Kreditereignisse im Kreditforderungsbestand zu großen Verlusten der Bank kommt, ansteigt, und zwar aufgrund der geringen Diversifikation durch „Klumpenrisiken“ und Abhängigkeiten in der Solvenz der Schuldner. Insbesondere würde etwa ein Kreditausfall

---

<sup>94</sup>Vgl. Bertelsmann Lexikon (1994), S. 8096.





Abbildung 4.2: Die Firma Viessmann in Allendorf/Eder. Quelle: <http://www.sicher-heizen.de>.

beim Großunternehmen u.U. auch die Solvabilität der Bank in erheblichem Maße belasten.<sup>95</sup>

### **Beispiel: Die Firma Viessmann im Mittelzentrum Allendorf-Battenberg**

Im nordhessischen Landkreis Waldeck-Frankenberg liegen die beiden Gemeinden Allendorf und Battenberg die durch ihre Bezeichnung als Mittelzentrum in der Folge als eine Region bezeichnet werden. Der umliegende Landkreis bildet den flächenmäßig Größten in Hessen, ist jedoch gleichzeitig mit nur 89 Einwohnern pro km<sup>2</sup> vergleichsweise dünn besiedelt (hessischer Durchschnitt: 289 Einw./km<sup>2</sup>). Der „Altkreis“ Frankenberg, zu dem auch die Region gehört, hat per Stichtag 30.06.2009 insgesamt 50.055 Einwohner gezählt. Hiervon entfielen auf die Gemeinden Allendorf und Battenberg 11.171 Einwohner.<sup>96</sup>

Die Firma Viessmann Werke GmbH und Co KG mit Hauptsitz in Allendorf/Eder ist einer der weltweit führenden Hersteller von Heiztechnik-Systemen. Das Unternehmen beschäftigt rund 8900 Mitarbeiter, davon rund 3700 in Allendorf.<sup>97</sup>

Unter den 28.777 sozialversicherungspflichtigen Beschäftigungsverhältnissen im Altkreis Frankenberg entfielen zum Stichtag 7828 auf das Mittelzentrum Allendorf-Battenberg. Viessmann bildet hier also den weitaus größten Arbeitgeber. Zusätzlich haben sich seit der Gründung Viessmanns im Jahre 1917 im Lauf der Zeit weitere kleine und mittelständische Unternehmen in der Region entwickelt oder angesiedelt, welche in mehr oder weniger direktem Maße und in vielfältiger Form abhängig vom Standort Viessmann in

<sup>95</sup> Davon abgesehen sind u.U. auch Probleme hinsichtlich des Kreditlinienmanagements mit dem Großunternehmen zu erwarten (vgl. Kapitel 2.6.1).

<sup>96</sup> Quelle: Siegfried Franke, Geschäftsführer der Wirtschaftsförderung Waldeck-Frankenberg GmbH, E-Mail: [Info@WFG-Hessen.de](mailto:Info@WFG-Hessen.de).

<sup>97</sup> Quelle: Internetseite der Firma Viessmann unter <http://www.viessmann.de/de/portrait.html> sowie Informationen von Michael Wagner, E-Mail: [WMc@viessmann.com](mailto:WMc@viessmann.com), Abteilung Öffentlichkeitsarbeit, Firma Viessmann.

Allendorf sind.<sup>98</sup>

Aufgrund des Geschäftsmodells von Sparkassen und auch der weitläufigen Region ist zu erwarten, dass die örtliche Sparkasse im originären Geschäft ein Kreditportfolio mit deutlichen Regionen- und Branchenkonzentrationen sowie möglicherweise auch Single-Name- Konzentrationen (etwa gegen den Schuldner Viessmann) führt.

Nun wird ein Portfolio aus Kreditforderungen entsprechend obiger Situation postuliert: Gegeben sei ein Zeithorizont von  $T$  Jahren und ein Portfolio von  $N = 50$  Kreditforderungen der Höhe  $M(1)^{99} > M(2) = \dots = M(50)$  mit  $M := \sum_{i=1}^{50} M(i)$  mit (stochastischen) Ausfallzeiten  $\tau_1, \dots, \tau_{50}$  und Ausfallindikatoren  $D_T(1), \dots, D_T(50)$ . Die Bank sei in Besitz eines derartigen Portfolios und möchte die Kreditforderungen aus der Bilanzaufstellung für den Zeitraum dieser  $T$  Jahre entfernen. Dazu plane sie, über eine Verbriefung einen entsprechenden CDO zu emittieren.

Das Beispiel wird in Kapitel 5 aufgegriffen, als „Sparkassen-CDO“ noch näher spezifiziert und schließlich bewertet. Dafür werden aber nun zunächst verschiedene Zugänge der Modellbildung vorgestellt.

## 4.4 Modellklassen für das individuelle Ausfallereignis

Die Modellierung individueller Ausfallereignisse bildet häufig bereits einen Ausgangspunkt für Portfolio-Ausfallmodelle. Der Copula-Ansatz greift diese beispielsweise auf und verpasst ihnen nur in einem zusätzlichen Schritt gewisse Abhängigkeitsstrukturen, weshalb hier zunächst auf die Modellierung individueller Ausfallereignisse eingegangen wird. In der Literatur existieren hierzu primär zwei verbreitete Modellklassen: Einerseits die Unternehmenswertmodelle (structural models), bei denen die Entwicklung einflussreicher Variablen auf den Unternehmenswert im Zeitverlauf modelliert wird, und andererseits die Intensitätsmodelle (intensity/hazard rate models), bei denen der Ausfall nicht durch sich verändernde Unternehmensgrößen gesteuert, sondern durch exogen vorgegebene Prozesse modelliert wird.

Bei den Unternehmenswertmodellen wird in Anlehnung an Martin et al. (2006), Kap. 2.3.1, exemplarisch das Modell von Zhou näher vorgestellt. Es folgen die Intensitätsmodelle, denen sich ein Ausblick auf das Modell von Brody, Hughston and Macrina<sup>100</sup> (BHM-Modell) aus der jüngeren Modellklasse der Incomplete Information-Ansätze anschließt, in der die Vorteile der beiden grundtypischen Modellvarianten zusammengeführt werden sollen.

---

<sup>98</sup>Einschätzung von Dr. Peter Sacher, Leiter des Servicezentrums Waldeck-Frankenberg, IHK Kassel.  
E-Mail: sacher@kassel.ihk.de.

<sup>99</sup>Der Schuldner dieser Kreditforderung wird im Folgenden auch einfach „erster“ Schuldner genannt.

<sup>100</sup>Vgl. Brody, D. C. et al. (2005).

#### 4.4.1 Unternehmenswertmodelle

Dieser Modellklasse liegt eine stochastische Modellierung des nach Kapitel 4.1 als existierend vorausgesetzten Firmenwerts  $V = (V_t)_{t \in (0, T]}$  zugrunde.<sup>101</sup>  $V$  ergibt sich zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, \infty)$  aus der Summe von Eigenkapital  $S$  und Fremdkapital  $F$ ,  $V_t = S_t + F_t$ . In dieser Modellklasse kann nun auf verschiedene Weisen das Auslösen eines Kreditereignisses modelliert werden. Meist geschieht dies durch die Postulierung einer unteren Schranke  $C(t), t \in [0, T]$  für den Unternehmenswert und den Ausfall des Titels in  $\tau = \inf_{t \in [0, T]} \{V_t : V_t < C(t)\}$ .

Im Ausgangsmodell von Merton<sup>102</sup> tritt ein Ausfall ein, wenn das als Wert einer einzigen Unternehmenswertanleihe mit Nennwert  $M$  und Fälligkeitszeitpunkt  $T$  angenommene, ausstehende Fremdkapital nicht mehr durch den Unternehmenswert, der modelliert wird als Aktienkurs des Unternehmens, bedient werden kann, d.h. wenn  $V_T - M_T < 0$  gilt.  $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$  folgt dabei einer geometrisch Brownschen Bewegung

$$dV_t = r \cdot V_t dt + \sigma \cdot V_t dW_t$$

mit dem Standard Wiener Prozess  $W$ , Short-Rate  $r$  und Volatilität  $\sigma$  des Firmenwerts. Da für die Rückzahlungshöhe  $H_T$  des Zerobonds  $H_T = N \mathbb{1}_{V_T \geq M} + V_T \mathbb{1}_{V_T < M}$  gilt (d.h. Liquidation des Unternehmens im Falle  $V_T < M$ ), sind  $S$  und  $F$  interpretierbar als (europäischer) Call bzw. Put auf den Unternehmenswert mit Laufzeit  $T$  und Strike  $M$ . Damit lässt sich  $V$  in  $T$  schreiben als

$$V_T = S_T + F_T = \max \{V_T - M, 0\} + M - \min \{V_T, M\}$$

und das Mertonmodell ist auffassbar als eine Anwendung der (im Rahmen der Modellannahmen) 1970 entwickelten Black-Scholes-Optionspreisformel auf ausfallgefährdete Finanztitel. Über den risikoneutralen Wert des Eigenkapitals in  $0 \leq t < T$  im BS-Modell<sup>103</sup> lässt sich damit der risikoneutrale Credit Spread zur Zeit  $t (< \tau)$  eines in  $T$  zahlbaren Zerobonds im Merton-Modell mit Nennwert 1 bestimmen. Hier wird nur seine Gestalt

<sup>101</sup>Es werden also streng genommen hier nur Unternehmen als Schuldner betrachtet. Die Integration anderer Wirtschaftssubjekte setzt die Modellierungsmöglichkeit eines Firmenwert-ähnlichen Prozesses voraus.

<sup>102</sup>Welches auch als das klassische Unternehmenswertmodell bezeichnet wird, benannt nach dem Nobelpreisträger Robert C. Merton.

<sup>103</sup>Das ist ein Standardergebnis aus der Finanzmathematik:  $S_t$  hat die Gestalt

$$S_t = V_t \cdot \Phi(d_1(t, T)) - M \cdot \exp(-r(T - t)) \cdot \Phi(d_2(t, T)),$$

mit

$$d_i(t, T) = \frac{\log(\frac{V_t}{M}) + (r - \frac{(-1)^{i+1}}{2} \cdot \sigma^2) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}, \quad i = 1, 2,$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

festgehalten,

$$s_t(T) = -\frac{\log(\frac{V_t}{M} \cdot \exp(r(T-t)) \cdot \Phi(-d_1) + \Phi(d_2))}{T-t}, \quad (4.9)$$

und für einen Nachweis auf Martin et al. (2006), S.91 oder Chuang, Y. et al. (2008), S.4f verwiesen.

Es hat sich gezeigt, dass das klassische Merton-Modell die Höhe des am Markt durchschnittlich gezahlten Credit Spreads unterschätzt, weshalb diverse Modellerweiterungen vorgeschlagen wurden. So lässt Zhou auch Sprünge des Unternehmenswerts zu, die im Ergebnis zu realistischeren Preisen führen. Unter  $\mathbb{P}^*$  seien dazu  $W = (W_t)_{t \in (0, T]}$  ein Wiener Prozess,  $N = (N_t)_{t \in (0, T]}$  ein Poisson-Prozess mit konstanter Intensität  $\lambda$  und eine Folge von unabhängigen, lognormalverteilten Zufallsvariablen  $(U_i + 1)_{i \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $\log(U_i + 1) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^*)$  und  $\mathbb{E}^*(U_i) := \nu = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) - 1$ , gegeben. Die Prozesse  $W$ ,  $N$  und die  $U_i$  seien stochastisch unabhängig. Die Entwicklung des Unternehmenswerts wird im Zhou-Modell beschrieben durch die Differentialgleichung

$$dV_t = V_{t-}((r - \lambda\nu)dt + \sigma dW_t + d\pi_t), \quad (4.10)$$

wobei  $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$  ein Sprungprozess mit Sprungzeiten  $(N_t)$  und Sprunghöhen  $\pi_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, t \in [0, T]$  ist.  $\mathcal{G}$  sei die von  $\pi$  und  $W$  erzeugte Filtration. Unter  $\mathcal{G}$  ist dann

$$(\tilde{\pi}_t) := (\pi_t - \lambda\nu t)$$

ein  $\mathbb{P}^*$ -Martingal und damit ebenso der abdiskontierte Unternehmenswertprozess  $\tilde{V} = e^{-rt}V$ , der wegen (4.10)

$$d\tilde{V}_t = \tilde{V}_{t-}(\sigma dW_t + d\tilde{\pi}_t)$$

erfüllt. Die Lösung dieser DGL ist gegeben durch

$$V_t = V_0 \exp(\sigma W_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)t) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + U_i). \quad (4.11)$$

Mit Satz 4.1 erhält man daraus den risikoneutralen Preisprozess  $P^d(t, T)$  einer ausfall-behafteten Kreditforderung mit Fälligkeit  $T$  im Zhou-Modell:

**Satz 4.5** *Im Ansatz von Zhou gilt:*

$$P^d(t, T) = Ne^{-r(T-t)} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot \left( \frac{V_t}{N} \cdot \exp(\mu_i(T-t) + \sigma_i^2 \frac{T-t}{2}) \Phi(-d_{1,i}(t, T)) + \Phi(d_{2,i}(t, T)) \right) \quad (4.12)$$

mit  $d_{1,i}(t, T) := d_{2,i}(t, T) := (\log(\frac{V_t}{N}) + \mu_i)/\sigma_i(t)$ ,  $\mu_i(t) := (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)t + i\mu$  und  $\sigma_i(t) := \sigma^2 t + i(\sigma^*)^2$ .

Für den Beweis muss die bedingte Ausfallverteilung gegeben  $\mathcal{F}_t$  bestimmt werden. Dies geschieht im Folgenden

**Lemma 4.1** *Für  $t \in [0, T]$  und  $d_{2,i}, \mu_i(t), \sigma_i(t)$  wie oben gilt*

$$\mathbb{P}^*(V_T < N \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \cdot \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot \Phi(-d_{2,i}(t, T)).$$

**Beweis:** Bedingt auf das das Ereignis  $N_T - N_t = i, i \in \mathbb{N}$  gilt für Gleichung (4.11)

$$\begin{aligned} V_T &= V_t \exp \left( \sigma(W_T - W_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)(T-t) \right) \prod_{j=1}^i (1 + U_j) \\ &= V_t \exp \left( \underbrace{\sigma(W_T - W_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)(T-t) \sum_{j=1}^i \zeta_j}_{\zeta} \right) \end{aligned}$$

mit  $\zeta = \log(U_i + 1) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^*)$ . Für den Erwartungswert und die Varianz von  $\zeta$  ergibt sich direkt

$$\mathbb{E}^*(\zeta) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)t + i\mu, \quad \text{Var}^*(\zeta) = \sigma^2(T-t) + i(\sigma^*)^2.$$

Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $\xi$  folgt damit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(V_T < N \mid \mathcal{F}_t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}^*(V_T < N \mid \mathcal{F}_t, N_T - N_t = i) \cdot \mathbb{P}^*(N_T - N_t = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}^*(V_t \exp(\mu_i(t) + \sigma_i(t) \cdot \zeta) < N) \cdot e^{\left(-\lambda(T-t) \cdot \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!}\right)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \cdot \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot \Phi(-d_{2,i}(t, T)). \quad \square \end{aligned}$$

Damit lässt sich nun der Satz beweisen:

**Beweis (von Satz 4.5):** Wegen  $P^d(T, T) = N - N \mathbb{1}_{\{V_T < N\}} + V_T \mathbb{1}_{\{V_T < N\}}$ , Satz 4.1 und

dem vorangegangenen Lemma ist

$$\begin{aligned}
P^d(t, T) &= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*(P^d(T, T) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot N \cdot (1 - \mathbb{P}^*(V_T < N \mid \mathcal{F}_t)) + e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*(V_T \cdot \mathbb{1}_{V_T < N} \mid \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot N \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot \Phi(-d_{2,i}(t, T)) e^{-r(T-t)} \\
&\quad \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot V_t \cdot \mathbb{E}^*(e^{\zeta} \mathbb{1}_{e^{\zeta} < N}) \mid_{x=V_t}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Mit den Wiener-Prozess-Zuwächsen und den  $\zeta_i$  ist auch  $\zeta$  normalverteilt, etwa  $\zeta \sim \mathcal{N}(\mu_{\zeta}, \sigma_{\zeta})$  und es gilt

$$\mathbb{E}^*(e^{\zeta} \mathbb{1}_{e^{\zeta} < y}) = e^{\mu_{\zeta} + \sigma_{\zeta}^2/2} \cdot \Phi((\log y - \mu_{\zeta} - \sigma_{\zeta}^2)/\sigma_{\zeta})$$

Setzt man dies in (4.13) ein, folgt die Behauptung.  $\square$

In neueren Ansätzen können Ausfälle auch durch Unterschreiten einer (konstanten, zeitabhängigen oder stochastischen) Schwelle erfolgen, beziehen Marktrisiken (z.B. stochastische Zinsentwicklungen) mit ein oder auch endogen erzeugte Ausfallschranken anstelle von exogenen, wie in Moody's KMV-Modell (vergleiche den kurzen Überblick in Abschnitt 4.5.5) Unternehmenswertmodelle können auch direkt auf die Modellierung eines Korbs von ausfallbehafteten Instrumenten erweitert werden.<sup>104</sup> Zur Reduktion der zu schätzenden Anzahl der (Abhängigkeits-)Parameter sind in der Praxis hierzu aber eher andere Verfahren entwickelt worden, auf die in Kapitel 4.5 eingegangen wird.

## 4.4.2 Intensitätsmodelle

Intensitätsmodelle erhalten wegen ihrer angenehmen Bedienbarkeit und Flexibilität beim Fitting empirischer Daten oft den Vorzug gegenüber den Unternehmenswertmodellen im Zusammenhang mit der Kreditrisikomodellierung.

In dieser Modellklasse ergibt sich die Ausfallverteilung durch die Modellierung des Ausfallereignisses als Zeitpunkt des ersten Sprungs eines Sprungprozesses.<sup>105</sup> Marktinformationen über die zu modellierende Größe finden über die Kalibration<sup>106</sup> der sogenannten Ausfallrate oder Intensität (engl. Hazard Rate (Function)) des Sprungprozesses Einzug in das Modell.

Der theoretische Modellrahmen der Intensitätsprozesse wird nun eingeführt:

Hierzu liege das Finanzmarktmodell aus 4.1 mit Informationsverlauf  $\mathcal{F}$  und äquivalen-

<sup>104</sup>Siehe z.B. Rudolph et al. (2007), S. 126.

<sup>105</sup>D.h. eines rechtsseitig-stetigen, stückweise konstanten stochastischen Prozesses.

<sup>106</sup>Die Kalibration erfolgt meist über Marktdaten, wie historische Ausfallraten oder aktuelle CDS-Spreadpreise für verschiedene Laufzeiten.

tem Martingalmaß  $\mathbb{P}^*$  vor, in dem ein kreditrisikobehaftetes Gut gehandelt werde. Die Zufallsvariable  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  beschreibe dessen Ausfallzeit<sup>107</sup> und besitze unter  $\mathbb{P}^*$  eine stetige Verteilungsfunktion  $F$  mit Dichte  $f$ . Mit Hilfe von  $\tau$  wird der *Ausfallprozess*  $H = (H_t)_{t \in (0, T]}$  durch  $H_t := \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$  erklärt. Des Weiteren werden zwei zusätzliche Filtrationen definiert:

$$\mathcal{H}_t = \sigma(H_s : s \leq t) = \sigma(\tau \leq s : s \leq t)$$

sei die von  $H$  erzeugte Filtration, die also gerade die Informationen über den individuellen Ausfallstatus wiedergibt.  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in (0, T]}$ , definiert durch  $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{H}_t)$ , sei die Filtration, die die Informationen von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{H}$  zusammenführt.  $\tau$  ist dann auch eine  $\mathcal{G}$ -Stopzeit.

Da im hiesigen Kontext nur der Zeitraum  $[0, T]$  von Bedeutung ist, werden der risikoneutrale *Ausfallwahrscheinlichkeitsprozess*  $F = (F_t)_{t \in [0, T]}$  sowie der risikoneutrale *Überlebenswahrscheinlichkeitsprozess*  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  durch

$$\begin{aligned} F_t &:= \mathbb{P}^*(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T] \\ S_t &:= 1 - F_t = 1 - \mathbb{P}^*(\tau > t \mid \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

definiert. Weiter sei  $F_t < 1 \quad \forall t \in (0, T]$  angenommen, was für die Praxis sicherlich nachvollziehbar ist (das Unternehmen soll während der Laufzeit nicht P-f.s. ausfallen). Zur Modellierung der „Zeit bis zum Ausfall“ wird meist die sogenannte Intensität verwendet, die nun eingeführt wird.

**Definition 4.5** *Mit den Bezeichnungen von oben heißt der Prozess  $\Lambda = (\Lambda_t)_{t \in (0, T]}$ , definiert durch*

$$1 - F_t = \exp(-\Lambda_t) \quad \text{oder äquivalent} \quad \Lambda_t = -\ln(1 - F_t) \quad \forall t \in (0, T], \quad (4.14)$$

*$\mathcal{F}$ -Hazard-Prozess (von  $\tau$  unter  $\mathbb{P}^*$ ). Falls zudem ein Prozess  $\lambda = (\lambda(u))_{u \in (0, T]}$  existiert mit*

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u) du,$$

*so heißt  $\lambda$  ( $\mathcal{F}$ -)Intensität oder ( $\mathcal{F}$ -)Hazard Rate Function von  $\tau$ .*

**Bemerkung 4.3** (i) *Mit  $F$  sind auch  $S$  und  $\Lambda$  stetig.*

(ii) *Wegen  $F_0 = 0$  gilt  $\Lambda_0 = 0$ , zudem ergibt sich  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda_t = +\infty$  wegen  $\mathbb{P}^*(\tau < \infty) = 1$ .*

Die Intensität bildet die zentrale Größe in Intensitätsmodellen und beschreibt die „augenblickliche“ Ausfallwahrscheinlichkeit des betrachteten Finanzguts, falls bis dahin noch kein Ausfall eingetreten ist. Das illustriert wegen  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\tau \in (t, t+h] \mid \tau > t)}{h} = \frac{f(t)}{1-F_t}$  das folgende

---

<sup>107</sup>Bemerkung:  $\tau$  muss i. A. keine  $(\mathcal{F}_t)_{t \in (0, T]}$ -Stopzeit sein.

**Lemma 4.2** *Es gilt*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F_t}.$$

**Beweis:** Aus der definierenden Eigenschaft der Intensität ergibt sich durch Logarithmieren und Ableiten zunächst

$$\lambda(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln(S_t).$$

Dies berechnet sich wegen  $-\frac{\partial}{\partial t}(S_t) = \frac{\partial}{\partial t}(F_t)$  weiter zu

$$\lambda(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln(S_t) = \frac{-\frac{\partial}{\partial t}(S_t)}{S_t} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}(F_t)}{S_t} = \frac{f(t)}{1 - F_t}. \quad \square$$

### Der Poisson-Prozess

Poisson-Prozesse sind besonders günstig zur Beschreibung von Ausfällen in Intensitätsmodellen.<sup>108</sup>

**Definition 4.6** *Sei  $(\tau_h)_{h \geq 0}$  eine Folge aufsteigender  $(\mathcal{F}_t)$ -Stopzeiten und  $N$  definiert durch*

$$N_t = \sum_{h \geq 0} \mathbb{1}_{\{\tau_h \leq t\}}, \quad t \in (0, T].$$

$N$  heißt (inhomogener) Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda(t)$ , wenn gilt:

(1)  $N_T - N_t$  ist unabhängig von  $\mathcal{F}_t \quad \forall t \in (0, T]$

(2)  $\mathbb{P}(N_t - N_s = n) = \frac{1}{n!} \left( \int_s^t \lambda(u) du \right)^n \exp \left( - \int_s^t \lambda(u) du \right)$  für  $0 \leq s < t$ ,

d.h.  $N$  besitzt unabhängige Zuwächse, die poissonverteilt sind zum Parameter

$$\Lambda(t) - \Lambda(s) := \int_s^t \lambda(u) du.$$

**Bemerkung 4.4** a) *Der Poisson-Prozess heißt homogen, wenn  $\lambda(t) \equiv \lambda$  für ein  $\lambda > 0$  gilt, d.h.  $\mathbb{P}(N_t - N_s = n) = \frac{1}{n!} (t - s)^n \lambda^n \exp(-(t - s)\lambda)$  für  $0 \leq s < t$  ist.*

b) *Besitzt der Poisson-Prozess eine stochastische Intensität, sodass  $N(t)$  bedingt unter  $\lambda(\cdot, \omega)$  für  $\mathbb{P}$ -f.a.  $\omega \in \Omega$  einen inhomogenen Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda(t, \omega)$  beschreibt, so heißt  $N$  auch Cox-Prozess.<sup>109</sup>*

Die Intensität des Poisson-Prozesses weist einen besonderen Bezug zur Hazard Rate auf: Definiert man einen Ausfall zunächst als ersten Sprungzeitpunkt des (inhomogenen) Poisson-Prozesses, also  $\tau = \inf \{t \in \mathbb{R} \mid N_t > 0\}$ , so ist die Überlebenswahrscheinlichkeit

<sup>108</sup>Eine ausführliche Einführung gibt beispielsweise Schönbucher (2003), Kap. 5.

<sup>109</sup>Vgl. Lando, D. (1998)



bis  $t$  im Poisson-Prozess gegeben durch

$$S_t = \mathbb{P}(N(t) = 0 \mid \mathcal{F}_0) = \exp \left( - \int_t^T \lambda(u) du \right).$$

Damit stimmt sie mit der Hazard Rate nach dessen Definition überein, d.h. die Intensität des Poisson-Prozesses ist auch eine Intensität gemäß Definition 4.5.

Im Fall stochastischer Intensitäten gilt für die Verteilung der Zuwächse:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_T - N_t = n) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N_T - N_t = n\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N_T - N_t\}} \mid \lambda)) \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n!} \left( \int_t^T \lambda(u) du \right)^n \exp \left( - \int_t^T \lambda(u) du \right) \right] \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S(t) = \mathbb{P}(N(t) = 0 \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^t \lambda(u) du \right) \right] \quad (4.15)$$

und durch Ableitung nach  $t$

$$f(t) = \mathbb{E} \left[ \lambda(t) \exp \left( - \int_0^t \lambda(u) du \right) \right].$$

Insbesondere ergibt sich für die Ausfallwahrscheinlichkeit bei konstanter Intensität  $\lambda > 0$ :

$$F(t) = 1 - \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^t \lambda(u) du \right) \right] = 1 - \exp(-\lambda \cdot t). \quad (4.16)$$

Diese grundlegenden Ergebnisse über den Intensitäten-Ansatz werden in den folgenden Abschnitten mehrfach wieder aufgegriffen.

### 4.4.3 Incomplete Information Prozesse

Die Klasse der Incomplete Information Prozesse soll die Vorteile der vorangegangenen Ansätze zusammenführen, indem im Intensitätsmodell die Intensitäten auch von ökonomischen Größen getrieben werden. Damit beheben diese Modelle die größte Kritik am Intensitätsmodell - die rein exogene Ausfallmodellierung - und behalten zugleich mathematisch praktikable Strukturen. Seit ihrer Einführung<sup>110</sup> sind verschiedene Ausgestaltungen dieses Ansatzes vorgeschlagen worden. Exemplarisch wird hier nur kurz ein Modell von Broady, Hughston und Macrina („BHM-Modell“) angerissen.

Im BHM-Modell sei dazu  $C_T$  eine nicht-degenerierte,  $\mathcal{F}_T$ -messbare und  $[0, 1]$ -wertige Zufallsvariable auf dem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in (0, T]}, \mathbb{P})$  mit Verteilungsfunktion  $F$ .  $C_T$

<sup>110</sup>Einen umfangreichen Überblick über Incomplete Information Prozesse liefern Duffie, D. und Lando, D. (1997) sowie Elizalde, A. (2006).

kann als Claim aufgefasst werden und bezeichne die zufällige Auszahlung einer ausfallbehafteten Anleihe mit Nennwert 1 zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$ . Es wird  $C_T = X^d(T, T)$  gesetzt und dann mit  $X^d(t, T)$  der Preis dieses Claims in  $0 \leq t \leq T$  bezeichnet. Des Weiteren sei  $\beta = \{\beta_{tT}\}_{0 \leq t \leq T}$  die Brownsche Brücke auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit  $\beta_{0T} = \beta_{TT} = 0$ , die

$$\beta_{uT} - \beta_{tT} = - \int_t^u \frac{\beta_{sT}}{T-s} ds + \tilde{W}_u - \tilde{W}_t$$

erfülle, wobei  $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$  der Standard Wiener Prozess auf demselben  $W$ -Raum sei.  $C_T$  sei stochastisch unabhängig von  $\beta$  (und damit auch von  $\tilde{W}$ ).

Nun definiere den sogenannten *Marktinformationsprozess*  $\xi = (\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$  durch

$$\xi_t = \sigma t C_T + \beta_{tT}.$$

Die von  $\xi$  erzeugte Filtration  $\mathcal{F}^\xi$  - gegeben durch  $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\xi_u : u \in [0, t])$  für  $t \in [0, T]$  - repräsentiert die Informationen des Marktes in  $[0, T]$ , die sich aus Claiminformationen sowie durch  $\beta$  als einem Störfaktor speisen („incomplete information“). Dabei wird die Wahl der Brownschen Brücke als Störterm klar: Am Laufzeitende  $T$  besitzen die Marktteilnehmer vollständige Informationen über  $C_T$  - im BHM-Modell wird dies entsprechend berücksichtigt durch den deterministischen Endwert 0 der (Standard) Brownschen Brücke.

Der Wert in  $t$  eines ausfallbehafteten Bonds  $X^d(t, T)$  mit Laufzeit  $T$  kann nun in diesem Modell bestimmt werden und besitzt bei (wie oben) deterministischen Zinsen die Gestalt

$$X^d(t, T) = B(t, T) \frac{\int_0^1 x \exp\left(\frac{T}{T-t}(\sigma x \xi - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 t)\right) dF(x)}{\int_0^1 \exp\left(\frac{T}{T-t}(\sigma y \xi - \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 t)\right) dF(y)}.$$

Für Details wird auf [8] oder [82] verwiesen.

## 4.5 Modellierung korrelierter Ausfälle

Neben den individuellen Ausfallereignissen ist eine Darstellung ihrer zur Bewertung von Körben ausfallbehafteter Schuldtitel von Nöten. Die beiden verbreitetsten Modellklassen zur Beschreibung dieser Abhängigkeiten werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Zudem erfolgt ein kurzer Überblick über weitere mögliche Ansätze (4.5.4) und in der Praxis geläufiger Verfahren (4.5.5) in diesem Zusammenhang. Dabei konzentriert sich dieses Kapitel v.a. auf die Bestimmung von Ausfallverteilungen der Baskets, die schließlich den Kern der Bewertung von Basketderivaten darstellen. Dazwischen wird mit dem Konzept der Tail Dependence in Abschnitt 4.5.3 ein modellübergreifendes Maß für die Stärke von Abhängigkeiten eingeführt.

### 4.5.1 Faktormodelle

Die Idee hinter den Faktormodellen besteht darin, die Ursachen für die Abhängigkeiten zwischen Ausfallereignissen der Schuldner in „Faktoren“ einzuteilen, welche dann jeweils einen systematischen Einfluss auf einen Teil oder auf alle Schuldner ausüben.<sup>111</sup> Dabei bilden die bedingenden Faktoren (nicht-vorhersehbare) stochastische Prozesse. Meist wird eine Zielgröße modelliert, welche die Bonität der Investments beschreibt und die durch die oben angeführten Faktoren getrieben wird. Fällt dieses Bonitätsmaß unter eine gewisse Schwelle, bedeutet das den Ausfall des Schuldners. Im typischen Fall wird die Bonität dabei als linear von den Faktoren abhängig dargestellt. Das allgemeine (lineare) m-Faktorenmodell hat dann die Gestalt:

$$B_i = \beta_{i,1} \cdot Y_1 + \dots + \beta_{i,m} \cdot Y_m + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

wobei

- $B_i$  die Bonität des i-ten Unternehmens in einem Korb angibt und die oft auch Zustandsvariable genannt wird
- $Y_1, \dots, Y_m, \varepsilon_i$  stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind<sup>112</sup>
- die  $Y_j$  systematische Marktfaktoren bezeichnen, deren Einfluss sich auf diejenigen der  $i = \{1, \dots, N\}$  Schuldner mit  $\beta_{i,j} > 0$  erstreckt
- $\varepsilon_i$  die in einer Zufallsgröße zusammengefassten firmenspezifischen Einflüsse beschreibt
- die  $\beta_{i,j}$  die Regressionsparameter des Modells sind, die es zu schätzen gilt

Im einfachsten Fall - dem sogenannten 1-Faktormodell - wird nur ein individueller Faktor für die Bonität (etwa das Rating) betrachtet, d.h. die Schuldner werden als unabhängig angenommen. Häufig verwendet wird das 2-Faktorenmodell, bei dem neben dem individuellen Faktor eine Abhängigkeit aller Schudttitel von einer weiteren Variable angenommen wird, welche also die komplette Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Adressen spezifiziert.<sup>113</sup> Das wichtigste Beispiel eines 2-Faktorenmodells, das häufig auch 1-Faktorenmodell genannt wird, weil in der Literatur z.T. nur die nicht individuellen Faktoren gezählt werden, ist das sogenannte Vasicek-Modell. Die Firmenbonität ergibt sich hier aus der Gleichung

$$B_i = \sqrt{\rho} Y + \sqrt{1 - \rho} \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

<sup>111</sup>Vgl. für dieses Kapitel die Arbeiten von Eberlein, E. et al. (2007), sowie Ferrarese, C. (2006).

<sup>112</sup>Bei allen Parameterschätzproblemen sollte allgemein ( $m \ll N$ ) gelten, d.h. die Zahl der Datensätze die Parameteranzahl deutlich übersteigen, um praktikable Ergebnisse zu ermöglichen.

<sup>113</sup>Die Korrelationen der Bonitätsvariablen werden dabei als Asset-Korrelationen bezeichnet und dienen besonders gut bei der Kalibrierung der Korrelationsmatrix einer Gauss-Copula (vgl. den nächsten Abschnitt).

mit

- $Y, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$  sind i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ , wobei  $Y$  den „systematischen Marktfaktor“ und  $\varepsilon_i$  einen „firmenspezifischen Faktor“ bezeichnet
- $\rho \in (0, 1)$  steuert die Höhe der Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen (je größer  $\rho$  ist, umso höher auch die Abhängigkeit).

Das Risiko in der Position wird also einerseits mit Anteil  $\sqrt{\rho}$  getrieben durch den allgemeinen Marktfaktor und zum anderen Teil durch unabhängige, individuelle Einflüsse, die jeweils in den  $\varepsilon_i$  zusammengefasst sind. Mit der Normalverteilung der  $Y_i$  und  $\varepsilon_i$  und der Wahl der Gewichtungen gilt auch  $B_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , und wegen

$$\begin{aligned} \text{Corr}(B_i, B_j) &= \mathbb{E}(B_i \cdot B_j) = \mathbb{E}((\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i) \cdot (\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_j)) \\ &= \rho \mathbb{E}(Y^2) = \rho \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$

gibt  $\rho$  gerade die Korrelation der Ausfälle an und bedingt unter  $Y$  sind die  $B_i$  unabhängig. Um die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben eine Realisation  $y$  der Marktinformation  $Y$  zu berechnen, wird die Größe

$$d_i(t) := \Phi^{-1}(\mathbb{Q}_i(t))$$

eingeführt, wobei  $\Phi^{-1}$  die Inversion der Standardnormalverteilung bezeichnet und  $\mathbb{Q}_i(t) := \mathbb{P}(\tau_i \leq t)$  die Verteilungsfunktion der Ausfallzeit des  $i$ -ten Kredits ist.  $d_i$  ist monoton wachsend wegen der Monotonie von  $\mathbb{Q}_i$  in  $t$  und von  $\Phi^{-1}$  in  $\mathbb{Q}$ . Die Ausfallzeit des  $i$ -ten Schuldners kann daher definiert werden als

$$\tau_i := \inf \{t \geq 0 : B_i \leq d_i(t)\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

da die  $\tau_i$  wegen  $B_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $\Phi(B_i) \sim \mathcal{R}(0, 1)$  gerade gemäß  $\mathbb{Q}$  verteilt sind:

$$\mathbb{P}(\tau_i \leq t) = \mathbb{P}(B_i \leq \Phi^{-1}(\mathbb{Q}_i(t))) = \mathbb{P}(\Phi(B_i) \leq \mathbb{Q}_i(t)) = \mathbb{Q}_i(t).$$

Damit folgt für alle  $i$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_i < t \mid Y) &= \mathbb{P}(B_i < d_i(t) \mid Y) \\ &= \mathbb{P}(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i < d_i(t) \mid Y) \\ &= \mathbb{P}\left(\varepsilon_i < \frac{d_i(t) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \mid Y\right) \\ &= \Phi\left(\frac{d_i(t) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Wegen  $Q_i(t) \equiv Q_j(t)$  und damit auch  $d_i(t) \equiv d_j(t) \forall i, j \in 1, \dots, N$  wird dabei der Index weggelassen. Daraus ergibt sich nun..

**Satz 4.6** Für ein normiertes, homogenes Portfolio  $\Pi$  aus  $N$  Krediten mit Verlustvariable  $L_\Pi(t)$  und Ausfallverteilungen  $Q_i(t) \equiv Q(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  ist die Verteilung der relativen Anzahl ausgefallener Titel zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  im Vasicek-Modell gegeben durch:

$$\mathbb{P}(L_\Pi \leq m) = \sum_{k=0}^m \binom{N}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{d(t) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{d(t) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-k} \varphi(y) dy, \quad (4.18)$$

wobei  $\varphi$  die Dichte der  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung ist.

**Beweis:** Definiere  $A_k^t$  als das Ereignis, dass genau  $k$  Ausfälle bis  $t$  stattfinden. Wegen der bedingten Unabhängigkeit der Ausfallereignisse gegeben die Marktinformation  $\{Y = y\}$  ist  $\mathbb{P}(A_k^t | Y = y)$  binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(A_k^t | Y = y) = \binom{N}{k} \cdot \Phi\left(\frac{d(t) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{d(t) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-k}$$

Die unbedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich daraus zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k^t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^t | Y = y) \cdot \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{k} \Phi\left(\frac{d(t) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)^k \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{d(t) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-k} \cdot \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

wobei Gleichung (4.17) verwendet wurde. Aufsummation der Wahrscheinlichkeiten für  $k = 1, \dots, m$  liefert die Behauptung.  $\square$

Für Large Homogeneous Portfolios lässt sich (4.18) noch wesentlich vereinfachen:

**Satz 4.7** Es sei  $\Pi$  ein homogenes, perfekt diversifiziertes Portfolio aus  $N$  Geschäften mit zu einem festen Zeitpunkt  $t$  einheitlicher Ausfallwahrscheinlichkeit  $p > 0$  und zufälliger Portfolioverlustquote  $LGD_\Pi^{(N)}$  (vgl. Definition 4.1) im Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ . Dann konvergiert die Folge  $(LGD^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$  im quadratischen Mittel und es gilt

$$LGD^{(N)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{P}(\tau < t | Y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right),$$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|LGD^{(N)} - \mathbb{P}(\tau < t | Y)| \geq \varepsilon) = 0$ .

Die Bedingungen sind beispielsweise für ein (homogenes) Sparkassen-Portfolio mit ansteigender Kreditanzahl insbesondere erfüllt, wenn es in der Bank eine Kreditlinienbestimmung (=obere Schranke für einzelne Kredithöhe) gibt.<sup>114</sup>

---

<sup>114</sup>Vgl. Bemerkung 4.1.

**Beweis:** Zunächst gilt wegen  $\sum_{i=1}^N w_i^{(N)} LGD_i = 1$ , (4.17) und mit  $\Phi^{-1}(p) =: d(t)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(LGD^{(N)} | Y) &= \sum_{i=1}^N w_i^{(N)} LGD_i \mathbb{E}(D_i | Y) = \sum_{i=1}^N w_i^{(N)} LGD_i \mathbb{P}(D_i = 1 | Y) \\ &= \mathbb{P}(\tau \leq t | Y) \sum_{i=1}^N w_i^{(N)} LGD_i \stackrel{(4.17)}{=} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(L^{(N)} - \mathbb{P}(\tau \leq t | Y))^2] &= \mathbb{E}((L^{(N)} - \mathbb{E}(L^{(N)} | Y))^2) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}((L^{(N)} - \mathbb{E}(L^{(N)} | Y))^2 | Y)) \\ &= \mathbb{E}(\text{Var}(L^{(N)} | Y)) \\ &= \sum_{i=1}^N (w_i^{(N)})^2 LGD_i^2 \text{Var}(D_i | Y) \\ &= \sum_{i=1}^N (w_i^{(N)})^2 \mathbb{P}(\tau \leq t | Y)(1 - \mathbb{P}(\tau \leq t | Y)) \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (w_i^{(N)})^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

also konvergiert  $(L^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$  im quadratischen Mittel gegen  $\mathbb{P}(\tau \leq t | Y)$ . Damit folgt aber auch die behauptete Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.  $\square$

Unter den obigen Bedingungen an das Portfolio helfen die Ergebnisse, faire Spreadpreise für CDO-Tranchen zu berechnen (siehe z.B. Eberlein, E. et al (2007)). Hier wird jedoch später ein anderer Weg - mit der Hilfe von Copulas - eingeschlagen.

### Alternativer Faktor-Ansatz

Anstelle der firmenspezifischen Modellierung kann mit dem Faktoransatz auch direkt der gesamte Portfolioverlust modelliert werden. Beispielsweise wird eine stochastische Differentialgleichung für den Gesamtverlust  $L_t$  bis zum Zeitpunkt  $t$  postuliert, z.B.

$$\frac{dL_t}{1 - L_t} = \gamma_1 dN_{1,t} + \gamma_2 dN_{2,t} + \gamma_3 dN_{3,t}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R},$$

bei dem die  $N_{i,t}$  unabhängigen Poissonverteilungen folgen und die  $\gamma_i$  Sprunghöhen des Gesamtverlusts bedeuten. Macht nun einer der Poisson-Prozesse einen Sprung in  $t$ , so erhöht sich der Portfolioverlust gemäß der Größe der  $\gamma_i$ , sodass also im Modell entsprechend viele Schuldner ein Kreditereignis erleben. Auf diese Weise können z.B. neben einem Einzelausfall auch Ausfallhäufungen durch Branchen- oder gesamtwirtschaftliche Krisen modelliert werden. Entsprechende Modellspezifikationen finden sich beispielsweise

se in Longstaff, F. A. / Rajan, A. (2006), Kapitel 4, sowie in Duffie, D. / Gârleanu, N. (2001).

## 4.5.2 Copula-Modelle

Um die Verlustverteilung eines Portfolios ausfallbehafteter Finanzgüter zu bestimmen, bedarf es neben der Modellierung der einzelnen Ausfallszenarien einer Spezifizierung ihrer Abhängigkeitsstrukturen. Copulas leisten genau das - sie ermöglichen die getrennte Modellierung von einzelnen Ausfallwahrscheinlichkeiten und ihren Abhängigkeiten.<sup>115</sup>

Eine anschauliche Copula-Definition ist die folgende:

**Definition 4.7** Eine Copula ist eine Funktion  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1)  $C(1, \dots, 1, v_i, 1, \dots, 1) = v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, v_i \in [0, 1]$
- (2)  $\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in [0, 1]^n$  gilt:  $C(v) = 0$ , falls  $v_i = 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- (3)  $\forall a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$  mit  $a \leq b$  (d.h.  $a_i \leq b_i \quad \forall i$ ) gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(v_{1i_1}, \dots, v_{ni_n}) \geq 0,$$

wobei  $v_{j1} = a_j, v_{j2} = b_j \quad \forall j \in 1, \dots, n$ , d.h. das Volumen des Würfels mit Ecken  $a$  und  $b$  ist stets positiv.

Eine äquivalente<sup>116</sup> und für hiesige Zwecke nützlichere, da wahrscheinlichkeitstheoretische Definition, ist die folgende:

**Definition 4.8** Eine  $n$ -Copula  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  ist eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion, deren univariate Randverteilungen  $\mathcal{R}[0, 1]$ -verteilt sind.

Copulas verlinken (insbesondere) eindimensionale Randverteilungsfunktionen  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  mit einer gemeinsamen Verteilung  $F(x_1, \dots, x_n)$ :<sup>117</sup>

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)) \\ &= \mathbb{P}(F^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F^{-1}(U_n) \leq x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = F(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

<sup>115</sup>Obwohl Copulas meist in Verbindung mit Intensitätsmodellen für das individuelle Ausfallereignis verwendet werden, kann also auch jede andere Art der Randverteilungsbestimmung (wie z.B. Unternehmenswertmodelle) genutzt werden.

<sup>116</sup>Ein Beweis dafür findet sich z.B. in Embrechts, P. et al. (1999), S. 4.

<sup>117</sup>Die eindimensionalen Randverteilungen ergeben sich zudem zu

$$\begin{aligned} F_i(u_i) &= \mathbb{P}(U_1 \leq \infty, \dots, U_{i-1} \leq \infty, U_i \leq u_i, U_{i+1} \leq \infty, \dots, U_n \leq \infty) \\ &= C(F_1(\infty), \dots, F_{i-1}(\infty), F_i(u_i), F_{i+1}(\infty), \dots, F_n(\infty)) \\ &= C(1, \dots, 1, F_i(u_i), 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

und die Randverteilung eines  $X_i$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i \leq x_i) &= \mathbb{P}(X_1 \leq \infty, \dots, X_i \leq x_i, \dots, X_n \leq \infty) \\ &= C(F_1(+\infty), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(+\infty)).\end{aligned}$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass zu einer jeden  $n$ -dimensionalen Verteilungsfunktion  $F(x_1, \dots, x_n)$  und Randverteilungen  $F(x_1), \dots, F(x_n)$  eine Copula existiert, sodass  $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^n = [-\infty, \infty]^n$  gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F(x_1), \dots, F(x_n)).$$

Sind  $F(x_1), \dots, F(x_n)$  stetig, so ist  $C$  zudem  $\mathbb{P}$ -f.s. eindeutig bestimmt (Theorem von Sklar.<sup>118</sup>)

Sind die individuellen Ausfallprozesse modelliert und eine Copula ausgewählt worden, so ergibt sich die Ausfallverteilungsfunktion des Portfolios also durch

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F(x_1), \dots, F(x_n))$$

. Aus der Klasse der Copulas lässt sich also zu beliebig vorgegebener Gesamtverlustverteilung sowie in der Praxis meist gut bekannten Einzelverlustmodellen eine „zugehörige Abhängigkeitsstruktur“ - die Copula - der Finanzgüter finden. Copulamodelle bieten damit einen sehr allgemeinen Weg zur Modellierung von Abhängigkeiten.

**Bemerkung 4.5** *In der Praxis wird im Zuge der Bewertung andersherum nach der Analyse individueller Ausfallprozesse eine Copula gewählt/vorgegeben, mit der sich die modellierte Ausfallverteilungsfunktion des Portfolios also durch*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F(x_1), \dots, F(x_n))$$

*ergibt.*

Sind die Verteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$  von  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und eine Copula  $C = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$  differenzierbar mit „Copula-Dichte“

$$c(F(x_1), \dots, F(x_n)) := \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)},$$

und ist ferner  $f$  die Dichte der zugehörigen gemeinsamen Verteilungsfunktion  $F$  von  $F_1, \dots, F_n$  und  $C$ , so ergibt sich mit dem Satz von Sklar der folgende Zusammenhang

---

<sup>118</sup>Ein Beweis dieses grundlegenden Resultats befindet sich z.B. in Nelsen, R. (1999), Theorem 2.3.3.



zwischen diesen Größen:

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \\
&= \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial F_n(x_n)}{\partial x_n} \\
&= \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\
&= c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i)
\end{aligned}$$

und damit

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}. \quad (4.19)$$

Dieses Resultat wird später bei der Kalibrierung der Parameter innerhalb einer Copula-Klasse noch von Hilfe sein.

Verschiedene Klassen von Copulas kommen für die Modellierung von CDOs in Frage. Eine aus verschiedenen Gründen in vielen Fällen nach wie vor gebräuchliche Wahl ist die sogenannte 1-Faktor Gauss-Copula. Sie hat die Gestalt

$$C(x_1, \dots, x_n, \Sigma) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n)), \quad (4.20)$$

falls  $\Phi$  die Standardnormalverteilung bezeichnet,  $\Phi^{-1}$  dessen Inversion und  $\Phi_\Sigma$  die n-dimensionale Normalverteilung mit Korrelationsmatrix  $\Sigma$ <sup>119</sup> ist.

**Bemerkung 4.6** *Es zeigt sich, dass die mit Gauss-Copulas erzeugbaren Spreadpreise deutlich von realistischen Marktwerten abweichen.<sup>120</sup> Die 1-Faktor-Gauss-Copula behauptet sich in der Praxis dennoch zumindest als Quotierungsstandard und besitzt den Vorteil, dass die Werte in der Korrelationsmatrix gerade den Asset-Korrelationen der Schuldner im Mertonmodell entsprechen.<sup>121</sup> Diese können aufgrund von i.d.R. reichlich verfügbaren Marktdaten, wie z.B. Aktienkursverläufen im Fall börsennotierter Unterneh-*

<sup>119</sup>Im einfachsten und am häufigsten verwendeten Fall der 1-Faktor Gauss-Copula hat die Korrelationsmatrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \rho \\ \rho & \dots & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>120</sup>Ein Beleg dafür ist die Existenz eines Correlation Smile (wie bei der Volatilität im Black-Scholes-Modell), d.h. in den Tranchen jeweils unterschiedlicher impliziter Korrelationen bei der Kalibrierung der Gauss-Copula an Marktdaten, wohingegen das Modell eine einheitliche Korrelation unterstellt. Eine detaillierte Beschreibung der Correlation Smile-Eigenschaften befindet sich in Hager, S. /Schöbel, R. (2006), Kapitel 3.

<sup>121</sup>Vgl. Martin et al. (2006), S. 203.

men, gut geschätzt werden. Für die spätere Bewertung des Sparkassen-CDOs wird die 1-Faktor Gauss-Copula auch deshalb herangezogen, da die gleiche Branchenzugehörigkeit mit der Verwendung nur eines Korrelationsparameters auskommt.<sup>122</sup>

Aufgrund der Bemerkung sind weitere Copulas zur Modellierung von Basketkreditderivaten vorgeschlagen und verglichen worden. Zu den hiesigen Zwecken wird später aus folgenden Gründen die sogenannte Gumbel-(Hougaard)-Copula herangezogen:

- Es wird aufgrund der gleichen Sektorzugehörigkeit aller Schuldner und der späteren Annahme identischer Abhängigkeiten nur ein Parameter benötigt
- Die Klasse der sogenannten archimedischen Copulas - zu der die Gumbel-Copula gehört - verfügt über mathematisch vorteilhafte Eigenschaften
- Die Gumbel-Copula-Abhängigkeiten können besonders einfach mit Hilfe des Kendalls tau-Konzepts quantifiziert werden, was aus Vergleichsgründen zur Gauss-Copula noch eine Rolle spielen wird (vgl. Kapitel 5.3)
- Gerade die Gumbel-Copula weist sogenannte upper Tail Dependence auf und ist damit gut in der Lage, das Phänomen gehäufte Ausfälle von Kreditforderungen zu modellieren<sup>123</sup>

Die Gumbel-Copula gehört zur Klasse der Archimedischen Copulas:

Es sei  $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  eine stetige, streng monoton fallende, konvexe Funktion, sodass  $\Phi(1) = 0$  und  $\Phi(0) = \infty$  gilt. Zu  $\Phi$  existiert dann eine Inverse  $\Phi^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ .

**Definition 4.9** *Es sei  $\Phi$  wie oben und die Funktion  $C^d : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  sei definiert durch*

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi^{-1}(\Phi(u_1) + \dots + \Phi(u_d)). \quad (4.21)$$

$C^d$  wird als  $d$ -dimensionale archimedische Copula bezeichnet, wenn  $\Phi^{-1}$  komplett monoton im Intervall  $[0, \infty)$  ist, d.h. wenn gilt

$$(-1)^k \frac{\delta^k}{\delta s^k} \Phi^{-1}(s) \geq 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, d.$$

$\Phi$  heißt in diesem Fall Generator der Copula.

**Bemerkung 4.7** *Die Bedingung der kompletten Monotonie ist gerade notwendig und hinreichend dafür, dass die gemäß (4.21) konstruierte Funktion eine Copula bildet.*<sup>124</sup>

<sup>122</sup>Mehrfaktor-Gaussmodelle ermöglichen dagegen gerade die Einführung von „intra-“ und „inter-“ sektoralen Korrelationen. Eine umfangreiche Abhandlung zu diesem Thema geben Hofert, M. / Scherer, M. (2008).

<sup>123</sup>So bekräftigen beispielsweise Hofert, M. und Scherer, M. (2008) die gute Eignung der Gumbel-Copula zum Treffen von Marktdaten. Hier gibt es allerdings in der Literatur auch gemischtere Befunde, die u.a. abhängig sind von konkreter Situation, sowie verwendetem Gütekriterium und verwendeter Methode.

<sup>124</sup>Vgl. Nelsen, R. B. (1998), Theorem 4.6.2.

Es lässt sich direkt nachrechnen, dass die Funktion  $\Phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ ,  $\theta \geq 1$  die Voraussetzungen eines Generators erfüllt:  $\Phi_\theta$  ist offensichtlich stetig mit  $\Phi_\theta(1) = 0$  und wegen  $\Phi'_\theta(t) = -\frac{(-\ln t)^{\theta-1}}{\theta t} < 0 \ \forall t \in (0, 1]$  streng monoton fallend. Außerdem ist  $\Phi_\theta$  wegen  $\Phi''_\theta(t) \geq 0$  konvex, also ein Generator, der wegen  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_\theta = \infty$  strikt ist. Die Inverse ist durch  $\Phi_\theta^{-1}(s) = \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})$  gegeben.

**Definition 4.10** Die durch den Generator  $\Phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ ,  $\theta \geq 1$  erzeugte archimedische Copula

$$C_\theta(u_1, \dots, u_d) = \exp \left( - \left[ \sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right)$$

heißt Gumbel-(Hougaard-)Copula.

### 4.5.3 Tail dependence

Eine Kenngröße (Maßzahl) für die von Copulas erzeugten Abhängigkeitsstrukturen von Zufallsvariablen liefert das Konzept der Tail Dependence. Es wird nur angemerkt, dass es zu diesem Thema auch eine Reihe weiterer Ansätze, wie das Arbeiten mit Konkordanz-Maßen (Spearman's Rho, Kendall's tau) gibt.<sup>125</sup>

Die Tail Dependence beleuchtet extreme Ereignisse, wie den zeitlich gehäuften Ausfall vieler Schuldner, der etwa in Folge einer regionalen, einer Branchen- oder einer Weltwirtschaftskrise entstehen kann und wegen seiner starken wirtschaftlichen Auswirkungen von erheblichem Interesse ist. Anhand von jeweils zwei betrachteten Zufallsgrößen wird nun die Tail Dependence eingeführt und Gauss- sowie Gumbel-Copula dann in Bezug auf ihre Tail Dependence untersucht.

Gegeben sei also ein Zufallsvektor  $(X, Y)$  mit stetigen Randverteilungen  $F_X$  und  $F_Y$  und  $U = F_X(X)$  sowie  $V = F_Y(Y)$ , d.h.  $U, V \sim \mathcal{R}[0, 1]$ .

**Definition 4.11** (i) Für den Zufallsvektor  $(X, Y)$  heißen  $\lambda_U$  bzw.  $\lambda_L$  mit

$$\lambda_O = \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}[Y > F_Y^{-1}(u) \mid X > F_X^{-1}(u)],$$

$$\lambda_U = \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P}[Y \leq F_Y^{-1}(u) \mid X \leq F_X^{-1}(u)],$$

sofern sie jeweils existieren, die Koeffizienten der upper bzw. der lower Tail Dependence.

(ii) Gilt  $\lambda_O \in (0, 1]$ , so heißen  $X$  und  $Y$  asymptotisch abhängig im upper Tail, gilt  $\lambda_U \in (0, 1]$ , so heißen  $X$  und  $Y$  asymptotisch abhängig im lower Tail. Im jeweils anderen Fall heißen  $\lambda_O$  bzw.  $\lambda_U$  asymptotisch unabhängig im upper bzw. lower Tail.

$\lambda_O$  und  $\lambda_U$  lassen sich als Funktional einer Copula schreiben, was das folgende Lemma (hier exemplarisch für den Fall von  $\lambda_O$ ) belegt.

<sup>125</sup>Lineare Korrelationsmaße greifen hierbei zu kurz oder sind - wie etwa Pearson's Korrelationskoeffizient - nicht Copula-spezifisch, sondern hängen oft auch von den Randverteilungen ab.

**Lemma 4.3** *Es seien  $X, Y$  Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktionen  $F_X, F_Y$  und  $U = F_X(X), V = F_Y(Y)$ . Dann gilt*

$$\lambda_O = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

*Sind weiter  $X$  und  $Y$  identisch verteilt mit  $F(x) < 1 \quad \forall x < \infty$ , so lässt sich  $\lambda_O$  im Falle einer in ihren Argumenten symmetrischen Copula<sup>126</sup> auch schreiben als*

$$\lambda_O = \lim_{u \nearrow 1} 2 \cdot \mathbb{P}(Y > x \mid X = x).$$

**Beweis:** Die Überlebensfunktion von  $(X, Y)$  sei gegeben durch

$$S_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zuerst nachzurechnen:

$$S_{X,Y}(x, y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y).$$

Für  $\lambda_O$  und eine Copula  $C$  mit  $(X, Y) \sim C(F_X(X), F_Y(Y))$  folgt dann

$$\begin{aligned} \lambda_O &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{\mathbb{P}[Y > F_Y^{-1}(u), X > F_X^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[X > F_X^{-1}(u)]} \\ &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - \mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u)] - \mathbb{P}[Y \leq F_Y^{-1}(u)] + \mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u)]}{1 - \mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u)]} \\ &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{u \nearrow 1} 1 - 2u + C(u, u) = \lim_{u \nearrow 1} 1 - u = 0$$

gilt mit der Regel von L'Hôpital weiter

$$\lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \nearrow 1} \left[ 2 - \frac{\partial}{\partial s} C(s, t) \Big|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right].$$

---

<sup>126</sup>D.h.  $C(u, v) = C(v, u) \quad \forall u, v \in [0, 1]$ , wie etwa im Falle der Gauss- und der Gumbel-Copula.

Aus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V \leq v \mid U = u) &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \mathbb{P}(V \leq v \mid u < U < u + \Delta u) \\
&= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(u \leq U \leq u + \Delta u, V \leq v)}{\mathbb{P}(u \leq U \leq u + \Delta u)} \\
&= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(u \leq U \leq u + \Delta u, V \leq v)}{\Delta u} \\
&= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} \\
&= \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)
\end{aligned}$$

erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V > v \mid U = u) &= 1 - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v), \\
\mathbb{P}(U > u \mid V = v) &= 1 - \frac{\partial}{\partial v} C(u, v),
\end{aligned}$$

aus denen für Verteilungen und Copulas mit den vorausgesetzten Eigenschaften die Behauptung folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_O &= \lim_{u \nearrow 1} \left[ 2 - \frac{\partial}{\partial s} C(s, t) \big|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s, t) \big|_{s=t=u} \right], \\
&= \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}(V > u \mid U = u) + \mathbb{P}(U > u \mid V = u) \\
&= 2 \cdot \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}(V > u \mid U = u) \\
&= 2 \cdot \lim_{x \nearrow \infty} \mathbb{P}(F^{-1}(V) > x \mid F^{-1}(U) = x) \\
&= 2 \cdot \lim_{x \nearrow \infty} [\mathbb{P}(Y > x \mid X = x)]. \quad \square
\end{aligned}$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich für  $\lambda_U$  durchführen und führen zu

$$\lambda_U = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \tag{4.22}$$

Für normal-verteilte Zufallsvariablen  $X, Y$  gilt  $\lambda_O = \lambda_U$  wegen der Radialsymmetrie der Verteilungen um ihren Erwartungswert. Die Tail Dependence im Gauss-Fall (d.h.  $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ) mit Korrelation  $r$ <sup>127</sup> ergibt sich damit wegen  $Y \mid X = u \sim \mathcal{N}(ru, 1 - r^2)$

---

<sup>127</sup>D.h. die Copula hat dann die Gestalt

$$C_{Gauss}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)}\right) dx dy.$$

im Fall  $r < 1$  zu

$$\begin{aligned}\lambda_O &= 2 \cdot \lim_{u \nearrow \infty} \mathbb{P}(Y > u \mid X = u) \\ &= 2 \cdot \lim_{u \nearrow \infty} \left( 1 - \Phi \left( \frac{u - ru}{\sqrt{1 - r^2}} \right) \right) \\ &= 2 \cdot \lim_{u \nearrow \infty} \left( 1 - \Phi \left( u \frac{\sqrt{1 - r}}{\sqrt{1 + r}} \right) \right) = 0,\end{aligned}$$

also sind Gauss-Copulas asymptotisch unabhängig in den Tails.

**Satz 4.8** Die upper und lower Tail Dependence der Gumbel-Copula sind

$$\lambda_O = 2^{\frac{1}{\delta}} \text{ und } \lambda_U = 0,$$

d.h. die Gumbel-Copula ist asymptotisch abhängig im upper, aber nicht im lower Tail.

**Beweis:** Wegen der Regel von l'Hôpital gilt:

$$\lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - u^{2^{1/\delta}}}{1 - u} = \lim_{u \nearrow 1} 2^{\frac{1}{\delta}} u^{2^{1/\delta} - 1} = 2^{\frac{1}{\delta}}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda_O &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + (-(2(-\ln u)^\delta)^{1/\delta})}{1 - u} \\ &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\delta}}}{1 - u} = 2 - \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - u^{2^{1/\delta}}}{1 - u} = 2 - 2^{1/\delta}.\end{aligned}$$

Für die lower Tail Dependence ergibt sich wegen  $2^{1/\delta} > 1$ :

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \searrow 0} \frac{\mathbb{P}[Y \leq F_Y^{-1}(u), X \leq F_X^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u)]} = \frac{C(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \searrow 0} \frac{1}{u} \exp \left( -(2(-\ln u)^\delta)^{1/\delta} \right) = \lim_{u \searrow 0} u^{2^{1/\delta} - 1} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

#### 4.5.4 Verteilungsmodelle

Verteilungsmodelle ähneln der Klasse der Faktormodelle - die die Abhängigkeit modellierende Größe wird hier jedoch nicht durch eine externe Zufallsvariable, sondern durch zufälliges Ziehen des Modellparameters der Verteilungsklasse in das Modell importiert. Für ein Portfolio mit  $N$  Krediten wird deshalb zunächst eine parametrische Verteilungsklasse gewählt. Dann wird der i.d.R. für alle Kredite gleiche Parameter(-vektor) des Modells, z.B. ein Gradmesser der wirtschaftlichen Gesamtlage, gemäß einer zuvor gewählten Verteilung gezogen. Über die Bestimmung der Ausfallverteilung des Portfolios

gelangt man wie üblich zur Bewertung des Derivats.

Im nun beispielhaft betrachteten Poisson-Modell wird der Schuldnerausfall als erster Sprung einer poissonverteilten Zufallsgröße modelliert.

Dazu seien  $D_1, \dots, D_N$  die Ausfallvariablen der  $N$  Kredite mit

$$D_i \sim Poi(\lambda_i) \text{ für } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Der Fall  $D_i \geq 1$  kennzeichne wie in Abschnitt 4.4.2 den Ausfall des Schuldners.

$$\Lambda : \Omega \rightarrow (0, \infty), \quad \Lambda(\omega) = \lambda,$$

definiere eine quadratintegrierbare Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion  $F$ , die die Realisierung des Poisson-Parameters  $\lambda$  auswürfelt. Zur Einführung der oben beschriebenen Abhängigkeitsstruktur werde nun angenommen, dass die  $D_i$  bedingt auf eine Realisation von  $\Lambda$  unabhängig sind mit

$$D_i \mid \Lambda = \lambda \sim Poi(\lambda), \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Gegeben das Wissen über den systematischen Faktor  $\Lambda$  verhalten sich die Ausfallindikatoren also unabhängig voneinander.

Ein Nachteil der Verteilungsmodelle ist die fehlende Zeitdimension. Ausfallkonstellationen können also nur innerhalb einer festgelegten Periode untersucht werden. Hierfür ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Ausfallkonstellation  $(D_1, \dots, D_N) = (d_1, \dots, d_N)$  durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_N = d_N) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_N = d_N \mid \Lambda = \lambda) dF(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^N \frac{\lambda^{d_i}}{d_i!} \cdot e^{-\lambda} dF(\lambda) \end{aligned}$$

Die individuelle Ausfallwahrscheinlichkeit in dem Modell ist wegen (4.16)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_i \geq 1) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(D_i \geq 1 \mid \Lambda = \lambda) dF(\lambda) \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda}) dF(\lambda). \end{aligned}$$

Die Ausfallkorrelation  $\rho = \text{Corr}(D_i, D_j)$  des Modells lässt sich berechnen zu

$$\rho = \frac{\text{Var}(\Lambda)}{\sqrt{\text{Var}(D_i) \cdot \text{Var}(D_j)}} = \frac{\text{Var}(\Lambda)}{\sqrt{\text{Var}(D_i) \cdot \text{Var}(D_i)}} = \frac{\text{Var}(\Lambda)}{\text{Var}(D_i)} = \frac{\text{Var}(\Lambda)}{\text{Var}(\Lambda) + \mathbb{E}\Lambda}.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit wegen

$$\text{Var}(D_i) = \text{Var}(\mathbb{E}(D_i \mid \Lambda)) + \mathbb{E}(\text{Var}(D_i \mid \Lambda)) = \text{Var}(\Lambda) + \mathbb{E}(\Lambda).$$

### Verteilungs-Mischungsmodelle

Verteilungsmodelle können hinsichtlich der gemeinsamen Abhängigkeit vom Modellparameter verallgemeinert werden, es entstehen dann die sogenannten Mischungsmodelle. Dabei wird der Parameter jedes Kreditgeschäfts von einer individuellen Zufallsgröße  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  gezogen. Die Abhängigkeit der Ausfälle ergibt sich dann durch die Abhängigkeitsstruktur der  $X_i$ .

Im Falle der Poissonverteilung sei  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$  die verallgemeinerte Zufallsvariable zur Bestimmung des Parameters  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . Bedingt unter  $\lambda$  seien die  $D_i$  wieder stochastisch unabhängig mit

$$D_i \mid \Lambda = \lambda \sim \text{Poi}(\lambda_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Analog zum homogenen Modell ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathbb{P}(D_i \geq 1) = \int_0^\infty 1 - e^{-\lambda_i} dF_i(\lambda_i) < \mathbb{E}(\Lambda_i) \\ 2. \quad & \mathbb{P}(D_1 = d_1, \dots, D_N = d_N) = \int_{[0, \infty)^N} \prod_{j=1}^N \mathbb{P}(D_i = d_i \mid \Lambda = \lambda) \\ & = \int_{[0, \infty)^N} \prod_{j=1}^N \frac{\lambda_j^{d_j}}{d_j!} e^{-\lambda_j} dF(\lambda), \end{aligned}$$

wobei  $F$  bzw.  $F_i$  die Verteilungsfunktionen von  $\Lambda$  und  $\Lambda_i$  bezeichnen.

### 4.5.5 Industriemodelle

Die von Finanzinstituten eigenständig entwickelten Portfoliomodelle stellen häufig abgewandelte Anwendungen der bisher vorgestellten Modelle dar. Bluhm identifiziert vier Modellkategorien (siehe Abbildung 4.3). Hier wird aufgrund der Weite des Themas nur ein Überblick gegeben. Beispielhaft und aufgrund seines Anwendungscharakters des oben beschriebenen Poisson-Mischungsansatzes wird allerdings etwas näher das Modell Credit Risk+ der Credit Suisse Financial Products vorgestellt sowie schließlich mit CreditPortfolioView in ein ratingbasiertes Modell eingeführt.

In der Literatur und in Unternehmen haben sich im Wesentlichen vier Modellklassen herausgebildet, die in Abbildung 4.3 mit Beispielen und deren federführenden Unternehmen dahinter veranschaulicht sind. In den Unternehmenswertmodellen werden die Abhängigkeiten durch korrelierte Unternehmenswerte (z.B. über empirische Aktienkorrelationen) erreicht. Die Stärken liegen in der Möglichkeit, relativ einfach auch Ratingänderungen



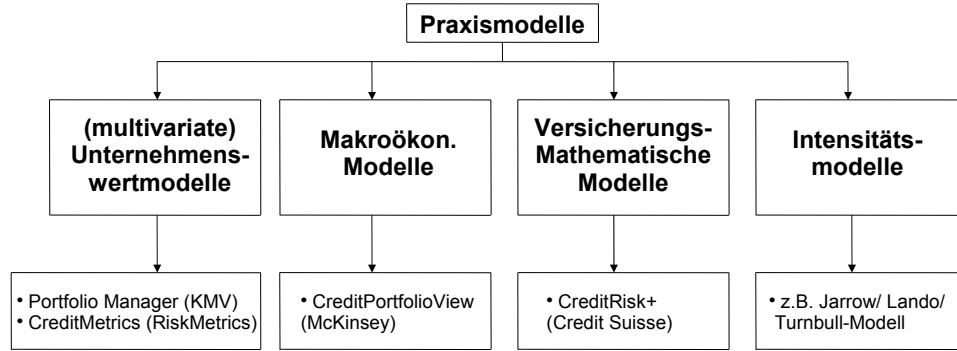


Abbildung 4.3: Ansätze der Portfoliomodellierung und Anwendungsbeispiele aus der Industrie. Nach: Bluhm, C. et al. (2002), S. 67.

sowie Recovery-Risiko einzubinden. Intensitätsmodelle bieten solche Vorteile nicht, verfügen aber über mathematisch „schöne“ Zugänge, siehe z.B. [19]. Duffie und Gârleanu [17] wenden Intensitätsmodelle zur Bewertung von CDOs an. In makroökonomischen Modellen werden Abhängigkeiten implizit über makroökonomische Faktoren erzeugt, welche gut an empirische Daten kalibriert werden können. Versicherungsmathematische Modelle werden benutzen schließlich auch Intensitäten. Im Gegensatz zu *den* Intensitätsmodellen verwenden sie jedoch starre, anstelle (dynamisch) korrelierter Intensitätsprozesse (z.B. durch feste Abhängigkeit von zu Beginn spezifizierten Sektoreinflüssen, wie in Credit Risk+) und werden als solche separat kategorisiert.

### Credit Risk+

In Credit Risk+ als der Anwendung des Poisson-Mischungs-Ansatzes folgen die Intensitäten einer Gammaverteilung.

Es sei also ein Portfolio aus  $N$  Kreditgeschäften der Höhe  $EAD_i$  mit im Modell als deterministisch angenommenen  $LGD_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , gegeben. Zu Beginn werden Exposure-Bänder der einzelnen Forderungen erstellt, um Rechenaufwand zu reduzieren. Dazu definiert man zunächst

$$v_i = \frac{EAD_i \times LGD_i}{E}$$

mit einer zuvor gewählten *Exposureeinheit*  $E$ . Für  $v_i$  bezeichne  $v_{[j]}$  diejenige ganze Zahl, die  $|v_i - v_{[j]}|$  minimiert. Das führt zu einer Menge aus  $N_E$  Exposure-Werten der Form  $E \cdot v_{[j]}$ , auf die man sich von nun an beschränkt.<sup>128</sup>

Nun werden  $N_S$  „Sektoren“ definiert, die etwa Branchen, Regionen, etc. darstellen können und denen jeweils eine gammaverteilte Zufallsgröße  $\Lambda_{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N_S$  mit Parametern  $\alpha_s$  und  $\beta_s$  zugeordnet wird. Es sei

$$\lambda_i := \mathbb{E}\Lambda_i \text{ und } \lambda_{(s)} := \mathbb{E}\Lambda_{(s)} = \alpha_s \beta_s.$$

<sup>128</sup>Alle  $EAD$ 's, die im selben „Exposureband“ liegen, bekommen also den gleichen Nennwert  $\frac{v_{[j]} \cdot E}{LGD_i}$  zugeordnet.

Die Modellannahme ist dann, dass bedingt unter einer Realisation  $\lambda_{(s)}$  von  $\Lambda_{(s)}$  die Anzahl  $L'_{(s)}$  der Ausfälle in Sektor  $s$   $Poi(\lambda_{(s)})$ -verteilt ist,

$$L'_{(s)} \mid \Lambda_{(s)} = \lambda_{(s)} \sim Poi(\lambda_{(s)}).$$

Dies ist konsistent mit der Annahme, dass  $\lambda_i$  die erwartete Ausfallintensität des  $i$ -ten Geschäfts beschreibt. Das Ausfallereignis jedes Geschäfts wird nun bestimmt durch die sektorgewichteten Ausfallverteilungen, d.h. jedes Geschäft besitzt Sektorgewichte, für die gilt

$$g_{i,s} \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{N_S} g_{i,s} = 1, \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Die Ausfallintensität des  $i$ -ten Geschäfts wird dann definiert durch die Gleichung

$$\Lambda_i = \sum_{s=1}^{N_S} g_{i,s} \cdot \lambda_i \cdot \frac{\Lambda_{(s)}}{\lambda_{(s)}}, \quad (4.23)$$

wobei ein zufällig überdurchschnittlicher  $\Lambda_{(s)}$ -Wert also zu  $\frac{\Lambda_{(s)}}{\lambda_{(s)}} > 1$  führt und damit ceteris paribus auch  $\Lambda_i$  erhöht. Ferner ist zu sehen, dass Ausfälle verschiedener Geschäfte genau dann abhängig voneinander sind, wenn  $g_{i,s}, g_{j,s} > 0$  für mindestens ein  $s \in \{1, \dots, N_S\}$  gilt, also beide Geschäfte durch mindestens einen gleichen Sektor getrieben werden.

$L'$  bildet nach obigen Annahmen eine poissonverteilte Zufallsvariable mit zufälliger Intensität  $\Lambda_{(1)} + \dots + \Lambda_{(N_S)}$ . Die erwartete Sektorintensität  $\lambda_{(s)}$  könnte man auch festlegen als  $\lambda_{(s)} = \sum_{i=1}^N g_{i,s} \lambda_i$  (was konsistent ist mit (4.23)). Es ist dann

$$L' = L'_1 + \dots + L'_N.$$

Über die Berechnung der erzeugenden Funktion  $G_{L'_{(s)}}$  von  $L'_{(s)}$  lässt sich nun zeigen, dass  $L'_{(s)}$  negativ binomialverteilt ist,<sup>129</sup>

$$L'_{(s)} \sim NB \left( \alpha_s, \frac{1}{1 + \beta_s} \right).$$

Die Ausfallverteilung des Portfolios ist dann die Faltung der Sektorverteilungen - wegen ihrer Stabilität unter Faltung (vgl. Alsmeyer, G. (2005), Satz 28.3) ist auch sie negativ binomialverteilt. Bluhm zeigt ([6], Kapitel 4.3.2), dass ihre erzeugende Funktion sich in geschlossener Form schreiben lässt als

$$G_{L'}(z) = \prod_{s=1}^{N_S} \left( \frac{1 - \frac{\beta_s}{1 + \beta_s}}{1 - \frac{\beta_s}{1 + \beta_s} z} \right)^{\alpha_s}.$$

<sup>129</sup>Siehe z.B. Rice, A. (1995), Kapitel 8.6.1.

Der Arbeit von Bluhm weiter folgend lässt sich damit auch die Portfolioverlustverteilung wegen der Unabhängigkeit der Sektorvariablen  $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(N_S)}$  aus der Faltung der Sektorverteilungen gewinnen:

Gegeben die durch  $\mathbb{P}(K_s = v_{[j]}) = \frac{1}{\lambda_{(s)}} \sum_{i \in [j]} g_{i,s} \lambda_i$ ,  $j = 1, \dots, N_E$ ) bestimmte Verteilung der Exposurehöhe (wobei  $i \in [j]$  bedeutet, dass der  $i$ -te Schuldner dem Exposureband  $j$  zugeordnet worden ist), ist die erzeugende Funktion von  $K_s$

$$G_{K_s}(z) = \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{\lambda_{(s)}} \sum_{i \in [j]} g_{i,s} \lambda_i \right) z^{v_{[j]}}.$$

Da  $G_{K_s}$  nicht von den Realisationen von  $\Lambda_{(s)}$  abhängt, zeigt Bluhm, dass sich die erzeugende Funktion  $G_{L_{(s)}}$  des Sektorverlusts darstellen lässt als  $G_{L_{(s)}}(z) = G_{L'_{(s)}} \circ G_{K_s}(z)$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} G_{L_{(s)}}(z) &= G_{L'_{(s)}} \circ G_{K_s}(z) \\ &= \left( \frac{1 - \frac{\beta_s}{1+\beta_s}}{1 - \frac{\beta_s}{1+\beta_s} G_{K_s}(z)} \right)^{\alpha_s} \\ &= \left( \frac{1 - \frac{\beta_s}{1+\beta_s}}{1 - \frac{\beta_s}{1+\beta_s} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i \in [j]} g_{i,s} \cdot \lambda_i \cdot z^{v_{[j]}}} \right)^{\alpha_s}. \end{aligned}$$

Die erzeugende Funktion des Portfoliogesamtverlusts  $G_{\Pi}$  ergibt sich damit schließlich zu

$$G_{\Pi}(z) = \prod_{s=1}^N G_{L_{(s)}}(z).$$

Die Stärken von Credit Risk+ liegen in der Betrachtung beliebiger Zeiträume, der Sektorenmodellierung sowie der Möglichkeit einer - wie oben gezeigt - analytischen Bestimmung des Portfolio-Verlusts. Ausfälle werden dabei jedoch rein exogen über Poisson-Prozesse modelliert und es können auch keine Bonitätsveränderungen berücksichtigt werden. Zudem stellt sich die Frage nach dem Schätzen der Sektorparameter sowie der Gewichtungen in diesem Modell.

### CreditPortfolioView

Beim von der Unternehmensberatergruppe McKinsey entwickelten CreditPortfolioView spielen auch Ratingänderungen und -abhängigkeiten der Schuldner eine Rolle. Den Ausgangspunkt bildet eine aus historischen Daten geschätzte Migrationsmatrix, d.h. eine stochastische Matrix  $\overline{M} = (\overline{m}_{ij}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  mit den möglichen Ratings  $R_1, \dots, R_n$ , wobei  $R_n$  den Ausfallstatus bezeichnet.  $\mathbb{P}(R_i \rightarrow R_j)$  gibt dann die Wahrscheinlichkeit für den Übergang des Ratings innerhalb einer festgesetzten Periode an (im Folgenden  $T = 1$ ). Insbesondere ist die Ausfallwahrscheinlichkeit eines mit  $R_i$  gerateten Schuldners inner-

halb der nächsten Periode gegeben durch  $\mathbb{P}(R_i \rightarrow R_n)$ .

CPV erlaubt eine Sektorspezifität in den Ratingmatrizen und die Einbeziehung von Konjunkturschwankungen. Gibt es  $S$  Sektoren, so bezeichnen  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_S$  die durchschnittlichen (konjunkturübergreifenden) Sektor-Ausfallwahrscheinlichkeiten. Die Parameter  $p_1, \dots, p_S$  für die kommende Periode werden mit den speziellen CPV-Verfahren „CPV-Makro-“ oder „CPV-Direkt-Ansatz“ simuliert<sup>130</sup> und besitzen dort jeweils Mittelwert  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_S$ . Die Größe

$$r_s = \frac{p_s}{\bar{p}_s}, \quad s = 1, \dots, S$$

gibt die Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeit zu „normalen“ Zeiten an, also entsprechen die Fälle

- $r_s < 1$  einer eher *guten* konjunkturellen Situation
- $r_s = 1$  der *durchschnittlichen* konjunkturellen Situation
- $r_s > 1$  einer eher *schwachen* konjunkturellen Situation.

Damit wird die die Branchen und deren jeweilige Konjunkturlage berücksichtigende Migrationsmatrix  $M$  formuliert als

$$m_{ij}^{(s)} = \alpha_{ij}(r_s - 1) + \bar{m}_{ij}, \quad s = 1, \dots, S, \quad (4.24)$$

mit zuvor zu kalibrierenden Koeffizienten  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Um zu garantieren, dass  $M$  stochastisch ist, wird wegen der Zeilensummen

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}^{(s)} = (r_s - 1) \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij}$$

bei der Kalibrierung der  $\alpha_{ij}$  die Forderung  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 0$  aufgenommen. Im Falle negativer Einträge in  $M$  in (4.24) werden diese auf Null gesetzt und in einem Renormierungsverfahren die Matrix wieder in eine stochastische transformiert. Mit Hilfe der Migrationsmatrix können nun insbesondere Portfolioverlustverteilungen für die nächste und darauffolgende Perioden geschätzt werden.

## 4.6 Kalibrierung von Parametern

In der Regel findet die Bewertung von Kreditderivaten unter Berücksichtigung historischer oder aktueller Marktdaten statt. Diese können im Zuge der Festlegung auf eine Modellklasse oder der Parameterauswahl innerhalb einer solchen eingebracht werden. Hier wird die Kalibrierung von Intensitäten an Marktdaten und anschließend verschiedene Verfahren zur Kalibrierung von Copula-Parametern vorgestellt.

<sup>130</sup>Für Details wird erneut auf Bluhm, C. (2003), Abschnitt 4.3.2 verwiesen.

### 4.6.1 Intensitätsfunktion

In Kenntnis von CDS-Marktpreisen können im Falle exogen vorgegebener Recovery Raten „zugehörige“ (implizite) Intensitäten und damit risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeiten individueller Schuldner bestimmt werden. Ziel dieses Abschnitts ist daher zunächst die Aufstellung einer Bewertungsformel für CDS, die anschließend genutzt wird, um daraus implizite Intensitäten zu gewinnen.

In dem Rahmen aus Abschnitt 4.4.2 werde ein CDS mit Nominalbetrag  $M$  und Fälligkeit  $T$  gehandelt. Folgende für diese Modellklasse übliche Grundannahmen werden getroffen:

1. Die Ausfallintensität  $\lambda : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  sei ein càdlàg-Prozess<sup>131</sup>
2. Es liege kein Kontrahentenrisiko vor und es gebe keine Dividendenzahlungen.
3. Im Falle eines Kreditereignisses wird die Ausfallzahlung sofort (also in  $\tau$ ) geleistet.

Zudem sei die Recovery Rate hier deterministisch. Bewertet wird der CDS nun, indem alle möglichen Zahlungsströme unter dem risikoneutralen W-Maß  $\mathbb{P}^*$  auf den gegenwärtigen Zeitpunkt abdiskontiert werden. Es ergeben sich das sogenannte Premium Leg PL, welches die abdiskontierten Prämienzahlungen an den Sicherungsgeber beschreibt, sowie das Default Leg DL, bei dem die abdiskontierte Zahlung infolge des möglichen Ausfalls bewertet wird. In der Praxis erfolgen Prämienzahlungen meist quartalsweise. Wegen der üblichen Festlegung von  $s$  als „Spread in bps per annum“ bezeichne deshalb hier der Ausgleichsfaktor  $\frac{1}{\Delta}$  die Anzahl der Prämienzahlungen pro Jahr. Da im Falle eines Ausfalls in  $t_{i-1} < t < t_i$  dem Protection Seller noch die aufgelaufene Prämie

$$AP = M \cdot s \cdot \Delta \cdot \frac{\tau - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

aus der letzten Periode zusteht, zieht er diese von seiner zu leistenden Ausfallzahlung  $AZ$  ab. Damit gilt  $DL = AZ - AP$ . Aus der Bedingung, dass der Wert eines CDS bei Vertragsabschluss null ist (siehe Abschnitt 2.5.1), ergibt sich der faire CDS-Spread  $s_{CDS}^*$  entsprechend als derjenige, für den unter  $\mathbb{P}^*$  barwertig  $DL(s_{CDS}^*) - PL(s_{CDS}^*) = 0$  gilt.<sup>132</sup>

#### Default und Premium Leg

Für den CDS mit Prämienzahlungen der Höhe  $s$  als Anteil in bps vom Nominalwert  $M$  zu den Zeitpunkten  $0 < t_1 < \dots < t_n = T$  und Recovery Rate  $R$  gilt dann:

<sup>131</sup>D.h.  $\lambda$  ist rechtsseitig stetig und besitzt linksseitige Limiten.

<sup>132</sup>An der Gestalt von PL und AP in (4.27) und (4.25) ist dann sofort zu sehen, dass wegen deren Positivität, Stetigkeit und strengen Monotonie in  $s = s_{CDS}$  und wegen  $\lim_{s_{CDS} \rightarrow +\infty} PL = +\infty$  das Premium Leg eindeutig bestimmt ist.

(1) Der Barwert der Ausfallzahlung unter  $\mathbb{P}^*$  ist wegen (4.14)

$$\begin{aligned} AZ &= \mathbb{E}^*[B(0, \tau) \cdot M \cdot (1 - R) \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}] = M \cdot (1 - R) \int_0^T B(0, u) F(du) \\ &= M \cdot (1 - R) \int_0^T B(0, u) \cdot \lambda(u) \exp\left(-\int_0^u \lambda(s) ds\right) du. \end{aligned}$$

Der Barwert der in der Ausfallperiode aufgelaufenen Prämie unter  $\mathbb{P}^*$  beträgt

$$\begin{aligned} AP &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}^* \left[ M s \frac{\tau - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, \tau) \mathbb{1}_{\{t_{i-1} < \tau < t_i\}} \right] \\ &= M s \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{u - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, u) F(du) \\ &= M s \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{u - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, u) \lambda(u) \exp\left(-\int_0^u \lambda(s) ds\right) du \end{aligned} \quad (4.25)$$

(2) Der Barwert des Premium Legs unter  $\mathbb{P}^*$  ist

$$\begin{aligned} PL &= \mathbb{E}^* \left( \sum_{i=1}^n M \cdot B(0, t_i) \cdot s \cdot \Delta \cdot \mathbb{1}_{\{\tau < t_i\}} \right) \\ &= M \sum_{i=1}^n B(0, t_i) \cdot s \cdot \Delta \cdot (1 - F_{t_i}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$= M \sum_{i=1}^n B(0, t_i) \cdot s \cdot \Delta \cdot \exp\left(-\int_0^{t_i} \lambda(u) du\right) \quad (4.27)$$

Damit folgt für den fairen Spread  $s = s_{CDS}^*$ :

$$\begin{aligned} PL(s_{CDS}^*) &= DL(s_{CDS}^*) = 0 \iff \\ s_{CDS}^* &= \frac{(1 - R) \int_0^T B(0, u) \cdot \lambda(u) \exp\left(-\int_0^u \lambda(s) ds\right) du}{\sum_{i=1}^n B(0, t_i) \cdot \Delta \cdot \exp\left(-\int_0^{t_i} \lambda(u) du\right) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{u - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, u) F(du)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

### Bootstrapping der risikoneutralen Intensitäten

Für am Markt zu verschiedenen Laufzeiten gehandelte CDS-Kontrakte eines Schuldners mit Fälligkeitsterminen  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_L < \infty$  können die - im Folgenden in Anlehnung an die Praxis als stückweise konstant angenommene - Intensitätsfunktion  $\lambda(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i \mathbb{1}_{[T_{i-1}, T_i)}(t)$  sowie die risikoneutralen Überlebenswahrscheinlichkeiten bis zu allen Fälligkeitsterminen gewonnen werden, indem man sukzessive wie folgt vorgeht:

Nach Annahme gilt

$$S(t) = \exp \left( - \sum_{j=1}^k \alpha_j (T_j - T_{j-1}) \right), \quad k = \begin{cases} 1 & t \leq T_1 \\ 2 & T_1 \leq t \leq T_2 \\ \dots & \dots \\ L & t > T_{L-1} \end{cases}.$$

Daher wird zunächst für  $k = 1$  die Intensität ( $= \alpha_1 T_1$ ) im Falle  $t \in (0, T_1]$  durch Einsetzen in Formel (4.28) bestimmt ( $s_{CDS}$  ist ja bekannt) und damit auch der  $S(T_1)$ -Wert. Damit lassen sich nun nacheinander  $\alpha_2, \alpha_3$ , usw. bestimmen. Für die Überlebenswahrscheinlichkeiten  $S(T_k)$ ,  $k \in \{1, \dots, L\}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} S(T_k) &= \exp \left( - \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_0^{T_k} \mathbb{1}_{[T_j - T_{j-1})}(u) du \right) \\ &= \prod_{j=1}^k \exp \left( - \alpha_j \int_0^{T_k} \mathbb{1}_{[T_j - T_{j-1})}(u) du \right) \\ &= S(T_{j-1}) \exp(-\alpha_j (T_j - T_{j-1})). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Liegen über die Geschäfte keine CDS-Daten vor, so kann auch über historische Ausfallraten (allgemein, regional, branchenspezifisch, etc.) eine Intensität geschätzt werden. Dies geschieht hier im Folgenden

**Beispiel 4.1** *Gegeben sind die globalen, historischen Ausfallraten aller von S&P gerateten Unternehmen zwischen 1981 und 2007, vgl. Abbildung 2.2, unterste Zeile. Aus den Daten wird mittels des obigen Verfahrens und (4.29) die Intensität für eine Laufzeit von  $T = 5$  Jahren bestimmt.*

*Aus den als Schätzung für die Ausfallwahrscheinlichkeiten angenommenen Ausfallraten ergeben sich die zugehörigen Überlebenswahrscheinlichkeiten für  $i = 1, \dots, 5$  durch  $S(T_i) = 1 - F(T_i)$  und die  $\alpha_i$  schließlich wegen (4.29) und  $S(0) = 1$  zu*

$$\alpha_i = -\ln \left( \frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})} \right) \cdot \frac{1}{T_j - T_{j-1}}.$$

*Es ergibt sich wegen der Annahme an  $\lambda$  direkt*

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 0,00985 \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(t) + 0,01342 \cdot \mathbb{1}_{[1,2)}(t) \\ &\quad + 0,01267 \cdot \mathbb{1}_{[2,3)}(t) + 0,01136 \cdot \mathbb{1}_{[3,4)}(t) + 0,00948 \cdot \mathbb{1}_{[4,5)}(t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wie an dem Beispiel erkennbar ist, schwankt die Intensität um den (gerundeten) Wert 0,011. In der Praxis wird in solchen Fällen häufig - und so später auch hier - einfach ein konstanter CDS-Spread angenommen, der zu einer „flachen“ Intensität führt. In diesem

Fall lässt sich der CDS-Spread aus (4.28) bei Vernachlässigung aufgelaufener Prämien schreiben als

$$\begin{aligned} s_{CDS}^* &= \frac{(1-R) \int_0^T B(0, u) \cdot \lambda \exp(-\lambda \cdot u) du}{\sum_{i=1}^n B(0, t_i) \cdot \Delta \cdot \exp(-t_i \cdot \lambda)} \\ &= \frac{(1-R) \exp(r \cdot T) \cdot \lambda \exp(-T \cdot \lambda)}{\exp(r \cdot T) \cdot \exp(-T \cdot \lambda)} \\ &= (1-R) \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Dies ist das sogenannte Credit Triangle

$$\lambda = \frac{s_{CDS}^*}{1-R}. \quad (4.31)$$

Es wird später noch zu Simulationszwecken verwendet.

## 4.6.2 Copula-Parameter

Die Festlegung auf eine (parametrisierte) Copula-Klasse gibt eine generelle Struktur für die Modellierung der Ausfallmechanismen vor. Auf die konkrete Situation wird das Modell aber erst angepasst über die Festlegung der Schuldnerabhängigkeiten durch die Auswahl/Schätzung des Modellparameters. Problem aller Schätzverfahren sind dabei die spärlichen historischen Ausfallinformationen, die eine „gute“ Kalibrierung erschweren.

Die meisten Schätzverfahren bedienen sich des Maximum Likelihood Modells der allgemeinen Statistik. Hier wird einzig in der Literatur verbreitete Interference Functions for Margins-Methode (IFM) herausgegriffen und vorgestellt.<sup>133</sup> Sie nutzt pragmatisch die Vorteile von Copulas, liefert zu den übrigen Ansätzen vergleichbare Ergebnisse und ist dabei weniger rechenintensiv.<sup>134</sup>

Dazu sei  $X = (X_{1s}, \dots, X_{Ns})_{s=1}^S$  eine Beobachtungssequenz von  $N$  Schuldnern zu  $S \in \mathbb{N}$  Zeitpunkten (Tage, Monate, o.ä.). Für  $k > N$  sei  $\Theta$  der  $k$ -dimensionale Parameterraum der Copula-Klasse mit  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N, \Psi) \in \Theta$ .<sup>135</sup> Weiter bezeichnen  $L_s(\theta)$  bzw.  $l_s(\theta)$  die Likelihood bzw. Loglikelihood-Funktion der Beobachtung in  $s$ .  $l(\theta)$  sei definiert durch

$$l(\theta) := \sum_{s=1}^S l_s(\theta).$$

Da die Parameter in der Copulaschreibweise wegen (4.19) eindeutig den Randverteilungen bzw. eindeutig der Copula zugeordnet werden können, wird vermöge der Copula ein spezifischer Randverteilungsparameter  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  und der Parametervektor  $\Psi$  für die

<sup>133</sup>Hierzu muss die Copula differenzierbar sein, was insbesondere die Normal- und Gumbel-Copulas stets erfüllen und was im Folgenden stets unterstellt wird.

<sup>134</sup>Vgl. Xu, J.J. (1996), Kap. 2.3.3 und Kap. 4.

<sup>135</sup>Insbesondere ist also  $\Psi$  ein  $(k - N)$ -dimensionaler Parametervektor.



Abhängigkeitsstruktur verwendet. Es folgt mit (4.19)

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{s=1}^S \ln \left[ c(F_1(x_1^s, \theta_1), \dots, F_n(x_n^s, \theta_n), \Psi) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i^s, \theta_i) \right] \\ &= \sum_{s=1}^S \ln c(F_1(x_1^s, \theta_1), \dots, F_N(x_N^s, \theta_N), \Psi) + \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \ln f_i(x_i^s, \theta_i). \end{aligned}$$

Nun werden die Copula-Parameter in einem zweischrittigen Verfahren geschätzt:

1. Bestimme für die Randverteilungen den MLS durch  $N$  separate Schätzungen  $(\theta_1^*, \dots, \theta_N^*)$ , sodass also für jedes  $\theta_i^*, i = 1, \dots, N$  gilt

$$\theta_i^* = \arg \max_{\theta_i} l^i(\theta_i) := \arg \max_{\theta_i} \sum_{s=1}^S l_s^i(x_i^s, \theta_i).$$

2. Bestimme den Copula-Parameter  $\Psi$  unter Verwendung von  $(\theta_1^*, \dots, \theta_N^*)$ :

$$\Psi^* = \arg \max_{\Psi} l^C(\Psi) := \arg \max_{\Psi} \sum_{s=1}^S \ln c(F_1(x_1^s, \theta_1^*), \dots, F_N(x_N^s, \theta_N^*), \Psi).$$

$\theta_{IFM} := (\theta_1^*, \dots, \theta_N^*, \Psi^*)$  heißt dann der *IFM-Schätzer*.

Xu (1996) zeigt, dass der IFM-Schätzer unter gewissen Regularitätsbedingungen konsistent<sup>136</sup> und - wie der MLS - asymptotisch normalverteilt ist mit

$$\sqrt{S} (\theta_{IFM} - \theta_0) \longrightarrow_d \mathcal{N}(0, \vartheta^{-1}(\theta_0)), \text{ für } \theta_0 \in \Theta$$

wobei  $\longrightarrow_d$  Verteilungskonvergenz anzeigt. An die Stelle der Fisher-Informationsmatrix tritt die Inverse der Godambe- Informationsmatrix  $\vartheta^{-1}(\theta_0)$  als asymptotische Varianz-Kovarianzmatrix.<sup>137</sup> Letztere hat die Gestalt

$$\vartheta(\theta_0) = D^{-1} M (D^{-1})^\top,$$

mit  $D = \mathbb{E}(\frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta)^\top)$  und  $M = \mathbb{E}(g(\theta)^\top g(\theta))$  mit dem Gradient

$$g(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} l = \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} l^1, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_N} l^N, \frac{\partial}{\partial \Psi} l^c \right)$$

der Loglikelihoodfunktion.

**Bemerkung 4.8** Die Komplexitätsreduktion durch das zweischrittige Verfahren im IFM-

<sup>136</sup>Ein Schätzer  $\tilde{\theta}_N$  des wahren Parameters  $\theta$  heißt konsistent, wenn  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\tilde{\theta}_N - \theta| < \delta) = 1 \forall \delta > 0$  gilt.

<sup>137</sup>Vgl. Xu, J.J. (1996), Theorem 2.3.

*Modell führt bei manchen Modellen gerade erst dazu, dass die eingesetzten numerischen Methoden überhaupt konvergieren und sie schätzbar werden. Dabei werden sich durch die Verwendung des mit einem Fehlerrisiko behafteten Parameters  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  des ersten für den zweiten Schritt i.A. andere Ergebnisse als bei der simultanen MLS-Methode ergeben, weshalb das Verfahren daher grundsätzlich ungenauer ist. Die tatsächlichen Abweichungen sind nach diversen Studien zu schließen allerdings sehr gering.*<sup>138</sup>

Erwähnt sei noch, dass auch semi- sowie nichtparametrische Ansätze für die Auswahl der Copula existieren. Diese bieten sich v.a. bei geringen Datensätzen oder Randverteilungen mit starken Flanken an.<sup>139</sup> Beispielsweise werden in der *Kanonischen Maximum-Likelihood-Methode (KML)* im Ansatz von oben die Randverteilungen nicht parametrisch, sondern mit Hilfe einer empirischen Verteilung geschätzt, der Copula-Parameter aber wie im zweiten Schritt des IFM-Modells bestimmt. Ein bekanntes Beispiel für einen nichtparametrischen Ansatz ist das Verfahren nach Deheuvels [15], bei dem eine aus einer als stetig angenommenen empirischen Verteilungsfunktion abgeleitete „empirische Copula“ gewonnen und für diese gezeigt wird, dass sie schwach gegen eine weitere Copula  $C^*$  konvergiert.

---

<sup>138</sup>Siehe z.B. Xu, J.J. (1996), S.48 oder Durrleman, V. / Nikeghbali, A. / T. Roncalli, T. (2000), Kap. 2.2.

<sup>139</sup>Vgl. Elizalde, A. (2006), Kap. 4.4.3.

# 5 CDO-Bewertung

Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung einer Bewertungsformel für den barwertig fairen Spread von CDO-Tranchen. Diese wird anschließend herangezogen, um mit dem Intensitätsmodell sowie dem Copula-Ansatz eine MC-Simulation des Sparkassenbeispiels aus Abschnitt 4.3 durchzuführen. Über einen Vergleich mit einem CDO bezüglich eines „wohldiversifizierten“ Assetpools wird anschließend eine (grobe) Abschätzung für den Nutzen von CDOs für Regionalbanken vorgenommen. Die Ergebnisse werden schließlich vorgestellt und diskutiert.

## 5.1 Generalvoraussetzungen

Betrachtet wird ein filtrierter W-Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^*)$  mit äquivalentem Martingalmaß  $\mathbb{P}^*$ , dessen Existenz und Eindeutigkeit weiterhin vorausgesetzt wird.

Die Notation von Kapitel 4 wird beibehalten, d.h. insbesondere bezeichnen

- $N$  die Anzahl der im CDO zusammengefassten Forderungen
- $M_i$  der Nominalwert der  $i$ -ten Forderung und  $M := \sum_{i=1}^N M_i$
- $\tau_i \in (0, \infty)$  der Zeitpunkt des Ausfalls des  $i$ -ten Schuldners
- $R$  die (deterministische) Recovery Rate jeder Forderung im Falle eines Ausfalls
- $0 < t_1 < \dots < t_n = T$  die Prämienzahlungstermine, die der Einfachheit wegen für alle Referenzaktiva als identisch angenommen werden, mit der Fälligkeit des CDO in  $t_n = T$
- $B(0, t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$  für einen Short-Rate-Prozess  $r$  den (deterministischen) Diskontfaktor
- $s_{[A,B]}^*$  den fairen Preis (in bps p.a.) der CDO-Tranche mit Attachment Point  $a = \frac{A}{M}$  und Detachment Point  $b = \frac{B}{M}$  (vgl. Kapitel 2.5.2).
- $1/\Delta$  die Anzahl der Prämienzahlungen pro Jahr.

$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in (0, T]}$  sammle wie in Abschnitt 4.4.2 die Informationen über die Ausfallzeitpunkte und  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in (0, T]}$  mit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in (0, T]} = (\sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{H}_t))_{t \in (0, T]}$  die „gesamten“ verfügbaren Informationen. Ferner werden die Annahmen aus Abschnitt 4.6.1 übernommen.

## 5.2 Herleitung der Bewertungsformel

Die Verlustverteilung spielt die zentrale Rolle für die fairen CDO-Spreadpreise. Ausgehend von der Beziehung  $LGD_i = 1 - R_i$  für die Verlustquoten  $LGD_i$  und Recovery Raten  $R_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) ergibt sich der kumulierte Verlust eines CDO zu

$$L(t) = \sum_{i=1}^N M_i \cdot LGD_i \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}} = \sum_{i=1}^N M_i \cdot (1 - R_i) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}. \quad (5.1)$$

$L_{[A,B]}(t)$  bezeichne den Tranchenverlust der Tranche  $[A,B]$  in  $t$ . Da die Tranche also nur die kumulierten Verluste zwischen  $A = a \cdot M$  und  $B = b \cdot M$  (mit  $0 \leq A < B \leq M$ , also  $0 \leq a < b \leq 1$ ) vom Nominalwert schultert, hat  $L_{[A,B]}(t)$  die Gestalt

$$L_{[A,B]}(t) = (L(t) - A) \mathbb{1}_{[A,B]}(L(t)) + (B - A) \mathbb{1}_{(B,M]}(L(t)). \quad (5.2)$$

$L_{[A,B]}(t)$  ist ein reiner Sprungprozess, dessen Sprünge jeweils durch einen Ausfall in  $t$  und entsprechender Ausgleichszahlung in Höhe von  $L_{[A,B]}(t) - L_{[A,B]}(t^-) > 0$  ausgelöst werden.<sup>140</sup>

Der Bewertungsansatz fußt nun wie beim CDS auf der Betrachtung der auf den gegenwärtigen Zeitpunkt abdiskontierten, risikoneutralen Prämienzahlungen des CDO-Emittenten (Premium Leg, PL) sowie den abdiskontierten Ausgleichszahlungen des Tranchenbesitzers (Default Leg, DL). Beide stellen nach Vertragsabschluss jeweils die einzigen Kapitalflüsse zwischen den Vertragspartnern dar (wenn das Accrued Premium vernachlässigt wird - siehe unten). Der risikoneutrale Spread  $s_{[A,B]} = s_{[A,B]}^*$  ist also derjenige, für den sich

$$DL = PL(s_{[A,B]}^*) \quad (5.3)$$

unter dem äquivalenten Martingalmaß  $\mathbb{P}^*$  ergibt.

Die aufgelaufenen Prämien der Ausfallperioden (AP) werden, auch nun in dieser Arbeit, in der Literatur aus Vereinfachungsgründen meist vernachlässigt - hier sei aber noch notiert..

**Bemerkung 5.1** a) Bei der Modellierung des AP bei einem CDO wäre im Falle eines Kreditereignisses beim  $j$ -ten Obligor stets zwischen folgenden drei Fällen zu unterscheiden:

- i)  $L(t_{i-1}) < A < L(\tau_j) \Rightarrow AP(j) = (L(\tau_j) - A) \cdot s \cdot \mathbb{E}^* \left[ \frac{\tau_j - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, \tau_j) \right]$
  - ii)  $A \leq L(t_{i-1}) < L(\tau_j) \leq B \Rightarrow AP(j) = M_j(1 - R) \cdot s \cdot \mathbb{E}^* \left[ \frac{\tau_j - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, \tau_j) \right]$
  - iii)  $L(t_{i-1}) < B < L(\tau_j) \Rightarrow AP(j) = (L(\tau_j) - B) \cdot s \cdot \mathbb{E}^* \left[ \frac{\tau_j - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \Delta B(0, \tau_j) \right],$
- wenn der Obligor  $j$  im Falle von a) bzw. c) zeitlich genau den Ausfall in der  $i$ -ten Periode

<sup>140</sup>Vgl. dazu auch die Fußnote 90 über Zahlungen in Folge von Ausfällen.

bezeichnet, bei dem der Gesamtverlust gerade den Attachment bzw. Detachment Point überschreitet,  $AP(j)$  die nur für dieses Geschäft zu zahlende aufgelaufene Prämie angibt. Das AP der Periode ergibt sich dann durch Summation der in dieser Periode angefallenen  $AP(j)$ .)

b) Anstelle einer Vernachlässigung des AP werden gelegentlich vereinfachende Annahmen getroffen, beispielsweise indem der in einer Periode  $(t_{i-1}, t_i]$  liegende Ausfallzeitpunkt  $\tau$  durch den (deterministischen) zeitlichen Mittelpunkt  $\frac{t_{i-1}+t_i}{2}$  von Periodenbeginn und -ende ersetzt wird.<sup>141</sup>

### Bestimmung von Default und Premium Leg

Der Diskontfaktor  $B(0, t)$  mit Fälligkeit  $0 \leq t \leq T$  kann gegen den Tranchenverlust  $L_{[A,B]}(t)$  wegen dessen Monotonie Stieltjes-integriert werden, und das Ergebnis ist hier stets eine endliche diskrete Summe der Gestalt  $\sum_i B(0, t_i)(L_{[A,B]}(t_i) - L_{[A,B]}(t_i^-))$ . Das Default Leg ist dann der unter dem äquivalenten Martingalmaß auf den gegenwärtigen Zeitpunkt abdiskontierte Tranchenverlust

$$DL = \mathbb{E}^* \int_0^T B(0, t) dL_{[A,B]}(t). \quad (5.4)$$

Für das Premium Leg ist zu beachten, dass die erwarteten Prämienzahlungen ebenfalls auf den gegenwärtigen Zeitpunkt abdiskontiert und nur noch auf das ausstehende Nominal der Tranche gezahlt werden, welches sich wegen (5.2) schreiben lässt als

$$\min \{ \max [B - L(t_i), 0], B - A \}.$$

Damit führt insgesamt zu

$$PL = \mathbb{E}^* \left[ \sum_{i=1}^n s_{[A,B]} \Delta B(0, t_i) \min \{ \max [B - L(t_i), 0], B - A \} \right].$$

Durch Einsetzen von DL und PL in Gleichung (5.3) erhält man somit direkt den zum gegenwärtigen Zeitpunkt risikoneutralen Spread der CDO-Tranche  $[A, B]$ :

$$s_{[A,B]}^* = \frac{\mathbb{E}^* \int_0^T B(0, t) dL_{[A,B]}(t)}{\mathbb{E}^* [\sum_{i=1}^n \Delta B(0, t_i) \min \{ \max [B - L(t_i), 0], B - A \}]} \quad (5.5)$$

Die konkrete Bestimmung von  $s_{[A,B]}^*$  erfolgt im nächsten Abschnitt durch Monte-Carlo-Simulation.

<sup>141</sup>Siehe z.B. Hofert, M / Scherer, M. (2008), Kap. 4.1.

## 5.3 Simulation

Die MC-Simulation zur Bestimmung fairer Spreadpreise erfolgt hier in vier Schritten und orientiert sich an der Arbeit von Galiani, S. (2003). Zunächst werden die „individuellen“ Parameter der Intensitätsfunktionen sowie die „Abhängigkeits“-Parameter der Copula geschätzt (1). Für jede der K Simulationen werden dann abhängige Zufallszahlen gemäß der jeweiligen Copula erzeugt (2) und anschließend daraus zufällige Ausfallzeiten gewonnen (3). Mit ihnen kann schließlich in Schritt (4) die Bestimmung des Default Legs sowie des Protection Legs erfolgen, womit vermöge Gleichung (5.5) der simulierte Preis der CDO-Tranche ermittelt wird.

### (1) Kalibrierung von Parametern

Um die Bewertungsformel auf die spezifische Situation anzuwenden, kann im Falle vorliegender Marktinformationen das in Abschnitt 4.6 beschriebene Verfahren angewandt werden. Da für die Unternehmen im fiktiven Sparkassen-Portfolio weder Börsendaten (etwa durch CDS) noch sonstige spezifische Marktinformationen über Ausfallwahrscheinlichkeiten verfügbar sind, wird auf allgemeine historische Ausfallwahrscheinlichkeiten (branchenübergreifend) zurückgegriffen.<sup>142</sup> Ausgehend von Beispiel 4.1 wird hier die gemittelte, flache Intensität von

$$\lambda(t) = 0,011 \cdot \mathbb{1}_{[0,5)}(t)$$

angenommen.

Anstelle einer Festlegung auf einen bestimmten (Korrelations-)Parameter der Copula wird die Simulation für verschiedene Ausprägungen realisiert und anschließend eine Nebeneinanderstellung mit dem vergleichsweise als „breit diversifiziert“ geltenden iTraxx vorgenommen. Das iTraxx-Portfolio fungiert hier als Näherung für das systematische - also nicht weiter diversifizierbare - Risiko. Die Höhe des darüber hinaus gehenden Risikos spiegelt also die Konzentrationsrisiken des betrachteten Portfolios wieder.

### (2) Erzeugung von Zufallszahlen gemäß der jeweiligen Copula

Nach Li (1999) kann die Erzeugung korrelierter Ausfallzeiten in zwei Etappen erfolgen, nämlich:

1. Erzeugung korrelierter, auf  $[0, 1]$  verteilter Zufallszahlen gemäß gewählter Copula
2. Bestimmung von korrelierten Ausfallzeiten aus 1. über die Inversenbildung der eindimensionalen Randverteilungen.

---

<sup>142</sup>Auch die Einbeziehung konkreter Branchen- oder Regionendaten kann problemlos mit diesem Verfahren erfolgen.

## Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen

Zur Erzeugung von Zufallszahlen zu einer symmetrischen, positiv definiten Korrelationsmatrix  $\Sigma$  wird zunächst die Cholesky-Zerlegung von  $\Sigma$  (hier mit Hilfe des Mathematikprogramms „Matlab“<sup>143</sup>) bestimmt:

**Definition 5.1** Für jede symmetrische, positiv definite  $N \times N$ -Matrix  $\Sigma$  heißt die (eindeutige) Zerlegung

$$\Sigma = D \cdot D^\top$$

in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix  $D$  mit ihrer Transponierten die Cholesky-Zerlegung von  $\Sigma$ .<sup>144</sup>

Nun werden

1.  $N$  unabhängige und jeweils  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallszahlen  $z = (z_1, \dots, z_N)$  erzeugt
2. der  $N$ -dimensionale Vektor  $x := z^t D$  definiert mit der unteren Dreiecksmatrix  $D$  aus der Cholesky-Zerlegung.  $x$  besteht dann aus  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten und entsprechend  $\Sigma$  korrelierten Zufallszahlen.<sup>145</sup>
3. durch Anwendung der  $\mathcal{N}^N(0, 1)$ -Verteilungsfunktion wird  $x$  zurück transformiert in einen Vektor  $u := \Phi(x)$  von jeweils  $\mathcal{R}[0, 1]$ -verteilten und gemäß  $\Sigma$  korrelierten Zufallszahlen. Damit ist  $u \sim C_\Sigma^{Gauss}$  wie gewünscht.

## Simulationsalgorithmus für Zufallszahlen gemäß Gumbel-Copula

Es sei  $\psi$  eine komplett monotone Funktion auf  $[0, \infty)$  mit  $\psi(0) = 1$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ .  $G$  sei diejenige Verteilungsfunktion auf  $[0, \infty)$ , sodass  $\psi$  die Laplace-Transformierte von  $G$  ist, also

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0.$$

Des Weiteren wird  $F^\nu(u) := \exp(-\psi^{-1}(u))$  für  $\nu \geq 0$  definiert. Dann lässt sich nachrechnen, dass  $F^\nu$  für alle  $\nu$  eine univariate Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]$  definiert. Ist  $X$  eine

<sup>143</sup>Matlab ist ein Softwarepaket für numerische Berechnungen und Datenvisualisierungen.

<sup>144</sup> $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$  kann zunächst eindeutig in der Form

$$\Sigma = L \cdot E \cdot L^\top$$

geschrieben werden, wobei  $L$  eine untere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonalelemente 1 sind, und einer Diagonalmatrix  $E$  mit positiven Einträgen. Mit Hilfe der „Matrix-Wurzel“ von  $E$  sowie dem Matrix-Faktor  $D$ , jeweils definiert durch

$$E = E^{1/2} \cdot E^{1/2} \quad \text{und} \quad D = L \cdot E^{1/2},$$

ergibt sich  $\Sigma = D \cdot D^\top$ .

<sup>145</sup>Für einen  $N$ -dimensionalen normalverteilten Vektor  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  mit Mittelwertvektor  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^\top$  und positiver definiten Kovarianzmatrix  $\Sigma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,\dots,N}$  ist der mit der regulären ( $N$ -dimensionalen) Matrix  $D$  linear transformierte Zufallsvektor  $Y = D \cdot X$  ebenfalls normalverteilt gemäß  $Y \sim \mathcal{N}(D\mu, D\Sigma D^\top)$ .

Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $G$  und  $U = (U_1, \dots, U_N)$  ein Vektor aus bedingt unter  $X$  unabhängigen Zufallsvariablen mit bedingter Verteilung  $\mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N \mid X) = F^\nu(u)$ , so ist  $U$  verteilt gemäß der von  $\psi$  erzeugten archimedischen Copula, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N \mid X = x) dG(x) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^N F^\nu(u_i) dG(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\nu(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_N))} dG(x) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_N)). \end{aligned}$$

Für die Inverse

$$\Phi_\theta^{-1}(t) = \exp(t^{\frac{1}{\theta}}), \quad \theta \geq 1$$

des Gumbel-Copula-Generators zeigt sich, dass die sogenannte positive Stabilverteilung  $St(\frac{1}{\theta}, 1, (\cos(\frac{\pi}{2\theta}))^\theta, 0)$  mit  $\theta > 1$  gerade  $\Phi_\theta^{-1}$  als Laplace-Transformierte besitzt.

**Definition 5.2** Eine Zufallsvariable  $X$  heißt stabilverteilt (nach Nolan), in Zeichen  $X \sim St(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , wenn seine charakteristische Funktion durch

$$\psi(t) = \mathbb{E} \exp(itX) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) + i\delta t)) & , \quad \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |t| (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|) + i\delta t) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

gegeben ist, mit  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\gamma > 0$  und  $\delta \in \mathbb{R}$ . Im dem speziellen Fall  $X \sim St(\alpha, 1, \gamma, 0)$  für  $\alpha < 1$  erstreckt sich die Verteilung nur auf die positive Halbachse und wird daher auch als positive Stabilverteilung bezeichnet.

Für den Generator  $\Phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ ,  $\theta \geq 1$  der Gumbel-Copula wird nun also

$$C = C(u_1, \dots, u_N) = \exp \left( - \left[ \sum_{i=1}^N (\ln u_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right) \quad (5.6)$$

betrachtet und zu einem Zufallsvektor  $(U_1, \dots, U_N)$  mit Verteilungsfunktion gemäß (5.6) sei

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dC.$$

Einen Algorithmus von Marshall&Olkin<sup>146</sup> auf diese Situation anwendend kann dann ein  $N$ -dimensionaler, gemäß Gumbel-Copula verteilter Vektor aus Zufallszahlen wie folgt simuliert werden:

<sup>146</sup>Siehe McNeil, A. (2006), Kap.2, Algorithmus 1.



1. Erzeuge einen  $N$ -dimensionalen Vektor  $\mathcal{R}(0, 1)$ -verteilter Zufallszahlen  $z = (z_1, \dots, z_N)$ .
2. Für  $\theta > 1$  erzeuge eine  $St(\frac{1}{\theta}, 1, (\cos(\frac{\pi}{2\theta}))^\theta, 0)$ -verteilte Zufallszahl  $y$ .<sup>147</sup>
3. Dann ist  $u = (u_1, \dots, u_N)$  mit  $u_i = \exp(-(-\ln z_i/y)^{1/\theta})$  eine Realisation gemäß der Gumbel-Copula.

### Vergleich von Copula-Parametern mit Kendall's tau

Da Copulas unterschiedlicher Copulaklassen hinsichtlich der Stärke ihrer Abhängigkeiten schwer direkt miteinander zu vergleichen sind, wird häufig ein Umweg eingeschlagen, der über das Konkordanzmaß Kendall's tau führt. Diese Kennzahl kann interessanterweise nämlich mit Hilfe der Copula von Zufallsvektoren dargestellt werden. Das „Abhängigkeitsniveau“ zweier Copulas gilt im Folgenden als „identisch“, wenn ihr Kendall's tau-Wert übereinstimmt. Zunächst wird diese Maßzahl für zwei Zufallsvariablen eingeführt.

**Definition 5.3** Für einen Vektor  $(X, Y)^T$  mit univariaten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  heißt

$$\tau(X, Y) := \mathbb{P}((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0) - \mathbb{P}((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0)$$

Kendalls tau, wobei  $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$  eine unabhängige Kopie von  $(X, Y)^T$  ist.

Für die Gauss-Copula als Beispiel einer sogenannten „elliptischen“ Copula zeigen Embrechts, P. et al. in [25] das

**Lemma 5.1** Es sei  $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$  mit  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ . Dann gilt für Kendalls tau

$$\tau = \tau(X, Y) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{i,j}). \quad (5.7)$$

**Beweis:** Siehe Embrechts, P. et al. (2005), S. 215f.  $\square$

Auch im Falle der Gumbel-Copula ist eine einfache Berechnung von Kendall's tau möglich. Dabei hilft der folgende

**Satz 5.1** Es seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen mit einer von dem Generator  $\Phi$  erzeugten archimedischen Copula  $C$ . Dann gilt für Kendall's tau

$$\tau(\Phi) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\Phi(t)}{\Phi'(t)} dt. \quad (5.8)$$

<sup>147</sup>Dies geschieht hier in Matlab durch den Matlab-Algorithmus von McCulloch (18.12.1996). Man findet ihn auf der Internetseite <http://www.koders.com/matlab/fid0BD948B1073EF54C930FF985FAF326142AA9E09E.aspx?s=sort>.

|                   |   |        |        |        |        |
|-------------------|---|--------|--------|--------|--------|
| Gauss-Korrelation | 0 | 0,15   | 0,3    | 0,45   | 0,6    |
| Kendall's tau     | 0 | 0,0959 | 0,194  | 0,2972 | 0,4097 |
| Gumbel theta      | 1 | 1,1061 | 1,2407 | 1,4229 | 1,6941 |

Abbildung 5.1: Umrechnung von Korrelationsparametern für Gauss- und Gumbel Copula vermöge Kendall's tau

**Beweis:** Siehe Nelsen, R. B. (1999), Theorem 5.1.3 und Korollar 5.1.4.  $\square$

Für die Gumbel-Copula mit Generator  $\Phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$  erhält man wegen  $\frac{\Phi_\theta(t)}{\Phi'_\theta(t)} = \frac{1}{\theta} t \ln t$  aus (5.8) nun

$$\begin{aligned}
\tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\
&= 1 + 4 \frac{1}{\theta} \left( \left[ \frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} t dt \right) \\
&= 1 + 4 \frac{1}{\theta} \left( 0 - \frac{1}{4} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{\theta}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

In Tabelle 5.1 sind zu vorgegebenen Gausskorrelationen die mit (5.7) und (5.9) berechneten „entsprechenden“ Parameter  $\theta$  der Gumbel-Copula angegeben.

### (3) Generierung von Ausfallzeiten

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.4.2 werden nun Ausfallzeiten aus den Zufallszahlen gemäß der individuellen Ausfallverteilungen und der Copula  $C$  gewonnen. Allgemein bestimmt man hierzu für jeden Obligor zunächst wie in 4.6.1 die jeweilige Intensität  $\lambda_i(t), i = 1, \dots, N$  und berechnet dann gemäß (4.14)

$$\Lambda_i(t) = -\ln S_i(t) = -\int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, N.$$

Daraus erhält man die simulierte Ausfallzeit des  $i$ -ten Schuldners als den ersten Zeitpunkt, an dem  $\Lambda_i$  auf/unter die zufällige, logarithmierte Schranke  $u_i$  fällt,

$$\tau_i := \inf \{t > 0 : \Lambda_i(t) \leq \ln u_i\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Die simulierten Ausfallzeiten haben damit - auch allgemeiner im Falle stochastischer Intensitäten, wenn diese unabhängig vom Marktinformationssystem  $\mathcal{G}$  sind, die gewünschte Verteilung, denn es gilt der

**Satz 5.2** *Der obige Algorithmus repliziert die korrekte (anvisierte) Verteilung für die Ausfallzeiten.*

**Beweis:** Die Behauptung kann leicht, wie oben angedeutet, allgemeiner für stochastische Intensitäten geführt werden. Gemäß (4.15) gilt für die wahre Ausfallzeit  $\tau_i$ , also den Zeitpunkt des ersten Sprungs des Cox-Prozesses  $N_i(t)$ , in diesem Fall:

$$\mathbb{P}^*(\tau_i \geq t) = \mathbb{E}^* \left( \exp \left( - \int_0^t \lambda_i(s) ds \right) \right) = \mathbb{E}^* (\exp(\Lambda_i(t))), \quad i = 1, \dots, N.$$

$\tilde{\tau}_i$  sei die simulierte, also die durch

$$\tilde{\tau}_i := \inf \{t > 0 : \Lambda_i(t) \leq \ln u_i\}$$

gegebene Ausfallzeit. Damit gilt also  $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_i \geq t) = \mathbb{P}(\Lambda_i(t) \geq \ln(u_i))$ . Da der Vektor  $u$  aus der Simulation unabhängig von den Informationen aus  $\mathcal{G}_t \forall t \geq 0$  erzeugt wurde, folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(\tilde{\tau}_i \geq t) &= \mathbb{P}^*(\Lambda_i(t) \geq \ln u_i) \\ &= \mathbb{P}^*(u_i \leq \exp(\Lambda_i(t))) \\ &= \mathbb{E}^*[\mathbb{P}^*(u_i \leq \exp(\Lambda_i(t)) \mid \Lambda_i(t))] \\ &= \mathbb{E}^*[\exp(\Lambda_i(t))] \\ &= \mathbb{P}^*(\tau_i \geq t), \end{aligned}$$

d.h.  $\tau_i$  und  $\tilde{\tau}_i$  besitzen die gleiche Verteilung.  $\square$

**Bemerkung 5.2** *Im vorliegenden Fall (einheitliche, flache Intensität) ergibt sich  $\tau_i$  wegen  $F(\tau_i) := 1 - \mathbb{P}^*(\tau_i > t) = 1 - \exp(-t \cdot \lambda) = u_i$  einfacher zu*

$$\tau_i = F_i^{-1}(u_i) = -\frac{\ln(1 - u_i)}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, N,$$

mit  $u = (u_1, \dots, u_N)$  wie oben aus der jeweiligen Simulation.

#### (4) Herleitung der fairen Tranchenspreads

Zuerst wird das Default Leg behandelt.  $K$  sei dazu die Anzahl der Simulationen und  $k \in \{1, \dots, K\}$ .

Der Vektor der Ausfallzeiten  $(\tau_1^k, \dots, \tau_N^k)$  der  $k$ -ten Simulation werde in eine aufsteigende Reihenfolge gebracht und abgeschnitten: Für die Anzahl  $L \leq N$  der bis  $T$  ausgefallenen Schuldner in der  $k$ -ten Simulation bleibt der gekürzte und neu sortierte  $L$ -dimensionale Vektor  $\Upsilon^k := (\tau_1^k, \dots, \tau_L^k)$  übrig.

Der Verlust in der  $k$ -ten Simulation berechnet sich mit Gleichung (5.1) nun zu

$$L^k(t) = \sum_{i=1}^N M_i \cdot LGD_i(t) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i^k \leq t\}}.$$

Hierbei ist zwischen 3 Fällen zu unterscheiden:

1. Fall:  $L^k(T) \leq A \Rightarrow DL^k = 0$  (kein Verlust in der betrachteten Tranche)

2. Fall:  $A \leq L^k(T) \leq B \Rightarrow$  setze  $\tau_u^k = \inf \{t > 0 : L^k(t) \geq A\}$  („untere Triggerzeit“). Für alle Ausfallzeiten (zeitlich) ab  $\tau_u^k$  berechne die abdiskontierte Ausfallzahlung des  $w$ -ten Ausfalls durch

$$DL_w^k = B(0, \tau_w^k) L_w^k = B(0, \tau_w^k) (1 - R_w) M_w \text{ für } w \in \{u, u+1, \dots, L\}$$

und damit

$$DL^k = \sum_{w=u}^L DL_w^k = \sum_{w=u}^L B(0, \tau_w^k) (1 - R_w) M_w \text{ für } w \in \{u, u+1, \dots, L\}$$

3. Fall:  $L^k(T) \geq B$ , dann setze neben  $\tau_u^k$  zusätzlich  $\tau_o^k = \inf \{t > 0 : L^k(t) \geq B\}$  („obere Triggerzeit“). Berechne dann für alle Einträge  $\tau_w^k$  in  $\Upsilon_{[A,B]}^k := (\tau_u^k, \tau_{u+1}^k, \dots, \tau_o^k)$  wie oben die Höhe von  $DL_w^k$  und damit schließlich

$$DL^k = \sum_{w=u}^o DL_w^k.$$

Zur Berechnung des Premium Legs  $PL^k$  für jede der  $k = \{1, \dots, K\}$  Simulationen:

Gegeben die Ausfallzeiten  $\Upsilon^k$  und die Zahlungstermine  $\{t_1, \dots, t_n\}$  der Prämien, bestimme man zunächst den kumulierten Verlust  $L^k(t) = \sum_{i=1}^N M_i LGD_i^k(t) \mathbb{1}_{\{\tau_i^k \leq t\}}$  und damit das Premium Leg der  $k$ -ten Simulation durch:

$$PL^k = \sum_{i=1}^n \delta \cdot B(0, t_i) \cdot \min \{ \max [B - L^k(t_i), 0], B - A \}$$

Berechne anschließend das arithmetische Mittel der Legs:

$$\text{Default Leg : } DL = \sum_{k=1}^N DL^k$$

$$\text{Premium Leg : } PL = \sum_{k=1}^N PL^k$$

Durch Einsetzen in die Bewertungsformel (5.5) erhält man schließlich den simulierten Wert des fairen Tranchenspreads.

### Konfidenzintervalle

Das Schätzen von CDO-Spreads mittels Monte-Carlo-Simulation wirft in natürlicher Weise die Frage nach der Schätzgüte auf. Eine direkte Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes liefert die folgenden (asymptotischen) Konfidenzintervalle für die beiden Legs, mit denen sich im folgenden Lemma auch ein asymptotisches Konfidenzintervall für den

fairen Tranchenspread ergibt:

**Lemma 5.2** *Gegeben sei ein Signifikanzniveau  $\alpha \in [0, 1]$ , ein CDO mit Laufzeit  $T$  und für jede Tranche  $j \in [1, \dots, L]$  sei  $\overline{PL_T^j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N PL_{T,j}^k$  sowie  $\overline{DL_{T,j}^k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N DL_{T,j}^k$ . Dann sind asymptotische  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Konfidenzintervalle für das erwartete Premium Leg  $EPL_{T,j}$  und das erwartete Default Leg  $EDL_{T,j}$  der  $j$ -ten Tranche gegeben durch:*

$$\begin{aligned} [u_{PL_T^j}, o_{PL_T^j}] &= \left[ \overline{PL_T^j} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} s_{PL_T^j}, \overline{PL_T^j} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} s_{PL_T^j} \right], \\ [u_{DL_T^j}, o_{DL_T^j}] &= \left[ \overline{DL_T^j} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} s_{DL_T^j}, \overline{DL_T^j} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} s_{DL_T^j} \right]. \end{aligned}$$

Dabei sind  $s_{PL_T^j}$  und  $s_{DL_T^j}$  die Standardabweichungen der  $PL_T^j$ - bzw.  $DL_T^j$ -Werte aus der Monte-Carlo-Simulation,  $q_{1-\alpha/2}$  ist das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

$$\left[ \frac{u_{DL_T^j}}{o_{DL_T^j}}, \frac{o_{DL_T^j}}{u_{DL_T^j}} \right] \quad (5.10)$$

ist dann ein asymptotisches  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für den fairen Spread  $s_{T,j}^*$  der  $j$ -ten CDO-Tranche.

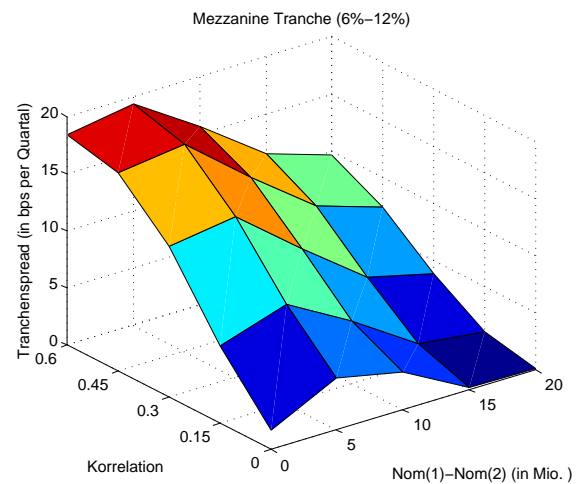
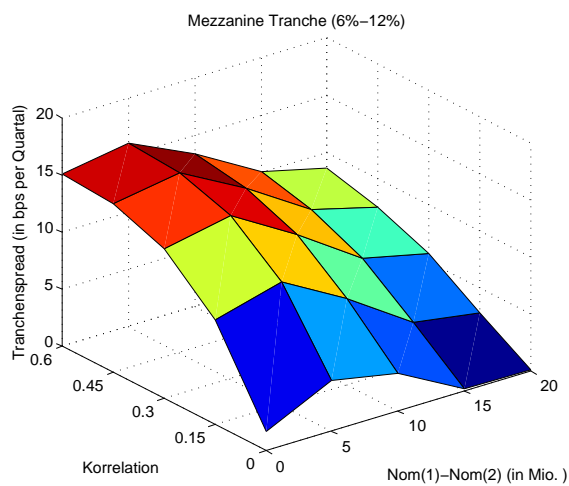
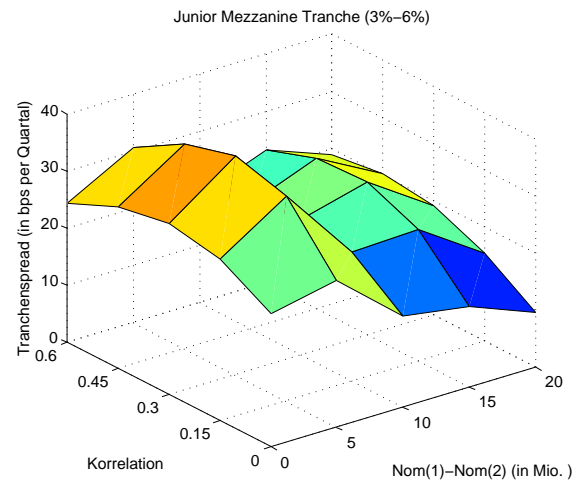
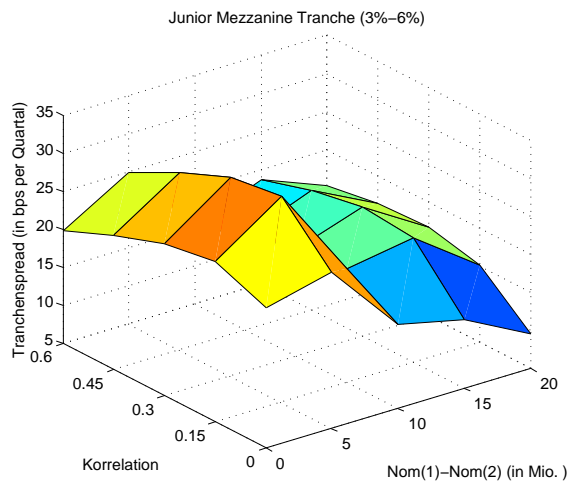
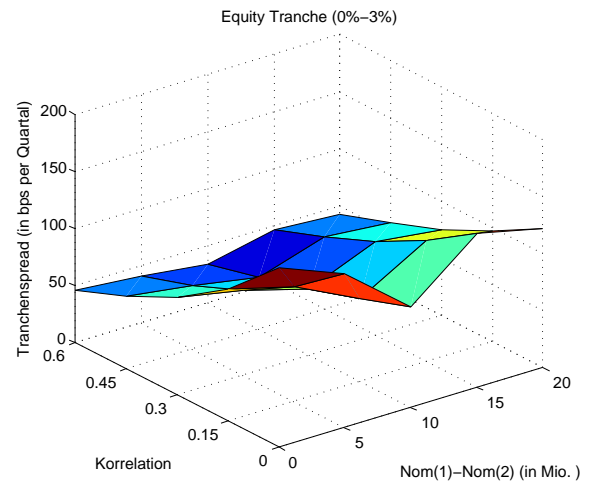
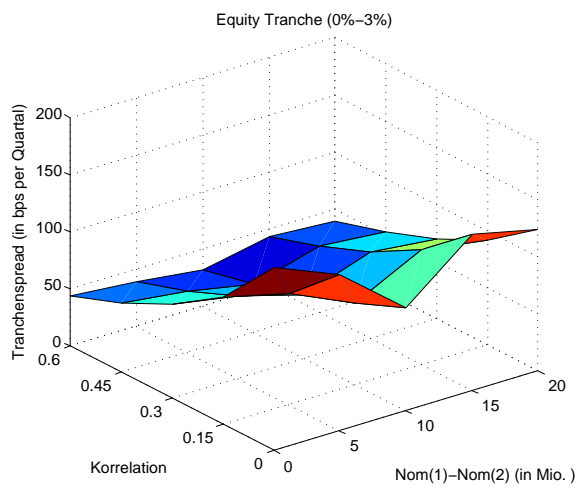
## 5.4 Ergebnisse

Gemäß obigem Verfahren wurde der Sparkassen-CDO aus Abschnitt 4.3 bewertet. Bei der Simulation wurde das Credit Triangle (4.31) verwendet und dazu, ausgehend von der allgemeinen Intensitätsfunktion (4.30), die flache Intensitätskurve von

$$\lambda(t) = 0,011 \cdot \mathbb{1}_{[0,5]}(t)$$

für alle Schuldner angenommen. Ferner wurde eine deterministische Recovery Rate von  $R_i = 0,4 \ \forall i \in \{1, \dots, 50\}$  gewählt. Für jede der beiden Copula-Klassen wurden jeweils fünf verschiedene Korrelationsparameter und Nominalwerte  $M(1)$  der großen Kreditforderung berücksichtigt. Daraus resultieren insgesamt jeweils 25 Simulationsdurchläufe mit den folgenden Inputparametern:

- Anzahl Simulationen: 200.000
- Laufzeit des CDO:  $T = 5$  Jahre
- Risikoloser Zinssatz:  $r = 3\%$  p.a.
- Schuldneranzahl:  $N = 50$



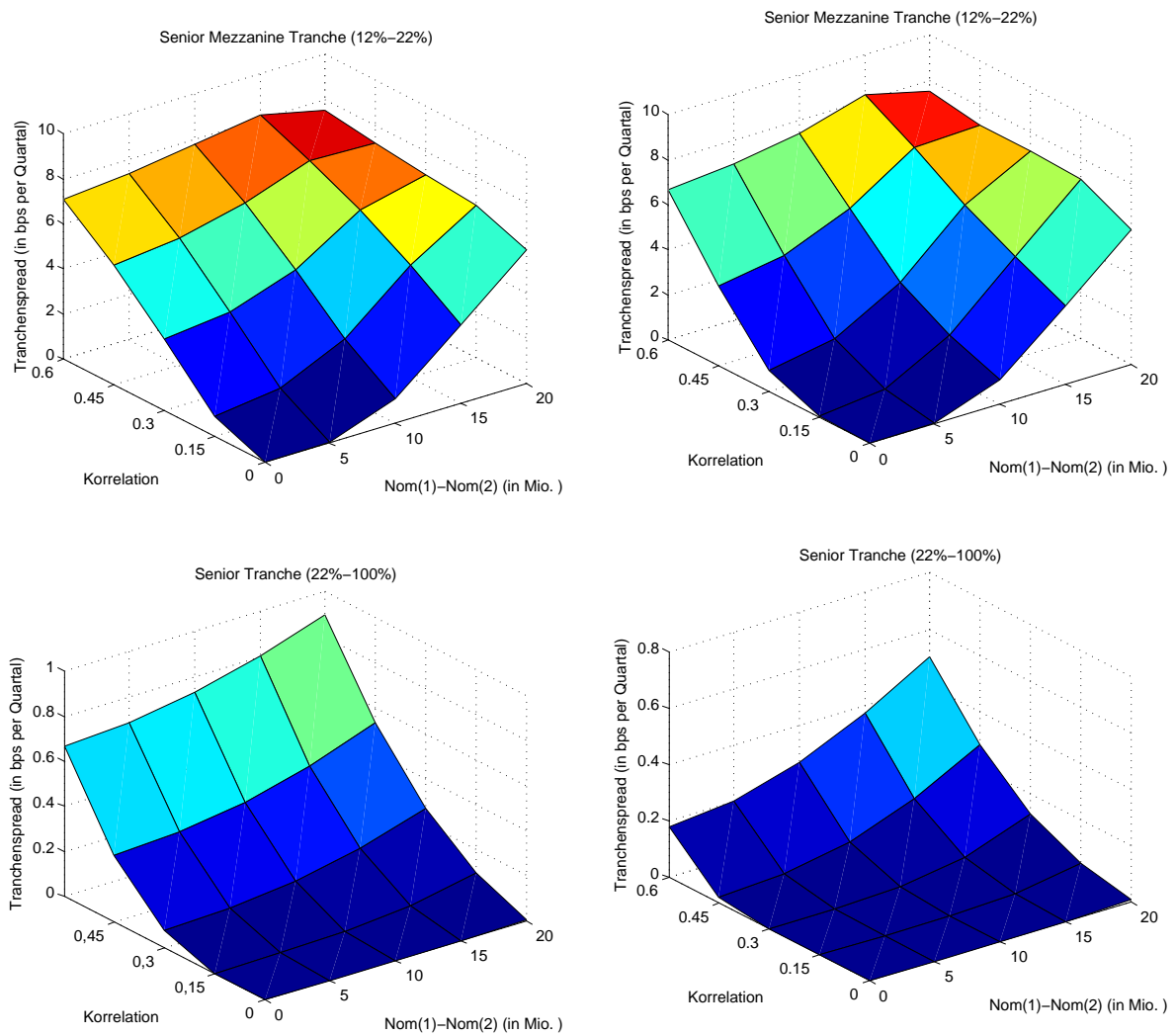


Abbildung 5.2: Ergebnisse für die fairen Tranchen-Spreads unter der Gauss- (links) sowie der Gumbel-Copula (rechts) bei jeweils 200.000 Simulationen

- Korrelationsmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \rho \\ \rho & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

der 1-Faktor Gauss-Copula, mit  $\rho \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$ . Der Parameter  $\theta > 1$  der Gumbel-Copula wurde über die Abstimmung der Kendall's tau-Werte hieran angeglichen (vgl. Abbildung 5.1).

- Nominalwert der großen Kreditforderung:  $M(1) \in \{1, 6, 11, 16, 21\}$

Die Simulation wurde in Matlab durchgeführt, die Ergebnisse sowie die Verlustmatrizen finden sich in Anhang A, der Programm-Code in Anhang B.<sup>148</sup> Es wurde auf die iTraxx-Tranchierung zurückgegriffen, jedoch die [6%, 9%]- und die [9%, 12%]-Tranche zur übersichtlicheren Interpretation zusammengelegt. Die Ergebnisse für die fairen Spreads sind in Abbildung 5.2 veranschaulicht.

Im Folgenden bezeichne

$$ND = M(1) - M(2)$$

die Nominalwertdifferenz zwischen dem großen Kredit und den kleineren Krediten. Für den Einfluss von a) gewähltem Copula-Modell, b) Korrelation sowie c) der Höhe des großen Kredits lässt sich festhalten:

**a) Copula-Modell:** Anhand von Abbildung 5.2 ist ersichtlich, dass die beiden Copulas sehr ähnliche Ergebnisse hinsichtlich der Spreads auswerfen. Dies gilt insbesondere für den unabhängigen Fall ( $\rho = 0$ ), bei dem beide z.B. identische VaR-Werte liefern. Insgesamt ergeben sich in den unteren Tranchen bei der Gumbel-Copula ansonsten eher höhere und in den höheren Tranchen eher geringere Spreads als bei der Gauss-Copula. Diese Unterschiede bekommen eine viel gravierendere Bedeutung bei einem Blick auf die sensiblen VaR-Werte, die im Gauss-Fall (im Falle positiver Korrelation) durchgängig und z.T. wesentlich höher liegen. Weiterhin fallen die Spreads v.a. in den unteren Tranchen bei der im upper tail abhängigen Gumbel-Copula im Falle niedriger Korrelation tendenziell geringer und bei hoher Korrelation etwas höher aus als im Gauss-Fall. In den folgenden beiden Punkten sind die Ergebnisse für beide Copulas zusammengefasst und ähneln sich im Übrigen stark.

**b) Korrelation:** Wie zu erkennen ist, fällt der Spread mit zunehmender Korrelation in der Equity und - in abgeschwächter Form auch noch in der Junior Mezzanine - Tranche unabhängig von der Höhe des großen Nominals. Für die Equity Tranche kann

<sup>148</sup>Dabei ist zunächst die Simulation des Sparkassen-CDOs unter Verwendung der Gauss-Copula und danach der iTraxx-CDO (s.u.) mit der Gumbel-Copula abgebildet



das allgemein nachgewiesen werden:

**Satz 5.3** *Die Equity Tranche eines CDOs im 1-Faktor Gauss-Copula-Modell ist monoton fallend im Korrelationsparameter  $\rho \in [0, 1]$ .*

**Beweis:** Gezeigt wird, dass das DL in  $\rho$  monoton fällt und das PL in  $\rho$  monoton wächst, woraus mit (5.5) die Behauptung folgt.

Zunächst ergibt sich der erwartete Verlust  $\mathbb{E}^*(L(T))$  des CDO unabhängig von der Korrelationsstruktur aus der Summe der Einzelverluste,

$$\mathbb{E}^*(L(T)) = \sum_{i=1}^N M_i \cdot \mathbb{P}^*(\tau_i \leq T).$$

Ist die Korrelationsmatrix  $\Sigma^X$  einer Gauss-Copula gegeben durch

$$\Sigma^X = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12}^X & \dots & \dots & \rho_{1N}^X \\ \rho_{21}^X & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & \rho_{(N-1)N}^X \\ \rho_{N1}^X & \dots & \dots & \rho_{N(N-1)}^X & 1 \end{pmatrix},$$

so definiere  $\Sigma^X \leq \Sigma^Y :\Leftrightarrow \rho_{ij}^X \leq \rho_{ij}^Y \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Insbesondere gilt  $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$  für die Korrelationsmatrizen von zwei 1-Faktor Gauss-Copula-Modellen mit Korrelationsparametern  $\rho_1$  und  $\rho_2$ ,  $\rho_1 \leq \rho_2$ . Müller und Scarsini [63] zeigen, dass dies äquivalent ist zu  $X \leq_{sm} Y$ .<sup>149</sup> Es bezeichne nun  $L_\rho(T)$  den Gesamtverlust eines CDOs bis  $T$  mit Korrelation  $\rho$ . Ein Ergebnis der Versicherungsmathematik (vgl. Müller 1997, Theorem 3.1.) liefert nun, dass für die Verlustverteilung  $L_\rho(T)$  und jeden Attachment Point  $a \in [0, 1]$  gilt:

$$\rho_1 \leq \rho_2 \Rightarrow \mathbb{E}^*[\max\{L_{\rho_1}(T) - a, 0\}] \leq \mathbb{E}^*[\max\{L_{\rho_2}(T) - a, 0\}].$$

Mithilfe von (5.4) und (5.2) lässt sich das Default Leg nun als abdiskontierter Mittelwert solcher Erwartungswerte schreiben und ist also monoton fallend in  $\rho$ .

Für das Premium Leg ergibt sich für jeden Detachment Point  $b$  wie oben:

$$\rho_1 \leq \rho_2 \Rightarrow \mathbb{E}^*[\max\{b - L_{\rho_1}(T), 0\}] \leq \mathbb{E}^*[\max\{b - L_{\rho_2}(T), 0\}].$$

Da die Prämienzahlungen proportional zum noch ausstehenden Nominal in der Tranche sind, erhöht sich also insgesamt PL mit zunehmender Korrelation.<sup>150</sup>  $\square$

<sup>149</sup> $\leq_{sm}$  bezeichnet dabei die supermodulare Ordnung: Es ist  $X \leq_{sm} Y :\Leftrightarrow \mathbb{E}f(X) \leq \mathbb{E}f(Y)$  für alle supermodularen Funktionen  $f$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  heißt dabei supermodular, wenn  $\forall x \in \mathbb{R}^N \forall \varepsilon, \delta > 0 : \Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta f(x) \geq 0$  gilt, wobei  $\Delta_i^\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon e_i) - f(x)$  ist.

<sup>150</sup>Dies gilt auch für die aufgelaufene Prämie (vgl. Kapitel 4.6.1), sodass die Aussage des Satzes auch unter dessen Berücksichtigung wahr bleibt.

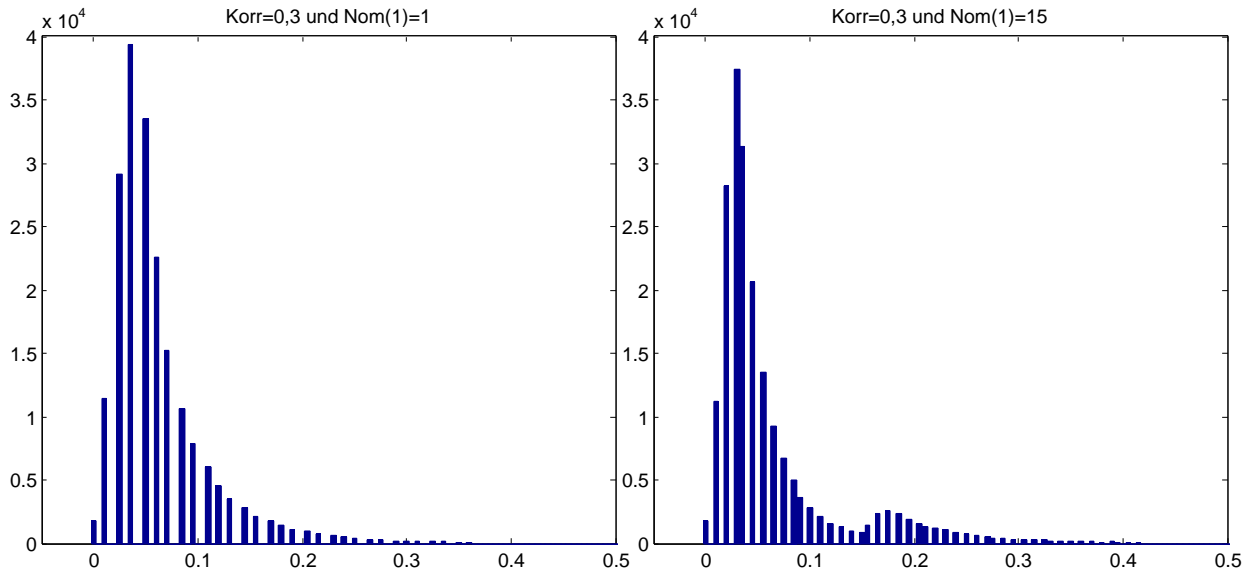


Abbildung 5.3: Verteilung der Verlusthäufigkeiten des Sparkassen-Portfolios im Gauss-Fall bei unterschiedlicher Höhe des großen Kredits, aber gleicher Korrelation ( $K = 200.000$  Simulationen)

**Bemerkung 5.3** *Mit demselben Vorgehen lässt sich zeigen, dass der faire Spread der Senior Tranche eines CDO im Parameter  $\rho$  wächst. Beide Aussagen können zudem in fast analoger Weise für viele einparametrische archimedische Copulafamilien wie die Gumbel-Copula nachgewiesen werden.<sup>151</sup>*

Der positive Zusammenhang zwischen  $\rho$  und Senior Tranche-Spread ist hier auch im Falle der Senior Mezzanine Tranche erkennbar. Der Grund hierfür liegt offensichtlich in der steigenden Wahrscheinlichkeit für extreme Ereignisse (sehr viele/sehr wenige Ausfälle) im Falle steigender Abhängigkeiten zwischen den Forderungen, die also eher auch in den höher liegenden Tranchen zu Buche schlagen können. Umgekehrt führt ein vermehrtes Auftreten ganz weniger Ausfälle zu niedrigeren Spreads in unteren Tranchen.

**c) Großer Kredit:** Die Erhöhung des Nominals im ersten Kredit entspricht einer Erhöhung der Konzentrationsrisikos des Portfolios.<sup>152</sup> Das führt, wie die Ergebnisse zeigen, oft zu qualitativ gleichen Abhängigkeiten des Spreads von  $ND$  wie von  $\rho$ . Die (relative) Wirkung einer Änderung des Nominalwertparameters auf den Spread ist dabei unabhängig von der Tranche stärker bei niedrigem Korrelationsparameter. Ein anschaulicher Erklärungsansatz dafür ist, dass ein großer Kredit in  $m$ -facher Höhe der „kleinen“ Kredite interpretiert werden kann als  $m$  kleine Kredite mit Korrelation 1. Die „durchschnittliche“ Korrelation der Kredite wird dann nämlich *merklicher* verändert bei niedriger Modellkorrelation.

Genauer ist anhand der Abbildung 5.3 ersichtlich, dass sich die Verlustverteilung bei

<sup>151</sup> Vgl. z.B. Burtschell, X. et al. (2008), Kap. III.

<sup>152</sup> D.h. desjenigen Risikos, welches aus einer ungleichmäßigen Verteilung von - wie hier - Kreditforderungen gegenüber einzelnen Kreditnehmern (Adressenkonzentration) oder in Industrie- bzw. Dienstleistungssektoren sowie in geographischen Regionen (Sektorkonzentration) entsteht.

|                                    | ND=0  | ND=5  | ND=10 | ND=15 | ND=20 |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Anz. Ausfälle Equity Tranche       | 3     | 3     | 3     | 4     | 4     |
| Anz. Ausfälle Jun. Mezz. Tranche   | 5     | 6     | 6     | 7     | 7     |
| Relativer Verlust durch kl. Kredit | 1,20% | 1,09% | 1,00% | 0,92% | 0,86% |

Abbildung 5.4: Anzahl an Ausfällen kleiner Kreditforderungen, die beim Überleben des großen Kredits für ein Erreichen des Detachment Points der jeweiligen Tranche nötig sind.

steigender  $ND$  auseinander zieht (häufigeres Auftreten geringer bzw. hoher Gesamtverluste im Vergleich zum Modalwert). Im Histogramm entstehen Häufungen „knapp“ über den Vielfachen der Verlusthöhe, die sich offenbar durch ein Kreditereignis beim ersten Schuldner in diesen Fällen ergeben. Die Konsequenzen daraus treten bei einem Blick auf die einzelnen Tranchen in Erscheinung:

Die Equity und Junior Mezzanine Tranche zeigen keine nennenswerten Abhängigkeiten vom Nennwert der großen Kreditforderung. Tendenziell sinkt der Spread mit steigender  $ND$  (im Fall der Junior Mezzanine Tranche ab  $ND = 5$ ), da der Ausfall des ersten Schuldners hier die ersten beiden Tranchen bereits<sup>153</sup> gänzlich aufzehrt und ein weiter steigendes Nominal nur zur Senkung der von anderen Schuldnern ausgelöst, relativen Verluste führt (1. Effekt). Der Effekt wird im Falle des recht wahrscheinlichen „Überlebens“ des ersten Kredits jedoch konterkariert, da mit steigender  $ND$  immer mehr Ausfälle der anderen Schuldner erfolgen müssen, ehe der relative Gesamtverlust den Detachment Point der Tranche überschreitet (2. Effekt - siehe dazu auch Abbildung 5.4). Der 1. Effekt liefert auch einen Erklärungsansatz für das Einbrechen des Mezzanine-Spreads ab  $M(1) = 11$  Mio.€: Der relative Gesamtverlust aus Verlusten allein des großen Kredits beträgt hier bereits  $0,6 \cdot \frac{11}{60}\% = 11\%$ .

In den beiden Tranchen der höchsten Bonität resultiert aus der relativen Lage des Detachment Points zu den relativen Verlusthöhen durch ein Kreditereignis beim ersten Schuldner ein positiver Zusammenhang zwischen  $ND$  und der Spreadhöhe.

### Ergebnisse für den Value-at-Risk

In Abbildung 5.5 sind die VaR-Werte zum 99,9%-Niveau für alle betrachteten Korrelationen und Nennwerte der großen Kreditforderung und beide Copulaklassen aufgetragen. Die wichtige Rolle der Abhängigkeitsstärke für das Risiko einer Bank wird sofort deutlich: Bei einem normierten Portfolio erhöht sich der VaR (Gumbel-Copula) um ca. 25% bzw. im Gauss-Fall sogar um 75%, wenn anstelle von unabhängigen Kreditforderungen „durchschnittlich“ (hier: mit  $\rho = 0,15$ ) korrelierte Investments im Modell angenommen werden. Auch die Erhöhung der Portfoliokonzentration treibt den VaR stetig und deutlich in die Höhe.

<sup>153</sup>Im Falle  $M(1) = 6$  wird beim Ausfall des ersten Schuldners der Detachment Point der Equity Tranche und auch der der Junior Mezzanine Tranche überschritten:  $B_{Jun.Mezz.} = 0,06 < \frac{6}{55} \cdot (1-R) = 0,0654$ .

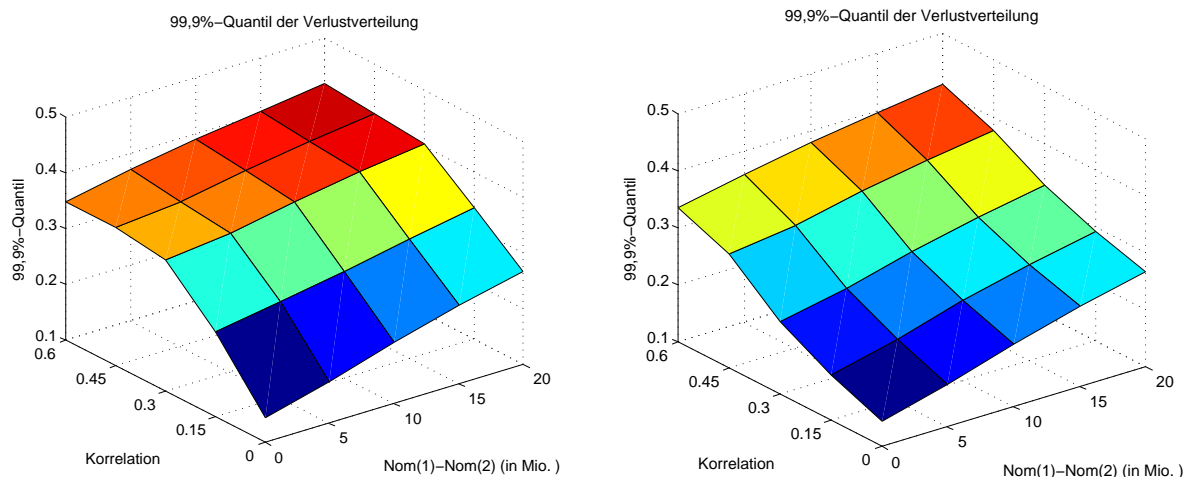


Abbildung 5.5: Durch MC-Simulation approximierte Werte für Gauss- (links) und Gumbel-Copula (rechts) bei jeweils 200.000 Simulationen

Wie nach Theorien zur Portfoliodiversifikation erwartet werden kann, steigt der VaR mit  $M(1)$  an. Selbst bei bereits „sehr stark korrelierten“ ( $\rho = 0,6$ ) Krediten führt eine Erhöhung von  $M(1)$  um 1 Mio.€ im Modell noch zu einem (relativen) Anstieg des VaR von durchschnittlich etwa 1%.<sup>154</sup>

Im nächsten Abschnitt werden die Ergebnisse aus diesem Kapitel einem Vergleich unterzogen und damit eine Abschätzung des potentiellen Nutzens von CDO-Geschäften für regionale Banken oben beschriebenen Charakters getroffen.

## 5.5 Regionalbanken: Ergebnisse für das Potential einer Portfoliodiversifizierung mittels CDO-Geschäften

Die Beurteilung der Attraktivität einer Portfoliodiversifizierung mittels CDO-Geschäften erfolgt mit einer einfachen Handelsstrategie: die Bank veräußert den gewünschten Teil der Kreditforderungen aus ihrem Portfolio über eine Verbriefung (das ergibt also den „Sparkassen-CDO“) und erwirbt einen „Referenz-CDO“ mit gleichem Zeithorizont und Nennwert. Die Bank akquiriert und veräußert in diesem Fall also jeweils alle CDO-Tranchen der zugrunde liegenden Portfolios.

### Postulierung eines möglichen Referenz-CDOs

Das branchen- und länderübergreifende iTraxx-Benchmark-Portfolio aus Kapitel 3.2 wird für hiesige Zwecke als Referenz für ein wohldiversifiziertes Kreditportfolio angesetzt. Dazu wird ein „typischer“ Korrelationsparameter durch den Import impliziter Korrelationen

<sup>154</sup>Rechnung im Gauss-Fall:  $\frac{1}{20} \cdot \left( \frac{VaR(M(1)=21, \rho=0,6)}{VaR(M(1)=1, \rho=0,6)} - 1 \right) \approx 0,05 \cdot 0,2069 \approx 0,01$ .

gewählt. Hierin liegt ein Grund für die Verwendung des Gauss-Modells: In diesem Fall kann für die Bewertung nämlich vergleichsweise gut auf externe Berechnungen zurückgegriffen werden. Die Parameter des Sparkassen-CDOs werden anschließend so gewählt, dass sie in einem möglichst realitätsnahen Verhältnis zum iTraxx-Portfolio stehen. Der Nutzen des obigen Handels kann dann unter Verwendung des Value-at-Risk-Maßes quantifiziert werden. Diesbezüglich wird nochmal notiert..

**Bemerkung 5.4** *Die Korrelationen im Sparkassen-CDO sollten in der Praxis aus mehreren Gründen höher ausfallen als etwa die des iTraxx-Portfolios:*

- 1) Branchenabhängigkeiten: im iTraxx wird zwischen sechs Branchen mit einem weiten Branchenbegriff unterschieden (z.B. „Telekommunikation“), die Annahmen über den Sparkassen-CDO beinhalten jedoch gerade die Zugehörigkeit aller Schuldner zur selben (und u.U. zudem sehr eng begrenzten) Branche, wie der „Heizkesselbranche“ im Falle des Beispiels in Abschnitt 4.3.
- 2) Regionenabhängigkeiten: die Abhängigkeiten des sich auf europaweit ansässige Unternehmen (mit zudem meist weltweiten Absatzmärkten) beziehenden iTraxx-Portfolios sollten geringer sein als diejenigen innerhalb der begrenzten Region der Sparkasse.
- 3) Single-Name-Konzentration: Der Sparkassen-CDO beinhaltet einerseits nur 50 statt 125 Titel; zudem ist das Portfolio nicht normiert und die Kreditforderung an das große Unternehmen fällt z.T. um ein Vielfaches höher aus als die übrigen.

Wichtig für einen einfachen Vergleich des iTraxx-Portfolios mit dem Sparkassen-Portfolio hinsichtlich der Auswirkungen von Abhängigkeitsstrukturen ist nun die folgende grundlegende..

**Annahme:** Die individuelle Ausfallintensität der iTraxx-Geschäfte entspreche derjenigen aus dem Sparkassen-Portfolio.

Durch die Annahme ergibt sich unter den vorliegenden Bedingungen ein identischer erwarteter Gesamtgewinn/-verlust der Bank in Bezug auf diese Portfolios. Etwaige Risikounterschiede, die vom VaR ausgeworfen werden, können daher allein auf Diversifikationseffekte zurückgeführt werden. Unter diesen Voraussetzungen wird nun das folgende Beispiel betrachtet:

**Beispiel 5.1** *Betrachtet werden der Sparkassen- und der iTraxx-CDO zum Nennwert von 50 Mio.€. Die impliziten Korrelationen beim iTraxx-CDO (Gauss-Modell) seien für alle Tranchen durch  $\rho = 0,10$  gegeben.<sup>155</sup> Die Single-Name-Konzentration des ersten Schuldners im Sparkassen-Portfolio sei so gewählt, dass sie einem Wert von  $ND = 5$*

<sup>155</sup>Hier wurde auf externe Berechnungen, wie Servigny, A. / Renault, O. (2002), Kap. IV, Burtschell, X. et al. (2007), Kap. 2.1 oder Jacob, D. P. (2005) zurück gegriffen und ein „typischer“ Wert für die 5-Jahres-Ausfallkorrelation daraus gewählt. Zu beachten ist, dass implizite Korrelationen im Gauss-Fall regelmäßig einen Smile aufweisen und zudem der Ausfallkorrelationsparameter i.d.R. starke Abhängigkeiten von Bonität und allgemeiner Assetkorrelation aufweist. Im hier präsentierten allgemeinen Beispiel werden Differenzierungen dieser Form gänzlich vernachlässigt.

im Falle eines Gesamtnominals von  $M = 55$  Mio.€entspreche, also weiterhin  $\frac{M(1)}{M(2)} = 6$  gelte.<sup>156</sup> Branchen- und Regioneneinflüsse auf den Korrelationsparameter werden obiger Bemerkung 5.4 (qualitativ) folgend so angenommen, dass sie im selben Modell im Fall der Sparkasse einen auf  $\rho = 0,15$  erhöhten Wert der Ausfallkorrelation aufweisen.

Gauss-Copula: Die approximierten 99,9%-VaR-Werte ergeben sich dann im iTraxx-Fall (Ablesen aus Tabelle 5.6 und lineare Interpolation) zu

$$\frac{1}{3} \cdot 0,0912 + \frac{2}{3} \cdot 0,2160 = 0,1744, \text{ verglichen mit } 0,2727 \text{ im Sparkassen-Fall.}$$

Gumbel-Copula: Der iTraxx-VaR berechnet sich wie oben zu

$$\frac{1}{3} \cdot 0,0912 + \frac{2}{3} \cdot 0,2112 = 0,1712 \text{ gegenüber } 0,2073 \text{ im Sparkassen-Fall.}$$

Im Falle einer Veräußerung der eigenen, stark konzentrierten und korrelierten Engagements und gleichzeitigem Erwerb von Forderungen gemäß iTraxx-Benchmark-Portfolio mit gleichen Ausfallwahrscheinlichkeiten (und wegen als deterministisch angenommenen Recovery Raten auch gleichhoher erwarteter Gewinne/Verluste) unter dem äquivalenten Martingalmaß ergibt sich bei gleichbleibendem Absicherungsniveau (VaR zum 99,9%-Niveau) eine Verringerung des benötigten ökonomischen Eigenkapitals der Sparkasse um

$$(0,2727 - 0,1744) \cdot 50 \text{ Mio.€} = 4,915 \text{ Mio.€ (Gauss-Copula) bzw.}$$

$$(0,2073 - 0,1712) \cdot 50 \text{ Mio.€} = 1,805 \text{ Mio.€ (Gumbel-Copula).}$$

Bei gleichem erwarteten Gewinn und gleichem Risiko (VaR) müsste die Bank also im Gauss-Fall rund  $\frac{0,2727}{0,1744} \% = 56,4\%$  oder 4,915 Mio.€ weniger Eigenkapital allein für das betrachtete Portfolio zurückbehalten, die stattdessen für beliebige andere Zwecke eingesetzt werden können. Mit der Gumbel-Copula, ergibt sich noch eine ökonomische Eigenkapitalminderung der Bank bei gleichem Risiko von  $\frac{0,2073}{0,1712} \% = 21,1\%$  oder 1,805 Mio.€. Selbst in diesem Fall könnte dies zu erheblichen Effizienzgewinnen deutscher Sparkassen genutzt werden und damit ceteris paribus etwa das Absicherungsniveau oder die derzeit durchschnittliche Eigenkapitalrendite von 6,7% deutscher Sparkassen<sup>157</sup> nicht unwesentlich erhöht werden.

Auch der Einfluss der Schuldneranzahl auf den VaR kann separat beleuchtet werden, indem einfach die Konzentration beim ersten Schuldner aufgehoben wird. Hierbei ergibt sich allein ein zusätzlich zurück zu haltendes Eigenkapital von

<sup>156</sup> Aufgrund der Festlegung von  $M = 50$  Mio.€ ergibt sich hier bei identischen relativen Größenverhältnissen nur eine absolute Nominalwertdifferenz von rund 4,55 Mio. €. Die absolute Nominalwertdifferenz ist in der vorliegenden Situation aber irrelevant.

<sup>157</sup> Vgl. Hackethal, A. / Kotz, H.H. (2008).

| Korrelation          | 0      | 0.15   | 0.3    | 0.45   | 0.6    |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 99,9%-Quantil Gauss  | 0.0912 | 0.2160 | 0.3120 | 0.3216 | 0.3216 |
| 99,9%-Quantil Gumbel | 0.0912 | 0.2112 | 0.3168 | 0.3216 | 0.3216 |

Abbildung 5.6: Approximierte 99,9%-Quantile der Verlustfunktion des iTraxx-CDOs  
( $K = 200.000$  Simulationen)

$$(0,252 - 0,1744) \cdot 50 \text{ Mio.€} = 3,88 \text{ Mio.€} \quad (\text{Gauss-Copula}) \text{ bzw.}$$

$$(0,180 - 0,1712) \cdot 50 \text{ Mio.€} = 0,44 \text{ Mio.€} \quad (\text{Gumbel-Copula})$$

gegenüber dem iTraxx-Portfolio.

Die deutlichen Unterschiede der Ergebnisse bei Gauss- und Gumbel-Copula trotz ähnlicher Spreads deuten auf eine starke Sensibilität des VaR-Maßes in Abhängigkeit von der Korrelation und der Konzentration hin und zeigen u.a., dass sich eine Bank in einer dieser Situation nicht auf ein einziges Modell zur Planung ihrer Geschäftstätigkeiten verlassen sollte.

Abgesehen von diesen Unterschieden lässt sich grundsätzlich feststellen, dass durchgängig deutliche Auswirkungen der Single-Name-Konzentration sowie der Abhängigkeiten auf die bei gleichem Absicherungsniveau zu bildenden finanziellen Rücklagen (nach VaR) festgestellt werden können. Sie indizieren ein in der Theorie mittelmäßiges bis enormes Potential von CDO-Geschäften für Regionalbanken. Genauere Aufschlüsse könnte wohl erst eine auf eine konkrete Situationen angepasste Betrachtung - anstelle des allgemeinen Zugangs in der vorliegenden Arbeit - erbringen. Dies sollte z.B. von einer Bank erfolgen, die sich mit Kreditderivaten auseinander setzen will.

## Fazit und Schlussbemerkung:

Hauptanliegen dieser Arbeit war es, zu einer Einschätzung des potentiellen Nutzens von CDOs speziell für Regionalbanken mit entsprechender Geschäftstätigkeit zu gelangen. Dies wurde anhand eines fiktiven, der Realität jedoch möglichst angenäherten Beispiels durchgeführt. Die Ergebnisse des letzten Kapitels weisen hierbei eindeutig auf ein grundsätzliches, vielleicht sogar enormes, Potential des Einsatzes von Kreditderivaten für kleinere, regionale Kreditinstitute hin. Aufgrund der angesprochenen Fiktion können die Ergebnisse quantitativ in natürlicher Weise allenfalls als grobe Indizien für die Möglichkeiten, die sich für Banken durch den Einsatz von CDOs ergeben können, liefern. Damit der festgestellte theoretische Nutzen auch langfristig stabil in die Praxis umgesetzt werden kann, bedarf es neben der konkreten Situationsberücksichtigung, technischen sowie personellen Voraussetzungen und Aufwand und den in Kapitel 2.6.2 angeführten Risiken natürlich auch adäquaten institutionellen Rahmenbedingungen, wie die Finanzkrise es der Welt erst kürzlich gelehrt hat. Diesbezügliche Fragen übersteigen den Anspruch der vorliegenden Arbeit und müssen an anderer Stelle diskutiert werden.

Sieht man also die nötigen internen und externen Voraussetzungen als gegeben an, bietet der CDO neben ähnlich-gearteten Alternativen nachwievor große und z.T. nahezu konkurrenzlose Möglichkeiten. Gerade die Beschäftigung und Einschätzung dieser Voraussetzungen sollte jedoch auch künftig nicht auf die leichte Schulter genommen werden, um sich gerade im Umgang mit komplizierteren Kreditderivaten nicht zu verzetteln. Das folgende Zitat soll dem Rechnung tragen, indem es die Schlussbemerkung dieser Arbeit bildet:

*„Die aktuelle Krise war nicht zuletzt eine Krise der Modelle und des unüberlegten Handelns von Banken und Ratingagenturen. Beide zogen letztlich Modelle heran, die nicht in der Lage waren, die Risiken richtig einzuschätzen. (...) In jedem Fall sollten die Finanzinstitute mindestens die Lehre aus der Krise ziehen, dass es zwingend erforderlich ist, die Abbildung und konkrete Erfassung von Risiken in ihren Modellen zu überdenken, gerade bei komplexen strukturierten Kreditprodukten.“*

aus: Kunisch, M. / Uhrig-Homburg, M.:

„Subprime-Krise, Kreditderivate und Ausfallabhängigkeiten“



# Literaturverzeichnis

- [1] J. D. Amato and J. Gyntelberg. Indextranchen von Credit Default Swaps und die Bewertung von Kreditrisikokorrelationen. Working paper, BIZ-Quartalsbericht, März 2005.
- [2] R. Barrett and J. Ewan. BBA Credit Derivatives Report 2006. BBA Enterprises Ltd, 2006.
- [3] T. Berrada, D. Dupuis, E. Jacquier, N. Papageorgiou, and B. Rémillard. Credit migration and basket derivatives pricing with copulas, September 2006.
- [4] R. Berschens. EU rückt Finanzjongleuren auf die Pelle. Verlagsgruppe Handelsblatt GmbH, Juli 2009.
- [5] T.R. Bielecki and M. Rutkowski. *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer, 2002.
- [6] C. Bluhm, L. Overbeck, and C. Wagner. An Introduction to Credit Risk Modeling. Chapman & Hall, CRC Financial Mathematics Series, 2002.
- [7] E. Bouyé. Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications. Technical report, University Business School London, Juli 2000.
- [8] D. C. Brody, L. P. Hughston, and A. Macrina. Beyond Hazard Rates: A New Framework for Credit-Risk Modelling. Technical report, Imperial College London, Juli 2005.
- [9] N. Bäuerle and A. Müller. Modeling and Comparing Dependencies in Multivariate Risk Portfolios. *Astin Bulletin*, 28, No.1: 59–76, 1998.
- [10] X. Bertschell, J. Gregory, and J.-P. Laurent. Beyond the Gaussian Copula: Stochastic and Local Correlation. Technical report, BNP Paribas, Januar 2007.
- [11] X. Bertschell, J. Gregory, and J.-P. Laurent. A comparative analysis of CDO pricing models, April 2008.
- [12] J. M. Chambers, C. L. Mallows, and B. W. Stuck. A Method for Simulating Stable Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71, No. 354: 340–344, 1976.

- [13] Y. Chuang, A. Tchernitser, and T. Hurd. Randomized Structure Model of Credit Spreads. Technical report, McMaster University, April 2008.
- [14] M. Crouhy and S. M. Turnbull. The Subprime Credit Crisis of 07, Mai 2008.
- [15] P. Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés - Un test non paramétrique d'indépendance. *Bulletin de la Classe des Sciences*, 65, 5e Série: 274–292, 1979.
- [16] K. Düllmann. Measuring business sector concentration by an infection model. Deutsche Bundesbank, 2006.
- [17] D. Duffie and N. Gârleanu. Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations. Technical report, Stanford University, September 2001.
- [18] D. Duffie and D. Lando. Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information. Technical report, Stanford University, August 2000.
- [19] D. Duffie and K. J. Singleton. Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *The Review of Financial Studies*, 12, No. 4: 687–720, 1999.
- [20] V. Durrleman, A. Nikeghbali, and T. Roncalli. Which copula is the right one? Credit Lyonnais, August 2000.
- [21] E. Eberlein, R. Frey, and E.A. von Hammerstein. Advanced credit portfolio modeling and CDO pricing, September 2007.
- [22] A. Elizalde. Credit Risk Models IV: Understanding and pricing CDOs. CEMFI Working Paper, King's College London, Dezember 2005.
- [23] A. Elizalde. Credit Risk Models I: Default Correlation in Intensity Models. CEMFI Working Paper, King's College London, April 2006.
- [24] P. Embrechts, F. Lindskog, and Alexander McNeil. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. Technical report, ETHZ Zürich, 2001.
- [25] P. Embrechts, A. McNeil, and R. Frey. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, 2005. 1. Auflage.
- [26] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. *Risk management: Value at Risk and beyond*, chapter Correlation and dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, pages 176–223. Cambridge University Press, 2002.
- [27] J. Felsenheimer, P. Gisdakis, and M. Zaiser. Kreditderivate Spezial - Das Sahnehäubchen im Kreditmarkt. HVB Corporates & Markets, Februar 2005.

- [28] C. Ferrarese. A comparative analysis of correlation skew modeling techniques for CDO index tranches. Working paper, King's College London, September 2006.
- [29] S. Galiani. Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products. Working Paper, King's College London, 2003.
- [30] R. M. Gaspar and T. Schmidt. CDOs in the light of the Current Crisis. Technical report, Technische Universität Lissabon, Juni 2008.
- [31] C. Genest, M. Gendron, and M. Bourdeau-Brien. The Advent of Copulas in Finance. *The European Journal of Finance*, 00: 1–10, 2009.
- [32] Bertelsmann Club GmbH. *Das Bertelsmann Lexikon*. Lexikographisches Institut München, 1994.
- [33] A. Hackethal and H.-H. Kotz. Bankenprofitabilität im weltweiten Vergleich, Mai 2008.
- [34] S. Hager and R. Schöbel. A Note on the Correlation Smile. Working Paper, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Dezember 2006.
- [35] J. M. Harrison and S. R. Pliska. Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11, No.3: 215–260, 1981.
- [36] J. M. Harrison and S. R. Pliska. A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15, No. 3: 313–316, August 1983.
- [37] T. Heidorn. Kreditderivate. Hochschule für Bankwirtschaft, Frankfurt am Main, Februar 1999.
- [38] T. Heidorn and L. König. Investitionen in Collateralized Debt Obligations. Technical report, Hochschule für Bankwirtschaft, Frankfurt am Main, Mai 2003.
- [39] M. Hofert and M. Scherer. CDO pricing with nested Archimedean copulas. Universität Ulm, Januar 2008.
- [40] J. Hull and A. White. Valuation of a CDO and an nth to Default CDS Without Monte Carlo Simulation. *Journal of Derivatives*, 12, No.2: 8–23, 2004.
- [41] D. P. Jacob. CDO/CDS Update 03/14/05. Technical report, Nomura U.S. Fixed Income Research, 2005.

- [42] R. A. Jarrow, D. Lando, and S. M. Turnbull. A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *The Review of Financial Studies Summer*, 10, No. 2: 481–523, 1997.
- [43] S. Jortzik. *Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios*. PhD thesis, Universität Göttingen, Dezember 2005.
- [44] M. Kern. *Kreditderivate*. Gabler Verlag, Wiesbaden, 2003.
- [45] J. Kiff, J. Elliott, E. Kazarian, J. Scarlata, and C. Spackman. Credit Derivatives: Systemic Risks and Policy Options. Working Paper, International Monetary Fund, November 2009.
- [46] P. Koziol. Analyse der von Copulas erzeugten Ausfallwahrscheinlichkeiten und deren Auswirkungen auf das Risikomanagement. GRIN Verlag, 2005.
- [47] J. Kremer. Value at Risk und kohärente Risikomaße. Technical report, Springer Berlin, Januar 2008.
- [48] T. Kremers. Standards zur Bewertung von Kreditderivaten. *DVFA-Finanzzeitschriften*, 06: 1–31, 2007.
- [49] M. Kunisch and M. Uhrig-Homburg. Subprime-Krise, Kreditderivate und Ausfallabhängigkeiten. *Karlsruher Transfer*, 37, Issue 21: 22–25, 2008.
- [50] D. Lando. On Cox processes and credit risk securities. Working Paper, University of Copenhagen, 1998.
- [51] J.-P. Laurent, X. Burtschell, and J. Gregory. A comparative analysis of CDO pricing models. Technical report, University of Lyon, Februar 2005.
- [52] J.-P. Laurent and J. Gregory. Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas. Working Paper, BNP Paribas, September 2003.
- [53] D. X. Li. On Default Correlation: A Copula Function Approach. Working Paper, The RiskMetrics Group, April 2000.
- [54] Markit Group Limited. Markit User Guide: Product info, März 2009.
- [55] S.-Y. Lin and G. Shyy. Credit Spreads, Default Correlations and CDO Tranching: New Evidence from CDS Quotes. Technical report, Ta Hwa Institute of Technology, August 2008.
- [56] J. London. *Modeling Derivatives Application in Matlab, C++, and Excel*. FT Press, New Jersey, 2nd edition, 2007.

- [57] F.A. Longstaff and A. Rajan. An empirical analysis of the Pricing of Collateralised Debt Obligations. Working paper, National Bureau of economic Research, Massachusetts, Mai 2006.
- [58] M. R. W. Martin, S. Reitz, and C. S. Wehn. *Kreditderivate und Kreditrisikomodelle. Eine mathematische Einführung*. Vieweg, Wiesbaden, 2006.
- [59] A. J. McNeil. Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78, No.6: 567–581, Juni 2006.
- [60] N. Meinel. Untersuchung asymptotischer Eigenschaften von Schätzern diskreter bivariater Copula Modelle mit Kovariablen. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2007.
- [61] A. Müller. Stop-Loss Order for Portfolios of Dependent Risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21: 219–223, 1997.
- [62] A. Müller. Modellierung und Vergleich von stochastischen Abhängigkeiten mit Copulas. Working paper, Universität Karlsruhe, September 2006.
- [63] A. Müller and M. Scarsini. Some Remarks on the Supermodular Order. *Journal of Multivariate Analysis*, 73, No.1: 107–119, April 2000.
- [64] O. Nelsen, R.B. & Portland. *An Introduction into Copulas*. Springer, New York, 1999.
- [65] M. Obrist. Synthetic CDOs - Formula One of Structured Credit. Working paper, Raiffeisen Research, Januar 2007.
- [66] D. Oriwol. *Kreditderivate*. Berliner Wissenschaftsverlag, Freiberg, 2005.
- [67] O. Pastari and J. Untenberger. Neue Strukturen und weiteres Wachstum von Kreditderivaten im genossenschaftlichen Sektor. Working paper, Berufsakademie Villingen-Schwenningen, 2008.
- [68] Gordon Platt. Corporate Finance : Looking across the abyss, cdos will come back in simpler form, some market participants say. Global Finance Magazine, März 2008.
- [69] H. Rau-Bredow. Kreditrisikomodelle und Diversifikation. *Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft*, 14: 9–17, 2002.
- [70] A. Rice. *Mathematical Statistics and Data Analysis*. Duxbury Press, 2nd edition, 1995.
- [71] B. Rudloff. Ein Modell zur Berechnung von Ausfallkorrelationen und dessen Anwendung auf die Bewertung synthetischer CDOs. Master’s thesis, Martin-Luther Universität Halle-Wittenberg, März 2002.

- [72] B. Rudolph, B. Hofmann, A. Schaber, and K. Schäfer. *Kreditrisikotransfer - Moderne Instrumente und Methoden*. Springer-Verlag, 2007.
- [73] M. Scheicher. Kreditderivate - Überblick und Auswirkungen auf Geldpolitik und Finanzmarktstabilität. *Finanzmarktstabilitätsbericht*, 5: 108–128, 2003.
- [74] P. J. Schönbucher. Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models. Working paper, Universität Bonn, Dezember 2001.
- [75] P. J. Schönbucher. *Credit Derivatives Pricing Models*. Wiley Finance, 2003.
- [76] A. Servigny and O. Renault. Default correlation: empirical evidence. Technical report, Standard and Poors, October 2002.
- [77] SIFMA. Global CDO Issuance 2000 - 2009. SIFMA Research and Statistics, 2009.
- [78] Tagesspiegel. Die Geschichte der Kredite und Zinsen begann lange vor Christi Geburt. <http://www.tagesspiegel.de/zeitung/Sonderthemen;art893,2209207,26.04.2006>.
- [79] D. Vazza, D. Aurora, and N. Kraemer. Default, Transition & Recovery: 2007 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions. Standard & Poor's, Februar 2008.
- [80] P. Wanitjirattikal and S. Kiatsupaibul. Tail Dependence of Student's t Copula and Double t Copula and Their Effects on Pricing Credit Derivatives. Working paper, Chulalongkorn University Bangkok, Juni 2007.
- [81] J. J. Xu. *Statistical Modeling and Interference for Multivariate and Longitudinal Discrete Response Data*. PhD thesis, University of British Columbia, September 1996.
- [82] N. Yu and M. Rutkowski. On the Brody-Hughston-Macrina approach to modeling of defaultable term structure. University of New South Wales, Sydney, Dezember 2005.
- [83] M. Zaiser. Structured Credits - Der heilige Gral des Kapitalmarkts. Working paper, HVB Corporates and Markets, Juni 2006.
- [84] M. Zydra. Banken: Neuer Mut zum Risiko. sueddeutsche.de GmbH, September 2009.

# 6 Anhang

## A: Spreads und Verlustmatrizen

|           |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |          |         |          |          |
|-----------|------|--|----------|---------|----------|----------|
| Equity    |      | 0  | 5        | 10      | 15       | 20       |
| Sigma = 0 |      | 160.8876   | 137.2888 | 89.7827 | 137.5791 | 123.3944 |
|           | 0.15 | 112.1345   | 96.9584  | 71.9212 | 100.1719 | 91.0092  |
|           | 0.3  | 82.4170  | 71.8193  | 55.6948 | 75.9206  | 69.4697  |
|           | 0.45 | 61.0184  | 53.4245  | 42.5633 | 57.6090  | 52.9676  |
|           | 0.6  | 44.6066  | 39.1756  | 31.9238 | 43.1396  | 39.8046  |

|           |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |          |         |          |          |
|-----------|------|--|----------|---------|----------|----------|
| Equity    |      | 0  | 5        | 10      | 15       | 20       |
| Sigma = 0 |      | 157.3325   | 134.3221 | 87.9100 | 135.0563 | 121.2772 |
|           | 0.15 | 115.7854   | 100.0460 | 72.8626 | 106.3224 | 96.4870  |
|           | 0.3  | 85.4335  | 74.3740  | 57.7751 | 81.5395  | 74.5850  |
|           | 0.45 | 64.1834  | 56.1613  | 45.0398 | 62.8691  | 57.8037  |
|           | 0.6  | 46.3381  | 40.5739  | 33.4394 | 46.2147  | 42.6549  |

|                |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |         |         |         |         |
|----------------|------|--|---------|---------|---------|---------|
| Jun. Mezzanine |      | 0  | 5       | 10      | 15      | 20      |
| Sigma = 0      |      | 23.5111  | 25.5605 | 15.9687 | 13.9601 | 9.5696  |
|                | 0.15 | 26.1836  | 32.1008 | 19.8726 | 21.3500 | 15.1596 |
|                | 0.3  | 25.0203  | 31.1593 | 19.1727 | 21.9911 | 16.6455 |
|                | 0.45 | 22.6621  | 28.3381 | 17.3631 | 20.7545 | 16.3452 |
|                | 0.6  | 19.8296  | 24.8859 | 15.2193 | 18.7353 | 15.2876 |

|                |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |         |         |         |         |
|----------------|------|--|---------|---------|---------|---------|
| Jun. Mezzanine |      | 0  | 5       | 10      | 15      | 20      |
| Sigma = 0      |      | 23.3747  | 25.6298 | 16.0512 | 14.0715 | 9.6385  |
|                | 0.15 | 28.4413  | 35.8511 | 22.5808 | 22.9946 | 15.4347 |
|                | 0.3  | 30.0250  | 38.3690 | 23.7615 | 26.7998 | 19.1274 |
|                | 0.45 | 28.3343  | 35.9226 | 22.0477 | 26.2840 | 20.2002 |
|                | 0.6  | 24.3625  | 30.7420 | 18.7938 | 23.2716 | 18.8601 |

|           |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |         |         |         |        |
|-----------|------|--|---------|---------|---------|--------|
| Mezzanine |      | 0  | 5       | 10      | 15      | 20     |
| Sigma = 0 |      | 1.7183   | 4.4488  | 3.2579  | 0.2321  | 0.0905 |
|           | 0.15 | 9.2486   | 10.7537 | 7.5413  | 3.7697  | 2.7707 |
|           | 0.3  | 13.1733  | 14.3457 | 10.8691 | 7.0556  | 5.6606 |
|           | 0.45 | 14.7844  | 15.7701 | 12.6218 | 9.0121  | 7.4930 |
|           | 0.6  | 15.1435  | 16.0773 | 13.3422 | 10.0943 | 8.5872 |

|           |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |         |         |         |        |
|-----------|------|--|---------|---------|---------|--------|
| Mezzanine |      | 0  | 5       | 10      | 15      | 20     |
| Sigma = 0 |      | 1.7659   | 4.4835  | 3.3474  | 0.2363  | 0.0911 |
|           | 0.15 | 6.7869   | 8.6686  | 5.4296  | 1.7727  | 1.0550 |
|           | 0.3  | 13.2068  | 14.1025 | 9.5342  | 5.3185  | 3.8607 |
|           | 0.45 | 17.4397  | 18.1749 | 13.4567 | 9.1972  | 7.3240 |
|           | 0.6  | 18.4696  | 19.3995 | 15.6973 | 11.5645 | 9.6575 |

|                |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |        |        |        |        |
|----------------|------|--|--------|--------|--------|--------|
| Sen. Mezzanine |      | 0  | 5      | 10     | 15     | 20     |
| Sigma = 0      |      | 0.0013   | 0.0425 | 1.0824 | 3.4576 | 5.9351 |
|                | 0.15 | 0.9257   | 1.2683 | 2.6011 | 4.9997 | 6.7662 |
|                | 0.3  | 3.1917   | 3.5156 | 4.5263 | 6.2690 | 6.9721 |
|                | 0.45 | 5.3406   | 5.6351 | 6.3123 | 7.3157 | 7.1968 |
|                | 0.6  | 7.1138   | 7.3739 | 7.7921 | 8.1945 | 7.5273 |

|                |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |        |        |        |        |
|----------------|------|--|--------|--------|--------|--------|
| Sen. Mezzanine |      | 0  | 5      | 10     | 15     | 20     |
| Sigma = 0      |      | 0.0011   | 0.0478 | 1.0957 | 3.4711 | 5.9686 |
|                | 0.15 | 0.0789   | 0.3705 | 1.9271 | 4.5073 | 7.0878 |
|                | 0.3  | 0.9724   | 1.4892 | 3.0921 | 5.6348 | 7.1552 |
|                | 0.45 | 3.5593   | 4.0312 | 5.2182 | 7.0445 | 7.1712 |
|                | 0.6  | 6.6524   | 6.9219 | 7.4062 | 8.2512 | 7.5093 |

|           |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |        |        |        |        |
|-----------|------|--|--------|--------|--------|--------|
| Senior    |      | 0  | 5      | 10     | 15     | 20     |
| Sigma = 0 |      | 0  | 0      | 0      | 0.0002 | 0.0069 |
|           | 0.15 | 0.0048   | 0.0067 | 0.0160 | 0.0417 | 0.1007 |
|           | 0.3  | 0.0801   | 0.0909 | 0.1234 | 0.1809 | 0.2698 |
|           | 0.45 | 0.2978   | 0.3137 | 0.3591 | 0.4325 | 0.5321 |
|           | 0.6  | 0.6685   | 0.6859 | 0.7325 | 0.8039 | 0.8976 |

|           |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |        |        |        |        |
|-----------|------|--|--------|--------|--------|--------|
| Senior    |      | 0  | 5      | 10     | 15     | 20     |
| Sigma = 0 |      | 0  | 0      | 0      | 0.0002 | 0.0076 |
|           | 0.15 | 0  | 0.0000 | 0.0003 | 0.0055 | 0.0439 |
|           | 0.3  | 0.0005   | 0.0019 | 0.0109 | 0.0442 | 0.1272 |
|           | 0.45 | 0.0213   | 0.0355 | 0.0785 | 0.1594 | 0.2811 |
|           | 0.6  | 0.1808   | 0.2038 | 0.2693 | 0.3715 | 0.5019 |

Abbildung 6.1: Die Spreads aus der Simulation des Sparkassen-CDOs mit der Gauss-Copula (links) und der Gumbel-Copula (rechts)

|               |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |        |        |        |        |
|---------------|------|--|--------|--------|--------|--------|
| Verlustmatrix |      | 0  | 5      | 10     | 15     | 20     |
| Sigma = 0     |      | 0.1440   | 0.1745 | 0.2100 | 0.2400 | 0.2657 |
|               | 0.15 | 0.2520   | 0.2727 | 0.2900 | 0.3138 | 0.3343 |
|               | 0.3  | 0.3360   | 0.3491 | 0.3700 | 0.3877 | 0.4029 |
|               | 0.45 | 0.3480   | 0.3600 | 0.3800 | 0.3969 | 0.4114 |
|               | 0.6  | 0.3480   | 0.3709 | 0.3900 | 0.4062 | 0.4200 |

|               |      | Zusätzliches Nominal des großen Kredits (in Mio.€) |        |        |        |        |
|---------------|------|--|--------|--------|--------|--------|
| Verlustmatrix |      | 0  | 5      | 10     | 15     | 20     |
| Sigma = 0     |      | 0.1440   | 0.1745 | 0.2100 | 0.2400 | 0.2657 |
|               | 0.15 | 0.1800   | 0.2073 | 0.2400 | 0.2677 | 0.2914 |
|               | 0.3  | 0.2280   | 0.2509 | 0.2800 | 0.3046 | 0.3257 |
|               | 0.45 | 0.3000   | 0.3164 | 0.3400 | 0.3600 | 0.3771 |
|               | 0.6  | 0.3360   | 0.3600 | 0.3800 | 0.3969 | 0.4114 |

Abbildung 6.2: Die Werte der Verlustmatrizen aus der Gauss- (links) bzw. Gumbel-Copula (rechts)

## B Matlab-Code

```
function[spread1, spread2, spread3, spread4, spread5] = CDO_tranche_Gum(N,T,K)

%Diese Funktion bestimmt den fairen Preis der CDO-Tranchen
%----- Parametereingabe -----
N=50; %Anzahl der Schuldner
T=5; %Fälligkeitszeitpunkt
K=200000; %Anzahl der Simulationen
lambda=110/10000;
r=0.03; % risikoloser Zinssatz
Recovery=0.4;
%-----
----

tic %Bestimmt die CPU-Laufzeit bis "toc"
CDO_P1 = zeros(5,5); %equity spread für versch. Noml- und Korrr-Werte
CDO_P2 = zeros(5,5); %junior mezz spread für versch. Noml- und Korrr-Werte
CDO_P3 = zeros(5,5);
CDO_P4 = zeros(5,5);
CDO_P5 = zeros(5,5);

Gesamtverluste=zeros(5,5,K);%Hier werden die K Gesamtverluste drin gespeichert

zeit = zeros(N,1); % hier werden die Ausfallzeiten reingeschrieben
index=zeros(N,1); % hier werden die Sortier-Nummer festgehalten
Nominal=zeros(N,1);

Sigma=[0:0.15:0.6];
for Sigma_schleife=1:5

    ausfzt=Gumbel(Sigma_schleife,K,N); %Rufe Funktion Gumbel auf

    SumPrem = zeros(5,5); %speichere PL und DL der k-ten Simulation
    SumDef = zeros(5,5); % je nach Noml- und Korrr-Wert
    MittelPrem = zeros(5,5); %speichere Mittelwert der PLs
    MittelDef = zeros(5,5); %speichere Mittelwert der DLs

    Nom_s=[1:5:21];
    for Nom_schleife=1:5

        for k=1:K %starte Simulationsschleife
%-----
%Ausfindig machen, der wievielte Ausfall (zeitlich) das große FG betrifft
%Zaehler wird dann angeben, an wievielter Stelle das 1. FG ausgefallen ist
        Zaehler=1; %zählt, an welcher Stelle (zeitlich) das 1.FG ausgefallen ist
        ist
            %im Vergleich zu den anderen (Rangfolge)

            for i=2:N
                if ausfzt(k,i) < ausfzt(k,1)
                    Zaehler=Zaehler+1;
                end
            end

            Nominal(:)=1;
            Nominal(Zaehler)=1*Nom_s(Nom_schleife);%dadurch kann der Ausfall des
                %großen Kredits später zugeordnet werden

            A(1,Nom_schleife) = (0/100)*sum(Nominal);
            A(2,Nom_schleife) = (3/100)*sum(Nominal);
            A(3,Nom_schleife) = (6/100)*sum(Nominal);
            A(4,Nom_schleife) = (12/100)*sum(Nominal);
            A(5,Nom_schleife) = (22/100)*sum(Nominal);
            B(1,Nom_schleife) = (3/100)*sum(Nominal);
            B(2,Nom_schleife) = (6/100)*sum(Nominal);
        end
    end
end
for k=1:K
    if (proz/2)/100 <= Gesamtverluste(2,Nom_schleife,k)
        if Gesamtverluste(2,Nom_schleife,k)<(proz/2+1)/100
            hauef2(Nom_schleife,proz/2+1)=hauef2(Nom_schleife,proz/2+1)+1
        end
    end
end
for k=1:K
    if (proz/2)/100 <= Gesamtverluste(3,Nom_schleife,k)
        if Gesamtverluste(3,Nom_schleife,k)<(proz/2+1)/100
            hauef3(Nom_schleife,proz/2+1)=hauef3(Nom_schleife,proz/2+1)+1
        end
    end
end
for k=1:K
    if (proz/2)/100 <= Gesamtverluste(4,Nom_schleife,k)
        if Gesamtverluste(4,Nom_schleife,k)<(proz/2+1)/100
            hauef4(Nom_schleife,proz/2+1)=hauef4(Nom_schleife,proz/2+1)+1
        end
    end
end
for k=1:K
    if (proz/2)/100 <= Gesamtverluste(5,Nom_schleife,k)
        if Gesamtverluste(5,Nom_schleife,k)<(proz/2+1)/100
            hauef5(Nom_schleife,proz/2+1)=hauef5(Nom_schleife,proz/2+1)+1
        end
    end
end
end
VV1=hauef1;
VV2=hauef2;
VV3=hauef3;
VV4=hauef4;
VV5=hauef5;

spread1=CDO_P1
spread2=CDO_P2
spread3=CDO_P3
spread4=CDO_P4
spread5=CDO_P5

figure(1)
surf([0:5:20],[0:15:6],spread1);
title('Equity Tranche (0%-3%)');
xlabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio.€)');
ylabel('Korrelation');
zlabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

figure(2)
surf([0:5:20],[0:15:6],spread2);
title('Junior Mezzanine Tranche (3%-6%)');
xlabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio.€)');
ylabel('Korrelation');
zlabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

figure(3)
surf([0:5:20],[0:15:6],spread3);
title('Mezzanine Tranche (6%-12%)');
xlabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio.€)');
ylabel('Korrelation');
zlabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');
```

3

```
B(3,Nom_schleife) = (12/100)*sum(Nominal);
B(4,Nom_schleife) = (22/100)*sum(Nominal);
B(5,Nom_schleife) = (100/100)*sum(Nominal);
%-----
[zeit,index] = sort(ausfzt(k,:));%aufsteigende Sortierung der
Ausfallzeiten
tau=[zeit:index]; %dies ist die Ausfallzeit
%-----
%Berechne Gesamtverlust in k-ter Simulation
Ges_Verlust=0; %Zur Berechnung der Verlustverteilung
for i=1:N
    if tau(i)<=T
        Verlust(i)=(1-Recovery)*Nominal(i);
        Ges_Verlust=Ges_Verlust+Verlust(i);
    end
end
%Jetzt rel. Gesamtverlust bestimmen
Gesamtverluste(Sigma_schleife,Nom_schleife,k)=Ges_Verlust/( (N-1)+Nominal(Zaehler));
%-----
for u=1:5 %Starte Tranchenloop: Festlegung der Tranche
    Prem=0;
    [Ausfall,Prem]=cash_flow(T,tau,Recovery,r,Nominal,A(u,Nom_schleife)
    ,B(u,Nom_schleife));
    SumPrem(Nom_schleife,u)=SumPrem(Nom_schleife,u)+Prem;
    SumDef(Nom_schleife,u)=SumDef(Nom_schleife,u)+Ausfall;
end
end %Ende der K Simulationen (gegeben Nom+Sigma_schleife), jetzt
"Auswertung"

for u=1:5
    MittelPrem(Nom_schleife,u)=SumPrem(Nom_schleife,u)/K; %durchschn.PL
    MittelDef(Nom_schleife,u)=SumDef(Nom_schleife,u)/K; %durchschn.DL
end

%Berechne nun fairen Spread für die 5 Tranchen
%10000 wg bps (10000bps=100%) und 4 wegen quartalsweisen Prämienzahlungen
CDO_P1(Sigma_schleife, Nom_schleife)=(MittelDef(Nom_schleife,1)/
(4*(MittelPrem(Nom_schleife,1))))*10000;
CDO_P2(Sigma_schleife, Nom_schleife)=(MittelDef(Nom_schleife,2)/
(4*(MittelPrem(Nom_schleife,2))))*10000;
CDO_P3(Sigma_schleife, Nom_schleife)=(MittelDef(Nom_schleife,3)/
(4*(MittelPrem(Nom_schleife,3))))*10000;
CDO_P4(Sigma_schleife, Nom_schleife)=(MittelDef(Nom_schleife,4)/
(4*(MittelPrem(Nom_schleife,4))))*10000;
CDO_P5(Sigma_schleife, Nom_schleife)=(MittelDef(Nom_schleife,5)/
(4*(MittelPrem(Nom_schleife,5))))*10000;
end %Ende der Nom_schleife

hauef1=zeros(5,26); %Bestimmung der empirischen Verlustverteilung für
Sigma_schleife=0
hauef2=zeros(5,26);
hauef3=zeros(5,26);
hauef4=zeros(5,26);
hauef5=zeros(5,26);

for Nom_schleife=1:5
    for proz=0:2:50
        for k=1:K
            if (proz/2)/100 <= Gesamtverluste(1,Nom_schleife,k)
                if Gesamtverluste(1,Nom_schleife,k)<(proz/2+1)/100
                    hauef1(Nom_schleife,proz/2+1)=hauef1(Nom_schleife,proz/2+1)+1
                end
            end
        end
    end
end
;

figure(4)
surf([0:5:20],[0:15:6],spread4);
title('Senior Mezzanine Tranche (12%-22%)');
xlabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio.€)');
ylabel('Korrelation');
zlabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

figure(5)
surf([0:5:20],[0:15:6],spread5);
title('Senior Tranche (22%-100%)');
xlabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio.€)');
ylabel('Korrelation');
zlabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

x=0:0.002:1;
for i=1:5
    for j=1:5
        Verlustmatrix(i,j)=quantile(Gesamtverluste(i,j,:),0.999);
    end
end
Verlustmatrix

figure(14)
surf([0:2:50],[0:5:20],VV1);
title('Korr=0')
xlabel('relativer Gesamtverlust');
ylabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio. €)');
zlabel('Häufigkeit');

figure(18)
surf([0:2:50],[0:5:20],VV5);
title('Korr=0,6')
xlabel('relativer Gesamtverlust');
ylabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio. €)');
zlabel('Häufigkeit');

figure(13)
surf([0:5:20],Sigma,Verlustmatrix);
title('99,9%-Quantil der Verlustverteilung')
xlabel('Nom(1)-Nom(2) (in Mio.€)');
ylabel('Korrelation');
zlabel('99,9%-Quantil');

x=[0:0.005:1];
figure(6)
hist(Gesamtverluste(3,1,:),x)
title('Korr=0,3 und Nom(1)=1')

figure(11)
hist(Gesamtverluste(1,3,:),x)
title('Korr=0 und Nom(1)=10')

figure(12)
hist(Gesamtverluste(5,3,:),x)
title('Korr=0,6 und Nom(1)=10')

toc
```

4



```
function ausfzeitl=gausszeit(R,Sims, Schuldner)
```

```
xl=zeros(Sims, Schuldner);
y=zeros(Sims, Schuldner);
```

```
%Verfahren gemäß Kapitel 5.3
```

```
D=chol(R);
```

```
clear R;
```

```
z=randn(Sims, Schuldner);
```

```
for i=1:Sims
```

```
    y(i,:)=z(i,:)*D;
```

```
end
```

```
clear D;
```

```
clear z;
```

```
Gauss_Ul=normcdf(y);
```

```
clear y;
```

```
xl=-(log(1-Gauss_Ul))/(110/10000);
```

```
clear Gauss_Ul;
```

```
ausfzeitl=xl;
```

```
function [PV_def, PV_premium]=cash_flow(Faelligk,ausf_zeit,Erloes,ZC,Nom,A,B)
```

```
%Die Funktion bestimmt das PL und das DL
```

```
%-----Parameter-----
```

```
%Faelligk = Fälligkeit -Parameter-
```

```
%ausf_zeit = N-dim. Vektor mit Ausfallzeiten der k-ten Simulation
```

```
%Erloes = Recovery Rate
```

```
%ZC = risikoloser Zins (konstant)
```

```
%Nom = Nominalbetrag (N-dim. Vektor)
```

```
%A = Attachment Point
```

```
%B = Detachment Point
```

```
%-----
```

```
PV_def=0;
```

```
PV_premium=0;
```

```
N=size(ausf_zeit,2); % gibt die Anzahl der Spalten aus ausf_zeit aus (also N)
```

```
Verlust=zeros(N,1); %LGD für jeden Kredit
```

```
Ges_Verlust=0; %Gesamter PF-Verlust
```

```
Per_Verlust=zeros(4*Faelligk,1);%Speichert Verlust zu jedem Periodenende
```

```
ausst_Nom=zeros(4*Faelligk,1);%Nominal, das zu jedem Per.ende noch in betr.
```

```
Tranche übrig ist
```

```
fee=zeros(4*Faelligk,1);
```

```
total_fee=0;
```

```
indikator=0;
```

```
c=0;
```

```
%Berechne Gesamtverlust in k-ter Simulation
```

```
for i=1:N
```

```
    if ausf_zeit(1,i)<Faelligk
```

```
        Verlust(i)=(1-Erloes)*Nom(i);
```

```
        Ges_Verlust=Ges_Verlust+Verlust(i);
```

```
    end
```

```
end
```

```
%Simulation des Default Legs
```

```
if Ges_Verlust<A
```

```
    PV_def=0;
```

```
elseif Ges_Verlust>A && Ges_Verlust<B
```

```
    for i=1:N
```

```
        if ausf_zeit(1,i)<=Faelligk
```

```
            indikator=indikator+Verlust(i);%speichere kumul. Verlust
```

```
            if indikator>A %1. Tranchenverlust verarbeiten
```

```
                if c=0
```

```
                    disk=0;
```

```
                    r=ZC;
```

```
5
```

```
function[spread1, spread2, spread3, spread4, spread5] =
```

```
iTraxx_tranche_Gum(N,T,K)
```

```
%Diese Funktion bestimmt den fairen Preis der CDO-Tranchen
```

```
%-----Parameterangabe-----
```

```
N=125; %Anzahl der Schuldner
```

```
T=5; %Fälligkeitszeitpunkt
```

```
K=200000; %Anzahl der Simulationen
```

```
lambda=110/10000;
```

```
r=0.03; % risikoloser Zinssatz
```

```
Recovery=0.4;
```

```
%-----
```

```
tic %Bestimmt die CPU-Laufzeit bis "toc"
```

```
CDO_P1 = zeros(5,1); %equity spread für versch. Noml- und Korrr-Werte
```

```
CDO_P2 = zeros(5,1); %junior mezz spread für versch. Noml- und Korrr-Werte
```

```
CDO_P3 = zeros(5,1);
```

```
CDO_P4 = zeros(5,1);
```

```
CDO_P5 = zeros(5,1);
```

```
Gesamtverluste=zeros(5,K);%Hier werden die K Gesamtverluste drin gespeichert
```

```
zeit = zeros(N,1); % hier werden die Ausfallzeiten reingeschrieben
```

```
index=zeros(N,1); % hier werden die Sortier-Nummer festgehalten
```

```
sim=zeros(N,1); % hier werden die Simulationen vermerkt
```

```
Nominal=zeros(N,1);
```

```
Sigma=[0:.15:0.6]; %Korrelation soll zw. 0 und 0.8 liegen
```

```
for Sigma_schleife=1:5
```

```
    for xx=1:N
```

```
        for yy=1:xx%ab jetzt wird Korrr-Matrix befüllt
```

```
            if xx==yy
```

```
                Korrr(xx,yy)=1;
```

```
            else
```

```
                Korrr(xx,yy)=Sigma(Sigma_schleife);
```

```
                Korrr(yy,xx)=Sigma(Sigma_schleife);
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    ausfzt=Gumbel(Sigma_schleife,K,N); %Rufe Funktion Gumbel auf
```

```
SumPrem = zeros(5); %speichere PL und DL der k-ten Simulation
```

```
SumDef = zeros(5); % je nach Noml- und Korrr-Wert
```

```
MittelPrem = zeros(5); %speichere Mittelwert der PLs
```

```
MittelDef = zeros(5); %speichere Mittelwert der DLs
```

```
for k=1:K %starte Simulationsschleife
```

```
    Nominal(:)=1;
```

```
    A(1) = 0;
```

```
    A(2) = (3/100)*N;
```

```
    A(3) = (6/100)*N;
```

```
    A(4) = (12/100)*N;
```

```
    A(5) = (22/100)*N;
```

```
    B(1) = (3/100)*N;
```

```
    B(2) = (6/100)*N;
```

```
    B(3) = (12/100)*N;
```

```
    B(4) = (22/100)*N;
```

```
    B(5) = (100/100)*N;
```

```
%-----
```

```
[zeit,index] = sort(ausfzt(k,:));%aufsteigende Sortierung der
```

```
Ausfallzeiten
```

```
tau=[zeit;index]; %dies ist die Ausfallzeit, s. AccrPrem27
```

```
%-----
```

```
%Berechne Gesamtverlust in k-ter Simulation
```

```
Ges_Verlust=0; %Zur Berechnung der Verlustverteilung
```

```
for i=1:N
```

```
7
```

```
disk=(1+r)^(-ausf_zeit(1,i));% = B(0, Ausfallzeit)
```

```
PV_def=PV_def+(indikator-A)*disk;%nur Verlust>A anrechnen
```

```
c=1;%Zähler hochsetzen (1. Verlust jetzt verarbeitet)
```

```
else
```

```
    disk=0;
```

```
    r=ZC;
```

```
    disk=(1+r)^(-ausf_zeit(1,i));% = B(0, Ausfallzeit)
```

```
    PV_def=PV_def+Verlust(i)*disk;%vollen Verlust anrechnen
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
elseif Ges_Verlust>B
```

```
    for i=1:N
```

```
        if ausf_zeit(1,i)<Faelligk %nur wenn 1.Verlust vor T, passiert was
```

```
            indikator=indikator+Verlust(i);
```

```
            if indikator>A && indikator<B
```

```
                if c=0
```

```
                    disk=0;
```

```
                    r=ZC;
```

```
                    disk=(1+r)^(-ausf_zeit(1,i));% = B(0, Ausfallzeit)
```

```
                    PV_def=PV_def+Verlust(i)*disk;%vollen Verlust anrechnen
```

```
                end
```

```
            elseif indikator>B %in diesem Fall wieder Verlust abschneiden
```

```
                if c=1
```

```
                    disk=0;
```

```
                    r=ZC;
```

```
                    disk=(1+r)^(-ausf_zeit(1,i));% = B(0, Ausfallzeit)
```

```
                    absorb_Verlust=B-(indikator-Verlust(i));
```

```
                    PV_def=PV_def+absorb_Verlust*disk;%nur Verlust<=B anrechnen
```

```
                    c=2;
```

```
                end
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
%Premium Leg bestimmen
```

```
for i=1:4*Faelligk
```

```
    ti=i/4;
```

```
    Per_Verlust(i)=0;
```

```
    for j=1:N
```

```
        if ausf_zeit(1,j)<ti
```

```
            Per_Verlust(i)=Per_Verlust(i)+(1-Erloes)*Nom(j);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    ausst_Nom(i)=min(max(B-Per_Verlust(i),0),B-A);%zu jeder Auszahlungszeit
```

```
    noch ausst.Nominal
```

```
    fee(i)=(1+ZC)^(-ti))*ausst_Nom(i);
```

```
    PV_premium=PV_premium+fee(i);
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```

figure(2)
plot([0:.15:.6],spread2);
title('Junior Mezzanine Tranche (3%-6%)')
xlabel('Korrelation');
ylabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

figure(3)
plot([0:.15:.6],spread3);
title('Mezzanine Tranche (6%-12%)')
xlabel('Korrelation');
ylabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

figure(4)
plot([0:.15:.6],spread4);
title('Senior Mezzanine Tranche (12%-22%)')
xlabel('Korrelation');
ylabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

figure(5)
plot([0:.15:.6],spread5);
title('Senior Tranche (22%-100%)')
xlabel('Korrelation');
ylabel('Tranchenspread (in bps per Quartal)');

x=0:0.002:1;
for i=1:5
    Verlustmatrix(i)=quantile(Gesamtverluste(i,:),1,0.999);
end
Verlustmatrix

figure(13)
plot(Sigma,Verlustmatrix);
title('99,9%-Quantil der Verlustverteilung')
xlabel('Korrelation');
ylabel('99,9%-Quantil');

x=[0:0.005:1];
figure(6)
hist(Gesamtverluste(3,:),x)
title('Korr=0,3')

figure(11)
hist(Gesamtverluste(1,:),x)
title('Korr=0')

figure(12)
hist(Gesamtverluste(5,:),x)
title('Korr=0,6')

toc

```

```

function ausfzeitl=Gumbel(R, Sims, Schuldner)
%-----ParameterEingabe-----
%alpha=1; %Shang zw. alpha und Kendalls tau: alpha = 1/(1-tau)
lambda=10/10000;
%-----
%Beginn der Simulation der Gumbel-Copula gemäß Kap. 5.3
u=zeros(Schuldner,Sims);
phi=zeros(Sims,1);
tau=zeros(Schuldner,Sims);

```

```

% the median for all alpha. When alpha = 1 and beta = 0, the
% distribution is Cauchy (arctangent) with median delta.
% When the submitted alpha is > 2 or < .1, or beta is outside
% [-1,1], an error message is generated and x is returned as a
% matrix of NaNs.
% Alpha < .1 is not allowed here because of the non-negligible
% probability of overflows.
%
% If you're only interested in the symmetric cases, you may just
% set beta = 0 and skip the following considerations:
% When beta > 0 (< 0), the distribution is skewed to the right
% (left).
% When alpha < 1, delta, as defined above, is the unique fractile
% that is invariant under averaging of iid contributions. I
% call such a fractile a "focus of stability." This, like the
% mean, is a natural location parameter.
% When alpha = 1, either every fractile is a focus of stability,
% as in the beta = 0 Cauchy case, or else there is no focus of
% stability at all, as is the case for beta ~0. In the latter
% cases, which I call "afocal," delta is just an arbitrary
% fractile that has a simple relation to the c.f.
% When alpha > 1 and beta > 0, med(x) must lie very far below
% the mean as alpha approaches 1 from above. Furthermore, as
% alpha approaches 1 from below, med(x) must lie very far above
% the focus of stability when beta > 0. If beta ~0, there
% is therefore a discontinuity in the distribution as a function
% of alpha as alpha passes 1, when delta is held constant.
% CMS, following an insight of Vladimir Zolotarev, remove this
% discontinuity by subtracting
% beta*c*tan(pi*alpha/2)
% (equivalent to their -tan(alpha*phi0)) from x for alpha ~1
% in their program RSTAB, a.k.a. RNSTA in IMSL (formerly GGSTA).
% The result is a random number whose distribution is a contin-
% uous function of alpha, but whose location parameter (which I
% call zeta) is a shifted version of delta that has no known
% interpretation other than computational convenience.
% The present program restores the more meaningful "delta"
% parameterization by using the CMS (4.1), but with
% beta*c*tan(pi*alpha/2) added back in (ie with their initial
% tan(alpha*phi0) deleted). RNSTA therefore gives different
% results than the present program when beta ~0. However,
% the present beta is equivalent to the CMS beta' (BPRIME).
% Rather than using the CMS D2 and exp2 functions to compensate
% for the ill-condition of the CMS (4.1) when alpha is very
% near 1, the present program merely fudges these cases by
% computing x from their (2.4) and adjusting for
% beta*c*tan(pi*alpha/2) when alpha is within 1.e-8 of 1.
% This should make no difference for simulation results with
% samples of size less than approximately 10^8, and then
% only when the desired alpha is within 1.e-8 of 1, but not
% equal to 1.
% The frequently used Gaussian and symmetric cases are coded
% separately so as to speed up execution.
%
% Additional references:
% V.M. Zolotarev, _One Dimensional Stable Laws_, Amer. Math.
% Soc., 1986.
% G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu, _Stable Non-Gaussian Random
% Processes_, Chapman & Hill, 1994.
% A. Janicki and A. Weron, _Simulation and Chaotic Behavior of
% Alpha-Stable Stochastic Processes_, Dekker, 1994.
% J.H. McCulloch, "Financial Applications of Stable Distributions,"
% _Handbook of Statistics_ Vol. 14, forthcoming early 1997.
%----- Parameter der pos. Stabilverteilung -----
%alpha=1/theta;
%beta=1;
%gamma=(cos(pi*alpha/2))^(1/alpha);
%delta=0;
%epsilon=1;

```

```

stab=zeros(Sims,1);
thetamatrix=[1.001 1.1061 1.2407 1.4229 1.6941];%nur Werte>1 möglich->nimm
1.001
theta=thetamatrix(R)

for j=1:Sims
    stab(j)=stabrnd(1/theta,1,(cos(pi/(theta*2)))^theta,0); %Rufe Funktion
    stabrnd auf
    phi(j)=exp(-stab(j)^(1/theta));

    v=rand(Schuldner); %Erzeuge N R(0,1)-verteilte Zufallszahlen
    for i=1:Schuldner
        u(i,j)= exp(-(-log(v(i))/stab(j))^(1/theta));
        t=0;
        while -lambda*t > log(1-u(i,j))
            t=t+0.1;
            if t==5.1
                break
            end
        end
        tau(i,j)=t;
    end
end
ausfzeitl=tau';
end

function [x] = stabrnd(alpha, beta, c, delta, m, n)

% STABRND.M
% Stable Random Number Generator (McCulloch 12/18/96)
%
% x = stabrnd(alpha, beta, c, delta, m, n);
%
% Returns m x n matrix of iid stable random numbers with
% characteristic exponent alpha in [.1,2], skewness parameter
% beta in [-1,1], scale c > 0, and location parameter delta.
% Based on the method of J.M. Chambers, C.L. Mallows and B.W.
% Stuck, "A Method for Simulating Stable Random Variables,"
% JASA 71 (1976): 340-4.
% Encoded in MATLAB by J. Huston McCulloch, Ohio State
% University Econ. Dept. (mcculloch.2@osu.edu). This 12/18/96
% version uses 2*m*n calls to RAND, and does not rely on
% the STATISTICS toolbox.
% The CMS method is applied in such a way that x will have the
% log characteristic function
% log E exp(ixt) = i*delta*t + psi(c*t),
% where
% psi(t) = -abs(t)^alpha*(1-i*beta*sign(t)*tan(pi*alpha/2))
% for alpha ~1,
% = -abs(t)*(1+i*beta*(2/pi)*sign(t)*log(abs(t))),
% for alpha = 1.
% With this parameterization, the stable cdf S(x; alpha, beta,
% c, delta) equals S((x-delta)/c; alpha, beta, 1, 0). See my
% "On the parameterization of the afocal stable distributions,"
% _Bull. London Math. Soc._ 28 (1996): 651-55, for details.
% When alpha = 2, the distribution is Gaussian with mean delta
% and variance 2*c^2, and beta has no effect.
% When alpha > 1, the mean is delta for all beta. When alpha
% <= 1, the mean is undefined.
% When beta = 0, the distribution is symmetrical and delta is

```

```

n=1;
%-----
% Errortraps:
if alpha < .1 | alpha > 2
    disp('Alpha must be in [.1,2] for function STABRND.')
    alpha
    x = NaN * zeros(m,n);
    return
end
if abs(beta) > 1
    disp('Beta must be in [-1,1] for function STABRND.')
    beta
    x = NaN * zeros(m,n);
    return
end

% Generate exponential w and uniform phi:
w = -log(rand(m,n));
phi = (rand(m,n)-.5)*pi;

% Gaussian case (Box-Muller):
if alpha == 2
    x = (2*sqrt(w) .* sin(phi));
    x = delta + c*x;
    return
end

% Symmetrical cases:
if beta == 0
    if alpha == 1 % Cauchy case
        x = tan(phi);
    else
        x = ((cos((1-alpha)*phi) ./ w) .^ (1/alpha - 1) ...
            .* sin(alpha * phi) ./ cos(phi) .^ (1/alpha));
    end

    % General cases:
else
    cosphi = cos(phi);
    if abs(alpha-1) > 1.e-8
        zeta = beta * tan(pi*alpha/2);
        aphi = alpha * phi;
        alphi = (1 - alpha) * phi;
        x = ((sin(aphi) + zeta * cos(aphi)) ./ cosphi) ...
            .* ((cos(alphi) + zeta * sin(alphi)) ...
            ./ (w .* cosphi)) .^ ((1-alpha)/alpha);
    else
        bphi = (pi/2) + beta * phi;
        x = (2/pi) * (bphi .* tan(phi) - beta * log((pi/2) * w ...
            .* cosphi ./ bphi));
        if alpha == 1
            x = x + beta * tan(pi * alpha/2);
        end
    end
end

% Finale:
x = delta + c * x;
return
% End of STABRND.M

```

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den 1. April 2010