



Institut für mathematische Statistik

Modellierung von stochastischen Abhängigkeiten mittels Copulas

Diplomarbeit

betreut von
PD Dr. Volkert Paulsen

eingereicht von
Martin Niehof

Münster, 31.03.2009

Inhaltsverzeichnis

I. Abbildungsverzeichnis	i
II. Abkürzungsverzeichnis	ii
III. Tabellenverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen der Copulas	4
2.1 Mathematische Einführung	4
2.2 Sklar's Theorem	11
2.3 Fréchet-Hoeffding-Schranke	19
2.4 Ko- und Kontramonotonie	24
2.5 Copulas und Zufallsvariablen	25
2.6 Überlebenscopula	27
2.7 Konkordanzordnung	29
2.8 Dichte der Copulas	30
3 Abhängigkeitskonzepte	33
3.1 Korrelation	33
3.2 Konkordanz	37
3.3 Kendall's τ	40
3.4 Spearman's ρ	42
3.5 Konkordanzmaße	44
3.6 Tail Dependence	47
4 Elliptische Copulas	50
4.1 Definition	50
4.2 Wichtige Eigenschaften	51
4.3 Kendall's τ für elliptische Verteilungen	54

5	Archimedische Copulas	55
5.1	Definition	55
5.2	Wichtige Eigenschaften	57
5.3	Kendall's τ für archimedische Copulas	58
5.4	Tail Dependence für archimedische Copulas	60
5.5	Multivariate archimedische Copulas	61
6	Simulation von mehrdimensionalen Verteilungen	64
6.1	Simulation bei gegebenen Randverteilungen und Korrelationsmatrix	64
6.2	Bedingte Inversionsmethode für Copulas	68
6.3	Simulation von archimedischen Copulas	69
6.4	Simulationsmethode von Marshall und Olkin	71
6.5	Simulation für elliptische Copulas	73
6.6	Illustration	74
7	Statistische Konzepte	76
7.1	Parametrische Schätzung	76
7.1.1	Exakte Maximum-Likelihood-Schätzung	77
7.1.2	Methode der Inferenzfunktionen für die Randverteilungen	79
7.1.3	Fazit	80
7.2	Semiparametrische Schätzung	81
7.2.1	Kanonische Maximum-Likelihood-Schätzung	81
7.2.2	Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße	82
7.2.2.1	Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße für archimedische Copula	83
7.2.2.2	Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße für elliptische Copulas	83
7.2.3	Fazit	83
7.3	Nichtparametrische Schätzung	84
7.3.1	Die empirische Copula von Deheuvels	84
7.3.2	Nichtparametrische Kernschätzung	86
7.3.2.1	Grundlagen eines Kernschätzers	86
7.3.2.2	Nichtparametrische Kernschätzung der Copula-Dichte nach Gijbels und Mielniczuk	88
7.3.3	Nichtparametrische Kernschätzung der Copula nach Fermanian und Scaillet	90
8	Anwendungen	92
8.1	Modell mit latenten Variablen	92
8.2	Copulas in Modell mit latenten Variablen	93

INHALTSVERZEICHNIS

8.3 Vergleich zweier Modelle	94
9 Zusammenfassung	96
IV. Literaturverzeichnis	97

Abbildungsverzeichnis

2.1	Graphen der Fréchet-Hoeffding-Schranken $M^2(u, v)$ und $W^2(u, v)$, Quelle: [31, Seite 10]	20
2.2	Graph der Produktcopula $\Pi^2(u, v)$, Quelle: [31, Seite 10]	26
3.1	r_{min} und r_{max} in Abhängigkeit von σ . Quelle: [11, Seite 25]	37
5.1	1000 Realisierungen der Clayton-Copula und der Gumbel-Copula, jeweils mit Kendall's $\tau = 0,5$	61
6.1	2000 Realisierungen der Gauß-Copula und der t -Copula-Copula mit 2 Freiheitsgraden, jeweils mit Korrelation $r = 0,891$	74
6.2	2000 Realisierungen der Clayton-Copula mit Parameter $14/3$ und der Gumbel-Copula mit Parameter $10/3$	75
7.1	Univariate Kerndichteschätzung innerhalb eines Intervalls. Quelle: [34, Seite 106]	89
7.2	Grafische Illustration der bivariaten Spiegelbild-Modifikation. Quelle: [34, Seite 107]	89

Abkürzungsverzeichnis

\mathbb{R}	offenes Intervall der reellen Zahlen $(-\infty, \infty)$
\mathbb{R}^+	halboffenes Intervall $[0, \infty)$
\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen
\mathbb{N}^*	die natürlichen Zahlen ohne 0
$\overline{\mathbb{R}}$	abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlen $[-\infty, \infty]$
$[a, b] \times [c, d]$	kartesisches Produkt der Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$
\widehat{C}	Überlebenscopula
$Dom H$	Definitionsbereich der Funktion H
$Ran H$	Wertebereich der Funktion H
I	das Einheitsintervall $[0, 1]$
$E(X)$	Erwartungswert von X
$Var(X)$	Varianz von X
\sim	gleichverteilt
\mathbb{I}_A	Indikatorfunktion der Menge A
M^n	n -dimensionale obere Fréchet-Hoeffding-Schranke
W^n	n -dimensionale untere Fréchet-Hoeffding-Schranke
φ	Generator einer archimedischen Copula
$\varphi^{[-1]}$	Pseudo-Inverse eines archimedischen Generators
(x_1, \dots, x_n)	n -dimensionaler Zeilenvektor
(x_1, \dots, x_n^T)	n -dimensionaler Spaltenvektor
ML	Maximum-Likelihood
CML-Schätzung	kanonische Maximum-Likelihood-Schätzung
IFM-Schätzung	Schätzung mittels Inferenzfunktionen der Randverteilungen
MLE	Maximum-Likelihood-Schätzung
\hat{F}^{np}	Nichtparametrischer Schätzer

Tabellenverzeichnis

8.1	Ergebnis der Simulation	94
-----	-----------------------------------	----

Kapitel 1

Einleitung

Heutzutage besteht bei Banken und Versicherungen die Notwendigkeit mehrdimensionale Zusammenhänge adäquat zu modellieren, beispielsweise die Renditeverteilung eines Portfolios von Finanztiteln oder die Ausfallwahrscheinlichkeit von Krediten.

In der Praxis sind in der Vergangenheit oft multivariate Normalverteilungen verwendet worden. Diese haben das Defizit, dass sie das Auftreten von gemeinsamen Extremereignissen kaum berücksichtigen. Die Vergangenheit hat jedoch gezeigt, dass Börsencrashes, also gemeinsame starke Einbrüche der Rendite der Finanztitel, in der Realität viel häufiger vorkommen als im Modell mit multivariaten Normalverteilungen.

Daher ist es notwendig andere multivariate Verteilungen zu finden, welche zu zuverlässigeren Modellansätzen führen. Bei der Konstruktion multivariater Verteilungen hat es lange Zeit starke Einschränkungen an die multivariaten Verteilungen gegeben. Oft sind diese multivariaten Verteilungen als Erweiterung von univariaten Verteilungen gebildet worden, so dass nur gleiche Randverteilungen möglich gewesen sind, oder es hat starke Restriktionen an die Abhängigkeit der einzelnen Zufallsgrößen gegeben.

Abhilfe schaffen hier Copulas. Mithilfe von Copulas lassen sich multivariate Verteilungsfunktion in zwei Teile zu zerlegen. Es werden dabei die univariaten Randverteilungen von der Copulafunktion getrennt, welche die Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen beschreibt. Sklar erarbeitete 1959 das Theorem zur Existenz und Eindeutigkeit dieser Copulas. Mit dem Copula-Ansatz lassen sich multivariate Verteilungen flexibel konstruieren, indem man die Copulafunktion, also die Abhängigkeitsstruktur, getrennt von den Randverteilungen modelliert. Die einzelnen Randverteilungen wie auch die Copula sind frei wählbar, wodurch die Modellierung erheblich flexibler wird.

Der Name "Copula" leitet sich ab von dem englischen Wort "to couple - verbinden". Er wurde gewählt um zu betonen, dass eine Copula ihre Randverteilungen verbindet.

In der Statistik ist der Ansatz, die Randverteilungen von der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu trennen, seit den 40er Jahren des letzten Jahrhundert bekannt, daher sind die meisten wahrscheinlichkeitstheoretischen und mathematischen Grundlagen der Copulas hinreichend erforscht. Dennoch werden Copulas erst seit kurzem in der Finanzmarkt- und Versicherungs-

theorie beachtet.

Das Interesse an Copulas ist den vergangenen zehn Jahren enorm gestiegen, wie man an der stark ansteigenden Anzahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema erkennen kann. Mittlerweile haben Copulas im Risikomanagement, wie z. B. bei der Kreditrisikoanalyse, und beim Pricing von Finanztiteln Einzug erhalten. Dennoch stellt die Copula-Theorie ein junges Forschungsgebiet dar, wie man an der geringen Anzahl an Standardwerken erkennt, die sich auf Copulas fokussieren, wie [31], [33] und [4].

Ungeachtet der enormen Fortschritte in der Copula-Theorie existieren noch viele Probleme, wie die geringe Anzahl an multivariaten Copula-Modellen im Vergleich zum bivariaten Fall. Dazu kommt es, weil die Erweiterungen bivariater Copulas auf den multidimensionalen Fall nicht immer möglich ist.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Im zweiten Kapitel wird die Definition der Copulas erarbeitet und mithilfe Sklar's Theorem die Existenz und Eindeutigkeit der Copulas bewiesen. Danach werden die Fréchet-Hoeffding-Schranken angeführt, welche die maximalen, bzw. minimalen Grenzen der Abhängigkeit der Zufallsvariablen angeben. In diesem Zusammenhang geht es auch um andere wichtige Eigenschaften wie zum Beispiel die Invarianz der Copulas unter streng monoton steigenden Umformungen der Zufallsvariablen. Am Ende dieses Kapitels wird die Dichte der Copula erarbeitet, welche bei den bedingten Verteilungen von Bedeutung ist.

Im dritten Kapitel werden alternative Abhängigkeitsmaße vorgestellt. Als Erstes wird dort die bekannte Korrelation nach Pearson vorgestellt, wobei hierbei auch ihre Nachteile aufgezeigt werden. Danach werden zwei Rangkorrelationsmaße vorgestellt, welche die monotone Abhängigkeit der Zufallsvariablen messen: Kendall's τ und Spearman's ρ . Diese haben gegenüber der Korrelation einige Vorteile und lassen sich als Funktionale der Copula darstellen. Als Letztes wird in diesem Kapitel die Tail Dependence eingeführt. Mit ihr misst man die asymptotische Abhängigkeit von Zufallsvariablen. Dieses Maß ist bedeutend bei der Modellierung gemeinsamer Extremereignisse und findet daher oft in der Praxis, zum Beispiel bei Versicherungen, Verwendung.

Im vierten Kapitel werden elliptische Copulas vorgestellt. Diese sind abgeleitet von Sklar's Theorem. Die Klasse der elliptischen Copulas hat sehr bekannte Vertreter wie die Gauß-Copula oder die t-Copula, welche in dieser Arbeit vorgestellt werden. Anhand dieser Beispielcopulas werden dann die Abhängigkeitsmaße aus dem vorherigen Kapitel berechnet.

Um archimedische Copulas geht es im fünften Kapitel. Diese werden im Gegensatz zu den elliptischen Copulas nicht von Sklar's Theorem abgeleitet, sondern werden mithilfe einer univariaten Generatorfunktion gebildet. Das führt dazu, dass sich diese Copulas stets als geschlossener Ausdruck darstellen lassen. Es werden als bekannte Vertreter dieser Klasse die Gumbel-Copula und die Clayton-Copula angeführt. Auch für diese Copulas werden wie im vorherigen Kapitel ihre wichtigen Eigenschaften dargestellt, und einige Abhängigkeitsmaße berechnet, die sich in Abhängigkeit der univariaten Generatorfunktion darstellen lassen.

Im sechsten Kapitel geht es darum, Simulationen aus gegebenen Zufallsvektoren zu generieren. Dabei wird zunächst ein allgemein gültiger Simulationsalgorithmus für Copulas erarbeitet. Danach werden für die elliptischen und die archimedischen Copulas effizientere Simulationsalgorithmen entwickelt.

Das siebte Kapitel beschäftigt sich mit statistischen Konzepten. Dabei geht es um das Schätzen der Randverteilungen und der Copulafunktion bei gegebenem Datensatz. Diese werden sowohl parametrisch auf Basis der Maximum-Likelihood-Methode als auch nichtparametrisch mithilfe von Kernschätzern geschätzt werden.

Im achten Kapitel wird die zuvor erarbeitete Copulatheorie auf Ausfallrisiken bei Krediten angewandt. Dabei wird mittels einer Simulation untersucht, ob die Wahl der Copula bei gegebener Korrelation Einfluss auf die Verteilung der Anzahl der ausgefallenen Schuldner hat.

Im neunten Kapitel werden die wichtigsten Aussagen abschließend zusammengefasst.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen der Copulas

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Copulatheorie erarbeitet. Dabei werden Copulas zunächst definiert und dann wird mithilfe von Sklar's Theorem die Existenz und Eindeutigkeit gezeigt. Auf diesem Theorem fußen dann die übrigen Eigenschaften wie die Fréchet-Hoeffding-Schranken, innerhalb derer sich die Werte einer Copula bewegen können. Falls die Copula diese Grenzen annimmt, können Rückschlüsse auf die Abhängigkeiten der Zufallsvariablen der Copula gezogen werden, wie im Abschnitt Ko- und Kontramonotonie gezeigt wird. Am Ende dieses Kapitels werden die Überlebenscopula und die Dichte der Copula eingeführt.

2.1 Mathematische Einführung

Diesem Abschnitt behandelt die mathematischen Grundlagen zur Einführung der Copulas. Copulas haben im Wesentlichen drei Eigenschaften. Eine Copula ist **n-steigend**, **geerdet** und sie hat **gleichverteilte Randverteilungen**. Diese Eigenschaften werden nun der Reihe nach vorgestellt, um damit die genaue Definition einer Copula angeben zu können. Grundlage dieses Abschnitts ist die Arbeit von Nelson[31], wobei in seinem Werk die hier angeführten Lemmata und Sätze nur für den zweidimensionalen Fall bewiesen worden sind.

Um n -steigend definieren zu können, bedarf es zwei weiterer Definitionen.

Definition 2.1.1. (n -Box) Sei $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ und seien S_1, \dots, S_n nicht leere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$. H sei eine reelle Funktion mit n Variablen und Definitionsbereich $S_1 \times \dots \times S_n$. (Der Definitionsbereich einer Funktion H wird im Folgenden mit $DomH$ gekennzeichnet.) Es gelte $a \leq b$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$ falls $a_k \leq b_k$ für alle $k = \{1, \dots, n\}$. Für $a \leq b$ sei eine n -Box definiert als das kartesische Produkt über n abgeschlossene Intervalle, deren 2^n Eckpunkte in $DomH$ liegen:

$$B := [a, b] = ([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$$

Zur Veranschaulichung des H -Volumens wird dieses mithilfe der n -Box nun auf zwei Arten definiert.

Definition 2.1.2. (*H*-Volumen)

1. Das *H*-Volumen von B ist definiert als

$$V_H(B) = \sum \text{sign}(c)H(c),$$

wobei die Summe über alle Ecken $c = (c_1, \dots, c_n)$ läuft mit $c_i \in \{a_1, b_1\} \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Die Funktion $\text{sign}(c)$ ist definiert als

$$\text{sign}(c) = \begin{cases} 1 & \text{falls } c_k = a_k \text{ für eine gerade Anzahl von } k's. \\ -1 & \text{falls } c_k = a_k \text{ für eine ungerade Anzahl von } k's. \end{cases}$$

2. Äquivalent dazu ist die Darstellung des *H*-Volumens der n -Box B als Differenz n -ter Ordnung von H auf B

$$V_H(B) = \Delta_a^b H(t) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(t),$$

wobei die Differenz der ersten Ordnung definiert ist als

$$\begin{aligned} \Delta_{a_k}^{b_k} H(t_1, \dots, t_{k-1}, \cdot, t_{k+1}, \dots, t_n) &:= H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &\quad - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Beweis. Für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} V_H(B) &= \Delta_{a_1}^{b_1} \Delta_{a_2}^{b_2} H(t_1, t_2) = H(b_1, b_2) - H(b_1, a_2) - H(a_1, b_2) + H(a_1, a_2) \\ &= \sum \text{sign}(c)H(c), \end{aligned}$$

wobei die Summe die Eckpunkte $\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$ durchläuft. Im Allgemeinen kann man die Äquivalenz dieser Aussagen mit einer vollständigen Induktion beweisen. \square

Damit sind wir nun in der Lage die erste wichtige Eigenschaft für die Copula zu formulieren.

Definition 2.1.3. (*n*-steigend) Eine reelle Funktion H mit n Variablen heißt *n*-steigend, falls $V_H(B) \geq 0$ für alle n -Boxen B , dessen Ecken in $\text{Dom}H$ liegen.

Falls H eine *n*-steigende Funktion ist, folgt daraus nicht, dass H monoton steigend in jeder Variablen ist. Ebenso wenig gilt der Umkehrschluss, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 2.1.4. Sei H eine Funktion auf dem Einheitsquadrat $I^2 := [0, 1] \times [0, 1]$ definiert durch $H(x, y) = \max\{x, y\}$, so ist H monoton steigend in jeder Variable, da für $x_1 \leq x_2$ gilt $\max\{x_1, y\} \leq \max\{x_2, y\}$ für alle $y \in [0, 1]$, bzw. weil für $y_1 \leq y_2$ gilt

$\max\{x, y_1\} \leq \max\{x, y_2\}$ für alle $x \in [0, 1]$. Jedoch ist H nicht 2-steigend, da

$$V_H(I^2) = H(1, 1) - H(0, 1) - H(1, 0) + H(0, 0) = -1.$$

Beispiel 2.1.5. Sei H eine Funktion definiert auf I^2 durch $(2x - 1)(2y - 1)$. Dann ist H 2-steigend, denn sei $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, dann gilt

$$\begin{aligned} V_H(B) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= 4x_2y_2 - 2x_2 - 2y_2 + 1 - 4x_2y_1 + 2x_2 + 2y_1 - 1 \\ &\quad - 4x_1y_2 + 2x_1 + 2y_2 - 1 + 4x_1y_1 - 2x_1 - 2y_1 + 1 \\ &= 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Jedoch ist H nicht monoton steigend in jeder Variablen, denn für $x < \frac{1}{2}$ ist H monoton fallend für $y \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Die zweite wichtige Eigenschaft für die Copulas ist:

Definition 2.1.6. (geerdet) Sei a_k das jeweils kleinste Element der nicht leeren Teilmenge $S_k \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$. Man nennt eine Funktion $H : S_1 \times \dots \times S_n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ geerdet, falls $H(x_1, \dots, x_n) = 0$ gilt, wenn für mindestens ein x_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $x_i = a_i$.

Die folgenden beiden Lemmata beziehen sich auf die beiden eingeführten wichtigen Eigenschaften der Copulas und zeigen ihre Bedeutung.

Lemma 2.1.7. Seien S_1, \dots, S_n nichtleere Teilmengen des $\overline{\mathbb{R}}$, und sein H eine n -steigende Funktion mit $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} t \mapsto & H(x_1, \dots, x_{l-1}, s, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & - H(x_1, \dots, x_{l-1}, r, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

monoton steigend mit $k \neq l$ und $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Hierbei ist $x_i \in S_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $r, s \in S_l$ mit $r \leq s$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für $t_1 < t_2$ gilt

$$\begin{aligned} & H(x_1, \dots, x_{l-1}, s, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t_2, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & - H(x_1, \dots, x_{l-1}, r, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t_2, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & - H(x_1, \dots, x_{l-1}, s, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t_1, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ & + H(x_1, \dots, x_{l-1}, r, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t_1, x_{k+1}, \dots, x_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber gerade $\Delta_r^s \Delta_{t_1}^{t_2} H(x_1, \dots, x_{l-1}, \cdot, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, \cdot, x_{k+1}, \dots, x_n)$ und damit größer oder gleich 0, da H eine n -steigende Funktion ist. \square

Lemma 2.1.8. Seien S_1, \dots, S_n nichtleere abgeschlossene Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$, wobei jedes S_i sein kleinstes Element a_i enthält. H sei eine geordnete n -steigende Funktion mit Definitionsbereich $S_1 \times \dots \times S_n$. Dann ist H monoton steigend in jeder Variablen.

Beweis. Es ist für $(x_1, \dots, x_{k-1}, r, x_{k+1}, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \text{Dom}H$ und $r < s$ zu zeigen, dass folgende Ungleichung gilt:

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}, r, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq H(x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

Da a_k jeweils das kleinste Element von S_k ist, gilt

$$B = [(a_1, \dots, a_{k-1}, r, a_{k+1}, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n)].$$

Da H n -steigend ist gilt $V_H(B) \geq 0$ und da H geordnet ist, gilt

$$0 \leq V_H(B) = H(x_1, \dots, s, \dots, x_n) - H(x_1, \dots, r, \dots, x_n),$$

da alle anderen Summanden mindestens ein a_i enthalten und somit wegfallen. Hieraus folgt die zu zeigende Ungleichung (2.1) direkt. \square

Jetzt können wir die dritte wichtige Eigenschaft für die Copulas definieren. Zuvor wird die mehrdimensionale Verteilungsfunktion mit zuvor eingeführten Copulaeigenschaften definiert.

Definition 2.1.9. (n -dimensionale Verteilungsfunktion) Eine n -dimensionale Verteilungsfunktion H ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}^n$, für die gilt, dass H geordnet und n -monoton wachsend ist und $H(\infty, \dots, \infty) = 1$ gilt.

Definition 2.1.10. (Randverteilung) Sei b_k das jeweils größte Element der nicht leeren Teilmenge $S_k \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ und H sei eine Funktion auf $S_1 \times \dots \times S_n$. Man nennt H_k die eindimensionale *Randverteilungen* für $k \in \{1, \dots, n\}$, falls gilt: $\text{Dom}H_k = S_k$ und $H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n), \forall x \in S_k$. Mehrdimensionale *Randverteilungen* erhält man, indem man weniger Variablen fixiert.

Ein wichtiger und häufig verwendeter Satz zur Konstruktion gleichverteilter Zufallsvariablen ist der Folgende:

Satz 2.1.11. Wahrscheinlichkeitsintegral-Transformation[1, Theorem1+2] Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , und sei $U(0, 1)$ eine auf dem Einheitsintervall rechteckverteilte Zufallsvariable, dann lautet die Wahrscheinlichkeitsintegral-Transformation:

1. Falls X die stetige Verteilungsfunktion F hat, so hat die Zufallsvariable $Y = F(X)$ die Verteilungsfunktion $U(0, 1)$.

2. Sei F eine Verteilungsfunktion. Weiter sei $F^{-1} : [0, 1] \mapsto (-\infty, \infty)$ definiert durch $F^{-1}(y) = \inf\{x | F(x) \geq y\}$ mit $0 < y < 1$, und U hat die Verteilungsfunktion $U(0, 1)$. Dann hat $X = F^{-1}(U)$ die Verteilungsfunktion F .

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 2.1.12. [1, Lemma 1] Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Dann gilt für alle x

$$P[F(X) \leq F(x)] = F(x).$$

Beweis. Das Ereignis $\{F(X) \leq F(x)\}$ lässt aufspalten in

$$\{F(X) \leq F(x)\} = [\{F(X) \leq F(x)\} \cap \{X \leq x\}] \cup [\{F(X) \leq F(x)\} \cap \{X > x\}]$$

Da $\{X \leq x\} \subset \{F(X) \leq F(x)\}$ gilt und $\{X < x\} \cap \{F(X) < F(x)\}$ nicht leer ist, folgt

$$\{F(X) \leq F(x)\} = \{X \leq x\} \cup [\{X > x\} \cap \{F(X) = F(x)\}].$$

Nimmt man nun die Wahrscheinlichkeiten, erhält man

$$P[F(X) \leq F(x)] = P[X \leq x] \cup P[X > x \cap F(X) = F(x)] = P[X \leq x].$$

Damit erhält man das gewünschte Resultat. □

Damit sind wir nun in der Lage den Satz 2.1.11 zu beweisen.

Beweis.

Ad 1: Sei $u \in (0, 1)$. Da F stetig ist, existiert ein reelles x mit $F(x) = u$. Mit dem Lemma 2.1.12 gilt $P[Y \leq u] = P[F(x) \leq F(x)] = u$. Daher ist Y standardgleichverteilt.

Ad 2: Für ein x mit $0 < F(x) < 1$ und $u \in I$ gilt $F(x) \geq u$ genau dann, falls $x \geq F^{-1}(u)$ gilt. Angenommen, es gilt $x \geq F^{-1}(u) = \inf\{x | F(x) \geq u\}$, dann gilt, da F als Verteilungsfunktion monoton steigend und rechtsstetig ist, dass $\{x | F(x) \geq u\}$ ein Intervall ist, das den linken Endpunkt beinhaltet. Daher muss für x gelten $F(x) \geq u$.

Umgekehrt, falls $F(x) \geq u$ gilt, so folgt $x \geq \inf\{x | F(x) \geq u\} = F^{-1}(u)$. Damit ergibt sich $P[F^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F(x)] = F(x)$ und der Satz ist gezeigt. □

Für Funktionen, welche die drei vorgestellten Copulaeigenschaften erfüllen, gelten bestimmte Aspekte, welche in den folgenden beiden Sätzen verdeutlicht werden.

Satz 2.1.13. Seien S_1, \dots, S_n nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$, welche jeweils ihr kleinstes Element a_k und größtes Element b_k beinhalten. Weiter sei H eine n -steigende und geordnete Funktion mit

eindimensionalen Randverteilungen H_1, \dots, H_n .

Dann gilt für $(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \text{Dom}H$

$$0 \leq H(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq H_k(x). \quad (2.2)$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition der Randverteilung und dem Lemma 2.1.8. \square

Es folgt aus diesem Satz, dass die Randverteilungen einer n -dimensionalen Verteilungsfunktion wieder Verteilungsfunktionen sind.

Satz 2.1.14. Seien S_1, \dots, S_n nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$, welche jeweils ihr kleinstes Element a_k und größtes Element b_k beinhalten. Weiter sei H eine geordnete n -steigende Funktion mit Definitionsbereich S_1, \dots, S_n und Randverteilungen H_1, \dots, H_n .

Für $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ gilt

$$|H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} |H(y_1, \dots, y_n) - H(x_1, \dots, x_n)| &\leq |H(y_1, \dots, y_n) - H(x_1, y_2, \dots, y_n)| + \\ &|H(x_1, y_2, \dots, y_n) - H(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n)| \\ &+ \dots + |H(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - H(x_1, \dots, x_n)|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wieder machen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: Sei $x_k \leq y_k$. Da H geordnet und n -steigend ist gilt mit Lemma 2.1.8:

$$0 \leq H(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Wendet man nun das Lemma 2.1.7 $n - 1$ mal an, so erhält man, da die Randverteilungen von H existieren,

$$\begin{aligned} 0 &\leq H(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\leq H_k(y_k) - H_k(x_k), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x_k \geq y_k$: Der Beweis läuft analog zum ersten Fall, nur dass sich hier alle Ungleichungen umkehren.

Daher kann den Betrag nehmen und erhält

$$\begin{aligned} 0 &\leq |H(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)| \\ &\leq |H_k(y_k) - H_k(x_k)|, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Dies führt man für alle $k = \{1, \dots, n\}$ durch und ersetzt in (2.3) die Terme. Damit erhält man die Behauptung. \square

Nun sind wir in der Lage eine Copula zu definieren. Diese kann man auf mehreren Wegen definieren. Drei davon werden hier vorgestellt.

Definition 2.1.15. (Copula)

1. Eine n -Copula ist eine Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ für die gilt:
 - (a) C ist geerdet.
 - (b) C ist n -steigend.
 - (c) Die Randverteilungen C_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$ sind rechteckverteilt auf I .
2. Eine zweite Möglichkeit ist die Definition über die Teilcopula.
Eine n -Teilcopula ist eine Funktion C' für die gilt:
 - (a) $\text{Dom}C' = S_1 \times \dots \times S_n$, wobei S_1, \dots, S_n und Teilmengen vom Einheitsintervall $I = [0, 1]$ sind, die die beiden Punkte 0 und 1 beinhalten.
 - (b) C' ist geerdet.
 - (c) C' ist n -steigend.
 - (d) Für jedes $u_i \in S_i$ gilt $C'(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$.

Eine n -Copula C ist eine n -Teilcopula mit Definitionsbereich I^n .

3. Eine dritte Möglichkeit Copulas zu definieren lautet:
Eine n -dimensionale Copula ist eine multivariate Verteilungsfunktion von n auf I standardgleichverteilten Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n :

$$C(u_1, \dots, u_n) = P\{U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n\}$$

Bemerkung 2.1.16.

- Der Punkt (c) der Definition 1 hat zur Folge, dass $C_k(u) = u, \forall u \in [0, 1]$.
- Ist C eine n -Copula, so ist jede k -dimensionale Randverteilung eine k -Copula.
- Da Copulas eine Verteilungsfunktion von I^n nach I darstellen, induziert eine Copula ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf I^n durch

$$V_C([0, u_1] \times \dots \times [0, u_n]) = C(u_1, \dots, u_n).$$

Dieses Maß wird im Folgenden das C -Maß genannt.

Der nächste Satz bildet die Grundlage für die partiellen Ableitungen einer Copula.

Satz 2.1.17. Sei C eine n -Copula. Dann gilt für alle $u, v \in I^n$ folgende Lipschitzbedingung

$$|C(v) - C(u)| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|.$$

Daher ist C gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Beweis.

$$\begin{aligned} |C(u) - C(v)| &\stackrel{2.1.14}{\leq} \sum_{k=1}^n |C_k(v_k) - C_k(u_k)| \\ &= \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da die Randverteilungen rechteckverteilt auf I sind. \square

Satz 2.1.18. Sei $C(u_1, \dots, u_n)$ eine Copula. Für beliebige $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n \in I$ existiert die partielle Ableitung $\partial C / \partial u_i$ für fast alle u für $i \in \{1, \dots, n\}$, und es gilt

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_i} C(u_1, \dots, u_n) \leq 1. \quad (2.4)$$

Beweis. Die Existenz der partiellen Ableitung folgt daraus, dass monotone Funktionen fast überall ableitbar sind. Die partiellen Ableitungen sind größer oder gleich 0, da die Copulas streng monoton steigend in jeder Variablen sind. Dass die partiellen Ableitungen aus (2.4) kleiner gleich eins sind, folgt aus dem Satz 2.1.17, indem man

$u_1 = v_1, \dots, u_{i-1} = v_{i-1}, u_{i+1} = v_{i+1}, \dots, u_n = v_n$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ setzt. \square

2.2 Sklar's Theorem

Das Theorem von Sklar ist das bedeutendste in der Copula-Theorie, da es die Grundlage für die meisten statistischen Anwendungen ist. Das Theorem besagt, dass für gegebene Randverteilungen und gemeinsamer Verteilungsfunktion eine Copula existiert, die auf dem Wertebereich der Randverteilungen eindeutig definiert ist.

Um dieses Theorem zu beweisen bedarf es einiger Arbeit. Wir gehen dabei in drei Schritten vor:

1. Seien eine gemeinsame Verteilungsfunktion und ihre Randverteilungen gegeben. Wir zeigen im ersten Schritt, dass sich eine Teilcopula finden lässt, welche auf dem Wertebereich von der Randverteilungen eindeutig definiert ist.
2. Es bleibt zu zeigen, dass sich diese Teilcopula zu einer Copula fortsetzen lässt. Im zweiten Schritt wird die Teilcopula zu einer Verteilungsfunktion auf I^n erweitert.

3. Im dritten Schritt wird gezeigt, dass diese Verteilungsfunktion eine Copula ist.
4. Im vierten Schritt wird das Ergebnis aus den Schritten zwei und drei dann auf allgemeine Copulas ausgedehnt.

Ad 1:

Satz 2.2.1. Sei H eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Dann existiert eine eindeutige Teilcopula C' , so dass

1. $DomC' = RanF_1 \times \dots \times RanF_n$.
2. Für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ gilt $H(x) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass die Verteilungsfunktion H eindeutig durch die Werte der Randverteilungen festgelegt ist.

Die gemeinsame Verteilungsfunktion H erfüllt mit $S_1 = \dots = S_n = \overline{\mathbb{R}}$ die Voraussetzungen des Satzes 2.1.14 und somit gilt für $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^n$

$$|H(y) - H(x)| \leq \sum_{k=1}^n |F_n(y_n) - F_n(x_n)|.$$

Falls $F_1(x_1) = F_1(y_1), \dots, F_n(x_n) = F_n(y_n)$ gilt, folgt daraus, dass $H(x) = H(y)$. Das bedeutet, dass der Wert $H(x)$ nur von den Werten $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ abhängt. Daher definiert die Menge der geordneten Paare $\{(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), H(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}^n\}$ eine n -dimensionale Funktion C' .

Es bleibt zu zeigen, dass C' eine Teilcopula ist. Dazu werden die vier Punkte aus der Definition für Teilcopulas gezeigt.

1. $DomC' = RanF_1 \times \dots \times RanF_n$ ist Teilmenge von I^n und enthält die beiden Zahlen 0 und 1, da die F_i Verteilungsfunktionen sind.
Sei $A_m = RanF_m$. Für jedes u_m in A_m gibt es ein $x_m \in \overline{\mathbb{R}}$, so dass $F_m(x_m) = u_m$.

2. C' ist geerdet, denn

$$\begin{aligned} & C'(u_1, \dots, u_{m-1}, 0, u_{m+1}, \dots, u_n) \\ &= C'(F_1(x_1), \dots, F_{m-1}(x_{m-1}), F_m(-\infty), F_{m+1}(x_{m+1}), \dots, F_n(x_n)) \\ &= H(x_1, \dots, x_{m-1}, -\infty, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

da H geerdet ist.

3. C' ist n -steigend, denn sei $B = ([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$ eine n -Box mit Eckpunkten in $\text{Dom}C'$, dann ist $V_{C'}(B) = \sum \text{sign}(c)C'(c)$, wobei $c = (c_1, \dots, c_n)$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Für jedes $c_i \in \text{Ran}F_i$ existiert ein v_i , derart dass $F_i(v_i) = c_i$. Daher gilt

$$\begin{aligned} V_{C'}(B) &= \sum \text{sign}(c)C'(c) \\ &= \sum \text{sign}(c)C'(F_1(v_1), \dots, F_n(v_n)) \\ &= \sum \text{sign}(v)H(v_1, \dots, v_n) \geq 0. \end{aligned}$$

4. C' hat Randverteilungen, denn für jedes $w_m \in \text{Ran}F_m$ gibt es ein $x_m \in \overline{\mathbb{R}}$ derart, dass $F_m(x_m) = w_m$. Daher gilt

$$\begin{aligned} &C'(1, \dots, 1, w_m, 1, \dots, 1) \\ &= C'(F_1(\infty), \dots, F_{m-1}(\infty), F_m(x_m), F_{m+1}(\infty), \dots, F_n(\infty)) \\ &= H(\infty, \dots, \infty, x_m, \infty, \dots, \infty) \\ &= F_m(x_m) = w_m. \end{aligned}$$

□

Damit haben wir die Existenz einer eindeutigen Teilcopula C' auf dem Wertebereich der Randverteilungen gezeigt.

Ad 2:

Es bleibt damit zu zeigen, dass jede Teilcopula zu einer Copula erweitert werden kann. Elegant wird dieses Problem in der Arbeit von Carley und Taylor in [5] mittels Schachbrettcopulas gelöst. Dort wird die Erweiterung zunächst für Teilcopulas mit diskretem Definitionsbereich gezeigt. Dazu wird die Teilcopula zu einer Verteilungsfunktionen auf I^n fortgesetzt. Dazu zuerst die Definition eines Schachbretts.

Definition 2.2.2. (Schachbrett) Für $n \geq 2$ seien $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Weiter seien $a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,m_k} \in I$ mit

$$0 = a_{k,0} < a_{k,1} < \dots < a_{k,m_k} = 1.$$

Das Schachbrett D ist dann gegeben durch

$$D = \{a_{1,0}, \dots, a_{1,m_1}\} \times \dots \times \{a_{n,0}, \dots, a_{n,m_n}\}$$

und man bemerke, dass D den Einheitswürfel I^n in $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ n -Boxen unterteilt, wobei

$$B_{i_1, \dots, i_n} = [a_{1, i_1-1}, a_{1, i_1}] \times [a_{2, i_2-1}, a_{2, i_2}] \times \dots \times [a_{n, i_n-1}, a_{n, i_n}]$$

mit $i_j \in \{1, 2, \dots, m_j\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Eine Teilcopula S , die auf einem Schachbrett D definiert ist, kann folgendermaßen zu einer Verteilungsfunktion auf dem Einheitswürfel fortgesetzt werden.

Satz 2.2.3. Sei D ein Schachbrett und S eine diskrete n -Teilcopula mit Definitionsbereich D . Dann gibt es eine Verteilungsfunktion C_S auf I^n , welche S fortsetzt, so dass $C_S(x) = S(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Beweis. Sei λ das Lebesgue-Maß auf I^n und für eine Menge A sei \mathbb{I}_A die Indikatorfunktion von A . Für eine gegebene n -Box B_{i_1, \dots, i_n} sei

$$\delta_{i_1, \dots, i_n} := \frac{V_S(B_{i_1, \dots, i_n})}{\lambda(B_{i_1, \dots, i_n})}.$$

Definiere ein Maß μ_S durch

$$\mu_S(A) := \sum_{i_1, \dots, i_n} \int_A \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda.$$

Aus $\lambda(A) = 0$ folgt direkt $\mu_S(A) = 0$. Daher ist μ absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes λ . Da $\mu_S(I^n) = 1$ gilt, ist μ_S ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Für zwei n -Boxen B_{i_1, \dots, i_n} und B_{j_1, \dots, j_n} , die nicht gleich sind, gilt

$$\mu(B_{i_1, \dots, i_n} \cap B_{j_1, \dots, j_n}) = 0.$$

Falls sie sich in mehr als einer Komponente unterscheiden, haben sie als Schnitt maximal einen Punkt und damit ist der Fall klar. Unterscheiden sie sich in nur einer Komponente, hat der Schnitt die Dimension $n - 1$. Damit ist das Lebesgue-Maß 0. Da μ_S absolut stetig auf dem Lebesgue-Maß ist, hat der Schnitt das μ_S -Maß 0.

Damit können wir zeigen, dass die Verteilung μ eine Fortsetzung von S ist. Für $j_k \in \{1, \dots, m_k\}$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_S([0, a_{1, j_1}] \times \dots \times [0, a_{n, j_n}]) &= \mu_S \left(\bigcup_{\substack{i_k \leq j_k \\ k=\{1, \dots, n\}}} B_{i_1, \dots, i_n} \right) = \sum_{\substack{i_k \leq j_k \\ k=\{1, \dots, n\}}} \mu(B_{i_1, \dots, i_n}) \\ &= \sum_{\substack{i_k \leq j_k \\ k=\{1, \dots, n\}}} V_S(B_{i_1, \dots, i_n}) = V_S([0, a_{1, j_1}] \times \dots \times [0, a_{n, j_n}]) = S(a_{1, j_1}, \dots, a_{n, j_n}). \end{aligned}$$

Zu μ_S ist folgende Verteilungsfunktion C_S auf dem Einheitswürfel I^n gegeben:

$$C_S(x_1, \dots, x_n) = \mu_S([0, x_1] \times \dots \times [0, x_n]).$$

C_S ist also eine Verteilungsfunktion, die S auf I fortsetzt. □

Ad 3:

Es bleibt nun zu zeigen, dass die Verteilungsfunktion C_S eine Copula ist. Dazu führen wir zunächst die Schachbrettcopulas ein.

Definition 2.2.4. (Schachbrettcopula)

Sei S eine Teilcopula, welche auf einem Schachbrett definiert ist. Eine *Schachbrettcopula in Bezug auf S* ist eine Funktion $C_S : I^n \rightarrow I$ definiert durch

$$\begin{aligned} C_S(x_1, \dots, x_n) &:= \mu_S([0, x_1] \times \dots \times [0, x_n]) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass C_S eine Erweiterung von S zu einer n -Copula ist. Wir wissen bereits:

- C_S stimmt mit der Teilcopula S auf D überein.
- C_S ist n -steigend, denn für jede n -Box $B \subset I^n$ gilt $V_{C_S}(B) = \mu_S(B) \geq 0$.
- C_S ist geerdet, denn $C_S(x_1, \dots, x_n) = 0$ falls ein $x_i = 0$.

Um die Randverteilungseigenschaft zu zeigen, benötigen wir noch die Linearitätseigenschaft der Schachbrettcopulas.

Lemma 2.2.5. [5] C_S ist linear in jeder Variablen in Folgendem Sinne. Falls x und y in einem B_{j_1, \dots, j_n} liegen und sich nur in einer einzelnen Komponente unterscheiden, gilt für $0 \leq t \leq 1$

$$C_S((1-t)x + ty) = (1-t)C_S(x) + tC_S(y).$$

Beweis. O.B.d.A. kann man den Fall betrachten, dass sich x und y nur in der ersten Komponente unterscheiden. Sei also $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, x_2, \dots, x_n)$. Mit den Definitionen von μ und C_S gilt

$$\begin{aligned} C_S((1-t)x + ty) &= C_S(x + t(y-x)) \\ &= C_S(x) + \sum_{i_1, \dots, i_n} \int_{x_1}^{x_1+t(y_1-x_1)} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda \dots d\lambda. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Jedes B_{i_1, \dots, i_n} hat die Form $E_1 \times \dots \times E_n$, wobei jedes E_i ein geschlossenes Intervall darstellt. Das Intervall in I von x_1 zu y_1 liegt entweder in E_1 , ist disjunkt von E_1 oder schneidet dieses in einem einzelnen Punkt. Wenn wir nun die Integration in Bezug auf die erste Variable betrachten, bekommen wir aus dem vorher Genannten und der Tatsache, dass der Integrand konstant ist in B_{i_1, \dots, i_n} ,

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_1+t(y_1-x_1)} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda \dots d\lambda \\ &= t \int_{x_1}^{y_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda \dots d\lambda \\ &= t \left(\int_0^{y_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda \dots d\lambda - \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \delta_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{I}_{B_{i_1, \dots, i_n}} d\lambda \dots d\lambda \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} C_S((1-t)x + ty) &= C_S(x) + t(C_S(y) - C_S(x)) \\ &= (1-t)C_S(x) + C_S(y). \end{aligned}$$

□

Mit diesem Lemma können wir nun zeigen, dass die Verteilungsfunktion C_S aus dem Satz 2.2.3, die die auf dem Schachbrett definierte Teilcopula fortsetzt, ein Schachbrettcopula ist. Dazu ist die noch fehlende Randverteilungseigenschaft zu zeigen.

Satz 2.2.6. [5] Für die Schachbrettcopula C_S aus dem Satz 2.2.3 gilt die Randverteilungseigenschaft

$$C_S(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i, \quad \forall x_i \in I.$$

Beweis. Die Randverteilungseigenschaft übernimmt C_S von S auf allen $a_{i,j} \in D$:

$$\begin{aligned} C_S(1, \dots, 1, a_{i,j}, 1, \dots, 1) &= \mu_S(I \times \dots \times I \times [0, a_{i,j}] \times I \times \dots \times I) \\ &= S(1, \dots, 1, a_{i,j}, 1, \dots, 1) = a_{i,j}. \end{aligned}$$

Für jedes x_i gibt es eine Darstellung $x_i = (1-t)a_{i,j} + ta_{i,j+1}$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ und $t \in I$. Daher folgt mit Lemma 2.2.5 die Behauptung. □

Daher können wir die C_S als eine Erweiterung von S ansehen und der Erweiterungssatz ist für diskrete Teilcopulas bewiesen.

Ad 4:

Dieses Ergebnis wird nun auf beliebige Teilcopulas ausgeweitet.

Satz 2.2.7. [5] Eine n -Teilcopula S mit abgeschlossenem Definitionsbereich kann ausgeweitet werden zu einer n -Copula C . Das heißt, ist eine n -Teilcopula S gegeben, dann gibt es eine

Copula C für die gilt

$$C(x) = S(x), \quad \forall x \in \text{Dom}S. \quad (2.6)$$

Beweis. Sei $\text{Dom}S = D_1 \times \dots \times D_n$. Für jedes D_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ können wir eine aufsteigende Folge von endlichen Mengen $A_{i,k} \subset D_i$ finden, so dass $\{0, 1\} \in A_{i,1}$ und $\overline{\bigcup_k A_{i,k}} = D_i$, wobei $\overline{\bigcup_k A_{i,k}}$ den Abschluss von $\bigcup_k A_{i,k}$ darstellt. Dann definieren wir $S_k : A_{1,k} \times \dots \times A_{n,k} \mapsto I$ durch

$$S_k(a_1, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n), \quad \forall a \in \text{Dom}S_k.$$

Jedes S_k ist eine n -Teilcopula, weil es eine Einschränkung einer n -Teilcopula ist und weil $\{0, 1\}$ zu jedem Faktor der S_k gehören. Daher existiert eine Folge von n -Teilcopulas $\{S_k\}$, für die gilt, dass

- $\text{Dom}S_k$ endlich für alle k ist,
- S_k eine Einschränkung von S ist,
- $\text{Dom}S_k \subset \text{Dom}S_{k+1}$ ist und
- $\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Dom}S_k$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $\text{Dom}S$ ist.

Für jedes k sei C_k eine Schachbrettcopula in Bezug auf S_k . Da die C_k 's gleichgradig stetig sind, und durch 0 und 1 nach unten und oben beschränkt sind, kann man den Satz von Arzela-Ascoli anwenden. Danach gibt es eine Teilfolge von $\{C_k\}$, die gegen eine stetige Funktion C konvergiert.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = C$.

Für jede n -Box B in I^n ist $V_{C_k}(B)$ eine lineare Kombination von Werten von C_k . Damit gilt $V_{C_k} \geq 0$ für alle k . Für $k \mapsto \infty$ gilt $V_C(B) \geq 0$, daher ist C eine n -steigende Funktion. Weiter gilt $C(x_1, \dots, x_n) = 0$, falls mindestens ein $x_i = 0$, da die Schachbrettcopulas $C_k = 0$ geerdet sind. Ebenso überträgt sich Randverteilungseigenschaft $C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i$, $\forall x_i \in I$ von den Schachbrettcopulas C_k .

C stimmt mit S in jedem Punkt von $\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Dom}S_k \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Dom}S_k} = \text{Dom}S$ überein. Da C und S stetig auf $\text{Dom}S$ sind und $\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Dom}S_k$ dicht in $\text{Dom}S$ ist, stimmen sie auch auf $\text{Dom}S$ überein.

Damit haben wir die Erweiterung einer beliebigen Teilcopula S zu eine Copula C_S bewiesen. \square

Nun treffen wir noch eine Aussage zur Linearität dieser erweiterten Copula C , welche im nächsten Abschnitt benötigt wird. Dazu benötigen wir folgende Definition.

Definition 2.2.8. Sei S eine n -Teilcopula. Eine Teilmenge $B \subset I^n$ ist eine S -Box genau dann, wenn

1. B von der Form $B_1 \times \dots \times B_n$ ist, wobei die Faktoren abgeschlossene Intervalle sind.
2. alle Eckpunkte von B in $DomS$ liegen und wenn im Inneren von B ansonsten kein Punkt zu $DomS$ gehört.

Bemerkung 2.2.9. [5] Sei C die Erweiterung einer Teilcopula S wie in Satz 2.2.7 beschrieben. Dann ist C linear in jeder Variablen in jeder S -Box.

Beweis. Sei nun B eine S -Box. Wir wollen zeigen, dass C linear in jeder Komponente ist. Seien $x, y \in B$, so dass x und y sich nur in einer Komponente unterscheiden und sei $t \in I$. Da $DomS_k \subseteq DomS$ gilt, gibt es für jedes k eine S_k -Box B_k , so dass $B \subseteq B_k$ gilt. Da $x, y \in B_k$ ist, haben wir

$$C_k((1-t)x + ty) = (1-t)C_k(x) + tC_k(y)$$

für jedes k . Lassen wir nun k gegen Unendlich laufen, erhalten wir

$$C((1-t)x + ty) = (1-t)C(x) + tC(y).$$

□

Da wir den Erweiterungssatz 2.2.7, den wir zunächst nur für diskrete Teilcopulas gezeigt haben, für allgemeine Teilcopulas bewiesen haben, haben wir alle nötigen Hilfsmittel für Sklar's Theorem zusammen.

Sklar's Theorem 2.2.10. Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen und sei H eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Dann gibt es eine (nicht zwingend eindeutige) n -Copula C , so dass gilt

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

C ist eindeutig definiert, falls die univariaten Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n stetig sind. Ansonsten ist C eindeutig bestimmt auf ihrem Wertebereich $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$.

Beweis. Nach dem Satz 2.2.1 kann man eine Teilcopula C' finden, die auf $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$ eindeutig definiert ist, für die gilt

$$H(x_1, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Da die Teilcopula C' auf ihrem Definitionsbereich nach Satz 2.1.17 gleichmäßig stetig ist, kann man diese Teilcopula auf den Abschluss von $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$ zu einer Teilcopula S fortsetzen. Diese Teilcopula S kann nach dem Erweiterungssatz 2.2.7 fortgesetzt werden zu einer Copula C , welche auf dem $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$ eindeutig definiert ist. □

Mithilfe von Sklar's Theorem lässt sich die Verteilungsfunktion in die *univariaten Randverteilungen* und die *Copulafunktion* aufsplitten. Diese sind völlig unabhängig voneinander, was eine einfache und flexible Modellierung ermöglicht.

Korollar 2.2.11. Sei H eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n und der Copula C , so gilt für jedes n -Tupel in $[0, 1]^n$

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)),$$

mit $F_i^{-1}(u_i) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_i(x) \geq u_i\}$ für $i = \{1, \dots, n\}$.

2.3 Fréchet-Hoeffding-Schranke

In diesem Abschnitt geht es darum die Schranken festzusetzen, in denen sich eine n -Copula bewegt. Dann werden wir in diesem Abschnitt zeigen, dass die obere Schranke selbst eine Copula ist, die untere Schranke jedoch nur für den Fall $n = 2$ eine Copula ist. Grundlage für diesen Abschnitt bildet wieder Nelson[31], wobei auch hier wieder der zweidimensionale Fall betrachtet wurde. In dieser Arbeit wird direkt der n -dimensionale Fall betrachtet.

Fréchet-Hoeffding-Theorem 2.3.1. Sei C eine Copula. Für alle $u = (u_1, \dots, u_n) \in \text{Dom}C$ mit $W^n := \max\{u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0\}$ und $M^n := \min\{u_1, \dots, u_n\}$ gilt

$$W^n \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M^n.$$

Beweis. Da C monoton steigend in jeder Variablen ist, und $u \in [0, 1]^n$ ist, gilt

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &\leq C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \Rightarrow C(u_1, \dots, u_n) &\leq \min\{u_1, \dots, u_n\}. \end{aligned}$$

Sei C eine Copula mit Randverteilungen C_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$. Da C eine geordnete n -steigende Funktion ist mit $\text{Dom}C = [0, 1]^n$ gilt nach Satz 2.1.17 für alle $u = (u_1, \dots, u_n) \in \text{Dom}C$

$$|C(1, \dots, 1) - C(u_1, \dots, u_n)| \leq \sum_{k=1}^n |C_k(1) - C_k(u_k)|.$$

Da C und die C_k Verteilungsfunktionen auf $[0, 1]^n$ bzw. $[0, 1]$ sind, sind alle Differenzen größer oder gleich 0 und man kann die Betragsstriche weglassen. Daraus ergibt sich

$$C(1, \dots, 1) - C(u_1, \dots, u_n) \leq \sum_{k=1}^n (C_k(1) - C_k(u_k)) = n - \sum_{k=1}^n C_k(u_k).$$

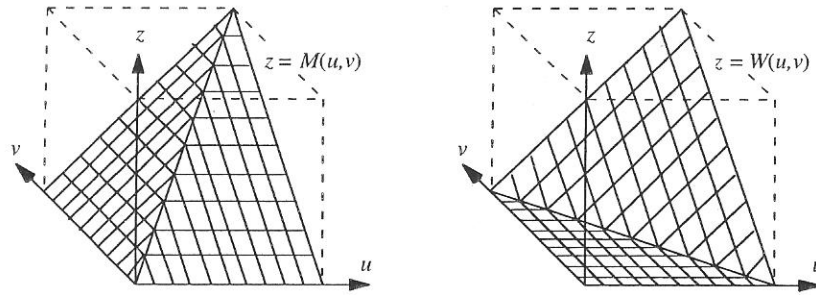


Abbildung 2.1: Graphen der Fréchet-Hoeffding-Schranken $M^2(u, v)$ und $W^2(u, v)$, Quelle: [31, Seite 10]

Daraus folgt direkt

$$C(u_1, \dots, u_n) \geq (u_1 + \dots + u_n) - n + 1.$$

□

In der Abbildung 2.1 werden die Graphen der Fréchet-Hoeffding-Schranken für den 2-dimensionalen Fall gezeigt.

Im Folgenden werden wir untersuchen, ob die Grenzen selber wieder Copulas sind.

Lemma 2.3.2. M^n ist eine Copula.

Beweis.

- M^n ist geerdet, da $\min\{u_1, \dots, u_n\} = 0$ gilt, falls mindestens ein $u_i = 0$.
- M^n hat auf I rechteckverteilte Randverteilungen, denn $\min\{1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1\} = u_i$, für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Es bleibt zu zeigen, dass M^n n -steigend ist, also dass gilt

$$V_{M^n}([a, b]) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} M^n = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} \min\{\cdot, \dots, \cdot\} \geq 0.$$

Bei der Minimumfunktion darf man die einzelnen Argumente permutieren. Man nummeriere die Elemente $\{a_1, \dots, a_n\}$ so um, derart dass $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ gilt.

Sei $D_i := \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n\}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Nun ist a_1 das kleinste Element von D_1 , daher gilt

$$V_{M^n}([a, b]) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \min\{b_1, \cdot, \dots, \cdot\} - \underbrace{\Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \min\{a_1, \cdot, \dots, \cdot\}}_{=2^{n-1}*(a_1-a_1)=0}.$$

Das Volumen ist Null, falls b_1 kleiner als alle Element von D_2 ist.

Ist b_1 nicht kleiner als alle Elemente von D_2 , geht man für $i = 2, \dots, n - 1$ iterativ vor: a_i ist nun kleinstes Element von D_i , daher gilt

$$V_{M^n}([a, b]) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \min\{b_1, \dots, b_i, \cdot, \dots, \cdot\} \\ - \underbrace{\Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \min\{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \cdot, \dots, \cdot\}}_{=2^{n-2}*(a_i - a_i)=0}.$$

Falls b_i kleiner als alle Elemente von D_{i+1} ist, haben wir $V_{M^n} = 0$ und die Behauptung ist gezeigt. Ansonsten erhalten wir nach $n - 1$ Schritten

$$V_{M^n}([a, b]) = \Delta_{a_n}^{b_n} \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, \cdot\} \\ = \min\{b_1, \dots, b_n\} - \min\{b_1, \dots, b_{n-1}, a_n\} \geq 0.$$

□

Bemerkung 2.3.3. W^2 ist eine Copula.

Beweis. Offensichtlich ist W^2 geerdet und hat gleichverteilte Randverteilungen. Es bleibt also zu zeigen, dass W^2 für jede 2-Box $([u_1, u_2] \times [v_1, v_2])$ mit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ 2-steigend ist, also dass gilt

$$V_{W^2} = \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ - \max\{u_2 + v_1 - 1, 0\} - \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\} \geq 0.$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: Die beiden unteren Maxima sind gleich 0. Daraus folgt $V_{W^2} \geq 0$.
2. Fall: Eines der beiden unteren Maxima ist größer 0. O.B.d.A. sei $u_1 + v_2 - 1 \geq 0$. So gilt aber $\max\{u_2 + v_2 - 1, 0\} \geq \max\{u_1 + v_2 - 1, 0\}$. Daraus folgt $V_{W^2} \geq 0$.
3. Fall: Die beiden unteren Maxima sind größer als 0. Dann gilt

$$V_{W^2} = (u_2 + v_2 - 1) - (u_1 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) + \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} \\ = \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} - u_1 + v_1 - 1 = \begin{cases} = 0 & \text{,für } u_1 + v_1 \geq 1. \\ > 0 & \text{,für } u_1 + v_1 < 1. \end{cases}.$$

Somit haben wir alle drei Fälle abgearbeitet und das Lemma ist gezeigt.

□

Bemerkung 2.3.4. W^n ist für $n \geq 3$ keine Copula.

Beweis. Es genügt nach der Definition der Copula zu zeigen, dass W^n nicht steigend ist. Dazu

betrachtet man das W^n -Volumen des n -dimensionalen Würfels $[1/2, 1]^n \subset [0, 1]^n$:

$$\begin{aligned}
 V_{W^n} \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) &= \underbrace{\max\{1 + \dots + 1 - n + 1, 0\}}_1 \\
 &\quad - n * \underbrace{\max\left\{ \frac{1}{2} + 1 + \dots + 1 - n + 1 \right\}}_{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \binom{n}{2} * \underbrace{\max\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \dots + 1 - n + 1, 0 \right\}}_0 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \underbrace{\max\left\{ \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - n + 1, 0 \right\}}_0 \\
 &= 1 - \frac{n}{2} \\
 &\leq 0, \quad \text{für } n \geq 3.
 \end{aligned}$$

□

Im Folgenden wird gezeigt, dass man für alle n -Tupel (u_1, \dots, u_n) eine Copula finden kann, so dass $C(u_1, \dots, u_n) = W^n(u_1, \dots, u_n)$ gilt. Das bedeutet, dass auch diese Schranke nicht weiter verbessert werden kann.

Satz 2.3.5. [31, Theorem 2.10.13] Für jedes u aus I^n gibt es eine Copula C , welche die Gleichung $C(u) = W^n(u)$ erfüllt.

Beweis. Falls $u = 0 := (0, \dots, 0)$ oder $u = 1 := (1, \dots, 1)$ gilt, kann man jede beliebige Copula nehmen. Sei also $u \in I^n \setminus \{0, 1\}$. Man macht eine Fallunterscheidung:

1. Fall; $0 < u_1 + \dots + u_n \leq n - 1$: Man betrachte eine Menge aus 3^n Punkten $v = (v_1, \dots, v_n)$, wobei jedes $v_k \in \{0, 1, t_k\}$ ist mit $t_k = (n - 1)u_k / (u_1 + \dots + u_n)$. Nun definiert man auf diesen Punkten eine Funktion C' durch $C'(v) = W^n(v)$.

Zunächst zeigen wir, dass C' eine Teilcopula ist. C' ist offensichtlich nur auf Punkten des Einheitsintervalls definiert, geerdet und hat rechteckverteilte Randverteilungen. Es bleibt zu zeigen, dass C' n -steigend ist. Für $t = (t_1, \dots, t_n)$ folgt

$$C'(t) = W^n(t) = \max \left\{ (u_1 + \dots + u_n) \frac{n - 1}{(u_1 + \dots + u_n)} - n + 1, 0 \right\} = 0.$$

Seien $a^{(k)} = (0, \dots, 0, t_k, 0, \dots, 0)$ und $b^{(k)} = (t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n)$. Dann gilt für jede n -Box $B_k = ([a^{(k)}, b^{(k)}])$

$$\begin{aligned}
 V_{C'}(B_k) &= C'(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n) - C'(t) \\
 &= W^n(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n) - 0 \\
 &= \max \left\{ (u_1 + \dots + u_n) \frac{n-1}{(u_1 + \dots + u_n)} - u_k \frac{n-1}{(u_1 + \dots + u_n)} + 1 - n + 1, 0 \right\} \\
 &= 1 - t_k, \quad \forall k = \{1, \dots, n\}.
 \end{aligned}$$

Per vollständiger Induktion kann man zeigen, dass alle anderen n -Boxen, die ebenfalls vs als Eckpunkte haben und disjunkt von den B_k s sind, das C' -Volumen 0 haben. Damit ist C' n -steigend, und somit eine Teilcopula.

Wendet man nun den Erweiterungssatz 2.2.7 und die zugehörige Bemerkung 2.2.9 auf die Teilcopula C' an, so erhält man eine n -Copula C , welche linear in jeder Variablen ist. Für jedes x in der n -Box $[0, t]$ (was u einschließt) gilt somit $C(x) = W^n(x) = 0$.

2. Fall; $n-1 < u_1 + \dots + u_n < n$: Man betrachtet nun die Menge aus 3^n Punkten $v = (v_1, \dots, v_n)$, wobei nun jedes $v_k \in \{0, 1, s_k\}$ ist, mit $s_k = 1 - (1 - u_k)/(n - (u_1 + \dots + u_n))$. Jetzt definiert man auf diesen Punkten eine Funktion C' durch $C'(v) = W^n(v)$. Für $t = (t_1, \dots, t_n)$ folgt

$$C'(t) = W^n(t) = \max \left\{ n + \frac{n - (u_1 + \dots + u_n)}{n - (u_1 + \dots + u_n)} - n + 1, 0 \right\} = 0.$$

Wieder erbt C' von W^n , dass C' geerdet ist und auf I rechteckverteilte Randverteilungen hat. Um nachzuweisen, dass C' eine Teilcopula ist, bleibt wieder zu zeigen, dass C' n -steigend ist. Seien $a^{(k)} = (0, \dots, 0, s_k, 0, \dots, 0)$ und $b^{(k)} = (s_1, \dots, s_{k-1}, 1, s_{k+1}, \dots, s_n)$. Dann gilt für jede n -Box $B_k = [a^{(k)}, b^{(k)}]$

$$\begin{aligned}
 V_{C'}(B_k) &= C'(s_1, \dots, s_{k-1}, 1, s_{k+1}, \dots, s_n) - 0 \\
 &= W^n(s_1, \dots, s_{k-1}, 1, s_{k+1}, \dots, s_n) \\
 &= \max \left\{ n - \frac{n - (u_1 + \dots + u_n)}{n - (u_1 + \dots + u_n)} - 1 + \frac{1 - u_k}{n - (u_1 + \dots + u_n)} + 1 - n + 1, 0 \right\} \\
 &= \frac{1 - u_k}{n - (u_1 + \dots + u_n)} \\
 &= 1 - s_k, \quad \forall k = \{1, \dots, n\}.
 \end{aligned}$$

Man kann erneut mittels vollständiger Induktion zeigen, dass alle anderen n -Boxen, die ebenfalls vs als Eckpunkte haben und disjunkt von den B_k s sind, das C' -Volumen 0 haben. Wir erweitern die Teilcopula C' zu einer Copula C wie oben.

Sei $s = (s_1, \dots, s_n)$, dann gilt für jedes x in der n -Box $[s, 1]$ (was u einschließt),

$$C(x) = W^n(x) = x_1 + \dots + x_n - n + 1. \quad \square$$

2.4 Ko- und Kontramonotonie

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen den Fréchet-Hoeffding-Schranken und dem Vorliegen bestimmter Abhängigkeiten bei den Zufallsvariablen der Copulas erläutert. Dazu werden zunächst die Begriffe definiert.

Definition 2.4.1. Zwei Zufallsvariablen X, Y heißen komonoton, falls es eine monoton steigende Funktion f gibt, derart dass $X = f(Y)$ fast sicher gilt. Das bedeutet, dass sie zur selben Zeit große, bzw. kleine Werte annehmen.

Die Zufallsvariablen heißen kontramonoton, falls es eine monoton fallende Funktion f gibt, derart dass $X = f(Y)$ fast sicher gilt. In diesem Fall sind die beiden Zufallsvariablen gegenläufig.

In Bezug auf Copulas kann man folgende Aussage treffen.

Satz 2.4.2. Zwei reelle stetige Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit Randverteilungen F_1 und F_2 und mit gemeinsamer Verteilungsfunktion H sind genau dann komonoton, falls gilt

$$H(x_1, x_2) = M^2(F_1(x_1), F_2(x_2)), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Zufallsvariablen sind kontramonoton, falls gilt

$$H(x_1, x_2) = W^2(F_1(x_1), F_2(x_2)), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 2.4.3. Im Falle $n = 2$ sind die Schranken W^2 und M^2 selbst Copulas. Sei U eine auf I rechteckverteilte Zufallsvariable auf $[0,1]$ ($U \sim U(0, 1)$), dann gilt

$$W^2 = \mathbb{P}[U \leq x_1, 1 - U \leq x_2] \text{ und } M^2 = \mathbb{P}[U \leq x_1, U \leq x_2].$$

Daher kann man W^2 und M^2 als Verteilungsfunktionen des Vektors $(U, 1 - U)^T$ bzw. $(U, U)^T$ auffassen. Die Verteilungsfunktion von $(U, 1 - U)^T$ hat ihre Masse auf der Diagonalen zwischen $(0, 1)$ und $(1, 0)$, wohingegen die Verteilungsfunktion von $(U, U)^T$ ihre Masse nur auf der Diagonalen von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ hat. Hier beschreibt W^n die perfekte negative und M^n perfekte positive Abhängigkeit.

Satz 2.4.4. [38, Theorem 1] Zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y sind genau dann komonoton, wenn eine Zufallsvariable Z und monoton steigende Funktionen u und v auf \mathbb{R} existieren, derart dass $(X, Y) =_d (u(Z), v(Z))$ gilt.

Beweis. Sei Z eine Zufallsvariable und u und v monoton steigende Funktionen auf \mathbb{R} , so dass $(X, Y) =_d (u(Z), v(Z))$ gilt. Sei H die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y , so gilt

$$H(x, y) = P[u(Z) \leq x, v(Z) \leq y] = P[Z \in A, Z \in B],$$

wobei A und B Intervalle der Form $[0, d]$ oder $[0, d)$ sind. Da entweder $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} H(x, y) &= P[Z \in A, Z \in B] = \min\{P[Z \in A], P[Z \in B]\} \\ &= \min\{P[X \leq x, Y \leq y]\} = \min\{F_1(x), F_2(y)\}, \end{aligned}$$

wobei F_1 und F_2 die Randverteilungen von X und Y sind. Damit ist der erste Teil bewiesen. Für die Rückrichtung seien nun X und Y reellwertige komonotone Zufallsvariablen und U eine auf I rechteckverteilte Zufallsvariable. Dann gilt nach Satz Pit

$$(X, Y) =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)),$$

Wobei für die Inversen der Randverteilungen F_i gilt $F_i^{-1}(q) = \inf\{x | F_i(x) \geq q\}$ für $q \in I$. Damit sind F_1^{-1}, F_2^{-1} monoton steigende Funktionen und der Satz ist gezeigt. \square

Ebenso gibt es auch einen Satz kontramonomonen Zufallsvariablen

Satz 2.4.5. Zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y sind genau dann kontramonoton, wenn es eine Zufallsvariable Z , eine monoton steigende Funktionen u und eine monoton fallende Funktion v auf \mathbb{R} existieren, derart dass $(X, Y) =_d (u(Z), v(Z))$ gilt.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Satzes 2.4.4 \square

Bemerkung 2.4.6. Im Falle stetiger Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 von X und Y ist die Copula eindeutig, und die obigen Sätze können verschärft werden zu:

- $C = W^2$ gilt genau dann, wenn $Y = T(X)$ fast sicher gilt mit monoton fallendem $T = F_2^{-1} \circ (1 - F_1)$.
- $C = M^2$ gilt genau dann, wenn $Y = T(X)$ fast sicher gilt mit monoton steigendem $T = F_2^{-1} \circ F_1$.

2.5 Copulas und Zufallsvariablen

Eine wichtige Eigenschaft von Copulas ist die Invarianz, bzw. die einfache Änderung bei Transformation der Zufallsvariablen durch eine stetige und streng monotone Funktionen, was in diesem Abschnitt näher ausgeführt wird.

Zunächst geht es jedoch um die Copula, welche man bei unabhängigen Zufallsvariablen erhält.

Definition 2.5.1. Die *Produktcopula* ist für $u = (u_1, \dots, u_n)$ definiert als

$$\Pi^n(u) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n.$$

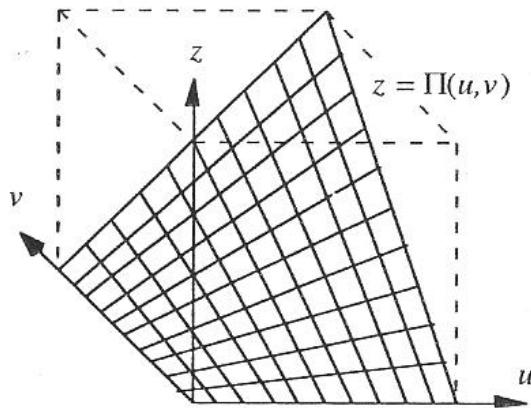


Abbildung 2.2: Graph der Produktcopula $\Pi^2(u, v)$, Quelle: [31, Seite 10]

Für den 2-dimensionalen Fall wird der Graph der Produktcopula $\Pi^2(u, v)$ in Abbildung 2.2 dargestellt.

Lemma 2.5.2. Sei (X_1, \dots, X_n) ein Vektor mit stetigen Zufallsvariablen mit Copula C . X_1, \dots, X_n sind genau dann unabhängig, falls $C = \Pi^n$ gilt.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Sklar's Theorem und der Tatsache, dass die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n genau dann unabhängig sind, falls $H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ gilt. \square

Das folgende Lemma beschreibt die Invarianz der Copula unter streng monotonen Transformationen der Zufallsvariablen. Diese Eigenschaft werden wir in dieser Arbeit noch öfter benutzen.

Lemma 2.5.3. [10, Theorem 2.6] Sei $(X_1, \dots, X_n)^T$ ein Vektor mit stetigen Zufallsvariablen mit Copula C , und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seien streng monoton steigende Funktionen auf $\text{Ran}X_1, \dots, \text{Ran}X_n$. Dann gilt $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ hat ebenfalls Copula C .

Beweis. Seien F_1, \dots, F_n die Verteilungsfunktionen von X_1, \dots, X_n und seien G_1, \dots, G_n die Verteilungsfunktionen von $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$. Der Vektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ habe die Copula C und $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ habe die Copula C_α . Da die α_k streng monoton steigend für jedes k sind, gilt $G_k(x) = \mathbb{P}[\alpha_k(X_k) \leq x] = \mathbb{P}[X_k \leq \alpha_k^{-1}(x)] = F_k(\alpha_k^{-1}(x)), \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} C_\alpha(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= \mathbb{P}[\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)] \\ &= C(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))) \\ &= C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

Da die X_1, \dots, X_n stetig sind, gilt $\text{Ran}G_1 = \dots = \text{Ran}G_n = [0, 1]$. Daraus folgt $\text{Dom}C_\alpha = \text{Dom}C = [0, 1]^n$. \square

Im nächsten Lemma geht es um die Veränderung der Copula bei streng monoton fallenden Transformationen.

Lemma 2.5.4. [10, Theorem 2.7] Sei $(X_1, \dots, X_n)^T$ ein Vektor mit stetigen Zufallsvariablen mit Copula C_{X_1, \dots, X_n} . Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ streng monotone Funktionen auf $\text{Ran}X_1, \dots, \text{Ran}X_n$. Weiter gehöre zum Vektor $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ die Copula $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$, und α_k sei streng monoton fallend für ein $k \in \{1, \dots, n\}$. O.B.d.A. sei $k = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_1, \dots, u_n) &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_2, \dots, u_n) \\ &\quad - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(1 - u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Beweis. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n haben die Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n und $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$ haben die Verteilungsfunktionen G_1, \dots, G_n . Es gilt

$$\begin{aligned} &C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) \\ &= \mathbb{P}[\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 > \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n] \\ &= \mathbb{P}[\alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n] - \mathbb{P}[X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n] \\ &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) \\ &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(1 - G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)), \end{aligned}$$

woraus die Gleichung direkt folgt. \square

Durch die rekursive Benutzung dieser beiden Lemmata können wir für streng monotone $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Copula $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$ mithilfe der Copula C_{X_1, \dots, X_n} und ihren tieferdimensionalen Randverteilungen vollständig beschreiben.

Beispiel 2.5.5. Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Vektor mit stetigen Zufallsvariablen mit Copula C_{X_1, X_2} . Seien α_1, α_2 streng monotone fallende Funktionen auf $\text{Ran}X_1, \text{Ran}X_2$. Weiter gehöre zum Vektor $(\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2))^T$ die Copula $C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= C_{\alpha_2(X_2)}(u_2) - C_{X_1, \alpha_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) \\ &= u_2 - C_{X_1}(1 - u_1) + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2) \\ &= u_2 + u_1 - 1 + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2) \end{aligned}$$

2.6 Überlebenscopula

In diesem Abschnitt werden die Überlebenscopula und die Überlebensfunktion einer Copula definiert und ihr Zusammenhang verdeutlicht. Dies wird zunächst für den zweidimensionalen

Fall gemacht, da die Unterschiede der Begriffe so leichter nachzuvollziehen sind. Dazu zunächst einige Definitionen.

Definition 2.6.1. (Überlebensfunktionen) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , so ist die *Überlebensfunktion* \bar{F} definiert als

$$\bar{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$$

Für ein Paar von Zufallsvariablen (X, Y) mit gemeinsamer Verteilungsfunktion H ist die *gemeinsame Überlebensfunktion* gegeben durch

$$\bar{H}(x, y) = P[X > x, Y > y].$$

Für zwei Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungsfunktionen F und G und gemeinsamer Verteilungsfunktion H kann man mithilfe von Sklar's Theorem eine Copula C finden, welche die univariaten Verteilungsfunktionen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion verbindet. Nun wollen wir überprüfen, ob es analog dazu eine Verbindung der zwei Überlebensfunktionen \bar{F} und \bar{G} mit ihrer gemeinsamen Überlebensfunktion \bar{H} gibt. Dafür betrachten wir

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)). \end{aligned}$$

Definiert man eine Funktion $\hat{C} : I^2 \mapsto I$ durch

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$$

erhält man

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)).$$

Damit können wir die Überlebenscopula definieren:

Definition 2.6.2. (Überlebenscopula)

Sei $(X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit n -dimensionaler Verteilungsfunktion H , Copula C und stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Die *gemeinsame Überlebensfunktion* ist definiert als

$$\mathbb{P}[X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n] = \bar{H}(x_1, \dots, x_n).$$

Dann ist die Überlebenscopula \widehat{C} definiert als

$$\mathbb{P}[X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n] = \overline{H}(x_1, \dots, x_n) := \widehat{C}(\overline{F}^{-1}(x_1), \dots, \overline{F}^{-1}(x_n)).$$

Lemma 2.6.3. Die Überlebenscopula ist eine Copula.

Beweis. Sei $T(u) = 1 - u$ für $u \in I$ eine streng monoton fallende Transformation. Für $U_i \sim U(0, 1)$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $T(U_i) \sim U(0, 1)$, und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{C}_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) &= \mathbb{P}[U_1 > 1 - u_1, \dots, U_n > 1 - u_n] \\ &= \mathbb{P}[T(U_1) < u_1, \dots, T(U_n) < u_n] \\ &= C_{T(U_1), \dots, T(U_n)}(u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.6.4. Wichtig bei Überlebenscopula \widehat{C} ist, diese nicht zu verwechseln mit der gemeinsamen Überlebensfunktion \overline{C} von zwei auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen U und V mit gemeinsamer Verteilungsfunktion, bzw. Copula C :

$$\overline{C}(u, v) = P[U > u, V > v]$$

Der Zusammenhang zwischen der Überlebensfunktion einer Copula \overline{C} und der Überlebenscopula \widehat{C} ist

$$\overline{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v) = \widehat{C}(1 - u, 1 - v). \quad (2.7)$$

Es gilt, dass \overline{C} im Gegensatz zur Überlebenscopula keine Copula ist.

Am Ende dieses Abschnitts wird noch eine Aussage zur bedingten Wahrscheinlichkeit gemacht, die wir im nächsten Kapitel benötigen werden.

Bemerkung 2.6.5. Man kann die bedingte Wahrscheinlichkeit auch mithilfe der Überlebenscopula angeben:

$$P[U > u | V > v] = \frac{\overline{C}(u, v)}{1 - v} = \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v} = \frac{\widehat{C}(1 - u, 1 - v)}{1 - v}$$

2.7 Konkordanzordnung

Mit der Überlebenscopula kann man die Konkordanzordnung definieren, durch die eine Interpretation des Copula-Parameters bei Copulafamilien ermöglicht wird. Diese Ordnung stellt damit eine erste, wenn auch sehr schwache Abhängigkeitsordnung dar.

Definition 2.7.1. (Konkordanzordnung) Seien C_1 und C_2 zwei Copulas, dann ist C_1 kleiner als C_2 (geschrieben $C_1 \prec C_2$), falls

$$C_1(u) \leq C_2(u) \quad \text{und} \quad \overline{C}_1(u) \leq \overline{C}_2(u), \quad \forall u \in [0, 1]^n$$

gilt. Diese Ordnung macht eine Aussage zur Abhängigkeit der Randverteilungen einer Copula. In diesem Fall hat die Copula eine größere positive Abhängigkeit der Randverteilungen als die Copula C_1 .

Die Konkordanzordnung ist nur eine Teilordnung, da sich nicht alle Copulas mit ihr vergleichen lassen. Es gilt jedoch für alle Copulas C in Bezug auf die Fréchet-Hoeffding-Schranken

$$W^n \prec C(u) \prec M^n.$$

Bemerkung 2.7.2. Für den bivariaten Fall sind die beiden Bedingungen für die Konkordanzordnung äquivalent, denn dort besteht folgende Beziehung zwischen der Copula und ihrer gemeinsamen Überlebensfunktion:

$$\overline{C}(u_1, u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \tag{2.8}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \overline{C}_1(u_1, u_2) \leq \overline{C}_2(u_1, u_2) &\Leftrightarrow 1 - u_1 - u_2 + C_1(u_1, u_2) \leq 1 - u_1 - u_2 + C_2(u_1, u_2) \\ &\Leftrightarrow C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich folgende Formulierung formulieren.

Bemerkung 2.7.3. Es gilt $W^n \prec C \prec M^n$ für alle n -Copulas C , jedoch sind nicht alle n -Copulas untereinander vergleichbar, da dies nur eine partielle Ordnung darstellt. Es gibt jedoch total geordnete Copulafamilien, worauf wir im Späteren zurückkommen werden.

2.8 Dichte der Copulas

Copulas sind als Verteilungsfunktionen definiert. Es lassen sich aber auch Ausdrücke für die Dichte herleiten, falls diese existiert.

Jede n -Copula C lässt sich für $u = (u_1, \dots, u_n)$ aufsplitten in einen absolut stetigen Teil A_C und einen singulären Teil S_C

$$C(u) = A_C(u) + S_C(u),$$

wobei

$$A_C(u) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} C(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n \text{ und } S_C(u) = C(u) - A_C(u).$$

Die partiellen Ableitungen existieren nach Satz 2.1.18 fast überall innerhalb I^n . Im Gegensatz zu multivariaten Verteilungsfunktionen sind die Randverteilungen der Copulas immer stetig. Deshalb haben Copulas keine Punkte in I^n mit einem positiven C -Maß.

Definition 2.8.1. (Copula-Dichte) Sei F eine multivariate, absolut stetige Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit absolut stetiger Copula C , also $C = A_C$. Weiter sei f die gemeinsame Dichte von F und f_i seien die Dichten der stetigen Randverteilungen F_i . Dann ist die gemeinsame Dichte f definiert als

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \\ &= \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Substituiert man nun $u_i = F_i(x_i)$, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= c(u_1, \dots, u_n) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i). \end{aligned}$$

Hierbei wird

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

als die *Copula-Dichte* definiert.

Die gemeinsame Dichte f ist also das Produkt der Copuladichte und der gemeinsamen Dichte der Zufallsvariablen im Falle der Unabhängigkeit. Die Copula-Dichte spielt eine wichtige Rolle bei der Schätzung der Copula-Modelle mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Bemerkung 2.8.2. Mit Copulas lassen sich auch Ausdrücke für bedingte Verteilungsfunktionen angeben. Da die partiellen Ableitungen einer Copula nach Satz 2.1.18 fast überall existieren, hat ein Zufallsvektor (U_1, \dots, U_n) mit Copula C folgende Ableitungen k -ter Ordnung:

$$C^k(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^k C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_k}$$

Seien Werte der Zufallsvariablen U_1, \dots, U_{k-1} gegeben. Die Dichte der bedingten Verteilung

für U_k sei gegeben durch

$$f^{U_k|U_1, \dots, U_n}(s|u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\partial^k C^k(s, u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial s \partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C^{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}}.$$

Damit gilt für die bedingte Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen U_k für $k \in \{2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} C^k(u_k|u_1, \dots, u_{k-1}) &= P[U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}] \\ &= \int_0^{u_k} f^{U_k|U_1, \dots, U_n}(s|u_1, \dots, u_{k-1}) ds \\ &= \frac{\partial^{k-1} C^k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C^{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}}. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Abhängigkeitskonzepte

Mit Copulas werden Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen beschrieben. Es gibt allerdings eine Vielzahl von Maßen, die diese Abhängigkeiten messen. In diesem Abschnitt wird zunächst Pearson's Korrelationskoeffizient eingeführt und seine Nachteile aufgezeigt. Danach werden zwei Rangkorrelationskoeffizienten vorgestellt, die diese Nachteile nicht mehr haben. Am Ende wird in diesem Abschnitt die Tail Dependence behandelt, welche die asymptotische Abhängigkeit von Zufallsvariablen beschreibt.

3.1 Korrelation

Das wohl bekannteste Maß der Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen ist Pearson's Korrelationskoeffizient. Dieser ist ein Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen. Er nimmt Werte im Intervall $[-1, 1]$ an. Nimmt der Korrelationskoeffizient den Wert 0 an, hängen die beiden Zufallsvariablen überhaupt nicht linear voneinander ab. Allerdings können diese dessen ungeachtet in nicht-linearer Weise voneinander abhängen.

Definition 3.1.1. Sei $(X, Y)^T$ ein Vektor mit Zufallsvariablen X und Y mit positiven Varianzen $Var(X)$ und $Var(Y)$. Der *Korrelationskoeffizient* für $(X, Y)^T$, oder auch die *Korrelation* genannt, entsteht durch geeignete Normierung der Kovarianz $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Mit der Division der Kovarianz durch die Wurzel der Varianzen erreicht man eine Normierung des Korrelationskoeffizienten, so dass die Ungleichung $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$ erfüllt ist. Dies gilt, da $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$.

Im Falle unabhängiger Zufallsvariablen X und Y gilt $r(X, Y) = 0$, denn $Cov(X, Y) = 0$. Die Korrelation ist ein Maß der linearen Abhängigkeit.

Im nächsten Lemma wird die Linearitätseigenschaft des Korrelationskoeffizienten beschrieben. Diese birgt den Vorteil, dass man den Korrelationskoeffizienten an bestimmte Gegebenhei-

ten anpassen kann.

Lemma 3.1.2. Für zwei Zufallsvariablen X und Y und $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \gamma \neq 0$ gilt:

$$r(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sign}(\alpha \cdot \gamma)r(X, Y).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} r(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) &= \frac{\text{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta)}{\sqrt{\text{Var}(\alpha X + \beta)}\sqrt{\text{Var}(\gamma Y + \delta)}} \\ &= \frac{\alpha\gamma\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\alpha^2\text{Var}(X)}\sqrt{\gamma^2\text{Var}(Y)}} = \text{sign}(\alpha, \gamma)r(X, Y) \end{aligned}$$

□

Daher ist die Korrelation invariant unter streng monoton steigenden linearen Transformationen. Dies gilt jedoch nicht für nichtlineare Transformationen.

In Bezug auf Verteilungsfunktionen ergibt sich für Pearson's r :

Lemma 3.1.3. Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen, Randverteilungen F_1 und F_2 und gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Dann lässt sich Pearson's Korrelationskoeffizienten darstellen als

$$r(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)] dx_1 dx_2. \quad (3.1)$$

Beweis. Die Kovarianz lässt sich nach dem Verschiebungssatz von Steiner darstellen als

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Daher genügt es zu zeigen, dass

$$E(XY) - E(X)E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)] dx_1 dx_2 \quad (3.2)$$

gilt. Seien dazu $(X_1, Y_1)^T$ und $(X_2, Y_2)^T$ zwei unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Dann gilt

$$\begin{aligned} 2(E(X_1Y_1) - E(X_1)E(Y_1)) &= E((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)) \\ &= E \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{I}_{\{u \leq X_1\}} - \mathbb{I}_{\{u \leq X_2\}})(\mathbb{I}_{\{v \leq Y_1\}} - \mathbb{I}_{\{v \leq Y_2\}}) dudv. \\ &= E \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{I}_{\{u \leq X_1\}}\mathbb{I}_{\{v \leq Y_1\}} + \mathbb{I}_{\{u \leq X_2\}}\mathbb{I}_{\{v \leq Y_2\}} \\ &\quad - \mathbb{I}_{\{u \leq X_2\}}\mathbb{I}_{\{v \leq Y_1\}} - \mathbb{I}_{\{u \leq X_1\}}\mathbb{I}_{\{v \leq Y_2\}}) dudv \end{aligned}$$

$$= 2E \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{I}_{\{u \leq X_1\}} \mathbb{I}_{\{v \leq Y_1\}} - \mathbb{I}_{\{u \leq X_2\}} \mathbb{I}_{\{v \leq Y_1\}}) dudv,$$

da $(X_1, Y_1)^T$ und $(X_2, Y_2)^T$ unabhängig identisch verteilt sind. Da die Kovarianz existiert sind $E|XY|$, $E|X|$ und $E|Y|$ endlich. Daher kann man den Erwartungswert unter das Integral ziehen, auf beiden durch 2 teilen und man erhält die Behauptung. \square

Bemerkung 3.1.4. Substituiert man in Gleichung (3.1) $u_i = F_i(x_i)$, bzw. $x_i = F_i^{-1}(u_i)$ für $i \in \{1, 2\}$, so gilt

$$r(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} \int_0^1 \int_0^1 [C(u_1, u_2) - u_1 u_2] dF_1^{-1}(u_1) dF_2^{-1}(u_2).$$

Definition 3.1.5. (Korrelationsmatrix) Betrachtet man nun mehrdimensionale Zufallsvariablen $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$, so lassen sich alle paarweisen Kovarianzen und Korrelationen in $n \times n$ Matrizen $Cov(X, Y)$ und $r(X, Y)$ darstellen. Solange alle Varianzen endlich sind, gilt

$$Cov(X, Y)_{i,j} := Cov(X_i, Y_j) \text{ und } r(X, Y)_{i,j} := r(X_i, Y_j), 1 \leq i, j \leq n.$$

Diese Matrizen sind symmetrisch. Die paarweisen Korrelationen eines einzelnen Zufallsvektors erhält man, indem man $Y = X$ setzt:

$$r(X) := r(X, X), \text{ bzw. } Cov(X) = Cov(X, X),$$

wobei $Cov(X, X)$ gerade die Kovarianzmatrix von X ist. $r(X)$ heißt in diesem Fall die *Korrelationsmatrix*.

Der folgende Satz zeigt die Grenzen der Korrelation auf.

Satz 3.1.6. [11, Theorem 4] Sei $(X, Y)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungen F_1 und F_2 und $0 < \text{Var}(X), \text{Var}(Y) < \infty$, so gilt:

1. Die Menge der möglichen Korrelationen ist das abgeschlossene Intervall $[r_{min}, r_{max}]$, mit $r_{min} < 0 < r_{max}$.
2. Falls X und Y kontramoton sind wird der Wert r_{min} angenommen. Sind X und Y komoton, so wird der Wert r_{max} angenommen.

Beweis. Ad 2:

Die Kovarianz lässt sich für eine gemeinsame Verteilungsfunktion F darstellen als

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, y) - F_1(x)F_2(y)] dx dy.$$

Die Kovarianz wird daher dann minimal, wenn der Integrand minimal wird. Dieser wird minimal, falls $F(x, y)$ minimal wird, und das ist der Fall, falls X und Y kontramoton sind. Analog wird die Kovarianz maximal, falls X und Y komoton sind. Dies gilt auch für die Korrelation r , da die Varianzen von X und Y unverändert bleiben, und die Korrelation somit nur von der Kovarianz abhängt.

Ad 1:

Für den Fall $r = r_{max}$ sind die Zufallsvariablen komoton, und müssen daher die Copula M^2 haben. Das $r_{max} \geq 0$ gilt, ist klar. Weiter gilt $r_{max} > 0$, denn ansonsten müsste

$$\min\{F_1(x), F_2(y)\} = F_1(x)F_2(y), \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

gelten. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass die Randverteilungen nichtdegeneriert sind, da die Varianzen größer 0 sind.

Analog gilt für den Fall $r = r_{min}$, dass die Verteilungsfunktion W^2 vorliegt. Dann gilt $r_{min} < 0$, denn ansonsten müsste

$$\max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\} = F_1(x)F_2(y), \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

gelten, was ebenfalls die Degeneration mindestens einer Randverteilung bedeuten würde.

Für ein $\lambda \in [0, 1]$ hat die Mischung der beiden Extremverteilungen

$$\lambda \cdot \max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{F_1(x), F_2(y)\}$$

die Korrelation $\lambda \cdot r_{min} + (1 - \lambda) \cdot r_{max}$. Auf diese Weise kann man gemeinsame Verteilungen mit beliebigen r innerhalb $[r_{min}, r_{max}]$ konstruieren. \square

Am folgenden Beispiel kann man erkennen, dass das Intervall r_{min}, r_{max} beliebig klein werden kann.

Beispiel 3.1.7. Seien $X \sim LN(0, 1)$ und $Y \sim LN(0, \sigma^2)$ zwei log-normalverteilte Zufallsvariablen mit $\sigma > 0$.

Für r_{min} und r_{max} gilt:

$$r_{min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}} \text{ und } r_{max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e - 1)(e^{\sigma^2} - 1)}}, \quad (3.3)$$

was zum Beispiel in [24, Seite 20] gezeigt wird.

Für r_{min} und r_{max} gilt daher $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} r_{min} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} r_{max} = 0$, was in Abbildung 3.1 dargestellt wird.

In diesem Beispiel wird klar, dass zwei Zufallsvariablen mit beliebig kleinem Korrelationskoeffizienten trotzdem ko- oder kontamonoton sein können. Daher kann man bei kleiner Korrelation nicht auf geringe Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen schließen. Die Nachteile

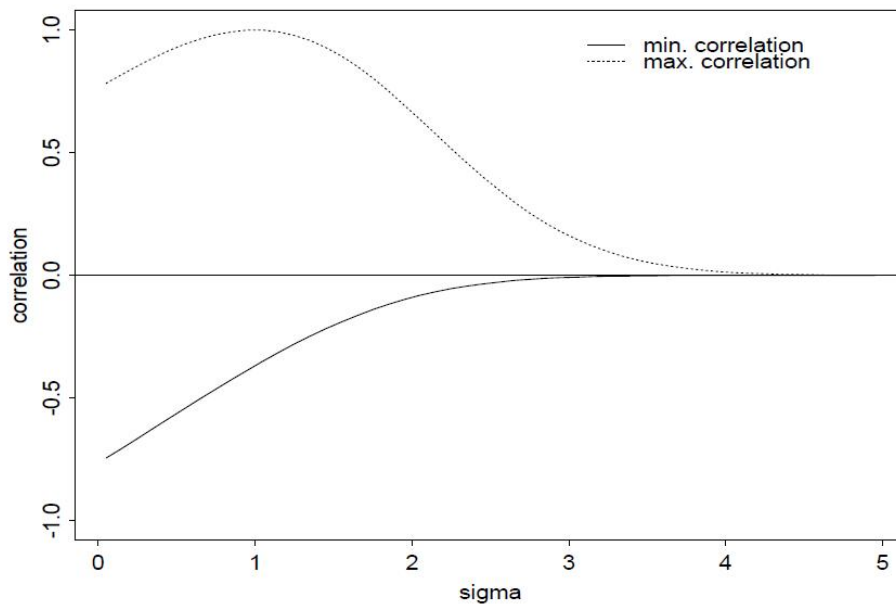


Abbildung 3.1: r_{min} und r_{max} in Abhängigkeit von σ . Quelle: [11, Seite 25]

der linearen Korrelation sind die folgenden:

- Die Korrelation nimmt ihr gesamtes Spektrum von $[-1, 1]$ nur bei gemeinsamen elliptischen und sphärischen Verteilungen an. Diese Verteilungen werden im nächsten Kapitel vorgestellt. Ein Vertreter ist die mehrdimensionale Normalverteilung.
- Korrelation ist nicht invariant unter streng monotonen Transformationen
- Die Varianzen von X und Y müssen endlich sein, denn ansonsten ist die Korrelation nicht definiert. Dies führt zu Problemen bei Verteilungen mit dicken Tails.
- Nichtlineare Zusammenhänge werden im Allgemeinen nicht erfasst.

3.2 Konkordanz

Im Folgenden geht es im Gegensatz zum Korrelationskoeffizienten um Rangkorrelationskoeffizienten. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie invariant unter streng monoton steigenden Umformungen der Variablen sind. Da dies auch eine Eigenschaft der Copulas ist, wird hier auf die Verbindung zwischen ihnen und den Abhängigkeitsmaßen näher eingegangen.

Die bekanntesten dieser Abhängigkeitsmaße sind Kendall's τ und Spearman's ρ . Andere Konkordanzmaße werden in [31] vorgestellt. Da all diese die Abhängigkeit in Form von Konkordanz messen, werden wir hier ansetzen.

Definition 3.2.1. Seien $(x, y)^T$ und $(x', y')^T$ zwei Realisierungen eines Zufallsvektors $(X, Y)^T$. $(x, y)^T$ und $(x', y')^T$ heißen *konkordant*, falls sie zur selben Zeit große, bzw. kleine Werte anneh-

men. Also falls gilt: $(x - x')(y - y') > 0$. Sie heißen *diskordant*, falls die beiden Zufallsvariablen entgegengesetzt verlaufen. Also falls $(x - x')(y - y') < 0$ ist.

Um hierbei die Beziehung zu den Copulas zu erläutern, definieren wir uns eine Konkordanzfunktion Q als Differenz der Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz zwischen zwei Zufallsvektoren.

Satz 3.2.2. [31, Theorem 5.1.1] Seien $(X, Y)^T$ und $(X', Y')^T$ unabhängige Vektoren von stetigen Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion H , bzw. H' , die die selben Randverteilungen F (von X und X') und G (von Y und Y') haben. C und C' seien die Copulas von $(X, Y)^T$ und $(X', Y')^T$, so dass $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ und $H'(x, y) = C'(F(x), G(y))$ gilt. Q sei definiert als Differenz der Wahrscheinlichkeiten von Konkordanz und Diskordanz

$$Q := \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\}. \quad (3.4)$$

Dann gilt:

$$Q = Q(C, C') = 4 \int \int_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (3.5)$$

Beweis. Da die Zufallsvariablen stetig sind, gilt:

$$\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\} = 1 - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\}$$

Daraus folgt:

$$Q = 2\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - 1 \quad (3.6)$$

Allerdings ist $\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} = \mathbb{P}\{X > X', Y > Y'\} + \mathbb{P}\{X < X', Y < Y'\}$, und diese Wahrscheinlichkeiten können mit Integration über die Verteilungen über einen der Zufallsvektoren $(X, Y)^T$ oder $(X', Y')^T$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X > X', Y > Y'\} &= \mathbb{P}\{X' < X, Y' < Y\} = \int \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X' < x, Y' < y\} dC(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C'(F(x), G(y)) dC(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Mittels Substitution von $u = F(x)$ und $v = G(y)$ erhält man

$$\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} = \int \int_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v).$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X < X', Y < Y'\} &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X' > x, Y' > y\} dC(F(x), G(y)) \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - F(x) - G(y) + C'(F(x), G(y))\} dC(F(x), G(y)) \\
&= \int \int_{[0,1]^2} \{1 - u - v + C'(u, v)\} dC(u, v).
\end{aligned}$$

C ist gemeinsame Verteilungsfunktion des Vektors $(U, V)^T$ mit auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen, also gilt $E(U) = E(V) = 1/2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X < X', Y < Y'\} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v) \\
&= \int \int_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} = 2 \int \int_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v).$$

Dies eingesetzt in Satz (3.6) führt zur Behauptung. □

Korollar 3.2.3. Seien C, C' und Q wie in 3.2.2, dann gilt:

1. Q ist symmetrisch: $Q(C, C') = Q(C', C)$.
2. Q ist monoton steigend in jedem Argument. Das heißt, ist C kleiner als C' , so gilt $Q(\tilde{C}, C) \leq Q(\tilde{C}, C')$ für jede Copula \tilde{C} .

Beweis.

1.
$$\begin{aligned}
Q(C, C') &= \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\} \\
&= \mathbb{P}\{(X' - X)(Y' - Y) > 0\} - \mathbb{P}\{(X' - X)(Y' - Y) < 0\} \\
&= Q(C', C)
\end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned}
Q(\tilde{C}, C) &= 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) d\tilde{C}(u, v) - 1 \\
&\leq 4 \int \int_{[0,1]^2} C'(u, v) d\tilde{C}(u, v) - 1 \\
&= Q(\tilde{C}, C')
\end{aligned}$$

□

Nun wollen wir die Konkordanzfunktion für einige ausgewählte Beispiele, die wir in den folgenden beiden Abschnitten benötigen werden, berechnen.

Bemerkung 3.2.4. [31, Example 5.1] Sei C eine beliebige Copula, M^2 und W^2 definiert wie in 2.3.1 und Π^2 sei die Produktcopula, dann gilt

$$\begin{aligned} Q(C, C) &\in [-1, 1], & Q(C, M^2) &\in [0, 1], \\ Q(C, W^2) &\in [-1, 0], & \text{und } Q(C, \Pi^2) &\in [-1/3, 1/3]. \end{aligned}$$

Beweis. Da Q eine Differenz von zwei Wahrscheinlichkeiten ist, gilt $Q(C, C) \in [-1, 1]$.

Der Träger von M^2 ist die Diagonale $v = u$ in $[0, 1]^2$. Da die Randverteilungen von M rechteckverteilt auf $[0, 1]$ sind, gilt, falls g eine integrierbare Funktion auf $[0, 1]^2$ ist

$$\int \int_{[0,1]^2} g(u, v) dM^2(u, v) = \int_0^1 g(u, u) du.$$

Daraus ergibt sich mit Satz 3.2.2

$$Q(M^2, M^2) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \min\{u, v\} dM^2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1,$$

$$Q(M^2, W^2) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \max\{u + v - 1, 0\} dM^2(u, v) - 1 = 4 \int_{1/2}^1 (2u - 1) du - 1 = 0,$$

$$Q(M^2, \Pi^2) = 4 \int \int_{[0,1]^2} uv dM^2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 du - 1 = 1/3.$$

Der Träger von W^2 ist die Diagonale $v = 1 - u$ in $[0, 1]^2$. Daher gilt für eine auf $[0, 1]^2$ integrierbare Funktion f

$$\int \int_{[0,1]^2} f(u, v) dW^2(u, v) = \int_0^1 f(u, 1 - u) du.$$

Hieraus ergibt sich mit Satz 3.2.2

$$Q(W^2, W^2) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \max\{u + v - 1, 0\} dW^2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = -1$$

$$Q(W^2, \Pi^2) = 4 \int \int_{[0,1]^2} uv dW^2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1 - u) du - 1 = -1/3.$$

Aus diesen Gleichungen und dem zweiten Punkt vom obigen Korollar 3.2.3 folgen die Behauptungen. \square

3.3 Kendall's τ

Nachdem wir nun die Konkordanzfunktion eingeführt haben, wird nun der erste Rangkorrelationskoeffizient eingeführt. Der große Unterschied zum Korrelationskoeffizienten besteht darin, dass der Rangkorrelationskoeffizient unabhängig von den Randverteilungen ist, und somit

nur von der gemeinsamen Verteilungsfunktion abhängt. Dies führt zu einigen besonderen Eigenschaften dieses Abhängigkeitsmaßes. Zunächst beginnen wir jedoch mit der Definition von Kendall's τ .

Definition 3.3.1. Für einen Vektor aus stetigen Zufallsvariablen $(X, Y)^T$ ist Kendall's τ definiert als die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz:

$$\tau_{X,Y} := \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\},$$

wobei $(X', Y')^T$ und $(X, Y)^T$ unabhängig identisch verteilt sind. $(X', Y')^T$ und $(X, Y)^T$ haben also dieselbe gemeinsame Verteilungsfunktion.

Bemerkung 3.3.2. [31, 5.1.3] Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Dann ist Kendall's τ gegeben durch

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Dieses Integral kann man auch als Erwartungswert der Funktion $C(U, V)$ mit auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen auf $[0, 1]$ auffassen. Es gilt

$$\tau_C = 4E(C(U, V)) - 1.$$

Im Folgenden werden wir einen Schätzer für Kendall's τ einführen, wobei [18] als Grundlage dient.

Schätzer für Kendall's τ 3.3.3. Seien (X_i, Y_i) und (X_j, Y_j) unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren, und seien

$$p_c := P[(X_j - X_i)(Y_j - Y_i) > 0] \text{ und } p_d := P[(X_j - X_i)(Y_j - Y_i) < 0],$$

so erfüllt Kendall's τ die Gleichung

$$\tau = p_c - p_d.$$

Weiter seien (X_s, Y_s) für $s \in \{1, \dots, n\}$ n unabhängige Kopien des Zufallsvektors (X_i, Y_i) und

$$A_{ij} := \text{sign}(X_j - X_i) \text{sign}(Y_j - Y_i),$$

wobei sign wie gewohnt definiert ist als

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

A_{ij} nimmt die Werte a_{ij} an mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } (X_j - X_i)(Y_j - Y_i) > 0 \\ 0 & \text{für } (X_j - X_i)(Y_j - Y_i) = 0 \\ -1 & \text{für } (X_j - X_i)(Y_j - Y_i) < 0 \end{cases}$$

Damit hat diese Variable die marginale Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_{A_{ij}}(a_{ij}) = \begin{cases} p_c & \text{für } a_{ij} = 1 \\ p_d & \text{für } a_{ij} = -1 \\ 1 - p_c - p_d & \text{für } a_{ij} = 0 \end{cases} .$$

Für den Erwartungswert gilt

$$E(A_{ij}) = 1p_c - 1p_d = \tau.$$

Für unsere Stichprobe der Größe T erhalten wir insgesamt $T(T - 1)/2$ Beobachtungspaare, da $a_{ii} = 0$ und $a_{ij} = a_{ji}$. Somit haben wir für τ folgenden erwartungstreuen Schätzer, welchen man sowohl für stetige als auch für diskrete Verteilungen anwenden kann:

$$\hat{\tau} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq T} \frac{A_{ij}}{T(T - 1)} \tag{3.7}$$

Dieser Schätzer ist schwach konsistent, was in [18] bewiesen wird.

3.4 Spearman's ρ

In diesem Abschnitt wird ein zweiter Rangkorrelationskoeffizient, Spearman's ρ , vorgestellt, der ähnliche Eigenschaften wie Kendall's τ hat. Mit Spearman's ρ lässt sich eine Beziehung zum Korrelationskoeffizienten herstellen.

Wir beginnen, wie gewohnt, mit der Definition.

Definition 3.4.1. Seien $(X_1, Y_1)^T, (X_2, Y_2)^T$ und $(X_3, Y_3)^T$ drei unabhängige Zufallsvektoren mit stetiger gemeinsamer Verteilungsfunktion H mit Randverteilungen F und G und Copula C . Spearman's ρ ist definiert als die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz der Vektoren $(X_1, Y_1)^T$ und $(X_2, Y_3)^T$ minus der Wahrscheinlichkeit ihrer Diskordanz:

$$\rho_{X,Y} = 3 (\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \tag{3.8}$$

Dabei hat der Zufallsvektor $(X_1, Y_1)^T$ die Verteilungsfunktion H und $(X_2, Y_3)^T$ hat die Verteilungsfunktion $F(x)G(y)$, denn die beiden Zufallsvektoren X_2 und Y_3 sind unabhängig. Damit

lässt sich Spearman's ρ alternativ darstellen als

$$\rho_{X,Y} = 3 \cdot Q(C_{X,Y}, \Pi).$$

Bemerkung 3.4.2. Nach Bemerkung 3.2.4 gilt $Q(W^2, \Pi) = -1/3$ und $Q(M^2, \Pi) = 1/3$, und somit gilt $Q(C, \Pi) \in [-1/3, 1/3]$. Der Koeffizient "3" in der Definition 3.4.1 dient also der Normierung, so dass auch Spearman's ρ Werte in $[-1, 1]$ annimmt.

Bemerkung 3.4.3. [10, Theorem 3.4] Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C , dann ist Spearman's ρ proportional zur Differenz des Volumens der Copula C und der Produktcopula Π

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{[0,1]^2} (C(u, v) - uv) dudv. \quad (3.9)$$

Beweis. Nach (3.4) gilt

$$\rho_{X,Y} = 3Q(\Pi, C).$$

Mit (3.5) und der Unabhängigkeit von U und V bei der Produktcopula folgt

$$\rho_{X,Y} = 3(4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 1).$$

Dies lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= 12 \left(\int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv \right) - 3 \\ &= 12 \left(\int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - \frac{1}{4} \right) \\ &= 12 \left(\int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - \int \int_{[0,1]^2} uv dudv \right) \\ &= 12 \left(\int \int_{[0,1]^2} (C(u, v) - uv) dudv \right). \end{aligned}$$

□

ρ_C kann also interpretiert werden als ein Maß für die durchschnittliche Distanz einer Copula zur Produktcopula.

In der folgenden Bemerkung wird der Zusammenhang zwischen Spearman's ρ und dem Korrelationskoeffizienten verdeutlicht.

Bemerkung 3.4.4. Seien X und Y Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktionen F und G , so gilt $U = F(X)$ und $V = G(Y)$ sind auf I rechteckverteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion C . Da $E(U) = E(V) = 1/2$ und $Var(U) = Var(V) = 1/12$ gilt,

ergibt sich für Spearman's ρ :

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} = \rho_C &= 12 \int \int_{[0,1]^2} uv \, dC(u,v) - 3 = 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}} = r(F(X), G(Y)).\end{aligned}$$

Also ist für zwei Zufallsvariablen X und Y Spearman's ρ identisch mit dem Korrelationskoeffizienten von $F(X)$ und $G(Y)$.

Auch für Spearman's ρ werden wir nun einen Schätzer suchen, wobei hier [33] als Grundlage dient.

Schätzer für Spearman's ρ 3.4.5. Sei ein Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ gegeben. Die Berechnung eines nichtparametrischen Schätzers $\hat{\rho}$ für zwei Zufallsvariablen X_i und X_j des Zufallsvektors erfolgt mit Rangstatistiken. Es seien wieder T Realisierungen des Zufallsvektors $(X_i, X_j)^T$ gegeben. R_{it} sei der Rang von X_{it} in der aufsteigend geordneten Folge X_{i1}, \dots, X_{iT} . Weiter seien $\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it}$, bzw. $\bar{R}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{jt}$ die arithmetischen Mittel der Ränge von X_i , bzw. X_j , also $\bar{R}_i = \bar{R}_j = \frac{T+1}{2}$. Der Schätzer wird nun als Korrelationskoeffizient der Ränge der Zufallsvariablen X_i und X_j berechnet:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= r(R_{it}, R_{jt}) \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)^2 \sum_{t=1}^T (R_{jt} - \bar{R}_j)^2}} \\ &= \frac{12}{T(T^2 - 1)} \sum_{t=1}^T \left(R_{it} - \frac{1}{2}(T+1) \right) \left(R_{jt} - \frac{1}{2}(T+1) \right) \\ &= \frac{12}{T(T^2 - 1)} \sum_{t=1}^T R_{it} R_{jt} - 3 \frac{T+1}{T-1}\end{aligned}$$

Auch dieser Schätzer ist erwartungstreu und schwach konsistent, was in [18] bewiesen wird.

3.5 Konkordanzmaße

In diesem Abschnitt wird zunächst der Begriff des Konkordanzmaßes eingeführt. Diese ist ein Abhängigkeitsmaß, das bestimmte Forderungen erfüllen. Es wird gezeigt, dass Kendall's τ und Spearman's ρ zu den Konkordanzmaßen zählen. Grundlage dieses Kapitels bildet [31].

Definition 3.5.1. Ein Abbildung κ , die je zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Copula C eine reelle Zahl zuordnet heißt *Konkordanzmaß*, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Es gilt $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ und $\kappa_{X,-X} = -1$.

2. Es gilt $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
3. Falls X und Y unabhängig sind, gilt $\kappa_{X,Y} := \kappa_{\pi} = 0$.
4. Es gilt $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.
5. Haben $(X, Y)^T$ und $(X', Y')^T$ die gleiche Verteilung, so gilt $\kappa_{X,Y} = \kappa_{X',Y'}$.
6. Für zwei Copulas C und C' mit $C \prec C'$ gilt $\kappa_C \leq \kappa_{C'}$.
7. Falls $\{(X_n, Y_n)\}$ eine Folge von stetigen Zufallsvariablen mit Copulas C_n ist, und falls $\{C_n\}$ punktweise gegen eine Copula C konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Falls diese Eigenschaften alle erfüllt sind, also ein Konkordanzmaß vorliegt, kann man aus diesen sieben Eigenschaften noch drei weitere folgern.

Satz 3.5.2. Sei κ ein Konkordanzmaß für stetige Zufallsvariablen X und Y .

1. Falls Y fast sicher eine streng monoton steigende Funktion von X ist, gilt $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$.
2. Falls Y fast sicher eine streng monoton fallende Funktion von X ist, gilt $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$.
3. Falls α und β fast sicher streng monoton steigende Funktionen auf $\text{Ran}X$ und $\text{Ran}Y$ sind, gilt: $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.

Beweis. 1. Da X und Y komonoton sind, haben sie nach Satz 2.4.4 die Copula M^2 . Daher ist κ maximal und es gilt $\kappa_{X,Y} = \kappa_{M^2} = 1$.

2. In diesem Fall sind X und Y kontramonoton. Deshalb folgt aus Satz 2.4.5, dass die beiden Zufallsvariablen die gemeinsame Verteilung W^2 haben. Das bedeutet, κ ist minimal und nimmt somit den Wert -1 an.

3. Da Copulas nach Satz 2.5.3 invariant unter streng monoton steigenden Umformungen ihrer Zufallsvariablen sind, gilt

$$\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{C(\alpha(X),\beta(Y))} = \kappa_{C(X,Y)} = \kappa_{X,Y}.$$

□

Der große Vorteil eines Konkordanzmaßes gegenüber der Korrelation ergibt sich aus dem dritten Punkt. Konkordanzmaße sind genau wie Copulas invariant bezüglich streng monoton steigender Variablentransformationen. Sie hängen somit nicht von der Randverteilung an sich ab, sondern von der Abhängigkeitsstruktur zwischen den Randverteilungen.

Satz 3.5.3. [31] Falls X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C sind genügen Kendall's τ und Spearman's ρ den Eigenschaften aus Definition 3.5.1 für Konkordanzmaße.

Beweis. 1. Nach den Sätzen 2.4.4 und 2.4.5 und den Bemerkungen 3.3.2 zu Kendall's τ und 3.4.3 zu Spearman's ρ gilt:

$$\begin{aligned}\tau_{X,X} &= Q(M^2, M^2) \stackrel{3.2.4}{=} 1, \\ \tau_{X,-X} &= Q(W^2, W^2) \stackrel{3.2.4}{=} -1, \\ \rho_{X,X} &= 3Q(M^2, \Pi^2) \stackrel{3.2.4}{=} 1 \text{ und} \\ \rho_{X,-X} &= 3Q(W^2, \Pi^2) \stackrel{3.2.4}{=} -1.\end{aligned}$$

Nach dem zweiten Teil von 3.2.3 folgt nun, dass $-1 \leq \tau_{X,Y}, \rho_{X,Y} \leq 1$.

2. Die Symmetrieeigenschaft für τ und ρ zeigt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\tau(X, Y) &= \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= \mathbb{P}[(Y_1 - Y_2)(X_1 - X_2) > 0] - \mathbb{P}[(Y_1 - Y_2)(X_1 - X_2) < 0] = \tau(Y, X) \\ \rho(X, Y) &= 3(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \\ &= 3(\mathbb{P}[(Y_1 - Y_3)(X_1 - X_2) > 0] - \mathbb{P}[(Y_1 - Y_3)(X_1 - X_2) < 0]) = \rho(Y, X).\end{aligned}$$

3. Nach 3.2.2 gilt

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \int \int_{[0,1]^2} uv \, d\Pi(u, v) - 1.$$

Da die beiden Randverteilungen von $\pi(u, v)$ unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned}4 \int \int_{[0,1]^2} uv \, d\Pi(u, v) - 1 &= 4 \int \int_{[0,1]^2} uv \, dudv - 1 \\ &= 4 \int \int_{[0,1]^2} \frac{1}{2}v \, dv - 1 = 0.\end{aligned}$$

Daher gilt $\tau_{\Pi} = Q(\Pi, \Pi) = 0$ und $\rho_{\Pi} = 3Q(\Pi, \Pi) = 0$.

4. Die Bedingung $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$ zeigt man für Kendall's τ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\tau_{-X,Y} &= \mathbb{P}[((-X_1) - (-X_2))(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[((-X_1) - (-X_2))(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(-1)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(-1)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= \tau_{X,-Y} = (-1)\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - (-1)\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= -\tau_{X,Y}\end{aligned}$$

Für Spearman's ρ gilt:

$$\begin{aligned}\rho_{-X,Y} &= 3(\mathbb{P}[((-X_1) - (-X_2))(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[((-X_1) - (-X_2))(Y_1 - Y_3) < 0]) \\ &= 3(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(-1)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(-1)(Y_1 - Y_3) < 0]) \\ &= \rho_{X,-Y} = 3((-1)\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - (-1)\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \\ &= -\rho_{X,Y}\end{aligned}$$

5. Da $(X, Y)^T$ und $(X', Y')^T$ die gleiche Verteilung haben, haben sie die gleiche Copula. Da Kendall's τ und Spearman's ρ von dieser abhängen, folgt die Aussage.
6. Für $C \prec C'$ gilt mit dem zweiten Teil des Satzes 3.2.3

$$\begin{aligned}\tau_C &= Q(C, C) \leq Q(C', C') = \tau_{C'}, \text{ und} \\ \rho_C &= 3Q(C, \Pi) \leq 3Q(C', \Pi) = \rho_{C'}.\end{aligned}$$

7. Die Lipschitzbedingung 2.1.17 impliziert, dass jede Folge von Copulas gleichmäßig stetig ist. Daher ist die Konvergenz von C_n gleichmäßig. Somit ist Punkt 7 gezeigt. □

Da wir zeigen konnten, dass sowohl Kendall's τ als auch Spearman's ρ Konkordanzmaße sind, gelten für sie auch die drei Punkte aus dem Satz 3.5.2. Damit haben diese beiden Rangkorrelationskoeffizienten gegenüber der Korrelation folgende Vorteile:

- Sie liefern immer sinnvoll interpretierbare Ergebnisse, nicht nur bei normalverteilten Zufallsvektoren.
- Sie sind invariant unter monoton steigenden Transformationen der Zufallsvariablen.
- Sie benötigen keine endlichen Varianzen der Zufallsvariablen.
- Es werden auch nichtlineare Zusammenhänge erfasst.

3.6 Tail Dependence

Beim Konzept der Tail Dependence geht es um die Konkordanz in den Tails der gemeinsamen Verteilung. Geometrisch gesehen geht es dabei um die Stärke der Abhängigkeit im oberen rechten und im unteren linken Quadranten einer bivariaten Verteilung. Die Tail Dependence ist daher relevant beim Untersuchen von extremen Ereignissen.

Definition 3.6.1. (Koeffizienten der oberen, bzw. unteren Tail Dependence)

Sei $(X, Y)^T$ ein Vektor aus zwei stetigen Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F und G .

Die beiden Zufallsvariablen heißen asymptotisch abhängig (bzw. unabhängig) im oberen Tail, falls der Koeffizient der oberen Tail Dependence

$$\lambda_U := \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}[X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u)]$$

existiert und $\lambda_U > 0$ (bzw. $\lambda_U = 0$) gilt.

X und Y heißen asymptotisch abhängig (bzw. unabhängig) im unteren Tail, falls der Koeffizient der unteren Tail Dependence

$$\lambda_L := \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P}[X < F^{-1}(u) | Y < G^{-1}(u)]$$

existiert und $\lambda_L > 0$ (bzw. $\lambda_L = 0$).

Bezüglich Copulas gilt Folgendes für die Tail Dependence.

Lemma 3.6.2. Sei C eine Copula, so dass

$$\lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

gegen ein $\lambda_U \in (0, 1]$ konvergiert, dann hat C obere Tail Dependence. Konvergiert der Limes gegen 0, so hat C obere Tail Independence.

Sei C eine bivariate Copula C , so dass

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

gegen ein $\lambda_L \in (0, 1]$, so hat C untere Tail Dependence. Konvergiert der Limes gegen 0, so hat C keine untere Tail Dependence.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Bemerkung 2.6.5. □

Bemerkung 3.6.3. Die Tail Dependence hängt also nicht von Randverteilungen, sondern nur von der Copulafunktion ab. Daher überträgt sich die Invarianz bezüglich streng monoton wachsender Transformationen von der Copula auf die Tail Dependence.

Satz 3.6.4. [4, Theorem 3.10] Für die Überlebenscopula \widehat{C} in Bezug auf die Copula C gilt für die Koeffizienten der Tail Dependence

$$\bar{\lambda}_U = \lambda_L, \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}_L = \lambda_U.$$

Beweis. Für die Überlebenscopula \widehat{C} gilt nach ihrer Definition

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_U &= \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + \widehat{C}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \nearrow 1} \frac{C(1 - u, 1 - u)}{1 - u} = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lambda_L \quad \text{und} \\ \bar{\lambda}_L &= \lim_{u \searrow 0} \frac{\widehat{C}(u, u)}{u} = \lim_{u \searrow 0} \frac{2u - 1 + C(1 - u, 1 - u)}{u} = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lambda_U\end{aligned}$$

□

Dies gilt ebenfalls für den multivariaten Fall, denn für die Berechnung der Tail Dependence Koeffizienten werden die bivariaten Randverteilungen verwendet, und es gilt der Satz 3.6.4 ebenfalls, wie folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 3.6.5. Sei \widehat{C} die Überlebenscopula in Bezug auf die Copula C , so gilt

$$\widehat{C}(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_i + u_j - 1 + C(1, \dots, 1, 1 - u_i, 1, \dots, 1, 1 - u_j, 1, \dots, 1).$$

Daher gilt für die Tail Dependence Indizes der Copulas C und \widehat{C}

$$\lambda_{U_{i,j}} = \bar{\lambda}_{L_{i,j}} \quad \text{und} \quad \lambda_{L_{i,j}} = \bar{\lambda}_{U_{i,j}}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Kapitel 4

Elliptische Copulas

Die Klasse der elliptischen Verteilungen liefert eine große Menge an gemeinsamen Verteilungsfunktionen, welche die schönen Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung besitzen. Elliptische Copulas sind die Copulas der elliptischen gemeinsamen Verteilungsfunktionen. Diese Copulas ermöglichen eine einfache Berechnung der Rangkorrelationskoeffizienten und der Tail Dependence und sind einfach zu simulieren. Grundlage dieses Kapitels ist [10].

4.1 Definition

Um eine Definition für die elliptische Verteilung geben zu können, führen wir zunächst die charakteristische Funktion ein. Die charakteristische Funktion stellt im Wesentlichen die Verallgemeinerung der Fouriertransformation auf Zufallsvariable dar.

Definition 4.1.1. Die *charakteristische Funktion* $\varphi_X : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\varphi_X(s) := E[\exp(is^T X)], s \in \mathbb{R}^n.$$

Eine charakteristische Funktion charakterisiert die Verteilung der zugehörigen Zufallsvariable vollständig. Zwei Zufallsvariablen mit der gleichen charakteristischen Funktion haben auch die gleiche Verteilung. Es lässt sich elementar nachrechnen, dass folgende Eigenschaften gelten:

- $|\Phi_X(z)| \leq 1$
- $\Phi_X(-u) = \overline{\Phi_X(u)}$.

Definition 4.1.2. Sei X ein n -dimensionaler Zufallsvektor, $\mu \in \mathbb{R}^n$, und sei Σ eine positiv semidefinite, symmetrische $n \times n$ -Matrix. Wenn die charakteristische Funktion $\varphi_{X-\mu}(t)$ von $X - \mu$ die Form

$$\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t)$$

hat, so hat X eine **elliptische Verteilung** mit Parametern μ , Σ , und ϕ . Die Familie aller n -dimensionalen elliptisch verteilten Zufallsvektoren mit diesen Parametern bezeichnet man mit $E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, wobei man $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ den *charakteristischen Generator* nennt.

Äquivalent dazu kann man elliptische Verteilungen definieren als:

Satz 4.1.3. [12] Der Zufallsvektor X ist genau dann elliptisch verteilt mit Parametern μ , Σ und ϕ , wobei $\text{Ran}\Sigma = k$ gilt, wenn es eine von U unabhängige Zufallsvariable $R > 0$ und eine $n \times k$ Matrix A mit $AA^T = \Sigma$ gibt, so dass sich X darstellen lässt als

$$X \stackrel{d}{=} \mu + RAU.$$

U ist hierbei ein k -dimensionaler Zufallsvektor, welcher gleichförmig auf der Hypersphäre $\{z \in \mathbb{R}^k \mid z^T z = 1\}$ verteilt ist.

Beweis. Die Äquivalenz und die Beziehung zwischen R und ϕ wird in [12, Seite 31+32] gezeigt. \square

Hierzu zunächst ein Beispiel, um die Funktion des charakteristischen Generators zu verdeutlichen.

Beispiel 4.1.4. Sei X ein n -dimensionaler Zufallsvektor mit unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen, also $X \sim N_n(0, I_n)$, wobei I_n die n -dimensionale Einheitsmatrix darstellt). Da die $X_i \sim N(0, 1)$ unabhängig sind, und da $\exp(-t^2/2)$ die charakteristische Funktion der X_i ist, gilt für die charakteristische Funktion von X

$$\varphi_X(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t_1^2 + \dots + t_n^2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^T t\right).$$

Also folgt $X \sim E_n(0, I_n, \phi)$ mit $\phi(u) = \exp(-u/2)$

4.2 Wichtige Eigenschaften

Als Erstes wird eine besondere Eigenschaft der normalverteilten Zufallsvariablen aufgezeigt.

Bemerkung 4.2.1. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein elliptisch verteilter Zufallsvektor für welchen gilt $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$. Wenn Σ eine Diagonalmatrix ist und X eine endliche Kovarianzmatrix hat, so sind die X_1, \dots, X_n unkorreliert. Aus der Unkorreliertheit folgt nur bei Normalverteilungen die Unabhängigkeit der X_1, \dots, X_n .

Es folgt eine Bemerkung zur Eindeutigkeit der elliptischen Verteilungen.

Bemerkung 4.2.2. [12, Theorem 2.15] Für einen elliptisch verteilten Zufallsvektor X mit $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ sind Σ und ϕ nicht eindeutig definiert.

Für eine zweite Darstellung $X \sim E_n(\mu^*, \Sigma^*, \phi^*)$ gilt

$$\mu = \mu^*, \quad \Sigma = c\Sigma^*, \quad \phi(\cdot) = \phi^*(\cdot/c).$$

für eine Konstante $c > 0$.

Definition 4.2.3. Die Copula einer elliptischen Verteilung heißt *elliptische Copula*.

Satz 4.2.4. Sei X eine elliptisch verteilte Zufallsvariable. Dann gibt es eine Parametrisierung von dieser Zufallsvariablen $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, so dass $Cov(X) = \Sigma$ gilt.

Dies wird mithilfe von Bemerkung 4.2.2 und Satz 4.1.3 in [10, Seite 23] gezeigt.

Korollar 4.2.5. Da eine elliptische Verteilungsfunktion durch ihre Parameter μ , Σ und ϕ eindeutig bestimmt ist, ist die Copula eines nichtdegenerierten, elliptisch verteilten Zufallsvektors durch die Korrelationsmatrix R und ϕ eindeutig bestimmt.

Der nächste Satz macht zusammen mit dem darauf folgendem Korollar Aussagen zu den Randverteilungen der elliptischen Verteilungen.

Satz 4.2.6. [10, Theorem 5.2] Sei $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ und sei B eine $q \times n$ -Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^q$. Dann gilt

$$b + BX \sim E_q(b + B\mu, B\Sigma B^T, \phi).$$

Beweis. Nach dem Satz 4.1.3 hat $b + BX$ die stochastische Darstellung

$$b + BX =_d b + B\mu + RBAU,$$

mit positiver Zufallsvariable R und einer gleichförmig auf der Einheitshypersphäre verteilten Zufallsvariable U . Damit folgt die Behauptung direkt. \square

Korollar 4.2.7. [10, Corollary 5.1] Seien $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ und μ und Σ wie folgt zerlegt:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Hier sind X_1 und μ_1 zwei r -dimensionale Vektoren und X_2 und μ_2 sind zwei $n-r$ -dimensionale Vektoren. Σ_{11} ist eine $r \times r$ Matrix, Σ_{12} ist eine $r \times n-r$ Matrix, Σ_{21} ist eine $n-r \times r$ Matrix und Σ_{22} ist eine $n-r \times n-r$ Matrix. Dann gilt

$$X_1 \sim E_r(\mu_1, \Sigma_{11}, \phi), \quad X_2 \sim E_{n-r}(\mu_2, \Sigma_{22}, \phi).$$

Die Randverteilungen der elliptischen Verteilungen sind elliptisch und haben den selben charakteristischen Generator.

Im nächsten Lemma geht es um die Kombination elliptisch verteilter Zufallsvektoren.

Lemma 4.2.8. [10, Lemma 5.1] Seien $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ und $\tilde{X} \sim E_n(\tilde{\mu}, c\Sigma, \tilde{\phi})$ mit $c > 0$ zwei unabhängige, elliptisch verteilte Zufallsvektoren. Dann ist für $a, b \in \mathbb{R}$ die Kombination dieser beiden ebenfalls ein elliptischer Zufallsvektor $aX + b\tilde{X} \sim E_n(a\mu + b\tilde{\mu}, \Sigma, \phi^*)$ mit Generator $\phi^*(t) = \phi(a^2u)\tilde{\phi}(b^2cu)$.

Beweis. Nach Definition 4.1.2 gilt für alle $t \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi_{aX+b\tilde{X}-a\mu-b\tilde{\mu}}(t) &= \varphi_{a(X-\mu)}(t)\varphi_{b(\tilde{X}-\tilde{\mu})}(t) \\ &= \phi((at)^T \Sigma (at))\tilde{\phi}((bt)^T (c\Sigma)(bt)) \\ &= \phi(a^2t^T \Sigma t)\tilde{\phi}(b^2ct\Sigma t). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die elliptischen Verteilungsfunktionen kann man nur selten analytisch berechnen und daher kann man ihre Copulas nur in einzelnen Fällen explizit angeben. Einer dieser Fälle ist die Gauß-Copula.

Beispiel 4.2.9. (Gauß-Copula) Für die univariaten Standardnormalverteilung Φ und die n -variater Standardnormalverteilung Φ_R^n mit Korrelationsmatrix R ist die *Gauß-Copula* gegeben als

$$C_R^{Ga}(u) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)). \tag{4.1}$$

Für den bivariaten Fall lässt sich die Copula schreiben als

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - R_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1 - R_{12}^2)}\right) ds dt.$$

Hier bezeichnet R_{12} die Korrelation der bivariaten Normalverteilung.

Als weiterer wichtiger Vertreter der Klasse der elliptischen Copulas wird die t -Copula vorgestellt.

Beispiel 4.2.10. (t -Copula) Wir betrachten zunächst die stochastische Darstellung eines n -dimensionalen t -verteilten Zufallsvektor X . Seien $\mu \in \mathbb{R}^n$ und seien $S \sim \chi_\nu^2$ (eine Chi-Quadrat verteilte Zufallsvariable mit ν Freiheitsgraden) und $Z \sim N(0, \Sigma)$ unabhängig. Der \mathbb{R}^n -wertige Zufallsvektor X sei von der Form

$$X =_d \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z.$$

Er besitzt eine n -variate t_ν -Verteilung mit ν Freiheitsgraden, Erwartungswert μ (für $\nu > 1$) und Kovarianz Matrix $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ (für $\nu > 2$). Falls $\nu \leq 2$ gilt, so ist $Cov(X)$ nicht definiert.

Nach Sklar's Theorem gilt für die Copula von X

$$C_{\nu,R}^t(u) = t_{\nu,R}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)).$$

Hier bezeichnet $t_{\nu,R}^n$ die multivariate Verteilungsfunktion von $\sqrt{\nu}Y/\sqrt{S}$, wobei $S \sim \chi_{\nu}^2$ und $Y \sim N_n(0, R)$ unabhängig sind. t_{ν} sind Randverteilungen von $t_{\nu,R}^n$, also eindimensionale t -Verteilungen mit ν Freiheitsgraden. R bezeichne die Korrelationsmatrix.

Für den bivariaten Fall ergibt sich damit

$$C_{\nu,R}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - R_{12}^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1 - R_{12}^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} ds dt.$$

R_{12} steht an dieser Stelle wieder für die Korrelation der bivariaten t_{ν} -Verteilung für $\nu > 2$.

4.3 Kendall's τ für elliptische Verteilungen

Kendall's τ lässt sich für elliptische Copulas einfach berechnen.

Satz 4.3.1. [27, Theorem 2] Sei $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ eine elliptisch verteilte Zufallsvariable mit stetigen Verteilungsfunktionen. Für jeweils zwei Komponenten X_i, X_j mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt für Kendall's τ

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin r_{ij}.$$

wobei r_{ij} wieder den Korrelationskoeffizienten darstellt.

Beweis. Dieses Theorem ist Hauptbestandteil von [27]. Der dort zu findende Beweis ist relativ technisch. □

Dieses Resultat war schon vorher für normalverteilte Zufallsvariablen bekannt, und es konnte auch für elliptische Verteilungsfunktionen bewiesen werden, was in [27] genauer ausgeführt wird.

Interessant in diesem Zusammenhang ist, dass Kendall's τ weder direkt von der Verteilung noch vom charakteristischen Generator abhängt.

Die Copulas in diesem Abschnitt wurden anhand von Sklars Theorem gebildet. Das hat den Vorteil, dass sie einfach durch komponentenweise Transformationen der elliptischen Randverteilungen zu bekommen sind. Es gibt allerdings auch Nachteile. Ein schwerwiegender ist, dass sich elliptische Copulas höherer Dimensionen nicht als geschlossene Ausdrücke schreiben lassen.

Kapitel 5

Archimedische Copulas

Viele interessante und bekannte Copulafamilien sind archimedische Copulas. Die Betrachtung von archimedischen Copulas hat mehrere Gründe. Zum einen haben sie viele positive Eigenschaften, die sie leicht handhabbar werden lassen. Zum anderen sind diese Copulas einfach durch Generatorfunktionen zu konstruieren und es lassen sich viele unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen modellieren. Im Gegensatz zu den elliptischen Copulas haben die archimedischen alle eine geschlossene Form und sind nicht abgeleitet von Sklar's Theorem. Als Konsequenz daraus werden wir zeigen müssen, dass die multivariaten Erweiterungen der archimedischen 2-Copulas in der Tat wieder Copulas sind. Ein weiterer Nachteil der multivariaten Erweiterungen dieser Copulas ist, dass man nicht alle Parameter der Korrelationsmatrix frei wählen kann, da dort bestimmte Einträge den selben Wert haben müssen. Zuerst werden wir nun archimedische 2-Copulas definieren und dann später die multivariaten Erweiterungen konstruieren. Grundlagen für dieses Kapitel sind [10] und [33].

5.1 Definition

Eine archimedische Copula hängt von ihrem univariaten Generator ab. Um diesen definieren zu können, führen wir zunächst die Pseudo-Inverse ein.

Definition 5.1.1. Sei $\varphi : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ eine stetige, streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$. Die *Pseudo-Inverse* von φ ist die Funktion $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \mapsto [0, 1]$, welche gegeben ist durch

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{für } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \text{für } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}.$$

Bemerkung 5.1.2. Folglich ist $\varphi^{[-1]}$ stetig und monoton fallend auf $[0, \infty]$ und streng monoton

fallend auf $[0, \varphi(0)]$. Es gilt $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ auf $[0,1]$ und

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & \text{für } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \text{für } \varphi(0) \leq t \leq -\infty \end{cases}$$

Falls $\varphi(0) = \infty$, so gilt $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Der folgende Satz gibt die Bedingung für einen Generator an, um mit ihm eine Copula zu definieren.

Satz 5.1.3. [31, Theorem 4.1.4] Sei $\varphi : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$ und sei $\varphi^{[-1]}$ sei die Pseudo-Inverse von φ . Die Funktion $C : [0, 1]^2 \mapsto [0, 1]$ sei definiert durch

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (5.1)$$

Dann ist C genau dann eine Copula, wenn φ konvex ist.

Beweis. Die Schwierigkeit in diesem Beweis liegt darin zu zeigen, dass C 2-steigend ist. Die Beweisidee ist auszunutzen, dass die partiellen Ableitungen der Copula kleiner gleich 1 sind. Dies wird in [31] gezeigt. \square

Damit sind wir in der Lage die archimedische Copula zu definieren.

Definition 5.1.4. Copulas der Form (5.1) nennt man *archimedische Copulas*. Die Funktion φ heißt *Generator* der Copula. Falls $\varphi(0) = \infty$, nennt man φ einen *strikten Generator* und $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ eine strikte Copula.

Das Interessante ist hierbei, dass die komplette Information über die mehrdimensionale Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen im univariaten Generator enthalten ist.

Als nächstes werden zwei Beispiele angeführt, die sich durch das ganze Kapitel ziehen.

Beispiel 5.1.5. (Gumbel-Familie) Sei

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} (-\ln t)^\theta, & \text{für } t \in (0, 1] \\ \infty, & \text{für } t = 0 \end{cases}, \quad (5.2)$$

mit $\theta \geq 1$, so ist $\varphi_\theta(t)$ stetig und $\varphi_\theta(1) = 0$. Für $t \in (0, 1)$ ist φ streng monoton fallend, da

$$\varphi'_\theta(t) = -\theta(-\ln t)^{\theta-1}/t < 0$$

gilt. Weiter ist φ konvex, da

$$\varphi''_\theta(t) = \theta(-\ln t)^{\theta-1}/t^2 + \theta(-\ln t)^{\theta-2}(\theta-1)/t^2 > 0.$$

gilt. Da $\varphi_\theta(0) = \infty$ gilt, ist φ_θ ein strikter Generator, und mit (5.1) erhalten wir folgende strikte Copula:

$$C_\theta(u, v) = \varphi_\theta^{-1}(\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v)) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}).$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir die Produktcopula $\Pi(u, v) = uv$, und für den Grenzwert $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta$ erhalten wir die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke $M(u, v) = \min(u, v)$. Diese Copulafamilie nennt man die *Gumbel-Familie*.

Beispiel 5.1.6. (Clayton-Familie) Sei $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ mit $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$, so ist $\varphi(t)$ stetig und $\varphi_\theta(1) = 0$. Für $t \in (0, 1)$ ist φ_θ streng monoton fallend, da

$$\varphi'_\theta(t) = -\frac{t^{-\theta}}{t} \leq 0$$

gilt. Weiter ist φ_θ konvex, da

$$\varphi''_\theta(t) = \frac{t^{-\theta}\theta}{t^2} + \frac{t^{-\theta}}{t^2}, \quad \text{für } \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$$

gilt. Damit ist die *Clayton-Familie* gegeben durch

$$C_\theta(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0).$$

Für $\theta > 0$ haben wir strikte Copulas, und die Form vereinfacht sich zu

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

Bei der Clayton Familie erhalten wir für $\theta = -1$ die unter Fréchet-Hoeffding-Schranke, für $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta$ erhält man die Produktcopula und für $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta$ erhält man die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke.

5.2 Wichtige Eigenschaften

Archimedische Copulas haben einige interessante Eigenschaften, die den einfachen Umgang mit ihnen ermöglichen. Diese werden nun vorgestellt.

Satz 5.2.1. [31] Sei C eine archimedische Copula mit Generator φ , so gilt:

1. C ist symmetrisch, d. h. $C(u, v) = C(v, u)$ gilt $\forall u, v \in I$.
2. C ist assoziativ, d. h. $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ gilt $\forall u, v, w \in I$.

Beweis. • Der erste Punkt ergibt sich direkt aus der Definition der archimedischen Copula.

- Für $(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \leq \varphi(0)$ gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

Dies gilt ebenfalls für $(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \geq \varphi(0)$, denn in diesem Fall gilt

$$C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) = 0. \quad (5.3)$$

□

Satz 5.2.2. [31, Theorem 4.3.4] Sei C eine archimedische Copula mit Generator φ und sei $K_C(t)$ das C -Maß der Menge $\{(u, v) \in I^2 | C(u, v) \leq t\}$ beziehungsweise der äquivalenten Menge $\{(u, v) \in I^2 | \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}$. Dann gilt

$$K_C(t) = V_C(\{(u, v) \in I^2 | C(u, v) \leq t\}).$$

Weiter gilt für $t \in I$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}, \quad (5.4)$$

wobei φ^+ die rechtsseitige Ableitung von φ im Punkt t darstellt.

Beweis. Die Beweisidee ist, die Fläche V_C wie bei der Einführung des Integrals über eine eine Annäherung mit Rechtecken zu bekommen. Der Beweis ist zu finden in [31]. □

Korollar 5.2.3. [31, Corollary 4.3.6] Der Zufallsvektor $(U, V)^T$ habe als Verteilungsfunktion die archimedische Copula C mit Generator φ . Dann ist die Funktion K_C , gegeben in (5.4), die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$.

Beweis. Für die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$ gilt

$$P[C(U, V) \leq t] = P[(U, V) \in \{(u, v); C(u, v) \leq t\}] = V_C((u, v); C(u, v) \leq t) = K_C(t)$$

□

5.3 Kendall's τ für archimedische Copulas

Mithilfe des letzten Korollars lässt sich zeigen, dass man Kendall's τ für archimedische Copulas nur in Abhängigkeit vom Generator darstellen kann. Dies stellt in den meisten Fällen eine

Vereinfachung dar, da der Generator im Gegensatz zur Copula von nur einer Variablen abhängt. Spearman's ρ lässt sich leider nicht zu einer Darstellung in Abhängigkeit vom Generator vereinfachen.

Kendalls τ lässt sich für archimedische Copulas folgendermaßen berechnen.

Satz 5.3.1. [10] Seien X und Y Zufallsvariablen mit archimedischer Copula C mit Generator φ . Dann ist Kendall's τ gegeben durch

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \tag{5.5}$$

Beweis. Seien U und V gleichförmig auf I verteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion C , und sei K_C die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$. Dann gilt mit Bemerkung 3.3.2 und Korollar 5.2.3

$$\begin{aligned} \tau_C &= 4E(C(u, v)) - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\ &= 4 \left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt \right) - 1 = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt. \end{aligned}$$

Nach (5.4) ist die Verteilungsfunktion K_C von $C(U, V)$ gegeben durch

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}.$$

Da φ konvex ist, existieren $\varphi'(t^+)$ und $\varphi'(t^-)$ für fast alle $t \in (0, 1)$.

Die Menge $\{t \in (0, 1) | \varphi'(t^+) \neq \varphi'(t^-)\}$ ist abzählbar und hat folglich das Lebesgue Maß 0.

Daher gilt

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

□

Nun wird dieser Satz angewandt, um Kendall's τ für die beiden vorgestellten Copulafamilien zu berechnen.

Beispiel 5.3.2. Für die Gumbel-Familie mit Generator $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ mit $\theta \geq 1$ erhält man

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t \ln t}{\theta}.$$

Mit Satz 5.3.1 ergibt sich damit für Kendall's τ

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) = 1 + \frac{4}{\theta} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

Beispiel 5.3.3. Für die Clayton-Familie mit Generator $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ mit $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ ergibt sich:

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}$$

Mit Satz 5.3.1 erhält man

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta}{\theta+2}$$

5.4 Tail Dependence für archimedische Copulas

Ebenso wie bei Kendall's τ lässt sich bei archimedischen Copulas auch die Tail Dependence in Abhängigkeit vom Generator darstellen.

Satz 5.4.1. [22] Sei C eine archimedische Copula mit striktem Generator φ , für den zusätzlich $(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi^{-1} \geq 0$ für $j = 0, 1, 2, \dots$ gilt. Falls $\varphi^{-1'}(0)$ endlich ist, so hat C keine obere Tail Dependence. Falls $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$ gilt, so hat C obere Tail Dependence und der Koeffizient ist gegeben durch

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left[\frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} \right].$$

Für den Koeffizienten der unteren Tail Dependence gilt

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \nearrow \infty} \left[\frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} \right].$$

Beweis. Der Beweis ist technisch und ist zu finden in [22, Theorem 4.12]. □

Bemerkung 5.4.2. Die zusätzliche Bedingung an den Generator wirkt auf den ersten Blick umständlich. Ihre Bedeutung wird aber klarer bei der Konstruktion multivariater archimedischer Copulas. Die Mehrzahl der relevanten Copulas erfüllen diese Bedingung ohnehin.

Im Folgenden wird jeweils ein Beispiel zur oberen und zur unteren Tail Dependence für die beiden eingeführten Copula-Familien aufgezeigt.

Beispiel 5.4.3. Die Copulas der Gumbel-Familie sind strikte archimedische Copulas mit Generator $\varphi_\theta(s) = (-\ln s)^\theta$. Es gilt $\varphi_\theta^{-1}(s) = \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})$ und $\varphi_\theta^{-1'}(s) = -s^{\frac{1}{\theta}-1} \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})^{\frac{1}{\theta}}$. Daher ergibt sich mit Satz 5.4.1 für den Koeffizienten der oberen Tail Dependence

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left[\frac{\varphi_\theta^{-1'}(2s)}{\varphi_\theta^{-1'}(s)} \right] = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \lim_{s \searrow 0} \left[\frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-s^{\frac{1}{\theta}})} \right] = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}.$$

Damit haben die Copulas obere Tail Dependence. Sie haben jedoch keine untere Tail Dependence, denn für λ_L gilt

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \nearrow \infty} \left[\frac{\varphi_\theta^{-1'}(2s)}{\varphi_\theta^{-1'}(s)} \right] = 2^{\frac{1}{\theta}} \lim_{s \nearrow \infty} \left[\frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-s^{\frac{1}{\theta}})} \right] = 0.$$

Beispiel 5.4.4. Gegeben sei eine Copula der Clayton-Familie $C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$ mit $\theta > 0$. Diese Copula hat den Generator $\varphi_\theta(s) = (s^{-\theta} - 1)/\theta$. Daher gilt $\varphi_\theta^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{-\frac{1}{\theta}}$ und $\varphi_\theta^{-1'}(s) = -(1 + \theta s)^{-\frac{1}{\theta}-1}$. Mit Satz 5.4.1 erhalten wir:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left[\left(\frac{1 + 2\theta s}{1 + \theta s} \right)^{-\frac{1}{\theta}-1} \right] = 0.$$

Diese Copula hat keine obere Tail Dependence, aber mit Satz 5.4.1 stellen wir die untere Tail Dependence fest:

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \nearrow \infty} \left[\frac{\varphi_\theta^{-1'}(2s)}{\varphi_\theta^{-1'}(s)} \right] = 2 \lim_{s \nearrow \infty} \left[\left(\frac{1 + 2\theta s}{1 + \theta s} \right)^{-\frac{1}{\theta}-1} \right] = 2 \cdot 2^{-\frac{1}{\theta}-1} = 2^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Diese Ergebnisse werden durch die folgende Grafik verdeutlicht.

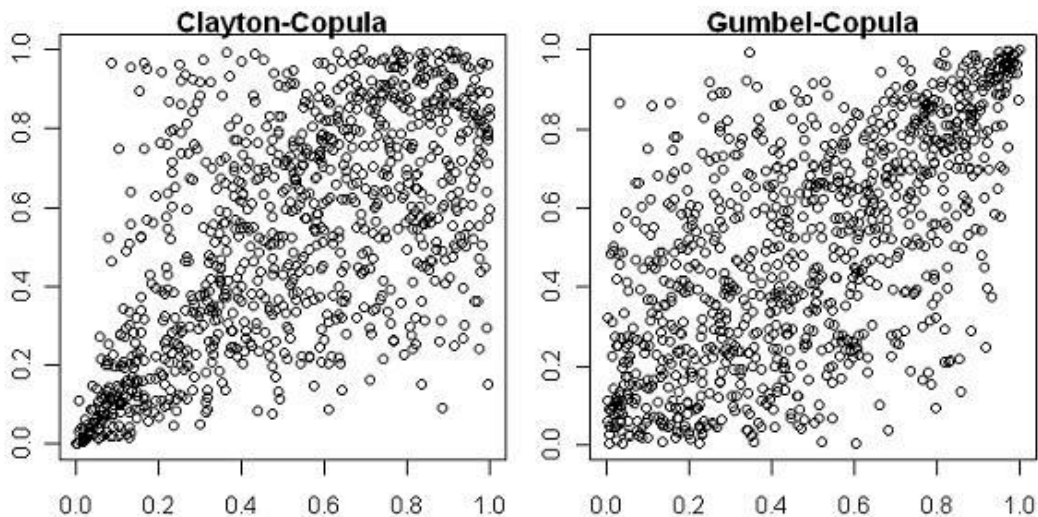


Abbildung 5.1: 1000 Realisierungen der Clayton-Copula und der Gumbel-Copula, jeweils mit Kendall's $\tau = 0,5$

5.5 Multivariate archimedische Copulas

Im Folgenden werden wir uns mit der Konstruktion einer multivariaten Erweiterung von archimedischen 2-Copulas beschäftigen. Für $u = (u_1, \dots, u_n)$ lässt sich die n -dimensionale Produkt-

copula schreiben als

$$\Pi^n(u) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + \dots + (-\ln u_n)]).$$

Dies legt folgende Erweiterung der Formel (5.1) nahe:

$$C^n(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \quad (5.6)$$

Diese Copula kann man iterativ aus archimedischen 2-Copulas gewinnen, indem man folgendermaßen vorgeht:

$$C^m(u_1, \dots, u_n) = C(C^{m-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n)$$

Diese Technik ist nicht auf Copulas im Allgemeinen anwendbar, denn mit $\varphi(t) = 1 - t$ als Generator erhält man W^n , das für $n \geq 3$ keine Copula ist, wie wir in Bemerkung 2.3.4 gezeigt haben. Da archimedische Copulas assoziativ und symmetrisch sind, ist mit (5.6) unter bestimmten Voraussetzungen an den Generator in der Tat eine Copula definiert, wie wir nun zeigen werden.

Definition 5.5.1. Eine Funktion $g(t)$ ist *vollständig monoton* auf einem Intervall J , falls sie unendlich oft differenzierbar mit alternierendem Vorzeichen ist, d.h. falls

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

für alle t im Inneren von J und $k = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

Lemma 5.5.2. Falls die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ eines archimedischen Generators vollständig monoton ist, so gilt $\varphi^{[-1]}(t) > 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. Das bedeutet φ ist strikt und es gilt $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Beweis. Für eine vollständig monotone Funktion $\varphi^{[-1]} : [0, \infty) \mapsto [0, 1]$ gilt nach [39, Corollary 3.a in Chapter IV]: Falls ein $t \in (0, \infty)$ mit $\varphi^{[-1]}(t) = 0$ existiert, so gilt $\varphi^{[-1]}(t) = 0$ schon für alle $t \in (0, \infty)$. \square

Der folgende Satz gibt die notwendige und hinreichende Bedingung für einen strikten Generator an, um eine archimedische Funktion zu erzeugen:

Satz 5.5.3. [31, Theorem 4.6.2] Sei $\varphi : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$. Weiter sei φ^{-1} die Inverse von φ . Falls $C^n : I^n \mapsto I$ definiert ist wie in (5.6), so ist C^n genau dann eine n -Copula für $n \geq 2$, falls φ^{-1} vollständig monoton auf $[0, \infty)$ ist.

Beweis. Der Beweis ist zu finden in [25]. In [25, Theorem 2'] wird gezeigt, dass C^n eine Copula ist, falls φ^{-1} vollständig monoton auf $(0, \infty)$ ist. Die Rückrichtung folgt aus [25, Corollary to Theorem 1]. \square

Dieser Satz kann erweitert werden auf den Fall, in dem φ kein strikter Generator ist und $\varphi^{[-1]}$ m -monoton auf $[0, \infty)$ für ein $m \geq 2$ ist. Das bedeutet, dass die ersten m Ableitungen alternierende Vorzeichen haben. Dann ist die Funktion C^n aus (5.6) eine n -Copula für $2 \leq n \leq m$.

Der Satz 5.2.1 lässt sich auch folgendermaßen auf n Dimensionen ausdehnen.

Satz 5.5.4. [33] Für eine archimedische Copula C mit Generator φ gilt:

1. C ist austauschbar, d.h. $C(u_1, \dots, u_n) = C(u_{\Pi(1)}, \dots, u_{\Pi(n)})$ für alle $u_1, \dots, u_n \in I$ und alle Permutationen $(\Pi(1), \dots, \Pi(n))$ von $(1, \dots, n)$.
2. C ist assoziativ, d. h. $C(C(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n) = C(u_1, C(u_2, \dots, u_n))$, $\forall u_1, \dots, u_n \in I$.

Beweis. Der Beweis ist technisch und läuft wie beim zweidimensionalen Fall ab. □

Bemerkung 5.5.5. Nach der ersten Eigenschaft sind die Argumente der Copula permutierbar. Aus dieser Eigenschaft folgt direkt, dass die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zufallsvariablen gleich sein müssen. Diese Austauschbarkeit ist wichtig bei der Modellierung von Abhängigkeiten homogener Gruppen.

Aus den beiden Punkten zusammen kann man folgern, dass alle k -dimensionalen Randverteilungen für $k < n$ identisch sind, was eine große Beeinträchtigung bei der Modellierung darstellt. Im folgenden Korollar wird ein weiterer Nachteil der multivariaten Copulas verdeutlicht.

Korollar 5.5.6. [31, Corollary 4.6.3] Wenn die Inverse φ^{-1} des strikten Generators einer archimedischen Copula C vollständig monoton ist, so gilt $C \succ \Pi$. Es können also nur positive Abhängigkeiten modelliert werden

Beweis. Beweisidee ist hier zu zeigen, dass $C \succ \Pi$ gilt, falls $-\ln \varphi^{-1}$ konkav ist. Die Konkavität wird dann mit einem technischen Beweis gezeigt. Dies wird in [31] näher ausgeführt. □

Bemerkung 5.5.7. Dies gilt jedoch nicht für bivariate archimedische Copulas, wie man beispielsweise an der Clayton Copula erkennt, welche nach Beispiel 5.1.6 für $\theta = -1$ die untere Frechet-Hoeffding-Schranke annimmt.

Kapitel 6

Simulation von mehrdimensionalen Verteilungen

Die Simulation abhängiger Zufallsvektoren stellt eine Möglichkeit dar, Realisationen aus stochastischen Modellen zu generieren. Dies hat in vielen praktischen Anwendungen eine große Bedeutung, beispielsweise um Aussagen über die zukünftige Entwicklung der Finanztitel in einem Portfolio zu machen. In der Versicherung ist es von großer Bedeutung Realisationen zu simulieren, um essentielle Kennzahlen wie den Value at Risk bestimmen zu können.

Im ersten Abschnitt geht zunächst um die Frage, wann zu gegebenen Randverteilungen und gegebener Korrelationsmatrix ein passender Zufallsvektor gefunden werden kann. Anschließend wird gezeigt, wie man Werte von diesem Vektor simuliert. Im zweiten Abschnitt wird eine allgemeine Methode vorgestellt, um Simulationen einer Copula zu erhalten. Danach werden spezielle Simulationsalgorithmen für elliptische und achimedische Copulas aufgezeigt.

6.1 Simulation bei gegebenen Randverteilungen und Korrelationsmatrix

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns zunächst mit folgendem Problem:

Seien die Randverteilungen F_1, \dots, F_n gegeben. Weiter sei r eine Korrelationsmatrix, also eine symmetrische und positiv semi-definite Matrix, für die $-1 \leq r_{ij} \leq 1$ und $r_{ii} = 1$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Frage: Gibt es einen Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F , so dass

- F_i Verteilungsfunktion für X_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist.
- $r(X_i, X_j) = r_{ij}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt?

Danach wird in diesem Abschnitt gezeigt, wie man Realisationen des Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_n)^T$ simuliert.

Für den bivariaten Fall kann man eine zur solche Verteilungsfunktion folgendermaßen finden:

Satz 6.1.1. [11, Theorem 6] Seien Randverteilungen F_1 und F_2 gegeben, weiter seien r_{min} und r_{max} die zugehörigen minimalen und maximalen Korrelationen, und es gilt $r \in [r_{min}, r_{max}]$. Dann ist die bivariate Verteilungsfunktion F gegeben durch

$$F(x_1, x_2) = \lambda \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\} + (1 - \lambda) \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\},$$

mit $\lambda = (r_{max} - r)/(r_{max} - r_{min})$.

Beweis. F ist als Konvexkombination zweier Verteilungsfunktionen wieder eine Verteilungsfunktion. Weiter hat F offensichtlich die passenden Randverteilungen und die passende Korrelation $\lambda r_{min} + (1 - \lambda)r_{max}$. Denn setzt man das λ in diese Gleichung ein, erhält man gerade r . \square

Bemerkung 6.1.2. Der Satz 6.1.1 gilt auch, wenn an Stelle der Korrelationsmatrix eine Rang-Korrelationsmatrix gegeben ist. Eine Rang-Korrelationsmatrix liegt dann vor, wenn die Einträge nicht den Korrelationen der Zufallsvariablen, sondern den Korrelationen der Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen entsprechen. In diesem Fall gilt $r_{min} = -1$ und $r_{max} = 1$.

Die gemeinsame Verteilungsfunktion ist nicht eindeutig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Beispiel 6.1.3. [11, Remark 3] Seien F_1 und F_2 zwei Randverteilungen. Für $r \geq 0$ besitzt die Verteilung

$$F(x_1, x_2) = \lambda F_1(x_1)F_2(x_2) + (1 - \lambda) \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$$

mit $\lambda = (r_{max} - r)/r_{max}$ ebenfalls Randverteilung F_1 und F_2 und Korrelation r . Dies kann analog zu Satz 6.1.1 gezeigt werden.

Algorithmus 6.1.4. Für den den bivariaten Fall kann man, wie in Satz 6.1.1 gesehen, für ein geeignetes r die gemeinsame Verteilungsfunktion angeben. Diese lässt sich mit folgendem Algorithmus simulieren:

1. Man generiere zwei unabhängige Zufallszahlen u_1, u_2 einer auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen.
2. Für $u_1 \leq \lambda$ nehme man $(x_1, x_2)^T = (F_1^{-1}(u_2), F_2^{-1}(1 - u_2))^T$
Für $u_1 > \lambda$ nehme man $(x_1, x_2)^T = (F_1^{-1}(u_2), F_2^{-1}(u_2))^T$

Wendet man diesen Algorithmus nun mehrfach an und trägt die Werte in ein Diagramm ein, erhält man eine Punktwolke der Realisationen der gemeinsamen Verteilungsfunktion und anhand dieser Punktwolke kann man die Abhängigkeitsstruktur sichtbar machen.

Für den Fall $n \geq 3$ wird es komplizierter eine Lösung zu finden. Es reicht nun nicht mehr wie in Satz 6.1.1 aus, dass alle $r_{ij} \in [r_{\min}(F_i, F_j), r_{\max}(F_i, F_j)]$ sind, wie man im folgenden Beispiel erkennt.

Beispiel 6.1.5. Seien die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 mit den stetigen Verteilungsfunktionen F_1, F_2, F_3 gegeben. Es gibt keine gemeinsame Verteilungsfunktion mit $r_{X_i, X_j} = r_{\min}(F_i, F_j)$ für $i \neq j$ und $r_{ii} = 1$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Argument: Da X_1 und X_2 die minimale Korrelation aufweisen, sind sie kontramontan. Ebenso sind X_2 und X_3 kontramontan. Daher müssen X_1 und X_3 jedoch komonoton verlaufen, da sie jeweils zu X_2 kontramontan sind. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Bei Zufallsvariablen mit maximaler bzw. minimaler Korrelationen kann man Aussagen zur Existenz einer gemeinsamen Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen machen, wie im folgenden Satz verdeutlicht wird.

Satz 6.1.6. [11, Theorem 7] Seien F_1, \dots, F_n für $n \geq 3$ stetige Verteilungsfunktionen, und sei r eine Korrelationsmatrix mit $r_{ii} = 1$ und $r_{ij} \in \{r_{\min}(F_i, F_j), r_{\max}(F_i, F_j)\}$. Für $i \neq j, j \neq k$ und $k \neq i$ gelte,

- falls $r_{ij} = r_{\max}(F_i, F_j)$ und $r_{ik} = r_{\max}(F_i, F_k)$, so ist $r_{jk} = r_{\max}(F_j, F_k)$,
- falls $r_{ij} = r_{\max}(F_i, F_j)$ und $r_{ik} = r_{\min}(F_i, F_k)$, so ist $r_{jk} = r_{\min}(F_j, F_k)$,
- falls $r_{ij} = r_{\min}(F_i, F_j)$ und $r_{ik} = r_{\min}(F_i, F_k)$, so ist $r_{jk} = r_{\max}(F_j, F_k)$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine eindeutig definierte gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n und Korrelationsmatrix r .

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt

$$r_{1j} = \begin{cases} r_{\max}(F_1, F_j), & \text{für } 2 \leq j \leq m \leq n, \\ r_{\min}(F_1, F_j), & \text{für } m < j \leq n, \end{cases}$$

für $2 \leq m \leq n$. Aus den Bedingungen dieses Theorems folgt, dass die Abhängigkeit zweier Randverteilungen durch ihre Abhängigkeiten zur ersten Randverteilung festgelegt ist. Die Randverteilungen F_j , für die $r_{1j} = r_{\max}$ gilt, bilden eine Äquivalenzklasse, ebenso wie die Randverteilungen mit $r_{1j} = r_{\min}$. Damit muss für die gemeinsame Verteilung gelten, dass die X_1, \dots, X_m paarweise komonoton verlaufen und die X_{m+1}, \dots, X_n auch untereinander komonoton verlaufen. Die Elemente aus den beiden verschiedenen Äquivalenzklassen verlaufen jedoch kontramontan zueinander.

Für $U \sim U(0, 1)$ hat der Zufallsvektor

$$(F_1^{-1}(U), \dots, F_m^{-1}(U), F_{m+1}^{-1}(1 - U), \dots, F_n^{-1}(1 - U))^T$$

die gesuchte gemeinsame Verteilungsfunktion, welche aufgrund der Ko-, bzw. Kontramonotonie folgende Form besitzen muss:

$$F(X_1, \dots, X_n) = \max\{0, \min_{1 \leq i \leq m} \{F_i(x_i)\} + \min_{m+1 \leq i \leq n} \{F_i(x_i)\} - 1\}.$$

Dadurch ist die Eindeutigkeit gezeigt. \square

Für die in diesem Satz definierten gemeinsamen Verteilungsfunktionen gilt Folgendes.

Definition 6.1.7. Ein Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n hat eine *gemeinsame Extremverteilung* H , wenn $r(X_i, X_j) \in \{r_{\min}(X_i, X_j), r_{\max}(X_i, X_j)\}$ für alle $i \neq j$ ist.

Für die Anzahl der möglichen gemeinsamen Extremverteilungen lässt sich folgende Aussage treffen.

Bemerkung 6.1.8. Wenn man wie im Satz 6.1.6 annimmt, dass F eine Extremverteilung ist, so können alle Randverteilungen in Bezug zur ersten entweder ko-, oder kontramonoton sein. Daher gibt es höchstens 2^{n-1} mögliche gemeinsame Extremverteilungen.

Korollar 6.1.9. [11, Seite 32] Seien $G^{(i)}$ die gemeinsamen Extremverteilungen der Randverteilungen F_1, \dots, F_n und sei r_i die zugehörige Korrelationsmatrix. Die konvexen Kombinationen

$$G = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \lambda_j G^{(j)} \quad \text{mit } \lambda_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \lambda_j = 1$$

haben dann ebenfalls Randverteilungen F_1, \dots, F_n , und sie haben die Korrelationsmatrix

$$r = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \lambda_j r_j.$$

Wenn wir also eine beliebige Korrelationsmatrix r' in eine konvexe Summe Korrelationsmatrizen zerlegen können, können wir mithilfe einer Konvexkombination der Extremverteilungen eine gemeinsame Verteilung mit Korrelationsmatrix r' konstruieren.

Hat man eine gemeinsame Verteilungsfunktion gefunden, kann man mit ihr Zufallswerte generieren. Für den bivariaten Fall wurde in Lemma 6.1.4 eine Möglichkeit zur Simulation von Zufallswerten gegeben. Für den multivariaten Fall geschieht dies mithilfe von bedingten Verteilungsfunktionen.

Bedingte Verteilungsfunktionsmethode 6.1.10. Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n gegeben. Eine Realisation $(x_1, \dots, x_n)^T$ des Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_n)^T$ wird mit folgendem Algorithmus erzeugt:

- Erzeuge x_1 gemäß F_1
- Erzeuge nacheinander x_k gemäß $P(X_k \in \cdot | X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1})$ für $k = 2, \dots, n$.

Auf diese Weise erhält man als Output die Realisation (x_1, \dots, x_n) .

6.2 Bedingte Inversionsmethode für Copulas

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, die gemeinsame Verteilungsfunktion für den Fall zu simulieren, dass die Copulafunktion und die Randverteilungen gegeben sind. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt geht es nicht um die theoretische Frage, ob eine Lösung existiert, da wir mithilfe von Sklar's Theorem bereits wissen, dass es eine Lösung gibt. Hier geht es also nur um die Simulation von Zufallswerten, was ein eher technisches Problem darstellt.

Sei nun C eine Copula der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n und gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Wenn wir einen Zufallsvektor (u_1, \dots, u_n) der Copula C simuliert haben, so haben wir mit dem Zufallsvektor $(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$ bereits eine Realisation der gemeinsamen Verteilung F gefunden. Das technische Problem besteht also darin, eine Realisation der mehrdimensionalen Copulafunktion zu generieren.

In diesem Abschnitt wird dazu ein allgemeines Simulationsverfahren vorgestellt, das auf alle Arten von Copulas angewandt werden kann, nämlich die bedingte Inversionsmethode.

Unser Ziel ist es also, für eine Copula $C = C(u_1, \dots, u_n)$ ein n -Tupel von Realisationen aus $U(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen (U_1, \dots, U_n) zu generieren, welches die Copula C als gemeinsame Verteilungsfunktion hat.

Die bedingte Inversionsmethode ist eine Kombination aus der bedingten Verteilungsfunktionsmethode 6.1.10 und der einfachen Inversionsmethode, welche nun kurz vorgestellt wird:

Einfache Inversionsmethode 6.2.1. Man erhält die Zufallsvariable X , indem man die auf I rechteckverteilte Zufallsvariable U in die Quantilsfunktion F^{-1} einsetzt. Damit impliziert die Inversionsmethode folgenden Algorithmus zur Erzeugung einer Realisation x aus einer Verteilungsfunktion F :

1. Man generiert eine Zufallszahl u aus einer $U(0, 1)$ -Verteilung.
2. Man setzt $x = F^{-1}(u)$

Bedingte Inversionsmethode 6.2.2. Die bedingte Inversionsmethode ist eine Kombination aus der bedingten Verteilungsmethode 6.1.10 und der einfachen Inversionsmethode. Bei der bedingten Inversionsmethode wird die einfache Inversionsmethode auf die einzelnen bedingten Verteilungen angewandt. Die Realisation einer multivariaten Copula entsteht somit durch sukzessive Transformationen von auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen mit der jeweiligen Quantilfunktion.

Die bedingte Inversionsmethode für Copulas ist ein rekursiver Algorithmus, der folgendermaßen abläuft.

Bedingter Inversionsalgorithmus 6.2.3. [33, Seite 74 ff.] Sei C eine absolut stetige Copula. Weiter sei $C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ mit $k = 1, \dots, n$ die k -dimensionale Randverteilung von C mit den Spezialfällen $C_1(u_1) = u_1$ und $C_n(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n)$. Die bedingte Verteilungsfunktion von u_k , gegeben u_1, \dots, u_{k-1} , ist nach Bemerkung 2.8.2 definiert als

$$\begin{aligned} C_k(u_k|u_1, \dots, u_{k-1}) &= P[U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}] \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}}, \end{aligned}$$

für $k = 2, \dots, d$, falls der Nenner ungleich Null ist. Der Algorithmus zur Generierung einer Realisierung der Copula C verläuft folgendermaßen:

- Man simuliere u_1 aus der $U(0, 1)$ -Verteilung.
- Man simuliere u_2 aus der bedingten Copula $C_2(u_2|u_1)$.
- \vdots
- Man simuliere u_n aus der bedingten Copula $C_d(u_d|u_1, \dots, u_{n-1})$.

Bei der Simulation einer Beobachtung aus $C_k(u_k|u_1, \dots, u_{k-1})$ wird zunächst eine Realisation v der auf I rechteckverteilten Zufallsvariablen $U(0, 1)$ bestimmt. Diese wird dann in die Quantilfunktion C_k^{-1} eingesetzt und somit das u_k bestimmt.

Somit erhält man die gewünschte Realisation, also ein n -Tupel von Zufallswerten aus der Copula C .

Die bedingte Inversionsmethode hat den Vorteil, dass sie auf alle Copulas angewendet werden kann. Ein bedeutsamer Nachteil ist jedoch, dass diese Methode durch ihre rekursive Definition schnell sehr rechenintensiv und somit langsam werden kann. Dies passiert beispielsweise, wenn die bedingten Verteilungen nicht mehr analytisch berechnet werden können, sondern numerisch angenähert werden müssen.

6.3 Simulation von archimedischen Copulas

In diesem Abschnitt geht es darum, Realisierungen einer archimedischen Copula zu bekommen. Die bedingte Inversionsmethode wird für archimedische Copulas unter Verwendung des Generators vereinfacht, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 6.3.1. [4, Theorem 6.1] Sei $C(u_1, \dots, u_n)$ eine archimedische n -Copula mit Generator φ . Es gilt für $k = 2, \dots, n$

$$C_k(u_k|u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k))}{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_{k-1}))},$$

wobei $\varphi^{-1(k-1)}$ die Ableitung der Ordnung $k - 1$ von φ^{-1} ist.

Beweis. Da nach der Definition des Generators $\varphi(1) = 0$ gilt, haben wir für $k = 2, \dots, n - 1$

$$C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k)).$$

Damit gelten die beiden Spezialfälle $C_1(u_1) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1)) = u_1$ und

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)).$$

Nach Bemerkung 2.8.2 gilt

$$C^k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\partial^{k-1} C^k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C^{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}}. \quad (6.1)$$

Den Zähler des Doppelbruchs kann man darstellen als

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-1} C^k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} &= \frac{\partial^{k-1} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k))}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \\ &= \varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k)) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \varphi^{(1)}(u_j). \end{aligned}$$

Für den Nenner ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-1} C^{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} &= \frac{\partial^{k-1} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_{k-1}))}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \\ &= \varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_{k-1})) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \varphi^{(1)}(u_j). \end{aligned}$$

Setzt man diese beide Umformungen in (6.1) erhält man direkt die Behauptung. \square

Mit diesem Satz kann man den bedingten Simulationsalgorithmus 6.2.3 für archimedische Copulas vereinfachen. Dies wird hier für die in Beispiel 5.1.6 vorgestellte Familie der Clayton-Copulas gezeigt.

Bei dem Simulationsalgorithmus der Clayton-Copulas gibt es in dieser Arbeit Differenzen zur Literatur, da in [4] die Clayton-Copula mit anderem Generator definiert wurde, und in [33] die Inverse des Generators falsch berechnet wurde. Nach unserer Definition der Clayton-Copula verläuft für den Simulationsalgorithmus folgendermaßen.

Simulationsalgorithmus für Clayton-Copulas 6.3.2. Die archimedische Clayton- n -Copula hat, wie in Beispiel 5.1.6 definiert, den Generator $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ mit $\theta > 0$. Die Inverse des Generators ist $\varphi_\theta^{-1}(s) = (\theta \cdot s + 1)^{-\frac{1}{\theta}}$. Damit lässt sich die Clayton- n -Copulas nach (5.6)

darstellen als

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^\theta - n + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Die k -te Ableitung der Inversen ist

$$\varphi_\theta^{-1(k)}(s) = (-1)^k \prod_{j=1}^{k-1} (\theta s + 1)^{-\frac{1}{\theta} - k} (\theta + j). \quad (6.2)$$

Damit ergibt sich folgender Simulationsalgorithmus:

- Man simuliere n unabhängige Zufallszahlen v_1, \dots, v_n aus der Rechteckverteilung $U(0, 1)$.
 - Man setze $u_1 = v_1$.
 - Man setze $v_2 = C_2(u_2|u_1) = \frac{\varphi^{-1'}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))}{\varphi^{-1'}(\varphi(u_1))}$.
- Mit den obigen Formeln ergibt sich daraus

$$v_2 = \left(\frac{u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1}{u_1^{-\theta}} \right)^{-\frac{1}{\theta} - 1},$$

und löse diese Gleichung nach u_2 auf.

⋮

- Man setze

$$v_n = C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}) = \left(\frac{[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta}] - n + 1}{[\sum_{i=1}^{n-1} u_i^{-\theta}] - n + 2} \right)^{-\frac{1}{\theta} - n + 1}, \quad (6.3)$$

und löse diese Gleichung nach u_n auf.

Damit hat man nun für eine Clayton-Copula eine n -dimensionale Beobachtung simuliert. Für die Gumbel-Copula verlaufen die Schritte des Simulationsalgorithmus analog zur Clayton-Copula.

6.4 Simulationsmethode von Marshall und Olkin

In diesem Abschnitt wird eine weitere Methode zur Simulation von archimedischen Copulas eingeführt, die Simulationsmethode von Marshall und Olkin. Diese hat im Vergleich zur Simulationsmethode des letzten Abschnitts den entscheidenden Vorteil, dass sie weniger rechenintensiv ist. Grundlagen dieses Abschnitts sind [4] und [29]. Diese Simulationsmethode bedient sich der Laplace Transformation und ihrer Inversen. Daher wird zunächst kurz auf die Laplace-Transformation eingegangen.

Definition 6.4.1. Die Laplace-Transformation einer positiven Zufallsvariablen γ ist definiert als

$$\tau(s) = E_\gamma(e^{-s\gamma}) = \int_0^\infty e^{-st} dF_\gamma(t),$$

wobei F_γ die Verteilungsfunktion von γ ist.

Bemerkung 6.4.2. Da die Laplace-Transformierte zu einer positiven Zufallsvariablen gehört, gilt $\tau(\infty) = 0$, und es gilt $\tau(0) = 1$. Die Laplace-Transformierte ist als stetige streng monoton fallende Funktion umkehrbar. Die Umkehrfunktion erfüllt die Kriterien eines strikten Generators aus Definition 5.1.4.

Nun haben wir alle Hilfsmittel eingeführt und können die Simulationsmethode definieren.

Simulationsalgorithmus von Marshall und Olkin 6.4.3. Sei X_i eine Zufallsvariable und γ eine davon abhängige positive Zufallsvariable. Die bedingte Verteilungsfunktion H_i von X_i , gegeben γ , sei definiert durch $H(x_i|\gamma) = H_i(x_i)^\gamma$ für $i = 1, \dots, n$. Marshall und Olkin haben in [29, Corollary 2.2.] gezeigt, dass

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= E(H_1(x_1)^\gamma \cdot \dots \cdot H_n(x_n)^\gamma) \\ &= \tau(\tau^{-1}(F_1(x_1)) + \dots + \tau^{-1}(F_n(x_n))) \end{aligned}$$

gilt, wobei der Erwartungswert über γ gebildet wird. F_i ist die i -te Randverteilung der gemeinsamen Verteilungsfunktion F und τ ist die Laplace-Transformierte von γ . Dabei wird γ so gewählt, dass τ mit der Inversen des Generator der archimedischen Copula übereinstimmt.

Der Simulationsalgorithmus läuft folgendermaßen ab:

- Generiere eine Zufallsvariable γ , welche die Laplace-Transformierte τ hat, wobei τ die Inverse des Generators der archimedischen Copula ist.
- Generiere unabhängige Realisierungen u_1, \dots, u_n einer auf I rechteckverteilten Zufallsvariable.
- Berechne für $k = 1, \dots, n$ die $x_k = F_k^{-1}(u_k^*)$ mit $u_k^* = \tau(-\frac{1}{\gamma} \ln u_k)$.

Zur Verdeutlichung wird dieser Algorithmus nun auch für die in Beispiel 5.1.5 eingeführte Familie der Gumbel-Copulas durchgeführt:

Beispiel 6.4.4. Die Inverse des Generators der Gumbel-Copula ist $\varphi^{-1}(s) = \exp\left(-s^{\frac{1}{\theta}}\right)$. Die positiv stabilverteilte Zufallsvariable $Y \sim St(\frac{1}{\theta}, 1, \gamma, 0)$ mit $\theta > 1$ hat gerade $\varphi^{-1}(s)$ als Laplace-Transformierte. Damit läuft der Simulationsalgorithmus folgendermaßen ab:

- Man generiere eine Beobachtung der $St(\frac{1}{\theta}, 1, \gamma, 0)$ -Verteilung. (Effiziente Methoden zur Simulation von Stabilverteilungen sind in [3] zu finden.)

- Man generiere unabhängig vom ersten Schritt n unabhängig Beobachtungen der Rechteckverteilung $U(0, 1)$.
- Man berechne $X_k = F_k^{-1}(U_k^*)$ für $k = 1, \dots, n$ mit

$$U_k^* = \tau \left(-\frac{1}{\gamma} \ln U_k \right)$$

Der Simulationsalgorithmus von Marshall und Olkin hat den Vorteil, dass hier der Rechenaufwand im Gegensatz zur bedingten Inversionsmethode für höhere Dimensionen nicht so stark ansteigt wie bei der bedingten Inversionsmethode. Der einzige Nachteil der Methode von Marshall und Olkin ist, dass man eine zusätzliche Zufallsvariable γ simulieren muss.

6.5 Simulation für elliptische Copulas

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt Simulationsalgorithmen für die archimedischen Copulas betrachtet haben, geht es in diesem Abschnitt darum, Simulationsalgorithmen für die Klasse der elliptischen Copulas zu finden. Grundlage für diesen Abschnitt ist [4]. Wie wir bereits gesehen haben, lassen sich die meisten elliptischen Copulas nicht als geschlossener Ausdruck darstellen. Dennoch lassen sich diese Copulas einfach simulieren, wie nun an unseren beiden Beispielen, der Gauß-Copula und der t -Copula, gezeigt wird.

Simulationsalgorithmus für Gauß-Copulas 6.5.1. Realisationen der Gauß- n -Copula C_R^{Ga} erhält man mit folgendem Algorithmus:

- Man führe eine Cholesky-Zerlegung von der Korrelationsmatrix R durch (Man sucht eine Matrix A mit $R = AA^T$).
- Man simuliere den n -dimensionalen Zufallsvektor $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, wobei die z_i mit $i = 1, \dots, n$ unabhängig identisch standardnormalverteilt sind.
- Man setze $x = Az$.
- Man setze $u_i = \Phi(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$, wobei Φ die univariate Standardnormalverteilung darstellt.

Eine t -Copula ist ebenfalls einfach zu simulieren, wie folgendes Beispiel zeigt:

Simulationsalgorithmus für t -Copulas 6.5.2. Realisationen der t -Copula $C_{\nu, R}^t$ erhält man mit folgendem Algorithmus:

- Man führe eine Cholesky-Zerlegung der Korrelationsmatrix R durch, so dass $R = AA^T$ gilt.

- Man simuliere den n -dimensionalen Zufallsvektor $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, wobei die z_i mit $i = 1, \dots, n$ unabhängig identisch standardnormalverteilt sind.
- Man simuliere eine Zufallsvariable s von χ_ν^2 unabhängig von z .
- Man setze $y = Az$.
- Man setze $x = \sqrt{\frac{\nu}{s}}y$.
- Man setze $u_i = T_\nu(x_i)$, für $i = 1, \dots, n$, wobei T_ν die univariate t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden bezeichnet.

Bei diesen beiden vorgestellten Algorithmen erhält man wie gewohnt die Realisation der gemeinsamen Verteilung aus der Realisation der Copula, indem man die Quantilfunktion der univariaten Randverteilungen F_i^{-1} an den Stellen u_i für $i = 1, \dots, n$ auswertet.

6.6 Illustration

Mit den Simulationsalgorithmen für archimedische und elliptische Copulas sind wir in der Lage, Realisationen für die vier Beispielcopulas zu generieren. In Abbildung 6.1 sind jeweils 2000 Simulationen der 2-dimensionalen Gaußcopula und der 2-dimensionalen t -Copula mit 2 Freiheitsgraden dargestellt. Diese beiden Copulas haben die gleiche Korrelation. Trotzdem sind

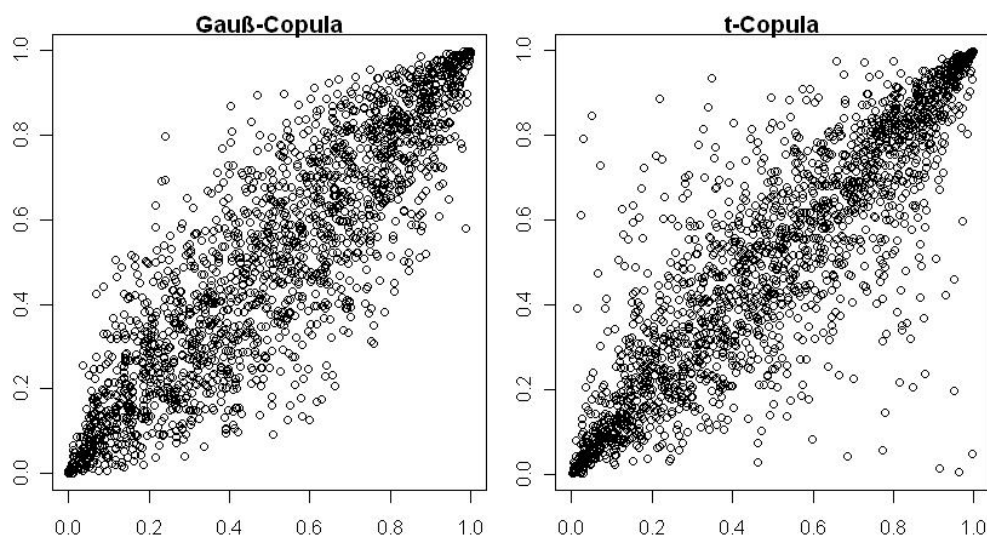


Abbildung 6.1: 2000 Realisierungen der Gauß-Copula und der t -Copula-Copula mit 2 Freiheitsgraden, jeweils mit Korrelation $r = 0,891$

deutliche Unterschiede zu erkennen. Die t -Copula hat offensichtlich die Tendenz, mehr Werte in der oberen linken und unteren rechten Ecken zu generieren. Die Unterschiede zwischen diesen beiden Copulas werden im achten Kapitel von entscheidender Bedeutung sein.

Die Abbildung 6.2 zeigt 2000 Realisierungen der 2-dimensionalen Clayton-Copula mit Parameter $14/3$ und der 2-dimensionalen Gumbel-Copula mit Parameter $10/3$. Die Parameter wurden gerade so gewählt, dass beide Copulas den Wert $0,7$ für Kendall's τ annehmen. An diesen Si-

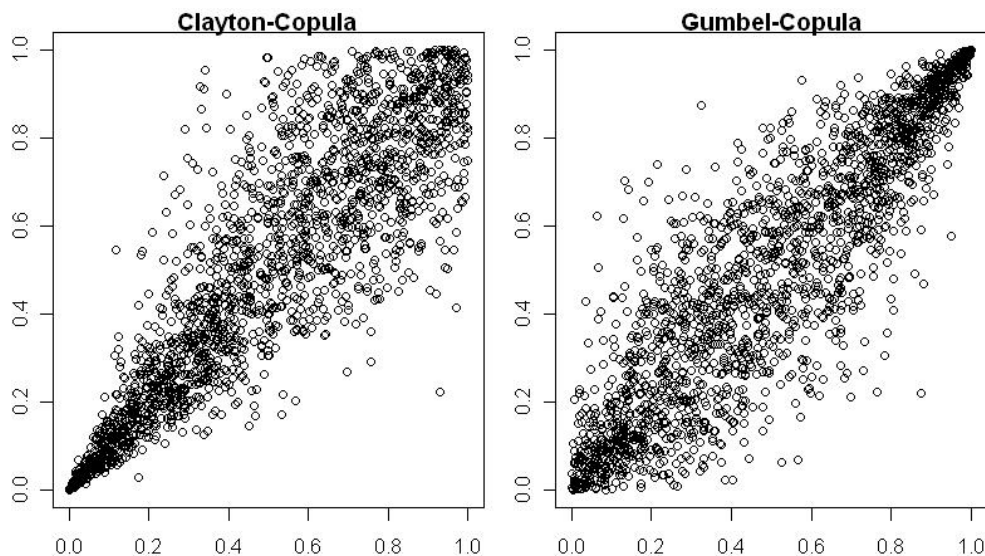


Abbildung 6.2: 2000 Realisierungen der Clayton-Copula mit Parameter $14/3$ und der Gumbel-Copula mit Parameter $10/3$

mulationen ist nochmals gut zu erkennen, dass die Clayton-Copula untere Tail Dependence hat, und somit viele Werte in der linken unteren Ecke generiert. Diese Copula eignet sich also dazu Situationen zu modellieren, in denen es häufig zu gemeinsamen tiefen Werten kommt. Die Gumbel-Copula hat obere Tail Dependence und ist daher in der Lage gemeinsam große Werte zu modellieren.

Die Korrelation der elliptischen Copulas in Abbildung 6.1 ist auch so gewählt worden, dass diese beiden Copulas den Wert $0,7$ für Kendall's τ annehmen. Vergleicht man die elliptischen Copulas mit den der Gumbel-Copula bzw. der Clayton-Copula, so fällt auf, dass die elliptischen Copulas eine annähernd symmetrische Punktwolke generieren. Diese Eigenschaft folgt aus der zugrunde liegenden elliptischen Verteilung.

Kapitel 7

Statistische Konzepte

Nachdem wir im letzten Kapitel die Simulation einer Copula für gegebene Verteilungsfunktionen betrachtet haben, geht es in diesem Kapitel um das Schätzen der passenden Randverteilungen und Copulafunktion bei gegebenem Datensatz. Je nach getroffener Modellannahme lassen sich die Schätzmethoden in drei Kategorien einteilen. Es gibt die parametrische, die semiparametrische und die nichtparametrische Schätzmethode.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der parametrischen Schätzmethode. Dabei wird die Maximum-Likelihood-Methode angewandt, durch welche die Copulafunktionen und die Randverteilungen parametrisch spezifiziert werden. Angelehnt daran wird zudem die Schätzmethode mittels Inferenzfunktionen vorgestellt.

Im zweiten Abschnitt werden semiparametrische Schätzmethoden aufgezeigt. Hierbei werden entweder die Copulafunktionen oder die Randverteilungen parametrisch geschätzt.

Im dritten Abschnitt wird auf die nichtparametrische Schätzung näher eingegangen. Dabei werden die gesuchten Verteilungsfunktionen bzw. die gesuchten Dichten durch ihre empirischen Gegenstücke oder mittels der auf Kernen basierenden Glättungsmethode geschätzt.

Nach welcher dieser drei Methoden man das Copula-Modell schätzen sollte, hängt von den ex-ante Informationen zu der Copulafunktion oder den Randverteilungen ab. Hat man keine Informationen gegeben, so ist die nichtparametrische Methode anzuwenden. Falls Informationen zu einer Verteilungsfunktion vorliegen, sollte man diese selbstverständlich berücksichtigen und ggf. nur noch den Parameter schätzen. Im Folgenden werden diese drei Methoden vorgestellt und ihre Vor- und Nachteile aufgezeigt.

7.1 Parametrische Schätzung

Die parametrische Schätzung wird angewandt, falls sowohl für die Copulafunktion als auch für die univariaten Randverteilungen ein parametrisches Modell vorliegt. Das bedeutet, dass die Copula und die Randverteilungen jeweils bis auf einen zu schätzenden Parametervektor bekannt sind.

Die wichtigste Methode zur Schätzung der Parameter ist die Maximum-Likelihood-Schätzung

(maximum likelihood estimation, kurz: MLE), für welche es zwei mögliche Vorgehensweisen gibt. Bei der ersten, der exakten ML-Methode, werden alle Parameter simultan geschätzt, wohingegen bei der zweiten, der Methode der Inferenzfunktionen, zuerst nur die Parameter der Randverteilungen geschätzt werden. Diese werden dann bei der Schätzung der Copulaparameter verwendet.

Die Rahmenbedingungen für diese beiden Methoden sind folgende.

Voraussetzungen 7.1.1. Der Zufallsvektor $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ habe die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x_1, \dots, X_n; \theta)$ und die Randverteilungen $F_i(X_i, \alpha_i)$ für $i = 1, \dots, n$, wobei $\theta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zu schätzenden Parametervektoren der Verteilungen sind.

Nach Sklar's Theorem 2.2.10 gibt es eine Copula C , für die gilt

$$F(x_1, \dots, x_n, \theta) = C(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta_C).$$

Die Copula C ist hierbei parametrisch bestimmt mit Parametervektor θ_C . Für die Schätzung wird die Dichtefunktion benötigt, welche sich nach Definition 2.8.1 mithilfe der Copuladichte c darstellen lässt als

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta_C) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i). \quad (7.1)$$

Indem man die Copula nach ihren Randverteilungen differenziert, erhält man die Copuladichte

$$c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta_C) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta_C)}{\partial F_1(x_1; \alpha_1) \dots \partial F_n(x_n; \alpha_n)}.$$

Indem man die Randverteilungen ableitet, erhält man die Randdichten f_i , für die gilt

$$f_i(x_i; \alpha_i) = \frac{\partial F_i(x_i; \alpha_i)}{\partial x_i}. \quad (7.2)$$

7.1.1 Exakte Maximum-Likelihood-Schätzung

Sei die Stichprobe vom Umfang D eines n -dimensionalen Zufallsvektors gegeben durch

$$\{x_t\}_{t=1}^D = \{(x_{1t}, \dots, x_{nt})^T\}_{t=1}^D. \quad (7.3)$$

Aus der Gleichung 7.1 und der Stichprobe ergibt sich die Loglikelihoodfunktion

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^D \ln c(F_{1t}(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_{nt}(x_{nt}; \alpha_n); \theta_C) + \sum_{t=1}^D \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}; \alpha_i), \quad (7.4)$$

wobei θ ein Parametervektor ist, bestehend aus dem Parameter θ_c der Copula und den α_i der Randverteilungen. Der exakte ML-Schätzer ist das Maximum der Loglikelihoodfunktion

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta),$$

wobei Θ die Menge aller möglichen Parametervektoren θ ist. Bei dieser Methode werden alle Parameter simultan geschätzt.

Die folgenden Regularitätsbedingungen werden benötigt, um Aussagen zur Güte des Schätzers treffen.

Definition 7.1.2. (Regularitätsbedingungen) Sei $f(x; \theta)$ und Θ die Menge aller möglichen Parametervektoren θ . θ_0 sei der wahre Wert des zu schätzenden Parametervektors θ . Die *Regularitätsbedingungen* sind erfüllt, falls folgendes gilt:

1. Für jedes $\theta \in \Theta$ existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial^2 \theta}, \quad \frac{\partial^3 \ln f(x; \theta)}{\partial^3 \theta}$$

für alle x .

2. Für jedes $\theta_0 \in \Theta$ existieren Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $H(x)$, so dass für θ in der Umgebung von θ_0 und für alle x die Ungleichungen

$$\left| \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right| \leq g(x), \quad \left| \frac{\partial^2 f(x; \theta)}{\partial^2 \theta} \right| \leq h(x), \quad \left| \frac{\partial^3 \ln f(x; \theta)}{\partial^3 \theta} \right| \leq H(x)$$

mit

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} h(x) dx < \infty, \quad E_{\theta}(H(X)) < \infty$$

erfüllt sind.

3. Für jedes $\theta \in \Theta$ gilt

$$0 < E \left(\left(\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right) < \infty$$

Mit diesen Regularitätsbedingungen gelten folgende Eigenschaften für die exakten ML-Schätzer:

Satz 7.1.3. [21, Theorem 17.1] Unter diesen Regularitätsbedingungen gilt für einen ML-Schätzer $\hat{\theta}$, wobei θ_0 der wahre Parametervektor ist:

1. $\hat{\theta}$ ist konsistent.

2. $\hat{\theta}$ ist asymptotisch normalverteilt $\hat{\theta} \sim N[\theta_0, \{\mathbf{I}(\theta_0)\}^{-1}]$, mit

$$\hat{\theta} \sim N[\theta_0, \{\mathbf{I}(\theta_0)\}^{-1}], \text{ wobei } \mathbf{I} = E_0 \left[\left(\frac{\partial \ln l(\theta_0)}{\partial \theta_0} \right) \left(\frac{\partial \ln l(\theta_0)}{\partial \theta_0} \right)^T \right]$$

die Fisher-Information bezeichnet.

3. $\hat{\theta}$ ist invariant in dem Sinne, dass $c(\hat{\theta})$ der ML-Schätzer für eine stetig differenzierbare Funktion $\delta_0 = c(\theta_0)$ ist.

Beweis. Dieser Satz wird in [21, Seiten 477 ff.] bewiesen. □

Dieses Verfahren ist zwar sehr aufwendig, jedoch liefert es ein exaktes Ergebnis. Daher wird es auch exakte ML-Methode genannt. Der große Nachteil dieser Methode ist, dass eine analytische Berechnung des ML-Schätzers teilweise nicht möglich ist und er daher numerisch angenähert werden muss. Dieser konvergiert oft nur schlecht oder gar nicht. Da bei dieser Methode alle Parameter gleichzeitig optimiert werden, ist die Rechenintensität sehr hoch.

7.1.2 Methode der Inferenzfunktionen für die Randverteilungen

Die Methode der Inferenzfunktionen für die Randverteilungen ist ebenfalls eine parametrische Schätzfunktion auf der Grundlage des ML-Schätzers. Diese wurde in [22] eingeführt.

Inferenzfunktionen der Randverteilungen (inference functions for margins, kurz IFM) sind definiert als die ersten Ableitungen der Loglikelihoodfunktionen der Randverteilungen.

Bei genauerer Betrachtung der Gleichung (7.4) erkennt man, dass sich die Loglikelihoodfunktion in zwei Teile aufspaltet, wobei der Teil mit der Doppelsumme nur von den Randverteilungen und nicht von der Copulafunktion abhängt.

Die Idee der Schätzmethode mittels Inferenzfunktionen ist es, zunächst die Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ der univariaten Randverteilungen zu schätzen. Zu der Stichprobe (7.3) betrachtet man die Loglikelihoodfunktionen der Randverteilungen

$$l_i(\alpha_i) = \sum_{t=1}^D \ln f_i(X_{it}; \alpha_i).$$

Indem man diese Funktionen bzgl. ihren Parametern maximiert, erhält man die Schätzer der Parameter

$$\hat{\alpha}_i = \max_{\alpha_i} l_i(\alpha_i).$$

Diese Schätzer fasst man zum Vektor $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)^T$ zusammen, welchem man im zweiten Schritt verwendet, um einen Schätzer des Copulaparameters θ_c zu finden.

Dazu lässt sich die Loglikelihoodfunktion der Copula C darstellen als

$$l_c(\theta_c; \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n) = \sum_{t=1}^D \ln c(F_{1t}(X_{1t}; \hat{\alpha}_1), \dots, F_{nt}(X_{nt}; \hat{\alpha}_n); \theta_c).$$

Unter den Regularitätsbedingungen 7.1.2 lässt sich diese Funktion l_c optimieren, und man erhält für den Copulaparameter den ML-Schätzer

$$\hat{\theta}_c = \max_{\theta \in \Theta} l_c(\theta_c; \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n).$$

Dieser Schätzer $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_c; \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)^T$ des Parametervektors $(\theta_c; \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ wird IFM-Schätzer genannt. Er ist Lösung des Gleichungssystems

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \alpha_n}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_c} \right)^T = (0, \dots, 0)^T.$$

Der exakte ML-Schätzer ist hingegen Lösung des Gleichungssystems

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \alpha_n}, \frac{\partial l}{\partial \theta_c} \right)^T = (0, \dots, 0)^T.$$

Daran erkennt man, dass die beiden Schätzer im Allgemeinen nicht übereinstimmen. Eine Ausnahme bilden die beiden Schätzer bei einer Gauß-Copula, also die Copula der multivariaten Normalverteilung. In dem Fall stimmen sie überein, wie in [23] gezeigt wird. Dort wurde auch das asymptotische Verhalten des IFM-Schätzers näher untersucht. Unter den Regularitätsbedingungen 7.1.2 ist der IFM-Schätzer ebenfalls asymptotisch normalverteilt, und es gilt

$$\sqrt{D} \left(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0 \right) \mapsto N(0, G^{-1}(\theta_0)),$$

wobei $G^{-1}(\theta_0)$ die Informationsmatrix von Godambe darstellt. Diese ist definiert als

$$G^{-1}(\theta_0) = D^{-1}V(D^{-1})^T,$$

mit $D = E \left(\frac{\partial s(\theta)}{\partial \theta} \right)$, $V = E[s(\theta)s(\theta)^T]$ und Scorefunktion

$$s(\theta) = \left(\frac{\partial l_1}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \alpha_n}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_c} \right)^T.$$

7.1.3 Fazit

Da man bei diesem Schätzverfahren nicht alle Parameter simultan schätzt, ist der Rechenaufwand im Vergleich zur exakten Maximum-Likelihood-Methode geringer.

Mit der IFM-Methode kann man die Abhängigkeitsstrukturen von Modellen vergleichen und

Sensitivitätsanalysen der Modelle für bestimmte Vorhersagen durchführen. Damit ist der IFM-Schätzer robuster gegen Fehlspezifikationen der Abhängigkeitsstruktur und Ausreißern in der Stichproben als die der CML-Schätzer.

Kleine Stichproben können bei der CML-Methode zu großen Problemen führen. Diese können bei der IFM-Methode etwas eingeschränkt werden, wenn alle Parameter durch univariate Likelihoodfunktionen geschätzt werden können.

In [40] wird außerdem gezeigt, dass der IFM-Schätzer im Vergleich zum exakten ML-Schätzer höhere Effizienz besitzt.

7.2 Semiparametrische Schätzung

Bei der semiparametrischen Schätzung werden die parametrische und die nichtparametrische Schätzung kombiniert. In Bezug auf Copulas bedeutet dies, dass die Copulafunktion bis auf einen Parametervektor gegeben ist, man aber keine Informationen zu den univariaten Randverteilungen gegeben hat. Diese sind dann nichtparametrisch zu schätzen. Der umgekehrte Fall, bei dem die Copulafunktion nichtparametrisch geschätzt wird, aber dafür die univariaten Randverteilungen parametrisch spezifiziert sind, ist ebenfalls möglich, wird in dieser Arbeit allerdings nicht berücksichtigt. Grundlage dieses Abschnitts bildet [33].

7.2.1 Kanonische Maximum-Likelihood-Schätzung

Bei der kanonischen ML-Schätzung betrachten wir wieder den n -dimensionalen Zufallsvektor X mit gemeinsamer Verteilungsfunktion

$$F(x_1, \dots, x_n; \theta) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n); \theta).$$

θ ist in diesem Fall der Parametervektor der Copula. Die Bestimmung der Randverteilungen wird umgangen, indem man die Stichprobe $\{(x_{1t}, \dots, x_{nt})^T\}_{t=1}^D$ in eine auf I rechteckverteilte Stichprobe $\{(u_{1t}, \dots, u_{nt})^T\}_{t=1}^D$ transformiert. Da auf I rechteckverteilte Zufallsvariablen die Dichte 1 auf ihrem Definitionsbereich $[0, 1]$ besitzen, fallen in der Gleichung 7.1 die Ausdrücke der univariaten Dichtefunktionen weg.

Die Loglikelihoodfunktion hängt somit nur noch von der Copuladichte ab. Da es bei dieser Schätzmethode nicht um die gemeinsame Verteilungsfunktion, sondern primär um die Copulafunktion geht, nennt man die diese Methode die kanonische ML-Schätzung (canonical maximum likelihood, kurz CML). Das Finden des CML-Schätzers verläuft zweischrittig.

Im ersten Schritt werden die Randverteilungen F_i durch ihre empirischen Verteilungsfunktionen ersetzt, wobei eine empirische Verteilungsfunktion definiert ist als

$$\hat{F}_i^{mp}(x) = \frac{1}{D} \sum_{t=1}^D \mathbb{I}_{\{X_{it} \leq x\}}.$$

Hier und im Folgenden dient np der Kennzeichnung eines nichtparametrischen Schätzers. Falls mehrere der u_i s Werte nahe 1 annehmen, kann dies zu Randwertproblemen führen. Um diese zu umgehen, wird in der Praxis häufig mit dem Faktor $\frac{D}{D+1}$ reskaliert:

$$\hat{F}_i^{np'}(x_i) = \frac{1}{D+1} \sum_{t=1}^D \mathbb{I}_{\{X_{it} \leq x_i\}} \quad (7.5)$$

Diese empirischen Randverteilungen werden nun in die Gleichung (7.1) eingesetzt, bei der wie oben beschrieben die Dichten der Randverteilungen wegfallen, und wir erhalten

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = c(\hat{F}_1^{np'}(x_1), \dots, \hat{F}_n^{np'}(x_n); \theta).$$

Im zweiten Schritt wird nun die ML-Methode angewandt, indem die Loglikelihoodfunktion in Abhängigkeit des Copulaparameters θ maximiert wird. Die Gleichung (7.4) vereinfacht sich aufgrund der wegfallenden Dichten der Randverteilungen zu

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{t=1}^D \ln c(\hat{F}_1^{np'}(x_1), \dots, \hat{F}_n^{np'}(x_n); \theta) \\ &= \sum_{t=1}^D \ln c(\hat{u}_{1t}, \dots, \hat{u}_{nt}; \theta). \end{aligned}$$

Der kanonische ML-Schätzer $\hat{\theta}_{CML}$ ist dann definiert als

$$\hat{\theta}_{CML} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta).$$

Auch dieser Schätzer ist unter den Regularitätsbedingungen 7.1.2 konsistent und asyptotisch normalverteilt, wie in [17, Chapter 2] mithilfe der Taylor-Entwicklung der Loglikelihoodfunktion gezeigt wird.

Bei der kanonischen ML-Schätzung werden im Gegensatz zur exakten ML-Schätzung und zur Schätzung mittels Inferenzfunktionen keine Annahmen zu den Randverteilungen getroffen, wodurch eine Fehlspezifikation ausgeschlossen wird. Kommt man bei den drei vorgestellten Schätzverfahren zu stark unterschiedlichen Schätzern, so kann dies als Indiz für eine Fehlspezifikation einer oder mehrerer Randverteilungen angesehen werden.

7.2.2 Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße

Im Folgenden betrachten wir die Schätzung des Copulaparameters mithilfe bekannter Abhängigkeitsmaße. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die Schätzung mittels Kendall's τ . Grundlagen für diesen Abschnitt sind [30, Section 5.5.1] und [33].

7.2.2.1 Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße für archimedische Copula

Wie in Satz 5.3.1 gesehen, lässt sich Kendall's τ für geordnete parametrische archimedische Copulafamilien als streng monotone Funktion in Abhängigkeit vom Copulaparameter darstellen:

$$\tau = f(\theta)$$

Mit diesem Zusammenhang lässt sich leicht ein Schätzer $\hat{\theta}$ finden, indem man die theoretische Version von Kendall's τ in dieser Gleichung durch den empirischen Schätzer (3.7) substituiert. Man erhält somit $\hat{\tau}^{np} = f(\hat{\theta})$. Da f für geordnete Copulafamilien streng monoton ist, kann man die Gleichung nach den gesuchten Schätzer $\hat{\theta}$ auflösen, und erhält

$$\hat{\theta} = f^{-1}(\hat{\tau}^{np}).$$

Da die Randverteilungen nichtparametrisch geschätzt werden, für die Copula aber mithilfe von Kendall's τ ein Parameter spezifiziert wird, liegt ein semiparametrischer Schätzer vor.

7.2.2.2 Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße für elliptische Copulas

Möchte man bei elliptischen Copulas die Korrelationsmatrix schätzen, so kann man den in Satz 4.3.1 beschriebenen Zusammenhang

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin r_{ij} \quad (7.6)$$

ausnutzen. Dazu ist die Vorgehensweise ähnlich wie im Fall archimedischer Copulas. Zunächst schätzt man wieder für je zwei Randverteilungen Kendall's τ mittels (3.7), löst dann die Gleichung (7.6) nach der Korrelation auf und fasst die Werte in einer Matrix zusammen. Diese Matrix ist im Allgemeinen nicht mehr positiv semidefinit, kann aber mithilfe der Eigenwertmethode auf eine solche Gestalt gebracht werden. Dies wird in [30, Algorithm 5.55] näher ausgeführt.

7.2.3 Fazit

Der größte Vorteil der Schätzung mittels copulabasierter Abhängigkeitsmaße ist die einfache Anwendbarkeit, da keine rechenintensiven numerischen Annäherungsverfahren angewandt werden. Der größte Nachteil dieser Methode ist, dass die Effizienz viel geringer als bei dem zuvor eingeführten ML-Schätzer ist, was beispielsweise in [33, 7.4.3] für archimedische Copulas gezeigt wird.

7.3 Nichtparametrische Schätzung

Bei der nichtparametrischen Schätzung benötigt man im Gegensatz zu den vorher besprochenen Schätzmethoden keine Spezifikationen der zugrunde liegenden Verteilungen. Hier geht es also nicht mehr darum, den passenden Parameter einer Copulafamilie zu finden, sondern einen konsistenten Schätzer für die Copula an sich auf der Grundlage einer Stichprobe zu konstruieren. Hierzu werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt.

Die erste benutzt die direkt aus den Stichprobendaten abgeleiteten empirischen Verteilungsfunktionen zur Schätzung der unbekanntes Verteilung und wurde von Deheuvels in [6] und [7] entwickelt.

Bei der zweiten Methode wird die Glättungsmethode mittels Kernen benutzt. Die Kernschätzung kann dabei sowohl auf die Copuladichte als auch auf die Dichte ihrer Randverteilungen angewandt werden. Das Verfahren der Kernschätzung wurde von Gijbels und Mielniczuk in [20] für den bivariaten Fall eingeführt, und Fermanian und Scaillet haben dieses Verfahren in [13] auf den multivariaten Fall erweitert. Diese Schätzverfahren werden im Folgenden vorgestellt.

7.3.1 Die empirische Copula von Deheuvels

Nach dem Theorem von Glivenko-Cantelli konvergiert die empirische Verteilungsfunktion einer einfachen Stichprobe fast sicher gegen ihre zugrunde liegende Verteilungsfunktion F . Dies wird z. B. in [19, Seite 56] bewiesen. Auf dieser Grundlage hat Deheuvels einen nichtparametrischen konsistenten Schätzer für eine Copula eingeführt. Dieser wird die empirische Copula genannt und wird im Folgenden vorgestellt. Grundlage dieses Abschnitts ist [33].

Definition 7.3.1. (empirische Copula)

Sei wieder $\{(X_{1t}, \dots, X_{nt})^T\}_{t=1}^D$ eine Stichprobe vom Umfang D des n -dimensionalen Vektors X . Zu diesem werden Ordnungsstatistiken $\{X_1^{(t)}, \dots, X_n^{(t)}\}$ und Rangstatistiken $\{R_{1t}, \dots, R_{nt}\}$ aufgestellt. Dabei haben diese die Beziehung $X_i^{(R_{it})} = X_{it}$. Weiter sei die multivariate empirische Verteilungsfunktion gegeben durch

$$\hat{F}^{np}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{D} \sum_{t=1}^D \mathbb{I}_{\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}}.$$

$\hat{F}_i^{np}(x_i)$ seien für $i = 1, \dots, n$ die univariaten empirischen Verteilungsfunktionen.

Eine *empirische Copula* \hat{C}^{np} ist dann nach Sklar's Theorem definiert als

$$\hat{F}^{np}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}^{np} \left(\hat{F}_1^{np}(x_1), \dots, \hat{F}_n^{np}(x_n) \right)$$

Die Funktion \hat{C}^{np} ist auf dem Gitter $g_D = \{(\frac{t_1}{D}, \dots, \frac{t_n}{D}), 1 \leq t_i \leq D, 1 \leq i \leq n\}$ eindeutig

definiert durch

$$\hat{C}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \dots, \frac{t_n}{D}\right) = \frac{1}{D} \sum_{t=1}^D \mathbb{I}_{\{X_{1t} \leq X_1^{(t_1)}, \dots, X_{nt} \leq X_n^{(t_n)}\}}.$$

Bemerkung 7.3.2.

1. Äquivalent dazu kann man \hat{C}^{np} mittels Rangstatistiken darstellen als

$$\hat{C}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \dots, \frac{t_n}{D}\right) = \frac{1}{D} \sum_{t=1}^D \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{(R_{it} \leq t_i)\}}.$$

2. Es gilt $\sup_{u \in [0,1]} |\hat{C}^{np}(u) - C(u)| \mapsto 0$, fast sicher. Das heißt, die empirische Copula konvergiert gleichmäßig fast sicher gegen die zugrunde liegende Copula, wenn der Umfang der Stichprobe gegen Unendlich geht, was in [7] bewiesen wird.

Zu einer empirischen Copula \hat{C}^{np} lässt sich auch eine empirische Dichte angeben.

Definition 7.3.3. Die empirische Dichte einer empirischen Copula ist definiert durch

$$\hat{c}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \dots, \frac{t_n}{D}\right) = \begin{cases} \frac{1}{D}, & \text{falls } (X_{1t}, \dots, X_{nt}) \text{ ein Element der Stichprobe ist.} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese diskrete Dichte \hat{c}^{np} lässt sich wie üblich mit ihrer Copula in Verbindung bringen.

Bemerkung 7.3.4. Für eine empirische Copula \hat{C}^{np} mit Dichte \hat{c}^{np} gilt

$$\hat{C}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \dots, \frac{t_n}{D}\right) = \sum_{j_1=1}^{t_1} \dots \sum_{j_n=1}^{t_n} \hat{c}^{np}\left(\frac{j_1}{D}, \dots, \frac{j_n}{D}\right).$$

Mit diesen Definitionen der Dichte und der Verteilungsfunktion sind wir nun in der Lage Abhängigkeitsmaße einer Copula auf Grundlage der empirischen Copula darzustellen.

Satz 7.3.5. [31, Theorem 5.2] Seien \hat{C}^{np} eine empirische Copula und sei \hat{c}^{np} ihre Dichtefunktion. Weiter sei die Stichprobe $\{(X_{1t}, X_{2t})^T\}_{t=1}^D$ gegeben. Dann lässt sich Kendall's τ und Spearman's ρ auf Grundlage der empirischen Copula bestimmen durch

$$\hat{\tau}^{np} = \frac{2D}{D-1} \sum_{t_1=1}^D \sum_{t_2=1}^D \sum_{j_1=1}^{t_1-1} \sum_{j_2=1}^{t_2-1} \left(\hat{c}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \frac{t_2}{D}\right) \hat{c}^{np}\left(\frac{j_1}{D}, \frac{j_2}{D}\right) - \hat{c}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \frac{j_2}{D}\right) \hat{c}^{np}\left(\frac{j_1}{D}, \frac{t_2}{D}\right) \right)$$

und

$$\hat{\rho}^{np} = \frac{12}{D^2-1} \sum_{t_1=1}^D \sum_{t_2=1}^D \left(\hat{C}^{np}\left(\frac{t_1}{D}, \frac{t_2}{D}\right) - \frac{t_1}{D} \frac{t_2}{D} \right).$$

Beweis. Dies wird bewiesen, indem man die Schätzer von Kendall's τ aus 3.3.3 und Spearman's ρ aus 3.4.5 auf die Stichprobe anwendet, die der empirischen Copula zugrunde liegt. Ausgeführt wird dies in [31, Seite 178]. \square

Die empirische Copula hat den Vorteil, dass sie sich unkompliziert aus einer Stichprobe ermitteln lässt, jedoch hat sie den großen Nachteil, dass sie unstetig ist. Daher sollte man, um stetige Verteilungsfunktionen zu schätzen, besser zur Methode der Kernschätzer übergehen, welche im Folgenden vorgestellt wird.

7.3.2 Nichtparametrische Kernschätzung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Glättungsmethoden. Diese zählen ebenfalls zu den nichtparametrischen Schätzmethoden, da sie keine ex-ante Information für die zu schätzenden Verteilungen benötigen. Eine bekannte Glättungsmethode ist die mittels Kernschätzer, welche in diesem Abschnitt erarbeitet wird. Kernschätzer lassen sich sowohl auf die Copuladichten als auch auf die Dichten der Randverteilungen anwenden. Grundlage dieses Abschnitts ist [33].

Bei Gijbels und Mielniczuk [20] wird das Finden eines Kernschätzers für Copuladichten erarbeitet. Fermanian und Scaillet haben in [13] einen nichtparametrischen Kernschätzer für die Copulafunktion entwickelt.

Im Folgenden wird der Begriff des Kerns definiert, um danach auf die beiden beschriebenen Ansätze zur Kernschätzung näher einzugehen.

7.3.2.1 Grundlagen eines Kernschätzers

Definition 7.3.6. (Kern) Eine reelle, beschränkte und symmetrische Funktion $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ ist ein *Kern*, falls gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s) ds = 1.$$

Ein Kern ist somit die Lebesgue-Dichte eines beliebig wählbaren Wahrscheinlichkeitsmaßes. Für den multivariaten Fall kann man n -dimensionale Kerne definieren. Der einfachste Fall ist hier der *Produktkern*, welcher das Produkt von n univariaten Kernen ist:

$$k(s) = \prod_{i=1}^n k_i(s_i)$$

Der Produktkern hat die Stammfunktion

$$K(s) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{s_i} k_i(t_i) dt_i = \prod_{i=1}^n K_i(s_i).$$

Mit den Kernen können wir nun Kernschätzer definieren.

Definition 7.3.7. (univariater Kernschätzer) Ein *univariater Kernschätzer* \hat{f} auf Grundlage einer Stichprobe (x_1, \dots, x_D) ist nun definiert als

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{Dh} \sum_{t=1}^D k\left(\frac{x - x_t}{h}\right),$$

mit Bandbreite $h > 0$ und univariatem Kern k .

Bemerkung 7.3.8. Um konsistente Schätzer zu erhalten, muss für die Kerne gelten, dass sie stetig, symmetrisch und fast überall glatt sind. Diese Kerne lassen sich in zwei Klassen einteilen. Die erste Klasse besteht aus Kernen, deren Gewicht asymptotisch gegen 0 läuft, wie zum Beispiel

- Gaußkern $k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$
- Cauchy-Kern $k(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$
- Picard-Kern $k(t) = \frac{1}{2} \exp(-|t|)$

Die zweite Klasse besteht aus Kernen, die ab einem bestimmten Punkt das Gewicht Null haben, wie beispielsweise:

- Gleichförmiger Kern $k(t) = \frac{1}{2}$ für $|t| \leq 1$ und 0 sonst
- Cosinus-Kern $k(t) = 1 + \cos(2\pi t)$ für $|t| \leq \frac{1}{2}$ und 0 sonst
- Dreieck-Kern $k(t) = 1 - |t|$ für $|t| \leq 1$ und 0 sonst.

Die Wahl des Kerns ist nicht entscheidend für die Güte des Schätzers. Allerdings ist die Bandbreite h entscheidend für die Qualität des Schätzers. Um die Konvergenz des Dichteschätzers zu erhalten, muss für die Bandbreite $\lim_{D \rightarrow \infty} h = 0$ und $\lim_{D \rightarrow \infty} hD = \infty$ gelten. Wählt man h zu klein, so erscheint der Schätzer verwackelt. Für eine zu groß gewählte Bandbreite wird die Schätzung ungenau. Dieses Optimierungsproblem wurde in [32, Section 2.7] gelöst. Dort wird auch eine Konstruktion einer optimalen Bandbreite angegeben.

Definition 7.3.9. (multivariater Kernschätzer) Ein *multivariater Kernschätzer* \hat{f} auf der Grundlage einer Stichprobe $\{(x_{1t}, \dots, x_{nt})^T\}_{t=1}^D$ ist definiert als

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{D|h|} \sum_{t=1}^D k\left(h^{-1}(x - x_t)\right),$$

wobei x und x_t in diesem Fall n -dimensionale Vektoren sind. Die Bandbreite h ist eine Diagonalmatrix mit Elementen $\{h_i\}_{i=1}^n$ und Determinante $|h|$ und k ist ein multivariater Kern.

Bemerkung 7.3.10. Falls ein Produktkern vorliegt, ergibt sich damit für den Kernschätzer

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{D|h|} \sum_{t=1}^D \prod_{i=1}^n k_i \left(\frac{x_i - x_{it}}{h_i} \right).$$

Die individuellen Bandbreiten $h_i(D)$ sind positive Funktionen in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang D mit der Eigenschaften $\lim_{D \rightarrow \infty} h_i = 0$ und $\lim_{D \rightarrow \infty} h_i D = \infty$.

7.3.2.2 Nichtparametrische Kernschätzung der Copula-Dichte nach Gijbels und Mielniczuk

Die nichtparametrische Kernschätzung der Copuladichte nach Gijbels und Mielniczuk befasst sich ausschließlich mit dem bivariaten Fall. Grundlage für diesen Schätzer bildet die einfache Stichprobe $\{X_{1t}, X_{2t}\}_{t=1}^D$ aus dem Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F , Randverteilungen F_1, F_2 und Copula C .

Um den Kernschätzer zu konstruieren, wird als erstes die Stichprobe mittels der empirischen Randverteilungen zu einer Pseudostichprobe

$$\{(\hat{F}_1^{np}(X_{1t}), \hat{F}_2^{np}(X_{2t}))^T\}_{t=1}^D$$

transformiert, wobei die \hat{F}_i^{np} die empirischen Randverteilungen aus Gleichung (7.5) sind.

Mithilfe dieser transformierten Stichprobe ist der natürliche Kernschätzer $\hat{c}^{np}(u_1, u_2)$ gegeben durch

$$\hat{c}^{np}(u_1, u_2) = \frac{1}{Dh_D^2} \sum_{t=1}^D k \left(\frac{u_1 - \hat{F}_1^{np}(X_{1t})}{h_D}, \frac{u_2 - \hat{F}_2^{np}(X_{2t})}{h_D} \right) \quad (7.7)$$

Dabei ist k ein bivariater Kern und $\{h_D\}_{D=1,2,\dots}$ eine Folge positiver Bandbreiten in Abhängigkeit umfangreicher werdender Stichproben D , die gegen 0 konvergiert.

Die bivariate Copula ist auf dem Einheitsquadrat definiert. Der eben vorgestellte Schätzer (7.7) liefert nur sinnvolle Ergebnisse, falls die Beobachtungen der transformierten Stichprobe nicht zu dicht am Rand liegen. Die Idee des Kernschätzers ist nämlich, die Punkte der Beobachtungen durch die Kerne zu verschmieren. Liegt ein Punkt dabei zu nah am Rand, so kann ein Teil der Masse der Kerne außerhalb des Einheitsquadrates liegen und würde somit nicht mehr berücksichtigt werden.

Die Idee ist hierbei, die Masse der Kerne, welche über das Einheitsquadrat hinaus ragt, zurückzuspiegeln, damit sich die Wahrscheinlichkeitsmasse über dem Einheitsquadrat wieder zu eins summiert. Dieses Prinzip lässt sich für den eindimensionalen Fall zeigen.

Wir betrachten in Abbildung 7.1 den Fall, dass eine Kerndichteschätzung im Einheitsintervall auf der Grundlage dreier Beobachtungspunkte durchgeführt werden soll. Dazu benutzen wir Gaußkerne und Bandbreite $h = 0,2$. Wie in dieser Abbildung verdeutlicht wird, würde

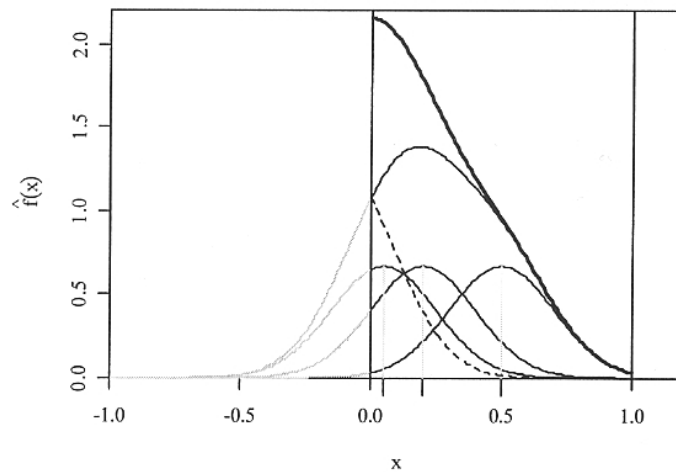


Abbildung 7.1: Univariate Kerndichteschätzung innerhalb eines Intervalls. Quelle: [34, Seite 106]

ein erheblicher Teil der Masse der Kerne am linken Rand nicht mehr über dem Einheitsintervall liegen und somit wegfallen. Dieser Teil wird zurückgespiegelt (gestrichelte Linie) und zur dortigen Dichte dazuaddiert. Dadurch erhält man die dicke Linie. Die Idee ist also, durch Spiegelung der Punkte an der Intervallgrenze die Anzahl der Punkte zu verdoppeln. Eine Kerndichteschätzung mit der verdoppelten Anzahl an Beobachtungspunkten führt über dem Einheitsintervall zu genau der dicken Linie, welche sich durch die Spiegelung ergeben hat. Gleichmaßen würde man an der rechten Intervallgrenze verfahren.

Im bivariaten Fall wird das Problem der Verzerrtheit an den Rändern ebenfalls durch die Spiegelbild-Modifikation gelöst. In Abbildung 7.2 wird dies am Beispiel von sieben Beob-

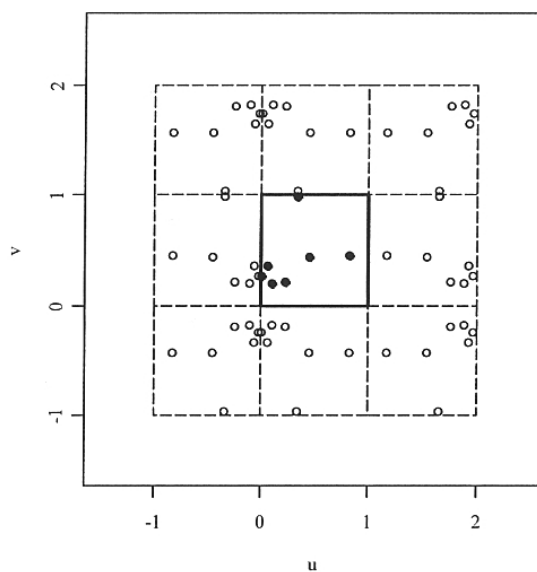


Abbildung 7.2: Grafische Illustration der bivariaten Spiegelbild-Modifikation. Quelle: [34, Seite 107]

achtungspunkten gezeigt. Diese sieben Punkte werden jeweils an den Seiten und Ecken des Einheitsquadrates gespiegelt, wodurch die Anzahl der Beobachtungen verneunfacht wird. Die Kerndichteschätzung wird nun mit dem erweiterten Datensatz durchgeführt, wodurch sich der Kernschätzer für die Copuladichte darstellen lässt als

$$\hat{c}^{np}(u_1, u_2) = \frac{1}{Dh_D^2} \sum_{t=1}^D \sum_{j=1}^9 k \left(\frac{u_1 - R_{1tj}}{h}, \frac{u_2 - R_{2tj}}{h} \right). \quad (7.8)$$

Das Paar (R_{1tj}, R_{2tj}) durchläuft für $j = 1, \dots, 9$ die Menge

$$\{(R_{1t}, R_{2t}), (R_{1t}, -R_{2t}), (-R_{1t}, -R_{2t}), (R_{1t}, 2 - R_{2t}), (-R_{1t}, 2 - R_{2t}), \\ (2 - R_{1t}, R_{2t}), (2 - R_{1t}, -R_{2t}), (2 - R_{1t}, 2 - R_{2t})\},$$

mit $R_{1t} = \hat{F}_1^{np}(X_{1t})$ und $R_{2t} = \hat{F}_2^{np}(X_{2t})$.

Unter bestimmten Bedingungen an die Bandbreite und die Glattheit des Kerns ist in [20, Section 3] gezeigt worden, dass der Schätzer aus Gleichung (7.8) konsistent und asymptotisch normalverteilt ist.

7.3.3 Nichtparametrische Kernschätzung der Copula nach Fermanian und Scaillet

Die nichtparametrische Kernschätzung der Copula ist von Fermanian und Scaillet in [13] entwickelt worden. Grundlage dafür ist ein strikt stationärer Prozess $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, welcher Werte in \mathbb{R}^n annimmt. Man wertet nun $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})^T$ im Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ aus, so bezeichne $f(x)$ die gemeinsame Dichte und $F(x)$ die gemeinsame Verteilungsfunktion von X_t . Der univariate Kernschätzer für die Randdichte $f_i(x_i)$ von X_{it} an der Stelle x_i sei wie gewohnt definiert als

$$\hat{f}_i^{np}(x_i) = \frac{1}{Dh_i} \sum_{t=1}^D k_i \left(\frac{x_i - X_{it}}{h_i} \right).$$

Für die gemeinsame Dichte $f(x)$ gilt

$$\hat{f}^{np}(x) = \frac{1}{D|h|} \sum_{t=1}^D \prod_{i=1}^n k_i \left(\frac{x_i - X_{it}}{h_i} \right).$$

Mithilfe der Schätzer für die Randdichten können wir nun Schätzer für die Randverteilungen konstruieren. Für einen Schätzer der Randverteilung F_i von X_{it} an der Stelle x_i gilt

$$\hat{F}_i^{np}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \hat{f}_i^{np}(y) dy,$$

und für einen Schätzer für die gemeinsame Verteilungsfunktion F von X_t an der Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ gilt

$$\hat{F}^{np}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \hat{f}^{np}(y) dy.$$

Nach dem Korollar 2.2.11 von Sklar's Theorem kann man eine Copula C in einem beliebigen Punkt $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ schätzen, indem man die Gleichung

$$\hat{C}^{np}(u) = \hat{F}^{np}(\hat{\zeta})$$

an der Stelle $\hat{\zeta} = (\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_n)$ auswertet, wobei die $\hat{\zeta}_i = \inf\{x | \hat{F}_i^{np}(x) \geq u_i\}$ gerade die Kernschätzer der Quantilfunktionen sind.

In [13, Section 3] wird gezeigt, dass der Kernschätzer unter bestimmten Bedingungen an den Kern, an das asymptotische Verhalten der Bandbreite und an den strikt stationären Prozess asymptotisch normalverteilt ist.

Kapitel 8

Anwendungen

In diesem Abschnitt geht es darum, mit der Methode der latenten Zufallsvariablen die Risiken im Kreditportfolio zu modellieren. Diese Methode ist Grundlage für alle Modelle, die vom Merton Modell abgeleitet sind, wie zum Beispiel das Kreditrisikomodell von der KMV Corporation oder von CreditMetrics. Grundlage dieses Abschnitts ist [15].

In diesen Modellen fällt ein Schuldner aus, falls die latente Zufallsvariable einen bestimmten Grenzwert unterschreitet. Die latente Zufallsvariable wird dabei als der Wert der Assets des Schuldners interpretiert und der Grenzwert als der Wert der Verbindlichkeiten. Die Abhängigkeit der Schuldnerausfälle wird dabei durch die Abhängigkeiten der latenten Zufallsvariablen wiedergespiegelt.

Die Modelle von KMV Corporte und von CreditMetrics beruhen auf der Grundlage, dass die latenten Zufallsvariablen gemeinsam normalverteilt sind. Daher werden die Kreditausfälle mit der Gauß-Copula simuliert. Es gibt jedoch keinen überzeugenden Grund, sich für die multivariate Normalverteilung zu entscheiden. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die Verteilung der Portfolioverluste sehr stark von der multivariaten Verteilungsfunktion der latenten Zufallsvariablen abhängt. Dabei kommt zu tragen, dass die multivariate Verteilungsfunktion nicht eindeutig durch ihre Randverteilungen und ihre Korrelationsmatrix bestimmt ist.

In dieser Arbeit wird als Alternative zur Gauß-Copula die Verteilung der Creditportfolioverluste mittels der t -Copula modelliert. Diese besitzt Tail Dependence. Daher generiert sie tendenziell mehr gemeinsame Extremwerte. Dies schlägt direkt auf die Verteilung der Creditportfolioverluste durch, da gemeinsame tiefe Werte der Assets zu gemeinsamen Ausfällen vieler Schuldner führen. Die jüngste Vergangenheit hat gezeigt, dass die gleichzeitigen Ausfälle vieler Kredite tatsächlich vorkommt und daher in einem Modell berücksichtigt werden sollte.

8.1 Modell mit latenten Variablen

Betrachtet wird ein Portfolio von m Schuldnern und einen fester Zeithorizont Z , beispielsweise ein Jahr. Für $1 \leq i \leq m$ sei Y_i die Zufallsvariable, die den Ausfall des Schuldners i am Zeitpunkt Z darstellt. Y_i nimmt die Werte $\{0, 1\}$ an, wobei wir den Wert 1 als Ausfall des

Schuldners interpretieren. Y bezeichnet man als Indikatorvektor. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei noch kein Schuldner ausgefallen.

Sei $X = (X_1, \dots, X_m)^T$ ein m -dimensionaler Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen, welche die latenten Zufallsvariablen zum Zeitpunkt Z darstellen. Weiter seien $(D_1, \dots, D_m)^T$ ein Vektor mit deterministischen Grenzwerten D_i . Dann heißt $(X_i, D_i)_{1 \leq i \leq m}$ ein *Modell mit latenten Variablen* für einen binären Zufallsvektor $Y = (Y_1, \dots, Y_m)^T$, falls genau dann $Y_i = 1$ gilt, wenn $X_i \leq D_i$ ist.

In dem KMV Modell wird die Annahme getroffen, dass die X_i einer multivariaten Normalverteilung genügen. Sie werden als die Änderung der Assets interpretiert. Die Korrelation der Assets wird mit Faktormodellen kalibriert, wobei die Faktoren makro-ökonomische Variablen sind. Die Grenzwerte D_i werden mithilfe der Technik zur Bepreisung von Optionen auf der Grundlage der historischen Unternehmenswerten bestimmt. Bei dem Modell von Creditmetrics läuft es ähnlich.

8.2 Copulas in Modell mit latenten Variablen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Gauß-Copula zu strukturell ähnlichen Modellen führt. Dazu führen wir eine formale Definition für die Äquivalenz von Modellen mit latenten Zufallsvariablen ein.

Definition 8.2.1. Seien $(X_i, D_i)_{1 \leq i \leq m}$ und $(\bar{X}_i, \bar{D}_i)_{1 \leq i \leq m}$ zwei Modelle mit latenten Zufallsvariablen, die die Indikatorvektoren Y und \bar{Y} erzeugen. Die Modelle heißen äquivalent, falls $Y =_d \bar{Y}$ gilt.

Zwei äquivalente Modelle erzeugen also die gleiche Verteilung für die Anzahl der Ausfälle im Kreditportfolio.

In Bezug auf Copulas gilt für äquivalente Modelle folgender Satz:

Satz 8.2.2. Seien $(X_i, D_i)_{1 \leq i \leq m}$ und $(\bar{X}_i, \bar{D}_i)_{1 \leq i \leq m}$ zwei Modelle mit latenten Zufallsvariablen mit latenten Zufallsvariablen, die die Indikatorvektoren Y und \bar{Y} erzeugen. Die Modelle sind äquivalent, wenn

1. $P(X_i \leq D_i) = P(\bar{X}_i \leq \bar{D}_i)$, für $i \in \{1, \dots, m\}$,
2. X und \bar{X} haben die gleiche Copula.

Beweis. Der Beweis ist zu finden in [16, Proposition 3.3.]. □

Die folgende Bemerkung zeigt, dass gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeiten durch Copulas und die individuellen Wahrscheinlichkeiten für den Ausfall der Schuldner dargestellt werden können.

Bemerkung 8.2.3. Man betrachte eine Menge von k Schuldnern $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ mit individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten p_{i_1}, \dots, p_{i_k} . Dann ist die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit dieser k Schuldner gegeben durch

$$P(Y_{i_1} = 1, \dots, Y_{i_k} = 1) = P(X_{i_1} \leq D_{i_k}, \dots, X_{i_k} \leq D_{i_k}) = C_{i_1, \dots, i_k}(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}),$$

wobei C_{i_1, \dots, i_k} die k -dimensionale Randverteilung der Copula C von X ist.

8.3 Vergleich zweier Modelle

In diesem Abschnitt wird das zuvor eingeführte Modell mit latenten Zufallsvariablen nun für zwei Copulas simuliert und verglichen. Einerseits wählt man, wie in den Modellen der KMV Corporation und CreditMetrics, die Gauß-Copula. Als zweites wird das Modell bezüglich der t -Copula betrachtet. Es wird eine Copula mit mehrdimensionaler t -Verteilung gewählt, da die t -Verteilung gegen die Normalverteilung konvergiert, falls man die Freiheitsgrade gegen Unendlich laufen lässt. Daher könnte man vermuten, dass man mit diesen Copulas ähnliche Ergebnisse erhält. Die t -Copula hat allerdings im Gegensatz zur Gauß-Copula Tail Dependence, was in [8, Proposition 1] gezeigt wird. Dies führt dazu, dass bei der t -Copula extreme Ereignisse, also das gleichzeitige Ausfallen vieler Schuldner, häufiger auftreten als bei der Gauß-Copula.

Wir betrachten nun ein homogenes Portfolio von $m = 5000$ Schuldnern, die alle die gleiche individuelle Ausfallwahrscheinlichkeit besitzen. Die Asset-Korrelation zweier Schuldner sei jeweils $r = 0,038$. Damit sind die Modelle:

1. Gauß-Modell; $X \sim N_{5000}(0, R)$,
2. t -Modell; $X \sim t_{5000}(\nu, 0, R)$,

wobei R eine Matrix ist mit den Elementen $R_{ij} = 1$ für $i = j$ und $R_{ij} = 0,0038$ für $i \neq j$. Für die Anzahl der Freiheitsgrade gilt in unserem Fall $\nu = 10$. Die Grenzwerte sind dabei so gewählt, dass $P(Y_i = 1) = \pi = 0,005$ gilt. T sei ein Jahr.

Tabelle 8.1: Ergebnis der Simulation

Modell	Min	25%	Med	Mean	75%	90%	95%	98%	Max
Gauß	0	14	22	25,12	32	46	56	69	186
t	0	0	4	25,23	22	69	120	211	1980

Um nun Aussagen über die gesuchte Verteilungsfunktion der Anzahl der Schuldnerausfälle $M = \sum_{i=1}^{5000} Y_i$ machen zu können, wurden diese beiden Modelle beide für jeweils 100000 Jahre simuliert. Für den Erwartungswert von M gilt $E(M) = m\pi = 25$. Es verwundert daher nicht, dass der empirische Durchschnitt nahe dem Wert 25 liegt. Interessanter sind die hohen Quantile von M , welche mit dem Value-at-Risk korrespondieren. Diese Quantile geben Auskunft über das extreme Risiko, welches implizit in den Modellen enthalten ist. So ist beispielsweise der

Wert zum 95%-Quantil im t -Modell mehr als doppelt so hoch wie im Gauß-Modell. Bei dem 98%-Quantil ist der Wert mit dem t -Modell schon um den Faktor 3 größer.

Dies zeigt, dass im t -Modell deutlich mehr gemeinsame Extremwerte generiert werden als in Gauß-Modell, was sich auf die Tail Dependence im t -Modell zurückführen lässt.

Fazit: Individuelle Ausfallwahrscheinlichkeiten und die Korrelation der Assets reichen nicht aus, um die Risiken eines Kreditportfolios zu bestimmen, da sie die Copula latenter Variablen nicht eindeutig bestimmen.

Kapitel 9

Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist zunächst die Copulatheorie erarbeitet worden. Dabei ist unter anderem Sklar's Theorem bewiesen worden. Mit diesem lässt sich eine multivariate Verteilungsfunktion durch ihre Randverteilungen und eine Copulafunktion darstellen.

Es ist gezeigt worden, dass die Korrelation trotz ihrer großen Bekanntheit einige Nachteile beinhaltet. Um diese zu beheben sind alternative Abhängigkeitsmaße angeführt worden. Kendall's τ und Spearman's ρ haben im Gegensatz zur Korrelation die Vorteile, dass sie wie auch die Copulas invariant gegenüber streng monotonen steigenden Umformungen der Zufallsvariablen sind. Dabei ist die Beziehung zu den Copulas verdeutlicht worden. Ein weiterer Vorteil ist, dass Kendall's τ und Spearman's ρ nicht nur lineare Zusammenhänge messen.

Weiter sind zwei wichtige Klassen von Copulas dargestellt worden: Die archimedischen und die elliptischen Copulas. Zu diesen sind je zwei bekannte Vertreter vorgestellt worden, anhand derer die Berechnung der vorher vorgestellten Abhängigkeitsmaße gezeigt worden ist.

Im Zusammenhang mit der Simulation von Zufallsvektoren ist gezeigt worden, dass man zu gegebener Korrelation und gegebener Randverteilungen nicht in jedem Fall einen Zufallsvektor finden kann, der die die Korrelation und die Randverteilungen besitzt. Es sind sowohl allgemeine Simulationsalgorithmen, als auch auf spezielle Copulafamilien zugeschnittene Simulationsalgorithmen erarbeitet worden, wie die Simulationsmethode nach Marshall und Olkin für die archimedischen Copulas.

Wir haben gesehen, wie man bei gegebenen Datensatz die Parameter einer Copula auf der Grundlage der Maximum-Likelihood-Methode oder der Copulabasierten Abhängigkeitsmaße schätzen kann. Des Weiteren ist die nichtparametrische Schätzung mittels Kernschätzer gezeigt worden. Dabei ist dargestellt worden, wie man die Copuladichte mittels Spiegelungen nach dem Ansatz von Gijbels und Mielniczuk, bzw. die Copula nach dem Ansatz von Fermanian und Scaillet schätzt.

Weiter ist im letzten Kapitel dieser Arbeit nochmals deutlich gezeigt worden, dass sich die Abhängigkeitsstruktur eines Zufallsvektors nicht hinreichend durch die Korrelation determinieren lässt. Dies unterstreicht nochmals die Bedeutung der Copulas bei der Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen.

Literaturverzeichnis

- [1] Angus, J. (1994): The probability integral transform and related results. SIAM. Review 36: pp. 652-654.
- [2] Blum, P.; Dias, A.; Embrecht P. (2002): The ART of dependence Modelling: the latest advances in correlation analysis. In: Alternative Risk Strategies (Morton Lane, Ed.) Risk Books.
- [3] Chambers, J. M.; Mallows, C. L.; Stuck B. W. (1976): A Method for Simulating Stable Random Variables, Journal of the American Statistical Association, 71, pp. 340-344.
- [4] Cherubini, U.; Luciano, E.; Vecchiato, W.(2004): Copula Methods in Finance, John Wiley and Sons, West Sussex.
- [5] Carley, H.; Taylor, M. D. (2002): A new Proof of Sklar's Theorem. In: Cuadras, C.M., Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. pp. 29-34.
- [6] Deheuvels P. (1979): La fonction de dépendance empirique et ses propriétés: Un test non paramétrique d'indépendance. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5e série, 65, pp.274-292.
- [7] Deheuvels P. (1981): A non parametric Test for Independence. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 26, 29-50.
- [8] Demarta, S; McNeil, A.J. (2005): The t copula and related copulas. International Statistical Review, Vol. 73 pp.111 - 129.
- [9] Devroye, L. (1986): Non-Uniform Random Variate Generation, Springer Verlag, New York.
- [10] Embrecht, P; Lindskog F.; McNeil, A. (2001): Modelling dependence with copulas and application to risk management, In: Handbook of heavy tailed distributions in finance, ed. S. Rachev (pp. 329-384): Elsevier.

- [11] Embrecht, P.; McNeil, A.; Straumann, D. (1999): Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls, In: Dempster, M.A.H. (Ed.), Risk Management, Cambridge University Press, Cambridge. pp. 176-223.
- [12] Fang, K.-T.; Kotz, S.; Ng K.-W. (1987): Symmetric Multivariate and Related Distributions. Chapman and Hall, London.
- [13] Fermanian, J.-D.; Scaillet, O. (2003): Nonparametric Estimation of Copulas for Time Series, Journal of Risk, 5, pp. 25-54.
- [14] Fermanian, J.-D.; and O. Scaillet. (2004). Some Statistical Pitfalls in Copula Modelling for Financial Applications. Working Paper 2004-2, HEC Geneva.
- [15] Frey, R.; McNeil, A.; Nyfeler M. (2001): Copulas and credit models. RISK October 2001.
- [16] Frey, R.; A. McNeil (2001): Modelling dependent defaults. Preprint, ETH Zürich, <http://www.math.ethz.ch/frey>.
- [17] Genest, C.; Ghoudi, K.; Rivest, L.-P. (1995): A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions, Biometrika, 82, 543-552.
- [18] Gibbons, J. D. (1993): Nonparametric measures of association, Sage Publications, Newbury Park.
- [19] Gibbons, J. D.; Chakraborti, S. (1992): Nonparametric Statistical Inference. 3. Aufl., Statistics: Textbooks and Monographs, 131, Marcel Dekker, New York.
- [20] Gijbels, I.; Mielniczuk, J. (1990): Estimation the Density of a Copula Function. Communication in Statistics: Theory and Methods, 19 (2), pp. 445-464.
- [21] Greene, W. H. (2003): Econometric Analysis. 5. Aufl. New York.
- [22] Joe, H. (1997): Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman and Hall, London.
- [23] Joe H.; Xu J. J. (1996): The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. Department of Statistics, University of British Columbia, Tech. Rept. 166
- [24] Johnson, N.; L. and Kotz, S. (1972): Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. New York, Wiley.
- [25] Kimberling, C. H. (1974): A probabilistic interpretation of complete monotonicity. Aequationes Math. 10, pp.152-164.

- [26] Lehmann, E. L. (1966): Some Concepts of Dependence, *Ann. Math. Statist.*, 37, pp. 1337-1153.
- [27] Lindskog, F.; McNeil A.; Schmock U. (2003): Kendall's tau for elliptical distributions. In *Credit Risk - Measurement, Evaluation and Management*, edited by Bol, Nakhaeizadeh, Rachev, Ridder and Vollmer, Physica-Verlag Heidelberg
- [28] Ling, C.-H.(1965): Representation of associative functions, *Publ.Math. Debrecen* 12, pp.189-212.
- [29] Marshall, A.W.; Olkin, I. (1988); Families of multivariate distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 83, pp. 834-841.
- [30] McNeil, A. J.; Frey R.; Embrechts, Paul (2005): *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- [31] Nelson, R. (1999): *An introduction to copulas*. Springer, New York.
- [32] Pagan, A.; Ullah, A. (1999): *Nonparametric Econometrics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [33] Savu, C. (2007): *Modellierung multivariater Abhängigkeitsstrukturen auf Finanzmärkten mit archimedischen und hierarchischen archimedischen Copulas*. Logos, Berlin.
- [34] Schmid, F.; Tiede, M. (2006): *Finanzmarktstatistik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [35] Schweizer, B.; Sklar, A.(1983):*Probabilistic Metric Spaces*. North Holland series in probability and applied mathematics, Elsevier Science Publishing Co., New York.
- [36] Sklar, A. (1959): Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, In: *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, pp. 229-231.
- [37] Tiit, E. (1996): Mixtures of multivariate quasi-extremal distributions having given marginals, In: *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. by L. Rüschendorf, B. Schweizer and M. D. Taylor, pp. 337-357, Harvard, CA. Institute of Mathematical Statistics.
- [38] Wang S.; Dhaene, J. (1998): Comonotonicity, Correlation Order and Stop-Loss Premiums. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 22(3), pp.235-243.
- [39] Widder, D. V. (1946): *The Laplace Transform* (Princeton mathematical series, 6; Princeton).
- [40] Xu, J. J. (1996): *Statistical Modelling and Inference for Multivariate and Longitudinal Discrete Response Data*. Ph.D. thesis. Department of Statistics, University of British Columbia.

Abschlussklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln erstellt habe.

Münster, 31.03.2009

Martin Niehof