Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Das HJM-Modell und das LIBOR Markt Modell zur Beschreibung von Zinsstrukturkurven

Diplomarbeit

von
Alexander Ostwald

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Mathematisches Institut für Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Einleitung

Für Banken und Versicherungen stellen Zinsänderungen ein großes Risiko dar. Um sich gegen dieses Risiko abzusichern, können am Markt geeignete Zinsderivate erworben werden.
So hat das Handelsvolumen von Zinsderivaten in den letzten Jahren enorm zugenommen. Beispielsweise bewegt sich das Handelsvolumen von Zinsoptionen in der Größenordnung des Jahreshaushalts der Bundesrepublik Deutschland. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit der korrekten Bewertung dieser Zinsderivate. Die Entwicklung aussagekräftiger Zinsstrukturmodelle ist also unbedingt erforderlich.
In dieser Arbeit werden zunächst im **ersten Kapitel** notwendige Begriffe und Definitionen eingeführt.
Im **zweiten Kapitel** wird das von Heath, Jarrow und Morton [HJM92](1992) entwickelte Zinsstrukturmodell eingeführt, in welchem die Dynamik der Forward Rates mit Hilfe eines Itô-Prozesses für alle Fälligkeiten innerhalb eines endlichen Zeithorizonts simultan modelliert wird. Nach der Definition dieses Itô-Prozesses wird zunächst als ein wichtiges Hilfsmittel der Satz von Fubini für stochastische Integrale eingeführt. Anschließend wird die Dynamik der Bondpreise, welche sich aus der Dynamik der Forward Rates herleiten lässt, berechnet. Die simultane Modellierung unendlich vieler Bonds allerdings erfordert es, eine Driftrestriktion in das Modell einzuführen. Nur wenn diese Driftrestriktion erfüllt ist, ist das Modell arbitragefrei. Die Driftrestriktion besagt, dass die Drift der Forward Rates nur von der Volatilität abhängt.
Näher betrachtet werden Gaußmodelle als Spezialfälle des HJM-Modells und es wird gezeigt, wie ausgewählte Short Rate Modelle aus dem HJM-Modell abgeleitet werden können. Ein besonderer Fokus wird hier auf die Beantwortung der Frage gelegt, wann die aus dem HJM-Modell hergeleitete Short Rate die Markoveigenschaft erfüllt. Es wird kurz beschrieben, wie HJM-Modelle kalibriert werden können.
Das **dritte Kapitel** beschäftigt sich mit dem LIBOR Markt Modell, welches 1997 von Brace, Gatarek und Musiela [BGM97] hergeleitet wurde. Die zugrunde liegende Idee ist es, statt der kurzfristigen Zinsen den LIBOR als diskreten Zinssatz zu betrachten. Der LIBOR kann dann jeweils unter einem eigenen Wahrscheinlichkeitsmaß lognormalverteilt modelliert werden. Auf diese Weise erhält man die Formel von Black und Scholes für Caplets.
Nach der Definition wichtiger Zinsderivate wird der Zusammenhang des LIBOR Modells zum HJM-Modell aufgezeigt werden. Anschließend wird zunächst ein nicht auf dem HJM-

Modell basierendes diskretes Tenormodell konstruiert. Aus diesem diskreten Modell lassen sich die Bondpreise für die Fälligkeiten, die der Tenorstruktur entsprechen, herleiten. So erhält man ein konsistentes sowie arbitragefreies Zinsstrukturmodell. Es wird kurz aufgezeigt, wie ein solches Modell kalibriert werden kann.
Im letzten Schritt wird ein stetiges Tenormodell konstruiert. Hierbei wird das diskrete Tenormodell als Grundlage genutzt und die bisher nicht definierten Zwischenräume der Fälligkeiten werden geeignet geschlossen. Abschließend werden im stetigen Tenormodell die Bondpreise für alle Fälligkeiten hergeleitet.

Gemäß §21 Absatz (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

An dieser Stelle möchte ich Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung des interessanten Themas und für die gute Betreuung bei der Erstellung meiner Diplomarbeit danken. Weiter danke ich meinen Eltern, die mich während meines Studiums stets unterstützt haben.

Münster, den 13.04.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden für die Arbeit benötigte grundlegende Definitionen und Begriffe eingeführt. Beispielsweise wird gezeigt, wie ein Forward Rate Agreement zustandekommt, wie verschiedene Zinssätze, insbesondere die augenblickliche Forward Rate und der LIBOR, definiert werden oder wie das Geldmarktkonto eingeführt wird. Für Literatur siehe hierzu unter anderem in [Shr04], [Sch05] oder [BS04]. Im ersten Schritt wird ein endlicher Handelshorizont $T^* > 0$ fixiert, derart dass im Handelsintervall $[0, T^*]$ ein stetiger Handel angenommen werden kann. Weiterhin sei angenommen, dass für jedes $T \in [0, T^*]$ ein ausfallrisikoloser Zero-Coupon-Bond existiert, welcher eine sichere Zahlung von einer Geldeinheit bei Fälligkeit T garantiert. Mit $B(t, T)$ sei der Preis eines solchen Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t für alle $T \in [0, T^*]$ und $t \in [0, T]$ bezeichnet.

Es wird notwendigerweise angenommen, dass

- $B(t, t) = 1$ für alle $t \in [0, T^*]$,
- $B(t, T) > 0$ für alle $T \in [0, T^*]$ und $t \in [0, T]$, sowie
- $\frac{\partial \log B(t,T)}{\partial T}$ existiert für alle $T \in [0, T^*]$ und $t \in [0, T]$.

Die erste Bedingung stellt sicher, dass der Zero-Coupon-Bond für jede Fälligkeit nicht ausfallgefährdet ist. Durch die zweite Bedingung wird die einfache Arbitragemöglichkeit ausgeschlossen, eine sichere Zahlung einer Geldeinheit in T zu einem Zeitpunkt $t \leq T$ kostenlos zu erhalten und die letzte Bedingung stellt sicher, dass die Forward Rates wohldefiniert sind.
Die Funktion $B(t, T), T \geq t$, wird auch als Diskontierungsfunktion in t sowie $B(t, T)$ als Diskontierungsfaktor bezeichnet. In der Regel ist die Diskontierungsfunktion monoton fallend.

Im nächsten Schritt wird betrachtet, wie sich Zinsen auf zukünftigen Intervallen verhalten, denn aus den Bondpreisen zum Zeitpunkt t lassen sich schon die Zinsen zum Zeitpunkt t für die Anlage aller späteren Zeiträume $[T, S] \subseteq [t, T^*]$ bestimmen.

Betrachtet wird das Zustandekommen eines Forward Rate Agreement(FRA).

Sei $0 \leq T \leq S \leq T^*$ und betrachte für $t \leq T$ folgende Strategie:

(i) In t: Verkaufe einen T-Bond und kaufe $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ -Anteile an einem S-Bond.
Dann ergibt sich zum Zeitpunkt t:

$$B(t,T) - \Big(\frac{B(t,T)}{B(t,S)} B(t,S)\Big) = 0.$$

Zum Zeitpunkt t fallen also keine Kosten an!

(ii) In T: Zahle eine Geldeinheit für den in t verkauften T-Bond.

(iii) In S: Erhalte $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ aus den in t gekauften Anteilen an dem S-Bond.

Diese Strategie ermöglicht also die Anlage einer Geldeinheit über das Intervall $[T, S]$ mit Zahlung von $\frac{B(t,T)}{B(t,S)} > 1$ in S. Wichtig dabei ist festzustellen, dass der Zinssatz bereits zum Zeitpunkt t fixiert wurde. Der Zinssatz ergibt sich aus folgender Definition:

Definition 1.1: Sei $0 \leq t \leq T \leq S \leq T^*$.

(i) Die diskrete Forward Rate für den Zeitraum $[T, S]$ zum Zeitpunkt t ergibt sich durch

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T}\Big(\frac{B(t,T)}{B(t,S)} - 1\Big).$$

Die Forward Rate[1] $L(t, T, S)$ heißt LIBOR-Forward-Rate.

(ii) Der diskrete Zins für den Zeitraum $[t, T]$ ist demnach definiert durch

$$L(t, t, T) = \frac{1}{T - t}\Big(\frac{1}{B(t,T)} - 1\Big).$$

Die einfache Spot Rate $L(t, t, T)$ heißt LIBOR-Spot-Rate.

[1] auch Terminzins genannt

Man unterscheidet zwischen den diskreten Zinsen, welche sich auf einen endlichen Zeitraum beziehen und linear verzinst werden, und den stetigen Zinsen, welche sich hypothetisch auf einen infinitesimalen Zeitraum beziehen und stetig verzinst werden. Des Weiteren ist zwischen Spot Rates und Forward Rates zu unterscheiden. Bei Spot Rates beginnt der Anlagezeitraum sofort, während sich Forward Rates auf Anlagezeiträume beziehen, welche erst in der Zukunft liegen.
Betrachtet wird nun die Umrechnung von einer diskreten bzw. linearen Verzinsung $L(t,T,S)$ zu einer stetigen Verzinsung $R(t,T,S)$, welche sich über folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} e^{R(t,T,S)(S-T)} &= 1 + L(t,T,S)(S-T) \\ &= 1 + \frac{1}{S-T}\Big(\frac{B(t,T)}{B(t,S)} - 1\Big)(S-T) \\ &= \frac{B(t,T)}{B(t,S)}. \end{aligned}$$

Somit ergeben sich folgende Definitionen:

(iii) Die stetig verzinste Forward Rate für das Intervall $[T,S]$ zum Zeitpunkt t ist definiert durch

$$R(t,T,S) = -\frac{\ln(B(t,S)) - \ln(B(t,T))}{S-T}.$$

(iv) Die stetig verzinste Spot Rate für das Intervall $[t,T]$ ist definiert durch

$$R(t,T) := R(t,t,T) = -\frac{\ln(B(t,T))}{T-t}.$$

(v) Lässt man $S \downarrow T$ gehen, so erhält man die augenblickliche Forward Rate[2].
Die augenblickliche Forward Rate mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t ist definiert durch

$$\begin{aligned} f(t,T) := \lim_{S\downarrow T} R(t,T,S) &= \lim_{S\downarrow T}\Big(-\frac{\ln(B(t,S)) - \ln(B(t,T))}{S-T}\Big) \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(t,T)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die augenblickliche Forward Rate $f(t,T)$ entspricht dem vom Markt erwarteten zukünftigen Zins für den infinitesimalen Zeitraum $[T, T+dt]$ zum Zeitpunkt t.

[2] Die augenblickliche Forward Rate wird auch instantanous oder sofortige Forward Rate genannt.

(vi) Die augenblickliche Short Rate zum Zeitpunkt t ist definiert als

$$r(t) = f(t,t) = \lim_{T \downarrow t} R(t,T).$$

Die Short Rate gibt den Zinssatz zum sofortigen Leihen und Verleihen von Geld zum Zeitpunkt t an.

Im Folgenden bezeichnet, falls keine Verwechslungsmöglichkeit besteht, Forward Rate die augenblickliche Forward Rate $f(t,T)$. Mit Bonds sind typischerweise Zero-Coupon-Bonds gemeint und T-Bond bezeichnet einen Zero-Coupon-Bond mit Fälligkeit T.

Bemerkung 1.2: Der LIBOR ist der prominenteste Zinssatz im Interbankenhandel. Der LIBOR(London Interbank Offered Rate) wird banktäglich als arithmetisches Mittel aus den (Brief-)Zinssätzen errechnet, zu denen Londoner Banken mit erstklassiger Bonität bereit sind, Geld mit gleicher Bonität an andere Banken auszuleihen. LIBOR-Sätze werden für typische Laufzeiten von ein, drei, sechs und zwölf Monaten und verschiedenen Währungen veröffentlicht. [3]

Aus (1.1) ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Forward Rate und den Bonds. Aufgrund von $B(t,t) = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)du\Big) &\overset{(1.1)}{=} \exp\Big(-\int_t^T -\frac{\partial \ln(B(t,u))}{\partial u} du\Big) \\ &= \exp\Big(\ln(B(t,T)) - \underbrace{\ln(B(t,t))}_{=0}\Big) \\ &= B(t,T). \end{aligned}$$

Also:

$$B(t,T) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)du\Big). \tag{1.2}$$

[3] Siehe [RSM04].

Bemerkung 1.3: Sind also sämtliche Forward Rates bekannt, so lassen sich die Bondpreise berechnen. Sind die Bondpreise bekannt, so lassen sich die Forward Rates über

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(B(t,T))$$

bestimmen.

Abschließend wird noch das Geldmarktkonto eingeführt.

Definition 1.4: Das Geldmarktkonto ist definiert durch

$$\beta(t) := \exp\Big(\int_0^t r(u)du\Big). \tag{1.3}$$

Der Prozess $\beta(t)$ gibt den Wert einer zum Zeitpunkt 0 investierten Geldeinheit zum Zeitpunkt t an. Ein Investment in das Geldmarktkonto unterliegt keinen Fristen. Eine Anlage ist also in beliebiger Höhe zu jedem beliebigen Zeitpunkt und über jede beliebige Laufzeit möglich.

2 Das HJM-Modell

Einen entscheidenden Schritt in der Entwicklung von stetigen Zinsstrukturmodellen stellt das Modell von Heath, Jarrow und Morton dar, welches im Folgenden mit HJM-Modell bezeichnet wird.
Im Unterschied zu Short Rate Modellen, in welchen die Dynamik des kurzfristigen Zinses, also der Short Rate, am Anfang des Modells steht und sich die Bondpreise dann modellendogen ergeben, modelliert man in HJM-Modellen die Dynamik der Forward Rates mit Hilfe von Itô-Prozessen für alle Fälligkeiten simultan. Die Bondpreise ergeben sich dann über $B(t,T) = \exp(-\int_t^T f(t,u)du)$.
Die auf diese Weise simultane Modellierung unendlicher vieler Bondpreise bei nur endlich vielen Risikoquellen erfordert es, die Dynamik der Forward Rates durch eine Driftrestriktion einzuschränken. Nur wenn diese erfüllt ist, ist das HJM-Modell arbitragefrei. Diese Driftrestriktion fordert einen direkten Zusammenhang zwischen Drift und Volatilität der Forward Rates. Weiter wird die Einführung eines Forwardmartingalmaßes eine entscheidende Vereinfachung für die Bewertung von Claims mit sich bringen.
Es sei festgehalten, dass das hergeleitete Modell vielmehr einen Modellrahmen darstellt. Spezifiziert man jedoch Drift und Volatilität der Forward Rates, so erhält man aus dem Modellrahmen ein konkretes Modell. Aufgrund der Driftrestriktion ist die zentrale Größe in arbitragefreien HJM-Modellen die Volatilität der Forward Rates. Im einfachsten Fall geht man von deterministischen Volatilitäten aus. Die Forward Rates sind dann normalverteilt, weshalb man auch von Gaußmodellen spricht. In diesen lassen sich zumindest für einfache Zinsderivate geschlossene Bewertungsformeln ableiten. Die beiden geläufigsten Spezifikationen unterstellen eine konstante, von der Zeit unabhängige Volatilität oder eine Volatilität, die exponentiell mit der Restlaufzeit fällt. Für diese Spezifikationen wird hergeleitet, welche Short Rate Modelle sich so aus dem HJM-Modell ableiten lassen.
Weiter soll kurz aufgezeigt werden, wie HJM-Modelle implementiert bzw. kalibriert werden können. Ein besonderer Fokus wird auf die Beantwortung der Frage gelegt, wann die

in einem HJM-Modell abgeleitete Short Rate die Markoveigenschaft erfüllt.

Zur Vereinfachung der Notation wird angenommen, dass die Forward Rates lediglich von einer Brownschen Bewegung $W(t)$ angetrieben werden. Die wichtigsten Literaturquellen dieses Kapitels sind [HJM92], [Shr04], [Shr97], [BS04], [Fil04], [Sch05] und [Bjö04].
Die Unsicherheit in dem Modell wird durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ charakterisiert, wobei Ω ein Ergebnisraum, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, welche messbare Ereignisse repräsentiert, und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. In dem gegebenem Handelsintervall entwickeln sich die Informationen gemäß der rechtsseitig stetigen, vollständigen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}$, welche von einer Brownschen Bewegung $(W(t))_{t\in[0,T^*]}$ erzeugt wird.[1]

Es wird zunächst die Eigenschaft progressiv messbar definiert.[2]

Definition 2.1: Ein stochastischer Prozess $X = X(\omega, t)$ heißt progressiv messbar (oder progressiv), falls $\Omega \times [0,t] \ni (\omega, s) \mapsto X(\omega, s)$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,t]$-messbar ist für alle $t \geq 0$.

Definition 2.2: Mit $Prog$ wird die σ-Algebra bezeichnet, welche von allen progressiven Prozessen auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ erzeugt wird. $Prog_T$ bezeichnet die Einschränkung von $Prog$ auf $\Omega \times [0,T]$.

Seien $\alpha = (\alpha(\omega, t, T))$ und $\sigma = (\sigma(\omega, t, T))$ $\mathbb{R}$-wertige stochastische Prozesse mit folgenden Eigenschaften:

- α und σ sind $Prog \otimes \mathcal{B}$-messbar.
- $\int_0^T \int_0^T |\alpha(s,u)| ds\, du < \infty \quad$ für alle $T \in [0, T^*]$.
- $\sup_{s,t\leq T} |\sigma(s,t)| < \infty$ für alle $T \in [0, T^*]$.

Die beiden letzten Eigenschaften sind punktweise für jedes $\omega \in \Omega$ zu verstehen.

[1] Vergleiche [HJM92].
[2] Siehe [Fil09],S.59.

Ist dann eine integrierbare anfängliche Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ mit

$$\int_0^{T^*} |f(0,u)|du < \infty \quad \mathbb{P}-f.s.$$

gegeben, so kann der Prozess der Forward Rates definiert werden.
Sei $T \in [0,T^*]$ fest gewählt und der Prozess der Forward Rates $f(t,T)$ erfülle die Itô-Gleichung

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(u,T)du + \int_0^t \sigma(u,T)dW(u), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

bzw. in Differentialschreibweise[3]

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Durch die Annahmen für α und σ ist (2.1) wohldefiniert und, da α und σ in die Dynamik (2.1) nur für $t \leq T$ eingehen, setzt man ohne Einschränkung $\alpha(t,T) = \sigma(t,T) = 0$ für $t > T$.
In dem stochastischen Prozess, definiert durch (2.1), wird die stochastische Fluktuation der gesamten Zinsstruktur der Forward Rates ausgehend von einer fest gewählten anfänglichen Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ festgelegt. Wie empfindlich die Forward Rates auf eine bestimmte Fälligkeit T zum Zeitpunkt t reagieren, wird durch die Drift $(\alpha(t,T))_{0\leq t\leq T\leq T^*}$ und die Volatilität $(\sigma(t,T))_{0\leq t\leq T\leq T^*}$ ausgedrückt. Bis auf obige Messbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen werden keine weiteren Bedingungen an die Drift und die Volatilität gestellt und es ist durchaus möglich, dass sie von der gesamten Vergangenheit der Brownschen Bewegung abhängen. Allerdings haben unterschiedliche Wahlen der Volatilität signifikante Auswirkungen auf den Prozess der Forward Rates.
Die Dynamik der Short Rate ist ebenfalls bereits durch (2.1) festgelegt und ergibt sich durch

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(u,t)du + \int_0^t \sigma(u,t)dW(u). \tag{2.3}$$

[3]In der allgemeinen Formulierung existiert mehr als ein risikotreibender Faktor, das heißt, dass die Differentialgleichung die Form $df(t,T) = \alpha(t,T) + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,T)dW_i(t)$ hat und $\sigma(\omega,t,T) = (\sigma_1(\omega,t,T),\dots,\sigma_d(\omega,t,T))$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess ist.

Dieser Prozess ist dem Prozess der Forward Rates ähnlich, allerdings variieren die Argumente für die Zeit und die Fälligkeit simultan.

2.1 Der Satz von Fubini für stochastische Integrale

Der Satz von Fubini für stochastische Integrale wird im Folgenden ein wichtiges Hilfsmittel sein. Dieser Satz erlaubt es Lesbegue-Stieltjes Integration und stochastische Integration zu vertauschen. Zum Beweis des Satzes wird der Satz über monotone Klassen (Monotone Class Theorem)[4] benötigt.

Satz 2.3: *$\mathcal{H}$ sei eine Menge reellwertiger beschränkter Funktionen, welche auf einer Menge Ω definiert sind, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

(i) *$\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum.*

(ii) *$\mathcal{H}$ enthält die konstante Funktion 1_Ω.*

(iii) *Falls $f_n \in \mathcal{H}$ mit $f_n \uparrow f$ monoton gegen eine beschränkte Funktion f auf Ω, dann folgt $f \in \mathcal{H}$.*

Enthält $\mathcal{H}$ eine Menge $\mathcal{M}$ reellwertiger Funktionen, welche unter Multiplikation abgeschlossen ist, dann enthält $\mathcal{H}$ alle reellwertigen beschränkten Funktionen, welche $\sigma(\mathcal{M})$-messbar sind.

Es ist nun möglich, den Satz von Fubini für stochastische Integrale[5] zu beweisen.

Satz 2.4: *Sei $\phi = \phi(\omega, t, s)$ mit $0 \le t, s \le T$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess, welcher folgende Eigenschaften erfüllt:*

(a) *ϕ ist $Prog_T \otimes \mathcal{B}[0,T]$-messbar*

(b) $\sup_{t,s} \|\phi(t,s)\| < \infty$. [6]

[4] Siehe z.B. [Pro04] S.7, [Fil09] S.101 oder mit Beweis [Ste00].
[5] Siehe [Fil09], S.99, Theorem 6.2.
[6] Diese Bedingung gilt für jedes $\omega \in \Omega$.

Dann ist $\lambda(t) = \int_0^T \phi(t,s)ds \in \mathcal{L}$ [7] *und es existiert eine* $Prog_T \otimes \mathcal{B}[0,T]$*-messbare Version* $\psi(s)$ *von* $\int_0^T \phi(t,s)dW(t)$ *mit* $\int_0^T \psi^2(s)ds < \infty$ *f.s.* .
Weiterhin gilt $\int_0^T \psi(s)ds = \int_0^T \lambda(t)dW(t)$*, was bedeutet, dass*

$$\int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s)dW(t)\Big)ds = \int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s)ds\Big)dW(t). \tag{2.4}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $d = 1$ angenommen. Ansonsten beweist man (2.4) komponentenweise.
Zunächst wird die Annahme (b) verschärft und durch Annahme (b') ersetzt.

(b') $|\phi| \leq C$ für eine endliche Konstante C.

Dann gilt $\lambda \in \mathcal{L}$. Sei mit $\mathcal{H}$ die Menge aller ϕ bezeichnet, welche (a) und (b') erfüllen und für die zusätzlich der Satz gilt. Das Ziel ist es, mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen zu zeigen, dass $\mathcal{H}$ bereits alle ϕ enthält, welche die Voraussetzungen (a) und (b') erfüllen. Zu zeigen sind die Voraussetzungen des Satzes über monotone Klassen.
Zunächst stellt man fest, dass $\mathcal{H}$ aufgrund der Linearität des Integrals ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und offensichtlich die konstante Funktion $\mathbf{1}_\Omega$ enthält.
Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass $\mathcal{H}$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge $\mathcal{M}$ reellwertiger Funktionen enthält.
Sei hierzu K ein beschränkter progressiver Prozess und f eine beschränkte $\mathcal{B}[0,T]$-messbare Funktion. Die Funktion ϕ sei definiert durch

$$\phi(\omega,t,s) = K(\omega,t)f(s).$$

Somit erfüllt ϕ Bedingung (a) und, da sowohl K als auch f beschränkt sind, auch Bedingung (b'). Der so definierte Prozess ϕ erfüllt (2.4), denn es gilt:

$$\text{(i)} \int_0^T \phi(t,s)ds = K(t)\int_0^t f(s)ds \quad \text{sowie} \quad \text{(ii)} \int_0^T \phi(t,s)dW(t) = f(s)\int_0^T K(t)dW(t).$$

[7] $\mathcal{L}$ bezeichnet die R^d-wertigen progressiven Prozesse h mit $\int_0^t \|h(u)\|^2 du < \infty$ für alle $t > 0$.

Somit erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^T \phi(t,s)dW(t)\,ds &\overset{(ii)}{=} \int_0^T f(s) \int_0^T K(t)dW(t)\,ds\\ &= \int_0^T K(t)dW(t) \int_0^T f(s)ds\\ &= \int_0^T K(t) \int_0^T f(s)ds\,dW(t)\\ &\overset{(i)}{=} \int_0^T \int_0^T \phi(t,s)ds\,dW(t).\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\phi \in \mathcal{H}$. Des Weiteren ist die Menge
$\mathcal{M} := \{Kf|\text{K beschränkter progressiver Prozess}, f \text{ beschränkte } \mathcal{B}[0,T]\text{-messbare Funktion}\}$
multiplikativ abgeschlossen, denn mit
$G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ folgt $G_1G_2 = K_1f_1K_2f_2 = \underbrace{K_1K_2}_{:=K}\underbrace{f_1f_2}_{:=f} \in \mathcal{M}$ mit einem beschränkten progressiven Prozess K und einer beschränkten $\mathcal{B}[0,T]$-messbare Funktion f, da Produkte messbarer Funktionen messbar sind.
Für die Aussage von Satz 2.3 wird festgestellt, dass $\mathcal{M}$ die σ-Algebra $Prog_T \otimes \mathcal{B}[0,T]$ erzeugt.
Es bleibt noch Bedingung (iii) von Satz 2.3 zu überprüfen.
Sei also $\phi_n \in \mathcal{H}$ mit $\phi_n \uparrow \phi$ für einen beschränkten $Prog_T \otimes \mathcal{B}[0,T]$-messbaren Prozess ϕ. Da $\phi_n \in \mathcal{H}$ und somit insbesondere (b') erfüllen und gegen einen beschränkten Prozess konvergieren, kann man eine Konstante N finden, so dass $\sup_{t,s} \|\phi_n(t,s)\| < N$ für alle n. Setze

$$\psi_n(s) = \int_0^T \phi_n(t,s)dW(t). \tag{2.5}$$

Aufgrund der Itô-Isometrie und der Abschätzung $\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))^2 dt \leq (N+C)^2 T$ sowie dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\psi_n(s) - \int_0^T \phi(t,s)dW(t)\Big)^2\Big] &\overset{(2.5)}{=} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))dW(t)\Big)^2\Big]\\ &\overset{\text{Itô}}{=} \mathbb{E}\Big[\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))^2 dt\Big] \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

für alle $s \leq T$. Definiere $\mathcal{A} := \{(\omega,s)| \lim_{n\to\infty} \psi_n(\omega,s) \text{ existiert}\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,T]$-

messbar, da ψ_n und damit auch $\limsup \psi_n$ messbar sind. Somit ist der Prozess

$$\psi(\omega, s) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(\omega, s), & \text{falls } (\omega, s) \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,T]$-messbar. Wegen (2.6) gilt $\psi(s) = \int_0^T \phi(t,s)dW(t)$ f.s. für alle $s \leq T$. $\psi(s)$ ist also eine messbare Version von $\int_0^T \phi(t,s)dW(t)$ und wegen der Beschränktheit von ϕ folgt, dass $\int_0^T \psi^2(s)ds < \infty$ f.s.

Wegen der stetigen Jensenschen Ungleichung, der Itô-Isometrie und dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \psi_n(s)ds - \int_0^T \psi(s)ds\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \psi_n(s)ds - \psi(s)ds\Big)^2\Big] \\ &= T^2\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{T}\int_0^T \psi_n(s)ds - \psi(s)ds\Big)^2\Big] \\ &\overset{\text{Jensen}}{\leq} \frac{T^2}{T}\mathbb{E}\Big[\int_0^T (\psi_n(s) - \psi(s))^2 ds\Big] \\ &= T\int_0^T \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))dW(t)\Big)^2\Big]ds \\ &\overset{\text{Itô}}{=} T\int_0^T \mathbb{E}\Big[\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))^2 dt\Big]ds \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \Big(\int_0^T \phi_n(t,s)ds\Big)dW(t) - \int_0^T \lambda(t)dW(t)\Big)^2\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))ds\, dW(t)\Big)^2\Big] \\ &\overset{\text{Itô}}{=} \mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\int_0^T \phi_n(t,s) - \phi(t,s)ds\Big)^2 dt\Big] \\ &= T^2\mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\frac{1}{T}\int_0^T \phi_n(t,s) - \phi(t,s)ds\Big)^2 dt\Big] \\ &\overset{\text{Jensen}}{\leq} T^2\mathbb{E}\Big[\int_0^T \frac{1}{T}\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))^2 ds\, dt\Big] \\ &= T\mathbb{E}\Big[\underbrace{\int_0^T\int_0^T (\phi_n(t,s) - \phi(t,s))^2 ds\, dt}_{\leq T^2(N+C)^2}\Big] \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Somit folgt dann zusammen

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s)dW(t)\Big)ds &= \int_0^T \psi(s)ds \\
&\overset{(2.7)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \psi_n(s)ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^T \phi_n(t,s)dW(t)\,ds \\
&\overset{\phi_n\in\mathcal{H}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^T \phi_n(t,s)ds\,dW(t) \\
&\overset{(2.8)}{=} \int_0^T \lambda(t)dt \\
&= \int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s)ds\Big)dW(t).
\end{aligned}$$

Der Satz gilt also auch für ϕ und somit ist $\phi \in \mathcal{H}$. Daher sind alle Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt und es kann gefolgert werden, dass $\mathcal{H}$ alle beschränkten, $\sigma(\mathcal{M})$-messbaren Funktionen enthält. Unter der Annahme (b') ist der Satz also bewiesen.

Für den allgemeinen Fall wird eine nicht fallende Folge von Stoppzeiten definiert durch

$$\tau_n := \inf\Big\{t \mid \sup_s |\phi(t,s)| > n\Big\} \wedge T.$$

Wegen Voraussetzung (b) gilt offensichtlich $\tau_n \to T$ für $n \to \infty$. Setze

$$\phi_n(t,s) = \phi(t,s)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}.$$

Der so gekappte Prozess erfüllt Bedingung (b'). Auf diese Weise erhält man durch den ersten Schritt $\lambda_n \in \mathcal{L}$ und eine $Prog_T \otimes \mathcal{B}[0,T]$-messbare Funktion $\psi_n(s)$ mit

$$\psi_n(s) = \int_0^T \phi(t,s)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}dW(t) = \int_0^{t\wedge\tau_n} \phi(t,s)dW(t)\ f.s.$$

für alle $s \leq T$ und den gewünschten Eigenschaften. Mit $\lambda_n(t) = \int_0^T \phi(t,s)ds = \lambda(t)\mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}$ folgt wegen $\lambda_n \in \mathcal{L}$, dass auch $\lambda \in \mathcal{L}$.

Auf der Menge $\{\tau_n = T\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s)dW(t)\Big)ds &= \int_0^T \Big(\underbrace{\int_0^T \phi(t,s)\mathbf{1}_{\{t\leq T\}}dW(t)}_{\phi_n}\Big)ds \\
&\overset{\phi_n\in\mathcal{H}}{=} \int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s\mathbf{1}_{\{t\leq T\}}ds\Big)dW(t) \\
&= \int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t,s)ds\Big)dW(t).
\end{aligned}$$

Der Satz gilt also auf der Menge $\{\tau_n = T\}$ für alle $n \geq 1$. Wegen $\sup_{t,s} \|\phi(t,s)\| < \infty$ gilt für $\{\tau_n < T\}$, dass

$$\mathbb{P}(\tau_n < T) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \inf\{t \mid \sup_s |\phi(\omega,t,s)| > n\} \wedge T < T\}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Auf diese Weise erhält man

$$\mathbb{P}(\tau_n = T) = 1 - \mathbb{P}(\tau_n < T) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

und der Satz ist bewiesen. □

2.2 Die Dynamik der Bondpreise

Aus der Dynamik für die Forward Rates (2.1) und der Beziehung (1.2) kann man bereits die Dynamik der Bondpreise herleiten. Hierzu benötigt man den Satz von Fubini für stochastische Integrale 2.4.

Satz 2.5: *Für jedes $T \in [0,T^*]$ erfüllt der Prozess $B(t,T)$ die stochastische Differentialgleichung*

$$dB(t,T) = B(t,T)[(r(t) - \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2)dt - \sigma^*(t,T)dW(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.9}$$

wobei

$$\alpha^*(t,T) := \int_t^T \alpha(t,u)du$$

$$\sigma^*(t,T) := \int_t^T \sigma(t,u)du.$$

Beweis: Mit $Z_t := \ln B(t,T)$ gilt

$$\begin{aligned}
Z_t &:= \ln B(t,T) \\
&\overset{(1.2)}{=} -\int_t^T f(t,s)ds \\
&\overset{(2.1)}{=} -\int_t^T \Big(f(0,s) + \int_0^t \alpha(u,s)du + \int_0^t \sigma(u,s)dW(u)\Big)ds \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} -\int_t^T f(0,s)ds - \int_0^t \int_t^T \alpha(u,s)ds\,du - \int_0^t \int_t^T \sigma(u,s)ds\,dW(u) \\
&= \underbrace{-\int_0^T f(0,s)ds}_{Z_0} - \int_0^t \underbrace{\int_u^T \alpha(u,s)ds}_{\alpha^*(u,T)}\,du - \int_0^t \underbrace{\int_u^T \sigma(u,s)ds}_{\sigma^*(u,T)}\,dW(u) \\
&\quad + \underbrace{\int_0^t f(0,s)ds + \int_0^t \int_u^t \alpha(u,s)ds\,du + \int_0^t \int_u^t \sigma(u,s)ds\,dW(u)}_{\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t r(s)ds} \\
&= Z_0 - \int_0^t \alpha^*(u,T)du - \int_0^t \sigma^*(u,T)dW(u) + \int_0^t r(u)du.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Darstellungen

$$dZ_t = r(t)dt - \alpha^*(t,T)dt - \sigma^*(t,T)dW(t) \quad \text{und} \quad d[Z]_t = \sigma^*(t,T)^2dt. \tag{2.10}$$

Mit der Itô-Formel lässt sich nun die Dynamik der Bonds berechnen durch

$$\begin{aligned}
dB(t,T) &= d\Big(\exp(Z_t)\Big) \\
&\overset{\text{Itô}}{=} \exp(Z_t)dZ_t + \frac{1}{2}\exp(Z_t)d[Z]_t \\
&\overset{(2.10)}{=} B(t,T)\Big(r(t)dt - \alpha^*(t,T)dt - \sigma^*(t,T)dW(t) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2dt\Big) \\
&= B(t,T)\Big((r(t) - \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2)dt - \sigma^*(t,T)dW(t)\Big).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.6: $-\sigma^*(t,T) := -\int_t^T \sigma(t,u)du$ kann als die Volatilität der Bondpreise interpretiert werden. Zu beobachten ist, dass die Volatilität der Bondpreise negativ ist, denn die Bondpreise sinken, wenn die Zinsen steigen. [8]

2.3 Arbitragefreiheit

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [Shr04], [Sch05] und [Bjö04].
In einem HJM-Modell existiert für jede Fälligkeit $T \in [0, T^*]$ ein Zero-Coupon-Bond. Daher sollen Arbitragemöglichkeiten, welche durch Handeln in diesen Bonds entstehen können, ausgeschlossen werden. Um dieses sicherzustellen, müssen die Prozesse α und σ in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen. Das hergeleitete Ergebnis wird die berühmte HJM-Driftbedingung sein, welche eine notwendige und noch wesentlich wichtiger hinreichende Bedingung der Arbitragefreiheit für HJM-Modelle liefert. Zunächst trifft man folgende Definition.

Definition 2.7: Ein HJM-Modell ist arbitragefrei, wenn ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß existiert.

Theorem 2.8: *(Vergleiche [Shr04], Theorem 10.3.1.)*
Ein HJM-Modell ist arbitragefrei, wenn es einen Prozess $\theta(t)$ gibt, so dass

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)[\sigma^*(t,T) + \theta(t)]$$

für alle $0 \leq t \leq T \leq T^*$ gilt. Hierbei sind $\alpha(t,T)$ und $\sigma(t,T)$ Drift bzw. Volatilität der Forward Rates aus (2.2). Den Prozess $\theta(t)$ nennt man den Marktpreis des Risikos.

Beweis: Um die Arbitragefreiheit herleiten zu können, muss ein risikoneutrales Wahr-

[8] Vergleiche [Cai04].

scheinlichkeitsmaß Q konstruiert werden, unter welchem alle abdiskontierten Bondpreise

$$\frac{B(t,T)}{\beta(t)} = \exp\Big(-\int_0^t r(u)du\Big)B(t,T), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

Martingale bilden.
Wegen $d\Big(\frac{1}{\beta(t)}\Big) = d\Big(\exp(-\int_0^t r(u)du)\Big) = -r(t)\frac{1}{\beta(t)}$ gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} d\Big(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\Big) &= -r(t)\frac{1}{\beta(t)}B(t,T) + \frac{1}{\beta(t)}dB(t,T) \\ &\overset{(2.9)}{=} \frac{B(t,T)}{\beta(t)} \underbrace{\Big[\Big(-\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\Big)dt - \sigma^*(t,T)dW(t)\Big]}_{(*)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Das Ziel ist es nun den Term $(*)$ in der Form

$$-\sigma^*(t,T)[\theta(t)dt + dW(t)]$$

mit geeignetem $\theta(t)$ zu schreiben Dann läßt sich der Satz von Girsanov anwenden, um zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß Q zu wechseln, unter welchem

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t \theta(u)du + W(t) \tag{2.12}$$

eine Brownsche Bewegung ist. Mit Hilfe dieser Brownschen Bewegung ergibt sich dann (2.11) zu

$$d\Big(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\Big) = -\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\sigma^*(t,T)d\tilde{W}(t).$$

Somit wäre $(\frac{B(t,T)}{\beta(t)})$ wegen des fehlenden dt-Terms unter Q ein Martingal und damit Q risikoneutral und das Modell arbitragefrei. Um wie bis zu diesem Punkt beschrieben vorgehen zu können, muss die Gleichung

$$\Big(-\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2\Big)dt - \sigma^*(t,T)dW(t) = -\sigma^*(t,T)[\theta(t) + dW(t)]$$

gelöst werden. Also ist ein Prozess zu finden, welcher

$$-\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2 = -\theta(t)\sigma^*(t,T) \tag{2.13}$$

erfüllt. Es ist zu beachten, dass (2.13) unendlich viele Gleichungen repräsentiert. Nämlich

eine für jede Fälligkeit $T \in [0, T^*]$. Diese Gleichungen nennt man die Gleichungen des Marktpreis des Risikos und es existiert eine für jeden Bond, also eine für jede Fälligkeit. Dennoch gibt es nur einen Prozess $\theta(t)$, der diese Gleichungen erfüllen muss, das heißt, alle Bonds müssen denselben Marktpreis des Risikos implizieren.
Sind d Brownsche Bewegungen gegeben, welche das Modell antreiben, so gibt es zu jeder Brownschen Bewegung jeweils einen Marktpreis des Risikos. In diesem Fall treibt lediglich eine Brownsche Bewegung das Modell an, es gibt folglich nur einen Marktpreis des Risikos. Um die Gleichung des Marktpreis des Risikos lösen zu können, betrachtet man

$$\begin{aligned}
\partial_T \alpha^*(t,T) = \partial_T \int_t^T \alpha(t,u)du = \alpha(t,T) \text{ und} \\
\partial_T \sigma^*(t,T) = \partial_T \int_t^T \sigma(t,u)du = \sigma(t,T),
\end{aligned}$$

wobei ∂_T die partielle Ableitung nach T bezeichnet.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_T \Big(-\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2 \Big) = \partial_T \Big(-\sigma^*(t,T)\theta(t) \Big) \\
\Leftrightarrow \quad & -\alpha(t,T) + \sigma^*(t,T)\sigma(t,T) = -\sigma(t,T)\theta(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha(t,T) = \sigma(t,T)[\sigma^*(t,T) + \theta(t)].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Es muss noch überprüft werden, ob Gleichung (2.13) gilt, falls $\theta(t)$ Gleichung (2.14) erfüllt. Dann kann wie oben beschrieben Girsanov angewendet werden, um ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß zu konstruieren, dessen Existenz die Arbitragefreiheit garantiert. Also erfülle $\theta(t)$ Gleichung (2.14). Durch Ersetzen von T durch v erhält man

$$\alpha(t,v) = \sigma(t,v)[\sigma^*(t,v) + \theta(t)]$$

Integriert man dieses bezüglich v von $v = t$ nach $v = T$, dann ergibt sich

$$\alpha^*(t,v)|_{v=t}^{v=T} = \frac{1}{2}(\sigma^*(t,v))^2|_{v=t}^{v=T} + \sigma(t,v)\theta(t)|_{v=t}^{v=T}.$$

Und wegen $\alpha^*(t,t) = \sigma^*(t,t) = 0$ ergibt sich

$$\alpha^*(t,T) = \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2 + \sigma(t,T)\theta(t),$$

also die Gleichung des Marktpreis des Risikos (2.13).

□

Solange $\sigma(t,T) \neq 0$ ist, kann man den Marktpreis des Risikos durch

$$\theta(t) = \frac{\alpha(t,T)}{\sigma(t,T)} - \sigma^*(t,T), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

definieren. Somit ist $\theta(t)$ eindeutig bestimmt. Daraus folgt, dass auch das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß Q eindeutig bestimmt ist und mit dem Zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie folgt, dass das Modell vollständig ist und damit alle Zinsderivate hedgebar sind, indem man in Bonds handelt.

Bisher wurde die Entwicklung der Forward Rates unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ definiert, das heißt, dass der treibende Prozess $W(t)$ aus (2.1) eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{P}$ ist.
Betrachtet wird nun die Entwicklung des HJM-Modells unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q, unter welchem üblicherweise HJM-Modelle formuliert werden. Über das Verhalten der Drift gibt folgendes Theorem Klarheit.

Theorem 2.9: *Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist genau dann risikoneutral, wenn die HJM-Driftbedingung*

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T) \tag{2.15}$$

gilt.

Beweis: Ist Q ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß, dann ist $\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0\leq t\leq T}$ ein Q-Martingal. Somit verschwindet der dt-Term in Gleichung (2.11) und es folgt aus

$$d\Big(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\Big) = \frac{B(t,T)}{\beta(t)}\Big[(-\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2)dt - \sigma^*(t,T)d\tilde{W}(t)\Big],$$

wobei $\tilde{W}(t)$ eine Brownsche Bewegung unter Q ist, dass

$$\alpha^*(t,T) = \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2.$$

Differenzieren nach T liefert die HJM-Driftbedingung

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T).$$

Gilt andersherum

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T),$$

so setzt man in Theorem 2.8 für den Marktpreis des Risikos

$$\theta(t) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \leq T^*.$$

Es folgt, dass das HJM-Modell arbitragefrei und Q ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß ist. □

Korollar 2.10: *Die Forward Rates entwickeln sich unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q gemäß*

$$df(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma(t,T)d\tilde{W}(t), \tag{2.16}$$

wobei $\tilde{W}(t)$ eine Brownsche Bewegung unter Q ist.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \\ &= \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma(t,T)[\theta(t)dt + dW(t)] \\ &\overset{(2.12)}{=} \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma(t,T)d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

□

Für die Dynamik der Bondpreise erhält man folgendes Ergebnis.

Korollar 2.11: *Unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q entwickeln sich die Bondpreise gemäß*

$$dB(t,T) = r(t)B(t,T)dt - \sigma^*(t,T)B(t,T)d\tilde{W}(t). \tag{2.17}$$

Hierbei ist $\tilde{W}(t)$ eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Warscheinlichkeitsmaß Q.

Beweis: Für die Dynamik des Geldmarktkontos gilt

$$d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt. \tag{2.18}$$

Da Q risikoneutral ist, erfüllen die diskontierten Bondpreise

$$d\Big(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\Big) = -\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\sigma^*(t,T)d\tilde{W}(t). \tag{2.19}$$

Die Dynamik der Bondpreise ergibt sich dann durch

$$\begin{aligned}
dB(t,T) &= d\Big(\beta(t)\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\Big) \\
&\overset{(2.18),(2.19)}{=} r(t)\beta(t)\frac{B(t,T)}{\beta(t)}dt - \beta(t)\sigma^*(t,T)\frac{B(t,T)}{\beta(t)}d\tilde{W}(t) \\
&= r(t)B(t,T)dt - \sigma^*(t,T)B(t,T)d\tilde{W}(t).
\end{aligned}$$

□

Die Volatilität der Forward Rates verändert sich also unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q nicht. Der Maßwechsel hat jedoch Auswirkungen auf die Drift der Forward Rates, welche sich nun in Abhängigkeit der Volatilitätsstruktur der Forward Rates ausdrücken lässt. Auch die Volatilität der Bondpreise ist unter $\mathbb{P}$ und Q gleich. Die Drift der Bonds unter Q entspricht der Short Rate $r(t)$. Aus Gleichung (2.16) sieht man, durch welche Angaben das Modell unter dem risikoneutralen Maß Q eindeutig beschrieben ist. Benötigt wird demnach die anfängliche Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ sowie die Volatilitätsstruktur der Forward Rates $(\sigma(t,T))_{0\leq t\leq T\leq T^*}$. Weder der Marktpreis des Risikos noch die Drift unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ werden benötigt.
Schließlich wird noch festgestellt, dass die stochastische Differentialgleichung (2.17) die

eindeutige Lösung

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= B(0,T)\exp\Big((r(t) - \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2)dt - \sigma^*(t,T)d\tilde{W}(t)\Big) \\
&= B(0,T)\exp\Big(\int_0^t r(u)du - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^*(u,T))^2 du - \int_0^t \sigma^*(u,T)d\tilde{W}(u)\Big) \qquad (2.20) \\
&= B(0,T)\beta(t)\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^*(u,T))^2 du - \int_0^t \sigma^*(u,T)d\tilde{W}(u)\Big)
\end{aligned}
$$

besitzt.

2.4 Implementierung eines HJM-Modells

Das Ergebnis des vorherigen Abschnitts zeigt also, dass die Volatilitätsstruktur unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q frei gewählt werden kann, um die Dynamik der Forward Rates zu bestimmen. Die Drift ist dann über die Driftbedingung ebenfalls eindeutig bestimmt. Ein Algorithmus für die Anwendung eines HJM-Modells lautet schematisch folgendermaßen: [9]

(1) Definiere eine beliebige Volatilitätsstruktur $\sigma(t,T)$.

(2) Die Drift der Forward Rates ist gegeben durch die HJM-Driftbedingung

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T).$$

(3) Die heutige Struktur der Forward Rates

$$(f^*(0,T))_{T>0}.$$

wird am Markt beobachtet.

(4) Die Forward Rates erhält man durch Integration von

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(u,T)du + \int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u).$$

[9] Siehe [Bjö04], S.343.

(5) Berechne die Bondpreise mit Hilfe der Formel

$$B(t,T) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)du\Big).$$

(6) Nutze die obigen Ergebnisse, um Preise für Derivate zu berechnen.

In einem später behandelten Abschnitt über die Beispiele für Gaußmodelle werden einige explizite Wahlen der Volatilitätsstruktur $\sigma(t,T)$ genauer untersucht werden.

2.5 Die Dynamik der Short Rate

Unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen lässt sich die Dynamik des Short Rate Prozesses, welcher durch die Forward Rates in einem HJM-Modell festgelegt wird, bestimmen. Hierzu siehe auch [MR98] und [Fil09].

Satz 2.12: *(Vergleiche [MR98] S. 312 Proposition 13.1.1.)*
Seien $\alpha(t,T)$, $\sigma(t,T)$ und $f(0,T)$ differenzierbar nach T mit $\int_0^T |\partial_u f(0,u)du| < \infty$ und beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_T\alpha(t,T)$, $\partial_T\sigma(t,T)$ und $\partial_T f(0,T)$. Dann ist der Prozess der Short Rate (unter $\mathbb{P}$) ein Itô-Prozess der Form

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \xi(u)du + \int_0^t \sigma(u,u)dW(u), \tag{2.21}$$

wobei

$$\xi(u) = \alpha(u,u) + \partial_u f(0,u) + \int_0^u \partial_u\alpha(s,u)ds + \int_0^u \partial_u\sigma(s,u)dW(u).$$

Beweis: Aus Gleichung (2.3) ist bekannt, dass

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s).$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini für stochastische Integrale 2.4 folgt dann, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sigma(s,t)dW(s) &= \int_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int_0^t (\sigma(s,t)-\sigma(s,s))dW(s) \\
&= \int_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int_0^t \int_s^t \partial_u \sigma(s,u)du\, dW(s) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int_0^t \int_0^u \partial_u \sigma(s,u)dW(s)\, du.
\end{aligned}$$

Analog folgt mit Hilfe des klassischen Satzes von Fubini

$$\int_0^t \alpha(s,t)ds = \int_0^t \alpha(s,s)ds + \int_0^t \int_0^u \partial_u \alpha(s,u)ds\, du.$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
f(0,t) = r(0) + f(0,t) - r(0) &= r(0) + f(0,t) - f(0,0) \\
&= r(0) + \int_0^t \partial_u f(0,u)du.
\end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen dieser Ergebnisse ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
r(t) &= r(0) + \int_0^t \partial_u f(0,u)du + \int_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int_0^t \int_0^u \partial_u \sigma(s,u)dW(s)\, du \\
&\quad + \int_0^t \alpha(s,s)ds + \int_0^t \int_0^u \partial_u \alpha(s,u)ds\, du \\
&= r(0) + \int_0^t \underbrace{\alpha(u,u) + \partial_u f(0,u) + \int_0^u \partial_u \alpha(s,u)ds + \int_0^u \partial_u \sigma(s,u)dW(u)}_{:=\xi(u)} + \int_0^t \sigma(u,u)du.
\end{aligned}$$

□

Abschließend wird noch geklärt, wie sich der Prozess der Short Rate unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q verhält.

Bemerkung 2.13: Betrachtet man den Short Rate Prozess unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so gilt zunächst für die Drift $\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)$ und somit für die partielle Ableitung nach T

$$
\begin{aligned}
\partial_T \alpha(t,T) &= \partial_T \sigma(t,T)\sigma^*(t,T) + \sigma(t,T)\partial_T \sigma^*(t,T) \\
&= \partial_T \sigma(t,T)\sigma^*(t,T) + \sigma(t,T)^2.
\end{aligned}
$$

Mit $\alpha(t,t) = \sigma(t,t)\underbrace{\sigma^*(t,t)}_{=0} = 0$ und einer analogen Rechnung wie im Beweis von Satz 2.12 erhält man

$$
r(t) = r(0) + \int_0^t \left[\partial_u f(0,u) + \int_0^u \partial_u \sigma(s,u) d\tilde{W}(s) + \int_0^u \left(\partial_u \sigma(s,u)\sigma(s,u) + \sigma(s,u)^2 \right) ds \right] du
$$

bzw. in Differentialschreibweise

$$
dr(t) = \left[\partial_t f(0,t) + \int_0^t \partial_t \sigma(s,t) d\tilde{W}(s) + \int_0^t \left(\partial_t \sigma(s,t)\sigma^*(s,t) + \sigma(s,t)^2 \right) ds \right] dt + \sigma(t,t) d\tilde{W}(t). \tag{2.22}
$$

2.6 Das T-Forward-Maß

Von nun an wird das Modell stets unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q betrachtet, das heißt, dass alle abdiskontierten Bondpreise

$$
\frac{B(t,T)}{\beta(t)}, \quad t \in [0,T], \tag{2.23}
$$

positive Martingale unter Q bilden. Die Einführung eines sogenannten T-Forward-Maßes, die sich an [Fil04](Kapitel 9) orientiert, ermöglicht es eine starke Vereinfachung der Bewertungsformeln für T-Claims herzuleiten. Zunächst wird die Problematik, welche bei der Verwendung der risikoneutralen Bewertungsformel auftritt, näher betrachtet.
Sei X ein T-Claim mit $\frac{X}{\beta(T)} \in L^1(Q, \mathcal{F}_T)$, so ist der faire Preis $\pi(t)$ aufgrund der Vollständigkeit des Marktes zum Zeitpunkt t gegeben durch die Bewertungsformel [10]

$$
\pi(t) = \mathbb{E}_Q\Big(\exp(-\int_t^T r(u)du) X \Big| \mathcal{F}_t \Big). \tag{2.24}
$$

Um $\pi(t)$ berechnen zu können, wird die gemeinsame Verteilung von $\exp(-\int_t^T r(u)du)$

[10] Siehe z.B [Reb98] S.167.

und X benötigt und es muss bezüglich dieser Verteilung integriert werden. So erhält man ein Doppelintegral, welches häufig schwierig zu berechnen sein wird. Betrachtet wird stattdessen ein alternativer Weg, welcher den T-Bond als Numéraire einführt.

2.6.1 Der T-Bond als Numéraire und eine Bewertungsformel

Zunächst wird es das Ziel sein, einen T-Bond mit beliebiger Fälligkeit als Numéraire einzuführen, das heißt, dass alle bezüglich des T-Bonds diskontierten Preise ein Martingal unter dem T-Forward-Maß bilden. Später erkennt man, dass das T-Forward-Maß die entscheidende Verbindung zum LIBOR Markt Modell darstellt.
Zu diesem Zweck wird folgender Dichtequotientenprozess definiert.
Sei $T > 0$ und

$$L_T := \frac{1}{B(0,T)\beta(T)} > 0,$$

somit gilt

$$\mathbb{E}_Q[L_T] = \mathbb{E}_Q\Big[\frac{\overbrace{B(T,T)}^{=1}}{B(0,T)\beta(T)}\Big] \overset{Q\text{-Martingal}}{=} \frac{1}{B(0,T)}\mathbb{E}_Q\Big[\frac{B(0,T)}{\underbrace{\beta(0)}_{=1}}\Big] = 1.$$

Auf diese Weise definiert man über

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{1}{B(0,T)\beta(T)}$$

ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q^T \sim Q$ auf $\mathcal{F}_T$ und für $t \leq T$ gilt

$$\frac{dQ^T}{dQ}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}_Q\Big[\frac{dQ^T}{dQ}|\mathcal{F}_t\Big] \overset{Q\text{-Martingal}}{=} \frac{B(t,T)}{B(0,T)\beta(t)}.$$

Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß heißt T-Forward-Maß.[11]

Im nächsten Schritt wird sichergestellt, dass zu jedem T-Bond ein T-Forward-Maß Q^T existiert, welches den T-Bond als Numéraire besitzt.

[11] Q^T heißt auch terminrisikoangepasstes Maß.

Lemma 2.14: *Sei $0 \leq T \leq T^*$. Für ein beliebiges $0 < S \leq T^*$ ist der Forwardpreis des S-Bonds $\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}\right)_{t\in[0,S\wedge T]}$ ein Q^T-Martingal. Q^T ist das Forwardmartingalmaß bezüglich T und besitzt den T-Bond als Numéraire.*

Beweis: Sei $s \leq t \leq S \wedge T$. Dann gilt nach der Formel von Bayes [12]

$$\mathbb{E}_{Q^T}\Big[\frac{B(t,S)}{B(t,T)}|\mathcal{F}_s\Big] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{E}_Q\Big[\frac{B(t,T)}{B(0,T)\beta(t)}\frac{B(t,S)}{B(t,T)}|\mathcal{F}_s\Big]}{\frac{B(s,T)}{B(0,T)\beta(s)}} = \frac{\frac{B(s,S)}{\beta(s)}}{\frac{B(s,T)}{\beta(s)}} = \frac{B(s,S)}{B(s,T)}.$$

Also ist $\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}\right)_{t\in[0,S\wedge T]}$ ein Q^T-Martingal.

$\square$

Nun ist es möglich ein weiteres wichtiges Resultat dieses Abschnitts, die Bewertungsformel für T-Claims unter dem T-Forward-Maß, zu formulieren.

Satz 2.15: *Sei X ein T-Claim mit $\frac{X}{\beta(T)} \in L^1(Q,\mathcal{F}_T)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{Q^T}[|X|] < \infty \\ \textit{und} \quad &\pi(t) = B(t,T)\mathbb{E}_{Q^T}[X|\mathcal{F}_t], \end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei $\pi(t)$ den fairen Wert von X zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Beweis:

$$\mathbb{E}_{Q^T}[|X|] = \mathbb{E}_Q\Big[\frac{|X|}{B(0,T)\beta(T)}\Big] < \infty \quad \text{nach Voraussetzung.}$$

Wegen $\frac{\beta(t)}{\beta(T)} = \exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)$, der $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von $\beta(t)$ sowie der Formel von Bayes gilt mit der Bewertungsformel (2.24):

[12] Der Satz von Bayes befindet sich im Anhang.

$$\begin{aligned}\pi(t) &\overset{(2.24)}{=} B(0,T)\beta(t)\mathbb{E}_Q\Big[\frac{X}{B(0,T)\beta(T)}|\mathcal{F}_t\Big]\\ &\overset{\text{Bayes}}{=} B(0,T)\beta(t)\mathbb{E}_{Q^T}[X|\mathcal{F}_t]\frac{B(t,T)}{B(0,T)\beta(t)}\\ &= B(t,T)\mathbb{E}_{Q^T}[X|\mathcal{F}_t].\end{aligned}$$

□

Stellt man die Gleichung um, so erkennt man, dass $\mathbb{E}_{Q^T}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{\pi(t)}{B(t,T)}$ als Forwardpreis bezüglich T interpretiert werden kann.
Des Weiteren liegen die Vorteile der erhaltenen Bewertungsformel auf der Hand. Zum einen muss mit dem Forwardpreis $\mathbb{E}_{Q^T}[X|\mathcal{F}_t]$ nur noch ein einfaches Integral berechnet werden, zum anderen kann der Bondpreis $B(t,T)$ am Markt beobachtet werden und muss nicht berechnet werden.

2.6.2 Bewertung von Optionen mittels T-Forward-Maß

Betrachtet sei eine europäische Calloption auf einen S-Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike K. Die Zahlung des Calls in Fälligkeit T ist dann

$$\begin{aligned}C_T &= \max\{B(T,S) - K, 0\}\\ &= (B(T,S) - K)^+\\ &= B(T,S)\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}} - K\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}.\end{aligned}$$

Da $B(T,S)$ den Wert einer Geldeinheit in S zum Zeitpunkt T bezeichnet, ergibt sich der faire Preis über die risikoneutrale Bewertungsformel durch

$$B(T,S) = \mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_T^S r(u)du\Big)1|\mathcal{F}_T\Big]. \tag{2.26}$$

Der faire Preis der Calloption zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
C_t(K,T,S) &\overset{\text{Satz 2.15}}{=} \mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)\Big(B(T,S)-K\Big)^+|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)B(T,S)\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\quad - K\mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\overset{(2.26)}{=} \mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\int_T^S r(u)du\Big)|\mathcal{F}_T\Big]\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\quad - K\mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^S r(u)du\Big)\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\quad - K\mathbb{E}_Q\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \beta(t)B(0,S)\mathbb{E}_Q\Big[\frac{1}{\beta(S)B(0,S)}\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\quad - \beta(t)B(0,T)K\mathbb{E}_Q\Big[\frac{1}{\beta(t)B(0,T)}\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\overset{\text{Bayes}}{=} \beta(t)B(0,S)\frac{B(t,S)}{\beta(t)B(0,S)}\mathbb{E}_{Q^S}\Big[\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\quad - K\beta(t)B(0,T)\frac{B(t,T)}{\beta(t)B(0,T)}\mathbb{E}_{Q^T}\Big[\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= B(t,S)\mathbb{E}_{Q^S}\Big[\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\}}|\mathcal{F}_t\Big] - B(t,T)K\mathbb{E}_{Q^T}\Big[\mathbf{1}_{\{B(T,S)\geq K\ \}}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= B(t,S)Q^S(B(T,S)\geq K|\mathcal{F}_t) - B(t,T)KQ^T(B(T,S)\geq K|\mathcal{F}_t).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

2.6.3 Zusammenhang zwischen Forward Rate und Short Rate

Die Forward Rate $f(t,T)$ ist der risikolose Zinssatz über das infinitesimale Intervall $[T, T+dT]$, festgelegt zum Zeitpunkt t. Andererseits ist die Short Rate $r(T)$ der risikolose Zinssatz ebenfalls über das infinitesimale Intervall $[T, T+dT]$, festgelegt zum Zeitpunkt T. Die Forward Rate $f(t,T)$ ist also der Terminpreis der zukünftigen Short Rate $r(T)$ bezüglich des Termins T zum Zeitpunkt t.[13]

[13] Vergleiche [Bjö04] S.357.

Wegen der eindeutigen Lösung für den Bondpreisprozess erhält man für die Dichte

$$\frac{dQ^T}{dQ}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{\beta(t)B(0,T)} \overset{(2.20)}{=} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^*(u,T)^2 du - \int_0^t \sigma^*(u,T)d\tilde{W}(u)\Big).$$

Mit dem Satz von Girsanov erhält man, dass

$$W^T(t) = \tilde{W}(t) + \int_0^t \sigma^*(u,T)du \tag{2.28}$$

eine Brownsche Bewegung unter dem T-Forward-Maß ist. Zusammen mit der Dynamik der Forward Rates unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q ergibt sich dann

$$\begin{aligned} df(t,T) &\overset{(2.16)}{=} \sigma^*(t,T)\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)d\tilde{W}(t) \\ &\overset{(2.28)}{=} \sigma^*(t,T)\sigma(t,T)dt - \sigma^*(t,T)\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)dW^T(t) \\ &= \sigma(t,T)dW^T(t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Aufgrund des fehlenden dt-Terms ist $(f(t,T))_{t\in[0,T]}$ ein Q^T-Martingal und man erhält:

Korollar 2.16: *Unter dem T-Forward-Maß lässt sich die Forward Rate $f(t,T)$ als bedingte Erwartung der zukünftigen Short Rate ausdrücken. Es gilt*

$$f(t,T) = \mathbb{E}_{Q^T}[r(T)|\mathcal{F}_t].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^T}[r(T)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{Q^T}\Big[f(0,T) + \int_0^T \sigma(u,T)dW^T(u)|\mathcal{F}_t\Big] \\ &\overset{Q^T\text{-Mart.}}{=} f(0,T) + \int_0^t \sigma(u,T)dW^T(u) \\ &\overset{(2.29)}{=} f(t,T) \end{aligned}$$

□

Die Forward Rate ist der Forwardpreis auf die Short Rate.

2.7 Gaußmodelle

Einer der wichtigsten Spezialfälle des HJM-Modells sind die Gaußschen HJM-Modelle. Man spricht von einem Gaußmodell, falls die Volatilität der Forward Rates eine deterministische Funktion ist, das heißt, dass die Volatilität nur von der zeitlichen Entwicklung in t und dem Fälligkeitszeitpunkt T abhängt, nicht aber von dem Zustand ω. Betrachtet man das Modell unter dem risikoneutralen Maß Q, so gilt die HJM-Driftbedingung und die Funktion $\alpha(t,T)$ ist ebenfalls eine deterministische Funktion. Es folgt, dass die Forward Rates in einem Gaußmodell normalverteilt sind, denn unter Q gilt

$$f(t,T) = f(0,T) + \underbrace{\int_0^t \sigma(u,T)\sigma^*(u,T)du}_{\text{deterministisch}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u)}_{\text{normalverteilt}}.$$

Weiterhin folgt unmittelbar, dass die Bonds lognormalverteilt sind, denn die Bonds folgen der Dynamik, die gegeben ist durch Gleichung (2.17), mit eindeutiger Lösung (2.20), also

$$\begin{aligned} B(t,T) &= B(0,T)\beta(t)\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^*(u,T))^2 du - \int_0^t \sigma^*(u,T)d\tilde{W}(u)\Big) \\ &\overset{(1.3)}{=} B(0,T)\exp\Big(\underbrace{f(0,t) + \int_0^t \sigma^*(u,t)\sigma(u,t)du - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^*(u,T))^2 du}_{\text{deterministisch}} \\ &\qquad + \underbrace{\int_0^t \sigma(u,t)d\tilde{W}(u) - \int_0^t \sigma^*(u,T)d\tilde{W}(u)}_{\text{normalverteilt}}\Big). \end{aligned}$$

Es ist bereits gezeigt worden, dass das HJM-Modell unter Q vollständig durch die anfängliche Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ und die Volatilitätsstruktur der Forward Rates $\sigma(t,T)$ beschrieben ist. Zum Ende des Abschnitts sollen die Auswirkungen einiger ausgewählter deterministischer Volatilitätsfunktionen auf das HJM-Modell untersucht werden. Außerdem wird der Zusammenhang einiger Short Rate Modelle zum HJM-Modell bzw. jener ausgewählter Volatilitätsfunktion verdeutlicht werden. Um in den folgenden Beispielen die Optionspreise einfacher berechnen zu können, wird zunächst eine Formel zur Optionsbewertung in Gaußmodellen hergeleitet. Anschließend wird die Markoveigenschaft von Gaußmodellen betrachtet, welche eine Besonderheit von Gaußmodellen darstellt, da HJM-Modelle sonst typischerweise pfadabhängig sind.

2.7.1 Optionsbewertung im Gaußmodell

In diesem Abschnitt, welcher sich an [BS04] orientiert, wird eine Formel zur Bewertung von Optionen in Gaußmodellen hergeleitet.

Lemma 2.17: *Sei $0 \leq t \leq T$. Der Preis eines S-Bonds zum Zeitpunkt $T \leq S$ ist gegeben durch*

$$B(T,S) = \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)^2 - \sigma^*(u,T)^2)du - \int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))d\tilde{W}(u)\Big). \tag{2.30}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} B(T,S) &\overset{(1.2)}{=} \exp\Big(-\int_T^S f(T,s)ds\Big) \\ &\overset{(2.16)}{=} \exp\Big(-\int_T^S \Big(f(t,s) + \int_t^T \sigma(u,s)\sigma^*(u,s)du + \int_t^T \sigma(u,s)d\tilde{W}(u)\Big)ds\Big) \\ &= \exp\Big(-\int_T^S f(t,s)ds\Big)\exp\Big(-\int_T^S\int_t^T \sigma(u,s)\sigma^*(u,s)du\,ds - \int_T^S\int_t^T \sigma(u,s)d\tilde{W}(u)ds\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\frac{B(t,S)}{B(t,T)} = \frac{\exp(-\int_t^S f(t,u)du)}{\exp(-\int_t^T f(t,u)du)} = \exp(-\int_T^S f(t,u)ds)$ und dem Satz von Fubini für stochastische Integrale 2.4 gilt

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(-\int_t^T\int_T^S \underbrace{\sigma(u,s)}_{\frac{\partial}{\partial s}\sigma^*(u,s)} \sigma^*(u,s)ds\,du - \int_t^T\int_T^S \underbrace{\sigma(u,s)}_{\frac{\partial}{\partial s}\sigma^*(u,s)} ds\,d\tilde{W}(u)\Big) \\ &= \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)^2 - \sigma^*(u,T)^2)du - \int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))d\tilde{W}(u)\Big). \end{aligned}$$

□

Satz 2.18: *In einem Gaußmodell gilt für den Preis eines europäischen Calls auf einen S-Bond mit Ausübungszeitpunkt T und Strike K zum Zeitpunkt t*

$$C_t(K,T,S) = B(t,S)\Phi(d_1) - KB(t,T)\Phi(d_2) \tag{2.31}$$

$$\text{mit} \quad d_{1,2} = \frac{\ln\Big(\frac{B(t,S)}{KB(t,T)}\Big) \pm \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

wobei Φ *die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.*

Beweis: Aus (2.27) ist bekannt, dass

$$C_t(K,T,S) = B(t,S)Q^S(B(T,S) \geq K|\mathcal{F}_t) - B(t,T)KQ^T(B(T,S) \geq K|\mathcal{F}_t).$$

Zu bestimmen ist also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{B(T,S) \geq K|\mathcal{F}_t\}$ unter dem T- bzw. S-Forward-Maß. Zunächst gilt nach Lemma 2.17 für $t \leq T \leq S$ und wegen $d\tilde{W}(u) = dW^T(u) - \sigma^*(u,T)du$

$$\begin{aligned}
B(T,S) &= \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)^2 - \sigma^*(u,T)^2)du - \int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))d\tilde{W}(u)\Big) \\
&= \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)^2 - \sigma^*(u,T)^2 - 2\sigma^*(u,S)\sigma^*(u,T) + 2\sigma^*(u,T)^2)du \\
&\qquad - \int_t^T \sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T)dW^T(u)\Big) \\
&= \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du - \int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))dW^T(u)\Big).
\end{aligned}$$

Analog gilt beim Wechsel zum S-Forward-Maß

$$B(T,S) = \frac{B(t,S)}{B(t,T)} \exp\Big(\frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du - \int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))dW^S(u)\Big).$$

Somit gilt zum Zeitpunkt t:

$$\ln B(T,S) = \underbrace{\ln\frac{B(t,S)}{B(t,T)} \mp \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du}_{deterministisch} - \underbrace{\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))dW^{T/S}(u)}_{normalverteilt}.$$

$B(T,S)$ -gegeben $\mathcal{F}_t$- ist sowohl unter Q^T als auch unter Q^S lognormalverteilt und man erhält

$$\begin{aligned}
&Q^T(B(T,S)\geq K|\mathcal{F}_t)\\
&= Q^T\Big(\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))dW^T(u) \leq \ln\frac{B(t,S)}{B(t,T)} - \ln K - \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du\Big)\\
&= \Phi\left(\frac{\ln(\frac{B(T,S)}{KB(t,T)}) - \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du}}\right),
\end{aligned}$$

wobei sich die Varianz mit Hilfe der Itô-Isometrie berechnen lässt. Analog gilt unter Q^S

$$\begin{aligned}
&Q^S(B(T,S)\geq K|\mathcal{F}_t)\\
&= Q^S\Big(\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))dW^T(u) \leq \ln\frac{B(t,S)}{B(t,T)} - \ln K + \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du\Big)\\
&= \Phi\left(\frac{\ln(\frac{B(T,S)}{KB(t,T)}) + \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_t^T (\sigma^*(u,S)-\sigma^*(u,T))^2 du}}\right).
\end{aligned}$$

□

Die Formel ist völlig analog zur Black-Scholes Formel.[14] Die Rolle des risikolosen Geldmarktkontos nimmt jetzt das Investment in den Bond mit Fälligkeit T ein und die Aktie wird durch den Bond mit Fälligkeit S ersetzt.

[14] Siehe z.B. [Irl98].

2.7.2 Markoveigenschaft

Für beliebige Volatilitätsstrukturen der Forward Rates ist die Entwicklung der Short Rate nicht Markovsch. Der gesamte Pfad ist also notwendig, um die Dynamik der Prozesse zu beschreiben. Numerische Verfahren müssen die gesamte Zinsstruktur anhand jedes Pfades bestimmen, um einen Claim berechnen zu können, was einen hohen Rechenaufwand erfordert. Dieser Aufwand reduziert sich enorm, falls die Short Rate die Markoveigenschaft besitzt. In der Arbeit von Carverhill (1994) [Car94] wird unter der Annahme, dass die Volatilitätsfunktion $\sigma(t,T)$ deterministisch ist, ein notwendiger und hinreichender Zusammenhang zwischen der Volatilitätsfunktion und der Markoveigenschaft der Short Rate hergeleitet. Weitere Literaturquellen sind [MR98] und [Sch05].

Definition 2.19: Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt Markovsch, falls für alle $0 \leq s < t$ und für beschränkte Borel-messbare Funktionen $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[h(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[h(X_t)|X_s]$$

Ein Markovprozess ist also nicht pfadabhängig.

Satz 2.20: *Sei $\sigma(t,T)$ deterministisch und stetig differenzierbar nach T sowie $\sigma(t,T) \neq 0$ für alle $0 \leq t \leq T \leq T^*$. Dann ist äquivalent:*

(i) r(t) ist Markovsch.

(ii) Es existieren zwei Funktionen $x(t)$ und $y(T)$, so dass sich die Volatilität als Produkt dieser Funktionen schreiben lässt. Es gilt also

$$\sigma(t,T) = x(t)y(T) \quad \textit{für alle} \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*.$$

(iii) Es existiert eine Funktion y, so dass sich die Short Rate gemäß folgender Gleichung

entwickelt:

$$
\begin{aligned}
dr(t) = &\Big(\partial_t f(0,t) + \int_0^t \left(\sigma^*(u,t)\partial_t\sigma(u,t) + (\sigma(u,t))^2\right) du\Big) dt \\
&- \frac{y(t)}{y'(t)}\Big(\int_0^t \sigma^*(u,t)\sigma(u,t)du + f(0,t) - r(t)\Big) dt + \sigma(t,t)d\tilde{W}(t).
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Beweis: (i)➔(ii):
Der Short Rate Prozess ist im HJM-Modell festgelegt durch

$$r(t) = \underbrace{f(0,t) + \int_0^t \sigma(u,t)\sigma^*(u,t)du}_{\text{deterministisch}} + \int_0^t \sigma(u,t)d\tilde{W}(u).$$

Da nach Voraussetzung die Volatilität deterministisch ist, ist auch die Drift der Short Rate deterministisch. Da $r(t)$ ebenfalls nach Voraussetzung Markovsch ist, muss das Integral

$$D_t := \int_0^t \sigma(u,t)d\tilde{W}(u)$$

Markovsch sein. Man hat die Zerlegung

$$
\begin{aligned}
D_T &= \int_0^T \sigma(u,T)d\tilde{W}(u) \\
&= D_t + \int_0^T \sigma(u,T)d\tilde{W}(u) - \int_0^t \sigma(u,t)d\tilde{W}(u) \\
&= D_t + \int_t^T \sigma(u,T)d\tilde{W}(u) + \int_0^t \left(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\right) d\tilde{W}(u).
\end{aligned}
$$

Betrachtet man die Zerlegung von D_T, so stellt man fest, dass das Integral über $[t,T]$ unabhängig von D_t ist. Die Markoveigenschaft kann also nur noch von dem letzten Integral gestört werden. Es gilt

$$\int_0^t \left(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\right) d\tilde{W}(u) = \int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u) - D_t.$$

Da nach Voraussetzung die Markoveigenschaft erfüllt ist, gilt

$$\underbrace{\mathbb{E}\Big[\int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u)|D_t\Big]}_{\sigma(D_t)\text{-messbar}} \overset{\text{Markoveigenschaft}}{=} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u)}_{\mathcal{F}_t\text{-messbar}}|\mathcal{F}_t\Big] = \int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u).$$

Also ist das Integral $\int_0^t \sigma(u,T)d\tilde{W}(u)$ $\sigma(D_t)$-messbar. Da beide Ausdrücke normalverteilt sind, haben sie die Korrelation 1.[15]

Es gilt $D_t \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t \sigma(u,t)^2 du)$ sowie $D_T \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t \sigma(u,T)^2 du)$ und man erhält aus $Corr(D_t, D_T) = \frac{Cov(D_t,D_T)}{\sqrt{Var(D_t)}\sqrt{Var(D_T)}} = 1$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q \left[\left(\int_0^t \sigma(u,T) d\tilde{W}(u) \right) \left(\int_0^t \sigma(u,t) d\tilde{W}(u) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[\left(\int_0^t \sigma(u,T) d\tilde{W}(u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_Q \left[\left(\int_0^t \sigma(u,t) d\tilde{W}(u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Itô-Isometrie und der Voraussetzung, dass $\sigma(t,T)$ deterministisch ist, folgt

$$\int_0^t \sigma(u,T)\sigma(u,t)du = \left(\int_0^t \sigma(u,T)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sigma(u,t)^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Auf diese Weise erhält man eine Gleichung in Cauchy-Schwarz-Beziehung. Dieses impliziert, dass $\sigma(u,T)$ und $\sigma(u,t)$ kollinear über $u \in [0,t]$ sind, was unmittelbar aus dem Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt. Es gibt also für ein beliebiges $T \in [0,T^*]$ eine Konstante K^{T,T^*}, so dass

$$\sigma(t,T) = K^{T,T^*}\sigma(t,T^*), \qquad t \in [0,T].$$

Setzt man nun $y(T) := K^{T,T^*}$ und $x(t) := \sigma(t,T^*)$, so ist die gewünschte Zerlegung $\sigma(t,T) = x(t)y(T)$ gefunden.

(ii)➔(iii):

Aus Gleichung (2.22) ist bereits bekannt, dass

$$dr(t) = \left[\partial_t f(0,t) + \int_0^t \partial_t \sigma(s,t) d\tilde{W}(s) + \int_0^t \left(\partial_t \sigma(s,t)\sigma^*(s,t) + \sigma(s,t)^2 \right) ds \right] dt + \sigma(t,t)d\tilde{W}(t).$$

Wegen (ii) existiert wiederum eine Zerlegung von $\sigma(t,T) = x(t)y(T)$ für alle $0 \le t \le T \le T^*$ und man erhält

[15]Ein Beweis hierfür befindet sich im Anhang.

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \partial_t\sigma(s,t)d\tilde{W}(s) &= \int_0^t \partial_t x(s)y(t)d\tilde{W}(s) \\
&= \partial_t y(t)\int_0^t x(s)d\tilde{W}(s) \qquad = \frac{\partial_t y(t)}{y(t)}\int_0^t x(s)y(t)d\tilde{W}(s) \qquad (2.33)\\
&= \frac{\partial_t y(t)}{y(t)}\int_0^t \sigma(s,t)d\tilde{W}(s).
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Definition der Short Rate ist

$$
\int_0^t \sigma(s,t)d\tilde{W}(s) = -\left[f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\sigma^*(s,t)ds - r(t)\right]
$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
dr(t) &\overset{(2.33)}{=} \left[\partial_t f(0,t) + \int_0^t \left(\partial_t\sigma(s,t)\sigma^*(s,t) + \sigma(s,t)^2\right)ds\right]dt \\
&\quad + \frac{\partial_t y(t)}{y(t)}\int_0^t \sigma(s,t)d\tilde{W}(s) + \sigma(t,t)d\tilde{W}(t) \\
&= \left[\partial_t f(0,t) + \int_0^t \left(\partial_t\sigma(s,t)\sigma^*(s,t) + \sigma(s,t)^2\right)ds\right]dt \\
&\quad - \frac{\partial_t y(t)}{y(t)}\left(f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\sigma^*(s,t)ds - r(t)\right) + \sigma(t,t)d\tilde{W}(t).
\end{aligned}
$$

(iii) ➔(i):
Da die Short Rate $r(t)$ Bedingung (iii) erfüllt, ist $r(t)$ als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung Markovsch.[16] □

Definition 2.21: Die Volatilitätsstruktur $\sigma(t,T)$ heißt stationär oder zeitlich homogen, falls für alle $\tau > 0$ gilt, dass $\sigma(t_1, t_1+\tau) = \sigma(t_2, t_2+\tau)$ für alle $0 \le t_1 \le t_2 \le T^* - \tau$.

Korollar 2.22: *Ist $\sigma(t,T)$ deterministisch und stetig differenzierbar nach T sowie $\sigma(t,T) \neq 0$ für alle $0 \le t \le T \le T^*$ und erfüllt die Short Rate die Markoveigenschaft, dann gilt:*

[16] Siehe [Oks03].

(i) Für $t \leq s \leq T$ gilt

$$\sigma^*(s,T) = \frac{\sigma(s,s)}{\sigma(t,s)}\Big(\sigma^*(t,T) - \sigma^*(t,s)\Big).$$

(ii) Ist die Volatilität zusätzlich stationär ist, so ist die Volatilität von der Vasiček-Form. Es gilt also

$$\sigma^*(t,T) = \frac{\gamma}{\alpha}\Big(1 - \exp(\alpha(T-t))\Big),$$

wobei $\gamma, \alpha > 0$ konstant sind.

Beweis: (i) Nach Satz 2.20(i) existieren zwei Funktionen, so dass

$$\sigma(t,T) = x(t)y(T)$$

und es gilt

$$\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)du = \int_t^T x(t)y(u)du = x(t)\int_t^T y(u)du.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(s,s)}{\sigma(t,s)}\Big(\sigma^*(t,T) - \sigma^*(t,s)\Big) &= \frac{x(s)y(s)}{x(t)y(s)}\Big(x(t)\int_t^T y(u)du - x(t)\int_t^s y(u)du\Big) \\
&= x(s)\int_s^T y(u)du \\
&= \sigma^*(s,T).
\end{aligned}$$

(ii) Zunächst gilt durch Differenzieren nach T

$$\partial_T \sigma^*(t,T) = \sigma(t,T) = \gamma \exp(-\alpha(T-t)).$$

Insbesondere ist $\sigma(t,T) \neq 0$ und es existiert, da $\sigma(t,T)$ stationär ist, eine Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sigma(t,T) = z(T-t)$. Nach Satz 2.20(i) existiert eine Zerlegung

$$z(T-t) = x(t)y(T).$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$\log(z(T-t)) = \log(x(t)) + \log(y(T)).$$

Leitet man dies partiell ab, so erhält man

$$-\frac{z'(T-t)}{z(T-t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}; \quad \frac{z'(T-t)}{z(T-t)} = \frac{y'(T)}{y(T)}.$$

Also

$$-\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{y'(T)}{y(T)} \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \leq T^*.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn beide Seiten konstant sind, denn es gilt $\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{y'(0)}{y(0)}$ für alle $0 \leq t \leq T^*$. Für die rechte Seite folgt dies analog. Dieser konstante Wert sei α. Folglich ist auch $\frac{z'(T-t)}{z(T-t)}$ konstant und man folgert, dass $\log(z(T-t))$ linear ist. Daher hat z die Gestalt $z(T-t) = \exp(\alpha(T-t)+b)$. Mit $b := \ln(\gamma)$ folgt die gewünschte Gestalt und durch Integrieren nach T folgt die Behauptung. □

2.7.3 Beispiele

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie einige ausgewählte Modelle aus dem HJM-Modell abgeleitet werden können. Hierzu wird die Volatilitätsfunktion der Forward Rates für jedes Modell geeignet gewählt. [17]

Ho-Lee Modell

Der einfachste Fall einer deterministischen Funktion für die Volatilität der Forward Rates ist eine konstante Funktion. Sei also

$$\sigma(t,T) := \sigma > 0.$$

Die Volatilität hängt also weder vom aktuellen Zeitpunkt noch von der Restlaufzeit ab und ist für alle Forward Rates gleich hoch. Es gilt

[17] Vergleiche [BS04].

$$\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)du = \int_t^T \sigma\, du = \sigma(T-t).$$

Die Volatilität der Bondpreise hängt also proportional von der Restlaufzeit des Bonds ab. Für die Forward Rates gilt

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma(t,T)d\tilde{W}(t) \\ &= \sigma^2(T-t)dt + \sigma d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

bzw. in Integralschreibweise

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \sigma^2(T-u)du + \int_0^t \sigma d\tilde{W}(u) \\ &= f(0,T) + \sigma^2 t(T - \frac{1}{2}t) + \sigma\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

Man sieht, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit die Forward Rates negative Werte annehmen können. Zum Zeitpunkt t sind die Forward Rate-Kurven in den verschiedenen Zuständen parallel verschoben, da sie sich nur hinsichtlich der additiven Größe $\sigma\tilde{W}(t)$ unterscheiden.

Für den Short Rate Prozess unter dem risikoneutralen Maß Q gilt

$$r(t) = f(0,t) + \sigma^2\frac{t^2}{2} + \sigma\tilde{W}(t).$$

Auch die Short Rate kann mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte annehmen. [18]
Mit $x(t) = \sigma$ und $y(T) = 1$, also $\sigma(t,T) = x(t)y(T)$, erkennt man, dass die Volatilität in zwei Funktionen separiert. Mit Satz 2.20 folgert man, dass die Short Rate markovsch ist und aus Gleichung (2.32) erhält man für die Dynamik der Short Rate

$$dr(t) = \underbrace{\Big(\partial_t f(0,t) + \sigma^2 t\Big)}_{:=\theta(t)} dt + \sigma d\tilde{W}(t).$$

Man befindet sich somit im Ho-Lee Model.

Der Wert einer Calloption zum Zeitpunkt t mit Ausübungszeitpunkt T auf einen S-Bond

[18] Vergleiche [HJM92].

mit Strike K kann mit Gleichung (2.31) bestimmt werden. Man erhält

$$C_t(K,T,S) = B(t,S)\Phi(d_1) - KB(t,T)\Phi(d_2)$$

$$mit \quad d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{B(t,S)}{KB(t,T)}\right) \pm \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

wobei

$$\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du = \sigma^2 \int_t^T (S-T)^2 du = \sigma^2 (S-T)^2 (T-t).$$

Das Ho-Lee Model wird in der Praxis häufig genutzt. Es ist gut steuerbar, aber leider unrealistisch,[19] da gegensätzlich zu den Marktbeobachtungen längere Laufzeiten mit höheren Faktoren bedacht werden als kürzere. Des Weiteren besteht ein klarer Nachteil in der Tatsache, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit die Forward Rates negative Werte annehmen können.

Vasiček-Modell

Betrachtet wird nun die Wahl der Volatilitätsfunktion

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)} \text{ mit } \sigma, \alpha > 0.$$

Somit haben Forward Rates mit einer langen Laufzeit eine geringere Volatilität als Forward Rates mit einer kurzen Laufzeit.

Es gilt

$$\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma e^{-\alpha(u-t)} du = -\frac{\sigma}{\alpha}\left(e^{-\alpha(T-t)} - 1\right).$$

Daraus folgt für die Forward Rates

[19] Siehe [JW00],S.203.

$$df(t,T) = -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(T-t)} \Big(e^{-\alpha(T-t)} - 1 \Big) dt + \sigma e^{\alpha(T-t)} d\tilde{W}(t)$$

bzw.

$$\begin{aligned} f(t,T) = f(0,T) &+ \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \Big(2e^{-\alpha T}(e^{\alpha t} - 1) - e^{-2\alpha T}(e^{2\alpha t} - 1) \Big) \\ &+ \sigma e^{-\alpha T} \int_0^t e^{\alpha u} d\tilde{W}(u). \end{aligned}$$

Für die Short Rate gilt

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{W}(u). \tag{2.34}$$

Aus Satz 2.20 folgt, dass die Short Rate die Markoveigenschaft besitzt, denn die Volatilität lässt sich schreiben als

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)} = \underbrace{e^{\alpha t}}_{:=x(t)} \underbrace{\sigma e^{-\alpha T}}_{:=y(T)}.$$

Berechnet man die Dynamik der Short Rate mit Hilfe von Satz 2.20(iii), so erhält man

$$\begin{aligned} dr(t) = \Big[&\partial_t f(0,t) + \int_0^t -\frac{\sigma}{\alpha}(e^{-(t-u)} - 1)(-\sigma\alpha)e^{-\alpha(t-u)} + (\sigma e^{-\alpha(t-u)})^2 \\ &+ \alpha(-\frac{\sigma}{\alpha})(e^{-\alpha(t-u)} - 1)(\sigma e^{-\alpha(t-u)}) du + \alpha(f(0,t) - r(t)) \Big] dt + \sigma d\tilde{W}(t) \\ = &\left[\partial_t f(0,t) + \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-u)} du + \alpha \left(f(0,t) - r(t) \right) \right] dt + \sigma d\tilde{W}(t) \\ = &\,\alpha \Big(\underbrace{f(0,t) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})}_{:=\theta(t)} - r(t) \Big) dt + \sigma d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, dass man sich im erweiterten Vasiček-Modell befindet. Natürlich kann man die Dynamik der Short Rate auch direkt aus Gleichung (2.34) bestimmen. Sieht man sich die Drift der Short Rate genauer an, so erkennt man, dass dieser für große Short Rates negativ bzw. für kleine Short Rates positiv ist. So wird die Short Rate zum zeitabhängigen Mittelwert $\theta(t)$ zurückgezogen, was als Mean Reversion Eigenschaft bezeichnet wird.

Auch hier lässt sich mit Gleichung (2.31) wieder eine geschlossene Formel für einen Call auf einen S-Bond und Ausübungszeitpunkt T sowie Strike K angeben.

Es gilt

$$C_t(K,T,S) = B(t,S)\Phi(d_1) - KB(t,T)\Phi(d_2)$$

$$\text{mit} \quad d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{B(t,S)}{KB(t,T)}\right) \pm \frac{1}{2}\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du}{\sqrt{\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du}},$$

wobei

$$\int_t^T (\sigma^*(u,S) - \sigma^*(u,T))^2 du = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1 - e^{-\alpha(S-T)})^2(1 - e^{-2\alpha(T-t)}).$$

Auch dieses Modell wird in der Praxis häufig genutzt. Leider gilt auch hier, dass es zwar gut steuerbar und aufgrund der Markoveigenschaft gut berechenbar ist, aber leider ist auch dieses Modell unrealistisch, da die Forward Rates wiederum mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte annehmen können.

Zwei-Faktor-Modell

Dieses Beispiel vorgestellt in [HJM92] ist eine Kombination aus den Ansätzen von Ho-Lee und Vasiček bzw. stellt einen Spezialfall des Zwei-Faktor-Vasiček Modells dar. Man definiert zwei Volatilitätsfunktionen

$$\begin{aligned} \sigma_1(t,T) &:= \sigma_1; \\ \sigma_2(t,T) &:= \sigma_2 e^{-\gamma(T-t)}, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_1, \sigma_2, \gamma$ positive Konstanten sind. In diesem Beispiel wird das Modell von zwei unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen angetrieben, das heißt, dass

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 e^{-\gamma(T-t)} dW_2(t).$$

Für den ersten Faktor $(W_1(t))_{t\in[0,T^*]}$ hängen die Volatilitäten wie im Ho-Lee Modell proportional von der Restlaufzeit der Forward Rate ab und können als „longrun“ Faktor angesehen werden. Bei dem zweiten Faktor $(W_2(t))_{t\in[0,T^*]}$ sind die Volatilitäten kürzerer Laufzeiten höher als bei denen längerer Laufzeiten. Daher kann dieser als Aufschlag auf die kürzeren Laufzeiten zu den längeren interpretiert werden. Die Ergebnisse, welche für die vorherigen Beispiele hergeleitet wurden, gelten auch für dieses Beispiel analog, indem man sie auf die Faktoren einzeln anwendet.

Nichtnegative Forward Rates

Alle bisherigen Beispiele hatten den klaren Nachteil, dass die Forward Rates mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ werden konnten. Betrachtet wird nun ein Beispiel, in dem die Forward Rates mit Wahrscheinlichkeit 1 positiv sind. Sei

$$\sigma(t,T) := \sigma \min(f(t,T),\lambda); \quad \sigma,\lambda > 0 \quad \text{konstant.}$$

Dann gilt

$$df(t,T) = \sigma \min(f(t,T),\lambda)\Big(\int_t^T \sigma \min(f(t,s),\lambda)ds\Big)dt + \sigma \min(f(t,T),\lambda)d\tilde{W}(t).$$

In [HJM92] wird sichergestellt, dass es einen Prozess $f(t,T)$ gibt, welcher obige Gleichung löst, und der so gewählte Prozess der Forward Rates mit Wahrscheinlichkeit 1 positiv ist, falls eine strikt positve anfängliche Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ vorgegeben wurde.

2.8 Kalibrierung

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man die neben der anfänglichen Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ benötigte Volatilitätsstruktur $(\sigma(t,T))_{0\le t\le T\le T^*}$ aus historischen Daten herleiten kann, um das HJM-Modell zu spezifizieren. Dieser Abschnitt orientiert sich an [Shr04](S.432) und [Sch05](S.32). Es wird ausgenutzt, dass $\sigma(t,T)$ unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ und dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q gleich ist. Deshalb kann die Volatilität $\sigma(t,T)$, die aufgrund der in der Vergangenheit beobachteten Werte geschätzt wurde, also unter $\mathbb{P}$, für die Modellierung unter Q genutzt werden.

Schätzung der Volatilität $\sigma(t,T)$ anhand von historischen Daten

Angenommen, $\sigma(t,T)$ besitzt die Gestalt

$$\sigma(t,T) = \tilde{\sigma}(T-t)\min(\lambda, f(t,T)),$$

wobei $\tilde{\sigma}(\tau), \tau \geq 0$ eine deterministische Funktion und $\lambda > 0$ konstant ist.
Damit sind die Forward Rates positiv gewählt. Das Minimum ist nötig, um die Explosion der Forward Rates zu verhindern, was im folgenden Abschnitt genauer erläutert wird. Des Weiteren hängt $\tilde{\sigma}$ nur von der Restlaufzeit $(T-t)$ ab, nicht aber von T und t separat, was eine zeitliche Homogenität liefert, welche ausgenutzt werden soll.
Das Ziel wird es sein, $\tilde{\sigma}(T-t)$ an historische Daten anzupassen. Zunächst stellt man fest, dass die Forward Rates der Dynamik

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \tilde{\sigma}(T-t)\min(\lambda, f(t,T))dW(t)$$

folgen.

Beobachtung der Forward Rates in der Vergangenheit

Angenommen, man befindet sich im Zeitpunkt $t = 0$ und die Forward Rates sind zu den Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \ldots < t_J < 0$ in der Vergangenheit mit den Laufzeiten $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_K$ beobachtet worden. Also

$$\Big(f(t_j, t_j + \tau_k)\Big)_{1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K}$$

Weiterhin sei eine ausreichend kleine Konstante $\delta > 0$ angenommen, so dass die Forward Rates

$$\Big(f(t_j + \delta, t_j + \tau_k)\Big)_{1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K}$$

ebenfalls beobachtet worden sind. Für $\delta > 0$ gilt $t_j + \delta < t_{j+1}$ für $1 \leq j \leq J-1$ und $t_J + \delta \leq 0$. Die beobachteten Intervalle überschneiden sich also nicht und liegen in der Vergangenheit. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&f(t_j + \delta, t_j + \tau_k) - f(t_j, t_j + \tau_k) \\
&\approx \delta\alpha(t_j, t_j + \tau_k) + \tilde{\sigma}(\tau_k)\min(\lambda, f(t_j, t_j + \tau_k))(W(t_j + \delta) - W(t_j)).
\end{aligned}$$

Man setzt

$$\begin{aligned}
D_{j,k} &= \frac{f(t_j + \delta, t_j + \tau_k) - f(t_j, t_j + \tau_k)}{\sqrt{\delta}\min(\lambda, f(t_j, t_j + \tau_k))} \\
&= \frac{\sqrt{\delta}\alpha(t_j, t_j + \tau_k)}{\min(\lambda, f(t_j, t_j + \tau_k))} + \frac{\tilde{\sigma}(\tau_k)(W(t_j + \delta) - W(t_j))}{\sqrt{\delta}}.
\end{aligned}$$

Wählt man $\delta > 0$ sehr klein, so ist der erste Term im Vergleich zum zweiten Term sehr klein. Setzt man

$$X_j := \frac{W(t_j+\delta) - W(t_j)}{\sqrt{\delta}}, \qquad 1 \leq j \leq J,$$

so sind die X_j aufgrund der Eigenschaften der Brownschen Bewegung nicht nur standardnormalverteilt, sondern auch unabhängig voneinander, da δ klein genug gewählt wurde. Man folgert, dass

$$D_{j,k} \approx \tilde{\sigma}(\tau_k) X_j, \qquad 1 \leq j \leq J. \tag{2.35}$$

Berechnet man die theoretische Kovarianz von D_{j,k_1} und D_{j,k_2} mit Gleichung (2.35), so erhält man für $j = 1, \dots, J$ für die Laufzeiten τ_{k_1} und τ_{k_2}:

$$\begin{aligned}
Cov(\tilde{\sigma}(\tau_{k_1})X_j, \tilde{\sigma}(\tau_{k_2})X_j) &= \mathbb{E}\Big(\tilde{\sigma}(\tau_{k_1})X_j\tilde{\sigma}(\tau_{k_2})X_j - \underbrace{\mathbb{E}(\tilde{\sigma}(\tau_{k_1})X_j)}_{=0}\tilde{\sigma}(\tau_{k_2})X_j \\
&\qquad - \tilde{\sigma}(\tau_{k_1})X_j \underbrace{\mathbb{E}(\tilde{\sigma}(\tau_{k_2})X_j)}_{=0} + \mathbb{E}(\tilde{\sigma}(\tau_{k_1})X_j)\mathbb{E}(\tilde{\sigma}(\tau_{k_2})X_j)\Big) \\
&= \tilde{\sigma}(\tau_{k_1})\tilde{\sigma}(\tau_{k_2}) \underbrace{\mathbb{E}(X_j^2)}_{=1} \\
&= \tilde{\sigma}(\tau_{k_1})\tilde{\sigma}(\tau_{k_2}).
\end{aligned}$$

Andererseits lassen sich J unabhängige Beobachtungen von $D_{j,k}$ zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_J$ mit derselben Laufzeit τ_k machen. Hierzu betrachtet man die Differenz der beobachteten Forward Rates, denn es gilt

$$D_{j,k} = \frac{f(t_j+\delta, t_j+\tau_k) - f(t_j, t_j+\tau_k)}{\sqrt{\delta}\min(\lambda, f(t_j, t_j+\tau_k))}.$$

Man kann die Kovarianz aufgrund der Unabhängigkeit sehr gut schätzen durch

$$C_{k_1,k_2} = \frac{1}{J-1}\sum_{i=1}^{J} \frac{f(t_j+\delta, t_j+\tau_{k_1}) - f(t_j, t_j+\tau_{k_1})}{\sqrt{\delta}\min(\lambda, f(t_j, t_j+\tau_{k_1}))} \frac{f(t_j+\delta, t_j+\tau_{k_2}) - f(t_j, t_j+\tau_{k_2})}{\sqrt{\delta}\min(\lambda, f(t_j, t_j+\tau_{k_2}))}$$

für alle $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, K$. Die theoretische Kovarianzstruktur soll nun an die empirisch beobachtete Kovarianzstruktur angepasst werden. Optimalerweise ist also $\tilde{\sigma}(\tau_1), \dots, \tilde{\sigma}(\tau_K)$ zu finden, so dass

$$C_{k_1,k_2} = \tilde{\sigma}(\tau_{k_1})\tilde{\sigma}(\tau_{k_2}) \text{ für alle } k_1, k_2 = 1, 2, \dots, K$$

gilt. Es existieren also K^2 Gleichungen für K Unbekannte. Aufgrund von Symmetrieeigenschaften $C_{k_1,k_2} = C_{k_2,k_1}$ reduziert sich die Anzahl der Gleichungen auf $\frac{1}{2}K(K+1)$. Um die beste Wahl für $\tilde{\sigma}(\tau_1), \ldots, \tilde{\sigma}(\tau_K)$ treffen zu können, nutzt man die Principal Component Analysis (PCA). Bei der PCA fasst man Daten zusammen und erreicht damit eine Verringerung der Dimension, wobei der Informationsverlust möglichst gering gehalten wird. Auf diese Weise wird in einer geringeren Dimension der Großteil der Varianz erklärt.

Man definiert

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{K,1} & \cdots & C_{K,K} \end{pmatrix}.$$

C ist symmetrisch und positiv definit, somit besitzt C die Zerlegung

$$C = \lambda_1 e_1 e_1^{tr} + \lambda_2 e_2 e_2^{tr} + \ldots + \lambda_K e_K e_K^{tr},$$

wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_K \geq 0$ die Eigenwerte von C und $e_1, \ldots, e_K$ die i-ten normierten Einheitsvektoren bezeichnet. Die Eigenwerte stellen nach der Diskriminanzanalyse eine Gewichtung der Varianz dar. Nach den obigen Überlegungen soll die Matrix C die Gestalt

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(\tau_1) \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}(\tau_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(\tau_1), & \ldots, & \tilde{\sigma}(\tau_K) \end{pmatrix}$$

besitzen, denn dann entspricht die theoretische der empirischen Kovarianzstruktur. Die beste Wahl ist

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(\tau_1) \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}(\tau_K) \end{pmatrix} := \sqrt{\lambda_1} e_1.$$

Um eine bessere Annäherung an C zu erhalten, kann man die Forward Rates von mehreren Brownschen Bewegungen antreiben lassen. Jede dieser Brownschen Bewegungen hat ein eigenes $\tilde{\sigma}$, welches als $\sqrt{\lambda_2} e_2, \sqrt{\lambda_3} e_3, \ldots$ gewählt werden kann. Auf diese Weise lässt sich eine Genauigkeit vorgeben. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle d Brownsche Bewegungen, so dass

$$\sum_{j=d+1}^{K} \lambda_j < \epsilon.$$

Somit werden die wichtigsten Eigenwerte verwendet, um eine Approximation an die Kovarianzstruktur zu erhalten.

Bis zu diesem Zeitpunkt wurden ausschließlich historische Daten genutzt. Im letzten Schritt der Kalibrierung wird eine deterministische Funktion $s(t)$ in die Dynamik der Forward Rates eingeführt. Also

$$df(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)dt + s(t)\tilde{\sigma}(T-t)\min(M, f(t,T))d\tilde{W}(t). \qquad (2.36)$$

Zunächst schätzt man also die Werte von $\tilde{\sigma}(T-t)$ anhand von historischen Daten unter der Annahme $s(t) = 1$. Anschließend kann $s(t)$ beliebige Werte annehmen. Typischerweise wird $s(t)$ als stückweise konstant angenommen, die Werte dieser Konstanten sind frei wählbar und werden genutzt, damit das Modell mit den Marktpreisen übereinstimmt. Dabei handelt es sich nicht um einen sonderlich großen Spielraum, aber typischerweise ändert sich die Kovarianzstruktur von Zinsen in kurzen Zeiträumen nicht sehr vehement.[20]

Bemerkung 2.23: Es gilt

$$\sigma^*(t,T) = s(t)\int_t^T \tilde{\sigma}(u-t)\min(M, f(t,T))du$$

und die Drift der Forward Rates in (2.36) kann bestimmt werden. So definiert ist das Modell arbitragefrei, obwohl die Funktion $s(t)$ erst im letzten Moment eingeführt wurde. Eine Rekalibrierung des Modells hat lediglich Auswirkungen auf $s(t)$.

2.9 Forward Rates lognormalverteilt?

Es stellt sich die Frage, ob die Forward Rates lognormalverteilt gewählt werden können. Wäre dies möglich, so erhielte man die Formel von Black und Scholes für Caplets unter einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß und könnte somit Caplets der Marktpraxis entsprechend bewerten. Leider können die Forward Rates nicht lognormalverteilt gewählt werden, denn um ein HJM-Modell mit lognormalverteilten Forward Rates zu konstruieren,

[20]Vergleiche [Sch05].

müsste man die Volatilität folgendermaßen wählen:

$$\sigma(t,T) = \sigma f(t,T), \qquad \sigma > 0 \text{ konstant.}$$

Dann gilt aufgrund der HJM-Driftbedingung

$$df(t,T) = f(t,T)\Big(\sigma^2\Big(\int_t^T f(t,u)du\Big)dt + \sigma d\tilde{W}(t)\Big)$$

mit Lösung

$$f(t,T) = f(0,T)\exp\Big(\sigma^2\int_0^t\int_s^T f(s,u)du\,ds\Big)\exp\Big(-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma\tilde{W}(t)\Big)$$
$$\text{für alle } T \in [0,T^*] \text{ und } t \in [0,T].$$

Leider kann gezeigt werden, dass es keine endliche Lösung für diesen Ausdruck gibt. Es ist sogar so, dass die Forward Rates mit positiver Wahrscheinlichkeit für das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß und somit auch für jedes äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß in endlicher Zeit explodieren. Unendliche Forward Rates haben verschwindende Zero-Coupon-Bond Preise zur Folge, was wiederum Arbitragemöglichkeiten eröffnet.[21] Eine Modellierung lognormalverteilter Forward Rates, um ein arbitagefreies Modell für Bonds zu erhalten, ist im HJM-Modell also nicht möglich. Daher kann auch die Formel von Black und Scholes für Caplets, welche in der Praxis genutzt wird, nicht hergeleitet werden.
Das Problem wird näher anhand einer gewöhnlichen Differentialgleichung betrachtet.[22] Der dt-Term $\sigma^2 f(t,T)\int_t^T f(t,u)du$ lässt sich, falls t und T dicht zusammen liegen, ungefähr abschätzen durch $\sigma^2 f^2(t,T)(T-t)$. Das Quadrat der Forward Rates verursacht das Problem. Betrachtet man die Differentialgleichung

$$f'(t) = \sigma^2 f^2(t)$$

mit positiver Anfangsbedingung $f(0) > 0$, dann löst

$$f(t) = \frac{f(0)}{1-\sigma^2 f(0)t}$$

[21] Siehe [HJM92].
[22] Siehe [Shr04].

die Differentialgleichung, denn

$$f'(t) = \frac{\sigma^2 f^2(0)}{(1 - \sigma^2 f(0) t)^2}.$$

Die Funktion $f(t)$ explodiert also bei $t = \frac{1}{\sigma^2 f(0)}$. Mit der Drift obiger stochastischer Differentialgleichung verhält es sich sogar noch ungünstiger, denn aufgrund der Zufälligkeit explodieren einige Pfade sofort unabhängig von der gegebenen Anfangsbedingung.
Dieses Problem führt dazu, dass der LIBOR betrachtet wird, welcher lognormalverteilt modelliert werden kann.

2.10 Fazit

Vor- und Nachteile des HJM-Modells

Durch das HJM-Modell erreicht man eine wesentliche Verallgemeinerung aller bisherigen arbitragefreien Modelle. Beispielsweise lassen sich die Modelle von Ho-Lee, Vasiček oder Cox-Ingersoll-Ross als Spezialfälle des HJM-Modells auffassen, indem man eine geeignete Volatilitätsstruktur im HJM-Modell wählt. Durch die Konstruktion ist das HJM-Modell automatisch zinsstrukturkonform, denn die am Markt beobachtbare anfängliche Zinskurve $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ ist eine Anfangsbedingung des Modells. Das Modell kann genutzt werden, um Preise von amerikanischen und europäischen Contingent Claims konsistent zu bestimmen. Die wichtigste Erkenntnis aber, welche man durch das HJM-Modell erhält, ist, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Arbitragefreiheit hergeleitet werden kann, welche für jedes arbitragefreie Modell Gültigkeit haben muss, das von einer Brownschen Bewegung angetrieben wird. Die HJM-Driftbedingung ist sehr nützlich, um die Eigenschaften von Modellen, die aus dem HJM-Modell abgeleitet werden können, unter Arbitragefreiheit zu untersuchen.
Ein grundlegendes Problem des HJM-Modells ist in der Schwierigkeit der Wahl einer geeigneten Volatilitätsfunktion zu sehen, um ein konkretes Modell zu erhalten und Derivate bewerten zu können. Ein weiteres Problem stellt die potenziell komplexe Kalibrierung des Modells dar. Meist werden aufwendige Prozeduren nötig sein, um das Modell zu implementieren, da HJM-Modelle in der Regel nicht Markovsch sind. Typischerweise wird zur Implementation die Monte-Carlo-Simulation herangezogen, welche aber einen sehr hohen Rechenaufwand erfordert und sich insbesondere bei der Bewertung von Optionen mit einer

amerikanischen Komponente als schwierig erweisen kann. Außerdem ist es nicht möglich, die augenblicklichen Forward Rates lognormalverteilt zu wählen.

Unterschiede von Short Rate Modellen und HJM-Modellen

Wie bereits erwähnt, können arbitragefreie Short Rate Modelle als Spezialfälle des HJM-Modells aufgefasst werden. In Short Rate Modellen wird nur die Short Rate $(r(t))_{t\in[0,T^*]}$ modelliert, um den gesamten Geldmarkt zu modellieren, was ökonomisch gesehen nicht plausibel erscheint. Ausgehend von der Short Rate sind dann die Bondpreise modellendogen bereits bestimmt. Im Gegensatz hierzu wird in HJM-Modellen die gesamte Zinsstruktur mit Hilfe eines Itô-Prozesses mit einem Mal konstruiert, was wesentlich mehr als nur die Modellierung der Short Rate darstellt, denn in den Forward Rates, welche im HJM-Modell modelliert werden, steckt bereits die Risikopräferenz des Marktes. Aufgrund der Modellierung der Forward Rates durch einen Itô-Prozess besitzt das HJM-Modell wesentlich mehr Freiheitsgrade in der Modellierung als Short Rate Modelle. Die Bondpreise können anschließend aus den Forward Rates gewonnen werden. Es wurde gezeigt, dass HJM-Modelle zinsstrukturkonform sind, also mit den am Markt beobachtbaren Zinsen übereinstimmen, denn die anfängliche Zinsstruktur $(f(0,T))_{T\in[0,T^*]}$ ist eine Anfangsbedingung des Modells. Das Modell muss daher nicht an die Zinsstruktur kalibriert werden. Im Gegensatz hierzu sind Short Rate Modelle in der Regel nicht zinsstrukturkonform. Sie müssen an die vorgegebene Zinskurve kalibriert werden, was sich als kompliziert erweisen kann.

3 Das LIBOR Markt Modell

Im vorhergehenden Kapitel sind Zinsstrukturmodelle mit infinitesimalen Zinsen, wie die augenblickliche Forward Rate im HJM-Modell oder die augenblickliche Short Rate in Short Rate Modellen untersucht worden. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, sind diese Zinssätze gut handhabbar, doch leider sind diese Zinssätze am Markt nicht beobachtbar und eine Kalibrierung des Models an z.B. Cap-Daten ist in diesen Modellen numerisch aufwendig.
Im LIBOR Markt Modell betrachtet man anstelle der infinitesimalen Zinsen den LIBOR, welcher einen diskreten Zinssatz darstellt. Der entscheidende Vorteil ist, dass dieser diskrete Zinssatz tatsächlich am Markt beobachtbar ist. Im LIBOR Markt Modell wird der LIBOR $L(t,T)$ jeweils unter einem eigenen Maß definiert. So werden durch eine geeignete Wahl des Numéraires die LIBOR-Zinssätze unter dem jeweiligen Maß in der Tat lognormalverteilt konstruiert.
Das LIBOR Markt Modell ist ein logisch konsistentes sowie arbitragefreies Modell, in welchem die theoretischen Preise für Caps und Floors, welche zwei der wichtigsten Zinsderivate darstellen, der Formel von Black und somit der gängigen Marktpraxis entsprechen. Das Modell liefert somit die theoretische Grundlage zur Verwendung der Formel von Black und Scholes für Caps und Floors. Die Art und Weise der Konstruktion des LIBOR Markt Modells wird dieses automatisch zinsstrukturkonform modellieren. So ist eine Kalibrierung an Caps bzw. Floors einfach. Das Modell kann anschließend genutzt werden, um exotischere Produkte zu bewerten. Für diese Bewertung werden üblicherweise numerische Methoden, wie z.B. die Monte-Carlo-Methode, benötigt.
Die Herleitung eines solchen Markt Modells gelang Miltersen(1997) und Brace(1997), welche ihre Ergebnisse aus dem HJM-Modell ableiten konnten. In diesem Kapitel wird daher der Zusammenhang zwischen LIBOR Markt Modell und HJM-Modell geklärt werden. Es wird jedoch ein direkter Zugang zum LIBOR Markt Modell verfolgt, welcher keinen Bezug auf die augenblickliche Forward Rate nimmt. Insbesondere liegt dieser Konstruktion kein

HJM-Modell zugrunde.

Zunächst sei eine fest gewählte aufsteigende Folge von Fälligkeitszeitpunkten $T_0, T_1, \ldots, T_N$ mit äquidistanten Abständen

$$\delta = T_i - T_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

angenommen. Den Wert δ nennt man Tenor. Dieser Wert wird in Anwendungen üblicherweise $\delta = 0.5$, also halbjährlich, oder $\delta = 0.25$, also vierteljährlich, gesetzt[1].

Zur Erinnerung wird die Definition der LIBOR-Forward-Rate aus Definition 1.1 nochmals angegeben und die Notation kompakter gemacht durch

$$L(t,T) := L(t,T,T+\delta) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)} - 1\right). \tag{3.1}$$

$L(t, T_i)$ bezeichnet den diskreten Forwardzins über das Intervall $[T_i, T_{i+1}]$ aus der Sicht zum Zeitpunkt t.

3.1 Cap, Floor, Swap und Swaption

In diesem Abschnit werden eine Reihe wichtiger Zinsderivate definiert. Siehe hierzu auch [Bjö04].

Cap und Floor

Eines der am häufigsten gehandelten Zinsderivate ist der Cap bzw. der Floor. Ein Cap ist eine Absicherung gegen steigende Zinsen, da ein Cap Auszahlungen bei hohen Zinsen besitzt. Genauer ist der Cap ein Vertrag, welcher die Differenz zwischen einem variablen Zinssatz und einem festen Zinssatz, der Cap Rate K, in Bezug auf einen Nennwert P zahlt. Somit wird garantiert, dass die Zinsen niemals über einer im Voraus festgelegten

[1]Die Abstände müssen nicht notwendigerweise äquidistant gewählt werden. Dieses wird aber angenommen, um die Notation so einfach wie möglich zu halten.

Cap Rate K liegt. Das Gegenstück zum Cap ist der Floor, welcher garantiert nicht weniger als eine im Vorhinein festgelegte Floor Rate zu erhalten. Betrachtet wird hier der Cap bzw. Floor auf einen Forward-LIBOR.

Ein Cap wird beschrieben durch

(1) eine aufsteigende Folge von Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \ldots < T_N$ mit $T_{i+1} - T_i = \delta$ für $i = 0, \ldots, N-1$,

(2) einer positven Cap Rate K,

(3) einem Nennwert P.

Ein Cap mit Cap Rate K zahlt an den Zeitpunkten T_{i+1} den Betrag

$$\delta P \left(L(T_i, T_i) - K \right)^+ ; \qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

Die Zahlung wird bereits zum Zeitpunkt T_i fixiert, aber erst zum Zeitpunkt T_{i+1} gezahlt. Ein Cap ist ein Portfolio aus Caplets, daher genügt es, um den Wert eines Caps berechnen können, den Wert einer einzelnen Zahlung, also eines Caplets, zu kennen und anschließend diese Werte aufzusummieren.
Ein Caplet ist festgelegt durch

(1) ein reset date T_i,

(2) ein resettlement date T_{i+1},

(3) einer positiven Cap Rate K,

(4) sowie einem Nennwert P.

Ein Caplet besitzt zum Zeitpunkt T_{i+1} die Auszahlung

$$\delta P \left(L(T_i, T_i) - K \right)^+ .$$

Ein (LIBOR-)Caplet ist eine Calloption auf den LIBOR mit Strike K. Ein Cap ist entsprechend ein Portfolio von Calloptionen.

Sei $t \leq T_0$ und bezeichnet man mit $Cpl(t, i)$ den Wert eines Caplets mit reset date T_i und resettlement date T_{i+1} zum Zeitpunkt t, so gilt für den Wert $Cp(t)$ eines Caps zum

Zeitpunkt t

$$Cp(t) = \sum_{i=0}^{N-1} Cpl(t,i).$$

Im Folgenden sei ohne Einschränkung angenommen, dass das Nominal $P = 1$ ist.

Das Gegenstück zum Cap ist der sogenannte Floor. Der Floor stellt eine Versicherung gegen fallende Zinsen dar. Dem Besitzer des Floors wird garantiert, dass die Zinsen auf das Nominal P nicht unter der Floor Rate K liegt. Ein Floor hat demnach Auszahlungen, falls der Zinssatz unterhalb der Floor Rate liegt. Ein (LIBOR-)Floor ist eine Portfolio von Putoption auf den LIBOR und besteht aus einem Portfolio von Floorlets und ist beschrieben durch

(1) eine aufsteigende Folge von Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \ldots < T_N$ mit $T_{i+1} - T_i = \delta$ für $i = 0, \ldots, N-1$,

(2) einer positven Floor Rate K,

(3) sowie einem Nennwert P.

Ein Floor mit Floor Rate K und Nennwert P zahlt an den Zeitpunkten T_{i+1} den Betrag

$$\delta P\,(K - L(T_i, T_i))^+\,; \qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

Ein Floorlet besitzt dann zu den entsprechenden Zeitpunkten obige Auszahlungen und ist analog zum Caplet definiert.

Sei $t \leq T_0$ und sei mit $Fll(t,i)$ der Wert eines Floorlets zum Zeitpunkt t mit reset date T_i und resettlement date T_{i+1} bezeichnet, so ergibt sich der Wert eines Floors $Fl(t)$ zum Zeitpunkt t durch

$$Fl(t) = \sum_{i=0}^{N-1} Fll(t,i).$$

In der Marktpraxis ist es üblich, Caps und Floors mit der Formel von Black zu bewerten.

Satz 3.1: *(Vergleiche [Fil04] S.27.)*
Sei $t \leq T_0$, dann ergibt sich der Wert eines Caplets mit reset date T_i und resettlement date T_{i+1} für $i = 0, \ldots, N-1$ durch

$$Cpl(t,i) = \delta B(t, T_{i+1})\Big(L(t,T_i)\Phi(d_1(t,i)) - K\Phi(d_2(t,i))\Big),$$

wobei

$$d_{1,2}(t,i) := \frac{\log\Big(\frac{L(t,T_i)}{K}\Big) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_i - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_i - t}}.$$

Φ bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und die Funktion $\sigma(t)$ die Capvolatilität, welche für alle Caplets gleich ist. (Häufig ist $\sigma(t)$ konstant.)
Ebenso ergibt sich der Wert des i-ten Floorlets gemäß der Formel von Black durch

$$Fll(t,i) = \delta B(t, T_{i+1})\Big(K\Phi(-d_2(t,i) - L(t,T_i)\Phi(-d_1(t,i)))\Big).$$

Swap

Allgemein ist ein Swap eine Übereinkunft zwischen zwei Vertragspartnern zu zukünftigen Zeitpunkten Zahlungsströme gemäß getroffener Vereinbarungen zu tauschen. Hier wird der am häufigsten genutzte Zinsswaps, ein Plain Vanilla Swap, bei dem ein variabler Zinssatz mit einem fixen Zinssatz getauscht wird, betrachtet. Der variable Zinssatz orientiert sich an dem LIBOR. Auch eine Orientierung am EURIBOR oder anderen Referenzzinsen ist möglich. Durch einen Zinsswap kann also ein variabler Zinssatz gegen einen fixen Zinssatz zur Absicherung von Zinsänderungsrisiken getauscht werden.
In einem Payer Swap wird ein fester Zinssatz gezahlt und man erhält im Gegenzug einen variablen Zinssatz auf den Nennwert zu den festgelegten Zeitpunkten. Ähnliches gilt beim Receiver Swap, bei dem man einen variablen Zinsatz zahlt und im Gegenzug einen festen Zinssatz auf den Nennwert zu den festgelegten Zeitpunkten erhält.

Der hier betrachtete (Forward) Payer Swap ist also festgelegt durch

(1) eine aufsteigende Folge von Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \ldots < T_N$ mit $T_{i+1} - T_i = \delta$ für $i = 0, \ldots, N-1$,

(2) dem variablen Zinssatz, dem LIBOR $L(t, T_i)$,

(3) einer fixierten Zinsrate K,

(4) und dem Nennwert P.

Der variable Zinssatz $L(T_i, T_i)$, welchen man in T_{i+1} erhält, wird bereits zum Zeitpunkt T_i festgelegt. Zu den Zeitpunkten T_{i+1} für $i = 0, \dots, N-1$ ergeben sich bei einem Payer Swap die Zahlungen

$$\delta PL(T_i, T_i) - \delta PK.$$

Bei einem Receiver Swap ergeben sich die Zahlungen mit umgekehrten Vorzeichen.
Die Zahl n wird als Länge eines Swaps bezeichnet. Die Zeitpunkte $T_0, \dots, T_{N-1}$ werden als reset dates sowie die Zeitpunkte $T_1, \dots, T_N$ als resettlement dates bezeichnet. Ohne Einschränkung sei angenommen, dass der Nennwert $P = 1$ ist.

Betrachtet wird nun der Zusammenhang zwischen Caps, Floors und Swaps.

Lemma 3.2: *(Cap-Floor-Swap-Parität)*
Für einen Cap, Floor und Payer Swap mit identischer Tenorstruktur und derselben Zinsrate K gilt

$$Cp(t) - Fl(t) = \Pi_p(t),$$

wobei $\Pi_p(t)$ den Wert eines Payer Swap zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Beweis: Entsprechen die Auszahlungen des Caps und des Floors den Auszahlungen des Payer Swaps zu jedem Zeitpunkt T_{i+1} für $i = 0, \dots, N-1$, so entsprechen sich nach dem Replikationsprinzip auch ihre Preise. Es gilt zum Zeitpunkt T_{i+1} für $i = 0, \dots, N-1$ für die Auszahlungen auf der linken Seite

$$\begin{aligned}
&\delta(L(T_i, T_i) - K)^+ - \delta(K - L(T_i, T_i))^+ \\
&= \delta\Big(L(T_i, T_i)\mathbf{1}_{\{L(T_i,T_i)>K\}} - K\mathbf{1}_{\{L(T_i,T_i)>K\}} - K\mathbf{1}_{\{L(T_i,T_i)<K\}} + L(T_i, T_i)\mathbf{1}_{\{L(T_i,T_i)>K\}}\Big) \\
&= \delta\Big(L(T_i, T_i) - K\Big),
\end{aligned}$$

was der Auszahlung des Payer Swaps auf der rechten Seite entspricht. $\square$

Es folgt unmittelbar, da ein Receiver Swap Auszahlungen eines Payer Swap mit umgekehrten Vorzeichen hat, dass

$$Fl(t) - Cp(t) = \Pi_r(t),$$

wobei $\Pi_r(t)$ den Wert eines Receiver Swaps zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Swaption

Eine (europäische) Payer (Receiver) Swaption mit Strike κ ist eine Option, durch welche der Besitzer das Recht erwirbt, in einen Payer (Receiver) Swap mit fixierter Zinsrate K zu einem festen Zeitpunkt t, der Swaption Fälligkeit, welche meist mit dem ersten reset date des Swaps zusammen fällt, einzutreten.

3.2 Zusammenhang zwischen dem HJM-Modell und dem LIBOR Markt Modell

Betrachtet wird nun der Zusammenhang zwischen dem HJM-Modell und dem LIBOR Markt Modell. Es stellt sich die Frage, ob aus dem HJM-Modell ein LIBOR Modell hergeleitet werden kann, so dass der LIBOR positiv ist und Caplets mit der Formel von Black bewertet werden können. Diese Frage wird im folgenden Abschnitt positiv beantwortet werden. Siehe hierzu auch [MR98], S. 348 und [Fil09], S.197. Dennoch wird, nachdem der Zusammenhang des HJM-Modells mit dem LIBOR Markt Modell geklärt wurde, ein direkter Zugang zum LIBOR Markt Modell gewählt, welcher keinen Bezug auf die augenblickliche Forward Rate nimmt.

Aus Lemma 2.14 ist bekannt, dass $\left(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\right)_{t\in[0,T_i]}$ ein $Q^{T_{i+1}}$-Martingal ist. Mit der Itô-Formel und der partiellen Integration folgt die Darstellung[2]

$$d\Big(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\Big) = \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})} \underbrace{\int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma(t,u)du}_{:=\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t)} d\tilde{W}^{T_{i+1}}(t).$$

[2]Eine ausführliche Herleitung der Darstellung befindet sich im Anhang.

So erhält man die Dynamik von $L(t, T_i)$ durch

$$\begin{aligned} d(L(t,T_i)) &\overset{(3.1)}{=} d\Big(\frac{1}{\delta}\Big(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})} - 1\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{\delta}\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t) d\tilde{W}^{T_{i+1}}(t) \\ &= \frac{1}{\delta}\Big(\delta L(t,T_i) + 1\Big)\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t) d\tilde{W}^{T_{i+1}}(t). \end{aligned}$$

Angenommen, es existiert eine deterministische $\mathbb{R}^d$-wertige Funktion $\lambda : [0, T^*] \times [0, T^*] \to \mathbb{R}$ mit

$$\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t) = \frac{\delta L(t,T_i)}{\delta L(t,T_i) + 1}\lambda(t,T_i), \tag{3.2}$$

so ergibt sich

$$dL(t,T_i) = L(t,T_i)\lambda(t,T) d\tilde{W}^{T_{i+1}}(t),$$

was äquivalent ist zu

$$L(t,T_i) = L(s,T_i)\exp\Big(\underbrace{\int_s^t \lambda(u,T_i) d\tilde{W}^{T_{i+1}}(u)}_{\text{normalverteilt}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_s^t \|\lambda(u,T_i)\|^2 du}_{\text{deterministisch}}\Big) \tag{3.3}$$

für $s \leq t \leq T_i$. $L(T_i, T_i)$ -gegeben $\mathcal{F}_t$- ist also lognormalverteilt unter dem T_{i+1}-Forward-Maß $Q^{T_{i+1}}$ für alle $i = 0, \ldots, N-1$.

Der faire Wert $Cpl(t, i)$ eines Caplets mit reset date T_i und resettlement date T_{i+1} sowie Strike K zum Zeitpunkt t ergibt sich durch

$$\begin{aligned} Cpl(t,i) &\overset{(2.24)}{=} \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^{T_i} r(u)du} \left(\delta(L(T_i,T_i) - K)\right)^+ | \mathcal{F}_t\right] \\ &\overset{(2.15)}{=} B(t,T_{i+1})\mathbb{E}_{Q^{T_{i+1}}}\left[\left(\delta(L(T_i,T_i) - K)\right)^+ | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \delta B(t,T_{i+1})\left(L(t,T_i)\Phi(d_1(t,T_i)) - K\Phi(d_2(t,T))\right), \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und

$$d_{1/2}(t,T_i) = \frac{\log(\frac{L(t,T_i)}{K}) \pm \frac{1}{2}\int_t^{T_i} \|\lambda(s,T_i)\|^2 ds}{\sqrt{\int_t^{T_i} \|\lambda(s,T_i)\|^2 ds}}.$$

Die letzte Gleichheit wird in dem Abschnitt über die Formel von Black für Caplets ausführlich bewiesen. Mit

$$\sigma(t)^2 := \frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} \|\lambda(s, T_i)\|^2 \, ds$$

erhält man aus Satz 3.1 exakt die Formel von Black für Caplets.
Jedes HJM-Modell, welches also Gleichung (3.2) erfüllt, generiert der Marktpraxis entsprechend Preise für Caplets in der Form von Black. Die Konstruktion eines solchen HJM-Modells ist nicht einfach. Es wird auf [BGM97] verwiesen und das Vorgehen skizziert.[3]

Einerseits gilt

$$\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t) = \int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma(t,u)du = \sigma^*(t,T_{i+1}) - \sigma^*(t,T_i),$$

andererseits soll $\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t)$ Gleichung (3.2) erfüllen. Also

$$\begin{aligned}
\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t) &\overset{(3.2)}{=} \frac{\delta L(t,T_i)}{\delta L(t,T_i)+1}\lambda(t,T_i) \\
&\overset{(3.1)}{=} \left(1 - \frac{B(t,T_{i+1})}{B(t,T_i)}\right)\lambda(t,T_i) \\
&\overset{(1.2)}{=} \left(1 - \frac{\exp(-\int_t^{T_{i+1}} f(t,u)du)}{\exp(-\int_t^{T_i} f(t,u)du)}\right)\lambda(t,T_i) \\
&= \left(1 - e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,u)du}\right)\lambda(t,T_i).
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen erhält man die Beziehung

$$\sigma^*(t,T_{i+1}) = \sigma^*(t,T_i) + \left(1 - e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,u)du}\right)\lambda(t,T_i)$$

und Differenzieren nach T liefert

$$\begin{aligned}
\sigma(t,T_{i+1}) = \sigma(t,T_i) &+ (f(t,T_{i+1}) - f(t,T_i))e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,u)du}\lambda(t,T_i) \\
&+ (1 - e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}} f(t,u)du})\partial_T\lambda(t,T_i).
\end{aligned}$$

[3] Siehe [Fil09],S.197.

Diese rekurrente Beziehung kann mittels Vorwärtsinduktion gelöst werden, sobald $\sigma(t,\cdot)$ auf dem Intervall $[0,\delta)$ festgelegt wurde.[4] Die auf diese Weise definierten Volatilitäten erfüllen also Gleichung (3.2) und das so definierte HJM-Modell generiert demnach Preise für Caplets in der Form von Black. In [BGM97] wird gezeigt, dass die zugehörige HJM-Gleichung eine eindeutige und wohldefinierte Lösung besitzt.
Im Folgenden wird ein direkter Zugang zum LIBOR Markt Modell verfolgt, welcher keinen Bezug auf die augenblickliche Forward Rate nimmt.

3.3 Das diskrete Tenormodell

In diesem Abschnitt, welcher sich an [Fil09], [MR98] und [Bjö04] orientiert, wird ein LIBOR Markt Modell konstruiert, welches sicherstellt, dass die LIBOR Rate stets positiv und lognormalverteilt ist. Die grundlegende Idee besteht darin, die LIBOR Rate $L(t,T_i)$ für jedes $i \in 0,\cdots,N-1$ jeweils unter einem eigenen Wahrscheinlichkeitsmaß $Q^{T_{i+1}}$ lognormal zu definieren.
Es wird betont, dass hier kein HJM-Modell zugrundel iegt. Insbesondere sind also noch keine Preise für die Bonds bekannt. Die Bondpreise können aber, nachdem die LIBOR Rates modelliert worden sind, zu den diskreten Zeitpunkten hergeleitet werden.

Angenommen sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T_N]},Q^{T_N})$ mit einer d-dimensionalen Brownschen Bewegung W^{T_N}, der die usual conditions erfüllt.[5]
Da ein Modell für die LIBOR Rates $L(t,T_i)$ für $i=0,\ldots,N-1$ konstruiert werden soll, sei angenommen, dass für $i=0,\ldots,N-1$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige, deterministische und beschränkte Funktion $\lambda(t,T_i), t\in[0,T_i]$, existiert, welche die Volatilität von $L(t,T_i)$ darstellt. Die Funktionen $\lambda(t,T_i), t\in[0,T_i]$ sind hierbei frei wählbar. Außerdem existiere eine anfängliche positive, nichtfallende, diskrete Zinskurve

$$B(0,T_i), \quad i=0,\ldots,N.$$

[4] Häufig wird $\sigma(t,T)=0$ für $T\in[0,\delta)$ gewählt.
[5] Die usual conditions sind erfüllt, falls $(F_t)_{t\geq 0}$ vollständig und rechtsseitig stetig ist, d.h. $\mathcal{F}_0$ enthält alle Q^{T_N}-Nullmengen und es gilt $\mathcal{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$ für alle $t\geq 0$.

Man erhält folglich nichtnegative anfängliche LIBOR Rates durch

$$L(0,T_i) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{B(0,T_i)}{B(0,T_{i+1})} - 1\Big), \quad i = 0,\dots,N-1. \tag{3.4}$$

Im ersten Schritt wird gefordert, dass

$$dL(t,T_{N-1}) = L(t,T_{N-1})\lambda(t,T_{N-1})dW^{T_N}(t), \quad t \in [0,T_{N-1}].$$

Mit (3.4) folgt die äquivalente Darstellung

$$L(t,T_{N-1}) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{B(0,T_{N-1})}{B(0,T_N)} - 1\Big)\exp\Big(\int_0^t \lambda(u,T_{N-1})dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda(u,T_{N-1})\|^2\,du\Big)$$

und $L(t,T_{N-1})$ ist unter Q^{T_N} lognormalverteilt, da $\lambda(t,T_{N-1})$ deterministisch gewählt wurde. Motiviert durch die Herleitung des Modells aus dem HJM-Modell, sei der $\mathbb{R}^d$-wertige, beschränkte und progressive Prozess

$$\sigma_{T_{N-1},T_N}(t) = \frac{\delta L(t,T_{N-1})}{\delta L(t,T_{N-1})+1}\lambda(t,T_{N-1}), \quad t \in [0,T_{N-1}] \tag{3.5}$$

definiert. Da σ_{T_{N-1},T_N} beschränkt ist, ist die Novikov-Bedingung erfüllt und

$$\frac{dQ^{T_{N-1}}}{dQ^{T_N}} = \exp\Big(\int_0^{T_{N-1}} \sigma_{T_{N-1},T_N}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^{T_{N-1}} \big\|\sigma_{T_{N-1},T_N}(u)\big\|^2\,du\Big)$$

definiert ein zu Q^{T_N} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q^{T_{N-1}}$ auf $\mathcal{F}_{T_{N-1}}$. Der Satz von Girsanov liefert, dass

$$W^{T_{N-1}}(t) = W^{T_N}(t) - \int_0^t \sigma_{T_{N-1},T_N}(u)^T du, \quad t \in [0,T_{N-1}]$$

eine Brownsche Bewegung unter $Q^{T_{N-1}}$ ist.
Nach der vollständigen Konstruktion der LIBOR Rates und dem Einführen des Bondmarkts wird gezeigt, dass gerade diese Girsanov-Transformation die geeignete ist, um zu einem Forwardmartingalmaß zu wechseln. [6]

[6] Siehe Bemerkung (3.5).

Im nächsten Schritt wird gefordert, dass

$$dL(t, T_{N-2}) = L(t, T_{N-2})\lambda(t, T_{N-2})dW^{T_{N-1}}(t), \quad t \in [0, T_{N-2}],$$

mit Lösung

$$L(t, T_{N-2}) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{B(0, T_{N-2})}{B(0, T_{N-1})} - 1\Big) \exp\Big(\int_0^t \lambda(u, T_{N-2})dW^{T_{N-1}}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda(u, T_{N-2})\|^2 \, du\Big)$$

ist. Es kann der $\mathbb{R}^d$-wertige, beschränkte und progressive Prozess

$$\sigma_{T_{N-2},T_{N-1}}(t) = \frac{\delta L(t, T_{N-2})}{\delta L(t, T_{N-2}) + 1}\lambda(t, T_{N-2}), \quad t \in [0, T_{N-2}],$$

definiert werden. Da $\sigma_{T_{N-2},T_{N-1}}$ beschränkt ist und somit die Novikov-Bedingung erfüllt ist, wird durch

$$\frac{dQ^{T_{N-2}}}{dQ^{T_{N-1}}} = \exp\Big(\int_0^{T_{N-2}} \sigma_{T_{N-2},T_{N-1}}(u)dW^{T_{N-1}}(u) - \frac{1}{2}\int_0^{T_{N-2}} \big\|\sigma_{T_{N-2},T_{N-1}}(u)\big\|^2 \, du\Big)$$

ein zu $Q^{T_{N-1}}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_{T_{N-2}}$ definiert. Der Satz von Girsanov liefert, dass

$$W^{T_{N-2}}(t) = W^{T_{N-1}}(t) - \int_0^t \sigma_{T_{N-2},T_{N-1}}{}^T(u), \quad t \in [0, T_{N-2}],$$

eine Brownsche Bewegung unter $Q^{T_{N-2}}$ ist.

Wiederholt man diese Schritte, so erhält man eine Familie lognormalverteilter Martingale $(L(t, T_i))_{t\in[0,T_i]}$ jeweils unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $Q^{T_{i+1}}$, welches sich später als das T_{i+1}-Forward-Maß für $i = 0, \dots, N-1$ herausstellt. Unter einem Maß ist eine solche Darstellung lognormalverteilter LIBOR-Prozesse nicht möglich.[7]

[7] Siehe [Reb98].

3.3.1 Das Terminal Measure

Jede LIBOR Rate ist bisher unter einem eigenen Maß definiert. Es ist aber wichtig, die Dynamik von $L(t, T_i)$ unter einem gemeinsamen Maß zu bestimmen. Insbesondere wird das sogenannten Terminal Measure Q^{T_N}, das Forward-Maß am Handelshorizont T_N, eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 3.3: *(Vergleiche [Fil09], Lemma 11.1.)*
Sei $0 \leq i, j \leq N-1$. *Dann gilt für die Dynamik von* $L(t, T_i)$ *unter* $Q^{T_{j+1}}$

$$\frac{dL(t,T_i)}{L(t,T_i)} = \begin{cases} -\lambda(t,T_i) \sum_{k=i+1}^{j} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(t)^T dt + \lambda(t,T_i) dW^{T_{j+1}}(t), & i < j \\ \lambda(t,T_i) dW^{T_{j+1}}(t), & i = j \\ \lambda(t,T_i) \sum_{k=j+1}^{i} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(t)^T dt + \lambda(t,T_i) dW^{T_{j+1}}(t), & i > j \end{cases}$$

für $t \in [0, T_i \wedge T_{j+1}]$. *Für* $j = N-1$ *erhält man die Dynamik von* $L(t, T_i)$ *unter dem Terminal Measure* Q^{T_N}.

Beweis: Aus obiger Konstruktion der LIBOR Rates erhält man

$$dL(t,T_i) = L(t,T_i)\lambda(t,T_i) dW^{T_{i+1}}(t). \tag{3.6}$$

<u>Fall 1:</u> $i < j$
Aufgrund des Satzes von Girsanov weiß man, dass

$$dW^{T_i}(t) = dW^{T_{i+1}}(t) - \sigma_{T_i,T_{i+1}}(t)^T dt, \quad t \in [0, T_i],$$

gilt und $W^{T_i}(t)$ eine Brownsche Bewegung unter Q^{T_i} ist. Durch sukzessives Einsetzen erhält man die Beziehung

$$dW^{T_{i+1}}(t) = dW^{T_{j+1}}(t) - \sum_{l=i+1}^{j} \sigma_{T_l,T_{l+1}}(t)^T dt, \quad t \in [0, T_{i+1}].$$

Durch Einsetzen in (3.6) folgt dann die Behauptung

$$\frac{dL(t,T_i)}{L(t,T_i)} = -\lambda(t,T_i) \sum_{l=i+1}^{j} \sigma_{T_l,T_{l+1}}(t)^T dt + \lambda(t,T_i) dW^{T_{j+1}}(t).$$

Fall 2: $i = j$
Die Behauptung entspricht (3.6).

Fall 3: $i > j$

Mit der Beziehung

$$dW^{T_{i+1}}(t) = dW^{T_{j+1}}(t) + \sum_{l=i+1}^{j} \sigma_{T_l,T_{l+1}}(t)^T dt$$

folgt die Behauptung analog zum ersten Fall. $\square$

Zu beachten ist, dass für $i \neq N-1$ die LIBOR Rate $L(t,T_i)$ unter dem Terminal Measure Q^{T_N} kein Martingal ist, da die Drift nicht verschwindet.

3.3.2 Der Bondmarkt

Mit Blick auf die Definition des LIBOR (3.1) ergibt sich der Forwardpreis des T_{i-1}-Bonds durch

$$\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} = \delta L(t,T_{i-1}) + 1. \tag{3.7}$$

Die Dynamik des Forwardpreises lässt sich somit folgendermaßen berechnen.

$$\begin{aligned}
d\Big(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)}\Big) &\overset{(3.7)}{=} \delta dL(t,T_{i-1}) \\
&= \delta L(t,T_{i-1})\lambda(t,T_{i-1}) dW^{T_i}(t) \\
&= \sigma_{T_{i-1},T_i}(t)\Big(\delta L(t,T_{i-1}) + 1\Big) dW^{T_i}(t) \\
&\overset{(3.7)}{=} \frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} \sigma_{T_{i-1},T_i}(t) dW^{T_i}(t)
\end{aligned}$$

und $\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)}\right)_{t\in[0,T_{i-1}]}$ ist somit ein Q^{T_i}-Martingal mit eindeutiger Lösung

$$\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} = \frac{B(0,T_{i-1})}{B(0,T_i)} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_{i-1},T_i}(u) dW^{T_i}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_{i-1},T_i}(u)\right\|^2 du\Big). \tag{3.8}$$

Für $i < j$ gilt

$$\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_j)} = \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})} \cdots \frac{B(t,T_{j-1})}{B(t,T_j)}, \quad t \in [0,T_i]. \tag{3.9}$$

Man erhält für den Forwardpreis folgendes Lemma, welches zeigt, dass die für die Modellierung der Dynamik der LIBOR Rates konstruierten Maße in der Tat die Forwardmartingalmaße sind.

Lemma 3.4: *(Vergleiche [Fil09], Lemma 11.2.)*
Sei $1 \leq i < j \leq N$, dann gilt

$$\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_j)} = \frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_i,T_j}(u) dW^{T_j}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_i,T_j}(u)\right\|^2 du\Big), \quad t \in [0,T_i], \tag{3.10}$$

wobei $\sigma_{T_i,T_j} := \sum_{k=i}^{j-1} \sigma_{T_k,T_{k+1}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, beschränkter und progressiver Prozess ist. Insbesondere ist der Forwardpreis $\left(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_j)}\right)_{t\in[0,T_i]}$ ein positives Q^{T_j}-Martingal und somit ist Q^{T_j} ein Forwardmartingalmaß.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_j)} &\overset{(3.9)}{=} \prod_{k=i}^{j-1} \frac{B(t,T_k)}{B(t,T_{k+1})} \\
&\overset{(3.8)}{=} \frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)} \prod_{k=i}^{j-1} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_k,T_{k+1}}(u) dW^{T_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_k,T_{k+1}}(u)\right\|^2 du\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Lemma 3.3}}{=} \frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)} \exp\Big(\int_0^t \sum_{k=i}^{j-1} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(u)\Big(dW^{T_j}(u) - \sum_{l=k+1}^{j-1} \sigma_{T_l,T_{l+1}}(u)^T du\Big) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k=i}^{j-1} \left\|\sigma_{T_k,T_{k+1}}(u)\right\|^2 du\Big) \\
&= \frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)} \exp\Big(\int_0^t \sum_{k=i}^{j-1} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(u) dW^{T_j}(u) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(\int_0^t \sum_{k=i}^{j-1} \left\|\sigma_{T_k,T_{k+1}}(u)\right\|^2 du + 2\sigma_{T_k,T_{k+1}}(u) \sum_{l=k+1}^{j-1} \sigma_{T_l,T_{l+1}}(u)^T du\Big)\Big) \\
&= \frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)} \exp\Big(\int_0^t \sum_{k=i}^{j-1} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(u) dW^{T_j}(u) - \frac{1}{2}\Big(\int_0^t \left\|\sum_{k=i}^{j-1} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(u)\right\|^2\Big) \\
&= \frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)} \exp\Big(\int_0^t \sum_{k=i}^{j-1} \sigma_{T_i,T_j}(u) dW^{T_j}(u) - \frac{1}{2}\Big(\int_0^t \left\|\sigma_{T_i,T_j}(u)\right\|^2\Big)
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.5: An dieser Stelle ist es möglich, den Dichtequotientenprozess, welcher die Wahrscheinlichkeitsmaße definiert, die zur Konstruktion der LIBOR Rates genutzt wurden, näher zu bestimmen. Es gilt

$$
d\Big(\frac{B(t,T_{N-1})}{B(t,T_N)}\Big) = \frac{B(t,T_{N-1})}{B(t,T_N)} \sigma_{T_{N-1},T_N}(t) dW^{T_N}(t)
$$

mit Lösung

$$
\frac{B(t,T_{N-1})}{B(t,T_N)} = \frac{B(0,T_{N-1})}{B(0,T_N)} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_{N-1},T_N}(u) dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_{N-1},T_N}(u)\right\|^2 du\Big).
$$

Dann gilt für den Dichtequotientenprozess

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ^{T_{N-1}}}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} &= \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_{N-1},T_N}(u) dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_{N-1},T_N}(u)\right\|^2 du\Big) \\
&= \frac{B(t,T_{N-1})}{B(t,T_N)} \frac{B(0,T_N)}{B(0,T_{N-1})} \\
&= \Big(1 + \delta L(t,T_{N-1})\Big) \frac{B(0,T_N)}{B(0,T_{N-1})}.
\end{aligned}
$$

Somit zeigt insbesondere die zweite Gleichheit. dass die geeignete Girsanovtransformation gewählt worden ist, um zu einem Forwardmartingalmaß zu wechseln. Für die übrigen Maßwechsel folgt dies analog.

Da Q^{T_j} ein Martingalmaß mit dem T_j-Bond als Numéraire ist, ist das Modell arbitragefrei für die Bonds mit Fälligkeiten $T_0, \dots, T_N$. Mit Blick auf die Bewertungsformel unter dem T_j-Forward-Maß (2.15) ist für jeden T_j-Claim X mit $\mathbb{E}_{Q_{T_j}}[|X|] < \infty$ der faire Preis $\pi(t)$ zum Zeitpunkt $t \leq T_j$ gegeben durch die Formel

$$\pi(t) = B(t, T_j)\mathbb{E}_{Q^{T_j}}[X|\mathcal{F}_t]. \tag{3.11}$$

Zu den Zeitpunkten T_i lässt sich der Bondpreis mit Fälligkeit T_j für $0 \leq i < j \leq N$ durch den LIBOR ausdrücken durch

$$B(T_i, T_j) = \prod_{k=i+1}^{j} \frac{B(T_i, T_k)}{B(T_i, T_{k-1})} \overset{(3.1)}{=} \prod_{k=i+1}^{j} \frac{1}{\delta L(T_i, T_{k-1}) + 1}. \tag{3.12}$$

Bemerkung 3.6: Es ist nicht möglich, die stetigen Bondpreise $B(t, T_i)_{t\in[0,T_i]}$ im diskreten Tenormodell eindeutig zu bestimmen. Um diese stetigen Bondpreise herleiten zu können, müssen die LIBOR Rates aller Fälligkeiten $T \in [0, T_{N-1}]$ bekannt sein.[8] Allerdings werden die stetigen Bondpreise im diskreten Tenormodell zur Bewertung zum Beispiel von Caplets nicht benötigt. Die Kenntnis der Bondpreise zu den diskreten Zeitpunkten sind dafür ausreichend.[9]

[8] Siehe [Fil09], Seite 203.
[9] Siehe Abschnitt 3.3.4, Black-Scholes Formel für Caplets.

3.3.3 Das Geldmarktkonto

Sind die LIBOR Rates $L(T_{i-1}, T_{i-1})$ der Periode $[T_{i-1}, T_i]$ für $i = 1, \dots, N$ bekannt, so kann das diskrete Geldmarktkonto definiert werden, indem man stets in den Zero-Coupon-Bond mit der kürzesten verfügbaren Laufzeit investiert. Man definiert

$$\beta(0) = 1,$$
$$\beta(T_j) = (1 + \delta L(T_{j-1}, T_{j-1}))\beta(T_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N,$$

also

$$\beta(T_i) = \beta(T_j) \prod_{k=j}^{i-1} \frac{1}{B(T_k, T_{k+1})}, \qquad j < i \leq N. \tag{3.13}$$

$\beta(T_i)$ stellt den Wert einer zum Zeitpunkt $t = 0$ investierten Geldeinheit zum Zeitpunkt T_i dar. Der Prozess β ist nach Konstruktion monoton wachsend und bezüglich der diskreten Filtration $(\mathcal{F}_{T_i})$ previsibel. $\beta(T_i)$ ist also $(\mathcal{F}_{T_{i-1}})$-messbar für $i = 1, \dots, N$.

Sei $\eta : [0, T_{n-1}] \mapsto \mathbb{N}$, $t \mapsto \eta(t)$ eine Funktion, welche so definiert ist, dass

$$T_{\eta(t)-1} \leq t < T_{\eta(t)}, \quad t \geq 0.$$

Die Funktion η sei also so gewählt, dass $T_{\eta(t)}$ den nächstmöglichen und $T_{\eta(t)-1}$ den letztmöglichen Handelszeitpunkt zum Zeitpunkt t in dem diskreten Modell angibt.

Das Ergebnis des nächsten Lemmas ermöglicht es, ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß zu definieren, welches das Geldmarktkonto als Numéraire besitzt. Die abdiskontierten Bondpreise bilden dann bezüglich der diskreten Filtration Martingale.

Lemma 3.7: *Sei $t \in [0, T_{N-1}]$, dann gilt*

$$\mathbb{E}_{Q^{T_N}}[\beta(T_N)B(0, T_N)|\mathcal{F}_t] = \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)\right\|^2 du\Big),$$

wobei der $\mathbb{R}^d$-wertige, beschränkte und progressive Prozess durch

$\sigma_{T_0,T_{N-1}}(t) = \sum_{k=\eta(t)}^{N-1} \sigma_{T_k,T_{k+1}}(t)$ definiert ist.

Insbesondere erhält man

$$\mathbb{E}_{Q^{T_N}}\Big[\beta(T_N)|\mathcal{F}_{T_j}\Big] = \frac{\beta(T_j)}{B(T_j,T_N)}.$$

Beweis: Berechnet sei zunächst die Gleichheit

$$\beta(T_N) \overset{(3.13)}{=} \underbrace{\beta(0)}_{=1} \prod_{k=0}^{\eta(t)-1} \frac{1}{B(T_k,T_{k+1})} \prod_{k=\eta(t)}^{N-1} \frac{1}{B(T_k,T_{k+1})} \quad = \quad \frac{1}{B(0,T_{\eta(t)})} \frac{1}{B(T_{\eta(t)},T_N)}. \tag{3.14}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^{T_N}}[\beta(T_N)B(0,T_N)|\mathcal{F}_t] &\overset{(3.14)}{=} \mathbb{E}_{Q^{T_N}}\Big[\frac{\overbrace{B(T_{\eta(t)},T_{\eta(t)})}^{=1} B(0,T_N)}{B(0,T_{\eta(t)})B(T_{\eta(t)},T_N)}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \frac{B(0,T_N)}{B(0,T_{\eta(t)})}\mathbb{E}_{Q^{T_N}}\Big[\frac{B(T_{\eta(t)},T_{\eta(t)})}{B(T_{\eta(t)},T_N)}|\mathcal{F}_t\Big] \\
&\overset{Q^{T_N}\text{-Mart.}}{=} \frac{B(0,T_N)}{B(0,T_{\eta(t)})}\frac{B(t,T_{\eta(t)})}{B(t,T_N)} \\
&\overset{(3.10)}{=} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_{\eta(t)},T_{N-1}}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Big\|\sigma_{T_{\eta(t)},T_{N-1}}(u)\Big\|^2 du\Big) \\
&= \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \big\|\sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)\big\|^2 du\Big).
\end{aligned}$$

Aufgrund der $\mathcal{F}_{T_j}$-Messbarkeit von $\beta(T_j)$ und $B(T_j,T_N)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^{T_N}}\Big[\beta(T_N)|\mathcal{F}_{T_j}\Big] &= \beta(T_j)\mathbb{E}_{Q^{T_N}}\Big[\underbrace{\prod_{k=j}^{N-1}\frac{1}{B(T_k,T_{k+1})}}_{\frac{1}{B(T_j,T_N)}}|\mathcal{F}_{T_j}\Big] \\
&= \frac{\beta(T_j)}{B(T_j,T_N)}.
\end{aligned}$$

□

Definition des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes

Mit Hilfe von Lemma 3.7 definiert man auf $\mathcal{F}_{T_N}$ ein zu Q^T äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$\frac{dQ}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_{T_N}} = \beta(T_N)B(0,T_N).$$

Sowie

$$\frac{dQ}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)\right\|^2\Big), \quad t \in [0,T_{N-1}]$$

und insbesondere erhält man für $t = T_j$

$$\frac{dQ}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_{T_j}} = \frac{\beta(T_j)B(0,T_N)}{B(T_j,T_N)} \tag{3.15}$$

für $j = 0, \dots, N-1$.

Der Satz von Girsanov liefert, dass

$$W(t) = W^{T_N}(t) - \int_0^t \sigma_{T_0,T_{N-1}}(u)^T du, \qquad t \in [0,T_{N-1}], \tag{3.16}$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich Q ist. Die Dynamik der LIBOR Rates kann unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q berechnet werden.

Lemma 3.8: *Sei $0 \le i \le N-1$. Dann gilt für die Dynamik von $L(t,T_i)$ unter Q*

$$dL(t,T_i) = L(t,T_i)\lambda(t,T_i)\Big(\sum_{k=\eta(t)}^{i} \sigma_{T_k,T_{k+1}}dt + dW(t)\Big), \quad t \in [0,T_i].$$

Beweis: Da $t \in [0,T_i]$ ist, gilt aufgrund der Definition der Funktion η, dass $i+1 \ge \eta(t)$ ist. Mit Lemma 3.3 erhält man

$$
\begin{aligned}
dL(t,T_i) &\overset{\text{Lemma 3.3}}{=} L(t,T_i)\lambda(t,T_i)\Big(-\sum_{k=i+1}^{N-1}\sigma_{T_k,T_{k+1}}(t)^T dt + dW^{T_N}(t)\Big)\\
&\overset{(3.16)}{=} L(t,T_i)\lambda(t,T_i)\Big(-\sum_{k=i+1}^{N-1}\sigma_{T_k,T_{k+1}}(t)^T dt + \sum_{k=\eta(t)}^{N-1}\sigma_{T_k,T_{k+1}}(t)^T dt + dW(t)\Big)\\
&= L(t,T_i)\lambda(t,T_i)\Big(\sum_{k=\eta(t)}^{i}\sigma_{T_k,T_{k+1}} dt + dW(t)\Big).
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.9: *Sei $i \leq j$. Der Preis $\pi(T_i)$ eines T_j-Claims zum Zeitpunkt T_i erfüllt*

$$
\pi(T_i) = \beta(T_i)\mathbb{E}_Q\Big[\frac{X}{\beta(T_j)}\Big|\mathcal{F}_{T_i}\Big]. \tag{3.17}
$$

Beweis: Es gilt nach Gleichung (3.11)

$$
\begin{aligned}
\pi(T_i) &= B(T_i,T_j)\mathbb{E}_{Q_{T_j}}\Big[X|\mathcal{F}_{T_i}\Big]\\
&\overset{\text{Bayes}}{=} B(T_i,T_j)\frac{\mathbb{E}\Big[X\frac{B(T_j,T_N)}{B(0,T_N)\beta(T_j)}\Big|\mathcal{F}_{T_i}\Big]}{\frac{B(T_i,T_N)}{B(0,T_N)\beta(T_i)}}\\
&\overset{(3.12)}{=} B(T_i,T_j)\beta(T_i)\mathbb{E}_Q\Big[\underbrace{\frac{B(T_j,T_N)}{B(T_i,T_N)}}_{\frac{1}{B(T_i,T_j)}}\frac{X}{\beta(T_j)}\Big|\mathcal{F}_{T_i}\Big]\\
&= \beta(T_i)\mathbb{E}_Q\Big[\frac{X}{\beta(T_j)}\Big|\mathcal{F}_{T_i}\Big].
\end{aligned}
$$

□

Definitionsgemäß bezeichnet $B(T_i,T_j)$ den Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T_j zum Zeitpunkt T_i, also den fairen Wert in T_i einer sicheren Auszahlung einer Geldeinheit zum Zeitpunkt T_j. Setzt man $X = 1$, so gilt $\pi(T_i) = B(T_i,T_j)$ und somit

$$\frac{B(T_i,T_j)}{\beta(T_i)} = \mathbb{E}_Q\Big[\frac{1}{\beta(T_j)}\Big|\mathcal{F}_{T_i}\Big],$$

wobei die rechte Seite wegen der „Tower Property“ der bedingten Erwartung ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_{T_i})_{i=0,\dots,j}$ ist. Somit ist

$$\Big(\frac{B(T_i,T_j)}{\beta(T_i)}\Big)_{i=0,\dots,j}$$

ein diskretes Q-Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_{T_i})_{i=0,\dots,j}$.

Q kann als risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß interpretiert werden.

3.3.4 Black-Scholes Formel für Caplets

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Black-Scholes Formel für Caplets im LIBOR Markt Modell gilt.

Korollar 3.10: *Sei $k+1 < i \leq N$. Der Preis $Cpl(T_k,i)$ zum Zeitpunkt T_k eines Caplets mit reset date T_i und resettlement date T_{i+1} sowie Strike K entspricht*

$$Cpl(T_k,i) = \delta B(T_k,T_{i+1})\Big(L(T_k,T_i)\Phi(d_1(T_k,i)) - K\Phi(d_2(T_k,i))\Big),$$

wobei $d_{1,2}(T_k,i) = \frac{\log(\frac{L(T_k,T_i)}{K})\pm\frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i}\|\lambda(u,T_i)\|^2du}{\sqrt{\int_{T_k}^{T_i}\|\lambda(u,T_i)\|^2du}}$ *und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.*

Beweis: Das Caplet besitzt zum Zeitpunkt T_{i+1} die Auszahlung $\delta(L(T_i,T_i)-K)^+$. Somit ist der faire Preis zum Zeitpunkt T_k bestimmt durch

$$\begin{aligned} Cpl(T_k,i) &= B(T_k,T_{i+1})\mathbb{E}_{Q^{T_{i+1}}}\Big[\delta(L(T_i,T_i)-K)^+\Big|\mathcal{F}_{T_k}\Big] \\ &= \delta B(T_k,T_{i+1})\Big(\mathbb{E}_{Q^{T_{i+1}}}\Big[L(T_i,T_i)\mathbf{1}_{\{L(T_i,T_i)>K\}}\Big|\mathcal{F}_{T_k}\Big] \\ &\quad - K\mathbb{E}_{Q^{T_{i+1}}}\Big[\mathbf{1}_{\{L(T_i,T_i)>K\}}\Big|\mathcal{F}_{T_k}\Big]\Big). \end{aligned}$$

Damit der Preis des Caplets berechnet werden kann, muss ein Maßwechsel durchgeführt werden. Hierzu definiert man, da aufgrund der Beschränktheit von $\lambda(t, T_i)$ die Novikov-Bedingung erfüllt ist, ein zu $Q^{T_{i+1}}$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_\lambda^{T_{i+1}}$ durch

$$\frac{dQ_\lambda^{T_{i+1}}}{dQ^{T_{i+1}}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\int_0^t \lambda(u, T_i) dW^{T_{i+1}}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda(u, T_i)\|^2 \, du\Big) = \frac{L(t, T_i)}{L(0, T_i)}$$

und der Satz von Girsanov liefert, dass

$$W_\lambda^{T_{i+1}}(t) = W^{T_{i+1}}(t) - \int_0^t \lambda(u, T_i)^T du, \quad t \in [0, T_i], \tag{3.18}$$

eine Brownsche Bewegung unter $Q_\lambda^{T_{i+1}}$ ist. Für die Dynamik der LIBOR Rate unter $Q_\lambda^{T_{i+1}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} dL(t, T_i) &= L(t, T_i)\lambda(t, T_i) dW^{T_{i+1}}(t) \\ &\overset{(3.18)}{=} L(t, T_i)\lambda(t, T_i)\Big(dW_\lambda^{T_{i+1}}(t) + \lambda(t, T_i)^T dt\Big) \\ &= L(t, T_i)\lambda(t, T_i)\lambda(t, T_i)^T dt + L(t, T_i)\lambda(t, T_i) dW_\lambda^{T_{i+1}}(t) \end{aligned}$$

mit Lösung

$$\begin{aligned} L(t, T_i) &= L(0, T_i)\exp\Big(\int_0^t \|\lambda(u, T_i)\|^2 \, du\Big)\exp\Big(\int_0^t \lambda(u, T_i) dW_\lambda^{T_{i+1}}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda(u, T_i)\|^2 \, du\Big) \\ &= \exp\Big(\int_0^t \lambda(u, T_i) dW_\lambda^{T_{i+1}}(u) + \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda(u, T_i)\|^2 \, du\Big). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Führt man den Maßwechsel durch, so erhält man nach dem Satz von Bayes

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{Q^{T_{i+1}}}\Big[L(T_i, T_i)\mathbf{1}_{\{L(T_i, T_i) > K\}}\Big|\mathcal{F}_{T_k}\Big] \\ &\overset{\text{Bayes}}{=} \mathbb{E}_{Q_\lambda^{T_{i+1}}}\Big[L(T_i, T_i)\mathbf{1}_{\{L(T_i, T_i) > K\}}\frac{L(T_0, T_i)}{L(T_i, T_i)}\Big|\mathcal{F}_{T_k}\Big]\frac{L(T_k, T_i)}{L(T_0, T_i)} \\ &= L(T_k, T_i)\mathbb{P}_\lambda^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K\Big|\mathcal{F}_{T_k}\Big). \end{aligned}$$

Fasst man zunächst diese Ergebnisse durch

$$
\begin{aligned}
Cpl(T_k, i) = \delta B(T_k, T_{i+1})\Big(& L(T_k, T_i)\mathbb{P}_\lambda^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K|\mathcal{F}_{T_k}\Big) \\
& - K\mathbb{P}^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K|\mathcal{F}_{T_k}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

zusammen und ist die Information bis zum Zeitpunkt T_i gegeben, so gilt

$$
\begin{aligned}
& L(T_i, T_i) > K \\
\overset{(3.3)}{\Leftrightarrow} \quad & L(T_k, T_i)\exp\Big(\int_{T_k}^{T_i} \lambda(u, T_i) dW^{T_{i+1}}(u) - \frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du\Big) > K \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{\int_{T_k}^{T_i} \lambda(u, T_i) dW^{T_{i+1}}(u)}_{\sim\mathcal{N}(0, \int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u,T_i)\|^2 du)} > \log\frac{K}{L(T_k, T_i)} + \frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\int_{T_k}^{T_i} \lambda(u, T_i) dW^{T_{i+1}}(u)}{\sqrt{\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}} > \frac{\log\frac{K}{L(T_k, T_i)} + \frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}{\sqrt{\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}}
\end{aligned}
$$

und man berechnet $\mathbb{P}^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K|\mathcal{F}_{T_k}\Big)$ durch

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K|\mathcal{F}_{T_k}\Big) \\
& = 1 - \Phi\Big(\frac{\log\frac{K}{L(T_k, T_i)} + \frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}{\sqrt{\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}}\Big) \\
& = \Phi\Big(\frac{\log\frac{L(T_k, T_i)}{K} - \frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}{\sqrt{\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}}\Big).
\end{aligned}
$$

Man berechnet $\mathbb{P}_\lambda^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K|\mathcal{F}_{T_k}\Big)$ mit Blick auf (3.19) mit einem umgekehrten Vorzeichen völlig analog und erhält

$$
\mathbb{P}_\lambda^{T_{i+1}}\Big(L(T_i, T_i) > K|\mathcal{F}_{T_k}\Big) = \Phi\Big(\frac{\log\frac{L(T_k, T_i)}{K} + \frac{1}{2}\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}{\sqrt{\int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2\, du}}\Big).
$$

Fasst man jetzt alle Ergebnisse zusammen, folgt die Behauptung. $\square$

Ein Vergleich mit der Black-Scholes Formel aus Satz 3.1 zeigt, dass mit

$$\sigma(T_k)^2 := \frac{1}{T_i - T_k} \int_{T_k}^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2 \, du \tag{3.20}$$

die Black-Scholes Formel mit dem Ergebnis aus dem Korollar übereinstimmt.

3.4 Kalibrierung

Möchte man exotischere Zinsderivate als Caps oder Floors bewerten, so können die impliziten Blackvolatilitäten genutzt werden, um das Modell an Marktdaten zu kalibrieren. Anschließend kann beispielsweise die Monte-Carlo-Simulation genutzt werden, um diese Zinsderivate zu bewerten. Siehe hierzu [Bjö04]. Bisher ist stets eine frei wählbare, deterministische Funktion $\lambda(t, T_i)$, welche die Volatilität des LIBOR darstellt, angenommen worden, ohne dass diese Funktion genauer spezifiziert wurde. In der Praxis werden die Volatilitäten genutzt, um das Modell an die Marktpreise gehandelter Derivate zu kalibrieren.
Aus Vereinfachungsgründen sei angenommen, dass $t = 0$ gilt. Sei weiter angenommen, dass zu jedem Ausübungszeitpunkt $T_0, \dots, T_N$ die impliziten Blackvolatilitäten $\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_{N-1}$ aller Caplets mit reset date T_i und resettlement date T_{i+1} bekannt sind. Vergleicht man diese mit den Formeln von Black, so stellt man fest, dass die deterministischen Funktionen $\lambda(t, T_0), \dots, \lambda(t, T_{N-1})$ durch

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \|\lambda(u, T_i)\|^2 \, du, \qquad i = 0, \dots, N-1,$$

definiert werden müssen, um das Modell zu kalibrieren. Aufgrund der Norm erhält man keine zusätzliche Flexibilität, indem man das Modell mit mehr als einer Brownschen Bewegung antreibt. Es sei also $d = 1$ angenommen und $\lambda(t, T_i)$ sei eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion mit

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \lambda(u, T_i)^2 du, \qquad i = 0, \dots, N-1.$$

In der Praxis werden verschiedene strukturelle Annahmen über das Aussehen der Volatilität getroffen. Einige häufige Wahlen werden hier aufgelistet.

(1) Die jeweilige Volatilität wird als konstant angenommen, also

$$\lambda(t, T_i) = \bar{\sigma}_i \qquad i = 0, \ldots, N-1, \quad 0 \leq t \leq T_i.$$

(2) Die Volatilität wird als stückweise konstant angenommen, also für $i = 0, \ldots, N-1$ gilt

$$\lambda(t, T_i) = \sigma_{ij} \quad \text{für } T_{j-1} \leq t < T_j, \quad j = 0, \ldots, i.$$

(3) Die Volatilität ist stückweise konstant, aber die Volatilität hängt von der Anzahl an möglichen Ausübungszeitpunkten bis zur Fälligkeit ab, also für $i = 0, \ldots, N-1$ gilt

$$\sigma_{ij} = \beta_{i-j} \quad \text{für } T_{j-1} \leq t < T_j, \quad j = 0, \ldots, i,$$

wobei $\beta_1, \ldots, \beta_N$ fest gewählt sind.

(4) Die Volatilität ist stückweise konstant mit

$$\sigma_{ij} = \beta_i \gamma_j \quad \text{für } T_{j-1} < t < T_j, \quad j = 0, \ldots, i,$$

wobei β_i und γ_j fest gewählt sind.

(5) Die Volatilität hat die Parametrisierung

$$\lambda(t, T_i) = q_i(T_i - t) e^{\beta_i (T_i - t)},$$

wobei $q_i(t)$ ein Polynom und $\beta_i \in \mathbb{R}$ ist.

Ist das Modell an die Marktdaten kalibriert, können mit der Monte-Carlo-Simulation Preise für exotischere Finanzprodukte bestimmt werden.

3.5 Das stetige Tenormodell

In diesem Abschnitt, welcher sich an [Fil09], [Fil04] und [MR98] orientiert, werden alle LIBOR Raten $L(t, T)$ für $t \in [0, T_{N-1}]$ definiert. Ist ein diskretes Tenormodell konstruiert, so genügt es, die Zwischenräume zwischen den diskreten Zeitpunkten zu schließen. Jede LIBOR Rate $L(t, T)$ wird dann lognormalverteilt unter dem jeweiligen $(T + \delta)$-Forward-Maß sein.
Es sei angenommen, dass die Filtration $\mathcal{F}_t$ von der d-dimensionalen Brownschen Bewegung W^{T_N} erzeugt wird. Es existiert für jedes $T \in [0, T_{N-1}]$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige, deterministische, beschränkte und messbare Funktion $\lambda(t, T), t \in [0, T]$, welche die Volatilität von $L(t, T)$ darstellt. Die Funktionen $\lambda(t, T), t \in [0, T]$, sind hierbei frei wählbar. Weiter sei eine nichtsteigende, positive anfängliche Zinsstruktur $(B(0, T))_{T \in [0, T^N]}$ gegeben. Auf diese Weise erhält man mit (3.1) eine nichtnegative anfängliche LIBOR Zinskurve durch

$$L(0, T) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(0, T)}{B(0, T + \delta)} - 1 \right), \quad T \in [0, T_{N-1}]. \tag{3.21}$$

Zunächst wird ein diskretes Tenormodell für $L(t, T_i), i = 0, \dots, N-1$ definiert. Die LIBOR Rates in den Zwischenräumen sind bisher noch nicht definiert. Bekannt sind aber die Werte des Geldmarktkontos $\beta(T_i), i = 0, \dots, N$. Außerdem ist das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß Q bekannt und es gilt

$$\mathbb{E}_Q \Big[\frac{1}{\beta(T_i)} \Big] = \mathbb{E}_Q \Big[\frac{B(T_i, T_i)}{\beta(T_i)} \Big] \overset{\text{Q-Martingal}}{=} B(0, T_i), \quad 0 \leq i \leq N. \tag{3.22}$$

Man definiert das stetige Tenormodell ähnlich wie das diskrete Tenormodell. Man beginnt damit, die LIBOR Rates für beliebiges $T \in [T_{N-1}, T_N]$ zu definieren. Anschließend definiert man die LIBOR Rates für beliebiges $T \in [T_{N-2}, T_{N-1}]$. Diese Prozedur wird entsprechend häufig wiederholt bis alle LIBOR Rates bestimmt sind.

Sei $T \in [T_{N-1}, T_N]$. In diesem Fall müssen die LIBOR Rates $L(t, T)$ nicht betrachtet werden, da solche LIBOR Rates in diesem Modell nach dem Zeitpunkt T_{N-1} nicht existieren. Zunächst soll das Geldmarktkonto $\beta(T)$ für $T \in [T_{N-1}, T_N]$ definiert werden. Die Werte des Geldmarktkontos zu den Zeitpunkten T_{N-1} und T_N sind bekannt und $\beta(T_{N-1})$ sowie $\beta(T_N)$ sind $\mathcal{F}_{T_{N-1}}$-messbar. Das Modell muss an die gegebene anfängliche Zinsstruktur $(B(0, T))_{T \in [0, T^N]}$ angepasst werden. Benötigt wird eine nichtfallende Funktion

$\alpha : [T_{N-1}, T_N] \to [0,1]$ mit $\alpha(T_{N-1}) = 0$ und $\alpha(T_N) = 1$, so dass

$$\ln\beta(T) = (1-\alpha(T))\ln\beta(T_{N-1}) + \alpha(T)\ln\beta(T_N)$$

für alle $T \in [T_{N-1}, T_N]$ die Gleichung

$$B(0,T) = \mathbb{E}_Q[\frac{1}{\beta(T)}], \quad T \in [T_{N-1}, T_N],$$

erfüllt. Da $0 < \beta(T_{N-1}) < \beta(T_N)$ und $(B(0,T))_{T\in[T_{N-1},T_N]}$ eine monoton fallende Funktion ist, existiert eine solche eindeutig bestimmte Funktion α.
Da $\beta(T)$ positiv ist mit

$$\mathbb{E}_Q\Big[\frac{1}{\beta(T)B(0,T)}\Big] \overset{(3.22)}{=} 1,$$

kann auf $\mathcal{F}_{T_N}$ ein zu Q äquivalentes T-Forward-Maß Q^T definiert werden durch

$$\frac{dQ^T}{dQ}|_{\mathcal{F}_{T_N}} = \frac{1}{\beta(T)B(0,T)}.$$

Der Maßwechsel vom Terminal Measure Q^{T_N} nach Q^T wird durch den Dichtequotientenprozess

$$\frac{dQ^T}{dQ^{T_N}} = \frac{dQ^T}{dQ}\frac{dQ}{dQ^{T_N}} = \frac{\beta(T_N)B(0,T_N)}{\beta(T)B(0,T)}$$

gegeben. Da die Filtration von der d-dimensionlen Brownschen Bewegung erzeugt wird, ist nach dem Martingaldarstellungssatz bzw. dem Satz von Girsanov[10] der Dichtequotientenprozess ein Exponentialmartingal. Es existiert also ein Prozess σ_{T,T_N}, so dass

$$\begin{aligned}\frac{dQ^T}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} &= \mathbb{E}_{Q^{T_N}}\Big[\frac{\beta(T_N)B(0,T_N)}{\beta(T)B(0,T)}|\mathcal{F}_t\Big] \\ &= \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T_N}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T_N}(u)\|^2\,du\Big).\end{aligned}$$

Der Satz von Girsanov liefert, dass

$$W^T(t) = W^{T_N}(t) - \int_0^t \sigma_{T,T_N}(u)^T du, \quad t \in [0,T], \tag{3.23}$$

[10] Siehe [Pau09], Finanzmathematik 2, Abschnitt 3.7.

eine Brownsche Bewegung unter Q^T ist.
Da $T \in [T_{N-1}, T_N]$ beliebig gewählt wurde, kann nun der LIBOR Prozess $L(t,T)$ für beliebiges $T \in [T_{N-2}, T_{N-1}]$ definiert werden durch

$$dL(t,T) = L(t,T)\lambda(t,T)dW^{T+\delta}(t).$$

Aus der Definition der LIBOR Rate erhält man

$$L(0,T) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{B(0,T)}{B(0,T+\delta)} - 1\Big).$$

Analog zum diskreten Fall definiert man den beschränkten und progressiven Prozess

$$\sigma_{T,T+\delta}(t) = \frac{\delta L(t,T)}{\delta L(t,T)+1}\lambda(t,T), \quad t \in [0,T],$$

für ein $T \in [T_{N-2}, T_{N-1}]$. Da aufgrund der Beschränktheit von $\sigma_{T,T+\delta}$ die Novikov-Bedingung erfüllt ist, definiert man für $T \in [T_{N-2}, T_{N-1}]$ durch,

$$\frac{dQ^T}{dQ^{T+\delta}} = \exp\Big(\int_0^T \sigma_{T,T+\delta}(u)dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2\, du\Big)$$

ein zu $Q^{T+\delta}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q^T.

Bezüglich des Terminal Measure ist der Maßwechsel nach Q^T gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{dQ^T}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{dQ^T}{dQ^{T+\delta}}|_{\mathcal{F}_t}\frac{dQ^{T+\delta}}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} \\
&= \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T+\delta}(u)dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2\, du\Big) \\
&\quad * \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T+\delta,T_N}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T+\delta,T_N}(u)\|^2\, du\Big) \\
&\overset{(3.23)}{=} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T+\delta}(u) + \sigma_{T+\delta,T_N}(u)dW^{T_N}(u) \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2 + \|\sigma_{T+\delta,T_N}(u)\|^2 + 2\sigma_{T,T+\delta}(u)\sigma_{T+\delta,T_N}(u)^T du\Big) \\
&= \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T_N}(u)dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T_N}(u)\|^2\, du\Big)
\end{aligned}$$

mit $\sigma_{T,T_N} := \sigma_{T,T+\delta} + \sigma_{T+\delta,T_N}$ für $T \in [T_{N-2}, T_{N-1}]$. Wiederholt man dieses Vorgehen, so erhält man durch Rückwärtsinduktion ein T-Forward-Maß Q^T mit der zugehörigen Brownschen Bewegung W^T für alle $T \in [0, T_N]$ und die LIBOR Rates $L(t,T)$ sind für alle $T \in [0, T_{N-1}]$ definiert.
Allgemein erhält man so für den Dichtquotientenprozess für $T \in [0, T_N]$ folgendes Ergebnis.

Satz 3.11: *Sei $0 \leq T \leq T_N$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass $T_{N-1} \leq T + k\delta \leq T_N$. Dann gilt*

$$\frac{dQ^T}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T_N}(u) dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T_N}(u)\|^2 du\Big), \quad t \in [0,T],$$

wobei $\sigma_{T,T_N} = \sigma_{T,T+\delta} + \sigma_{T+\delta,T+2\delta} + \ldots + \sigma_{T+(k-1)\delta,T+k\delta} + \sigma_{T+k\delta,T_N}$.

Beweis: Sei $T \in [0, T_N]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{dQ^T}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{dQ^T}{dQ^{T+\delta}}|_{\mathcal{F}_t} \frac{dQ^{T+\delta}}{dQ^{T+2\delta}}|_{\mathcal{F}_t} \cdot \ldots \cdot \frac{dQ^{T+(k-1)\delta}}{dQ^{T+k\delta}}|_{\mathcal{F}_t} \frac{dQ^{T+k\delta}}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} \\
&= \exp\Big(\int_0^t (\sum_{i=0}^{k-1} \sigma_{T+i\delta,T+(i+1)\delta}(u) + \sigma_{T+k\delta,T_N}(u)) d\tilde{W}^{T_N}(u) \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \left\|\sigma_{T+i\delta,T+(i+1)\delta}(u)\right\|^2 + \|\sigma_{T+k\delta,T_N}(u)\|^2 \\
&\quad + 2\sum_{i=0}^{k-1} \Big(\sigma_{T+i\delta,T+(i+1)\delta}(u) + \sigma_{T+k\delta,T_N}(u)\Big)\Big(\sum_{j=i+1}^{k-1} \sigma_{T+j\delta,T+(j+1)\delta}(u)^T + \sigma_{T+k\delta,T_N}(u)^T\Big)\Big) du\Big) \\
&= \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T_N}(u) dW^{T_N}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T_N}(u)\|^2 du\Big).
\end{aligned}$$

□

Der Satz von Girsanov liefert, dass

$$W^T(t) = W^{T_N}(t) - \int_0^t \sigma_{T,T_N}(u)^T du, \quad t \in [0,T],$$

eine Brownsche Bewegung unter Q^T ist.

3.5.1 Der Bondmarkt

In diesem Abschnitt werden die Bondpreise $B(t,T)_{t\in[0,T]}$ für $T \in [0,T_N]$ aus dem stetigen Tenormodell hergeleitet.[11] Hierzu wird zunächst der Prozess des Forwardpreises bestimmt.

Satz 3.12: *Sei $0 \leq t \leq T \leq S \leq T_N$. Dann gilt für den Prozess des Forwardpreises*

$$\frac{B(t,S)}{B(t,T)} = \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\Big(-\int_0^t \sigma_{T,S}(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,S}(u)\|^2\,du\Big), \quad t \in [0,T],$$

wobei $\sigma_{T,S} = \sigma_{T,T_N} - \sigma_{S,T_N}$.
Insbesondere gilt für $t \in [0,T]$

$$\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)} = \frac{B(0,T)}{B(0,T+\delta)} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T+\delta}(u)dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2\,du\Big). \quad (3.24)$$

Beweis: Mit Blick auf (3.10) gilt für den Forwardpreis

$$\begin{aligned}
\frac{B(t,S)}{B(t,T)} &= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \frac{dQ^S}{dQ^T}|_{\mathcal{F}_t} \\
&= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \frac{dQ^S}{dQ^{T_N}}|_{\mathcal{F}_t} \frac{dQ^{T_N}}{dQ^T}|_{\mathcal{F}_t} \\
&= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{S,T_N}(u)dW^T(u) - \int_0^t \sigma_{T,T_N}(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{S,T_N}(u)\|^2\,du \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T_N}(u)\|^2\,du + \int_0^t \sigma_{S,T_N}(u)\sigma_{T,T_N}(u)^T du - \int_0^t \sigma_{T,T_N}(u)\sigma_{T,T_N}(u)^T du\Big) \\
&= \exp\Big(\int_0^t (\sigma_{S,T_N} - \sigma_{T,T_N})(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|(\sigma_{S,T_N} - \sigma_{T,T_N})(u)\|^2\,du\Big) \\
&= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\Big(-\int_0^t \sigma_{T,S}(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,S}(u)\|^2\,du\Big).
\end{aligned}$$

Für den Beweis des zweiten Teils sei $T \in [0,T_{N-1}]$ mit $S = T+\delta$. Wähle $k \in N$ so, dass $T_{N-1} \leq T + k\delta < T_N$. Dann sind aufgrund des Abstands zwischen T und S der größte Teil der Funktionen, welche für den Maßwechsel benötigt werden, bis auf umgekehrtes

[11] Siehe [Fil09], Übung 11.8, Seite 222.

Vorzeichen gleich und heben sich weg. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{T,T_N}(u) - \sigma_{T+\delta,T_N}(u) \\
&= (\sigma_{T,T+\delta}(u) + \sigma_{T+\delta,T+2\delta}(u) + \ldots + \sigma_{T+(k-1)\delta,T+k\delta}(u) + \sigma_{T+k\delta,T_N}(u)) \\
&\qquad - (\sigma_{T+\delta,T+2\delta}(u) + \ldots + \sigma_{T+(k-1)\delta,T+k\delta}(u) + \sigma_{T+k\delta,T_N}(u)) \\
&= \sigma_{T,T+\delta}(u).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt durch Einsetzen die Behauptung. □

Wählt man in Satz 3.12 für $t = T$, so erhält man für $0 \leq T \leq S \leq T_N$ die Bondpreise durch

$$B(T,S) = \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\Big(-\int_0^t \sigma_{T,S}(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,S}(u)\|^2\, du\Big).$$

Auf diese Weise sind die Bondpreise für alle Fälligkeiten definiert. Man erhält für den Forwardpreis folgendes Korollar.

Korollar 3.13: *Sei $0 \leq T \leq T_{N-1}$. Dann gilt für den Forwardpreis*

$$\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)} = 1 + \delta L(t,T), \quad t \in [0,T].$$

Beweis: Mit der Dynamik der LIBOR Rates und der Definition des Prozesses $\sigma_{T,T+\delta}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
d(\delta L(t,T) + 1) &= \delta dL(t,T) \\
&= \delta\Big(L(t,T)\lambda(t,T)d\tilde{W}^{T+\delta}(t)\Big) \\
&= \delta\Big(\frac{1}{\delta}(\delta L(t,T) + 1)\sigma_{T,T+\delta}(t)d\tilde{W}^{T+\delta}(t)\Big) \\
&= (\delta L(t,T) + 1)\sigma_{T,T+\delta}(t)d\tilde{W}^{T+\delta}(t)
\end{aligned}
$$

mit Lösung

$$\delta L(t,T)+1 = (\delta L(0,T)+1)\exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T+\delta}(u)dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2\, du\Big). \quad (3.25)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)} &\overset{(3.24)}{=} \frac{B(0,T)}{B(0,T+\delta)} \exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T+\delta}(u)dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2\, du\Big)\\ &\overset{(3.21)}{=} (\delta L(0,T)+1)\exp\Big(\int_0^t \sigma_{T,T+\delta}(u)dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_{T,T+\delta}(u)\|^2\, du\Big)\\ &\overset{(3.25)}{=} \delta L(t,T)+1.\end{aligned}$$

□

Für Bondpreise zum Zeitpunkt T mit Fälligkeit S, bei denen $S-T$ ein Vielfaches der Periodenlänge δ beträgt, kann garantiert werden, dass der Bondpreis $B(T,S)$ stets kleiner als 1 ist.

Korollar 3.14: *Sei* $0 \le t \le T \le S \le T_N$. *Weiter sei* $S-T = k\delta$ *für ein* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$B(T,S) \le 1.$$

Beweis: Es gilt $S-T = k\delta$. Dann folgt mit Korollar 3.13, dass

$$\begin{aligned}B(T,S) &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{B(T,T+(i-1)\delta)}{B(T,T+i\delta)}\\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \underbrace{\frac{1}{1+\delta L(T,T+i\delta)}}_{\le 1} \le 1.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.15: Es besteht die Möglichkeit, dass die Bondpreise $B(T,S)$ größer als 1 sind, falls $S-T$ kein Vielfaches der Periodenlänge δ beträgt. [12] Denn obwohl alle LIBOR Rates für alle Perioden der Länge δ nichtnegativ konstruiert wurden, ist es möglich, dass es Zinssätze gibt, die negativ sind, falls diese nicht eine Periode der Länge δ besitzen. [13]

[12] Für diese Bonds existiert also kein $k \in \mathbb{N}$, so dass $S-T = k\delta$ gilt.
[13] Siehe [Fil09], Seite 221.

3.6 Fazit

Ein entscheidender Vorteil des LIBOR Markt Modells liegt in der Tatsache begründet, dass im LIBOR Markt Modell mit den LIBOR Rates tatsächlich am Markt beobachtbare diskrete Zinssätze modelliert werden. [14] Aber nicht nur deshalb findet das LIBOR Markt Modell eine breite Akzeptanz in Theorie und Praxis. Denn zum einen werden die Zinssätze lognormal und damit positiv modelliert und zum anderen führt im LIBOR Markt Modell die Bewertung von Caplets, einem der am häufigsten gehandelten Zinsderivate, zu einer Bewertungsformel, die mit der Formel von Black übereinstimmt. Das LIBOR Market Modell liefert also den theoretischen Nachweis für die Verwendung der Formel von Black für Caplets in einem arbitragefreien Zinsstrukturmodell. Diese Erkenntnis ist wichtig, denn es entsprach bereits schon vorher der Marktpraxis Caplets mit der Formel von Black zu bewerten. Des Weiteren ermöglicht die Existenz dieser Formel eine einfache Kalibrierung des Modells an Capletpreise.
Leider gibt es im LIBOR Markt Modell keine geschlossene Formel für die Bewertung von Swaptions. Diese Preise müssen im LIBOR Markt Modell approximiert werden. Das sogenannte Swap Rate Modell hingegen liefert eine solche geschlossene Formel für Swaptions in der Form von Black, aber keine geschlossene Formel zur Bewertung von Caplets, welche dort approximiert werden müssen. Man kann zeigen, dass die LIBOR Rates im Swap Rate Modell nicht lognormalverteilt modelliert werden können. Das LIBOR Markt Modell ist demnach nicht kompatibel mit dem Swap Markt Modell.

[14] Im HJM-Modell wird im Gegensatz hierzu die augenblickliche Forward Rate, welche sich auf einen infinitesimalen Zeitraum bezieht und nicht am Markt beobachtbar ist, modelliert.

A Anhang

Satz A.1: *(Formel von Bayes)*
Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und Q ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Radon-Nikodym-Ableitung

$$L = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}}.$$

Weiter sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.
Dann gilt:

$$\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[LX|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L|\mathcal{G}]} \quad Q - f.s.$$

Beweis: Den Satz von Bayes und den Beweis findet man in [Bjö04] S.440, Proposition B.41 □

Satz A.2: *Seien X, Y normalverteilte Zufallsvariablen mit $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ und $y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. X sei $\sigma(y)$-messbar. Dann ist die Korrelation von X, Y gleich 1.*

Beweis: Zu zeigen ist $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = 1$. Umformen ergibt

$$\mathbb{E}[X, Y] - \underbrace{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}_{\mu_1\mu_2} = \underbrace{\sqrt{Var(X)}}_{\sqrt{\sigma_1}}\underbrace{\sqrt{Var(Y)}}_{\sqrt{\sigma_2}}$$

Nach dem Faktorisierungslemma (siehe [Als07] S. 295) existiert eine messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$X = h(Y).$$

Die Funktion h ist linear, da X und Y normalverteilt sind. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[h(Y)Y] = \mathbb{E}[(aY+b)Y]\\ &= a\mathbb{E}[Y^2] + b\mu_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mathbb{E}X = a\mu_2 + b\\ \sigma_1 &= Var(X) = a^2\sigma_2.\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[XY] - \mu_1\mu_2 = \sqrt{\sigma_1}\sqrt{\sigma_2}\\ \Leftrightarrow\ & a\mathbb{E}[Y^2] + b\mu_2 - \mu_2(a\mu_2 + b) = a\sqrt{\sigma_2}\sqrt{\sigma_2}\\ \Leftrightarrow\ & a\mathbb{E}[Y^2] - a\mu_2 = a\sigma_2\\ \Leftrightarrow\ & V(Y) = \sigma_2.\end{aligned}$$

$\square$

Herleitung der Dynamik des Forwardpreises aus Abschnitt 3.2.
Zu zeigen ist

$$d\Big(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\Big) = \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\sigma_{T_i,T_{i+1}}(t)dW^{T_{i+1}}(t).$$

Mit der Itô-Formel gilt

$$\begin{aligned}d\Big(\frac{1}{B(t,T_{i+1})}\Big) &\overset{\text{Itô}}{=} -\frac{1}{B(t,T_{i+1})^2}dB(t,T_{i+1}) + \frac{1}{2}2\frac{1}{B(t,T_{i+1})^3}dB[(t,T_{i+1})]_t\\ &= \frac{1}{B(t,T_{i+1})}\Big((\sigma^*(t,T_{i+1})^2 - r(t))dt + \sigma^*(t,T_{i+1})d\tilde{W}(t)\Big).\end{aligned}$$

Dann folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
d\Big(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\Big) &= B(t,T_i)d\frac{1}{B(t,T_{i+1})} + \frac{1}{B(t,T_{i+1})}dB(t,T_i) + d[B(t,T_i),B(t,T_{i+1})]_t \\
&= \Big(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\Big)\Big(\sigma^*(t,T_{i+1})^2 dt - r(t)dt + \sigma^*(t,T_{i+1})d\tilde{W}(t) \\
&\quad + r(t)dt - \sigma^*(t,T_i)d\tilde{W}(t) - \sigma^*(t,T_{i+1})\sigma^*(t,T_i)dt\Big) \\
&\overset{(2.28)}{=} \Big(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}\Big)\Big(\underbrace{\sigma^*(t,T_{i+1}) - \sigma^*(t,T_i)}_{\int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma(t,u)du =: \sigma_{T_i,T_{i+1}}(t)}\Big)dW^{T_{i+1}}
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[Als07] Gerold Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Universität Münster, 2007.

[BGM97] A. Brace, D. Garatasek, and M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2):127–155, 1997.

[Bjö04] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, second edition, 2004.

[BM01] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2001.

[BS04] Nicole Branger and Christian Schlag. *Zinsderivate*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004.

[Cai04] Andrew J. G. Cairns. *Interest Rate Models*. Princeton University Press, 2004.

[Car94] A.P. Carverhill. When is the short rate markovian? *Mathematical Finance*, 4(4):305–312, 1994.

[Fil04] Damir Filipovic. *Fixed Income Models*. Vorlesungsskript Princeton University, 2004.

[Fil09] Damir Filipovic. *Term-Structure Models, A Graduate Course*. Springer Finance, 2009.

[HJM92] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingents claim valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992.

[Irl98] A. Irle. *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. Teubner, 1998.

[JW00] J. James and N. Webber. *Interest Rate Modelling*. Wiley, 2000.

[MR98] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 1998.

[Oks03] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, 2003.

[Pau09] Volkert Paulsen. *Handschriftliches Skript zu den Vorlesungen Finanzmathematik 1 und 2*. Universität Münster, SS 2008, WS 2008/2009.

[Pro04] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer Verlag, second edition, 2004.

[Reb98] Riccardo Rebonato. *Interest-Rate Option Models*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1998.

[RSM04] Reitz, Schwarz, and Martin. *Zinsderivate*. Vieweg, 2004.

[Sch05] Thorsten Schmidt. *Zinsstrukturmodelle*. Vorlesungsskript der Universität Leipzig, 2005.

[Shr97] Steve E. Shreve. *Stochastic calculus and finance*. Entwurf, 1997.

[Shr04] Steve E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance , Continuous Time Models*. Springer, Science + Business Media, Inc, 2004.

[Ste00] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2000.

[Zag02] Rudi Zagst. *Interest-rate management*. Springer Finance, 2002.