



Diplomarbeit

# Die Integraldarstellung amerikanischer Optionspreise

Tobias Nigbur

Westfälische Wilhelms Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Betreuer: PD Dr. Volkert Paulsen



### Danksagung

Nach etwas mehr als fünf Jahren Studium der Mathematik ist es mir wichtig, den Personen und Institutionen zu danken, die mich auf meinem Werdegang in vieler Hinsicht unterstützt haben. Mein Dank gilt insbesondere Herrn Priv.-Doz. Dr. Volkert Paulsen für das Thema meiner Diplomarbeit, die fachliche Unterstützung und die gute Betreuung sowie der Universität Münster für die guten Studienbedingungen. Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich während der ganzen Zeit in meinem Tun unterstützt hat.

Münster, 25.April 2009

Tobias Nigbur

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2 Modellwelt und Requisiten</b>  | <b>8</b>  |
| 2.1 Die Finanzwelt . . . . .  | 8         |
| 2.2 Optionen . . . . .  | 10        |
| 2.3 Mathematisches Modell . . . . .   | 12        |
| 2.3.1 Der Kursverlauf . . . . .   | 12        |
| 2.3.2 Mehrdimensionale Erweiterung . . . . .  | 15        |
| 2.4 Dividenden . . . . .  | 18        |
| 2.5 Europäische Optionen . . . . .  | 19        |
| 2.5.1 Preis bei einem Basisfinanzgut . . . . .  | 19        |
| 2.5.2 Preis bei mehreren Basisfinanzgütern . . . . .                                      | 22        |
| 2.6 Die Black-Scholes Differentialgleichung . . . . .                                     | 23        |
| <b>3 Die Grenzfunktion</b>  | <b>25</b> |
| 3.1 Die Preisfunktion und optimales Stoppen . . . . .                                     | 25        |
| 3.2 Amerikanische Basketoptionen und deren Grenzregionen . . . . .                        | 29        |
| 3.3 Steigung, Stetigkeit und Konvexität . . . . .   | 32        |
| 3.4 Das Verhalten am Ende der Laufzeit . . . . .  | 35        |
| <b>4 Darstellung des amerikanischen Callpreises für endliche Laufzeiten</b>               | <b>53</b> |
| 4.1 Die Formel nach McKean . . . . .  | 53        |
| 4.1.1 Transformationen . . . . .  | 54        |
| 4.1.2 Die Fouriertransformation . . . . .   | 56        |
| 4.1.3 Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung . . . . .                              | 58        |
| 4.1.4 Die Rücktransformation . . . . .  | 60        |
| 4.1.5 Die Formel nach McKean für den Call . . . . .                                       | 65        |
| 4.2 Die Darstellung nach Kim . . . . .  | 69        |
| 4.3 Der amerikanische Callpreis ohne Dividendenzahlungen . . . . .                        | 74        |
| <b>5 Der Preis für die amerikanische Putoption bei endlicher und unendlicher Laufzeit</b> | <b>76</b> |
| 5.1 Endliche Laufzeit . . . . .   | 76        |
| 5.2 Unendliche Laufzeit . . . . .   | 80        |
| <b>6 Der Putpreis für die endliche Basket Option</b>                                      | <b>83</b> |
| <b>7 Fazit</b>  | <b>89</b> |

**8 Literaturverzeichnis 92**

# Kapitel 1

## Einleitung

Selbst in Krisenzeiten steht der Handel mit Finanzderivaten auf den weltweiten Finanzmärkten nicht still. Es werden Finanztitel ge- und verkauft, für die faire Preise berechnet werden müssen. Hier spielt die Mathematik die zentrale Rolle. Der Finanzmarkt und der Verlauf des Finanzguts werden mathematisch modelliert und darüber Preise berechnet. Je besser das mathematische Modell die Wirklichkeit abbildet, desto mehr Risiken lassen sich minimieren, umso höher ist das Vertrauen in die zugrunde liegende Finanzmathematik.

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem Bepreisen von amerikanischen Optionen. Für ihre Arbeit an der Optionspreistheorie und insbesondere der Berechnung des europäischen Optionspreises, wurde Fischer Black und Myron Scholes 1997 der Nobelpreis verliehen. Ein Teil dieser Grundlagen wird im zweiten Kapitel betrachtet.

Interessanter sind allerdings amerikanische Optionen: Als Besitzer einer solchen Option fragt man sich, bei welchem Wert des zugrunde liegenden Finanzguts man von seiner Option Gebrauch machen sollte. Es liegt also ein Stoppproblem vor.

Da von den möglichen Ausübungszeitpunkten auch der Preis der Option abhängt, gibt es nur eine Möglichkeit arbitragefrei auszuüben, nämlich am optimalen Zeitpunkt. Mathematisch gesehen erfüllt die Preisfunktion eine partielle Differentialgleichung bis zum Ausübungszeitpunkt. Da dieser Zeitpunkt nicht fest ist, sondern vom Wert des Basisfinanzguts abhängt, wird von einem freien Randwert gesprochen.

Das Problem des Lösens einer solchen Differentialgleichung geht zurück auf Henry McKean, 1965, der sich mit einer Wärme-Gleichung beschäftigte. Er erzielte zwar keine Lösung, schaffte jedoch einige nützliche Grundlagen.

Im Laufe dieser Diplomarbeit wird gezeigt, dass die Regionen der Aktienwerte, für die die Option gehalten werden sollte und für die ausgeübt werden sollte, von einer Funktion, abhängig von der Zeit, getrennt werden. Diese Funktion ist nicht bekannt, aber in Kapitel 3 werden einige wichtige Eigenschaften dieser Grenzfunktion gezeigt.

Wenn man voraussetzt, dass die Grenzfunktion bekannt ist, kann eine Integraldarstellung für die Put- und die Calloption angegeben werden. In Kapitel 4 und 5 werden zwei verschiedene Herangehensweisen vorgestellt und die Ergebnisse kritisch betrachtet.

Wenn die Option ausgeübt wird, entspricht der Preis genau ihrer Auszahlungsfunktion, da sonst direkt Arbitrage erzielt werden könnte. Da an diesem Eintrittszeitpunkt der Wert des Basisfinanzguts gerade der Grenzfunktion entspricht, erhält man eine Integralgleichung.

Numerische Methoden erlauben es nun, eine Näherungslösung anzugeben. Mit dieser Lösung ist wiederum eine numerische Lösung des Preises möglich.

Für den Preis einer amerikanischen Option die ewig läuft, also nie verfällt, kann explizit die Grenz- und Preisfunktion angegeben werden. Dies ist auch Bestandteil von Kapitel 5.

Optionen müssen nicht nur auf einem, sondern können auf mehreren, korrelierten Finanzgütern basieren und werden dann Basket- oder auch Rainbowoptionen genannt. Ein Vorteil ist, dass man sich gegen Schwankungen am Finanzmarkt absichern kann, wenn die Option auf negativ korrelierten Finanzgütern beruht. Allerdings erschwert sich dadurch das optimale Stoppen, da die Wertentwicklung aller Finanzgüter beachtet werden muss.  
Eine Integraldarstellung für Basketoptionen wird in Kapitel 6 gegeben und Eigenschaften der Stoppregion werden in Kapitel 3 verifiziert.

## Kapitel 2

# Modellwelt und Requisiten

### 2.1 Die Finanzwelt

Es wird versucht, den realen Finanzmarkt möglichst sinnvoll abzubilden. Komplett realitätstreu ist dies allerdings kaum möglich, da der Finanzmarkt starken Schwankungen unterliegt und einige Annahmen dieses Modells unnötig verkomplizieren würden.

Folgende Voraussetzungen werden an den Markt gestellt:

- Es werden Finanztitel gehandelt.

Ohne Finanztitel und deren Handel hätte der Markt keinen Sinn. Es werden Aktien gehandelt, es gibt einen Geldmarkt und Finanzderivate in Form von Optionen und Termingeschäften sind möglich. In der Finanzwelt wird von einem Underlying oder Basisfinanzgut einer Option gesprochen. Dies können Aktien, Währungen, Rohstoffe oder Energie sein.

- Dividenden

Wenn Aktiengesellschaften einen Teil ihres Gewinns an die Aktienbesitzer auszahlen, nennt man dies Dividenden. Dividenden werden in einem eigenen Kapitel behandelt.

- Leerverkäufe sind beliebig möglich.

Ein Leerverkauf ist der Verkauf eines Finanztitels, den man nicht besitzt. Dieser Finanztitel wird dann zu einem späteren Zeitpunkt wieder zurück gekauft. Man wettet also auf fallende Preise, um Gewinn zu erzielen.

Leerverkäufe sind in der Realität auch möglich. Ein gutes Beispiel sind Hedge Fonds, die aus Leerverkäufen und Derivaten unter hohem Risiko versuchen, hohe Renditen zu erzielen.

Zur Zeit sind Leerverkäufe von einigen Regierungen wegen der akuten Finanzkrise verboten.

- Finanztitel sind beliebig teilbar.

Man kann Finanztitel beliebig stückeln und verkaufen, was natürlich bei Wertpapieren nicht möglich ist.

- Es gibt keine Beschränkungen von Aufnahmen oder Anlagen von Finanzen.

Theoretisch kann man extrem große Mengen an Geld leihen, ohne dass man Sicherheiten vorweisen muß. In der Realwelt ist die Aufnahme oder Anlage von steigenden Beträgen meist an eine steigende Zinskurve gebunden.

- Der Aufnahme- und der Anlagezins sind gleich.

Diese Annahme ist nicht sehr realitätsnah. Wie jeder aus eigener Erfahrung weiß, sind in der realen Welt der Aufnahme und der Anlagezins nicht gleich, denn Finanzinstitute sind gewinnorientiert und wollen sich gegen Kreditausfälle absichern. Zusätzlich wird in der Realität die Dauer der Anlage oder Aufnahme, bei gleichem Betrag, unterschiedlich bezinst (Zinsstrukturkurve).

- Der Markt ist arbitragefrei.

Arbitrage heißt, direkter Gewinn ohne Risiko kann erzielt werden durch geschicktes Kaufen und Verkaufen von Finanztiteln. Eine derartige Situation kann auftreten, wenn Finanztitel falsch bepreist sind oder unterschiedliche Werte in verschiedenen geografischen Orten haben. In Zeiten des schnellen Handels über das Internet ist es so gut wie nicht möglich, direkt Arbitrage abzugreifen. Außerdem würde der Markt dieses Problem direkt ausgleichen, da jeder Anleger diese Möglichkeit ausnutzen würde und sich durch die erhöhte Nachfrage die Preise anpassen. Das Problem der Bepreisung besteht heutzutage in der richtigen und passenden Modellbildung.

Arbitrage ist in den folgenden Beweisen ein häufiges Argument, denn zwei Finanztitel mit der gleichen Auszahlungsstruktur müssen den gleichen Preis haben.

- Keine Transaktionskosten oder Steuern

Transaktionskosten bestehen in der Realität eigentlich immer, sind aber abhängig vom handelnden Individuum. Beispiele sind Telefon-/Internetkosten, Opportunitätskosten und Brokerkosten. Steuern werden bewusst ausgeblendet, da sie von der Politik laufend verändert werden, wie zum Beispiel die neue Besteuerung von Aktiengewinnen.

- Rationale Marktteilnehmer mit gleichen Informationen.

Jeder Marktteilnehmer will seinen Gewinn maximieren, bei Risikoaversität.

Es herrscht Informationssymmetrie: Jeder Händler weiß gleich viel über den zukünftigen Verlauf eines Finanztitels. Insiderhandel ist also nicht möglich.

Der Finanzmarkt kommt einem vollkommenen Markt also sehr nahe. Es gibt eine Menge Märkte, die weit von einem vollkommenen Markt entfernt sind. Das Aussetzen einer Voraussetzung kann sogar zum kompletten Marktversagen führen. Ein populäres Beispiel ist der Gebrauchtwagenmarkt: Bei Informationsasymmetrien kommt kein Handel zustande. [George Akerlof: The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 84 No. 3 (Aug. 1970), S. 488–500]

## 2.2 Optionen

Optionen sind Verträge zwischen 2 Parteien, bei denen der Käufer (long-position) das Recht erwirbt, zu einem oder mehreren Zeitpunkten eine bestimmte Anzahl von Finanzgütern zu einem Ausübungspreis  $K$  an den Verkäufer (short-position) zu kaufen oder verkaufen. Das Recht ist keine Pflicht, der Käufer kann die Option also auch verfallen lassen.

Optionen werden gehandelt, weil man auf steigende oder fallende Kurse wetten, oder sich absichern möchte. Optionen lassen sich in 2 Klassen unterteilen.

- Put-Optionen: Verkaufsoptionen

Die Auszahlungsfunktion für den Käufer einer Putoption auf ein Finanzgut  $S$  ist  $\max(K - S, 0) = (K - S)_+$

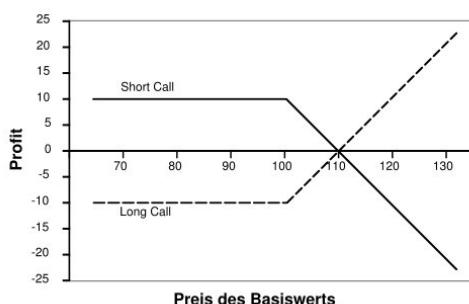
Als Käufer wettet man auf fallende, als Verkäufer auf steigende Kurse.

- Call-Optionen: Kaufoptionen

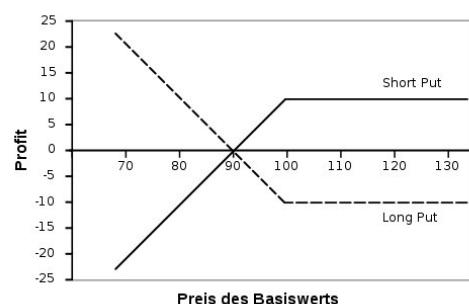
Die Auszahlungsfunktion für den Käufer einer Calloption auf ein Finanzgut  $S$  ist  $\max(S - K, 0) = (S - K)_+$

Als Käufer wettet man auf steigende, als Verkäufer auf fallende Kurse.

Wenn man vom einem Einperiodenmodell ausgeht und den Diskontierungsfaktor vernachlässigt, kann der Profit in Abhängigkeit des Aktienwerts gut visualisiert werden. Wenn die Option in  $t = 0$  10 Geldeinheiten gekostet hat und der Ausübungspreis  $K=100$  ist, dann zeigen folgende zwei Grafiken den Profit in  $t = 1$  in Abhängigkeit vom Aktienwert.



<http://de.wikipedia.org/wiki/Call-Option> [3]



<http://de.wikipedia.org/wiki/Put-Option> [3]

Natürlich muss davon ausgegangen werden, dass sich die 10 Geldeinheiten über die eine Periode verzinst hätten und sich somit die Funktionen leicht verschieben.

Wie man erkennt, lässt sich mit einer Call-Option, im Gegensatz zur Put-Option, theoretisch unendlich viel Profit erzielen. Der Profit bei der Put-Option ist begrenzt, da das Basisfinanzgut nur positive Werte annehmen kann.

Wenn die Wahrscheinlichkeit für alle möglichen zukünftigen Zustände des Finanzguts bekannt und der Verzinsungsfaktor deterministisch ist, welchen fairen Preis hat dann die Option in  $t = 0$ ?

Ein fairer Preis ist ein Preis, der Arbitrage ausschließt und somit weder den Käufer noch den Verkäufer der Option benachteilt. Die Berechnung dieser Optionspreise für verschiedene Arten von Optionen ist Inhalt dieser Diplomarbeit.

Optionen lassen sich auch nach möglichen Ausübungszeitpunkten separieren.

### **Europäische Option**

Eine europäische Option ist ein Vertrag zu einem Preis  $P_E(S_t, t)$  (Put) oder  $C_E(S_t, t)$  (Call) zum Zeitpunkt  $t$  und Kurswert des Basisfinanzguts  $S$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $S_t$  mit Restlaufzeit  $T - t$ . Dem Käufer wird erlaubt, eine bestimmte Aktie zum Ende der Laufzeit für einen festgelegten Betrag  $K$  zu kaufen bzw. verkaufen, oder die Option verfallen zu lassen.

### **Amerikanische Option**

Eine amerikanische Option wird zum Preis  $P(S_t, t)$  (Put) oder  $C(S_t, t)$  (Call) in Abhängigkeit von der Restlaufzeit  $T - t$  und des aktuellen Kurswertes des Basisfinanzguts  $S_t$ , verkauft. Die amerikanische Option ist eine europäische Option mit dem zusätzlichen Recht, zu jedem Zeitpunkt während der Vertragslaufzeit von seinem Kauf- bzw Verkaufsrecht Gebrauch zu machen.

Deswegen muss eine amerikanische Option, bei gleichem Basisfinanzgut, gleicher Laufzeit und gleichem Ausübungsbetrag mehr Wert als eine europäische Option sein, weil es die Möglichkeit zur frühen, optimalen Ausübung gibt. Das ist auch der Grund, warum eine amerikanische Option mit Vertragslaufzeit  $T_1$  einen höheren Preis hat als eine mit  $T_2$  für  $T_1 > T_2$ .

Als innerer Wert einer amerikanischen Option wird der Gewinn bei sofortigem Ausüben der Option bezeichnet.

### **Basket Option**

Eine Basket Option basiert auf einem Portfolio von Aktien. Es kann also eine Vielzahl von Basisfinanzgütern geben, die alle miteinander korreliert sind. Basket Optionen können als europäische oder amerikanische Basket Optionen gehandelt werden.

Die Benutzung von einem Portfolio von Aktien als Basis hat den Vorteil, dass sich Risiken durch Korrelationseffekte minimieren lassen.

Kombiniert man zum Beispiel die Aktie eines ölfördernden Unternehmens und eines Ölverbrauchenden Unternehmens, hat man sich gegen Ölpreisschwankungen abgesichert, denn von einem Preisanstieg des Öls profitiert das ölfördernde Unternehmen und von einem Preisverfall das Ölverbrauchende Unternehmen.

Die Auszahlungsfunktion für einen Basketput auf zwei Finanzgüter ist  $(K - (S^1 + S^2))_+$ .

## 2.3 Mathematisches Modell

Der Inhalt dieses Kapitels soll einen kurzen Überblick über die Modellierung des Basisfinanzguts geben. Finanzmathematische Grundlagen werden nicht aufgeführt. In [1] und ähnlicher Fachliteratur kann der geneigte Leser diese Grundlagen nachlesen.

### 2.3.1 Der Kursverlauf

Grundlage für die Berechnungen ist ein Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{A}, Q)$$

$\Omega$  ist die Menge aller zukünftigen Zustände und  $\mathcal{A}$  eine Sigma-Algebra auf  $\Omega$ .

$Q$  ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des Eintritts von  $A \in \mathcal{A}$ .

Außerdem gibt es einen Zeithorizont mit natürlicher Filtration,

$$([0, T], \mathcal{F}_t)$$

die von einer stochastischen Prozess  $W_t$  erzeugt wird.

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{S}(W_s, s \leq t)$$

### Sichere Anlage

Es wird von einer stetigen Verzinsung von angelegtem oder geliehenen Kapitals ausgegangen. Wenn  $R_t$  den Betrag zum Zeitpunkt  $t$  angibt, der aus  $R_0$  entstanden ist, dann gilt mit dem konstanten Zinssatz  $r$ :

$$\begin{aligned} dR_t &= rR_t dt \\ d(\ln(R_t)) &= rdt \\ \ln(R_t) &= \int_0^t r dt + c \end{aligned}$$

Somit ist das Kapital in  $t$   $R_t = R_0 e^{rt}$  und  $e^{r(t-s)}$  der Verzinsungsfaktor von  $s$  nach  $t$  und  $e^{-r(t-s)}$  der Diskontierungsfaktor von  $t$  nach  $s$ ,  $s \leq t$ .

### Der Aktienkurs

Der zukünftige, unsichere Kurs einer Aktie muss modelliert werden: Es wird ein stetiger, stochastischer Prozess gesucht, der den realen Schwankungen einer Aktie ähnlich ist.

### Brownsche Bewegung

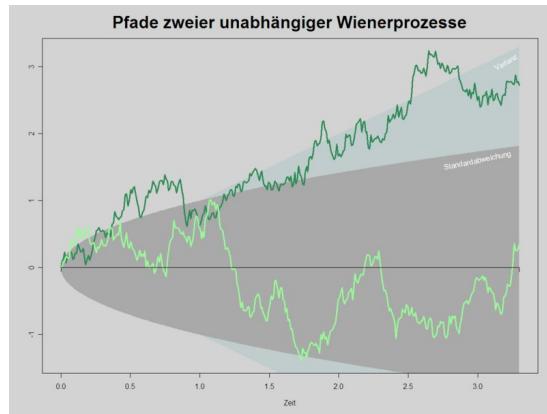
$$W : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

Wenn  $W_t(\omega)$  folgende 3 Bedingungen erfüllt, liegt eine Brownsche Bewegung (manchmal auch Wiener Prozess genannt) vor:

$$W_0(\omega) = 0 \quad Q - f - sw \tag{2.1}$$

$$W(\omega) : t \mapsto W_t(\omega) \text{ stetig für alle } t \in [0, T] \quad Q - f - s \quad (2.2)$$

$W_t(\omega)$  hat unabhängige Zuwächse und  $(W_t(\omega) - W_s(\omega)) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$   $t \geq s$  (2.3)



Negative Aktienkurse sind natürlich nicht sinnvoll und die Aktie sollte über die Zeit einen Wertzuwachs verbuchen, da auch der risikolose Zinssatz  $r$  echt größer als Null ist.

### Geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t(\omega) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t(\omega)} \quad (2.4)$$

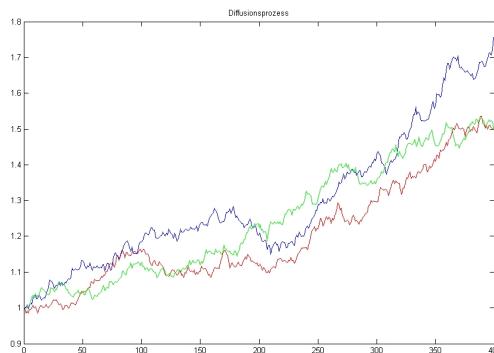
$\mu$  ist die Drift der Aktie, denn es gilt

$$E[S_t] = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} E[e^{\sigma W_t(\omega)}] = S_0 e^{\mu t}$$

da  $e^{\sigma W_t}$  log-normalverteilt ist und dies ist wie eine stetige Verzinsung des Startpreises  $S_0$  zum Zinssatz  $\mu$ .

Die Volatilität  $\sigma$  gibt den Einfluss des Risikos in Form einer Brownschen Bewegung auf den Aktienwert an.

Beide Faktoren werden als konstant angenommen.  $\mu$  ist größer als  $r$ , da die Aktie sonst nicht attraktiv wäre und  $\sigma$  echt größer als Null, damit der Wert der Aktie nicht gegen Null tendiert. Mögliche Verläufe einer Geometrischen Brownschen Bewegung stellt folgende Grafik dar.[20]



Der Verlauf einer Geometrischen Brownschen Bewegung kann durch eine stochastische Differentialgleichung dargestellt werden. Hierzu wird die Itô-Formel benutzt.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Es ist auch möglich, sich den Aktienverlauf über diese stochastische Differentialgleichung zu definieren und auf die geometrische Brownsche Bewegung zu kommen. Dafür muss, wie bei der sicheren Anlage, der Logarithmus benutzt werden.

Um den Zusammenhang zum Marktverlauf zu erkennen, stelle die Formel um.

$$dS_t = rS_t dt + \underbrace{(\mu - r)}_{\text{Risiko-Zuschlag}} S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Der Risiko-Zuschlag ist die zusätzliche Drift, die die geometrische Brownsche Bewegung erfährt, damit die Aktie für Anleger überhaupt interessant ist.

Durch das *No-Arbitrage-Theorem* ist die Arbitragefreiheit sichergestellt, wenn der diskontierte Aktienwertverlauf ein Martingal ist, also keine Drift besitzt.

Ziel ist es, mit der Girsanov-Transformation einen Maßwechsel vorzunehmen, unter dem die Drift der geometrischen Brownschen Bewegung  $r$  beträgt.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left( \frac{(\mu - r)}{\sigma} dt + dW_t \right)$$

Nach Girsanov ist  $\tilde{W}_t = W_t - vt$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , eine Brownsche Bewegung unter dem Maß  $\tilde{Q}$ . Umgestellt zu  $dW_t = d\tilde{W}_t + vdt$  erkennt man, dass

$$v = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

gelten muss, damit  $\tilde{Q}$  das Martingalmaß bezeichnet.

$$\Rightarrow \tilde{W}_t = W_t - \left( -\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t$$

Eingesetzt in die stochastische Differentialgleichung entsteht

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t. \quad (2.5)$$

Diese Differentialgleichung wird, unter dem neuen Maß, erfüllt von

$$S_t = S_0 e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \tilde{W}_t} \quad (2.6)$$

### Bemerkung

Das *Martingal-Representation-Theorem* stellt fest, dass der Markt, der aus diesem Aktienpreisprozess und einer sicheren Anlage besteht, vollständig ist. Aus der Vollständigkeit schließt das *second fundamental theorem of asset pricing*, dass  $\tilde{Q}$  eindeutig bestimmt ist. Siehe [1]

### 2.3.2 Mehrdimensionale Erweiterung

Um Basket Optionen zu bewerten, wird ein ähnliches Modell zur Modellierung des Verlaufs des Basisfinanzguts benötigt, wie im eindimensionalen Fall. Die Schwierigkeit entsteht dabei, dass die Summe von geometrischen Brownschen Bewegungen nicht wieder eine solche ist. In den zu Grunde liegenden Papern dieser Arbeit wird meist nur von korrelierten Finanzgütern gesprochen. Diese Grundlage soll hier noch einmal aufbereitet werden.

In der Realität unterliegt eigentlich jedes Paar Wertpapiere einer mehr oder weniger starken Korrelation. Diese Korrelationen herauszufinden, ist ein eigenes wissenschaftliches Thema. Gehe davon aus, dass es einen Vektor  $\tilde{W}_t$  aus zwei stochastisch unabhängigen Brownschen Bewegungen  $W_t^1$  und  $W_t^2$  gibt. Wenn nun daraus zwei korrelierte geometrische Brownsche Bewegungen konstruiert werden sollen, dann muß  $W_t^1$  und  $W_t^2$  in jeder der beiden Differentialgleichungen vorkommen.

$$dS_t^1 = \mu_1 S_t^1 dt + S_t^1 (\sigma_{12} dW_t^2 + \sigma_1 dW_t^1) \quad (2.7)$$

$$dS_t^2 = \mu_2 S_t^2 dt + S_t^2 (\sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_2 dW_t^2) \quad (2.8)$$

Die konstanten Werte  $\sigma_{12}$  und  $\sigma_{21}$  aus  $\mathbb{R}$  bezeichnen den Einfluß der jeweils anderen Brownschen Bewegung.

Nun soll, in Anlehnung an [1], für den 2 dimensionalen Fall ein Maßwechsel zum Martingalmaß vorgenommen werden.

Definiere  $\beta(t)$  als Verzinsungsprozess.

$$\beta(t) = e^{(rt)}$$

Nach dem Maßwechsel nach Girsanov sollte der diskontierte Werteprozess des Finanzguts keine Drift mehr besitzen.

Durch Anwenden der Quotientenregel im dt Fall entsteht mit der Itô-Formel:

$$d\left(\frac{S_t^i}{\beta}\right) = \frac{S_t^i}{\beta} \left[ (\mu_i - r)dt + \left( \sigma_{ij} dW_t^j + \sigma_i dW_t^i \right) \right] \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

Wenn der Maßwechsel durch eine mehrdimensionale Girsanov-Transformation erfolgen soll, dann sind  $\tilde{W}_t^1 = W_t^1 - \theta_1 t$  und  $\tilde{W}_t^2 = W_t^2 - \theta_2 t$  Brownsche Bewegungen unter dem neuen Maß  $\tilde{Q}$ . Nun müssen diese beiden Konstanten bestimmt werden. Setze dazu die beiden Gleichungen ein.

$$d\left(\frac{S_t^i}{\beta}\right) = \frac{S_t^i}{\beta} \left( \sigma_{ij}(\theta_j dt + d\tilde{W}_t^j) + \sigma_i(\theta_i dt + d\tilde{W}_t^i) \right) \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

Also muss für  $\theta_1$  und  $\theta_2$  folgendes gelten:

$$(\mu_i - r) = \sigma_{ij}\theta_j + \sigma_i\theta_i \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

Dementsprechend entsteht im Falle von n Basisfinanzgütern ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und n Gleichungen, welches eindeutig lösbar ist, wenn die Brownschen Bewegungen paarweise stochastisch unabhängig sind. In diesem Fall liegt ein vollständiger Markt vor und das Martingalmaß ist eindeutig bestimmt.

Die Lösung des Gleichungssystems für  $\theta_1$  und  $\theta_2$  ist im vorliegenden, zweidimensionalen Fall:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\sigma_{12}(\mu_2 - r) - \sigma_2(\mu_1 - r)}{\sigma_{21}\sigma_{12} - \sigma_1\sigma_2} \\ \theta_2 &= \frac{(\mu_2 - r)}{\sigma_2} - \frac{\sigma_{21}}{\sigma_2}\theta_1\end{aligned}$$

Über die mehrdimensionale Girsanov-Transformation kann nun explizit das neue Maß  $\tilde{Q}$  bestimmt werden.

Unter diesem Maß gilt für die stochastischen Differentialgleichungen von  $S_t^1$  und  $S_t^2$ :

$$\begin{aligned}dS_t^1 &= S_t^1(rdt + \sigma_{12}d\tilde{W}_t^2 + \sigma_1d\tilde{W}_t^1) \\ dS_t^2 &= S_t^2(rdt + \sigma_{21}d\tilde{W}_t^1 + \sigma_2d\tilde{W}_t^2)\end{aligned}$$

Diese lassen sich wieder in ein Black-Scholes-Modell verwandeln.

$$dS_t^1 = rS_t^1 dt + S_t^1 \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2} d\hat{W}_t^1 \quad (2.9)$$

$$dS_t^2 = rS_t^2 dt + S_t^2 \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2} d\hat{W}_t^2 \quad (2.10)$$

mit

$$\hat{W}_t^i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}} (\sigma_{ij}\tilde{W}_t^j + \sigma_i\tilde{W}_t^i) \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

In dieser Darstellung ist  $\hat{W}_t^i$ ,  $i = 1, 2$ , wieder eine Brownsche Bewegung unter  $\tilde{Q}$ :

$\hat{W}_t^i$  ist adaptiert an  $\mathcal{F}_t$ , hat stetige Pfade und ist ein Martingal, da die Differentialdarstellung  $d\hat{W}_t^i$  keinen Driftterm besitzt.

$$d\hat{W}_t^i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}} (\sigma_{ij}d\tilde{W}_t^j + \sigma_id\tilde{W}_t^i) \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

$$\begin{aligned}d\hat{W}_t^i d\hat{W}_t^i &= \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}} (\sigma_{ij}d\tilde{W}_t^j + \sigma_id\tilde{W}_t^i) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}} (\sigma_{ij}d\tilde{W}_t^j + \sigma_id\tilde{W}_t^i) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2} (\sigma_{ij}^2 d\tilde{W}_t^j d\tilde{W}_t^j + \sigma_i^2 d\tilde{W}_t^i d\tilde{W}_t^i) \\ &= dt \quad \forall t \quad i = 1, 2\end{aligned}$$

Nach dem Lévy Theorem, siehe [1], reichen diese Eigenschaften, damit eine Brownsche Bewegung vorliegt.

Die geometrischen Brownschen Bewegungen sind nun korreliert, da die Brownschen Bewegungen korreliert sind. Setze  $\hat{\sigma}_i = \sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}$  und definiere den konstanten Korrelationskoeffizienten  $\rho$  durch:

$$\begin{aligned} d\hat{W}_t^i d\hat{W}_t^j &= \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}} (\sigma_{ij} d\tilde{W}_t^j + \sigma_i d\tilde{W}_t^i) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ji}^2 + \sigma_j^2}} (\sigma_{ji} d\tilde{W}_t^i + \sigma_j d\tilde{W}_t^j) \right) \\ &= \frac{(\sigma_{ji}\sigma_i + \sigma_{ij}\sigma_j)}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2} \sqrt{\sigma_{ji}^2 + \sigma_j^2}} dt \\ &= \frac{(\sigma_{ji}\sigma_i + \sigma_{ij}\sigma_j)}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j} dt \\ &= \rho dt \quad \forall t \quad i \neq j \end{aligned}$$

Lösungen für die stochastischen Differentialgleichungen (2.10) und (2.11) sind:

$$S_t^1 = S_0^1 \exp \left( \left[ r - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} \right] t + \hat{\sigma}_1 \hat{W}_t^1 \right) \quad (2.11)$$

$$S_t^2 = S_0^2 \exp \left( \left[ r - \frac{\hat{\sigma}_2^2}{2} \right] t + \hat{\sigma}_2 \hat{W}_t^2 \right) \quad (2.12)$$

mit

$$\hat{W}_t^i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2}} (\sigma_{ij} \tilde{W}_t^j + \sigma_i \tilde{W}_t^i) \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

und

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\sigma_{ij}^2 + \sigma_i^2} \quad i = 1, 2 \quad j \neq i$$

## Notation

Von nun an gelte dass:

$Q$  anstatt  $\tilde{Q}$  das transformierte Maß bezeichnet und  $W_t$  die dazugehörige Brownsche Bewegung ist, es sei denn, es wird explizit im Text erwähnt.

Des Weiteren wird  $\sigma$  für  $\hat{\sigma}$  stehen.

Da auch Preise für immerhalb der Laufzeit angegeben werden sollen, definiere  $S_v^x$  als eine geometrische Brownsche Bewegung mit Startwert  $x = S_t$  zum Zeitpunkt  $v$ , wobei  $t < v$ .

$$S_v^x = S_t \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (v - t) + \sigma (W_v - W_t) \right)$$

Für  $t = 0$ :

$$S_v = S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) v + \sigma W_v \right)$$

## 2.4 Dividenden

Dividenden sind zyklische Auszahlungen der Firmen an ihre Aktienbesitzer. In Deutschland wird meist einmal im Jahr ein Teil des erwirtschafteten Gewinns ausgezahlt, aber nicht alle börsennotierten Firmen zahlen Dividenden an ihre Aktienbesitzer. In diesem Fall besteht der ganze Gewinn eines Aktienbesitzers aus Kursgewinnen. Gründe dafür können eine anstehende größere Investition sein, oder dass aus Prinzip keine Dividende bezahlt wird.

Die zyklische Dividendenzahlung wird auch *diskrete Dividendenzahlung* genannt.

Diese Zahlungsreihe birgt ein Problem: Der Optionsbesitzer bezieht keinen zusätzlichen Nutzen, wenn eine Dividende ausgezahlt wird. Also ist die Dividende vom Wert des Finanzguts abzuziehen. Bei diskreten Dividenden verliert der Verlauf der Aktie seine Stetigkeit, da Sprünge bei Dividendenauszahlung auftreten.

Da diese Art der Dividendenzahlung nicht optimal ist, werden *stetige Dividendenzahlungen* behandelt. Bei dieser Art von Dividendenzahlungen wird angenommen, dass die Dividende stetig ausgezahlt wird und proportional mit konstantem Faktor  $q$ , ( $q < r$ ), vom Aktienkurs abhängt.

Da Arbitrage ausgeschlossen ist muss die Dividende vom Verlauf des Basisfinanzguts abgezogen werden.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t W_t - qS_t dt = (r - q)S_t dt + S_t \sigma W_t \quad (2.13)$$

Diese Differentialgleichung wird erfüllt von:

$$S_t(\omega) = S_0 e^{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t(\omega)} \quad (2.14)$$

Bei dieser Darstellung existiert kein Stetigkeitsproblem.

### Bemerkung

Der diskontierte Aktienwert mit Dividendenauszahlungen unter dem Martingalmaß  $Q$  ist kein Martingal. Erst wenn die Dividende wieder angelegt wird, entsteht die Martingaleigenschaft und stellt die Arbitragefreiheit sicher.

## 2.5 Europäische Optionen

Im Folgenden wird eine Preisfunktion für europäische Optionen nach Black-Scholes angegeben.

### 2.5.1 Preis bei einem Basisfinanzgut

#### Putpreis

Definiere den Putpreis als Funktion vom Wert des Basisfinanzguts  $S_t = x$  und der Restlaufzeit  $(T - t)$ .

$$P_E(x, T - t) := E \left[ e^{-r(T-t)}(K - S_T)_+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Analog hierzu defiere den Callpreis als  $C_E(x, (T - t))$ .

Der stochastische Prozess  $S_t$  erfüllt die Markoveigenschaft, wodurch die Informationen  $\mathcal{F}_s$ ,  $s < t$ , für die Preisberechnung in  $t$  irrelevant sind.

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \exp \left( (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T \right) \\ &= S_0 \exp \left( (r - q - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \right) \exp \left( (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \\ &= \underbrace{S_t}_{\mathcal{F}_t \text{ messbar}} \underbrace{\exp \left( (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right)}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_t} \\ &= x \exp \left( (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \end{aligned}$$

Für die Preisberechnung wird als Erstes der Positivteil der Auszahlungsfunktion als Indikatorkfunktion ausgedrückt und die Linearität des Erwartungswertes genutzt.

$$\begin{aligned} &E \left[ e^{-r(T-t)}(K - S_T^x)_+ \right] \\ &= E \left[ e^{-r(T-t)}K \mathbb{1}_{(S_T^x < K)} - e^{-r(T-t)}S_T^x \mathbb{1}_{(S_T^x < K)} \right] \\ &= e^{-r(T-t)}K \cdot E \left[ \mathbb{1}_{(S_T^x < K)} \right] - E \left[ e^{-r(T-t)}S_T^x \mathbb{1}_{(S_T^x < K)} \right] \\ &= e^{-r(T-t)}K \cdot Q(S_T^x < K) - x E \left[ \exp \left( \left( -q - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \mathbb{1}_{(S_T^x < K)} \right] \\ &= e^{-r(T-t)}K \cdot Q(S_T^x < K) - x e^{-q(T-t)} E \left[ \exp \left( \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \mathbb{1}_{(S_T^x < K)} \right] \end{aligned}$$

Auf den Erwartungswert kann die Girsanov-Transformation angewendet werden, denn  $\exp \left( \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right)$  ist ein Martingal mit Start in  $t$  und

$$E \left[ \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2}(T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left( \frac{\sigma^2}{2}t - \sigma W_t \right) E \left[ \exp \left( \left( -\frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = 1.$$

Unter dem neuen Maß  $\bar{Q}$  ist  $(\bar{W}_T - \bar{W}_t) = (W_T - W_t) - \sigma(T-t)$  eine Brownsche Bewegung.

$$\begin{aligned} E & \left[ e^{-r(T-t)} (K - S_T^x)_+ \right] \\ &= e^{-r(T-t)} K \cdot Q[S_T^x < K] - xe^{-q(T-t)} \cdot \bar{Q}[S_T^x < K] \\ &= e^{-r(T-t)} K \cdot Q \left[ \exp \left( \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma(W_T - W_t) \right) < \frac{K}{x} \right] - xe^{-q(T-t)} \cdot \bar{Q}[S_T^x < K] \\ &= e^{-r(T-t)} K \cdot Q \left[ W_T - W_t < \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma} \right] - xe^{-q(T-t)} \cdot \bar{Q}[S_T^x < K] \end{aligned}$$

$(W_T - W_t) \sim \mathcal{N}(0, T-t)$  unter  $Q$ . Setze  $N$ ,

$$N[d] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung fest.

$$E \left[ e^{-r(T-t)} (K - S_T^x)_+ \right] = e^{-r(T-t)} K \cdot N \left[ \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] - xe^{-q(T-t)} \cdot \bar{Q}[S_T^x < K]$$

Betrachte das transformierte Maß  $\tilde{Q}$ .

$$\begin{aligned} \bar{Q}[S_T^x < K] &= \tilde{Q} \left[ \exp \left( \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma(W_T - W_t) \right) < \frac{K}{x} \right] \\ &= \bar{Q} \left[ W_T - W_t < \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma} \right] \\ &= \bar{Q} \left[ W_T - W_t - \sigma(T-t) < \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma} - \sigma(T-t) \right] \\ &= \bar{Q} \left[ \bar{W}_T - \bar{W}_t < \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma} \right] \\ &= N \left[ \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse zusammen liefern den Putpreis einer europäischen Option.

$$\begin{aligned} P_E(x, T-t) &= \\ e^{-r(T-t)} K \cdot N & \left[ \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] - xe^{-q(T-t)} \cdot N & \left[ \frac{\ln \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] \end{aligned}$$

### Callpreis

Aus dem Putpreis lässt sich direkt der Callpreis ableiten.

Die Auszahlungsfunktion verändert sich von  $(K - S_T) \mathbb{1}_{(K \geq S_T^x)}$  zu  $(S_T - K) \mathbb{1}_{(K \leq S_T^x)}$ . Es muss also der Putpreis mit  $-1$  multipliziert werden. Ebenso die Integralgrenze der Normalverteilung für die Eintrittswahrscheinlichkeit des Basisfinanzguts in den Positivteil der Auszahlungsfunktion. Falls  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  unter  $Q$ , dann folgt mit der Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung  $Q(X \geq a) = Q(X \leq -a)$  für  $a \in \mathbb{R}$ . Zusammen erhält man:

$$C_E(x, T-t) = \\ xe^{-q(T-t)} \cdot N \left[ \frac{\ln \left( \frac{x}{K} \right) + \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right] - e^{-r(T-t)} K \cdot N \left[ \frac{\ln \left( \frac{x}{K} \right) + \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right]$$

### 2.5.2 Preis bei mehreren Basisfinanzgütern

In dieser Sektion wird der Preis einer europäischen Putoption berechnet, die auf zwei Finanzgütern basiert. Genauso wie bei einem Basisfinanzgut wird auf eine Girsanov-Transformation zurückgegriffen. Die Bearbeitung erfolgt nach Lamberton, Lapeyre [9].

Für  $S_t^1 = x_1$  und  $S_t^2 = x_2$  ist die Preisfunktion:

$$P_E(x_1, x_2, t) = E \left[ e^{-r(T-t)} (K - (S_T^1 + S_T^2))_+ \mid \mathcal{F}_t \right] = E \left[ e^{-r(T-t)} (K - (S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2}))_+ \right]$$

Aufgrund der Konstruktion der zwei korrelierten Finanzgüter wird daraus, analog zum Fall mit einem Basisfinanzgut:

$$\begin{aligned} P_E(x_1, x_2, t) &= e^{-r(T-t)} K \cdot E \left[ \mathbb{1}_{(S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2}) \leq K} \right] \\ &\quad + x_1 e^{-q_1(T-t)} E \left[ \exp \left( -\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1 (W_T^1 - W_t^1) \right) \mathbb{1}_{(S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2}) \leq K} \right] \\ &\quad + x_2 e^{-q_2(T-t)} E \left[ \exp \left( -\frac{\sigma_2^2}{2}(T-t) + \sigma_2 (W_T^2 - W_t^2) \right) \mathbb{1}_{(S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2}) \leq K} \right] \end{aligned}$$

Benutze die Girsanov-Transformation.

$$\begin{aligned} P_E(x_1, x_2, t) &= e^{-r(T-t)} K \cdot Q \left[ S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2} \leq K \right] \\ &\quad + x_1 e^{-q_1(T-t)} \tilde{Q}^1 \left[ S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2} \leq K \right] \\ &\quad + x_2 e^{-q_2(T-t)} \tilde{Q}^2 \left[ S_T^{x_1 1} + S_T^{x_2 2} \leq K \right] \end{aligned}$$

Über die Brownschen-Bewegungen unter den Maßen  $\tilde{Q}^1$  und  $\tilde{Q}^2$ , die die Girsanov-Transformation liefert, können die Wahrscheinlichkeiten genauer berechnet werden. Dies ist aber nicht relevant für den Rest der Diplomarbeit.

## 2.6 Die Black-Scholes Differentialgleichung

Sei weiterhin  $S_t$  das Finanzgut, auf dem die Option basiert.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$f(S_t, t)$  sei der Preis einer Option mit Laufzeit  $T$  und Basisfinanzgut  $S$ , die nur vom aktuellen Wert des Finanzguts  $S_t$  und dem aktuellen Zeitpunkt  $t$  beziehungsweise der Restlaufzeit abhängt. Die Optionen, die diese Eigenschaft erfüllen sind sowohl europäische als auch amerikanische Put- und Calloptionen. Ein Beispiel für eine Option die diese Eigenschaft nicht besitzt, ist die Lookback-Option.

$$f : ]0, \infty[ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Wenn die Preisfunktion zweimal stetig in der ersten und einmal stetig in der zweiten Variable differenzierbar ist, dann kann die Itô-Formel angewendet werden.

$$\begin{aligned} df(S_t, t) &= \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} d\langle S, S \rangle_t \\ &= \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} dS_t \\ &= \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} (rS_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} dW_t \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung entsteht durch Auflösen der quadratischen Variation  $d\langle S, S \rangle_t = \sigma^2 S_t^2 dt$ , wegen  $d\langle W, W \rangle_t = dt$ .

Da von einem Modell mit einer sicheren Anlage und einem stochastischen Prozess ausgegangen wird, liefert das *Martingale Representation Theorem*, [1], die Vollständigkeit des Modells. Deswegen kann die Auszahlungsstruktur der Option, durch ein geeignetes, risikoloses Portfolio dubliziert werden.

Kaufe die Option  $f$  und verkaufe einen konstanten Teil  $\Delta$  von  $S$ . Der Wert des Portfolios ist

$$A(S_t, t) = f(S_t, t) - \Delta S_t$$

und als stochastische Differentialgleichung:

$$dA(S_t, t) = df(S_t, t) - \Delta dS_t.$$

Setze nun die Formeln für  $df(S_t, t)$  und  $dS_t$  ein.

$$dA(S_t, t) = \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} - rS_t \Delta \right) dt + \sigma S_t \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} - \Delta \right) dW_t$$

Da risikolos dubliziert werden soll, muss die Unsicherheit wegfallen.

$$\sigma S_t \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} - \Delta \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S}$$

$$\Rightarrow dA(S_t, t) = \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt$$

Das Portfolio verändert sich aber über die Zeit wie eine sichere Anlage:

$$dA(S_t, t) = r \left( f(S_t, t) - \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} S_t \right) dt$$

Da bei beiden Strategien durch die gleiche Auszahlungsstruktur den gleichen Preis haben müssen, folgt:

$$dA(S_t, t) = \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \left( rf(S_t, t) - rS_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} \right) dt = \left( \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt$$

$$\Rightarrow rf(S_t, t) - rS_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} = \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2}$$

Umgestellt ergibt sich eine partielle Differentialgleichung, die auch Black-Scholes-Differentialgleichung genannt wird.

$$\frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} - rf(S_t, t) + rS_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} = 0 \quad (2.15)$$

Bei Dividendenzahlung verändert sich die partielle Differentialgleichung zu:

$$\frac{\partial f(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S^2} - rf(S_t, t) + (r - q)S_t \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S} = 0 \quad (2.16)$$

### Randwerte für Put und Call

Am Ende der Laufzeit muss der Wert der Option  $f(S_T, T) = (S_T - K)_+$  bzw  $f(S_T, T) = (K - S_T)_+$  entsprechen, da sonst Arbitragemöglichkeiten entstehen. Eine Limesbetrachtung für  $S_t$ , in Abhängigkeit der Auszahlungsfunktion, kann durchgeführt werden.

Für die Calloption gilt  $f(S, t) \sim S$  für  $S \rightarrow \infty$  und  $\lim_{S \rightarrow \infty} f(S, t) = 0$ , da eine Kaufoption vorliegt.

Ebenso kann für die Putoption  $\lim_{S \rightarrow \infty} f(S, t) = 0$  und  $\lim_{S \rightarrow 0} f(S, t) = e^{-r(T-t)}K$  festgestellt werden.

### Bemerkung

Es ist auch möglich, über die Differentialgleichung und Randwerte die Lösung für das Black-Scholes-Modell der europäischen Option anzugeben.

## Kapitel 3

# Die Grenzfunktion

### 3.1 Die Preisfunktion und optimales Stoppen

Dieses Kapitel beschränkt sich auf die Betrachtung des Putpreises.

Um die Arbitragefreiheit im Modell zu bewahren, definiere den Preis einer amerikanischen Putoption  $P(x, t)$  in  $t$  und mit aktuellem Basisgutwert  $S_t = x$  und Laufzeit  $T$  durch:

$$P(x, t) = \sup_{\tau \in \Psi_t^T} E[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)_+ | \mathcal{F}_t] = \sup_{\tau \in \Psi_t^T} E[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau^x)_+]$$

$\Psi$  ist die Menge aller Stoppzeiten bezüglich der Filtration  $\mathcal{F}$  und  $\Psi_t^T \subset \Psi$ , die Menge aller Stoppzeiten aus  $\Psi$  aus dem Intervall  $[t, T]$ .

Für diesen Preisprozess gilt:

$$P(S_t, t) \geq (K - S_t)_+, \quad S_t \in ]0, \infty[, \quad t \in [0, T]$$

Insbesondere

$$P(S_t, t) = \begin{cases} > (K - S_t)_+ & \text{vor optimaler Ausübung} \\ = (K - S_t)_+ & \text{nach optimaler Ausübung} \end{cases}$$

Die strikte Ungleichung ist grade die Aussage der Optimalität, siehe Krylov, [11].

#### Stetigkeit

Die mathematische Argumentation für die Stetigkeit der Preisfunktion in den Variablen  $t$  und  $x$  geht zurück auf Krylov, [11].

#### Übergangsbedingung

McKean zeigt in [15], dass die Ableitung in  $S$  der Preisfunktion stetig am Auslösepunkt ist. Sei  $S_\tau$  der optimale Wert zum Auslösen.

$$\frac{\partial P(S_t, \tau)}{\partial S} \Big|_{S=S_\tau} = \frac{\partial(K - S_t)}{\partial S} \Big|_{S=S_\tau} = -1$$

Häufig wird diese Gleichung Smooth-Fit-Eigenschaft genannt. Damit ist es möglich die erweiterte Itô-Formel auf die Funktion  $P(S_t, t)$  über die komplette Laufzeit der Option anzuwenden, siehe Karatzas und Shreve [16]. Dies war vorher nicht möglich, da  $P(S_t, t)$  keine  $C^2$ -Funktion ist. Es existiert eine Unstetigkeitsstelle der zweiten Ableitung im Auslösezeitpunkt.

$\frac{\partial^2(K - S)}{\partial S^2} \equiv 0$  und  $\frac{\partial P^2}{\partial S^2} > 0$ . Im Folgenden ist die erweiterte Itô-Formel gemeint, wenn von der Itô-Formel gesprochen wird.

**Satz**

Der diskontierte Putpreis  $e^{-rt}P(S_t, t)$  ist ein Supermartingal.

**Beweis**

Bestimme die Drift des diskontierten Putpreises  $e^{-rt}P(S_t, t)$  über die Itô-Formel.

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}P(S_t, t)) &= e^{-rt} \left( \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - rP(S_t, t) + rS_t \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \right) dt \\ &\quad + rS_t \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} dW_t \end{aligned}$$

Vor der Ausübung erfüllt der Preis die Black-Scholes-Differentialgleichung, da er nur vom aktuellen Wert von  $S$  und  $t$  abhängt. Durch Einsetzen der Auszahlungsfunktion erkennt man, dass der Preis die partielle Differentialgleichung nach Ausübung nicht erfüllt. Somit gilt die Black-Scholes-Differentialgleichung bis zum Ausüben, weswegen auch häufig von einem freien Randwertproblem gesprochen wird. Die Drift fällt hier somit weg.

Nach Ausübung der Option gilt  $P(S_t, t) = (K - S_t)$ , da nur bei positiven Werten ausgeübt wird.

$$\begin{aligned} &e^{-rt} \left( \frac{\partial(K - S_t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2(K - S_t)}{\partial S^2} - r(K - S_t) + rS_t \frac{\partial(K - S_t)}{\partial S} \right) dt \\ &= e^{-rt} (-rK + rS_t - rS_t) dt \\ &= -e^{-rt} rK dt. \end{aligned}$$

Der Preisprozess hat also die Tendenz zu fallen, nachdem die Option ausgeübt wurde. □

Damit ist die diskontierte Preisfunktion ein Martingal bis zur Ausübung und danach ein Supermartingal, also insgesamt ein Supermartingal. Sei  $\tau^*$  die optimale Stoppzeit. Mit dem *Optimal-Sampling-Theorem* und  $Q(\tau^* < T) = 1$ , für  $T < \infty$ , folgt, dass das gestoppte Supermartingal ein Martingal ist.

**Korollar**

Damit ist die optimale Stoppzeit gegeben durch

$$\tau^* = \inf \{t \mid P(S_t, t) = (K - S_t)_+ \}.$$

**Bemerkung**

Aus der Supermartingal- und Stetigkeitseigenschaft kann gefolgert werden, dass die Funktion  $P(S_t, t)$  eindeutig bestimmt ist. Näheres ist in [1] nachzulesen.

Bezeichne durch

$$\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid P(x, t) > (K - x)_+\} \tag{3.1}$$

die Fortführungsregion, in der die Putption optimalerweise nicht ausgeübt wird.

**Satz**

Die Fortführungsregion ist offen und wird von  $\Gamma^c$  durch eine Funktion  $a(t)$  getrennt.

$$\Gamma_t = \{x \mid (x, t) \in \Gamma, t \in [0, T] \text{ fest}\} = ]a(t), +\infty[$$

**Beweis**

Fixiere  $t$ .

Es ist zu zeigen, dass für ein beliebiges, suboptimales  $x$ , jedes  $y$ ,  $x < y$ , auch suboptimal ist.  $\tau$  sei die optimale Stoppzeit bei Startwert  $x$  in  $t$ . Damit ist  $\tau$  auch eine Stoppzeit bei Startwert  $y$ , aber suboptimal, da  $x < y$ .

$$\begin{aligned} P(y, t) - P(x, t) &= P(y, t) - E[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau^x)_+] \\ &\geq E[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau^y)_+] - E[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau^x)_+] \\ &= E[e^{-r(\tau-t)}((K - S_\tau^y)_+ - (K - S_\tau^x)_+)] \end{aligned}$$

Eine Funktion lässt sich in Positivteil und Negativteil zerlegen.

$$f(x) = f(x)^+ - f(x)^-$$

Außerdem ist  $S_\tau^y > S_\tau^x$ , da beide auf der selben Brownschen Bewegung basieren.

Zusammen liefern die beiden Aussagen eine weitere Abschätzung.

$$\begin{aligned} P(y, t) - P(x, t) &\geq E[e^{-r(\tau-t)}((K - S_\tau^y)_+ - (K - S_\tau^x)_+)] \\ &= E[e^{-r(\tau-t)}((K - S_\tau^y) - (K - S_\tau^x))] + E[e^{-r(\tau-t)}((K - S_\tau^y)_- - (K - S_\tau^x)_-)] \\ &\geq E[e^{-r(\tau-t)}((K - S_\tau^y) - (K - S_\tau^x))] \\ &= E[e^{-r(\tau-t)}(S_\tau^y - S_\tau^x)] \\ &= E[e^{-r(\tau-t)}S_\tau^y] - E[e^{-r(\tau-t)}S_\tau^x] \\ &= (y - x) \end{aligned}$$

Da  $\tau$  endlich ist, gilt nach dem *Optimal Sampling Theorem*, dass das gestoppte Martingal wieder ein Martingal ist und somit gleich seinem Startwert.

Für den Preisprozess mit Startpunkt  $y$  gilt also:

$$P(y, t) \geq (y - x) + P(x, t) > (y - x) + (K - x)_+ \geq (K - y)$$

Die Behauptung  $P(y, t) > (K - y)_+$  folgt mit der Tatsache, dass der Preis einer amerikanischen Putoption immer echt größer als Null ist.

□

Das heißt  $a(t)$  nimmt nur einen Wert für jedes  $t$  an und kann also als Funktion bezeichnet werden.

$$a : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

**Bemerkung**

Da ein arbitragefreies Modell vorliegt, muss

$$a(T) = K \quad (3.2)$$

gelten. Am Ende der Vertragslaufzeit zum Zeitpunkt  $T$  übt man nur aus, wenn die Auszahlung positiv ist.

$\mathbb{R}^{>0} \times [0, T]$  ist darstellbar als disjunkte Vereinigung folgender Mengen:

$$\text{Fortführungsregion } \Gamma = (a(t), +\infty) \times [0, T]$$

$$\text{Stoppregion } \Gamma^c = (0, a(t)] \times [0, T], \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in \mathbb{R}^+$$

Die Menge  $\Gamma$  ist nicht leer, da  $S_0 > a(0)$  angenommen wird.

### 3.2 Amerikanische Basketoptionen und deren Grenzregionen

Wie bei der mehrdimensionalen europäischen Basketoption wird nur der Putfall betrachtet. Definiere die Preisfunktion einer amerikanischen Basketoption mit Ausübungspreis K und Laufzeit T analog zum eindimensionalen Fall. Sei  $x_1 = S_t^1$  und  $x_2 = S_t^2$ .

$$P(x_1, x_2, t) = \sup_{\tau \in \Psi_t^T} E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau^1 - S_\tau^2)_+ \mid \mathcal{F}_t \right] = \sup_{\tau \in \Psi_t^T} E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau^{x_1 1} - S_\tau^{x_2 2})_+ \right]$$

Auch hier gilt aus Arbitragegründen

$$P(S_T^1, S_T^2, T) = (K - S_T^1 - S_T^2)_+$$

und

$$P(S_t^1, S_t^2, t) \geq (K - S_t^1 - S_t^2)_+.$$

Die Option wird ausgelöst, wenn das Tripel  $(S_t^1, S_t^2, t)$  die Stoppregion trifft. Betrachtet man nur ein Finanzgut, so hängt der Auslösezeitpunkt nicht nur von  $t$ , sondern auch vom aktuellen Wert des anderen Finanzguts ab. Betrachtet man simultan beide Grenzfunktionen  $a^1(S_t^2, t)$  und  $a^2(S_t^1, t)$ , so müssen diese zu einer gleichen führen: Der optimal Zeitpunkt zu stoppen ist bei beiden gleich.

Für die Stoppregion  $\{(x_1, x_2, t) \mid P(x_1, x_2, t) = (K - x_1 - x_2)_+, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, \quad t \in [0, T]\}$  können einige Eigenschaften verifiziert werden, deren Ausarbeitung auf [21] beruht.

#### Abgeschlossenheit

Mit der mehrdimensionalen Itô-Formel und der mehrdimensionalen Black-Scholes-Differentialgleichung kann gezeigt werden, dass der abgezinste Preisprozess ein Martingal bis zur Ausübung und danach ein Supermartingal ist. Dies gilt analog zum eindimensionalen Fall. Damit ist die Stopzeit die erste Eintrittszeit in die Stoppregion und da der Preisprozess auf einer Stopzeit beruht, muss die Stoppregion abgeschlossen sein.

#### Konvexität

Die Konvexität folgt über die Konvexität der Preisfunktion. Das Supremum einer Menge konvexe Funktionen ist wieder konvex. Daraus folgt für  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

$$\begin{aligned} P(\lambda x + (1 - \lambda)w, \lambda y + (1 - \lambda)z, t) &\leq \lambda P(x, y, t) + (1 - \lambda)P(w, z, t) \\ &= \lambda(K - x - y) + (1 - \lambda)(K - w - z) \\ &= K - (\lambda x + (1 - \lambda)w) - (\lambda y + (1 - \lambda)z), \end{aligned}$$

wenn  $P(x, y, t) = (K - x - y)$  und  $P(w, z, t) = (K - w - z)$  gilt.

Die gewünschte Eigenschaft folgt wegen  $P(S_t^1, S_t^2, t) \geq (K - S_t^1 - S_t^2)_+$ .

### Southwest Connectedness

Die SC sagt aus, dass wenn ein Triple  $(x, y, t)$  in der Stoppregion ist, dies auch für alle Tripel  $(a, b, t)$ ,  $a \leq x$  und  $b \leq y$  gilt. Mathematisch zu zeigen ist also

$$P(\lambda_1 x, \lambda_2 y, t) = (K - \lambda_1 x - \lambda_2 y)_+, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1,$$

wenn

$$P(x, y, t) = (K - x - y)_+$$

gilt.

Sei  $\tau$  eine Stoppzeit und  $xS_t$  stellt die geometrischen Brownschen Bewegungen mit Startwert  $x$  dar.

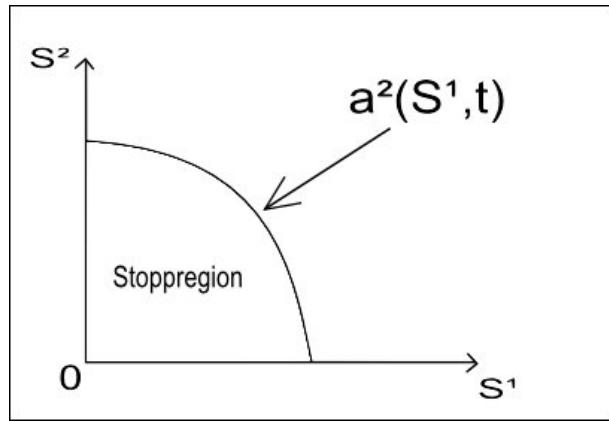
$$\begin{aligned} & E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - \lambda_1 x S_\tau^1 - \lambda_2 y S_\tau^2)_+ \right] \\ &= E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - \lambda_1 x S_\tau^1 - \lambda_2 y S_\tau^2)_+ \right] \pm E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - x S_\tau^1 - y S_\tau^2)_+ \right] \\ &\leq E \left[ e^{-r(\tau-t)} ((-\lambda_1 x - x) S_\tau^1 - (\lambda_2 y - y) S_\tau^2)_+ \right] + E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - x S_\tau^1 - y S_\tau^2)_+ \right] \\ &= E \left[ e^{-r(\tau-t)} \left( \underbrace{(x - \lambda_1 x)}_{\geq 0} S_\tau^1 + \underbrace{(y - \lambda_2 y)}_{\geq 0} S_\tau^2 \right)_+ \right] + E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - x S_\tau^1 - y S_\tau^2)_+ \right] \\ &= E \left[ e^{-r(\tau-t)} ((x - \lambda_1 x) S_\tau^1 + (y - \lambda_2 y) S_\tau^2) \right] + E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - x S_\tau^1 - y S_\tau^2)_+ \right] \\ &= E \left[ e^{-r(\tau-t)} (x - \lambda_1 x) S_\tau^1 \right] + E \left[ e^{-r(\tau-t)} (y - \lambda_2 y) S_\tau^2 \right] + E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - x S_\tau^1 - y S_\tau^2)_+ \right] \end{aligned}$$

Die Ungleichung entsteht durch  $c_+^1 - c_+^2 \leq (c^1 - c^2)_+$  für Funktionen  $c^1$  und  $c^2$ .

Benutze das Lemma von Fatou, um das Supremum in den Erwartungswert zu ziehen. Das Ergebnis liefert dann die Martingaleigenschaft des diskontierten Basisfinanzguts und die Arbitragefreiheit.

$$\begin{aligned} P(\lambda_1 x, \lambda_2 y, t) &\leq \sup_{\tau \in \Psi_t^T} E \left[ e^{-r(\tau-t)} (x - \lambda_1 x) S_\tau^1 \right] + \sup_{\tau \in \Psi_t^T} E \left[ e^{-r(\tau-t)} (y - \lambda_2 y) S_\tau^2 \right] + P(x, y, t) \\ &\leq E \left[ \sup_{\tau \in \Psi_t^T} e^{-r(\tau-t)} (x - \lambda_1 x) S_\tau^1 \right] + E \left[ \sup_{\tau \in \Psi_t^T} e^{-r(\tau-t)} (y - \lambda_2 y) S_\tau^2 \right] + (K - x - y) \\ &= (x - \lambda_1 x) + (y - \lambda_2 y) + (K - x - y) \\ &= K - (\lambda_1 x + 1 - \lambda_2 y) \end{aligned}$$

Durch diese Eigenschaften kann eine Skizze für festes  $t$  erstellt werden.



Die Schnittpunkte mit den Achsen lassen sich berechnen. Es gilt  $\lim_{S^1 \rightarrow 0} a^2(S^1, t) = a(t)$ , wobei  $a(t)$  die Grenzfunktion zu einer Putoption mit Ausübungspreis  $K$  und Basisfinanzgut  $S^2$  zum Zeitpunkt  $t$  ist.

### 3.3 Steigung, Stetigkeit und Konvexität

Es können einige Aussagen über die Eigenschaften der Grenzfunktion gemacht werden. Dies ist wichtig für das Verständnis der Funktion und es sagt einiges über die Praxistauglichkeit und Möglichkeit der numerischen Annäherung aus.

Der folgende Monotonie- und Stetigkeitsbeweis stützt sich auf das Paper von Jacka [2].

#### Steigung

Bei festem Wert des Basisfinanzguts  $S_t$  ist die Putoption wertvoller je kleiner  $t$  ist, denn  $\Psi_{t-\epsilon}^T \subseteq \Psi_t^T$ ,  $\epsilon > 0$ . Es folgt:

$$\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} \leq 0$$

Für festes  $t$  muss der Preis für die Putoption bei steigendem  $S_t$  fallen, denn die Wahrscheinlichkeit nimmt ab, dass die Grenzregion getroffen wird. Also:

$$\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \leq 0$$

Hieraus folgt die Steigungseigenschaft der Grenzfunktion:

Da  $P(S_t, \cdot)$  fallend ist und  $a(t) + \epsilon$  in der Fortführungsregion zum Zeitpunkt  $t$  liegt, gilt:

$$P(a(t) + \epsilon, t - \delta) \geq P(a(t) + \epsilon, t) > (K - (a(t) + \epsilon))_+$$

Das heißt im Zeitpunkt  $(t - \delta)$  ist  $a(t) + \epsilon$  noch nicht in die Stoppregion.

$$\Rightarrow a(t - \delta) \leq a(t)$$

Die Grenzfunktion für den Put ist monoton steigend.

Analog lässt sich zeigen, dass die Grenzfunktion für den Call monoton fallend ist.

#### Stetigkeit

Der Beweis der Stetigkeit der Grenzfunktion beruht auf dem Paper [2] von Jacka und besteht aus zwei Teilen. Als erstes wird die Stetigkeit von links über die Eigenschaften der Preisfunktion und der Grenzfunktion gezeigt. Die Stetigkeit von rechts erfordert mehr Arbeit.  $P(S_t, t)$  sei weiterhin die Preisfunktion,  $a(t)$  die Grenzfunktion und  $g(y)$  die Auszahlungsfunktion. Für diesen Beweis werden die Funktionen rückwärts durch die Zeit betrachtet. Nehme also die Bijektion

$$t = T - \chi$$

für  $\chi \in [0, T]$ .

Also ist die Grenzfunktion monoton fallend in  $t$  und  $\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t}$  ist positiv.

#### Linksstetigkeit

$P(S_t, t)$  ist stetig in beiden Variablen und  $g(y)$  als Kombination stetiger Funktionen wieder stetig. Die Fortführungsregion  $\Gamma$ , definiert als

$$\Gamma = \{(S_t, t) \mid P(S_t, t) - g(S_t) > 0, S_t \in ]0, \infty[, t \in [0, T]\},$$

ist also offen. Definiere die Stoppregion  $\Gamma^c$ ,

$$\Gamma^c = \{(S_t, t) \mid P(S_t, t) - g(S_t) = 0, S_t \in ]0, \infty[, t \in [0, T]\}.$$

Wenn nun eine Folge  $(t_n)_n$  von unten gegen ein  $t$  konvergiert, folgt aus der Abgeschlossenheit von  $\Gamma^c$ , dass  $(a(t_n), t_n)$  für alle  $n$  und der Grenzwert der Folge in  $\Gamma^c$  liegt.

Es bleibt also zu zeigen, dass  $a(t_n)$  gegen  $a(t)$  konvergiert.

Da  $\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} \geq 0$  gilt, wird für steigende  $t$  und festes  $S_t$  der Preis größer. Da die Folge in der Stoppregion bleibt und  $g(y)$  nicht von  $t$  abhängt, muss  $S_t$  steigen, da  $\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \leq 0$  gilt. Also gilt  $a(t^-) \leq a(t)$ . Da aber  $a(t)$  monoton fallend ist, gilt  $a(t^-) \geq a(t)$ , woraus  $a(t_n) \rightarrow a(t)$  folgt.

Damit ist die Linksstetigkeit bewiesen.

### Rechtsstetigkeit

Der Beweis beruht auf Abschätzungen der Black-Scholes-Differentialgleichung,

$$-\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} - rP(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} = 0,$$

der Preisfunktion in der Fortführungsregion  $\Gamma$ . Beachte  $t = T - \chi$ .

Da  $\frac{\partial P}{\partial t} \geq 0$  und  $\frac{\partial P}{\partial S} \leq 0$  gilt, gelangt man zu

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} \geq rP(S_t, t).$$

Definiere nun die Menge  $\Gamma_n$  durch

$$\Gamma_n = \Gamma \cap [0, K] \times \left[ \frac{1}{n}, n \right],$$

für  $n$  und  $\frac{1}{n}$  aus  $]0, T[$ .

Die Menge ist kompakt, da sie abgeschlossen und beschränkt ist. Deswegen nimmt  $P(S_t, t)$ , als stetige Funktion, auf der Menge ein Minimum an. Zusätzlich muss der Preis der Option in der Menge größer Null sein, woraus die Abschätzung

$$\inf_{(S_t, t) \in \Gamma_n} \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} \geq \epsilon_n > 0$$

entsteht.

Wähle nun ein festes  $t \in ]0, T[$  und  $n$  so, dass  $\frac{1}{n} \leq t < n$  gilt. Nehme außerdem ein  $u$  aus dem Intervall  $[N, t)$  und ein  $S$  aus  $[a(t^+) + \eta, K]$ . Das Ziel ist es, zu zeigen, dass der Wert des Basisfinanzguts für alle  $\eta > 0$  zum Zeitpunkt  $u$ , in der Fortführungsregion liegt. Dies ist äquivalent zu  $P(S, u) - g(S, u) > 0$ . Da  $P(a(t), t)$  und  $g(a(t))$  übereinstimmen,  $P(S_t, t)$  eine  $C^2$  Funktion in  $S$  in der Fortführungsregion ist und die zweite Ableitung von  $g(y)$  verschwindet, kann folgende Gleichungskette aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} P(S, u) - g(S, u) &= P(S, u) - g(S, u) + P(a(u), u) - P(a(u), u) \\ &= P(S, u) - P(a(u), u) - [g(S, u) - g(a(u), u)] \\ &= \int_{a(u)}^S \frac{\partial P(\xi, u)}{\partial S} - \frac{\partial g(\xi, u)}{\partial S} d\xi \\ &= \int_{a(u)}^S \frac{\partial P(\xi, u)}{\partial S} - \frac{\partial g(\xi, u)}{\partial S} - \frac{\partial P(a(u), u)}{\partial S} + \frac{\partial g(a(u), u)}{\partial S} d\xi \\ &= \int_{a(u)}^S \int_{a(u)}^\xi \frac{\partial^2 P(\varsigma, u)}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 g(\varsigma, u)}{\partial S^2} d\varsigma d\xi \end{aligned}$$

Durch Multiplizieren mit Eins kann das Doppelintegral mit  $\epsilon_n$  abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned}
 P(S, u) - g(S, u) &= \int_{a(u)}^S \int_{a(u)}^{\xi} 1 \cdot \frac{\partial^2 P(\varsigma, u)}{\partial S^2} d\varsigma d\xi \\
 &= \int_{a(u)}^S \int_{a(u)}^{\xi} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right) \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right)^{-1} \frac{\partial^2 P(\varsigma, u)}{\partial S^2} d\varsigma d\xi \\
 &\geq \epsilon_n \int_{a(u)}^S \int_{a(u)}^{\xi} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right)^{-1} d\varsigma d\xi \\
 &= \epsilon_n \int_{a(u)}^S \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right)^{-1} (\xi - a(u)) d\xi \\
 &= \epsilon_n \frac{2}{\sigma^2} \frac{(S - a(u))^2}{K^2} > 0
 \end{aligned}$$

Wenn nun eine Folge  $(u_n)_n$  von oben gegen  $t$  fällt, gilt mit der Stetigkeit von  $P(S_t, t)$  und  $g(y)$

$$P(a(t^+) + \eta, t) - g(a(t^+) + \eta, t) \geq \epsilon_n \frac{2}{\sigma^2} \frac{(S - a(t^+))^2}{K^2} > 0$$

für alle  $\eta > 0$  und damit  $a(t^+) \geq a(t)$ .

Da aber  $a(t)$  auch fallend in  $t$  ist folgt die Rechtsstetigkeit.

## Konvexität

Im Januar 2008 veröffentlichten Xinfu Chen und John Chadam von der University of Pittsburgh zusammen mit Lishang Jiang von der Tongji University und Weian Zheng von der University of California, Irvine, [12], den Beweis der schon länger vermuteten und bis dahin nur in numerischen Simulationen zu erkennenden strengen Konvexität der Grenzfunktion. In diesem Fall musste allerdings ein Basisfinanzgut benutzt werden, dass keine Dividenden zahlt, denn es gibt Konstellationen, die die Konvexität verletzen würden [J. Detemple]. Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Er ist nachzulesen in [12].

### 3.4 Das Verhalten am Ende der Laufzeit

Einen Einfluß auf die Anwendbarkeit der Ergebnisse der Integraldarstellungen wird die Steigung der Grenzfunktion zum Ende der Laufzeit haben. Guy Barnes hat in seinem Paper *Critical Stock Price Near Expiration* [5] einen Beweis dafür geliefert, dass die Grenzfunktion kurz vor Fälligkeit der Option eine unendlich große Steigung durchläuft. Dieser Beweis soll ausgeführt werden.

Die Preisfunktion eines amerikanischen Puts erfüllt folgende benötigte Voraussetzungen:

$$P(S_t, t) \geq (K - S_t)_+ \quad P(S_T, T) = (K - S_T)_+$$

und

$$\frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - rP(S_t, t) + rS_t \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} = 0$$

vor Ausübung.

Dies lässt sich auch schreiben als:

$$\min \left[ \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - rP(S_t, t) + rS_t \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} , \quad P(S_t, t) - (K - S_t)_+ \right] = 0 \quad (3.3)$$

$$P(S_T, T) = (K - S_T)_+ \quad (3.4)$$

$a(t)$  sei weiterhin die Grenzfunktion für die amerikanische Putoption. Die zentrale Aussage des Papers ist:

#### Satz

$$\frac{a(t) - K}{K} \sim -\sigma \sqrt{(T-t) |\ln(T-t)|} \quad \text{für } t < T, t \text{ nahe } T$$

Das ist eine andere Schreibweise für:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{\frac{a(t) - K}{K}}{-\sigma \sqrt{(T-t) |\ln(T-t)|}} = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{a(\tau) - K}{K}}{-\sigma \sqrt{\tau |\ln(\tau)|}} = 1 \quad \text{für } \tau = T-t$$

#### Bemerkung

Die Steigung folgt mir dem Differenzenquotienten.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow T} \frac{\frac{a(t) - K}{K}}{-\sigma \sqrt{(T-t) |\ln(T-t)|}} = 1 \\ \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow T} \frac{a(t) - a(T)}{\sqrt{(T-t) |\ln(T-t)|}} = \lim_{t \rightarrow T} -K \sigma \sqrt{|\ln(T-t)|} \\ \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow T} \frac{a(T) - a(t)}{T-t} = K \sigma \lim_{t \rightarrow T} \frac{\sqrt{|\ln(T-t)|}}{\sqrt{(T-t)}} \end{aligned}$$

**Beweis**

Nehme an, dass es Lösungen  $U^+(S_t, t)$  und  $U^-(S_t, t)$ , in  $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$ , für die beiden folgenden Terme gibt.

$$\min \left[ \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^+(S_t, t)}{\partial S^2} - rU^+(S_t, t) + rS_t \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} , U^+(S_t, t) - (K - S_t)_+ \right] \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\min \left[ \frac{\partial U^-(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^-(S_t, t)}{\partial S^2} - rU^-(S_t, t) + rS_t \frac{\partial U^-(S_t, t)}{\partial S} , U^-(S_t, t) - (K - S_t)_+ \right] \leq 0 \quad (3.6)$$

$U^+(S_t, t)$  heißt Supersolution und  $U^-(S_t, t)$  Subsolution von  $P(S_t, t)$ .

Nehme weiter an, zu  $U^+(S_t, t)$  gibt es eine eindeutige Funktion  $a^+(t) > 0$ , die  $\forall t \in [t^+, T]$ , ab einem  $t^+ \in (0, T)$  folgende Gleichung erfüllt

$$U^+(a^+(t), t) = (K - a^+(t))_+$$

Ebenso soll es zu  $U^-(S_t, t)$  eine eindeutige Funktion  $a^-(t) > 0$  geben, für die  $\forall t \in [t^-, T]$ , ab einem  $t^- \in (0, T)$

$$S_t \leq a^-(t) \Rightarrow U^-(S_t, t) = (K - S_t)_+ \quad (3.7)$$

$$S_t > a^-(t) \Rightarrow U^-(S_t, t) > (K - S_t)_+ \quad (3.8)$$

gilt.

Wenn  $a^+(t)$  und  $a^-(t)$  das zu zeigende Verhalten von  $a(t)$  am Ende der Laufzeit

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{\frac{a^\pm(t) - K}{K}}{-\sigma \sqrt{(T-t) |\ln(T-t)|}} = 1$$

erfüllen, ist der Beweis beendet.

Aufgrund der Konstruktion von  $U^+(S_t, t)$  und  $U^-(S_t, t)$  folgt mit dem Maximumsprinzip:

$$U^-(S_t, t) \leq P(S_t, t) \leq U^+(S_t, t) \quad (3.9)$$

Mit diesen Annahmen ist der Satz gezeigt, wenn folgende Ungleichungen Gültigkeit haben.

$$a^+(t) \leq a(t) \leq a^-(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.10)$$

Für  $S_t > a^-(t)$  folgt:

$$\begin{aligned} (K - S_t)_+ &< U^-(S_t, t) \leq P(S_t, t) \\ &\Rightarrow a(t) \leq a^-(t) \end{aligned}$$

und

$$(K - a^+(t)) \leq P(a^+(t), t) \leq U^+(a^+(t), t) = (K - a^+(t))$$

also gilt, dass

$$U(a^+(t), t) = (K - a^+(t))$$

und damit die erste Ungleichung.

Somit gilt der Satz für  $a(t)$ . □

Wenn also die Existenz einer Supersolution und einer Subsolution mit zugehörigen, eindeutigen Funktionen  $a^+(t)$  und  $a^-(t)$  nachgewiesen wird, ist der Satz gezeigt.

### Konstruktion der Supersolution

Definiere die stetige Funktion  $U^+(S_t, t)$  als Lösung ab einem bestimmten  $t_0^+$  für die 3 Konditionen.

$$\frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^+(S_t, t)}{\partial S^2} - rU^+(S_t, t) + rS_t \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \geq 0 \quad (3.11)$$

$$U^+(S_t, t) \geq (K - S_t)_+ \quad (3.12)$$

$$U^+(S_T, T) = (K - S_T)_+ \quad (3.13)$$

Wenn nun  $P_E(S_t, t)$  der Black-Scholes-Preis der europäischen Option ist, kann  $U^+(S_t, t)$  dargestellt werden als Kombination von  $P_E(S_t, t)$  und einer Funktion  $f(t)$ , mit  $f \geq 0$ ,  $f \in C^1$  auf  $[0, T]$ .

$$U^+(S_t, t) = f(t)P_E(S_t, t) \quad \forall (t, S) \in [t_0^+, T] \times (0, \infty) \quad (3.14)$$

$$f(T) = 1 \quad \frac{\partial f(t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0^+, T] \quad (3.15)$$

Mit diesen beiden Annahmen an  $f(t)$  folgt (3.11) und (3.13).

#### Lemma

Es existiert eine abnehmende  $C^1$  Funktion  $f$  auf  $[t_0^+, T]$  mit  $f(T)=1$  und für alle  $t$  aus diesem Intervall existiert ein nichtnegatives  $a^+(t)$  mit:

$$a^+(t) \leq K \quad (3.16)$$

$$f(t)P_E(a^+(t), t) = (K - a^+(t))_+ \quad (3.17)$$

$$f(t) \left. \frac{\partial P_E(S_t, t)}{\partial S} \right|_{a^+(t)} = -1 \quad (3.18)$$

Vor dem Beweis des Lemmas ist zu klären warum dieses Lemma zeigt, dass (3.12) gilt.

$P_E(S_t, t)$  ist konvex in  $S_t$ , da die Preisfunktion für die europäische Option konvex ist und die Differentialgleichung (3.5) größer als Null ist.  $U^+(S_t, t)$  ist dadurch ebenfalls konvex, als Kombination einer konvexen und einer positiven Funktion.

Wenn nun  $S_t \leq a^+(t)$  ist, folgt aus der Konvexität

$$\left. \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \right|_{S_t} \leq \left. \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \right|_{a^+(t)} = -1.$$

Da aber  $a^+(t) \leq K$  gilt, folgt:

$$(K - S_t)_+ \leq U^+(S_t, t) \Leftrightarrow (K - S_t)_+ - U^+(S_t, t) \leq 0$$

$$\begin{aligned} (K - S_t)_+ - U^+(S_t, t) &= (K - S_t) - U^+(S_t, t) \\ &= (K - a^+(t)) - (K - a^+(t)) + (K - S_t) - U^+(S_t, t) + U^+(a^+(t), t) - U^+(a^+(t), t) \\ &= (K - a^+(t)) - U^+(a^+(t), t) + \int_{a^+(t)}^S \left( -1 - \left. \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \right|_v \right) dv \end{aligned}$$

Die Ungleichheit folgt mit

$$U^+(a^+(t), t) = (K - a^+(t)) , \quad S_t \leq a^+(t)$$

und mit der Konvexität

$$-1 - \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \geq 0$$

Nun muss noch der Fall  $a^+(t) \leq S(t)$  betrachtet werden. Über die Konvexität folgt diesmal

$$-1 = \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \Big|_{a^+(t)} \leq \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S}(t, S) \Big|_{S_t}$$

und die Ungleichheit wird zu:

$$(K - a^+(t)) - U^+(a^+(t), t) + \int_{a^+(t)}^{S_t} \left( -1 - \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \Big|_v \right) dv \leq 0$$

Mit

$$-1 - \frac{\partial U^+(S_t, t)}{\partial S} \leq 0$$

Dies zeigt (3.12). Nun wird das Lemma bewiesen.

### Beweis des Lemmas

Mit

$$\begin{aligned} \xi &= T - t \\ c(\xi) &= f(t) \\ y(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\xi}} \ln \frac{S_{T-\xi}}{Ke^{-r\xi}} \\ y^+(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\xi}} \ln \frac{a^+(T - \xi)}{Ke^{-r\xi}} \\ v(\xi, y) &= P_E(t, S_t) \\ u(\xi, y) &= P(t, S_t) \\ \phi(x) &= 1 - N(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

kann der europäische Putpreis folgendermaßen dargestellt werden:

$$v(\xi, y(\xi)) = Ke^{-r\xi} \left[ \phi \left( y(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) \right]$$

$v(\xi, y(\xi))$  ist also der transformierte Putpreis. Diese Transformationen vereinfachen den Beweis, denn nun kann das Verhalten von  $y^+(\xi)$  untersucht werden, um danach Rückschlüsse auf  $a^+(t)$  zu ziehen.

Wenn nun auch die Aussage des Lemmas mit Hilfe der Kettenregel transformiert wird,

$$c(\xi)v(\xi, y^+) = K \left( 1 - e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)} \right) \quad (3.19)$$

$$c(\xi) \frac{\partial v(\xi, y(\xi))}{\partial y} \Big|_{y^+(\xi)} = -K\sigma\sqrt{\xi}e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}, \quad (3.20)$$

ist dies äquivalent mit

$$\frac{\frac{\partial v(\xi, y)}{\partial y} \Big|_{y^+(\xi)}}{v(\xi, y^+(\xi))} = \frac{-K\sigma\sqrt{\xi}e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}}{K \left( 1 - e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)} \right)}.$$

Es reicht also, diese Gleichung zu bestätigen und  $c(\xi) \in C^1$  steigend für  $\xi$  nahe  $0^+$  zu zeigen, um das Lemma zu beweisen.

Durch Einsetzen von  $v(\xi, y(\xi))$  entsteht

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} \left( Ke^{-r\xi} \left[ \phi \left( y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) \right] \right) \Big|_{y^+(\xi)}}{Ke^{-r\xi} \left[ \phi \left( y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y^+(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) \right]} = \frac{-\sigma\sqrt{\xi}e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}}{1 - e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}}.$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen indem die Parameterintegrale mit der Leibnizregel, [10], aufgelöst werden

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{y^+(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} e^{-\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2} - \sigma\sqrt{\xi} e^{y^+(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right)}{\phi \left( y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y^+(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right)} = \frac{-\sigma\sqrt{\xi}e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}}{1 - e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}}.$$

Da die Gleichheit

$$e^{y\sigma\sqrt{\xi}} e^{-\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2} = e^{-\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2}$$

gilt, bekommt man

$$e^{-r\xi} \phi \left( y^+ - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) = \phi \left( y^+ + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right).$$

Definiere die Funktion  $h(\xi, y)$  durch

$$h(\xi, y) = e^{-r\xi} \phi \left( y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - \phi \left( y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right).$$

Nun muss gezeigt werden, dass genau ein  $a^+(T - \xi)$  existiert. Da der Logarithmus stetig ist, genügt es zu zeigen, dass nur genau ein  $y^+(\xi)$  existiert, also  $h(\xi, y)$  nur genau eine Nullstelle in  $y$  für festes  $\xi$  hat.

Betrachte als erstes das Verhalten für  $y$  gegen  $+\infty$ .

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} h(\xi, y) = e^{-r\xi} - 1 < 0 \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} h(\xi, y) = 0$$

Dann die Steigungen die  $h$  in  $y$  durchläuft.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(\xi, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{-r\xi} \phi\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{\sigma^2\xi}{8}} \left(e^{-r\xi + \frac{y\sigma\xi}{2}} - e^{-\frac{y\sigma\xi}{2}}\right)\end{aligned}$$

Also steigt  $h$  für

$$\left\{y \mid e^{-r\xi + \frac{y\sigma\xi}{2}} < e^{-\frac{y\sigma\xi}{2}}\right\} = \left\{y \mid y \in (-\infty, \frac{\sqrt{\xi}r}{\sigma})\right\}$$

und fällt dementsprechend für

$$\left\{y \mid e^{-r\xi + \frac{y\sigma\xi}{2}} > e^{-\frac{y\sigma\xi}{2}}\right\} = \left\{y \mid y \in (\frac{\sqrt{\xi}r}{\sigma}, \infty)\right\} .$$

Damit ist  $y^+(\xi)$  die einzige Nullstelle und somit eindeutig.

### Bemerkung

Da die Nullstelle in dem Intervall ist, für das  $h(\xi, y)$  monoton wachsend in  $y$  ist, gilt

$$\left.\frac{\partial h(\xi, y)}{\partial y}\right|_{y^+(\xi)} > 0$$

und

$$y^+(\xi) \leq \frac{\sqrt{\xi}r}{\sigma} \Rightarrow a^+(T - \xi) \leq K.$$

Bevor der noch ausstehende Beweis über das Verhalten von  $c(\xi)$  geführt wird, betrachte folgendes

### Lemma

$$y^+(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} -\infty$$

Insbesondere

$$y^+(\xi)^2 \sim |\ln(\xi)| \quad \text{für } \xi \text{ nahe } 0^+$$

### Beweis

Um den ersten Teil zu beweisen, fixiere  $A < 0$  und betrachte

$$h(\xi, A) = -e^{-r\xi} \phi\left(A - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(A + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) \quad \text{für } \xi \text{ nahe } 0^+. \quad \text{Für diesen Wert ist } e^{-r\xi} \approx 1.$$

Die Funktionswerte  $\phi\left(A \pm \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)$  werden mit der Taylorentwicklung angenähert. Entwickle  $\phi(x)$  um  $A$  bis  $n=1$  und setzte  $A \pm \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}$  ein. Das Restglied  $R_2$  ist  $o(\sqrt{\xi})$ , da die e-Funktion schneller fällt als jedes Polynom.

$$\begin{aligned}\phi\left(A \pm \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) &= \phi(A) + \phi'(A) \left(A \pm \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} - A\right) + R_2 \\ \phi'(A) &= \left.\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right|_{x=A} = \left.\frac{\partial}{\partial x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right|_{x=A} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} \\ R_2 &= \phi''(A) \frac{\sigma^2\xi}{4} = A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} \frac{\sigma^2\xi}{4} = o(\sqrt{\xi})\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} h(\xi, A) &= \phi(A) - \phi'(A) \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} - \phi(A) - \phi'(A) \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} + o(\sqrt{\xi}) \\ &= + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} + o(\sqrt{\xi}) \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung kann man schließen, dass für jedes  $A < 0$  ein  $\xi_0 > 0$  existiert, so dass  $\forall \xi \leq \xi_0 h(\xi, A) > 0$  gilt. Also muss für  $\xi < \xi_0 y^+(\xi) < A$  sein, denn  $h(\xi, y^+(\xi)) = 0$ . Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

Fixiere nun  $\xi > 0$ . Dann existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein  $y_0 \in [y^+(\xi) - \frac{\sqrt{\xi}\sigma}{2}, y^+(\xi) + \frac{\sqrt{\xi}\sigma}{2}]$ , so daß

$$\phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) = \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_0^2}{2}}.$$

Für ein  $\xi$  klein genug, ist  $y^+ + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \leq 0$  und  $e^{-x^2}$  ist monoton wachsend für  $x \in [\kappa, \mathcal{K}]$ ,  $\kappa, \mathcal{K} \leq 0$  und  $\kappa \leq \mathcal{K}$ . Zusammen mit der vorherigen Gleichung entstehen zwei Ungleichungen

$$\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2})^2}{2}} \leq \phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) \leq \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2})^2}{2}}. \quad (3.21)$$

Auf der anderen Seite kann

$$e^{-r\xi} \phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) = \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)$$

umgestellt werden zu

$$\phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) = (1 - e^{-r\xi}) \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)$$

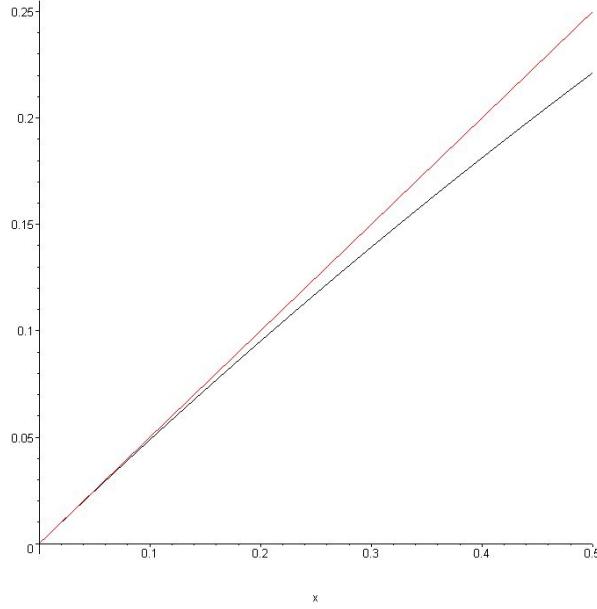
was sich bei kleinen  $\xi$  verhält wie

$$\phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) \sim 1 - e^{-r\xi}$$

da  $y^+(\xi) \rightarrow -\infty$  für  $\xi \rightarrow 0$  strebt.

Für  $\xi$  nahe Null ist die Funktion  $1 - e^{-r\xi}$  annähernd linear und kann durch  $r\xi$  angenähert werden.

Ein Beispiel für  $r = 0,5$ .



Dies kann mit der Regel von l'Hospital gezeigt werden.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-rx}}{rx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^{-rx}}{r} = 1$$

Daraus folgt

$$\phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) \sim r\xi . \quad (3.22)$$

Annahme

$$y^+(\xi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right) , \text{ dh. } \lim_{\xi \rightarrow 0} |y^+(\xi)\sqrt{\xi}| = 0$$

Sollte dies nicht gelten, würde ein  $a \in \mathbb{R}^{>0}$  und eine gegen Null fallende Folge  $\xi_n$  existieren mit  $y^+(\xi_n)\sqrt{\xi_n} \leq -a$  bzw  $y^+(\xi_n) \leq \frac{-a}{\sqrt{\xi_n}}$ , so daß

$$\frac{\sigma\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^+(\xi_n) + \frac{\sigma\sqrt{\xi_n}}{2})^2}{2}} = O\left(\sqrt{\xi_n} e^{-\frac{a^2}{2\xi_n}}\right) \text{ dh. } 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sigma\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^+(\xi_n) + \frac{\sigma\sqrt{\xi_n}}{2})^2}{2}}}{\sqrt{\xi_n} e^{-\frac{a^2}{2\xi_n}}} \right| < \infty$$

gilt.

$$0 \leq \frac{\frac{\sigma\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(y^+(\xi_n) + \frac{\sigma\sqrt{\xi_n}}{2}\right)^2}}{\sqrt{\xi_n} e^{-\frac{a}{2\xi_m}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^+(\xi_n)^2}{2} - \frac{y^+(\xi_n)\sigma\sqrt{\xi_n}}{2} - \frac{\sigma^2\xi_n}{8} + \frac{a^2}{2\xi_n}}$$

$$\leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2} - \frac{a\xi_n\sigma}{2} - \frac{\sigma^2\xi_n^2}{8} + \frac{a}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}} < \infty$$

Aber  $O\left(\sqrt{\xi_n} e^{-\frac{a^2}{2\xi_m}}\right) = o(\xi_n)$  und dies angewandt auf (3.21) in Kombination mit (3.22) ergibt den Widerspruch  $r\xi_n = o(\xi_n)$ , was die Annahme bestätigt.

Wegen  $y^+(\xi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)$  können die Grenzen von (3.21) abgeschätzt werden,

$$\frac{e^{\frac{-\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2}{2}}}{e^{\frac{-y^+(\xi)^2}{2}}} = e^{-\frac{\sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}{2} - \frac{\sigma^2\xi}{8}} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1, \quad \frac{e^{\frac{-\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2}{2}}}{e^{\frac{-y^+(\xi)^2}{2}}} = e^{+\frac{\sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)}{2} - \frac{\sigma^2\xi}{8}} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1,$$

woraus ein weiteres Verhalten von  $\phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)$  für kleine  $\xi$  angegeben werden kann:

$$\phi\left(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - \phi\left(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) \sim \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^+(\xi)^2}{2}}$$

In Kombination mit (3.22) folgt

$$\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^+(\xi)^2}{2}} \sim r\xi.$$

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und  $f(x) \rightarrow 0$  gilt, hat man für die logarithmierten Funktionen dank der L'Hospital-Regel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)f'(x)}{f(x)g'(x)} = 1$$

Nun folgt

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sigma}{r\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^+(\xi)^2}{2}}\right)}{\ln(\sqrt{\xi})} = \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sigma}{r\sqrt{2\pi}}\right)}{\ln(\sqrt{\xi})}}_{=0} + \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln\left(e^{\frac{-y^+(\xi)^2}{2}}\right)}{\ln(\sqrt{\xi})} = 1$$

Also

$$\frac{-y^+(\xi)^2}{2} \sim \ln \sqrt{\xi}, \tag{3.23}$$

umgestellt zu

$$y^+(\xi)^2 \sim 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \ln(\xi) \right|$$

folgt die Behauptung des Lemmas.

□

Da  $y^+(\xi)$  definiert war als

$$y^+(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\xi}} \ln \left( \frac{a^+(T-\xi)}{Ke^{-r\xi}} \right) ,$$

folgt aus dem Lemma

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\xi}} \ln \left( \frac{a^+(T-\xi)}{Ke^{-r\xi}} \right) \sim \sqrt{|\ln(\xi)|}.$$

Umstellen liefert

$$\ln \left( \frac{a^+(T-\xi)}{K} \right) - \ln(e^{-r\xi}) \sim -\sigma\sqrt{\xi |\ln(\xi)|}$$

und

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{a^+(T-\xi)}{K} \right)}{-\sigma\sqrt{\xi |\ln(\xi)|}} - \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{-r\xi})}{-\sigma\sqrt{\xi |\ln(\xi)|}}}_{=0} = 1.$$

Dadurch gilt

$$\ln \left( \frac{a^+(T-\xi)}{K} \right) \sim -\sigma\sqrt{\xi |\ln(\xi)|}.$$

Wie im Logarithmusfall, gilt für die e-Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)e^{f(x)-x} = 1,$$

insbesondere, weil die e-Funktion stetig in 0 ist.

$$\exp \left( \ln \left( \frac{a^+(T-\xi)}{K} \right) \right) \sim \exp \left( -\sigma\sqrt{\xi |\ln(\xi)|} \right)$$

Mit  $rx \sim 1 - e^{-rx}$  für  $x \rightarrow 0$  und nach Rücktransformation erhält man das gesuchte Ergebnis.

$$\frac{a^+(t) - K}{K} \sim -\sigma\sqrt{(T-t) |\ln(T-t)|}$$

Nun bleibt zu zeigen, dass  $c(\xi)$  steigend ist für kleine  $\xi$ .

Wenn  $c(\xi)$  definiert ist als

$$c(\xi) \frac{\partial v(\xi, y)}{\partial y} \Big|_{y^+(\xi)} = -K\sigma\sqrt{\xi} e^{-r\xi + \sigma\sqrt{\xi}y^+(\xi)} ,$$

folgt nach Einsetzen der Funktion  $v(\xi, y)$ , wie bei der Umstellung zu (3.20),

$$c(\xi) = \frac{1}{\phi \left( y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right)} .$$

$c(\xi)$  steigt also, wenn  $y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}$  steigt, denn  $\phi$  ist nach Definition fallend. Da die Wurzelfunktion steigend ist, genügt es die positive Steigung von  $y^+(\xi)$  zu zeigen.

$$\left. \frac{\partial h(\xi, y)}{\partial y} \right|_{y^+(\xi)} > 0$$

aufgrund der Bemerkung. Außerdem ist  $h(\xi, y) = 0$  eine implizite Funktion. Nach dem Implizite-Funktionen-Theorem, [13], folgt

$$\frac{\partial y^+(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial h(\xi, y^+(\xi))}{\partial \xi}}{\left. \frac{\partial h(\xi, y)}{\partial y} \right|_{y^+(\xi)}}$$

Wenn nun also  $\frac{\partial h}{\partial \xi}$  für kleine  $\xi$  kleiner Null ist, ist  $c(\xi)$  monoton steigend.

$$\frac{\partial h(\xi, y(\xi))}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( e^{-r\xi} \phi \left( y(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - \phi \left( y(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) \right)$$

Mit der Parameterintegralformel folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\xi, y^+(\xi))}{\partial \xi} &= -re^{-r\xi} \phi \left( y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) + \frac{\sigma}{4\sqrt{2\pi\xi}} \left( e^{-r\xi} e^{-\frac{(y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2})^2}{2}} + e^{-\frac{(y^+(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2})^2}{2}} \right) \\ &= -re^{-r\xi} \phi \left( y^+(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) + \frac{\sigma}{4\sqrt{2\pi\xi}} \left( e^{-r\xi} e^{-\frac{y^+(\xi)^2}{2}} e^{\frac{y^+(\xi)\sigma\sqrt{\xi}}{2}} e^{\frac{\sigma^2\xi}{8}} + e^{-\frac{y^+(\xi)^2}{2}} e^{-\frac{y^+(\xi)\sigma\sqrt{\xi}}{2}} e^{\frac{\sigma^2\xi}{8}} \right), \end{aligned}$$

was mit (3.23) für  $\lim_{\xi \rightarrow 0^+}$  zu  $-\frac{r}{2}$  wird. Also  $\frac{\partial h}{\partial \xi} < 0$ , woraus die Behauptung folgt.

### Konstruktion der Subsolution

Wie schon gezeigt wurde, ist eine europäische Option bei gleichen Parametern immer weniger Wert als eine amerikanische Option. Also ist  $P_E(S_t, t)$  eine Subsolution zu  $P(S_t, t)$ , genauso wie  $(K - S_t)_+$ , da  $P(S_t, t) \geq (K - S_t)_+$ . Wenn  $U^-(S_t, t)$  definiert wird als

$$U^-(S_t, t) = \sup \{P_E(S_t, t), (K - S_t)_+\} ,$$

bleibt es, als Supremum zweier Subsolutions, eine Subsolution.

Suche nun die Grenzfunktion  $a^-(t)$  für  $U^-(S_t, t)$ . Für diese Funktion muss  $U^-(a^-(t), t) = (K - a^-(t))_+$  gelten und dies folgt aus

$$P_E(a^-(t), t) = (K - a^-(t))_+ . \quad (3.24)$$

Definiere wieder sechs Hilfsfunktionen.

$$\begin{aligned} \xi &= T - t \\ y(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\xi}} \ln \frac{S_{T-\xi}}{Ke^{-r\xi}} \\ y^-(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\xi}} \ln \frac{a^-(T - \xi)}{Ke^{-r\xi}} \\ v(\xi, y) &= P_E(t, S_t) \\ u(\xi, y) &= P(t, S_t) \\ \phi(x) &= 1 - N(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

Diese Notationen verändern den europäischen Optionspreis, genau wie bei der Supersolution und aus (3.24) wird:

$$\begin{aligned} Ke^{-r\xi} \left[ \phi \left( y^-(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y^-(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y^-(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) \right] &= K - Ke^{-r\xi} e^{\sigma\sqrt{\xi}y^-(\xi)} \\ \Leftrightarrow \phi \left( y^-(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y^-(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y^-(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) &= e^{r\xi} - e^{\sigma\sqrt{\xi}y^-(\xi)} \end{aligned}$$

#### Lemma

Für alle  $\xi > 0$  existiert  $y^-(\xi)$  und ist eindeutig.

#### Beweis

Setze

$$k(\xi, y(\xi)) = \phi \left( y(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{y(\xi)\sigma\sqrt{\xi}} \phi \left( y(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{r\xi} + e^{\sigma\sqrt{\xi}y(\xi)} ,$$

dann hat diese Funktion zwei Eigenschaften aufgrund von  $\phi$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} k(\xi, y) &= 1 - e^{r\xi} < 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} k(\xi, y) &= \infty . \end{aligned}$$

Wenn nun  $k$  streng monoton steigend ist, dann gibt es genau eine Nullstelle und  $y^-(\xi)$  existiert und ist eindeutig.

$$\frac{\partial k(\xi, y)}{\partial y} = \sigma \sqrt{\xi} e^{\sigma \sqrt{\xi} y(\xi)} \left( 1 - \phi \left( y(\xi) + \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{2} \right) \right) > 0$$

□

### Lemma

$$y^-(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0^+} -\infty \quad (3.25)$$

#### Beweis

Genau wie im Beweis für  $a^+$  fixiere  $A < 0$ , betrachte  $k(\xi, A)$  für  $\xi$  nahe  $0^+$  und approximiere die Normalverteilungen durch Taylorentwicklung. Ebenfalls kann der dort geführte Beweis, dass  $(1 - e^{r\xi}) \sim r\xi$  für kleine  $\xi$  verändert werden zu  $(1 - e^{\sigma A \sqrt{\xi}}) \sim -\sigma A \sqrt{\xi}$  bzw.  $(1 + \sigma A \sqrt{\xi}) \sim e^{\sigma A \sqrt{\xi}}$  für kleine  $\xi$ .

$$\begin{aligned} k(\xi, A) &= \phi \left( A - \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{A \sigma \sqrt{\xi}} \phi \left( A + \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{2} \right) - e^{r\xi} + e^{\sigma \sqrt{\xi} A} \\ &= \phi(A) - \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{2} \phi'(A) - (1 + \sigma A \sqrt{\xi})(\phi(A) + \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{2} \phi'(A)) - 1 + (1 + \sigma A \sqrt{\xi}) + o(\sqrt{\xi}) \\ &= -\sigma \sqrt{\xi} \phi'(A) - \sigma A \sqrt{\xi} \phi(A) - \frac{\sigma^2 \xi}{2} \phi'(A) A + \sigma A \sqrt{\xi} + o(\sqrt{\xi}) \\ &= -\sigma \sqrt{\xi} \phi'(A) + (1 - \phi(A)) \sigma A \sqrt{\xi} - \frac{\sigma^2 \xi}{2} \phi'(A) A + o(\sqrt{\xi}) \\ &\stackrel{\xi \rightarrow 0^+}{=} -\sigma \sqrt{\xi} \phi'(A) + (1 - \phi(A)) \sigma A \sqrt{\xi} + o(\sqrt{\xi}) \\ &= \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} + \frac{\sigma A \sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{u^2}{2}} du + o(\sqrt{\xi}) \end{aligned}$$

Das Integral kann durch partielle Integration verändert werden

$$\int_{-\infty}^A u^{-2} e^{-\frac{u^2}{2}} du \stackrel{pI}{=} -u^{-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{-\infty}^A - \int_{-\infty}^A e^{-\frac{u^2}{2}} du = -A^{-1} e^{-\frac{A^2}{2}} - \int_{-\infty}^A e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

und vereinfacht  $k(\xi, A)$  zu

$$k(\xi, A) = -A \frac{\sigma \sqrt{\xi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{u^2}{2}} du + o(\sqrt{\xi}) .$$

Da  $k(\xi, y)$  in  $y$  fällt, resultiert die Behauptung mit

$$\forall A < 0 \quad \exists \xi_0 > 0 \quad \text{so, dass} \quad \forall \xi < \xi_0 \quad k(\xi, A) > 0 .$$

□

### Lemma

$$(y^-(\xi))^n \sqrt{\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0^+} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.26)$$

**Beweis**

Es gilt  $y^+(\xi) < y^-(\xi) \leq 0$ , da  $U^-(S_t, t) < U^+(S_t, t)$  nach Definition. Bei der Betrachtung der Supersolution wurde  $y^+(\xi) \sim -\sqrt{|\ln(\xi)|}$  gezeigt. Hinreichend ist also

$$\sqrt{|\ln(\xi)|}^n \sqrt{\xi} \xrightarrow[\xi \rightarrow 0^+]{} 0 .$$

Dies kann mit L'Hospital gezeigt werden.

Für  $n$  gerade gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|\ln(x)|}^n \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|\ln(x)|}^n}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n(n-2)(n-4)\dots 2 |\ln(x)|}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} n(n-2)(n-4)\dots 2 \sqrt{x} = 0 \end{aligned}$$

und ebenso für ungerade  $n$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|\ln(x)|}^n \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|\ln(x)|}^n}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n(n-2)(n-4)\dots \frac{1}{2} |\ln(x)|^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} n(n-2)(n-4)\dots \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{|\ln(x)|}} = 0. \end{aligned}$$

□

**Notation**

Um die Ausführungen so übersichtlich wie möglich zu gestalten setze  $y^-(\xi) = y$  und  $N(x) = 1 - \phi(x)$ .

$$\begin{aligned} \phi\left(y^-(\xi) - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - e^{y^-(\xi)\sigma\sqrt{\xi}}\phi\left(y^-(\xi) + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) &= e^{r\xi} - e^{\sigma\sqrt{\xi}y^-(\xi)} \\ \Leftrightarrow 1 - N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}(1 - N\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)) &= e^{r\xi} - e^{\sigma\sqrt{\xi}y} \\ \Leftrightarrow N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}N\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) &= 1 - e^{r\xi} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eine weitere Abschätzung wird benötigt.

Entwickle  $N(x)$  mit der Taylorentwicklung um Punkt  $y$  und benutze das Lagrange Restglied.

$$\begin{aligned} N(x) &= N(y) + N'(y)(x-y) - \frac{1}{2}(x-y)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ue^{-\frac{u^2}{2}} \quad u \in [y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}, y] \\ N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) &= N(y) - N'(y) \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ue^{-\frac{u^2}{2}} \\ &\leq N(y) - N'(y) \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{u \in [y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}, y]} -ue^{-\frac{u^2}{2}} \end{aligned}$$

Stelle dies um zu

$$\left| N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - N(y) + N'(y) \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{u \in [y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}, y]} ue^{-\frac{u^2}{2}} .$$

Aber da  $y \rightarrow -\infty$  für  $\xi \rightarrow 0$ , erhält man

$$\begin{aligned} \left| N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - N(y) + N'(y)\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right| &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} o(1) \\ &= o(\xi) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Setzt man genauso  $y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}$  in die Taylorentwicklung ein so entsteht

$$\left| N\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - N(y) - N'(y)\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \right| = o(\xi). \quad (3.29)$$

Wenn (3.28) und (3.29) umgestellt werden, um in den ersten Teil der Gleichung von (3.27) eingesetzt zu werden, gelangt man zu

$$N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - e^{y\sigma\sqrt{\xi}} N\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) = N(y) \left(1 - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}\right) - N'(y) \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \left(1 + e^{y\sigma\sqrt{\xi}}\right) + o(\xi), \quad (3.30)$$

weil unter Mithilfe des letzten Lemmas

$$o(\xi) \left(1 - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}\right) = o(\xi)o(1) = o(\xi)$$

gilt.

Wieder mit dem letzten Lemma folgt:

$$f \in O(\sqrt{\xi}y) \Rightarrow 0 \leq \limsup_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{f\sqrt{\xi}y^6}{\sqrt{\xi}y} \right| \leq \limsup_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{f}{\sqrt{\xi}y} \right| < \infty \Rightarrow f \in O\left(\frac{1}{y^5}\right) \quad (3.31)$$

### Lemma

$$N(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + O\left(\frac{1}{y^5}\right) \right) \quad (3.32)$$

$$1 - e^{y\sigma\sqrt{\xi}} = -\sigma\sqrt{\xi}y(1 + O(\sqrt{\xi}y)) \quad (3.33)$$

$$1 + e^{y\sigma\sqrt{\xi}} = 2 + \sigma\sqrt{\xi}y(1 + O(\sqrt{\xi}y)) \quad (3.34)$$

### Beweis

Der Beweis benutzt die Errorfunktion, siehe [19],

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Damit lässt sich  $n(x) = N(x) - N(0)$  für  $x \geq 0$  darstellen als

$$n(x) = \frac{1}{2} \text{erf}(x).$$

Für große  $x$  kann die Errorfunktion aufgespalten werden

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^\infty e^{-t^2} dt - \int_x^\infty e^{-t^2} dt \right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

und daraus eine Reihendarstellung mit partieller Integration gewonnen werden.

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - 2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} - \dots \right).$$

Wenn dies für  $N(x)$  und für  $-x$  ausgeführt wird, folgt

$$N(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + O\left(\frac{1}{y^5}\right) \right).$$

Für  $0 \leq s < 1$  gilt

$$e^s - 1 - s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} - 1 - s = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \leq s^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s^{k-2}}{k!} < s^2(e-2) < s^2$$

und durch Umstellen von

$$e^s - 1 - s = O(s^2),$$

mit  $O(s)O(s) = O(s^2)$ , folgt die Behauptung.

Die dritte Gleichung geht aus der zweiten durch Multiplikation mit  $-1$  und Addition von 2 hervor.

□

Es entsteht

$$1 - e^{y\sigma\sqrt{\xi}} = -\sigma\sqrt{\xi}y \left( 1 + O\left(\frac{1}{y^5}\right) \right) \quad (3.35)$$

durch Kombination von (3.31) mit (3.33).

Dann werden die linken und die rechten Seiten der Gleichungen (3.32) und (3.35) miteinander multipliziert.

$$\begin{aligned} N(y)(1 - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}) &= -\sigma\sqrt{\xi}y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + O\left(\frac{1}{y^5}\right) \right) \\ &= \sigma\sqrt{\xi} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - \frac{1}{y^2} + O\left(\frac{1}{y^4}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Da  $y \in O(y)$  und  $f \in O(y^{-10}) \Rightarrow f \in O(y^{-5})$ .

Setze nun die gewonnenen Darstellungen für  $N(y)(1 - e^{y\sigma\sqrt{\xi}})$  und  $(1 + e^{y\sigma\sqrt{\xi}})$  in (3.30) ein und fasse zusammen.

$$\begin{aligned}
N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}N\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) &= \sigma\sqrt{\xi} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{y^2} + O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right) \\
&\quad - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(2 + \sigma\sqrt{\xi}y \left[1 + O\left(\frac{1}{y^5}\right)\right]\right) \\
&\quad + o(\xi) \\
&= -\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sigma\sqrt{\xi}}{y^2} + \sigma\sqrt{\xi}O\left(\frac{1}{y^4}\right) - \frac{\sigma^2\xi y}{2} - \frac{\sigma^2\xi}{2}O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right] \\
&\quad + o(\xi)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Für die ausmultiplizierten letzten drei Summanden gilt  $o(\xi)$ . Sie können also in dem schon vorhandenen  $o(\xi)$  Term zusammengefasst werden.

$$N\left(y - \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) - e^{y\sigma\sqrt{\xi}}N\left(y + \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{2}\right) = -\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{y^2} + o(\xi)$$

Dank (3.27) weiß man, dass der linke Teil der Gleichung gleich  $1 - e^{r\xi}$  ist und sich damit für kleine  $\xi$  wie  $r\xi$  verhält.

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma\sqrt{\xi}}{y^2} + o(\xi) \sim r\xi$$

$\frac{o(\xi)}{\xi}$  fällt aufgrund der Definition von  $o(\xi)$  weg. Durch Logarithmieren erhält man

$$-\frac{y^2}{2} + \ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}ry^2}\right) \sim \ln(\sqrt{\xi}).$$

Mit

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}ry^2}\right)}{\ln(\sqrt{\xi})} = \lim_{\xi \rightarrow 0} -\frac{\ln(\sqrt{2\pi}ry^2)}{\ln(\sqrt{\xi})} = 0$$

folgt

$$y^-(\xi) \sim \sqrt{|\ln(\xi)|}$$

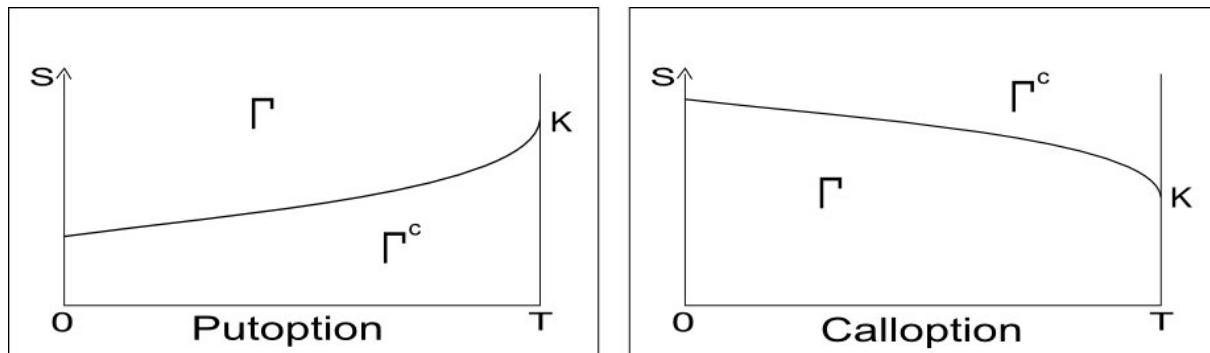
und über die Definition von  $y^-(\xi)$  und die bekannten Umformungen aus dem Supersolutionfall die Subsolution.

### Bemerkung

Das asymptotische Verhalten am Ende der Laufzeit kann auch über die Konvexität nachgewiesen werden. Siehe [12].

**Bemerkung**

Dank der gewonnenen Informationen, ist es möglich eine Skizze der Grenzfunktionen anzugeben.



## Kapitel 4

# Darstellung des amerikanischen Callpreises für endliche Laufzeiten

### 4.1 Die Formel nach McKean

Da, im Gegensatz zur europäischen Option, ein Randwert der Black-Scholes-Differentialgleichung für die amerikanische Option nicht deterministisch ist, sondern vom Verlauf des zugrundeliegenden Finanzguts abhängt, ist es schwierig diese zu lösen. In der Fachliteratur wird auch häufig von einem freien Randwert gesprochen. In dieser Sektion wird der Ansatz von McKean betrachtet, der nach Vereinfachung und Zeitinversion eine Fouriertransformation anwendet und daraus eine lösbar gewöhnliche Differentialgleichung erhält. Um diese Transformationen zu ermöglichen ist allerdings die Kenntnis der Grenzfunktion vorausgesetzt. Nach Rücktransformierung entsteht ein Integralterm für die Preisfunktion für den amerikanischen Call, der die Grenzfunktion beinhaltet. Warum diese Darstellung trotz fehlender Informationen über die Grenzfunktion hilfreich ist, wird am Ende des Kapitels diskutiert. Die Ausarbeitung dieses Darstellungen beruht auf dem Paper *A Survey of the Integral Representation of American Option Prices* von Chiarella, Ziogas und Kuchera [7]. Am Ende wird noch auf die Praxistauglichkeit der gewonnenen Lösung eingegangen. Die Grundlagen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wie zum Beispiel der Lösungsalgorithmus und Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise können in [8] nachgelesen werden.

### 4.1.1 Transformationen

Ausgangsformel ist die Black-Scholes Differentialgleichung

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S^2} - rC(S_t, t) + (r - q)S_t \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} = 0 \quad (4.1)$$

und die Grenzfunktion  $b(t)$  der Calloption, die hier mit  $C_b(S_t, t)$  benannt ist, um die Zugehörigkeit von Grenzfunktion zu Preisfunktion zu kennzeichnen.

Transformiere die Zeit durch eine Bijektion

$$t = T - \tau.$$

Dies verdeutlicht die Abhängigkeit des Preises von der Restlaufzeit der Option.

Die geometrische Brownsche Bewegung  $S_t$  vereinfache zu  $e^x$ .

$$S_t = e^x$$

Definiere nun  $V_j$ , als

$$C_b(S_t, t) \equiv V_j(x, \tau) ,$$

mit  $j(\tau) = b(T - \tau)$  als Grenzfunktion für  $V(x, \tau)$ .

Nun verändert sich durch diese Transformationen auch die partielle Differentialgleichung (4.1).

Zur Berechnung setze  $g(\tau) = T - \tau$  und  $h(x) = e^x$ , dann folgt für die Differentialterme

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{C(e^x, g(\tau))}{\partial \tau} = \frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial C(e^x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} &= \frac{\partial C(h(x), t)}{\partial x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\partial C(e^x, t)}{\partial e^x} = e^x \cdot \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} \\ \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial C(e^x, t)}{\partial e^x} \right) = \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial C(e^x, t)}{\partial e^x} + \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 C(e^x, t)}{\partial (e^x)^2} \\ &= e^x \cdot \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S} + (e^x)^2 \cdot \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S^2} . \end{aligned}$$

Eingesetzt in die partielle Differentialgleichung (4.1) ergibt sich:

$$-\frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_j(x, \tau)}{\partial x^2} + \underbrace{\left( r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}_k \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} - rV_j(x, \tau) = 0 \quad (4.2)$$

Die Black-Scholes Differentialgleichung gilt nur bis zum Ausübungszeitpunkt, deswegen muss der Geltungsbereich für die Transformation angepasst werden.

$$0 \leq e^x \leq b(t) \quad \Leftrightarrow \quad -\infty \leq x \leq \ln(b(t)) = \ln(j(\tau))$$

Definiere  $v(x)$  als Transformierte der Auszahlungsfunktion  $c(S)$ . Die Auszahlungsfunktion wird also noch nicht genau spezifiziert, allerdings muss  $c(S)$  streng monoton sein, damit eine Bijektion zu  $v(x)$  entstehen kann.

Durch die Transformation verändern sich die Randwerte und Übergangsbedingung aus Kapitel 3.

$$C_b(S_T, T) = c(S_T) \rightarrow V_j(x, 0) = v(x) \text{ für } S_T \in ]0, \infty[ \quad (4.3)$$

$$\lim_{S_t \rightarrow 0} C_b(S_t, t) = 0 \quad t \geq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} V_j(x, \tau) = 0 \quad \tau \geq 0 \quad (4.4)$$

$$C_b(b(t), t) = c(b(t)) \quad t \geq 0 \rightarrow V_j(\ln(j(\tau)), \tau) = v(\ln(j(\tau))) \quad \tau \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_b(S_t, t)}{\partial S} \Big|_{b(t)} &= \frac{\partial c(S_t)}{\partial S} \Big|_{b(t)} = c'(b(t)) \rightarrow \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{\ln(j(\tau))} \\ &= \frac{\partial v(x)}{\partial x} \Big|_{\ln(j(\tau))} = v'(\ln(j(\tau))) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da eine Fouriertransformation in der Variablen  $x$  angewendet werden soll, muss (4.2) für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert sein, deswegen setze (4.2) für  $x > \ln(j(\tau))$  gleich Null durch Kombination mit der

$$\text{Heaviside-Step-Funktion } H, \quad H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} .$$

Es entsteht

$$H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot \left( -\frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_j(x, \tau)}{\partial x^2} + k \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} - r V_j(x, \tau) \right) = 0$$

und durch Umformung erhält man die zu transformierende Funktion

$$H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial \tau} = H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_j(x, \tau)}{\partial x^2} + k \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} - r V_j(x, \tau) \right) \quad (4.7)$$

### Bemerkung

Für die Unstetigkeitsstelle  $x = \ln(j(\tau))$  der zu transformierende Funktion gilt also  $V_j(\ln(j(\tau)), \tau) = \frac{v(\ln(j(\tau)))}{2}$ . Der Grund hierfür ist, dass eine Fouriertransformation einer in einem Punkt unstetigen Funktion gegen den Mittelwert an der Sprungstelle konvergiert. Siehe Dettmann, [17].

### 4.1.2 Die Fouriertransformation

#### Definition

Definiere die Fouriertransformation in einer Variablen einer fast-sicher stetigen Funktion  $f(x, y)$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , als

$$F\{f(\cdot, y)\}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} f(x, y) dx .$$

Die Stetigkeit der Differentialterme der Black-Scholes Differentialgleichung wurde durch die Transformationen nicht beeinträchtigt. Durch die Linearität des Integrals kann jeder Term der in  $x$  fouriertransformierten Differentialgleichung einzeln betrachtet werden.

$$\begin{aligned} F\left\{H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot \frac{\partial V_j(\cdot, \tau)}{\partial \tau}\right\}(\eta) &= \frac{1}{2} \sigma^2 F\left\{H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot \frac{\partial^2 V_j(\cdot, \tau)}{\partial x^2}\right\}(\eta) \\ &\quad + k F\left\{H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot \frac{\partial V_j(\cdot, \tau)}{\partial x}\right\}(\eta) \\ &\quad - r F\{H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot V_j(\cdot, \tau)\}(\eta) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Da die Fouriertransformation immer in der Variablen  $x$  stattfindet, wird dieses nicht mehr explizit erwähnt.

Definiere  $F^j$  als Fouriertransformation bis zum Wert  $\ln(j(\tau))$  und  $\tilde{V}_j(\eta, \tau)$  als Kurzversion von  $F^j\{V_j(x, \tau)\}(\eta)$ . Die gewöhnliche Differentialgleichung, die  $\tilde{V}$  erfüllt, wird in der Variablen  $\tau$  sein, da sich alle Differentiationen nach  $x$  ausintegrieren lassen.

$$\begin{aligned} F\{H(\ln(j(\tau)) - x) \cdot V_j(x, \tau)\}(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} H(\ln(j(\tau)) - x) V_j(x, \tau) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} V_j(x, \tau) dx \equiv F^j\{V_j(x, \tau)\}(\eta) \equiv \tilde{V}_j(\eta, \tau) \end{aligned}$$

Unter Mithilfe der transformierten Randwerte und Übergangsbedingung können die einzelnen Fouriertransformationen vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} F^j\left\{\frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x}\right\}(\eta) &= \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} dx \\ &\stackrel{\text{part.I.}}{=} e^{i\eta x} \cdot V_j(x, \tau) \Big|_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} - i\eta \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} V_j(x, \tau) dx \\ &\stackrel{(4.5)}{=} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} v(\ln(j(\tau))) - i\eta \tilde{V}_j(\eta, \tau) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} F^j\left\{\frac{\partial^2 V_j(x, \tau)}{\partial x^2}\right\}(\eta) &= \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} \frac{\partial^2 V_j(x, \tau)}{\partial x^2} dx \\ &\stackrel{\text{part.I.}}{=} e^{i\eta x} \cdot \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} - i\eta \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} dx \\ &\stackrel{(4.9)}{=} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{\ln(j(\tau))} - i\eta \left[ e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} v(\ln(j(\tau))) - i\eta \tilde{V}_j(\eta, \tau) \right] \\ &\stackrel{(4.6)}{=} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} \cdot v'(\ln(j(\tau))) - i\eta \left[ e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} v(\ln(j(\tau))) - i\eta \tilde{V}_j(\eta, \tau) \right] \\ &= e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} [v'(\ln(j(\tau))) - i\eta v(\ln(j(\tau)))] - \eta^2 \tilde{V}_j(\eta, \tau) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Um Differentiation und Integration im folgenden Fall zu vertauschen, wird die Leibnizregel für Parameterintegrale benötigt.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\chi(t)}^{\varphi(t)} f(x, t) dx = \int_{\chi(t)}^{\varphi(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(\varphi(t), t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(\chi(t), t) \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4.11)$$

Für stetig differenzierbare Funktionen  $f(x, \cdot)$ ,  $\chi(t)$  und  $\varphi(t)$ . Der Beweis ist in [10] nachlesbar. Also

$$\begin{aligned} F^j \left\{ \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial \tau} \right\} (\eta) &= \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial \tau} dx \\ &\stackrel{(4.11)}{=} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} e^{i\eta x} V_j(x, \tau) dx \right] - \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} V_j(\ln(j(\tau)), \tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} F^j \{ V_j(x, \tau) \} - \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} V_j(\ln(j(\tau)), \tau) \\ &\stackrel{(4.5)}{=} \frac{\partial \tilde{V}_j(\eta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} v(\ln(j(\tau))) \end{aligned}$$

Aus der Ausgangsgleichung (4.8) entsteht mit der Definition von  $F^j$

$$F^j \left\{ \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial \tau} \right\} (\eta) = \frac{1}{2} \sigma^2 F^j \left\{ \frac{\partial^2 V_j(x, \tau)}{\partial x^2} \right\} (\eta) + k F^j \left\{ \frac{\partial V_j(x, \tau)}{\partial x} \right\} (\eta) - r F^j \{ V_j(x, \tau) \} (\eta)$$

und daraus wird mit den gewonnenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_j(\eta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} v(\ln(j(\tau))) &= \frac{1}{2} \sigma^2 e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} [v'(\ln(j(\tau))) - i\eta v(\ln(j(\tau)))] - \eta^2 \tilde{V}_j(\eta, \tau) \\ &\quad + k \left[ e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} v(\ln(j(\tau))) - i\eta \tilde{V}_j(\eta, \tau) \right] - r \tilde{V}_j(\eta, \tau) \end{aligned}$$

Oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_j(\eta, \tau)}{\partial \tau} + \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 + i\eta k + r \right) \tilde{V}_j(\eta, \tau) &= e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 [v'(\ln(j(\tau))) - i\eta v(\ln(j(\tau)))] + v(\ln(j(\tau))) \left( k + \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Das Ziel, durch Transformationen des Preisprozesses eine gewöhnliche Differentialgleichung zu erhalten, wurde erreicht.

### Bemerkung

Diese Darstellung setzt implizit die Kenntnis der Grenzfunktion voraus. Zusätzlich ist nicht sicher, dass die Grenzfunktion überhaupt differenzierbar, beziehungsweise stetig differenzierbar ist. Ein Beweis hierfür ist noch nicht erbracht worden.

### 4.1.3 Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung

Die inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung kann mit dem System *Variation der Konstanten* gelöst werden. Die Gleichung sieht folgendermaßen aus:

$$\tilde{V}_j'(\eta, \tau) = -\varphi(\eta)\tilde{V}_j(\eta, \tau) + \phi(\eta, \tau)$$

mit

$$\frac{\partial \tilde{V}_j(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \tilde{V}_j'(\eta, \tau)$$

und

$$\varphi(\eta) = \left( \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2 + i\eta k + r \right)$$

und

$$\phi(\eta, \tau) = e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} \left[ \frac{1}{2}\sigma^2 \left( v'(\ln(j(\tau))) - i\eta v(\ln(j(\tau))) \right) + v(\ln(j(\tau))) \left( k + \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} \right) \right].$$

Fange mit

$$\tilde{V}_j'(\eta, \tau) = -\varphi(\eta)\tilde{V}_j(\eta, \tau)$$

an.

$$y(\tau) = e^{-\int_0^\tau \varphi(\eta) ds} = e^{-\varphi(\eta)\tau}$$

löst die Differentialgleichung. Nun muss noch der  $\phi$  Term berücksichtigt werden.  
Setze dafür

$$\tilde{y}(\tau) = c(\tau)e^{-\varphi(\eta)\tau}.$$

Die Konstante  $c$  variiert.

$$\tilde{y}'(\tau) = c'(\tau)e^{-\varphi(\eta)\tau} - c(\tau)\varphi(\eta)e^{-\varphi(\eta)\tau} = -\varphi(\eta)\tilde{y}(\tau) + c'(\tau)e^{-\varphi(\eta)\tau}$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, muss also

$$c'(\tau) = \phi(\eta, \tau)e^{\varphi(\eta)\tau}$$

gelten. Integriere:

$$c(\tau) = \int_0^\tau \phi(\eta, s)e^{\varphi(\eta)s} ds + \tilde{V}_j(\eta, 0)$$

Die in  $\tau$  konstante Funktion  $\tilde{V}_j(\eta, 0)$  wird zur Erfüllung der gegebenen Anfangsbedingung gebraucht.

Damit ist die Funktion gefunden, die die Differentialgleichung erfüllt.

$$\begin{aligned}\tilde{V}_j(\eta, \tau) &= e^{-\varphi(\eta)\tau} \tilde{V}_j(\eta, 0) + e^{-\varphi(\eta)\tau} \int_0^\tau \phi(\eta, s) e^{\varphi(\eta)s} ds \\ &= e^{-\varphi(\eta)\tau} \tilde{V}_j(\eta, 0) + \int_0^\tau \phi(\eta, s) e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)} ds\end{aligned}\quad (4.13)$$

mit

$$\varphi(\eta) = \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 + i\eta k + r \right)$$

und

$$\phi(\eta, \tau) = e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 v'(\ln(j(\tau))) + v(\ln(j(\tau))) \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 - i\eta \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} \right) \right]$$

Folglich ist das nächste Ziel die Rücktransformierung.

#### 4.1.4 Die Rücktransformation

In diesem Abschnitt wird  $V_j(x, \tau)$  aus  $\tilde{V}(\eta, \tau)$  zurück gewonnen.

##### Definition

Für eine fast-sicher stetige Funktion  $f(x, \tau)$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiere:

$$F^{-1}\{f(\cdot, \tau)\}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta x} f(\eta, \tau) d\eta$$

Dies ist das Inverse der Fouriertransformation.

##### Satz

Setze  $f(x, \tau) = H(\ln(j(\tau)) - x)g(x, \tau)$ , also  $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt

$$g(x, \tau) = F^{-1}\{F\{f(\cdot, \tau)\}(\cdot)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} g(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta .$$

##### Beweis

Der Beweis zeigt, dass das Standard-Fourier-Transformationstheorem, siehe [11],

$$f(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta$$

die unvollständige Variante

$$g(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} g(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta$$

mit einschließt.

$f(x, \tau) = H(\ln(j(\tau)) - x)g(x, \tau)$  eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} H(\ln(j(\tau)) - x)g(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} H(\ln(j(\tau)) - x)g(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} g(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta , \end{aligned}$$

mit der Heaviside-Step-Function folgt

$$\begin{aligned} g(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} g(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta && -\infty < x < \ln(j(\tau)) \\ \frac{g(x, \tau)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\ln(j(\tau))} g(x, \tau) e^{i\eta x} dx \right] e^{-i\eta x} d\eta && x = \ln(j(\tau)) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Einige Hilfsmittel für die Rücktransformation werden benötigt.

### Lemma

Für  $\rho_1 > 0$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho_1 \eta^2 - \rho_2 \eta} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{\rho_1}} e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \quad (4.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\rho_1 \eta^2 - \rho_2 \eta} d\eta = -\sqrt{\frac{\pi}{\rho_1}} \frac{\rho_2}{2\rho_1} e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \quad (4.15)$$

### Beweis

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\rho_1 \eta^2 - \rho_2 \eta} d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-(\rho_1 \eta^2 + \rho_2 \eta + \frac{\rho_2^2}{4\rho_1} - \frac{\rho_2^2}{4\rho_1})} d\eta \\ &\stackrel{\rho_1 \geq 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-(\sqrt{\rho_1} \eta - \frac{-\rho_2^2}{4\rho_1})^2} e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} d\eta \\ &= e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\rho_1} \eta - \frac{-\rho_2^2}{4\rho_1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2} d\eta \\ &= e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \sqrt{\pi} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\rho_1} \eta - \frac{-\rho_2^2}{4\rho_1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2} d\eta \end{aligned}$$

Substituiere  $\sqrt{\rho_1} \eta = y \Rightarrow \sqrt{\rho_1} d\eta = dy$ . Die Grenzen bleiben bestehen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\rho_1 \eta^2 - \rho_2 \eta} d\eta = e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \sqrt{\pi} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{\rho_1}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y - \frac{-\rho_2^2}{4\rho_1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2} \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} dy$$

In der Situation (4.14) würde der Term  $\frac{y}{\sqrt{\rho_1}}$  wegfallen.

Der Integrationsterm ist der Erwartungswert einer  $\mathcal{N}\left(\frac{-\rho_2^2}{4\rho_1}, \frac{1}{2}\right)$  verteilten Zufallsvariablen  $Y$ .

Im Falle (4.14) steht im Integral eine Normalverteilungsdichte, womit (4.14) folgt.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\rho_1 \eta^2 - \rho_2 \eta} d\eta &= e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y - \frac{-\rho_2^2}{4\rho_1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2} dy \\ &= e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}} E[Y] = e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \frac{\sqrt{\pi}}{\rho_1} \frac{-\rho_2^2}{4\rho_1} \end{aligned}$$

□

### Definition

Der Faltungsoperator zweier fast-sicher stetiger Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$f * g (x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)du.$$

**Faltungstheorem**

$f$  und  $g$  seien fast-sicher stetige Funktionen mit Faltung  $f * g$  und Fouriertransformierten  $F\{f\}$ ,  $F\{g\}$ , dann gilt

$$(1) F\{f * g\} = F\{f\} \cdot F\{g\} \quad (2) F\{f \cdot g\} = F\{f\} * F\{g\} \quad (3) f * g = F^{-1}\{F\{f\} \cdot F\{g\}\}$$

Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet, er kann aber in [18] nachgelesen werden.

Teil 3 des Theorems soll angewendet werden, da  $F^{-1}\left\{e^{-\varphi(\eta)\tau}\tilde{V}_j(\eta, 0)\right\}(x)$  benötigt wird.  $F^{-1}\left\{e^{-\varphi(\eta)\tau}\right\}(x)$  und  $F^{-1}\left\{\tilde{V}_j(\eta, 0)\right\}(x)$  werden berechnet und danach gefaltet.

$$\begin{aligned} F^{-1}\left\{e^{-\varphi(\eta)\tau}\right\}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2\eta^2 + i\eta k + r)\tau} e^{-i\eta x} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau)\eta^2 - i(x+k)\eta} d\eta \\ &\stackrel{(4.14)}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{\frac{-(x+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \quad \frac{1}{2}\sigma^2\tau > 0 \text{ da } \tau > 0 \\ F^{-1}\left\{\tilde{V}_j(\eta, 0)\right\}(x) &= F^{-1}\left\{F^j\{V_j(x, 0)\}\right\}(x) = F^{-1}\left\{F\{H(\ln(j(0^+)) - x)V_j(x, 0)\}\right\}(x) \\ &= H(\ln(j(0^+)) - x)V_j(x, 0) = H(\ln(j(0^+)) - x)v(x) \end{aligned}$$

**Bemerkung**

$0^+$  wird verwendet, da, wie in Kapitel 3 gezeigt, die Funktion  $b(t)$  sich asymptotisch zur Senkrechten durch  $T$  verhält.

Teile nun für die Funktion  $V_j(x, \tau)$  in zwei Teile auf.

$$\begin{aligned} V_j(x, \tau) &= V_j^1(x, \tau) + V_j^2(x, \tau) \\ &= F^{-1}\left\{e^{-\varphi(\eta)\tau}\tilde{V}_j(\eta, 0)\right\}(x) + F^{-1}\left\{\int_0^\tau \phi(\eta, s)e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)}ds\right\}(x) \end{aligned}$$

Dank des Faltungstheorems und den oben bestimmten Gleichungen ergibt sich  $V_j^1$ .

$$\begin{aligned} V_j^1(x, \tau) &= F^{-1}\left\{e^{-\varphi(\eta)\tau}\tilde{V}_j(\eta, 0)\right\}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\left\{e^{-\varphi(\eta)\tau}\right\}(x-u) \cdot F^{-1}\left\{\tilde{V}_j(\eta, 0)\right\}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{\frac{-((x-u)+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} \cdot H(\ln(j(0^+)) - u)v(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{\frac{-((x-u)+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} v(u) du \end{aligned}$$

Es bleibt  $V_j^2$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} V_j^2(x, \tau) &= F^{-1} \left\{ \int_0^\tau \phi(\eta, s) e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)} ds \right\} (x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta x} \int_0^\tau \phi(\eta, s) e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)} ds d\eta \end{aligned}$$

Schreibe nun

$$\phi(\eta, \tau) = e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 v'(\ln(j(\tau))) + v(\ln(j(\tau))) \left( k - i\eta \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} \right) \right]$$

als

$$\phi(\eta, \tau) = e^{i\eta \cdot \ln(j(\tau))} [\phi_1(\tau) - \eta \phi_2(\tau)]$$

mit

$$\phi_1(\tau) = \frac{1}{2} \sigma^2 v'(\ln(j(\tau))) + \left( \frac{\partial j(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{j(\tau)} + k \right) v(\ln(j(\tau)))$$

und

$$\phi_2(\tau) = \frac{\sigma^2 i}{2} v(\ln(j(\tau))) .$$

Nun sind  $\phi_1$   $\phi_2$  unabhängig von  $\eta$  und die Integrationsreihenfolge kann vertauscht werden.

$$\begin{aligned} V_j^2(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta x} \int_0^\tau \phi(\eta, s) e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)} ds d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta x} \int_0^\tau e^{i\eta \cdot \ln(j(s))} [\phi_1(s) - \eta \phi_2(s)] e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)} ds d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta x} e^{i\eta \cdot \ln(j(s))} e^{-\varphi(\eta)(\tau-s)} [\phi_1(s) - \eta \phi_2(s)] d\eta ds \\ &\stackrel{\varphi(\eta)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \int_{-\infty}^\infty e^{-\eta^2 (\frac{\rho_2^2}{2}(\tau-s)) - \eta [ix - i \cdot \ln(j(s)) + i(\tau-s)k]} [\phi_1(s) - \eta \phi_2(s)] d\eta ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \int_{-\infty}^\infty e^{-\eta^2 \cdot \rho_1 - \eta \cdot \rho_2} [\phi_1(s) - \eta \phi_2(s)] d\eta ds \end{aligned}$$

Mit  $\rho_1 > 0$ , da  $0 < s < \tau$ , ist man in der Situation des Lemmas.

$$\begin{aligned} V_j^2(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \left[ \phi_1(s) \sqrt{\frac{\pi}{\rho_1}} e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} + \phi_2(s) \sqrt{\frac{\pi}{\rho_1}} e^{\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}} \frac{\rho_2}{2\rho_1} \right] ds \\ &\stackrel{\phi_1 \phi_2}{=} \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)+\frac{\rho_2^2}{4\rho_1}}}{2\sqrt{\pi\rho_1}} \left[ \frac{\sigma^2}{2} v'(\ln(j(s))) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + k \right) v(\ln(j(s))) + \frac{\sigma^2 i v(\ln(j(s))) \rho_2}{4\rho_1} \right] ds \\ &\stackrel{\rho_1 \rho_2}{=} \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)-h(x,s)}}{\sigma \sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ \frac{\sigma^2}{2} v'(\ln(j(s))) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{x - \ln(j(s))}{\tau-s} \right] \right) v(\ln(j(s))) \right] ds \end{aligned}$$

Mit

$$h(x, s) \equiv \frac{[x - \ln(j(s)) + k(\tau - s)]^2}{2\sigma^2(\tau - s)}$$

kann  $V_j$  explizit aufgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} V_j(x, \tau) &= \int_{-\infty}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{\frac{-((x-u)+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} v(u) du \\ &+ \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)-h(x,s)}}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ \frac{\sigma^2}{2} v'(\ln(j(s))) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{x - \ln(j(s))}{\tau - s} \right] \right) v(\ln(j(s))) \right] ds \\ &\text{für } 0 < \tau \leq T \text{ und } -\infty < x < \ln(j(\tau)) \end{aligned}$$

### Bemerkung

Es war möglich eine Integraldarstellung zu erlangen, ohne explizite Angabe der Auszahlungsfunktion. Die einzige Annahme an die an die Auszahlungsfunktion ist die Monotonie. Die Auszahlungsfunktion der Calloption wird im nächsten Schritt eingesetzt.

#### 4.1.5 Die Formel nach McKean für den Call

Die Auszahlungsfunktion einer Calloption ist streng monoton steigend für  $S \geq K$ , deswegen gilt:

$$c(S_t) = (S_t - K)_+ \Rightarrow v(x) = (e^x - K)_+ \Rightarrow v(x) = 0 \Leftrightarrow -\infty < x \leq \ln(K)$$

Setze dies in  $V_j(x, \tau)$  beziehungsweise in  $V_j^1(x, \tau)$  und  $V_j^2(x, \tau)$  ein.

$$\begin{aligned} V_j^1(x, \tau) &= \int_{-\infty}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{\frac{-((x-u)+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} v(u) du \\ &\stackrel{v(x)}{=} \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau+u} e^{\frac{-((x-u)+(k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} du - K \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{\frac{-((x-u)+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} du \\ &\equiv I_1(x, \tau) - K I_2(x, \tau) \end{aligned}$$

Betrachte  $I_1$  als Erstes.

$$\begin{aligned} I_1(x, \tau) &= \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{\frac{u2\sigma^2\tau-2\sigma^2r\tau^2+((x-u)-k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} du \\ &= e^{\frac{-2r\sigma^2\tau^2-x^2-k\tau^2-2xk\tau}{2\sigma^2\tau}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} e^{\frac{-(u^2-2u(\sigma^2\tau+x+k)}{2\sigma^2\tau}} du \\ &\stackrel{\text{quadr. Erg.}}{=} e^x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} e^{\frac{-(u-(x+k\tau))^2}{2\sigma^2\tau}} du}_{\text{Verteilungsfkt einer } N(x+k\tau, \sigma^2\tau)\text{-Zufallsvariable}} \end{aligned}$$

Seien  $X$  und  $Z$  Zufallsvariablen, mit

$$\begin{aligned} X &\sim N(x + k\tau, \sigma^2\tau) \quad \text{und} \quad Z \sim N(0, 1). \\ \Rightarrow \quad X &\stackrel{d}{=} \frac{Z}{\sigma\sqrt{\tau}} + (x + k\tau) \end{aligned}$$

Das Integral kann, dank der Symmetrie um Null einer  $N(0, \sigma^2)$  verteilten Zufallsvariable, vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} e^{\frac{-(u-(x+k\tau))^2}{2\sigma^2\tau}} du \\ &= P(X \leq \ln(j(0^+))) - P(X \leq \ln(K)) \\ &= P(X - E[X] \leq \ln(j(0^+)) - E[X]) - P(X - E[X] \leq \ln(K) - E[X]) \\ &\stackrel{\text{Sym.}}{=} P(X - E[X] \leq -\ln(K) + E[X]) - P(X - E[X] \leq -\ln(j(0^+)) + E[X]) \\ &= P\left(Z \leq \frac{-\ln(K) + E[X]}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - P\left(Z \leq \frac{-\ln(j(0^+)) + E[X]}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &= N\left(\frac{-\ln(K) + E[X]}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - N\left(\frac{-\ln(j(0^+)) + E[X]}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt  $I_1$ .

$$I_1(x, \tau) = e^x \left[ N\left(\frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - N\left(\frac{-\ln(j(0^+)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right]$$

Es fehlt  $I_2$ . Durch die Gleichung  $(x - u + k\tau)^2 = (u - (x + k\tau))^2$  und der linearen Transformation einer normalverteilten zu einer standardnormalverteilten Zufallsvariable erhält man

$$\begin{aligned}
 I_2(x, \tau) &= \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-r\tau} e^{-\frac{(x-u+k\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} du \\
 &= e^{-r\tau} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln(K)}^{\ln(j(0^+))} e^{-\frac{(u-(x+k\tau))^2}{2\sigma^2\tau}} du}_{\text{Verteilungsfkt einer } N(x+k\tau, \sigma\sqrt{\tau}) \text{ Zufallsvariable } X.} \\
 &= e^{-r\tau} [P(X \leq \ln(j(0^+))) - P(X \leq \ln(K))] \\
 &= e^{-r\tau} [P(X - E[X] \leq \ln(j(0^+)) - E[X]) - P(X - E[X] \leq \ln(K) - E[X])] \\
 &\stackrel{\text{Sym.}}{=} e^{-r\tau} [P(X - E[X] \leq -\ln(K) + E[X]) - P(X - E[X] \leq -\ln(j(0^+)) + E[X])] \\
 &\stackrel{1.\text{Transf.}}{=} e^{-r\tau} \left[ P\left(Z \leq \frac{-\ln(K) + E[X]}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - P\left(Z \leq \frac{-\ln(j(0^+)) + E[X]}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst hat man nun eine Darstellung für  $V_j^1$ .

$$\begin{aligned}
 V_j^1(x, \tau) &= e^x \left[ N\left(\frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - N\left(\frac{-\ln(j(0)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \\
 &\quad - Ke^{-r\tau} \left[ N\left(\frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - N\left(\frac{-\ln(j(0)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \\
 &= e^x N\left(\frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - Ke^{-r\tau} N\left(\frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
 &\quad - \left[ e^x N\left(\frac{-\ln(j(0)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - Ke^{-r\tau} N\left(\frac{-\ln(j(0)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Weiter gehts mit  $V_j^2(x, \tau)$ .

$$V_j^2(x, \tau) = \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)}}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau-s)}} e^{-h(x,s)} Q(x,s) ds$$

mit

$$h(x, s) \equiv \frac{[x - \ln(j(s)) + k(\tau - s)]^2}{2\sigma^2(\tau - s)}$$

und

$$Q(x, s) = \frac{\sigma^2}{2} v'(\ln(j(s))) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{x - \ln(j(s))}{\tau - s} \right] \right) v(\ln(j(s))).$$

Die Auszahlungsfunktion ist nur Bestandteil von  $Q(x, s)$ .

Für die Auszahlungsfunktion mit (4.6) gilt:

$$\begin{aligned} v(x) &= (e^x - K)_+ \quad \Rightarrow \quad v(\ln(j(s))) = c(j(s)) = (j(s) - K)_+ \\ v'(\ln(j(s))) &= \frac{\partial v(x)}{\partial x} \Big|_{\ln(j(s))} = \frac{\partial c(e^x)}{\partial x} \Big|_{\ln(j(s))} = \frac{\partial(e^x - K)}{\partial x} \Big|_{\ln(j(s))} = j(s) \end{aligned}$$

Eingesetzt in  $Q(x, s)$  entsteht:

$$Q(x, s) = \frac{\sigma^2}{2} j(s) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{x - \ln(j(s))}{\tau - s} \right] \right) (j(s) - K)$$

Damit folgt die gesuchte Funktion  $V_j$

$$\begin{aligned} V_j(x, \tau) &= e^x N \left( \frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - K e^{-r\tau} N \left( \frac{-\ln(K) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \\ &\quad - \left[ e^x N \left( \frac{-\ln(j(0)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - K e^{-r\tau} N \left( \frac{-\ln(j(0^+)) + (x + k\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right] \\ &\quad + \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)-h(x,s)}}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau-s)}} Q(x, s) ds \end{aligned}$$

und die Fouriertransformation ist aufgehoben. Nun muss noch die Transformationen in  $S$  rückgängig gemacht werden, um ein Ergebnis zu erzielen.

Ersetze nun wieder  $S$ :  $S_t = e^x \Leftrightarrow \ln(S_{T-\tau}) = x$ .

$$\begin{aligned} C_j(S_{T-\tau}, \tau) &= S_{T-\tau} \cdot N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/K) + k\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - K e^{-r\tau} N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/K) + k\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \\ &\quad - \left[ S_{T-\tau} \cdot N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/j(0^+)) + k\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - K e^{-r\tau} N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/j(0^+)) + k\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right] \\ &\quad + \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)-h(S_{T-\tau},s)}}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau-s)}} Q(S_{T-\tau}, s) ds \\ &= C_E(S_{T-\tau}, \tau) + \text{Early Exercise Premium} \end{aligned}$$

mit

$$h(S_{T-\tau}, s) \equiv \frac{(\ln(\frac{S_{T-\tau}}{j(s)}) + k(\tau - s))^2}{2\sigma^2(\tau - s)}$$

und

$$k = (r - q - \frac{\sigma^2}{2}) \quad \tau = T - t$$

und

$$Q(S_{T-\tau}, s) = \frac{\sigma^2}{2} j(s) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{\ln(S_{T-\tau}) - \ln(j(s))}{\tau - s} \right] \right) (j(s) - K)$$

Diese Funktion wird McKean Darstellung der amerikanischen Calloption genannt.

**Bemerkung**

Die Preisfunktion zerfällt also in den Black-Scholes Preis einer europäischen Calloption bezüglich  $\tau$  und  $S$  und ein Early Exercise Premium. Leider kann in dieser Darstellung keine ersichtliche ökonomische Interpretation des Premiums vorgenommen werden.

Wie schon erwähnt, beruht die Fouriertransformation und die damit resultierende Preisdarstellung auf der Kenntnis der Grenzfunktion. Um einen Nutzen aus dieser Darstellung zu ziehen, müsste die Preisfunktion an der Stelle  $C_j(j(\tau), \tau) = (j(\tau) - K)_+$  numerisch ausgewertet werden, da eine Integralgleichung für die Grenzfunktion entsteht. Danach könnte man den Preis über die numerisch errechnete Grenzfunktion berechnen. Leider ist die Grenzfunktion nicht leicht auszuwerten, denn es wird über dessen Ableitung integriert. Kim (1990) hat in seiner Darstellung die Ableitung der Grenzfunktion umgangen. Dies ist Inhalt der nächsten Sektion.

## 4.2 Die Darstellung nach Kim

Die Preisfunktion von Kim (1990) baut auf der Preisfunktion von McKean aus der letzten Sektion auf und entfernt die Ableitung der Grenzfunktion durch partielle Integration. Diese Ausarbeitung beruht ebenfalls auf [7].

Es werden einige Funktionen definiert, die das Arbeiten erleichtern.

Drücke die McKean-Darstellung aus der letzten Sektion folgendermaßen aus:

$$C_j(S_{T-\tau}, \tau) = C_E(S_{T-\tau}, \tau) - \left[ S_{T-\tau} \cdot N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/j(0^+)) + k\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - K e^{-r\tau} N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/j(0^+)) + k\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right] + R(S_{T-\tau}, \tau) \quad (4.16)$$

mit

$$R(S_{T-\tau}, \tau) = \int_0^\tau \frac{e^{-r(\tau-s)-h(S_{T-\tau}, s)}}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ \frac{\sigma^2}{2} j(s) + \left( \frac{\partial j(s)}{\partial s} \frac{1}{j(s)} + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{\ln(S_{T-\tau}) - \ln(j(s))}{\tau-s} \right] \right) (j(s) - K) \right] ds$$

$h(S_{T-\tau}, s)$  wird in zwei Funktionen unterteilt, von denen die eine konstant und die andere variabel in  $s$  ist.

$$\begin{aligned} h(S_{T-\tau}, s) &= \frac{\left[ \ln\left(\frac{S_{T-\tau}}{j(s)}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-s) \right]^2}{2\sigma^2(\tau-s)} \\ &= \frac{1}{2(\tau-s)} \left[ \frac{\ln(S_{T-\tau}) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-s)}{\sigma} - \frac{\ln(j(s)) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-s)}{\sigma} \right]^2 \\ &= \frac{[x - G(s)]^2}{2(\tau-s)} \end{aligned}$$

mit

$$y \equiv \frac{[\ln(S_{T-\tau}) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau]}{\sigma}$$

und

$$G(s) \equiv \frac{[\ln(j(s)) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)s]}{\sigma}$$

Für die Ableitung von  $G(s)$  in  $s$  gilt:

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = \frac{\left[ \frac{j'(s)}{j(s)} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]}{\sigma}$$

Da die folgenden Umformungen, aufgrund der Länge der Gleichungen, sehr unübersichtlich sind, wird ein Kommentar für jede Gleichung unter der Formel angegeben.

$R(S, \tau)$  kann mit diesen Definitionen geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
R(S_{T-\tau}, \tau) &\stackrel{1}{=} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ \frac{\sigma j(s)}{2} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{j'(s)}{j(s)} + k - k + \frac{1}{2} \left[ k - \frac{\ln \left( \frac{S_{T-\tau}}{j(s)} \right)}{\tau-s} \right] \right) (j(s) - K) \right] ds \\
&\stackrel{2}{=} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ \frac{\sigma j(s)}{2} + \left( G'(s) - \frac{k}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \left[ k - \frac{\ln \left( \frac{S_{T-\tau}}{j(s)} \right)}{\tau-s} \right] \right) (j(s) - K) \right] ds \\
&\stackrel{3}{=} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ \frac{\sigma j(s)}{2} + \left( G'(s) - \frac{y-G(s)}{2(\tau-s)} \right) (j(s) - K) \right] ds \\
&\stackrel{4}{=} R_1(S_{T-\tau}, \tau) - R_2(S_{T-\tau}, \tau).
\end{aligned}$$

- 1) Umformungen von  $h(S_{T-\tau}, s)$  einsetzen, hinzufügen von  $\pm k$  und  $\frac{1}{\sigma}$  in die eckige Klammer ziehen.
- 2)  $\frac{1}{\sigma}$  in die runde Klammer ziehen und die Definition von  $G'(s)$  nutzen
- 3) Definition von  $y - G(s)$
- 4) Aufteilen des Integrals in

$$\begin{aligned}
R_1(S_{T-\tau}, \tau) &= \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}} j(s) \left[ \frac{\sigma}{2} + G'(s) - \frac{y-G(s)}{2(\tau-s)} \right] ds \\
R_2(S_{T-\tau}, \tau) &= K \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi(\tau-s)}} \left[ G'(s) - \frac{y-G(s)}{2(\tau-s)} \right] ds.
\end{aligned}$$

Diese Teile können nun einzeln bearbeitet werden. Beginne mit  $R_1(S_{T-\tau}, \tau)$ .

$$\begin{aligned}
R_1(S_{T-\tau}, \tau) &\stackrel{5}{=} \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{j(s)}{\sqrt{\tau-s}} \left[ \frac{\sigma(\tau-s) + 2(\tau-s)G'(s) - y + G(s)}{2(\tau-s)} \right] \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-G(s)+\sigma(\tau-s)]^2}{2(\tau-s)}} e^{(y-G(s))\sigma + \frac{\sigma^2}{2}(\tau-s)} ds \\
&\stackrel{6}{=} - \int_0^\tau e^{-q(\tau-s)} \cdot S_{T-\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-G(s)+\sigma(\tau-s)]^2}{2(\tau-s)}} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right] ds \\
&\stackrel{7}{=} - \int_0^\tau e^{-q(\tau-s)} \cdot S_{T-\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left[ N \left( \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right] ds
\end{aligned}$$

- 5) Verschieben des  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , den Inhalt der eckigen Klammer auf einen Nenner bringen und quadratisch Ergänzen.

6) Auflösen der zweiten e-Funktion und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right] &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\sigma(\tau-s) + \frac{[\ln(S_{T-\tau}) + (r-q-\frac{\sigma^2}{2})\tau]}{\sigma} - \frac{[\ln(j(s)) + (r-q-\frac{\sigma^2}{2})s]}{\sigma}}{\sqrt{\tau-s}} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \sigma + \frac{k}{\sigma} \right) \sqrt{\tau-s} + \frac{1}{\sigma} (\ln(S_{T-\tau}) - \ln(j(s))) \frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \left[ \frac{\sigma(\tau-s) + \frac{K}{\sigma}(\tau-s) + \frac{2}{\sigma} \frac{j'(s)}{j(s)}(\tau-s) - \frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{S_{T-\tau}}{j(s)} \right)}{2(\tau-s)} \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \left[ \frac{\sigma(\tau-s) + 2(\tau-s)G'(s) - y + G(s)}{2(\tau-s)} \right].
 \end{aligned}$$

7) Leibnizformel für Parameterintegrale anwenden.

$R_2(S_{T-\tau}, \tau)$  kann ähnlich behandelt werden.

$$\begin{aligned}
 R_2(S_{T-\tau}, \tau) &\stackrel{8}{=} -K \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{-\sqrt{(\tau-s)}G'(s) + \frac{1}{2\sqrt{\tau-s}}(y-G(s))}{(\tau-s)} \right] ds \\
 &\stackrel{9}{=} -K \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{e^{\frac{(y-G(s))^2}{2(\tau-s)}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{y-G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right] ds \\
 &\stackrel{10}{=} -K \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[ N \left( \frac{y-G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right] ds
 \end{aligned}$$

8) Die Summe in der eckigen Klammer gleichnamig machen und  $-\frac{1}{\sqrt{\tau-s}}$  reinziehen.  
 9)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{y-G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right] &= \frac{\left( \frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{S_t}{j(s)} \right) + \frac{1}{\sigma} k(\tau-s) \right) \frac{1}{2\sqrt{\tau-s}} - \frac{(\tau-s)}{\sigma} \left( \frac{j'(s)}{j(s)} + k \right)}{\tau-s} \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\tau-s}}(y-G(s)) - \sqrt{(\tau-s)}G'(s)}{(\tau-s)}
 \end{aligned}$$

10) Leibnizformel für Parameterintegrale anwenden.

Füge beide Teile wieder zusammen. Das gewünschte Ziel, die Ableitung zu entfernen, kann durch partielle Integration erreicht werden.

$$\begin{aligned}
R(S_{T-\tau}, \tau) &= - \int_0^\tau e^{-q(\tau-s)} \cdot S_{T-\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left[ N \left( \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right] ds \\
&\quad - K \int_0^\tau e^{-r(\tau-s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[ N \left( \frac{y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right] ds \\
&= -S_{T-\tau} \left( \left[ e^{-q(\tau-s)} N \left( \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right]_0^\tau - \int_0^\tau q e^{-q(\tau-s)} \left[ N \left( \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right] ds \right) \\
&\quad + K \left( \left[ e^{-r(\tau-s)} N \left( \frac{y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right]_0^\tau - \int_0^\tau r e^{-r(\tau-s)} N \left( \frac{y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) ds \right)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die ausintegrierten Terme, so ist nicht direkt klar, wogegen sie für  $s \rightarrow \tau$  konvergieren.

Genauere Betrachtung liefert

$$\lim_{s \rightarrow \tau} \frac{y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} = \lim_{s \rightarrow \tau} \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}) - \ln(j(s))}{\sigma \sqrt{\tau-s}} + \frac{k(\tau-s)}{\sigma \sqrt{\tau-s}} \right) = \lim_{s \rightarrow \tau} \frac{\ln(S_{T-\tau}) - \ln(j(s))}{\sigma \sqrt{\tau-s}} = \begin{cases} 0 & S_{T-\tau} = j(s) \\ -\infty & S_{T-\tau} < j(s) \end{cases}$$

durch  $\ln(S_{T-\tau}/j(s)) < 0$  für  $S_{T-\tau} < j(s)$  und  $\ln(S_{T-\tau}/j(s))$  endlich.

Diese beiden Möglichkeiten werden durch  $\delta$  berücksichtigt.

$$\delta(S_{T-\tau}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & S_{T-\tau} = j(s) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
R(S_{T-\tau}, \tau) &= -S_{T-\tau} \left( \delta(S_{T-\tau}) - e^{-q\tau} N \left( \frac{\sigma\tau + y - G(0)}{\sqrt{\tau}} \right) \right) \\
&\quad + S_{T-\tau} \left( \int_0^\tau q e^{-q(\tau-s)} \left[ N \left( \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) \right] ds \right) \\
&\quad + K \left( \delta(S_{T-\tau}) - e^{r\tau} N \left( \frac{y - G(0)}{\sqrt{\tau}} \right) - \int_0^\tau r e^{-r(\tau-s)} N \left( \frac{y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) ds \right) \\
&= e^{-q\tau} S_{T-\tau} \cdot N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/j(0^+)) + k\tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \\
&\quad - K e^{-r\tau} N \left( \frac{\ln(S_{T-\tau}/j(0^+)) + k\tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \delta(S_{T-\tau}) \cdot (S_{T-\tau} - K) \\
&\quad + \int_0^\tau q S_{T-\tau} e^{-q(\tau-s)} N \left( \frac{\sigma(\tau-s) + y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) - r K e^{-r(\tau-s)} N \left( \frac{y - G(s)}{\sqrt{\tau-s}} \right) ds
\end{aligned}$$

Durch diese Version des Integralterms fallen die ersten beiden Terme des EEPs in (4.16) weg und es folgt die Darstellung des Optionspreises nach Kim vor Ausübung.

$$\begin{aligned} C(S_{T-\tau}, \tau) &= C_E(S_{T-\tau}, \tau) \\ &+ \int_0^\tau qS_{T-\tau}e^{-q(\tau-s)}N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_{T-\tau}}{j(s)}\right) + (k + \sigma^2)(\tau - s)}{\sigma\sqrt{\tau - s}}\right) - rKe^{-r(\tau-s)}N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_{T-\tau}}{j(s)}\right) + k(\tau - s)}{\sigma\sqrt{\tau - s}}\right)ds \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$C(S_{T-\tau}, \tau) = C_E(S_{T-\tau}, \tau) + EEP$$

Wenn das Finanzgut die Grenzfunktion erreicht entsteht eine Integralgleichung für die Grenzfunktion.

$$\begin{aligned} j(\tau) - K &= C_E(j(\tau), \tau) + \\ &+ \int_0^\tau qj(\tau)e^{-q(\tau-s)}N\left(\frac{\ln\left(\frac{j(\tau)}{j(s)}\right) + (k + \sigma^2)(\tau - s)}{\sigma\sqrt{\tau - s}}\right) - rKe^{-r(\tau-s)}N\left(\frac{\ln\left(\frac{j(\tau)}{j(s)}\right) + k(\tau - s)}{\sigma\sqrt{\tau - s}}\right)ds \end{aligned} \quad (4.18)$$

### Bemerkung

In dieser Darstellung ist der Faktor  $\frac{1}{2}$  nicht mehr notwendig, denn für  $S_{T-\tau} = j(\tau)$  gilt

$$\frac{(j(\tau) - K)}{2} = C_E(S_{T-\tau}, \tau) - \frac{(j(\tau) - K)}{2} + EEP \quad (4.19)$$

wegen der Konvergenz der Fouriertransformation zum Mittelwert an der Unstetigkeitsstelle und  $\delta$ . Beachte das das Early Exercise Premium auch von  $j(\tau)$  bzw  $S$  abhängt, dies hier aber nicht von Bedeutung ist. Bringt man nun  $-\frac{(j(\tau)-K)}{2}$  auf die linke Seite der Gleichung, so hat man eine Darstellung, die die Definition des Wertes an der Sprungstelle in der Heavide-Step Funktion nicht mehr benötigt.

Ein weiterer Vorteil der Darstellung von Kim ist, dass (4.18) eine Gleichung für die Grenzfunktion liefert.

Ebenso erlaubt diese Version der Preisfunktion eine ökonomische Interpretation des Early Exercise Premiums. Wenn man als Käufer der Calloption in  $t$  vorzeitig in  $t^*$  ausübt, bekommt man  $(S_{t^*} - K)$  ausgezahlt. Kauft man davon das Basisfinanzgut und leihst sich  $K$ , dann ist die Strategie selbstfinanzierend. Bis zum Zeitpunkt  $T$  streicht man Dividendenzahlungen ein und bezahlt die Zinsen für  $K$ . In  $T$  hat man dann den gleichen Wert wie jemand, der die europäische Option gekauft hat, nämlich  $(S_T - K)_+$ . Das Early Exercise Premium ist somit die Differenz aus erwarteten Dividenden und Zinsen, nach vorzeitiger Auslösung, wie im Integralterm zu erkennen.

### 4.3 Der amerikanische Callpreis ohne Dividendenzahlungen

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Berechnung eines Callpreises ohne Dividendenauszahlungen des Basisfinanzguts nicht sinnvoll ist. Die Ausarbeitung beruht auf [1], Kapitel 8.

#### Satz

Ohne Dividendenzahlungen des Basisfinanzguts stimmen der Preis einer amerikanischen Calloption und der Preis einer europäischen Calloption bei gleichem Basisfinanzgut und gleicher Laufzeit überein.

#### Beweis

Der Beweis beruht auf folgendem

##### Lemma

Sei  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und konvex mit  $h(0) = 0$ .

Dann ist  $e^{-rt}h(S_t)$  ein Submartingal, wenn  $S_t$  außerdem ein Martingal ist.

Beweis des Lemmas

Da die Funktion  $h(x)$  konvex ist, erfüllt sie für  $0 \leq \lambda \leq 1$  und  $x_1 \leq x_2$

$$h((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)h(x_1) + \lambda h(x_2).$$

Für  $x_1 = 0$  und  $x = x_2$  gilt somit

$$h(\lambda x) \leq \lambda h(x)$$

Setze  $0 \leq u \leq t \leq T$ , daraus folgt  $0 \leq \exp(-r(t-u)) \leq 1$ . Mit der Monotonie des bedingten Erwartungswertes, der Jensen-Ungleichung und der Martingaleigenschaft von  $\exp(-rt)S_t$  unter dem Martingalmaß entsteht:

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-r(t-u)} h(S_t) \mid \mathcal{F}_u \right] &\geq E \left[ h \left( e^{-r(t-u)} S_t \right) \mid \mathcal{F}_u \right] \\ &\geq h \left( E \left[ e^{-r(t-u)} S_t \mid \mathcal{F}_u \right] \right) \\ &= h \left( e^{ru} E \left[ e^{-rt} S_t \mid \mathcal{F}_u \right] \right) \\ &= h(S_u) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$E \left[ e^{-rt} h(S_t) \mid \mathcal{F}_u \right] \geq e^{-ru} h(S_u)$$

und schließt den Beweis des Lemmas.

Wenn nun  $h(x) = (x - K)_+$  ist, dann gilt mit  $x \leq y$

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y)$$

für alle drei möglichen Fälle:  $\{x, y \mid h(x) = 0, h(y) = 0\}$ ,  $\{x, y \mid h(x) = 0, h(y) > 0\}$  und  $\{x, y \mid h(x) > 0, h(y) > 0\}$ . Damit ist  $h(x)$  konvex und das Lemma liefert

$$E \left[ e^{-r(T-u)} (S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_u \right] \geq (S_u - K)_+.$$

Das heißt, es ist am Optimalsten mit der Ausübung bis  $T$  zu warten, da der innere Wert der amerikanischen Calloption sonst immer vom europäischen Callpreis dominiert wird.

□

### Bemerkung

Das Lemma gilt nicht bei Dividendenzahlungen, da unter dem Martingalmaß  $\exp(-rt)S_t$  kein Martingal, sondern ein Supermartingal ist. Die Drift nach unten entsteht, weil die Zinsgewinne aus der angelegten Dividende fehlen. Wenn in der Preisversion von Kim  $q = 0$  gesetzt wird, ist direkt zu erkennen, dass vorzeitiges Ausüben suboptimal ist, denn das Early Exercise Premium ist in diesem Fall immer negativ.

Ebenso ist das Lemma nicht für die Putoption anwendbar, da für  $h(x) = (K - x)_+$  nicht  $h(0) = 0$  gilt.

## Kapitel 5

# Der Preis für die amerikanische Putoption bei endlicher und unendlicher Laufzeit

### 5.1 Endliche Laufzeit

Betrachte nun eine amerikanische Putoption auf ein Basisfinanzgut  $S_t$  mit  $T < \infty$ . Diese Sektion bezieht sich auf das Paper *Alternative Characterizations of American Put Options* von Carr, Jarrow und Myneni, [14].

Definiere den Prozess  $L$  als abgezinster Preis der Putoption im Zeitpunkt  $t$ .

$$L(S_t, t) \equiv e^{-rt} P(S_t, t)$$

$e^{-rt}$  ist in  $t$  und  $S$  stetig differenzierbar. Nun kann die, schon in Kapitel 3 erwähnte, erweiterte Itô-Formel angewendet werden, da  $L(S_t, t)$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion in  $S$  ist.

$$L(S_T, T) = L(S_0, 0) + \int_0^T \frac{\partial L(S_t, t)}{\partial S} dS_t + \int_0^T \frac{\partial L(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 L(S_t, t)}{\partial S^2} d\langle S, S \rangle_t$$

Durch die quadratische Variation einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt

$$L(S_T, T) = L(S_0, 0) + \int_0^T \frac{\partial L(S_t, t)}{\partial S} dS_t + \int_0^T \frac{\partial L(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 L(S_t, t)}{\partial S^2} dt.$$

Wenn  $L(S_t, t)$  wieder ersetzt werden soll, muss  $\frac{\partial L}{\partial t}$  genauer betrachtet werden.

$$\frac{\partial L(S_t, t)}{\partial t} = \frac{\partial e^{-rt} P(S_t, t)}{\partial t} = e^{-rt} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} - r e^{-rt} P(S_t, t)$$

Damit folgt:

$$e^{-rT} P(S_T, T) = P(S_0, 0) + \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} dS_t + \int_0^T \frac{\sigma^2 S_t^2 e^{-rt}}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - r e^{-rt} P(S_t, t) + e^{-rt} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} dt$$

Es soll eine Preisfunktion für  $t = 0$  angegeben werden. Dafür muss über die komplette Laufzeit integriert werden. Der Preis nach vorzeitiger Ausübung ist bekannt,

$P(a(t), t) = (K - a(t))_+$ , also kann  $P(S_t, t)$  in Preis vor und nach Ausübung geteilt werden.

$$P(S_t, t) = \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} P(S_t, t) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (K - S_t)_+$$

Da  $P(S_0, 0)$  bestehen bleibt, weil  $S_0 > a(0)$  vorausgesetzt ist und am Ende der Vertragslaufzeit

$$P(S_T, T) = (K - S_T)_+$$

gilt, folgt:

$$\begin{aligned} e^{-rT}(K - S_T)_+ &= P(S_0, 0) \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial (\mathbb{1}_{(S_t > a(t))} P(S_t, t) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (K - S_t)_+)}{\partial S} dS_t \\ &\quad + \int_0^T \frac{\sigma^2 S_t^2 e^{-rt}}{2} \frac{\partial^2 (\mathbb{1}_{(S_t > a(t))} P(S_t, t) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (K - S_t)_+)}{\partial S^2} dt \\ &\quad - r e^{-rt} (\mathbb{1}_{(S_t > a(t))} P(S_t, t) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (K - S_t)_+) \\ &\quad + e^{-rt} \frac{\partial (\mathbb{1}_{(S_t > a(t))} P(S_t, t) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (K - S_t)_+)}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Natürlich übt man die Option nur aus, wenn die Auszahlung positiv ist. Daher ist

$$(K - S_t)_+ = (K - S_t).$$

Außerdem gilt für die Indikatorfunktionen

$$\frac{\partial \mathbb{1}_0}{\partial S} = 0 = \frac{\partial \mathbb{1}_0}{\partial t}.$$

$$e^{-rT}(K - S_T)_+$$

$$\begin{aligned} &= P(S_0, 0) \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \left( \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dS_t \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \left[ \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \left( \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - r P(S_t, t) + \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} \right) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (-r(K - S_t)) \right] dt \end{aligned}$$

Setze nun die stochastische Differentialgleichung von  $S_t$  ein.

$$\begin{aligned} &e^{-rT}(K - S_T)_+ \\ &= P(S_0, 0) \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \left( \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) (rS_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \left[ \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \left( \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - r P(S_t, t) + \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} \right) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (-r(K - S_t)) \right] dt \end{aligned}$$

Durch Umstellen ergibt sich im  $dt$ -Term die Black-Scholes-Differentialgleichung, die für  $S_t > a(t)$  gleich Null ist.

$$e^{-rT}(K - S_T)_+$$

$$\begin{aligned} &= P(S_0, 0) \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \left( \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dW_t \\ &\quad + \int_0^T e^{-rt} \left[ \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \left( r S_t \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P(S_t, t)}{\partial S^2} - r P(S_t, t) + \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial t} \right) + \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} (-rK) \right] dt \\ &= P(S_0, 0) - rK \int_0^T e^{-rt} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt + \int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \left( \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dW_t \end{aligned}$$

Nehme nun den Erwartungswert zum Martingalmaß  $Q$  auf beiden Seiten der Gleichung.

$$\begin{aligned} &E [e^{-rT}(K - S_T)_+] = \\ &P(S_0, 0) - rK \cdot E \left[ \int_0^T e^{-rt} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt \right] + E \left[ \int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \left( \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dW_t \right] \end{aligned}$$

Der linke Teil der Gleichung entspricht dem Preis einer europäischen Putoption in  $t = 0$ , bezeichnet durch  $P_E(S_0, 0)$ .

$$P_E(S_0, 0) = P(S_0, 0) - rK \cdot E \left[ \int_0^T e^{-rt} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt \right] + E \left[ \underbrace{\int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \left( \mathbb{1}_{(S_t > a(t))} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dW_t}_{=: X_t} \right]$$

Es soll gezeigt werden, dass der letzte Term der Gleichung gleich Null ist. Dies ist der Fall falls das Itô-Integral  $X_t$  ein Martingal ist, denn dann gilt  $E[X_T | \mathcal{F}_0] = X_0 = 0$ .

Aus [1] ist bekannt, dass jedes Itô-Integral, dessen Integrand  $x_t E \left[ \int_0^T x_t^2 dt \right] < \infty$  erfüllt, ein Martingal ist.

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T x_t^2 dt \right] &= E \left[ \int_0^T e^{-2rt} \sigma^2 S_t^2 \left( \mathbb{1}_{(S_t > a_t)} \left( \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \right)^2 - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dt \right] \\ &= E \left[ \int_0^T e^{-2rt} \sigma^2 S_t^2 \mathbb{1}_{(S_t > a_t)} \left( \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \right)^2 dt \right] - E \left[ \int_0^T e^{-2rt} \sigma^2 S_t^2 \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt \right] \end{aligned}$$

Da  $T$  endlich ist, gilt dies auch für den  $S_t \leq a(t)$ -Term. Für  $S_t > a_t$  ist  $\frac{\partial P}{\partial S}$  stetig und der Integrand ist größer als Null. Damit kann, nach Fubini, die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T e^{-2rt} \left( \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \right)^2 dt \right] &= \int_0^T e^{-2rt} E \left[ \left( \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} \right)^2 \right] dt \\ &< \infty \end{aligned}$$

Denn  $\frac{\partial P}{\partial S}(S, t)$  ist beschränkt: Für  $t$  fest und  $S \in ]a(t), \infty[$  ist aus Kapitel 3 bekannt, dass  $\frac{\partial P}{\partial S} \leq 0$  und  $\frac{\partial P^2}{\partial S^2} \geq 0$  gilt. Alles verarbeitet gibt  $-1 \leq \frac{\partial P}{\partial S}(\cdot, t) \leq 0 \forall t$ .

$$\Rightarrow E \left[ \int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \left( \mathbb{1}_{(S_t > a_t)} \frac{\partial P(S_t, t)}{\partial S} - \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} \right) dW_t \right] = 0$$

$$\Rightarrow P_E(S_0, 0) = P(S_0, 0) - rK \cdot E \left[ \int_0^T e^{-rt} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt \right]$$

Der Erwartungswert kann ebenfalls mit Fubini vereinfacht werden.

$$E \left[ \int_0^T e^{-rt} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{-rt} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dt dQ$$

$$= \int_0^T e^{-rt} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(S_t \leq a(t))} dQ dt$$

$$= \int_0^T e^{-rt} Q(S_t \leq a(t)) dt$$

Die Wahrscheinlichkeit  $Q(S_t \leq a(t))$  lässt sich berechnen, da  $W_t$  eine Brownsche Bewegung unter  $Q$  ist.

$$Q(S_t \leq a(t)) = Q \left( S_0 e^{\left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)} \leq a(t) \right)$$

$$= Q \left( W_t \leq \frac{\ln \left( \frac{a(t)}{S_0} \right) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma} \right)$$

$$= N \left( \frac{\ln \left( \frac{a(t)}{S_0} \right) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

Mit diesem Ergebnis ergibt sich für die Preisfunktion

$$P_E(S_0, 0) = P(S_0, 0) - rK \int_0^T e^{-rt} N \left( \frac{\ln \left( \frac{a(t)}{S_0} \right) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) dt,$$

oder

$$P(S_0, 0) = P_E(S_0, 0) + rK \int_0^T e^{-rt} N \left( \frac{\ln \left( \frac{a(t)}{S_0} \right) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) dt.$$

### Bemerkung

Es wurde also eine Darstellung des Preises einer Putoption in  $t=0$  erarbeitet, die, wie im Call-Fall, den Preis in europäische Option und Early Exercise Premium aufsplittet. Das Early Exercise Premium in dieser Version ähnelt dem von Kim aus Kapitel 4. Die ökonomische Interpretation kann deswegen übernommen werden.

## 5.2 Unendliche Laufzeit

Die Ausarbeitung beruht auf einem Paper von Henry McKean, [15].

Für die amerikanische Putoption mit unendlicher Laufzeit ( $T=\infty$ ) ist es möglich die Grenzfunktion explizit zu bestimmen. Es wird gezeigt, dass der Preis für die Option nicht von der Zeit abhängt und somit konstant in  $t$  ist. Damit vereinfacht sich die Black-Scholes-Differentialgleichung von einer partiellen zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung, für die es einen Lösungsalgorithmus gibt.

### Satz

Aufbauend auf der Preisfunktion für eine endliche amerikanische Putoption, kann die Preisfunktion bei unendlicher Laufzeit der Option angegeben werden. Sei  $x$  der Startwert des Finanzguts.

$$P(x) = \sup_{\tau \geq 0} E \left[ e^{-r\tau} (K - S_\tau^x)_+ \right]$$

Die Preisfunktion ist also konstant in der Zeit. Für den Fall, dass die Option nie ausgeübt wird,  $\tau = \infty$ , setze den Preis gleich 0.

### Beweis

Mit der Definition des Pupreises zum Zeitpunkt  $t$  und Wert des Basisfinanzguts  $x$  folgt dann:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sup_{\tau \geq t} E \left[ e^{-r(\tau-t)} (K - xS_\tau)_+ \right] \\ &= \sup_{\tau-t \geq 0} E \left[ e^{-r(\tau-t)} \left( K - x \exp \left( (r - \frac{\sigma^2}{2})(\tau-t) + \sigma(W_\tau - W_t) \right) \right)_+ \right] \\ &\stackrel{x=\tau-t}{=} \sup_{\chi \geq 0} E \left[ e^{-r\chi} \left( K - x \exp \left( (r - \frac{\sigma^2}{2})\chi + \sigma(W_{\chi+t} - W_t) \right) \right)_+ \right] \\ &= \sup_{\chi \geq 0} E \left[ e^{-r\chi} (K - xS_\chi)_+ \right] \\ &= P(x, 0) \end{aligned}$$

Der Preis einer amerikanischen Option  $P(x, t)$  mit Laufzeit  $T$  ist abhängig vom Wert des Finanzguts in  $t$  und der Restlaufzeit der Option. Die Restlaufzeit bei unendlicher Laufzeit ist für alle Werte  $t$  gleich. □

### Korollar

Damit ist  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$  und  $P(S)$  erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\sigma^2 S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(S)}{\partial S^2} - rP(S) + rS \frac{\partial P(S)}{\partial S} = 0.$$

Da der Preis in  $t$  konstant ist, muss auch die Grenzfunktion konstant sein. Definiere deswegen  $a$  als

$$a \equiv a(t).$$

Die Randwerte in  $S$  können aus Kapitel 2 übernommen werden:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S) = 0 \quad P(a) = (K - a)_+$$

## Lösen der Differentialgleichung

Aus der partiellen Differentialgleichung ist nun eine lineare, homogene, gewöhnliche Differentialgleichung geworden, die lösbar ist.

Der Einfachheit halber stelle sie folgendermaßen dar:

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} y''(x) + rxy'(x) - ry(x) = 0$$

Für diese Art von Differentialgleichung weiß man, dass es 2 linear unabhängige Lösungen  $\chi_1, \chi_2$  gibt. Die Menge aller Lösungen bezeichnet  $\varsigma$ .  $\varsigma = \{ \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$ .  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  werden über die Randwerte berechnet und bestimmen eine eindeutige Lösung. Für mehr Details zu gewöhnlichen Differentialgleichungen siehe [8]

Wenn man  $y(x) = x^\alpha$  wählt, gilt

$$y'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{(\alpha-1)}, \quad y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{(\alpha-2)}$$

und man kann die Differentialgleichung umschreiben zu

$$\begin{aligned} & \left( -r + r\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\alpha(\alpha-1) \right) y = 0 \\ \Leftrightarrow & -r + r\alpha + \frac{\sigma^2}{2}(\alpha^2 - \alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\alpha - r = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha^2 + \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right)\alpha + \frac{2r}{\sigma^2} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit der pq-Formel gelöst werden.

$$\begin{aligned} \chi_1, \chi_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \pm \sqrt{\frac{\left( \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right)^2}{4} + \frac{2r}{\sigma^2}} \\ &= -\left( \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{r^2}{\sigma^4} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{4}} \\ &= -\left( \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right)^2} \\ \Rightarrow \quad \chi_1 &= -\frac{2r}{\sigma^2} \quad \chi_2 = 1 \\ \Rightarrow \quad P(S) &= \alpha_1 S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} + \alpha_2 S \end{aligned}$$

Um die eindeutige Lösung für die Differentialgleichung zu finden, müssen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  über die Randwerte berechnet werden.

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} P(S) &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ P(a) = \alpha_1 \cdot a^{\left( -\frac{2r}{\sigma^2} \right)} &= K - a \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{K - a}{a^{\left( -\frac{2r}{\sigma^2} \right)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(S) = (K - a) \left( \frac{S}{a} \right)^{\left( -\frac{2r}{\sigma^2} \right)}$$

Es fehlt noch die Bestimmung der Grenzfunktion, beziehungsweise des Grenzwertes  $a$ , damit die Preisfunktion vollständig auswertbar ist.

### Bestimmung der Grenzfunktion

Da die Preisfunktion die Stetigkeitseigenschaft

$$\frac{\partial P(S, t)}{\partial S} \Big|_{S=a} = -1$$

erfüllt, kann die Grenzfunktion direkt aus der Formel gewonnen werden.

$$\frac{\partial}{\partial S} \left( (K - a) \left( \frac{S}{a} \right)^{\left( -\frac{2r}{\sigma^2} \right)} \right) \Big|_{S=a} = -\frac{(K - a) \frac{2r}{\sigma^2}}{a}$$

Dies ergibt die Gleichung

$$(K - a) \frac{2r}{\sigma^2} = a.$$

Die optimale Ausübung ist also gegeben, wenn das Basisfinanzgut

$$a = \frac{\frac{2r}{\sigma^2}}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} K$$

erreicht.

## Kapitel 6

# Der Putpreis für die endliche Basket Option

Detemple und Broadie beschäftigten sich in [4] mit der Berechnung des Callpreises. Auf dieser Grundlage wird nun der Putpreis für eine Amerikanische Basket Option bestimmt, die auf den beiden Basisfinanzgütern  $S_v^1$  und  $S_v^2$  beruht.

Das optimale Stoppen gestaltet sich schwieriger, da die Entwicklung von  $S^1$  und  $S^2$  beachtet werden muss. Siehe dazu auch die Eigenschaften der Grenzregionen in Kapitel 3.

Die Spaltung des Putpreises kann, wie im eindimensionalen Fall, in den europäischen Basket-Put und Early Exercise Premium erfolgen.

$$P_{\Sigma}(S_t^1, S_t^2, t) = P_E(S_t^1, S_t^2, t) + EEP \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} &= E \left[ e^{-r(T-t)} (K - (S_T^1 + S_T^2))_+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + \int_t^T e^{-r(v-t)} E \left[ (rK - (q_1 S_v^1 + q_2 S_v^2)) \mathbb{1}_{(S_v^2 \leq a^2(S_v^1, v))} \middle| \mathcal{F}_v \right] dv \end{aligned} \quad (6.2)$$

Das Early Exercise Premium basiert auf der ökonomischen Interpretation, die schon bei Kim gegeben wurde:

Die Strategie ist, nach vorzeitigem Ausüben der Option,  $K$  zu kaufen und  $S^1$  und  $S^2$  leerzuverkaufen. Damit ist Selbstfinanziertheit gegeben und am Ende ist der Unterschied zur europäischen Basket-Option die Differenz aus erwarteten Zinsgewinnen von  $K$  und den zu bezahlenden Dividenden von  $S^1$  und  $S^2$ . Man beachte, dass es keinen Unterschied macht, ob man als optimale Auslösestrategie den ersten Eintritt von  $S_v^2$  oder  $S_v^1$  in die Grenzregion wählt. Die europäische Basket-Option wurde schon in Kapitel 2 behandelt. Im Folgenden soll das Early Exercise Premium vereinfacht werden.

Um den Schreibaufwand zu minimieren und die Übersichtlichkeit zu bewahren, definiere

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(v-t)}} e^{-\frac{1}{2(v-t)}x^2}$$

und definiere die geometrische Brownsche Bewegung von  $t$  nach  $v$ ,  $v \geq t$ , mit Wert  $S_t^1 = x_1$  und  $S_t^2 = x_2$  als

$$x_1 S_v^1 \quad \text{und} \quad x_1 S_v^1,$$

Betrachte als Erstes die Indikatorfunktion.

$$x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v)$$

Hier ist zu beachten, dass  $S_t^2$ , aufgrund der Konstruktion in Kapitel 2, nicht unabhängig von  $S_t^1$  ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt kann also nicht vereinfacht werden. Um dies zu umgehen, müssen die stochastischen Prozesse in den Basisfinanzgütern verändert werden.

Nehme die 2 korrelierten Brownsche Bewegungen  $W_t^1$  und  $W_t^2$  mit  $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$ . Die neue Unsicherheit in den geometrischen Brownschen Bewegungen sei

$$\begin{aligned} B_t^1 &= W_t^1 \\ B_t^2 &= \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} U_t \end{aligned}$$

mit

$$U_t = \frac{-\rho W_t^1 + W_t^2}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Setzt man die Definition von  $U_t$  ein, so erkennt man, dass eine Brownsche Bewegung vorliegt, da  $B_t^2 = W_t^2$  ist. Ebenso bleibt die Korrelation bestehen.

$$dB_t^1 dB_t^2 = \rho dt$$

Nun ist noch zu klären, welche Eigenschaften  $U_t$  hat und warum es definiert wurde.

$U_t$  ist stochastisch unabhängig von  $W_t^1$ .

Betrachte die Korrelation.

$$\begin{aligned} dW_t^1 dU_t &= dW_t^1 \cdot d\left(\frac{-\rho W_t^1 + W_t^2}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \\ &= (-\rho dW_t^1 dW_t^1 + dW_t^1 dW_t^2) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} = (-\rho dt + \rho dt) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} = 0 \end{aligned}$$

Somit sind die Prozesse unkorreliert. Wenn nun  $U_t$  normalverteilt ist, folgt die Unabhängigkeit. Bestimme die Verteilung von  $U_t$ .

Da  $W_t^1$  und  $W_t^2$  korreliert sind, muss auf die Konstruktion aus Kapitel 2 zurückgegriffen werden. Setze  $\bar{W}_t^1$   $\bar{W}_t^2$  als die beiden unabhängigen Ausgangs-Brownsche-Bewegungen.

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{-\rho W_t^1 + W_t^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\ &= \frac{\frac{-\rho}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}} (\sigma_{12} \bar{W}_t^2 + \sigma_1 \bar{W}_t^1) + \frac{1}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} (\sigma_{21} \bar{W}_t^1 + \sigma_2 \bar{W}_t^2)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\ &= \bar{W}_t^1 \frac{\frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho \sigma_1}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \bar{W}_t^2 \frac{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho \sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \end{aligned}$$

Als Summe aus unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen, ist  $U_t$  normalverteilt mit Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[U_t] &= E \left[ \bar{W}_t^1 \frac{\frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \bar{W}_t^2 \frac{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \\ &= E[\bar{W}_t^1] \frac{\frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} + E[\bar{W}_t^2] \frac{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und Varianz

$$\begin{aligned} Var[U_t] &= Var \left[ \bar{W}_t^1 \frac{\frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] + Var \left[ \bar{W}_t^2 \frac{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \\ &= Var[\bar{W}_t^1] \left( \frac{\frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)^2 + Var[\bar{W}_t^2] \left( \frac{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)^2 \\ &= t \frac{\left( \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_1}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}} - \frac{\rho\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2}} \right)^2}{1 - \rho^2} \\ &= t \left( \frac{1 + \rho^2 - 2\rho^2}{1 - \rho^2} \right) \\ &= t. \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\rho = \frac{(\sigma_{12}\sigma_2 + \sigma_{21}\sigma_1)}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_1^2} \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_2^2}}.$$

Die Unabhängigkeit ist also bewiesen und es gilt:

$$U_t \sim \mathcal{N}(0, t) \quad U_v - U_t \sim \mathcal{N}(0, v - t)$$

Definiere  $d(x_1 S_v^1, B_v^1 - B_t^1, v, t)$ ,

$$d(x_2, x_1 S_v^1, B_v^1 - B_t^1, v, t) = \frac{\ln\left(\frac{a^2(x_1 S_v^1, v)}{x_2}\right) - \left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(v - t)}{\sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} - \frac{(B_v^1 - B_t^1)\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}},$$

denn dies vereinfacht

$$\begin{aligned} & x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v) \\ \Leftrightarrow & x_2 e^{\left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(v - t) + \sigma_2(B_v^2 - B_t^2)} \leq a^2(x_1 S_v^1, v) \\ \Leftrightarrow & B_v^2 - B_t^2 \leq \frac{\ln\left(\frac{a^2(x_1 S_v^1, v)}{x_2}\right) - \left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(v - t)}{\sigma_2} \\ \Leftrightarrow & -\rho(B_v^1 - B_t^1) + \sqrt{1 - \rho^2}(U_v - U_t) \leq \frac{\ln\left(\frac{a^2(x_1 S_v^1, v)}{x_2}\right) - \left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(v - t)}{\sigma_2} \\ \Leftrightarrow & (U_v - U_t) \leq \frac{\ln\left(\frac{a^2(x_1 S_v^1, v)}{x_2}\right) - \left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(v - t)}{\sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{\rho(B_v^1 - B_t^1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \end{aligned}$$

zu

$$U_v - U_t \leq d(x_2, x_1 S_v^1, B_v^1 - B_t^1, v, t).$$

Damit sind die linke und die rechte Seite der Ungleichung stochastisch unabhängig.  
Die Linearität des bedingten Erwartungswerts vereinfacht die Ausgangsgleichung des EEPs.

$$\begin{aligned} & \int_t^T e^{-r(v-t)} E \left[ (rK - (q_1 x_1 S_v^1 + q_2 x_2 S_v^2)) \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))} \right] dv \\ &= \int_t^T e^{-r(v-t)} (E [rK \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))}] - E [q_1 x_1 S_v^1 \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))}] - E [q_2 x_2 S_v^2 \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))}]) dv \end{aligned}$$

Nun kann die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten benutzt werden.

$$\begin{aligned} Q [B_v^1 - B_t^1 \leq a] &= \int_{-\infty}^a n(w) dw \quad a \in \mathbb{R} \\ Q [U_v - U_t \leq d(x_2, x_1 S_v^1, B_v^1 - B_t^1, v, t) \mid B_v^1 - B_t^1 = w] &= \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S_v^1, w, v, t)} n(u) du \quad w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eingesetzt in den ersten Erwartungswert folgt:

$$E [rK \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))}] = rK \cdot \int_{-\infty}^{\infty} n(w) \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S_v^1, w, v, t)} n(u) du dw$$

Die beiden anderen Erwartungswerte müssen noch einem Maßwechsel unterzogen werden.

$$\begin{aligned}
& E \left[ q_1 x_1 S_v^1 \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))} \right] \\
&= q_1 x_1 e^{(r-q_1)(v-t)} E \left[ e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}(v-t) + \sigma_1(B_v^1 - B_t^1)} \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))} \right] \\
&= q_1 x_1 e^{(r-q_1)(v-t)} \hat{Q} \left[ x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v) \right] \\
&= q_1 x_1 e^{(r-q_1)(v-t)} \hat{Q} \left[ (B_v^2 - B_t^2) \leq \frac{\ln \left( \frac{a^2(x_1 S_v^1, v)}{x_2} \right) - \left( r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) (v-t)}{\sigma_2} \right] \\
&= q_1 x_1 e^{(r-q_1)(v-t)} \hat{Q} \left[ (U_v - U_t) + \sigma_1(v-t) \leq d(x_2, x_1 S_v^1, B_v^1 - B_t^1, v, t) + \sigma_1(v-t) \right] \\
&= q_1 x_1 e^{(r-q_1)(v-t)} \int_{-\infty}^{\infty} n(w) \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S_v^1, w, v, t) + \sigma_1(v-t)} n(u) du dw
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: Unter  $\hat{Q}$  ist  $U_v - U_t + \sigma_1(v-t) \sim \mathcal{N}(0, v-t)$  verteilt.

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{E} [g(U_v - U_t + \sigma_1(v-t))] &= E \left[ g(U_v - U_t + \sigma_1(v-t)) e^{\frac{\sigma_1^2}{2}(v-t) - \sigma_1(B_v^1 - B_t^1)} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)}{\sqrt{2\pi}(v-t)} e^{-\frac{(x-\sigma_1(v-t))^2}{2(v-t)}} e^{\frac{\sigma_1^2}{2}(v-t) - \sigma_1 x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)}{\sqrt{2\pi}(v-t)} e^{-\frac{x^2}{2(v-t)}} dx
\end{aligned}$$

Dies ist auch gültig, wenn zum Maßwechsel über die geometrische Brownsche Bewegung  $S_v^2$  benutzt wird. Unter diesem Maß ist  $U_v - U_t + \sigma_2(v-t) \sim \mathcal{N}(0, v-t)$  verteilt.

Es fehlt noch ein auszuwertender Erwartungswert.

$$\begin{aligned}
& E \left[ q_2 x_2 S_v^2 \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))} \right] \\
&= q_2 x_2 e^{(r-q_2)(v-t)} E \left[ e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}(v-t) + \sigma_2(B_v^2 - B_t^2)} \mathbb{1}_{(x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v))} \right] \\
&= q_2 x_2 e^{(r-q_2)(v-t)} \bar{Q} \left[ x_2 S_v^2 \leq a^2(x_1 S_v^1, v) \right] \\
&= q_2 x_2 e^{(r-q_2)(v-t)} \bar{Q} \left[ (U_v - U_t) + \sigma_2(v-t) \leq d(x_2, x_1 S_v^1, B_v^2 - B_t^2, v, t) + \sigma_2(v-t) \right] \\
&= q_2 x_2 e^{(r-q_2)(v-t)} \int_{-\infty}^{\infty} n(w) \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S_v^1, w, v, t) + \sigma_2(v-t)} n(u) du dw
\end{aligned}$$

Diese drei Ergebnisse zusammengefasst, ergeben eine Integraldarstellung des amerikanischen Basketputs.

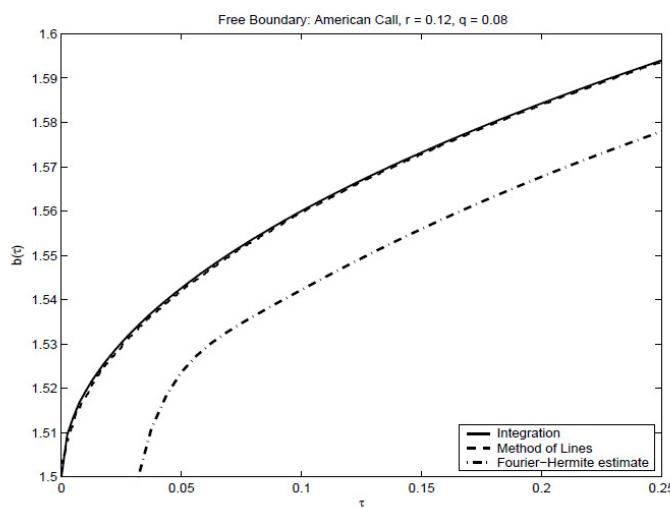
$$\begin{aligned}
 P_{\Sigma}(x_1, x_2, t) = & P_E(x_1, x_2, t) \\
 & + \int_t^T e^{-r(v-t)} r K \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S^1, w, v, t)} n(w) n(u) \, du \, dw \\
 & - q_1 x_1^1 e^{-q_1(v-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S^1, w, v, t) + \sigma_1(v-t)} n(w) n(u) \, du \, dw \\
 & - q_2 x_2^2 e^{-q_2(v-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{d(x_2, x_1 S^1, w, v, t) + \sigma_2(v-t)} n(w) n(u) \, du \, dw \, dv
 \end{aligned}$$

# Kapitel 7

## Fazit

In dieser Diplomarbeit wurde gezeigt, dass der Preis einer amerikanischen Option als Integralterm darstellbar ist. Das Integral hängt von einer Grenzfunktion ab, die den optimalen Wert der Finanzguts angibt, bei dem ausgeübt werden sollte. Wird der optimale Zeitpunkt nicht genutzt, so folgt aus der Supermartingaleigenschaft ein Abwärtstrend des diskontierten Wertprozesses. Im nächsten Kapitel wurden Eigenschaften der Grenzfunktion gezeigt, die eine erste Skizze der Grenzfunktion ermöglichen und hilfreich bei der Berechnung der Integraldarstellungen sind.

Alle erlangten Integraldarstellungen erlauben eine Aufspaltung des amerikanischen Optionspreises in europäischen Optionspreis plus ein Premium, das aus der vorzeigen Ausübung resultiert. Eine ökonomische Interpretation zeigt, wie der Wertzuwachs zwischen amerikanischer und europäischer Option zustande kommt. Zur Auswertung der Integraldarstellung der Grenzfunktion eignet sich die Darstellung von Kim am besten. In Paper [7] wird diese Grenzfunktion an Hand von mehreren numerischen Verfahren für die Werte  $K = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 12\%$ ,  $q = 8\%$  und  $T - t = 0,25$  bestimmt.

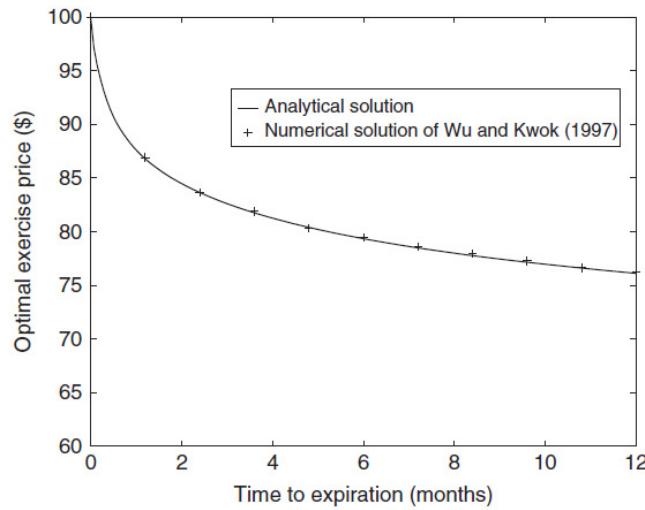


Im Falle der Putoption konnte eine explizite Formel für den Preis bei unendlicher Laufzeit angegeben werden, allerdings werden diese Art von Optionen nicht gehandelt, [1]. Die Integraldarstellung des Basketputs ist nicht viel komplexer als die einer einfachen Putoption, allerdings hängt die Grenzfunktion von 2 Dimensionen ab und ist somit schwieriger numerisch auszuwerten.

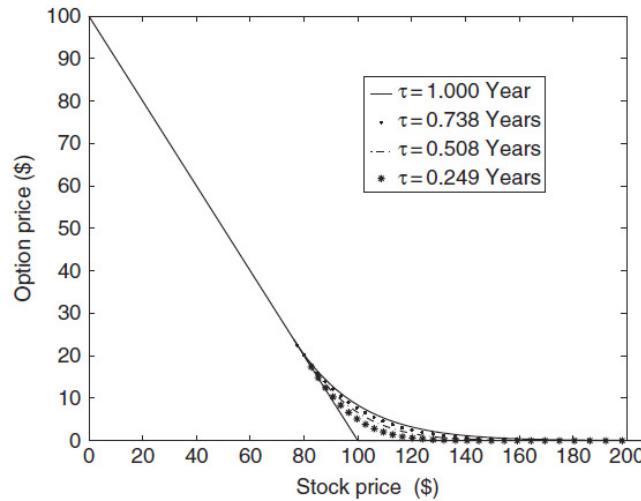
Inzwischen ist eine explizite Darstellung des Preisprozesses und der Grenzfunktion einer amerikanischen Putoption angegeben worden. Song-Ping Zhu veröffentlichte dies 2006 in seinem Paper *An exact and explicit solution for the valuation of American put options*, [22]. Dank der analytischen Lösungen können die gesuchten Funktionen geplottet werden. Ein Beispiel aus dem Zhu-Paper soll hier vorgestellt werden.

Die Parameter sind  $r = 0,1$ ,  $q = 0$ ,  $K = 100$ ,  $\sigma = 0,3$  und  $T = 1$  Jahr.

Bei diesen Parametern hat die Grenzfunktion folgende Gestalt:



Außerdem kann der Preis der Option, abhängig von dem Aktienpreis bei vier verschiedenen Restlaufzeiten, geplottet werden.



Es stellt sich die Frage, ob das Modell noch mehr der Realität angepasst werden kann.

Im Kapitel über die Finanzwelt wurde angedeutet, dass einige Voraussetzungen erweiterbar sind. Eine Möglichkeit, das Modell zu verändern, wäre den Kapitalmarktzins nicht mehr als deterministisch anzunehmen, sondern ebenfalls einem stochastischen Prozess unterliegen zu lassen.

Das mathematische Modell erlaubt auch einige Erweiterungen. Zum Beispiel ist eine Kritik an dem Black-Scholes-Modell die konstante Volatilität des Aktienpreisprozesses.

Eine Integraldarstellung unter den gegebenen Annahmen zu erreichen, war nicht einfach.

Deswegen muss im Einzelfall betrachtet werden, inwiefern Erweiterungen nützlich sind und wie stark sie auf die Komplexität des Modells einwirken.

Das Thema liefert also noch genügend Raum für weitere mathematische Bearbeitung.

## Kapitel 8

# Literaturverzeichnis

- [1] Shreve - Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models  
Springer Verlag, Finance
- [2] S.D. Jacka - Optimal Stopping And The American Put  
Department of Statistics, University of Warwick
- [3] Grafik unterliegt der GNU Free Documentation License  
<http://en.wikipedia.org> → GNU Free Documentation License
- [4] Broadie and Detemple - The Valuation Of American Options On Multiple Assets  
Mathematical Finance, Vol.7, No.3 (July 1997), 241-286
- [5] Guy Barles - Critical Stock Price Near Expiration  
Mathematical Finance, Vol.5, No.2 (April 1995), 77-95
- [6] Harrison, Pliska - A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets  
Stochastic Processes and Applications 15, 1983
- [7] Chiarella, Ziogas, Kuchera - A Survey of the Integral Representation of American Option Prices  
School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney
- [8] Bernd Aulbach - Gewöhnliche Differentialgleichungen  
Spektrum Akademischer Verlag
- [9] Lamberton, Lapeyre - Hedging Index Options With Few Assets  
Mathematical Finance, Vol. 3, No. 1 (January 1993)
- [10] Harro Heuser - Analysis 2  
Teubner-Verlag
- [11] Krylov - Controlled Diffusion Processes  
Springer-Verlag
- [12] Chen, Chadam, Jiang, Zheng - Convexity of the Exercise Boundary of the American Put Option on a Zero Dividend Asset  
Mathematical Finance, Vol. 18, No. 1(January 2008), 185-197
- [13] Otto Forster - Analysis 2  
Vieweg-Verlag

- [14] Carr, Jarrow and Myneni - Alternative Charaterizations of American Put Options
- [15] McKean - A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics  
Industrial Management Review 6 (1965), 32–40
- [16] Karatzas and Shreve - Brownian Motion and Stochastic Calculus  
Springer-Verlag
- [17] Dettman, J.W. - Applied Complex Variables  
Dover, New York
- [18] Heinz Bauer - Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie  
De-Gruyter Verlag
- [19] Abramowitz - Handbook of mathematical functions, 1965  
Dover Publishing
- [20] Mit freundlicher Genehmigung von Oleg Reichmann  
ETH Zürich
- [21] Volkert Paulsen - Bounds for the American perpetual put on a stock index  
J. Applied Probability Volume 38, Number 1 (2001), 55-66
- [22] Song-Ping Zhu - An exact and explicit solution for the valuation of American put options  
School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong, Australia

**Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig erarbeitet und verfasst habe und nur die angegebenen Quellen verwendet wurden.

Münster, 25. April 2009

Tobias Nigbur