



Diplomarbeit

Transformation archimedischer Copulas

Themenvergabe:
PD Dr. Volkert Paulsen

Eingereicht von:
Benjamin-Philip Lamers

Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Copulas	6
1.1	Definition	6
1.2	Eigenschaften von Copulas	11
1.3	Abhängigkeitsmaße und Copulas	21
2	Archimedische Copulas	25
2.1	Die symmetrische Konstruktion	30
2.2	Beispiele einparametrischer Familien	38
2.3	Der Verschachtelungs-Ansatz	43
3	Transformationen	50
3.1	Transformation des Erzeugers	50
3.2	Transformation beliebiger 2-Copulas	56
4	Gewinnung einer Copula	63
4.1	Die empirische Copula	63
4.2	Anpassungstests	65
4.2.1	Test parametrischer Familien	65
4.2.2	Die Rosenblatt-Transformation	72
5	Algorithmen	75
5.1	Erzeugen archimedischer Copulas	75
5.1.1	Der symmetrische Fall	75
5.1.2	Verschachtelte archimedische Copulas	76
5.2	Numerisches Invertieren der Laplace-Transformierten	81
5.2.1	Gaver-Wynn-Rho-Algorithmus	81

Einleitung

Auf den Gebieten, in denen mehrdimensionale Verteilungen von Bedeutung sind, hat das Interesse an Copulas und ihrer Verwendung in den letzten Jahren rasant zugenommen. Die Idee hinter Copulas, die eindimensionalen Randverteilungen eines Zufallsvektors $\mathbf{Z}$ mit Hilfe einer Funktion zur mehrdimensionalen Verteilungsfunktion von $\mathbf{Z}$ zu 'koppeln', ist keine neue, aber lange Zeit fehlte dem Thema in Ermangelung praktischer Anwendungsmöglichkeiten die Beachtung. Mit den durch steigende Rechenleistung ständig wachsenden Möglichkeiten der numerischen Analyse fanden sich für das Thema bei Versicherungen und Banken Einsatzfelder, und es rückte wieder mehr in den Fokus. Schon seit knapp über zehn Jahren gibt es ein Lehrbuch von Nelsen [28], das sich ausschließlich mit dem Thema der Copulas befasst, und eines von Joe [19], das sich umfassend mit Copulas im Kontext von anderen Abhängigkeitsmodellen beschäftigt. Die Zahl der Publikationen zu speziellen Problemstellungen rund um dieses Thema wächst beständig.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein grundlegendes Verständnis von Copulas im Allgemeinen und archimedischen Copulas im Speziellen zu vermitteln. Es sollen Optionen aufgezeigt werden mittels Transformation neue Copulas zu kreieren, die an ein gegebenes Problem besser angepasst sind. Zusätzlich soll grundlegendes zum Testen und Simulieren von Rüstzeug bereit gestellt werden.

In Kapitel 1 führen wir einige Definitionen zu Copulas und grundlegende Begriffe ein. Außerdem betrachten wir einige Maße für die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen und deren Zusammenhang mit der den Zufallsvariablen entsprechenden Copula.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit archimedischen Copulas. Neben den zugehörigen Definitionen werden einige beachtenswerte Sätze vorgestellt. Ausgehend vom zweidimensionalen Fall und der symmetrischen Erweiterung auf n Dimensionen werden einzelne archimedische Copulas eingeführt. Zum Schluss des Kapitels gehen wir auf die Möglichkeit des Verschachtelns archimedischer Copulas ein.

Kapitel vier dient der Vorstellung von zwei verschiedenen Varianten der Transformation von Copulas. Das ist zum einen die Transformation des Erzeugers einer Copula. Diese steht damit auch einzig für archimedische Copulas zur Verfügung. Es ist zum anderen die Transformation auf der Ebene der Copula, die auch allgemein anwendbar sind.

Im nächsten Kapitel liegt der Fokus auf den Fragen, wie sich eine, zu gegebenen Daten passende, Copula finden lässt bzw. wie festgestellt werden kann, ob eine bestimmte Copula diesen Daten zu Grunde liegen könnte.

Zum Schluss zeigen wir Wege auf diese Copulas im archimedischen Fall am Computer zu simulieren.

Kapitel 1

Copulas

Es gibt viele Ansätze Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen zu modellieren. Ein solcher Ansatz ist die Verwendung von Copulas. Die Idee dabei ist eine vollkommene Trennung zwischen der Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen und deren eindimensionalen Randverteilungen. Die Bezeichnung *Copula* wurde erstmalig in den Arbeiten von Abe Sklar verwendet. Sie soll die Kopplung von Randverteilungen zu einer gemeinsamen Verteilung zum Ausdruck bringen. Im Folgenden werden wir Copulas wie im Lehrbuch von Nelsen [28] einführen.

1.1 Definition

Um zu einer Definition von Copulas zu gelangen, benötigen wir zuerst eine Volumenfunktion V . Wir zitieren hier die von Nelsen gegebene Definition 2.10.1:

Definition 1.1: Seien die Mengen $S_1, S_2, \dots, S_n$ nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei H eine reellwertige Funktion in n Variablen mit dem Definitionsbereich $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$; ist nun $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ein n -Quader, dessen Eckpunkte allesamt in $\text{Dom}(H)$ liegen; dann definiert

$$V_H(B) = \sum_c \text{sgn}(c) H(c), \quad (1.1)$$

wobei über alle Eckpunkte von B aufsummiert wird und

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } c_k = a_k \text{ für eine gerade Anzahl von } k \\ -1, & \text{wenn } c_k = a_k \text{ für eine ungerade Anzahl von } k \end{cases}$$

gilt, das H -Maß oder H -Volumen von B .

Wir wollen nun zeigen, dass eine solche Volumenfunktion für disjunkte n -Quader additiv ist.

Lemma 1.2: Seien $S_1, S_2, \dots, S_n$ nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei H eine reellwertige Funktion in n Variablen mit dem Definitionsbereich $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$; seien des Weiteren $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und $\tilde{B} = [\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}]$ zwei n -Quader, deren Eckpunkte allesamt in

$\text{Dom}(H)$ liegen. Sei nun das Innere der n -Quader disjunkt und die Vereinigung $B \cup \tilde{B}$ auch ein n -Quader. So ist das Volumen additiv. Es gilt also

$$V_H(B \cup \tilde{B}) := V_H(B) + V_H(\tilde{B}).$$

Bew.: Damit das Innere der n -Quader B und $\tilde{B}$ disjunkt und die Vereinigung $B \cup \tilde{B}$ ebenfalls ein n -Quader ist, müssen $\mathbf{a}$ und $\tilde{\mathbf{a}}$ bzw. $\mathbf{b}$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ jeweils in allen bis auf einer Komponente übereinstimmen. Sei i die Position dieser Komponente, so gilt zusätzlich ohne Einschränkung $b_i = \tilde{a}_i$. Nun definieren wir einen $(n-1)$ -Quader $[\mathbf{d}, \mathbf{e}]$ mit

$$d_j = \begin{cases} a_j = \tilde{a}_j, & \text{für } j < i \\ a_{j+1} = \tilde{a}_{j+1}, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$e_j = \begin{cases} b_j = \tilde{b}_j, & \text{für } j < i \\ b_{j+1} = \tilde{b}_{j+1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem definieren wir die Funktion

$$f : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}^{n-1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n; (x, \mathbf{y}) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Dann gilt in der Notation von (1.1)

$$\begin{aligned} V_H(B) &= \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) H(f(b_i, \mathbf{c})) - \text{sgn}(\mathbf{c}) H(f(a_i, \mathbf{c})), \\ V_H(\tilde{B}) &= \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) H(f(\tilde{b}_i, \mathbf{c})) - \text{sgn}(\mathbf{c}) H(f(\tilde{a}_i, \mathbf{c})) \\ \text{und } V_H(B \cup \tilde{B}) &= \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) H(f(\tilde{b}_i, \mathbf{c})) - \text{sgn}(\mathbf{c}) H(f(a_i, \mathbf{c})), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{c}$ immer über alle Ecken vom $(n-1)$ -Quader $[\mathbf{d}, \mathbf{e}]$ läuft. Mit unserer Annahme $b_i = \tilde{a}_i$ folgt sofort $V_H(B \cup \tilde{B}) = V_H(B) + V_H(\tilde{B})$. $\square$

Die folgenden drei Definitionen entsprechen den Definitionen 2.10.2, 2.10.5 und 2.10.6 im Buch von Nelsen.

Definition 1.3: Eine reellwertige Funktion H mit $\text{Dom}(H) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$ heißt n -wachsend, wenn für alle n -Quader B , deren Eckpunkte alle in $\text{Dom}(H)$ enthalten sind, $V_H(B) \geq 0$ gilt.

Ist der Definitionsbereich einer reellwertigen Funktion H gleich $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, wobei jede Menge S_i ein kleinstes Element a_i enthält, so nennen wir H geordnet, wenn $H(t) = 0$ für alle t des Definitionsbereichs mit $t_j = a_j$ für mindestens ein j . Wenn jede Menge S_j nichtleer ist und ein größtes Element b_j enthält, so heißt es H habe Randfunktionen. Die eindimensionalen-Randfunktionen von H sind die Funktionen

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \text{ für alle } x \text{ in } S_k. \quad (1.2)$$

Bei höherdimensionalen Randfunktionen ist die Anzahl der fest gewählten b_i entsprechend geringer.

Definition 1.4: Eine n -dimensionale Subcopula oder auch n -Subcopula ist eine Funktion C' mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\text{Dom}(C') = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, wobei jedes S_k eine 0 und 1 enthaltende Teilmenge vom Intervall $[0, 1]$ ist;
2. C' ist geerdet und n -wachsend;
3. C' hat eindimensionale Randverteilungen $C'_k, k = 1, 2, \dots, n$, wobei für alle u aus S_k gilt:

$$C'_k(u) = u. \quad (1.3)$$

Definition 1.5: Eine n -dimensionale Copula oder auch n -Copula ist eine n -Subcopula C , deren Definitionsbereich dem ganzen Einheitswürfel $[0, 1]^n$ entspricht.

Anders ausgedrückt heißt das: Eine n -Copula ist eine Funktion C von $[0, 1]^n$ nach $[0, 1]$ mit den drei folgenden Eigenschaften:

1. Für $\mathbf{u}$ aus $[0, 1]^n$ gilt $C(\mathbf{u}) = 0$, wenn $u_k = 0$ für mindestens ein $1 \leq k \leq n$;
2. Für $\mathbf{u}$ aus $[0, 1]^n$ gilt $C(\mathbf{u}) = u_k$, wenn $u_l = 1$ für alle $l \neq k$;
3. Für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aus $[0, 1]^n$, wobei $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ (d.h. $a_k \leq b_k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$), dann gilt $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

Eine Copula ist also eine Subcopula mit maximalem Definitionsbereich.

Hier anschließend soll nun ein einfaches Beispiel einer Copula erörtert werden.

Beispiel 1.1: Wir betrachten die Funktion $\Pi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]; \mathbf{x} \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$.

Es ist leicht zu sehen, dass es sich bei Π um eine Copula handelt: Ist eine Komponente $x_i = 0$, so gilt dies natürlich auch für das Produkt aller Komponenten. Existiert ein $1 \leq k \leq n$ mit $x_j = 1$ für alle $j \neq k$, so ist das Produkt der Komponenten gleich x_k . Die Funktion Π ist also geerdet und hat Randverteilungen. Dass Π n -wachsend ist, ist auch leicht gezeigt: Für jeden n -Quader $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ aus $[0, 1]^n$ gilt

$$\begin{aligned} V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n j_i} \prod_{l=1}^n a_l^{j_l} b_l^{1-j_l} \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-1}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} j_i} (b_n - a_n) \prod_{l=1}^{n-1} a_l^{j_l} b_l^{1-j_l} \\ &\vdots \\ &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Π ist also eine Copula. Diese wird die Produkt-Copula oder auch die Unabhängigkeits-Copula genannt. Den Namen Unabhängigkeits-Copula trägt sie, da durch sie die 'Abhängigkeitsstruktur' von unabhängigen Zufallsvariablen beschrieben wird. Es gilt nämlich,

wie wir durch den Satz von Sklar wissen (vgl. Satz 1.11), wenn X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit Copula C , gemeinsamer Verteilung $\mathbf{F}$ und den Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 sind, die Gleichung $C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \mathbf{F}(x_1, x_2)$. Sind X_1 und X_2 unabhängig, so gilt auch $\mathbf{F}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ und damit $C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \Pi(F_1(x_1), F_2(x_2))$.

Es ist möglich jede beliebige Subcopula so fortzusetzen, dass die Fortsetzung wiederum eine Copula ist. Nelsen [28] beweist dies in Lemma 2.3.5 für den zweidimensionalen Fall. Wir übertragen dies nun auf den allgemeinen Fall von n Variablen.

Lemma 1.6: Sei C' eine n -Subcopula, dann existiert eine Copula C , so dass

$$C(u_1, \dots, u_n) = C'(u_1, \dots, u_n)$$

für alle $(u_1, \dots, u_n)$ aus $\text{Dom}(C')$ gilt. Eine Subcopula kann also zu einer Copula fortgesetzt werden.

Bew.: Sei nun $\text{Dom}(C') = \prod_{i=1}^n S_i$, dann können wir aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit nach Korollar 1.10 C' in einem ersten Schritt stetig zu einer Funktion C'' auf dem Abschluss $\prod_{i=1}^n \overline{S_i}$ fortsetzen. Die Funktion C'' ist auch selbst eine Subcopula, denn die einzige Eigenschaft, die durch eine Erweiterung des Definitionsbereichs beeinflusst wird, ist die Frage, ob C'' auch n -wachsend ist. Dies ist aber klar, weil die Volumenfunktion stetig ist. In einem zweiten Schritt setzen wir C'' nun zu einer Funktion C , die auf dem kompletten Einheitswürfel $[0, 1]^n$ definiert ist, fort. Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ aus $[0, 1]^n$ definieren wir die Größen

$$\begin{aligned} s_i(\mathbf{x}) &:= \max\{s \in \overline{S_i} \mid s \leq x_i\}, \\ \tilde{s}_i(\mathbf{x}) &:= \min\{s \in \overline{S_i} \mid s \geq x_i\}, \\ \lambda_i(\mathbf{x}) &:= (x_i - s_i(\mathbf{x})) / (\tilde{s}_i(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung schreiben wir nur noch s_i , $\tilde{s}_i$ und λ_i . Nun definieren wir den Wert der Funktion C am Punkt $\mathbf{x}$ durch:

$$C(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} C''(s_1^{j_1} \tilde{s}_1^{(1-j_1)}, \dots, s_n^{j_n} \tilde{s}_n^{(1-j_n)}) \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i)^{j_i} \lambda_i^{(1-j_i)}$$

Die Interpolation, mit der wir so Stück für Stück die Lücken im Definitionsbereich schließen, ist in jeder Komponente linear. Deshalb wird sie auch *multilineare Interpolation* genannt.

Um den Beweis abzuschließen, gilt es nun noch zu demonstrieren, dass es sich bei der Funktion C um eine Copula handelt. Dazu gilt es zu zeigen, dass C n -wachsend ist. Hierbei hilft uns Lemma 1.2, denn mit dem Satz von Heine Borel kann gefolgert werden, dass jedes der $\overline{S_i}$ als Teilmenge des kompakten Intervalls $[0, 1]$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat. Jeder beliebige n -Quader $B \subset [0, 1]^n$ kann also so durch endlich viele Teilquader überdeckt werden, dass diese die folgenden Eigenschaften erfüllen: Das Innere der Teilquader ist disjunkt und entweder liegen alle Eckpunkte eines Teilquaders $[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}]$ in $\prod_{i=1}^n \overline{S_i}$ oder es existiert für kein i zwischen 1 und n ein $s'_i \in \overline{S_i}$ mit $x_i < s'_i < \tilde{x}_i$. Für einen n -Quader Q mit sämtlichen Eckpunkten in $\prod_{i=1}^n \overline{S_i}$ wissen wir, dass $V_C(Q) \geq 0$

gilt, so müssen wir nur zeigen, dass dies auch für die übrigen Teilquader gilt. Sei $[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}]$ nun einer von diesen. Nach Voraussetzung stimmen hier $s_i(\mathbf{x})$ und $s_i(\tilde{\mathbf{x}})$ bzw. $\tilde{s}_i(\mathbf{x})$ und $\tilde{s}_i(\tilde{\mathbf{x}})$ überein. Bei $\lambda_i(\mathbf{x})$ und $\lambda(\tilde{\mathbf{x}})$ müssen wir bei der Schreibweise differenzieren, denn $\lambda_i(\mathbf{x}) < \lambda(\tilde{\mathbf{x}})$, und so nutzen wir λ_i und $\tilde{\lambda}_i$:

$$\begin{aligned}
V_C[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}] &= \sum_{\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n h_i} \prod_{k=1}^n [(1 - \lambda_k)^{j_k} \lambda_k^{1-j_k}]^{h_k} [(1 - \tilde{\lambda}_k)^{j_k} \tilde{\lambda}_k^{1-j_k}]^{1-h_k} \times \\
&\quad \times C''(s_1^{j_1} \tilde{s}_1^{1-j_1}, \dots, s_n^{j_n} \tilde{s}_n^{1-j_n}) \\
&= \sum_{\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-1}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} h_i} \prod_{k=1}^{n-1} [(1 - \lambda_k)^{j_k} \lambda_k^{1-j_k}]^{h_k} [(1 - \tilde{\lambda}_k)^{j_k} \tilde{\lambda}_k^{1-j_k}]^{1-h_k} \times \\
&\quad \times [(1 - \tilde{\lambda}_n)C''(\dots, s_n) + \tilde{\lambda}_n C''(\dots, \tilde{s}_n) - (1 - \lambda_n)C''(\dots, s_n) + \lambda_n C''(\dots, \tilde{s}_n)] \\
&= \sum_{\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-1}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} h_i} \sum_{l \in \{0,1\}} (-1)^{\sum_{m=1}^1 l_m} \prod_{p=1}^1 (\tilde{\lambda}_{n-1+p} - \lambda_{n-1+p}) \times \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{n-1} [(1 - \lambda_k)^{j_k} \lambda_k^{1-j_k}]^{h_k} [(1 - \tilde{\lambda}_k)^{j_k} \tilde{\lambda}_k^{1-j_k}]^{1-h_k} \times \\
&\quad \times C''(s_1^{j_1} \tilde{s}_1^{1-j_1}, \dots, s_{n-1}^{j_{n-1}} \tilde{s}_{n-1}^{1-j_{n-1}}) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-r}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n-r} h_i} \sum_{l \in \{0,1\}^r} (-1)^{\sum_{m=1}^r l_m} \prod_{p=1}^r (\tilde{\lambda}_{n-r+p} - \lambda_{n-r+p}) \times \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{n-r} [(1 - \lambda_k)^{j_k} \lambda_k^{1-j_k}]^{h_k} [(1 - \tilde{\lambda}_k)^{j_k} \tilde{\lambda}_k^{1-j_k}]^{1-h_k} \times \\
&\quad \times C''(s_1^{j_1} \tilde{s}_1^{1-j_1}, \dots, s_{n-r}^{j_{n-r}} \tilde{s}_{n-r}^{1-j_{n-r}}, s_{n-r+1}^{l_1} \tilde{s}_{n-r+1}^{1-l_1}, \dots, s_n^{l_r} \tilde{s}_n^{1-l_r}) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{l \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{m=1}^n l_m} \prod_{p=1}^r (\tilde{\lambda}_p - \lambda_p) C''(s_1^{l_1} \tilde{s}_1^{1-l_1}, \dots, s_n^{l_n} \tilde{s}_n^{1-l_n}) \\
&= \prod_{p=1}^r (\tilde{\lambda}_p - \lambda_p) V_{C''}([\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}]) \geq 0
\end{aligned}$$

Alle Teilquader haben also ein positives Volumen und nach Lemma 1.2 gilt dies auch für den n -Quader B . Die Funktion C ist folglich auch n -wachsend und damit eine Copula. Dass dies im Allgemeinen nicht die einzige mögliche Fortsetzung zu einer Copula ist, ist auch klar. Wäre dies der Fall, so wäre die multilineare Interpolation zu $\prod_{i=1}^n \bar{S}_i = \{0, 1\}^n$, also die Unabhängigkeits-Copula Π_n , die einzig mögliche n -Copula. $\square$

1.2 Eigenschaften von Copulas

Copulas haben einige nützliche Eigenschaften, die wir hier zusammenfassen wollen. Von zentraler Bedeutung ist dabei das Verhältnis zu mehrdimensionalen Verteilungen, das im *Satz von Sklar* geklärt wird.

Das erste Lemma, das wir hier vorstellen, findet sich bei Nelsen als Lemma 2.10.3 bzw. mit Beweis bei Schweizer und Sklar [31] als 6.1.5. Wir übernehmen den Beweis.

Lemma 1.7: Seien $S_1, S_2, \dots, S_n$ nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und H eine geordnete, n -wachsende Funktion mit dem Definitionsbereich $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, dann ist H nichtfallend in jedem Argument; es gilt also, sofern

$$(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \text{ und } (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

in $\text{Dom}(H)$ liegen und $x < y$ gilt, auch

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Bew.: Sei $B = [(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)]$.

Da H n -wachsend ist, gilt $V_H(B) \geq 0$. Da H geordnet ist, lässt sich (1.1) zu

$V_H(B) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ vereinfachen. Es folgt das Gewünschte. $\square$

Die folgenden beiden Lemmata stammen samt Beweis ebenfalls aus [31] (vgl. 6.1.8/6.1.9).

Lemma 1.8: Sei nun H n -wachsend, geordnet und habe Randfunktionen. Liegen

$$(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

für ein beliebiges k zwischen 1 und n in $\text{Dom}(H)$, wobei $x < y$, so gilt

$$\begin{aligned} H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ \leq H_k(y) - H_k(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bew.: Für $n = 2$ ist H 2-wachsend und somit gilt nach (1.1)

$$H(y, b_2) - H(x, b_2) - H(y, t_2) + H(x, t_2) \geq 0,$$

und

$$H(b_1, y) - H(b_1, x) - H(t_1, y) + H(t_1, x) \geq 0.$$

Zusammen ergibt sich sofort (1.4).

Für den Fall $n > 2$ definieren wir die n -dimensionalen Quader

$$\begin{aligned} B_1 &= [(t_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), (b_1, t_2, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)] \\ B_2 &= [(a_1, t_2, a_3, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), (b_1, b_2, t_3, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)] \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= [(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, t_n), (b_1, \dots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \dots, b_n)]. \end{aligned}$$

Da H n -wachsend ist, gilt natürlich $V_H(B_m) \geq 0$ für beliebiges $1 \leq m \leq n-1$, also erst recht

$$\sum_{m=1}^{n-1} V_H(B_m) \geq 0. \quad (1.5)$$

Weil H geerdet ist, kann der Ausdruck (1.1) bei jedem $V_H(B_m)$ soweit vereinfacht werden, dass ein Term mit nur vier Summanden übrig bleibt. Das ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} & H(b_1, \dots, b_m, t_{m+1}, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ & - H(b_1, \dots, b_m, t_{m+1}, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ & - H(b_1, \dots, b_{m-1}, t_m, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ & + H(b_1, \dots, b_{m-1}, t_m, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in (1.5) ein, so entsteht durch Zusammenschieben der Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} & H(b_1, \dots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \dots, b_n) - H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \\ & - H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) + H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Es gilt also die Relation (1.4). □

Lemma 1.9: (vgl. [31]) Sei H wie in Lemma 1.8 und seien $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ beliebige Punkte in $\text{Dom}(H)$, so gilt

$$|H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|. \quad (1.6)$$

Bew.: Mit Hilfe von Lemma 1.7 ist klar, dass (1.4) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & |H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)| \\ & \leq |H_k(x) - H_k(y)| \end{aligned} \quad (1.7)$$

für beliebige $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$, $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$ aus $\text{Dom}(H)$ ist. Nun definieren wir $h_0 = H(x_1, \dots, x, n)$, $h_n = H(y_1, \dots, y_n)$ und

$$h_k = H(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

für $0 < k < n$. Somit kommen wir durch vielfaches Anwenden der Dreiecksungleichung und der Ungleichung (1.7) zu

$$\begin{aligned} |H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| & \leq \sum_{k=1}^n |h_{k-1} - h_k| \\ & \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Für Subcopulas bedeutet dies:

Korrolar 1.10: Sei C' eine n -Subcopula und seien $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ beliebige Punkte in $\text{Dom}(C')$, so gilt:

$$|C'(x_1, \dots, x_n) - C'(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

Das bedeutet Subcopulas sind gleichmäßig stetig.

Der Satz von Sklar ist von fundamentaler Bedeutung, allerdings ist Version für den n -dimensionalen Fall auch sehr schwierig zu beweisen. Wir zitieren ihn deshalb in der Form von Satz 2.10.9 in [28] ohne Beweis an. Ein Beweis für den bivariaten Fall findet sich ebenfalls bei Nelsen.

Satz 1.11 (Satz von Sklar): Sei $\mathbf{F}$ eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen $F_1, F_2, \dots, F_n$, dann existiert eine n -Copula C derart, dass für alle $\mathbf{x}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (1.9)$$

Sind $F_1, F_2, \dots, F_n$ alle stetig, dann ist C eindeutig bestimmt; ansonsten ist C nur auf $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2) \times \dots \times \text{Ran}(F_n)$ eindeutig. Ist C umgekehrt eine n -Copula und sind $F_1, F_2, \dots, F_n$ Verteilungsfunktionen, dann ist die in (1.9) definierte Funktion $\mathbf{F}$ eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Wir verallgemeinern Satz 2.2.3 aus [28], um für n -Subcopulas und damit auch für n -Copulas Abschätzungen in beide Richtungen zu erhalten.

Satz 1.12: Sei C' eine n -Subcopula, so gilt für beliebiges $\mathbf{u}$ aus $\text{Dom}(C')$

$$\max\{1 - n + \sum_{i=1}^n u_i, 0\} \leq C'(\mathbf{u}) \leq \min\{u_i | 1 \leq i \leq n\}.$$

Bew.: Sei $\mathbf{u}$ ein frei aus dem Definitionsbereich von C' gewählter Punkt, so gilt

$$C'(\mathbf{u}) \leq C'(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i,$$

womit die zweite Ungleichung bewiesen ist. Die erste Ungleichung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1.9, denn nach diesem gilt:

$$C'(\mathbf{1}) - C'(\mathbf{u}) \leq \sum_{i=1}^n (1 - u_i)$$

Da die Subcopula geerdet und in jeder Komponente nichtfallend ist, ist auch die Abschätzung gegen Null klar. $\square$

Handelt es sich bei C' um eine Copula, so wird für $\max\{1 - n + \sum_{i=1}^n u_i, 0\}$ abkürzend $W_n(\mathbf{u})$ und für $\min\{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ abkürzend $M_n(\mathbf{u})$ geschrieben. W_n und M_n werden auch als *untere* und *obere Fréchet-Höfdding-Grenze* bezeichnet. Im zweidimensionalen Fall sind W und M auch selbst Copulas, in höheren Dimensionen trifft dies auf W nicht zu.

Wir wollen nun zwei Eigenschaften der Fréchet-Höfdding-Grenzen beweisen.

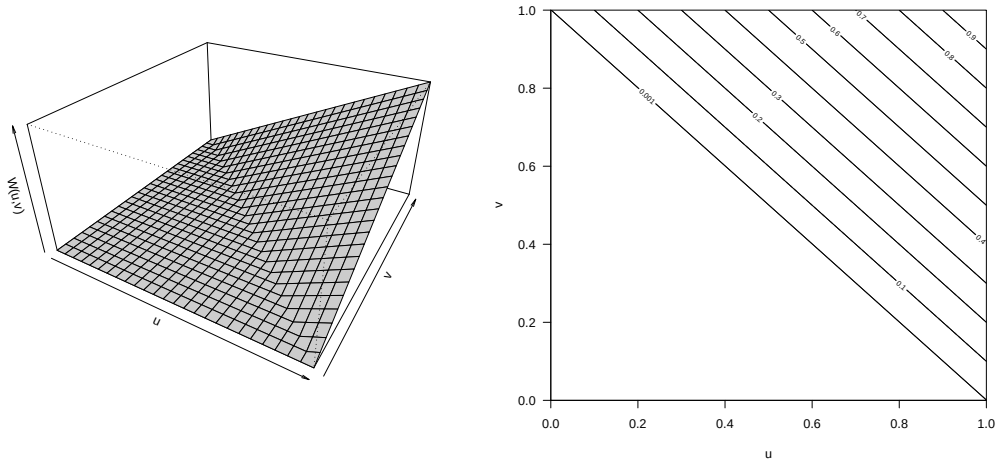


Abbildung 1.1: $W_2(u, v)$ im 3D-Diagramm (l.) bzw. im Isolinien-Diagramm (r.)

Satz 1.13:

- a) Die untere Fréchet-Höfding-Grenze W_n ist im Fall $n = 2$ eine Copula, im Fall $n \geq 3$ allerdings keine.
- b) Die obere Fréchet-Höfding-Grenze M_n ist für $n \geq 2$ eine Copula.

Bew.:

- a) Für $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ gilt $0 \leq \max\{1 - n + \sum_{i=1}^n u_i\} \leq 1$, die Funktion W_n bildet also von $[0, 1]^n$ ins Intervall $[0, 1]$ ab. Es gilt nun die drei Eigenschaften einer Copula aus Def. 1.5 zu überprüfen:

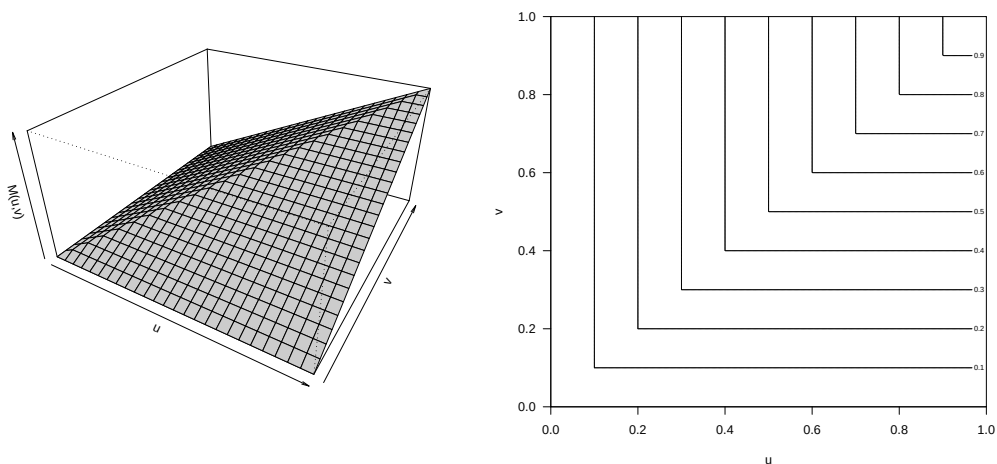


Abbildung 1.2: $M_2(u, v)$ im 3D-Diagramm (l.) bzw. im Isolinien-Diagramm (r.)

1. Existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $u_k = 0$, so gilt $1 - n + \sum_{i=1}^n u_i \leq 0$ und somit $W_n(\mathbf{u}) = 0$.
2. Existiert höchstens ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $u_k \neq 1$, so gilt

$$W_n(\mathbf{u}) = 1 - n + \sum_{i=1}^n u_i = u_k.$$

3. Wir zeigen zunächst anhand eines Gegenbeispiels, dass für $n \geq 3$ die Funktion W_n nicht n -wachsend ist: Wir betrachten den n -Quader $[\frac{1}{2}, 1]^n$, für diesen gilt

$$V_{W_n} = \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) W_n(\mathbf{c}).$$

Hierbei sind alle Summanden gleich Null, wo von $\mathbf{c}$ zwei oder mehr Komponenten gleich $\frac{1}{2}$ sind. Es ergibt sich

$$V_{W_n} = 1 - n \frac{1}{2} < 0.$$

Nun betrachten wir den Fall $n = 2$: Sei $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$, dann gilt

$$V_{W_2}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = W_2((b_1, b_2)) - W_2((a_1, b_2)) - W_2((b_1, a_2)) + W_2((a_1, a_2)).$$

Dass $a_1 + b_2 \geq b_1 + a_2$ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen. So gilt es noch fünf Fälle zu betrachten:

- i. $b_1 + b_2 \leq 1 \Rightarrow V_{W_2} = 0$,
- ii. $a_1 + b_2 \leq 1 < b_1 + b_2 \Rightarrow V_{W_2} = b_1 + b_2 - 1 > 0$,
- iii. $b_1 + a_2 \leq 1 < a_1 + b_2 \Rightarrow V_{W_2} = b_1 - a_1 \geq 0$,
- iv. $a_1 + a_2 \leq 1 < b_1 + a_2 \Rightarrow V_{W_2} = 1 - a_1 + a_2 \geq 0$,
- v. $1 < a_1 + a_2 \Rightarrow V_{W_2} = 0$.

In jedem Fall ist $V_{W_2} \geq 0$.

- b) Für $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ ist auch $0 \leq M_n(\mathbf{u}) \leq 1$. Also bildet auch die Funktion M_n vom Einheitswürfel $[0, 1]^n$ ins Intervall $[0, 1]$ ab. Auch die übrigen Eigenschaften aus Def. 1.5 sind erfüllt:

1. Existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $u_k = 0$, so gilt

$$M_n(\mathbf{u}) = \min\{u_i | 1 \leq i \leq n\} = u_k = 0.$$

2. Existiert höchstens ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $u_k \neq 1$, so gilt

$$M_n(\mathbf{u}) = \min\{u_i | 1 \leq i \leq n\} = u_k.$$

3. Sei nun $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir werden sehen, dass in jedem Fall $V_{M_n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$ und M_n somit n -wachsend ist.

Da M_n symmetrisch ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ist. Damit ergeben sich zwei Fälle, die es zu untersuchen gilt:

- i. $a_n \leq \min\{b_i | 1 \leq i \leq n\}$: Es gilt $V_{M_n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) M_n(\mathbf{c})$, wobei $\mathbf{c}$ über die Ecken des n -Quaders $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ läuft. Für die Hälfte der Ecken, also 2^{n-1} , hat die erste Komponente den Wert a_1 . Für diese gilt $M_n(\mathbf{c}) = a_1$ und zu gleichen Teilen gilt dabei $\text{sgn}(\mathbf{c})$ bzw. $\text{sgn}(\mathbf{c}) = -1$. Diese Summanden heben sich also gegeneinander auf. Für die restlichen Summanden bzw. die zugehörigen 2^{n-1} Ecken gilt, dass wiederum bei der Hälfte die zweite Komponente den Wert a_2 hat. Für diese gilt nun $M_n(\mathbf{c}) = a_2$. Sofern $n \geq 3$ ist, heben sich auch diese Summanden gegeneinander auf. Dieser Schritt wird insgesamt $(n-1)$ -mal wiederholt, bis man die Formel soweit vereinfacht hat:

$$\begin{aligned} V_{M_n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) &= M_n((b_1, \dots, b_n)) - M_n((b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)) \\ &= \min\{b_i | 1 \leq i \leq n\} - a_n \geq 0 \end{aligned}$$

- ii. $\exists 1 \leq k < n; a_k \leq \min\{b_i | 1 \leq i \leq n\} \leq a_{k+1}$: Hier wird analog zum Fall i verfahren. Das Verfahren bricht allerdings bereits nach k Schritten ab, denn dann hat eine Hälfte der übrigen Ecken a_k als minimale Komponente und die andere Hälfte $\min\{b_i | 1 \leq i \leq n\}$ als minimale Komponente und auch in diesem Fall heben sich die Summanden der beiden Hälften untereinander auf. $\square$

Die folgende Definition ist die Verallgemeinerung Definition 2.8.1 aus [28].

Definition 1.14: Wir nennen eine Copula C_1 kleiner als eine Copula C_2 , wenn für alle $\mathbf{u}$ aus $[0, 1]^2$ $C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u})$ gilt. Kurz schreiben wir $C_1 \prec C_2$.

Im zweidimensionalen Fall gilt also $W \prec C \prec M$ für jede beliebige Copula C .

Neben W und M ist die *Unabhängigkeits-Copula* $\Pi(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^n u_i$ von fundamentaler Bedeutung. Wir werden aber sehen, dass die untere Fréchet-Höfding-Grenze, auch wenn sie selbst keine Copula ist, eine optimale Begrenzung darstellt. Wir geben dazu Satz 2.10.13 von Nelsen an und führen den zugehörigen Beweis weiter aus.

Satz 1.15: Für jedes $n \geq 3$ und jedes $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ aus $[0, 1]^n$ existiert eine (von $\mathbf{u}$ abhängige) n -Copula C mit

$$C(\mathbf{u}) = W_n(\mathbf{u}).$$

Bew.: Sei $\mathbf{u}$ ein fest gewählter Punkt aus $[0, 1]^n$ ungleich den Punkten $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ und $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Die beiden Punkte können wir bei der weiteren Betrachtung ausschließen, da für jede beliebige Copula C' gilt $C'(0, 0, \dots, 0) = 0$ und $C'(1, 1, \dots, 1) = 1$. So gilt es nun zwei Fälle zu betrachten:

1. Sei $0 < u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq n-1$. Wir können nun zu jedem k zwischen eins und n ein t_k bestimmen derart, dass $1 \geq t_k \geq u_k$ und die Summe $\sum_{k=1}^n t_k = n-1$ ist. Dann betrachten wir die Punktmenge V mit höchstens 3^n Elementen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, wobei jedes der v_k einen der Werte 0, 1 oder t_k annimmt. Nun definieren wir eine Funktion C' in n Variablen auf dieser Menge durch $C'(\mathbf{v}) = W_n(\mathbf{v})$. Für den Punkt $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ergibt sich dann $C'(\mathbf{t}) = 0$ und für jedes $k = 1, 2, \dots, n$ liegt das

Volumen des n -Quaders $B_k = [\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k]$ mit $\mathbf{a}_k := (0, \dots, 0, t_k, 0, \dots, 0)$ und $\mathbf{b}_k := (t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \dots, t_n)$ bei

$$\begin{aligned} V_{C'}(B_k) &= \sum_c \operatorname{sgn}(c) C'(c) \\ &= \sum_c \operatorname{sgn}(c) W_n(c) \\ &= W_n(\mathbf{b}_k) \\ &= 1 - t_k. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit ergibt sich aus der Tatsache, dass jeder von $\mathbf{b}_k$ verschiedene Eckpunkt c entweder mindestens eine Komponente mit dem Wert Null hat oder selbst dem Punkt $\mathbf{t}$ entspricht und somit $W_n(c) = 0$ gilt.

Für alle übrigen n -Quader $[\mathbf{d}, \mathbf{e}]$ der Menge V , deren Inneres disjunkt von sämtlichen B_k 's ist, gilt, dass ihr Volumen gleich Null ist.

Für den Spezialfall $\mathbf{d} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{e} = \mathbf{t}$ ist die Gleichheit $V_{C'}([\mathbf{d}, \mathbf{e}]) = 0$ unmittelbar klar. Ansonsten wissen wir, dass für $k \geq 2$ Komponenten $d_i = t_i$ und $e_i = 1$ gilt, für eine unbestimmte Anzahl l $d_i = 0$, $e_i = t_i$ und die restlichen $n - k - l$ Komponenten $d_i = 0$ und $e_i = 1$ gilt. Da W_n symmetrisch ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} d_i &= t_i \text{ und } e_i = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq k; \\ d_i &= 0 \text{ und } e_i = t_i \text{ für } k+1 \leq i \leq k+l; \\ d_i &= 0 \text{ und } e_i = 1 \text{ für } k+l+1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

So ergibt sich für das Volumen des n -Quaders $[\mathbf{d}, \mathbf{e}]$:

$$\begin{aligned} V_{C'}([\mathbf{d}, \mathbf{e}]) &= \sum_{h \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{j=1}^n h_j} C'(d_1^{1-h_1} e_1^{h_1}, \dots, d_n^{1-h_n} e_n^{h_n}) \\ &= \sum_{h \in \{0,1\}^k} (-1)^{\sum_{j=1}^k h_j} W_n(t_1^{1-h_1}, \dots, t_k^{1-h_k}, t_{k+1}, \dots, t_{k+l}, 1, \dots, 1) \\ &\stackrel{*1}{=} \sum_{m=0}^k (-1)^m \left[\binom{k}{m} (1-l+m+L) + \binom{k-1}{m-1} K \right] \\ &= \left[(1-l+L) \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \right] + \left[k \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \frac{m}{k} \right] \\ &\quad + \left[K \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k-1}{m-1} \right] \\ &= \left[(1-l+L) \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \right] - \left[k \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k-1}{m} \right] \\ &\quad - \left[K \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k-1}{m} \right] \\ &\stackrel{*2}{=} 0 \end{aligned}$$

Bei der Gleichung $(*)^1$ sortieren wir die Summanden nach der Anzahl der Komponenten h_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ mit dem Wert Null, aufsteigend von Null bis k . Dabei schreiben wir verkürzt L für $\sum_{i=k+1}^{k+l} t_i$ und K für $\sum_{i=1}^k t_i$. In Gleichung $(*)^2$ machen wir es uns gleich dreifach zu Nutze, dass die Summe alternierender Binomialkoeffizienten gleich Null ist.

Nach Lemma 1.2 ist also das Volumen jedes n -Quaders $B \in V$ nichtnegativ, damit C' n -wachsend und eine n -Subcopula. Diese können wir dann nach Lemma 1.6 zu einer n -Copula C fortsetzen. Es gilt für jedes $\mathbf{x}$ aus dem n -Quader $[\mathbf{0}, \mathbf{t}]$, also insbesondere für den Punkt $\mathbf{u}$ die Gleichheit

$$C(\mathbf{x}) = W_n(\mathbf{x}) = 0.$$

2. Sei $n-1 < u_1 + u_2 + \dots + u_n < n$. Hier verfahren wir ganz ähnlich, wie im ersten Fall und definieren diesmal die t_k so, dass für jedes k zwischen eins und n $0 \leq t_k \leq u_k$ ist und wiederum die Summe $\sum_{k=1}^n t_k = n-1$. Die Punktmenge V definieren wir wie zuvor und definieren auch C' wieder auf V durch $C'(\mathbf{v}) = W_n(\mathbf{v})$. Wir nutzen wieder die multilineare Interpolation zur Fortsetzung von C' zu einer n -Copula C und zeigen zum Abschluss des Beweises, dass für alle $\mathbf{x}$ des n -Quaders $[\mathbf{t}, \mathbf{1}]$, also insbesondere $\mathbf{u}$, die Gleichung $C(\mathbf{x}) = W_n(\mathbf{x}) = x_1 + \dots + x_n + 1 - n$ gilt. Dies folgt aus dem Fakt, dass W_n auf den Teilquadern des Einheitswürfels multilinear ist, wo für jeden Eckpunkt $\mathbf{c}$ die Gleichung $W_n(\mathbf{c}) = 1 - n + c_1 + \dots + c_n$ gilt:

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} W_n(s_1^{j_1}, \dots, s_n^{j_n}) \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i)^{j_i} \lambda_i^{1-j_i} \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} \left(1 - n + \sum_{k=1}^n s_k^{j_k} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(1 - x_i)^{j_i} (x_i - s_i)^{1-j_i}}{(1 - s_i)} \\
&= \left[(1 - n) \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^n \frac{(1 - x_i)^{j_i} (x_i - s_i)^{1-j_i}}{(1 - s_i)} \right] + \\
&\quad \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-1}} \left(s_1 + \sum_{k=2}^n s_k^{j_k} \right) (1 - \lambda_1) \prod_{i=2}^n \frac{(1 - x_i)^{j_i} (x_i - s_i)^{1-j_i}}{(1 - s_i)} + \\
&\quad \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-1}} \left(1 + \sum_{k=2}^n s_k^{j_k} \right) \lambda_1 \prod_{i=2}^n \frac{(1 - x_i)^{j_i} (x_i - s_i)^{1-j_i}}{(1 - s_i)} \\
&= [1 - n + \underbrace{(1 - \lambda_1)s_1 + \lambda_1}_{x_1}] + \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^{n-1}} \sum_{k=2}^n s_k^{j_k} \prod_{i=2}^n \frac{(1 - x_i)^{j_i} (x_i - s_i)^{1-j_i}}{(1 - s_i)} \\
&\quad \vdots \\
&= 1 - n + \sum_{i=1}^n x_i \\
&= W_n(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis komplett. $\square$

Die folgende Aussage wird von Nelsen in Satz 2.2.7 für den zweidimensionalen Fall bewiesen. Wir übertragen dies auf den allgemeinen Fall von n -Dimensionen.

Satz 1.16: Sei C eine n -Copula, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $x_j \in [0, 1]$ für alle $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, dann existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i} C(\mathbf{x})$ für fast alle $x_i \in [0, 1]$. Für einen solchen Vektor $\mathbf{x}$ gilt $0 \leq \frac{\partial}{\partial x_i} C(\mathbf{x}) \leq 1$.

Weiterhin existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} C(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$.

Bew.: Nach Lemma 1.7 ist die Copula C monoton wachsend in jedem Argument, somit ist sie auch nach jedem Argument fast überall partiell differenzierbar. Dabei gilt, ebenfalls aufgrund des monotonen Wachstums, $\frac{\partial}{\partial x_i} C(\mathbf{x}) \geq 0$. Durch Korollar 1.10 folgt auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} C(\mathbf{x}) = \lim_{h \searrow 0} \frac{C(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - C(x_1, \dots, x_n)}{h} \leq \frac{x_i + h - x_i}{h} = 1.$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} C(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ existiert:

Da die Copula C monoton wachsend in jedem der n Argumente ist, gilt insbesondere auch

$$\begin{aligned} & [C(x_1^+, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^+) - C(x_1^-, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^+)] \\ & - [C(x_1^+, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^-) - C(x_1^-, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^-)] \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $x_1^-, x_1^+, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^-, x_n^+ \in [0, 1]$ mit $x_1^- \leq x_1^+$ und $x_n^- \leq x_n^+$. Folglich ist eine Funktion, die x_n auf $C(x_1^+, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - C(x_1^-, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ abbildet monoton wachsend auf dem Intervall $[0, 1]$, so ergibt sich fast überall:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_n} (C(x_1^+, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - C(x_1^-, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)) \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial x_n} C(x_1^+, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \geq \frac{\partial}{\partial x_n} C(x_1^-, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_n} C(\mathbf{x})$ ist also monoton steigend im Argument x_1 und nach analoger Argumentation in jeder der Komponenten $x_1, \dots, x_{n-1}$. Die Argumentation können wir wiederholen und erhalten, dass auch die Funktion $\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1} \partial x_n} C(\mathbf{x})$ fast überall existiert und in den Komponenten $x_1, \dots, x_{n-2}$ monoton wachsend ist. Durch weitere Wiederholungen der Argumentation erhalten wir das gewünschte Resultat. $\square$

Ausgehend von Satz 1.16 können wir die folgende Definition tätigen (vgl. [28] S.23).

Definition 1.17: Sei C eine n -Copula, dann nennen wir

$$A_C(x_1, \dots, x_n) := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_n} C(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

die absolut stetige Komponente von C . Entsprechend definieren wir die singuläre Komponente von C durch $S_C(x_1, \dots, x_n) := C(x_1, \dots, x_n) - A_C(x_1, \dots, x_n)$. Eine Copula ist also immer die Summe ihrer absolut stetigen und ihrer singulären Komponente.

Gilt $C \equiv A_C$, so ist C selbst auch absolut stetig. Gilt $C \equiv S_C$, so ist C singulär.

Als Beispiele wollen wir uns die obere Fréchet-Höfding-Grenze und die Unabhängigkeitscopula anschauen:

Beispiel 1.2: Zuerst gilt es stets den absolut stetigen Teil der Copula zu bestimmen. Im Fall M bedeutet dies:

$$A_M(\mathbf{x}) = \int_{[0, \mathbf{x}]} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} M(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{[0, \mathbf{x}]} 0 d\mathbf{t} = 0.$$

Die Copula M ist also singulär. Um mit dem M -Maß arbeiten zu können, bestimmen wir den Träger von M .

Unter dem Träger einer n -Copula C ist das Komplement der Vereinigung aller offenen Teilmengen mit C -Maß Null in $[0, 1]^n$ zu verstehen. Im Fall der oberen Fréchet-Höfding-Grenze M ist dies die Diagonale $D := \{(x, \dots, x) | x \in [0, 1]\}$.

Um jeden Punkt $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ außerhalb der Diagonale findet sich ein n -Quader mit Maß Null. Aus Gründen der Symmetrie können wir bei einem solchen Punkt ohne Einschränkung annehmen, dass $x_k \leq x_{k+1}$ für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Nun sei $j := \min\{k \in \{1, \dots, n-1\} | x_k \neq x_{k+1}\}$ und $\epsilon \in (0, x_{j+1} - x_j)$ so klein gewählt, dass die Diagonale den Quader $Q := \prod_{k=1}^n (x_k - \epsilon, x_k + \epsilon) \cap [0, 1]^n$ nicht schneidet. Zur Bestimmung des Maßes von Q definieren wir für $k \in \{1, \dots, n\}$ die Werte

$$y_k := \begin{cases} x_k - \epsilon, & \text{für } x_k > \epsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } z_k := \begin{cases} x_k + \epsilon, & \text{für } x_k + \epsilon < 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} V_M(Q) &= \sum_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n k_i} M(y_1^{1-k_1} z_1^{k_1}, \dots, y_n^{1-k_n} z_n^{k_n}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \{1\}^j \times \{0,1\}^{n-j}} (-1)^{\sum_{i=j+1}^n k_i} M(z_1, \dots, z_j, y_{j+1}^{1-k_{j+1}} z_{j+1}^{k_{j+1}}, \dots, y_n^{1-k_n} z_n^{k_n}) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^n \setminus (\{1\}^j \times \{0,1\}^{n-j})} (-1)^{\sum_{i=1}^n k_i} M(y_1^{1-k_1} z_1^{k_1}, \dots, y_n^{1-k_n} z_n^{k_n}) \\ &= \underbrace{\sum_{\mathbf{k} \in \{1\}^j \times \{0,1\}^{n-j}} (-1)^{\sum_{i=j+1}^n k_i} z_1}_{0} + \sum_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^j \setminus \{1\}^j} (-1)^{\sum_{i=1}^j k_i} \underbrace{\sum_{\mathbf{l} \in \{0,1\}^{n-j}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n-j} l_i} y_1}_{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das M -Maß ist also auf der Diagonalen D konzentriert. Zusammen mit dem Wissen, dass $V_M([0, x]^n) = x$ ist, können wir schließen, dass das M -Maß dem Maß einer Gleichverteilung auf D entspricht.

Beispiel 1.3: Auch für die Unabhängigkeitscopula ermitteln wir zuerst die absolut stetige Komponente:

$$A_\Pi(\mathbf{x}) = \int_{[0, \mathbf{x}]} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \Pi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{[0, \mathbf{x}]} 1 d\mathbf{t} = \prod_{i=1}^n x_i = \Pi(\mathbf{x}).$$

Die Copula ist also absolut stetig.

1.3 Abhängigkeitsmaße und Copulas

Es gibt viele verschiedene Indizes, die einen Aspekt der Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen in einer einzigen Zahl zum Ausdruck bringen wollen. Dass ein solcher Index nie ein erschöpfendes Bild der Interdependenzen liefern kann, ist vollkommen klar. Einzelne dieser Indizes beziehen sich nur auf eine Abhängigkeit, die von den konkreten Randverteilungen abstrahiert, und sind somit allein aus der zugehörigen Copula errechenbar. Ein solcher Index ist Spearmans ρ_S . (vgl. [25]) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 und definieren wir $U = F_1(X)$, $V = F_2(Y)$, so bezeichnet $\rho_S(X, Y)$ die Korrelation zwischen U und V . Bei U und V handelt es sich um auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Es ist bekannt, dass für diese Erwartungswert und Varianz durch

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2} \text{ und } Var(U) = Var(V) = \frac{1}{12}$$

gegeben sind. Damit ergibt sich durch

$$\rho_S(X, Y) = \rho(U, V) = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \frac{E[UV] - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}}$$

die gewünschte Unabhängigkeit von den konkreten Randverteilungen und wir können eine Darstellung in alleiniger Abhängigkeit von der Copula zum Zufallsvektor (X, Y) herleiten: Wir nutzen dazu folgende Lemma, das auf Höfding [18] zurückgeht. Der angegebene Beweis stammt aus [24] und wird Höfding zugeschrieben.

Lemma 1.18 (Höfding): Sei $\mathbf{F}$ die Verteilung des zweidimensionalen Zufallsvektors (X, Y) mit den Randverteilungen F_1 und F_2 , dann gilt, sofern die Erwartungswerte $E[XY]$, $E[X]$ und $E[Y]$ existieren,

$$E[XY] - E[X]E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{F}(x, y) - F_1(x)F_2(y)] dx dy. \quad (1.10)$$

Ist C die zugehörige Copula, so gilt

$$E[XY] - E[X]E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C(F_1(x), F_2(y)) - F_1(x)F_2(y)] dx dy. \quad (1.11)$$

Bew.: (vgl. [24]) Seien (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) zwei unabhängige Zufallsvektoren, die beide der Verteilung $\mathbf{F}$ folgen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2(E[X_1Y_1] - E[X_1]E[Y_1]) &= E[X_1Y_1] + E[X_2Y_2] - E[X_1]E[Y_2] - E[X_2]E[Y_1] \\ &= E[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{I}_{(-\infty, u]}(X_1) - \mathbb{I}_{(-\infty, u]}(X_2)) du \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{I}_{(-\infty, v]}(Y_1) - \mathbb{I}_{(-\infty, v]}(Y_2)) dv \right] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((\mathbb{I}_{(-\infty, u]}(X_1) - \mathbb{I}_{(-\infty, u]}(X_2))(\mathbb{I}_{(-\infty, v]}(Y_1) - \mathbb{I}_{(-\infty, v]}(Y_2))) dudv \right]. \end{aligned}$$

Mit $\mathbb{I}_{(-\infty, u]}(\cdot)$ bezeichnen wir hier die Indikatorfunktion zum halboffenen Intervall $(-\infty, u]$. Da wir $E[XY]$, $E[X]$ und $E[Y]$ als endlich vorausgesetzt hatten, können wir nach dem

Ausmultiplizieren mit Hilfe des Satzes von Fubini die Bildung des Erwartungswertes ins Integral ziehen und erhalten

$$\int \int [2\mathbf{F}(u, v) - 2F_1(u)F_2(v)]dudv.$$

Es ergibt sich (1.10) und auch (1.11) folgt sofort. $\square$

Für die Zufallsvariablen U und V , die beide auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt sind, gilt also

$$\text{Cov}(U, V) = \int_{[0,1]^2} (C(u, v) - uv)dudv,$$

was letztlich die folgende Darstellung liefert:

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 12 \int_{[0,1]^2} (C(u, v) - uv)dudv \\ &= 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v)dudv - 3. \end{aligned}$$

Neben Spearman's ρ_s ist Kendall's τ ein weiterer derartiger Index. Er basiert auf dem Konzept der Konkordanz bzw. Diskordanz zweier Paare von Zufallsvariablen. Seien (X, Y) und (X', Y') zwei unabhängige, zweidimensionale, reellwertige Zufallsvektoren, deren Verteilungen übereinstimmen. So nennt man die Realisierung zum Ereignis ω *konkordant*, wenn

$$(X(\omega) - X'(\omega))(Y(\omega) - Y'(\omega)) > 0$$

ist. Bei umgekehrter Ungleichung nennt man die Realisierungen *diskordant*. τ ist nun die Differenz der Wahrscheinlichkeiten, dass zwei unabhängige Paare mit Verteilung $\mathbf{F}$ konkordant oder diskordant sind:

$$\tau := P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0].$$

Sind die beiden Randverteilungen, wie im Fall einer Copula, stetig, so gilt:

$$\tau = 2P[(X - X')(Y - Y') > 0] - 1. \quad (1.12)$$

Dabei gilt, da (X, Y) und (X', Y') die gleiche Verteilung haben:

$$\begin{aligned} P[(X - X')(Y - Y') > 0] &= P(X > X', Y > Y') + P(X < X', Y < Y') \\ &= 2P(X < X', Y < Y'). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $(X', Y') = (x, y)$, so ergibt sich

$$P(X < x, Y < y) = \mathbf{F}(x, y).$$

Betrachten wir nun wieder beliebige (X, Y) :

$$P(X < X', Y < Y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(x, y)d\mathbf{F}(x, y).$$

Insgesamt ergibt sich, wenn C die dem Zufallsvektor zugehörige Copula ist:

$$\begin{aligned}\tau_C &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(x, y) d\mathbf{F}(x, y) - 1 \\ &\stackrel{*1}{=} 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(F_1(x), F_2(y)) dC(F_1(x), F_2(y)) - 1 \\ &\stackrel{*2}{=} 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$= 4E[C(u, v)] - 1.\tag{1.14}$$

Bei Gleichung $(*^1)$ wenden wir den Satz von Sklar an und erhalten $(*^2)$ durch eine einfache Substitution. Die beiden Indizes ρ_s und τ vermitteln unterschiedliche Informationen zu den einzelnen Copulas bzw. zu den entsprechenden Zufallsvariablen. Die Indizes sind aber keineswegs voneinander unabhängig.

Die folgenden beiden Sätze beschreiben diese Abhängigkeit. Sie sind problemlos zu beweisen (vgl. Nelsen [28] Sätze 5.1.9/5.1.10), allerdings sind die Beweise relativ lang, deshalb zitieren wir nur die Resultate.

Satz 1.19: Sind X und Y zwei stetige Zufallsvariablen und bezeichnet τ Kendalls Tau dieser Zufallsvariablen und ρ entsprechend Spearmans Rho, dann gilt

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1.$$

Satz 1.20: Sind X und Y zwei stetige Zufallsvariablen und bezeichnet τ Kendalls Tau dieser Zufallsvariablen und ρ entsprechend Spearmans Rho. Dann gilt

$$\frac{1 + \rho}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau}{2} \right)^2\tag{1.15}$$

und

$$\frac{1 - \rho}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau}{2} \right)^2.\tag{1.16}$$

Nun werden wir uns noch mit dem linearen Korrelationskoeffizienten beschäftigen, dem Abhängigkeitsmaß $\rho = \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$, das Spearmans Rho zugrunde liegt.

Wir werden, durch die Betrachtung von Zufallsvektoren mit identisch verteilten Rändern, sehen, dass ρ zwar nicht in alleiniger Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Copula dargestellt werden kann, die Copula aber doch einen gewichtigen Einfluss darstellt.

Satz 1.21: (vgl. [29]) Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit den fest gewählten Randverteilungen F_1 und F_2 . Ist C die zugrundeliegende Copula und bezeichnen wir den zugehörigen Korrelationskoeffizienten mit ρ_C .

Es gilt:

1. Sind C_1 und C_2 Copulas mit $C_1 \prec C_2$, dann folgt $\rho_{C_1} \leq \rho_{C_2}$.

2. Für jede Copula C ist ρ_C durch die Korrelationskoeffizienten der Fréchet-Höfding-Grenzen beschränkt: $\rho_W \leq \rho_C \leq \rho_M$

Bew.: Nach dem Lemma von Höfding gilt

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C(F_1(x), F_2(y)) - F_1(x)F_2(y)] dx dy.$$

Da die Verteilungen von X und Y , also insbesondere die zugehörigen Erwartungswerte und Varianzen, fest gewählt sind, ergibt sich 1. sofort und mit Hilfe der Fréchet-Höfding-Ungleichung auch 2. $\square$

Sei (X, Y) wieder ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit den Randverteilungen F_1 und F_2 . Die Korrelationskoeffizienten ρ_W und ρ_M seien existent und endlich. Dann lässt sich zu jeder Zahl z des Intervalls $[\rho_W, \rho_M]$ eine Copula C finden mit $\rho_C = z$. Wir definieren dazu die Familie von Copulas

$$C_\alpha := \alpha W + (1 - \alpha)M.$$

Nach der Darstellung der Kovarianz im Beweis von Satz 1.21 gilt $\rho_{C_\alpha} = \alpha \rho_W + (1 - \alpha) \rho_M$. Offensichtlich umfasst die Familie die Fréchet-Höfding-Grenzen sowie eine Copula mit Korrelation 0. Diese ist aber in keinem Fall die Unabhängigkeits-Copula, denn für $C_\alpha = \Pi$ gilt

$$\Pi(x, x) = x = \alpha W(x, x) + (1 - \alpha)M(x, x) = (1 - \alpha)x \text{ für alle } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (1.17)$$

Analog zu Überlebensfunktionen kann auch zu jeder 2-Copula eine Überlebens-Copula definiert werden (vgl. [28] S.28). Zu einer Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion F lautet die Überlebensfunktion

$$\bar{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x),$$

zu einem Zufallsvektor (X, Y) mit der gemeinsamen Verteilung $\mathbf{F}$ und den Randverteilungen F_1 und F_2 lautet die gemeinsame Überlebensfunktion

$$\bar{\mathbf{F}}(x, y) = P[X > x, Y > y] = 1 - F_1(x) - F_2(y) + \mathbf{F}(x, y).$$

So definieren wir die Überlebens-Copula durch

$$\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v).$$

Im zweidimensionalen Fall ist die *Auslauf-Abhängigkeit* (Tail-Dependence) ein wichtiges Abhängigkeitskonzept. Die hier angegebene Definition stammt aus dem Artikel [21] von Junker und May.

Definition 1.22: Eine 2-Copula C heißt unten Auslauf-abhängig, wenn der Grenzwert

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{P[U \leq u, V \leq u]}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lambda_L, \quad \lambda_L \in (0, 1]$$

existiert und größer Null ist bzw. oben Auslauf-abhängig, wenn dies für den Grenzwert

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{P[U > u, V > u]}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u} = \lambda_U, \quad \lambda_U \in (0, 1]$$

gilt.

Kapitel 2

Archimedische Copulas

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit Copulas, die sich, zumindest in der Grundform, allein durch die Angabe der Dimension und einer reellen, eindimensionalen Funktion in einer Variablen beschreiben lassen. Das Kapitel basiert mit Ausnahme des letzten Abschnittes auf der Darstellung in Nelsen [28].

Für eine stetige, streng monoton fallende Funktion $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ mit $\varphi(1) = 0$ definieren wir die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\varphi^{[-1]}(q) = \begin{cases} \varphi^{-1}(q), & \text{für } 0 \leq q \leq \varphi(0) \\ 0 & , \text{ für } \varphi(0) \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ selbst ist stetig und monoton fallend auf ihrem Definitionsbereich $[0, \infty]$. Auf dem Intervall $[0, \varphi(0)]$ ist sie streng monoton fallend. Es gilt $\varphi^{[-1]}(\varphi(q)) = q$ für q aus $[0, 1]$ und

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(q)) &= \begin{cases} q & , \quad \text{für } 0 \leq q \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \text{für } \varphi(0) \leq q \leq \infty \end{cases} \\ &= \min\{q, \varphi(0)\}. \end{aligned}$$

(vgl. 4.1.1 in [28])

Der Satz 4.1.4 von Nelsen gibt uns ein Kriterium dafür, wann aus einer Funktion φ und ihrer Pseudo-Inversen eine Copula gebildet werden kann. Wir zitieren den Satz durch das folgende Lemma und führen den Beweis weiter aus.

Lemma 2.1: *Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige, streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$, dann ist die Funktion $C_\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]; (u, v) \mapsto \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ genau dann eine Copula, wenn φ konvex ist.*

Bemerkung 2.2: *Eine solche Copula bezeichnet man als archimedisch mit Erzeuger φ . Den Erzeuger φ und die zugehörige Copula C_φ bezeichnet man als strikt, wenn φ surjektiv ist. In diesem Fall gilt $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.*

Bew. (des Lemmas): *Die Extremalbedingungen 1. und 2. aus Def 1.5 einer Copula erfüllt C_φ unabhängig von der Konvexität der Funktion φ . Es gilt für alle u aus $[0, 1]$:*

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0, \text{ da } \varphi(u) \geq 0, \text{ also } \varphi(u) + \varphi(0) \geq \varphi(0). \\ C(u, 1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u \end{aligned}$$

Aus Gründen der Symmetrie gilt natürlich ebenfalls $C(0, v) = 0$ und $C(1, v) = v$ für alle v aus dem Intervall $[0, 1]$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die Funktion C_φ genau dann 2-wachsend ist, wenn φ konvex ist. Dies erfolgt in zwei Schritten:

Sei φ und somit nach Bemerkung 2.4 die zugehörige Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ konvex. Wir wählen $x, y, z \in [0, 1]$ mit $x \leq y$. Anschließend setzen wir $a := \varphi(x)$, $b := \varphi(y)$ und $c := \varphi(z)$. Da φ streng monoton fallend ist, gilt $a \geq b$. Nun definieren wir $\gamma := (a-b)/(a-b+c)$ und erhalten so die zwei Gleichungen $a = \gamma(a+c) + (1-\gamma)b$ und $b+c = \gamma b + (1-\gamma)(a+c)$. Aufgrund der Konvexität von $\varphi^{[-1]}$ gilt:

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(a) &\leq \gamma \varphi^{[-1]}(a+c) + (1-\gamma) \varphi^{[-1]}(b) \\ \varphi^{[-1]}(b+c) &\leq \gamma \varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma) \varphi^{[-1]}(a+c)\end{aligned}$$

Durch Summation ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) &\leq \varphi^{[-1]}(a+c) + \varphi^{[-1]}(b) \\ x + C(y, z) &\leq C(x, z) + y\end{aligned}$$

Es gilt folglich für beliebige $x, y, z \in [0, 1]$ mit $x \leq y$ die Ungleichung:

$$C(y, z) - C(x, z) \leq y - x. \quad (2.1)$$

Für beliebige $z_1, z_2 \in [0, 1]$ mit $z_1 \leq z_2$ gilt $C(0, z_2) \leq 0 \leq z_1 \leq z_2 = C(1, z_2)$. Da die Funktionen φ und $\varphi^{[-1]}$ stetig sind, ist auch die Funktion C stetig. Nach dem Zwischenwertsatz existiert folglich ein $t \in [0, 1]$ mit $C(t, z_2) = z_1$, bzw.

$$\varphi(t) + \varphi(z_2) = \varphi(z_1).$$

So ergibt sich:

$$\begin{aligned}C(y, z_1) - C(x, z_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(y) + \varphi(z_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(z_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(y) + \varphi(z_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(z_2) + \varphi(t)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(y) + \varphi(z_2))) + \varphi(t)) + \\ &\quad - \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(z_2))) + \varphi(t)) \\ &= C(C(y, z_2), t) - C(C(x, z_2), t) \\ &\leq C(y, z_2) - C(x, z_2).\end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, weil $C(y, z_2) \geq C(x, z_2)$ ist. (Denn aus $y \geq x$ folgt $\varphi(y) \leq \varphi(x)$, für monoton fallendes φ und damit auch $\varphi^{[-1]}(\varphi(y) + \varphi(z_2)) \leq \varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(z_2))$, da auch $\varphi^{[-1]}$ monoton fallend ist.)

Damit ist die Funktion C also auch 2-wachsend und somit eine Copula, wenn φ konvex ist.

Sei andersherum C eine Copula. Sei $\varphi(0) \geq t > s \geq 0$, so setzen wir $a := \frac{s+t}{2}$, $b := s$ und $c := \frac{t-s}{2}$. Folglich gilt $a > b \geq 0$, $c \geq 0$ und es existieren x, y, z mit $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$

und $\varphi(z) = c$, wobei $x < y$. Nun ist C eine 2-wachsende Funktion, also gilt insbesondere, da $x < y$:

$$C(y, 1) - C(x, 1) - C(y, z) + C(x, z) \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\Leftrightarrow x + \varphi^{[-1]}(\varphi(y) + \varphi(x)) \leq y + \varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(x)) \quad (2.3)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c) \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) + \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t) \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2} \quad (2.6)$$

Die Funktion $\varphi^{[-1]}$ ist also auf dem Intervall $[0, \varphi(0)]$ mittelpunktkonvex und aufgrund ihrer Stetigkeit dort auch konvex.

Die Behauptung folgt nun mit dem folgenden Lemma. □

Lemma 2.3: Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und existiere ein $x \geq 0$, so dass f auf dem Intervall $[0, x]$ monoton fallend und konvex, sowie auf (x, ∞) die Nullfunktion sei, dann ist f konvex.

Bew.: Sei f , wie beschrieben, dann gilt es zu zeigen, dass für alle $0 \leq a \leq b < \infty$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (2.7)$$

1. Im Fall ' $a, b \leq x$ ' gilt (2.7) nach Voraussetzung, denn die Funktion f ist auf dem Intervall $[a, b]$ konvex.

2. Im Fall ' $a, b \geq x$ ' gilt (2.7) wiederum nach Voraussetzung, denn f ist auf dem Intervall $[a, b]$ identisch der Nullfunktion, also konstant und somit konvex.

3. Im Fall ' $a \leq x \leq b$ und $\lambda a + (1 - \lambda)b \geq x$ ' gilt $f(a) \geq 0$, also

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = 0 \leq \lambda f(a) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

4. Mit dem Fall ' $a \leq x \leq b$ und $\lambda a + (1 - \lambda)b < x$ ' sind nun alle Möglichkeiten abgedeckt. Die Zahl $\lambda a + (1 - \lambda)b$ liegt in diesem Fall im Intervall $[a, x]$, folglich lässt sie sich als Konvexkombination aus a und x darstellen. Es existiert also ein $\mu \in [0, 1]$ derart, dass $\lambda a + (1 - \lambda)b = \mu a + (1 - \mu)x$. Es gilt $\mu \leq \lambda$ und so folgt:

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1 - \lambda)b) &= f(\mu a + (1 - \mu)x) \\ &\leq \mu f(a) + (1 - \mu)f(x) \\ &= \mu f(a) \\ &\leq \lambda f(a) \\ &= \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist folglich konvex. □

Korrolar 2.4: Die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ ist genau dann konvex, wenn φ konvex ist.

Die folgenden Beispiele aus Nelsen [28] sind die wohl einfachsten für archimedische Copulas.

Beispiel 2.1: Die Unabhängigkeitscopula Π ist archimedisch mit dem Erzeuger

$$\varphi(x) = -\ln(x).$$

Der Erzeuger ist strikt, die Pseudo-Inverse also gleich der Inversen $\varphi^{-1}(x) = \exp(-x)$.

$$\Pi(u, v) = C_\varphi(u, v) = \exp(-(-\ln(u) - \ln(v))).$$

Beispiel 2.2: Die als Fréchet-Höfding-Grenze eingeführte Copula W ist ebenfalls archimedisch. Ihr Erzeuger ist $\varphi(x) = 1 - x$, die Pseudo-Inverse gleich $\varphi^{[-1]}(x) = \max\{1 - x, 0\}$.

$$W(u, v) = C_\varphi(u, v) = \max\{1 - (1 - u + 1 - v), 0\}.$$

Der folgende Satz (Satz 4.4.2 aus [28]) eröffnet die Möglichkeit, die Ordnung zweier archimedischer Copulas allein anhand der zugehörigen Erzeuger zu bestimmen. Wir zitieren wieder den Satz und führen den Beweis weiter aus:

Satz 2.5: Seien C_1 und C_2 archimedische Copulas mit den Erzeugern φ_1 und φ_2 . Die Relation $C_1 \prec C_2$ gilt genau dann, wenn die Komposition $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ subadditiv ist.

Bew.: Die Funktion $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]; x \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x)$ ist als Komposition zweier stetiger, monoton fallender Funktionen stetig und monoton wachsend. Zudem gilt

$$f(0) = \varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(0)) = \varphi_1(1) = 0.$$

Nach Definition gilt $C_1 \prec C_2$ genau dann, wenn für alle $u, v \in [0, 1]$

$$\varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \leq \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v))$$

gilt.

Sei nun $C_1 \prec C_2$, dann gilt, da φ_1 monoton fallend ist, für alle u und v aus dem Intervall $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) + \varphi_1(v) &= \varphi_1 \circ \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \\ &\geq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) \\ &= f(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x := \varphi_2(u)$ und $y := \varphi_2(v)$, so ergibt sich für $x, y \in [0, \varphi_2(0)]$

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(y) \\ &\leq f(x + y). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Um die Subadditivität von f , also die Ungleichung (2.8) für alle nichtnegativen x, y zu zeigen betrachten wir $x, y \geq 0$ mit $\max\{x, y\} > \varphi_2(0)$. Dabei können wir die Relation $x \leq y$ ohne Einschränkung annehmen. Es sei also $y > \varphi_2(0)$, damit gilt auch

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x) + \varphi_1(0) \\ &\geq \varphi_1(0) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x + y) \\ &= f(x + y). \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ subadditiv.

Setzen wir nun die Subadditivität von f voraus, gelte also

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(y) \leq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(x + y) \quad (2.9)$$

für alle $x, y \geq 0$. Zu $u, v \in [0, 1]$ können wir in (2.9) $x = \varphi_2(u)$ und $y = \varphi_2(v)$ setzen, da die Funktion φ_2 nichtnegativ ist. So ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) + \varphi_1(v) &= \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u)) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(v)) \\ &\leq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)). \end{aligned}$$

Setzen wir nun beide Seiten in die monoton fallende Funktion $\varphi_1^{[-1]}$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) &\geq \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v))) \\ &= \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) \end{aligned}$$

und der Satz ist gezeigt. □

Das Lemma 4.4.3 in Nelsens Buch liefert die zwei interessante Korollare. Aufgrund ihrer Kürze zitieren wir die Beweise mit.

Lemma 2.6: Sei f auf dem Intervall $[0, \infty)$ definiert, konkav mit $f(0) = 0$, dann ist f subadditiv.

Bew.: Wir wollen also zeigen, dass unter den genannten Voraussetzungen für alle $x, y \geq 0$ die Relation $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ gilt. Für den Fall $x = y = 0$ ist die Relation offensichtlich erfüllt, ansonsten können wir die Zahlen x und y wie folgt als Konvexkombinationen von 0 und $x + y$ schreiben:

$$x = \frac{y}{x + y} \cdot 0 + \frac{x}{x + y} \cdot (x + y) \text{ und } y = \frac{x}{x + y} \cdot 0 + \frac{y}{x + y} \cdot (x + y).$$

Die Konkavität von f liefert nun

$$f(x) \geq \frac{y}{x + y} f(0) + \frac{x}{x + y} f(x + y) = \frac{x}{x + y} f(x + y)$$

und entsprechend

$$f(y) \geq \frac{x}{x + y} f(0) + \frac{y}{x + y} f(x + y) = \frac{y}{x + y} f(x + y),$$

also insgesamt

$$f(x) + f(y) \geq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(x+y) = f(x+y).$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas ergibt sich nun ein erstes leichter zu verifizierendes hinreichendes Kriterium, um positive Ordnung zwischen zwei Copulas zu erkennen:

Korrolar 2.7: Sind C_1, C_2 archimedische Copulas mit den Erzeugern φ_1 und φ_2 und ist die Funktion $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ konkav, so gilt $C_1 \prec C_2$.

Korrolar 2.8: Sind C_1, C_2 archimedische Copulas mit den Erzeugern φ_1 und φ_2 und ist die Funktion $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ monoton wachsend auf dem Intervall $(0, 1)$, dann ist $C_1 \prec C_2$.

Bew.: Wir nehmen an $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ sei monoton wachsend auf dem Intervall $(0, \infty)$. Wir definieren die Funktion $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, wobei f wieder die Komposition $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ bezeichnen soll. Die Funktion φ_2 ist streng monoton fallend und von der Komposition $g \circ \varphi_2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ hatten wir angenommen, dass sie monoton wachsend sei. Folglich ist die Funktion g auf dem Intervall $(0, \varphi_2(0))$ monoton fallend. Auf Grund der Stetigkeit von g und der Tatsache, dass $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ für $x \geq \varphi_2(0)$, ist g sogar auf $(0, \infty)$ monoton steigend. Somit gilt für alle $x, y \geq 0$

$$0 \geq x[g(x+y) - g(x)] + y[g(x+y) - g(y)]$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$f(x+y) = (x+y)g(x+y) \leq xg(x) + yg(y) = f(x) + f(y).$$

Die Funktion f ist also subadditiv und nach Satz 2.5 gilt $C_1 \prec C_2$. □

2.1 Die symmetrische Konstruktion

Wir wollen nun das Modell archimedischer Copulas vom 2-dimensionalen auf den n -dimensionalen Fall erweitern. Eine nahe liegende Möglichkeit der Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen liegt in der sogenannten symmetrischen Konstruktion. Dabei hat die Copula die Form $C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$. Der Name bezieht sich darauf, dass eine solche Copula symmetrisch, also invariant unter der Vertauschung der u_i ist.

Die erste benötigte Definition stammt aus dem Buch von Widder [32] (S.144, vgl. auch [28] 4.6.1):

Definition 2.9:

1. Eine Funktion $f(t)$ heißt *absolut monoton* auf einem Intervall I , wenn sie dort stetig, nicht negativ und beliebig oft differenzierbar ist, wobei für alle t aus dem Inneren von I und jede natürliche Zahl k die Ungleichung $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t) \geq 0$ gilt.

2. Eine Funktion $f(t)$ heißt *vollständig monoton* auf einem Intervall I , wenn sie dort stetig, nicht negativ, beliebig oft differenzierbar ist und die Vorzeichen der Ableitungen alternieren, d.h.

$$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t) \geq 0 \text{ für alle } t \text{ aus dem Inneren von } I \text{ und } k = 0, 1, \dots$$

Ist eine Funktion $f(t)$ absolut monoton auf einem Intervall I , so ist die Funktion $f(-t)$ auf $-I$ vollständig monoton. Ist $f(t)$ umgekehrt vollständig monoton auf I , so gilt $f(-t)$ ist absolut monoton auf $-I$. Wir möchten nun zeigen, dass ein archimedischer Erzeuger φ invertierbar ist, wenn die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ überall im Intervall $[0, \infty)$ positiv ist. Zum Beweis zeigen wir zunächst einen Satz über die Möglichkeit einer analytischen Fortsetzung absolut monotoner Funktionen (vgl. [32] S.146) und folgern diese für vollständig monotone Funktionen.

Satz 2.10: Eine Funktion $f(x)$, die für $a \leq x < b$ absolut monoton ist, kann analytisch in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ auf den Kreis mit Radius $b - a$ um den Mittelpunkt a fortgesetzt werden.

Bew.: Die Funktion $f(x)$ ist absolut monoton für $x \in [a, b)$ und somit existieren für $x \in (a, b)$ auch die Ableitungen $f^{(n)}(x)$. Für $x = a$ existieren die rechtsseitigen Ableitungen aufgrund der Stetigkeit, aber aufgrund des Definitionsbereichs von $f(x)$ nur diese. Mangels Verwechslungsgefahr werden wir die rechtsseitigen Ableitungen in a mit $f^{(n)}(a)$ bezeichnen.

Um die Funktion in eine Potenzreihe zu entwickeln, starten wir nun mit der Taylor-Formel und entwickeln um den Punkt a bis zum Glied n -ten Grades.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \text{ mit} \\ R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (x-a - [x-a]t)^n f^{(n+1)}(a + [x-a]t)(x-a) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a + [x-a]t) dt \end{aligned} \tag{2.10}$$

Der Schritt vom ersten Integral zum zweiten lässt sich wohl besser durch eine Variablensubstitution mit $\phi(t) = a + [x-a]t$ in die umgekehrte Richtung erläutern.

Aufgrund der absoluten Stetigkeit von f wissen wir, dass $f^{(n+2)}(x)$ nichtnegativ ist und $f^{(n+1)}(a + [x-a]t)$ eine für $t \in [0, 1]$ in x nichtfallende Funktion ist. So ergibt sich für $a \leq x < c < b$:

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a + [c-a]t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(c-a)^{n+1}} \left[f(c) - f(a) - f'(a)(c-a) - \dots - f^{(n)}(a) \frac{(c-a)^n}{n!} \right] \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(c-a)^{n+1}} R_n(c) \\ &\leq f(c) \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die erste Gleichheit durch iterierte partielle Integration. Schlussendlich kommen wir zu dem Ergebnis, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

ist. Da c beliebig zwischen a und b gewählt werden kann, gilt für alle $x \in [a, b)$ die Gleichung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Für komplexe Zahlen z definieren wir die Fortsetzung entsprechend durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(z-a)^n}{n!}.$$

Die Sätze über den Konvergenzradius von Potenzreihen bestätigen, dass die Fortsetzung $f(z)$ auf dem gewünschten Kreis analytisch ist. $\square$

Korrolar 2.11: Eine Funktion $f(x)$, die für $a < x \leq b$ vollständig monoton ist, kann analytisch in die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden und ist dann analytisch im Kreis mit Radius $b - a$ um den Mittelpunkt b .

Als Konsequenz des letzten Satzes ergibt sich:

Lemma 2.12: Ist eine Funktion $g(t)$ vollständig monoton auf dem Intervall $[0, \infty)$ und existiert ein $c \geq 0$ mit $g(c) = 0$, so ist die Funktion $g(t)$ auf $[0, \infty)$ identisch Null.

Bew.: Sei $g(t)$ vollständig monoton auf dem Intervall $[0, \infty)$ und sei

$$c_0 := \min\{x \in [0, \infty) | g(x) = 0\},$$

wobei $\min\{\} := \infty$. Die Funktion $g(t)$ ist also nicht-negativ und monoton fallend, deshalb gilt $g(t) = 0$ für $t \geq c_0$. Nehmen wir nun an c_0 liege im Intervall $(0, \infty)$, dann können wir $g_{c_0}(t)$ als die Einschränkung von $g(t)$ auf das Intervall $(0, 2c_0]$ definieren. $g_{c_0}(t)$ ist nun auf $(0, 2c_0]$ vollständig monoton und nach dem Korrolar analytisch fortsetzbar auf der Kreisscheibe mit Mittelpunkt und Radius $2c_0$. Gleichzeitig ist $g_{c_0}(t)$ aber auf $[c_0, 2c_0)$ identisch Null. Die Fortsetzung hat also eine nicht isolierte Nullstelle und ist dementsprechend überall identisch Null. Dies widerspricht unserer Definition von c_0 . Folglich ist entweder $g(t) > 0$, für alle t aus dem Intervall $[0, \infty)$ oder $g \equiv 0$. $\square$

Bemerkung 2.13: Aus dem Lemma ergibt sich sofort, dass die Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ eines archimedischen Erzeugers φ positiv auf $[0, \infty)$ ist. Das impliziert, dass $\varphi(0) = \infty$, also dass φ ein strikter Erzeuger ist. Somit gilt $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Nun kommen wir zu Satz 4.6.2 in [28], der uns die Bedingungen vorgibt, die eine Funktion erfüllen muss um für Copulas beliebiger Dimension Erzeuger zu sein. Der Beweis aus Kimberling (vgl. [22] S.155f) wurde weiter ausgeführt.

Satz 2.14: Sei φ eine stetige, streng monoton fallende Funktion von $[0, 1]$ nach $[0, \infty)$, so dass $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$ sind und sei φ^{-1} die Inverse von φ . Die Funktion

$$C_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]; (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_n))$$

ist genau dann eine n -Copula für alle $n \geq 2$, wenn φ^{-1} vollständig monoton auf dem Intervall $[0, \infty)$ ist.

Bew.: Wir wollen zuerst zeigen, dass es sich bei C_n um eine Copula handelt, wenn φ^{-1} vollständig monoton ist. Wie im zweidimensionalen Fall sind die Extremalbedingungen für Copulas auch für beliebiges $n \geq 3$ automatisch erfüllt. Aus der vollständigen Monotonität von φ^{-1} werden wir nun folgern, dass die Funktion C_n auch n -wachsend ist. Dazu zeigen wir in einem ersten Schritt, dass für alle $\mathbf{x}$ aus dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$ und alle $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right] \geq 0 \quad (2.11)$$

Im Folgenden werden wir die Notation $\varphi_k^{-1}(y)$ für die k -te Ableitung $\frac{\partial^k}{\partial y^k} \varphi^{-1}(y)$ nutzen. Für alle y aus $[0, \infty]$ ist nach Lemma 2.12 $\varphi_1^{-1}(y) \neq 0$ oder φ^{-1} konstant. Für konstantes φ^{-1} gilt (2.11) offensichtlich. Um die Ungleichung (2.11) auch für den Fall $\varphi_1^{-1}(y) \neq 0$ zu beweisen, nutzen wir die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right] = \frac{\varphi_k^{-1} [\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)]}{\varphi_1^{-1} [\varphi(x_1)] \dots \varphi_1^{-1} [\varphi(x_k)]}. \quad (2.12)$$

Diese zeigen wir mittels Induktion. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right] = \frac{\varphi_1^{-1} [\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)]}{\varphi_1^{-1} [\varphi(x_1)]}.$$

(2.12) gilt also im Fall $k = 1$. Nun nehmen wir an (2.12) gelte für $k = q - 1$, wobei $1 \leq q \leq n - 1$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{\partial}{\partial x_{q_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right] \right) &= \frac{\partial}{\partial x_q} \frac{\varphi_{q-1}^{-1} [\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)]}{\varphi_1^{-1} [\varphi(x_1)] \dots \varphi_1^{-1} [\varphi(x_k)]} \\ &= \frac{\varphi_q^{-1} [\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)]}{\varphi_1^{-1} [\varphi(x_1)] \dots \varphi_1^{-1} [\varphi(x_k)]}, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit wieder nur auf der Kettenregel beruht.

Aus der vollständigen Monotonität von f folgt nun, dass, wenn q eine gerade Zahl ist, Zähler und Nenner positiv sind und, wenn q ungerade ist, Zähler und Nenner negativ sind. In beiden Fällen ergibt sich also die Nicht-Negativität des Bruches und somit die gewünschte Ungleichung (2.11).

Es ergibt sich also für alle $\mathbf{x}$ aus $[0, 1]^n$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} C_n(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (2.13)$$

Sei nun $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ein beliebiger n -Quader. So bedeutet (2.13)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1} C_n(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1} C_n(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^1} (-1)^{\sum_{i=1}^1 j_i} C_n(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n^{j_1} b_n^{1-j_1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Schrittweise werden nun für alle Komponenten die Punkte b_i und a_i eingesetzt und die Differenz ermittelt. Zu guter Letzt ergibt sich, wie gewünscht

$$V_{C_n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n j_i} C_n(a_1^{j_1} b_1^{1-j_1}, \dots, a_n^{j_n} b_n^{1-j_n}) \geq 0,$$

und folglich ist die Funktion C_n n -wachsend und somit eine Copula.

Nun wollen wir uns der Rückrichtung zuwenden. Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma nach Widder [32].

Lemma 2.15 (Widder): Eine Funktion f ist genau dann vollständig monoton auf dem Intervall $[0, \infty)$, wenn für jede ganze Zahl $n \geq 0$ und alle rationalen Zahlen y und h mit $0 \leq y - nh < \dots < y - h < y < \infty$ die Relation $\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(y - ih) \geq 0$ gilt.

Seien y und h wie im Lemma gefordert. Für $n = 0$ bzw. $n = 1$ ergibt sich sofort

$$\sum_{i=0}^0 (-1)^{0-i} \binom{0}{i} \varphi^{-1}(y - ih) = \varphi^{-1}(y) \geq 0$$

bzw.

$$\sum_{i=0}^1 (-1)^{1-i} \binom{1}{i} \varphi^{-1}(y - ih) = \varphi^{-1}(y - h) - \varphi^{-1}(y) \geq 0,$$

da wir φ^{-1} indirekt als nichtnegativ und monoton fallend definiert hatten.

Sei nun $n \geq 2$ und C_n folglich eine Copula. Wir definieren α und β durch

$$y = n\varphi(\alpha), \text{ bzw. } h = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta).$$

Es gilt $\alpha = \varphi^{-1}(\frac{y}{n})$ und $\beta = \varphi^{-1}(\frac{y}{n} - h)$. Die Tatsache, dass φ^{-1} streng monoton fallend ist führt mit der Relation $0 \leq \frac{y}{n} - h < \frac{y}{n} < \infty$ zu $\alpha \leq \beta$ und damit zu $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$. Es gilt somit

$$\varphi^{-1}(y - ih) = \varphi^{-1}(n\varphi(\alpha) - i(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))) = \varphi^{-1}((n - i)\varphi(\alpha) + i\varphi(\beta)).$$

Folglich gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \varphi^{-1}(y - ih) &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \sum_{\delta \in \Delta_{i,n}} \varphi^{-1}(\sigma(\delta)) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n j_i} \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^n \varphi(\alpha^{j_k} \beta^{1-j_k})\right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n j_i} C_n(\alpha^{j_1} \beta^{1-j_1}, \dots, \alpha^{j_n} \beta^{1-j_n}) \\ &= V_{C_n}([\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

wobei in (*) δ über die Menge $\Delta_{i,n}$ der $\binom{n}{i}$ Ecken des n -Quaders $(\varphi(\beta), \varphi(\alpha)]^n$ läuft, die i Komponenten der Ausprägung $\varphi(\beta)$ und $(n - i)$ Komponenten der Ausprägung $\varphi(\alpha)$ haben. $\sigma(\delta)$ bezeichnet die Summe der Komponenten von δ . Nach Voraussetzung ist C_n n -wachsend und das Resultat $V_{C_n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ deshalb nichtnegativ.

Insgesamt ergibt sich mit Lemma 2.15, dass φ^{-1} vollständig monoton ist. Das schließt den Beweis. $\square$

Der folgende Satz findet sich bei Nelsen als Satz 4.3.4, den Beweis führen wir weiter aus.

Satz 2.16: Sei C eine archimedische Copula in zwei Variablen mit Erzeuger φ . Wenn $K_C(t)$ das C -Maß der Menge

$$\{(u, v) \in [0, 1]^2 | C(u, v) \leq t\} = \{(u, v) \in [0, 1]^2 | \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}$$

ist, dann gilt für alle t aus dem Intervall $[0, 1]$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)},$$

wobei $\varphi'(t^+)$ die rechtsseitige Ableitung von φ im Punkt t bezeichnet.

Bew.: Sei t aus dem offenen Intervall $(0, 1)$ und $w := \varphi(t)$. Im uv -Diagramm entspricht die Menge $K_C(t)$ dem Bereich im Quadrat $[0, 1]^2$ links bzw. unterhalb der Kurve $v = L_t(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u))$. Wir bestimmen das C -Maß von $K_C(t)$ nun mit Hilfe der C -Maße von Rechtecken, deren Vereinigung $K_C(t)$ enthält: Für jede ganze Zahl $n > 0$ kann das Intervall $[t, 1]$ in Teilintervalle mit den Grenzen $t_k = \varphi^{[-1]}((n - k)w/n)$ für $k = 0, \dots, n$ zerlegt werden. Mit R'_k bezeichnen wir das Rechteck $[t_{k-1}, t_k] \times [0, t_{n-k+1}]$ und mit S'_k die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^n R'_k$ (siehe 2.1/vgl. Abb. 4.3 in [28]). Nach Bemerkung 2.4 und Lemma

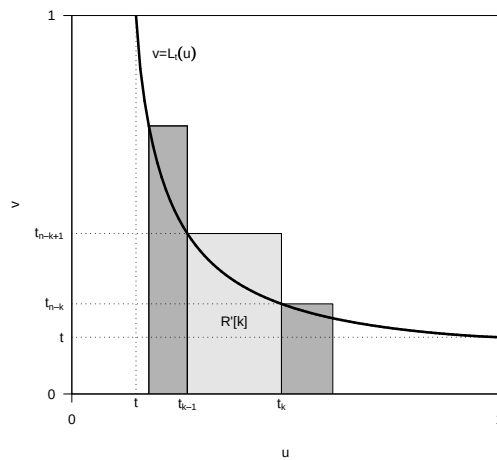


Abbildung 2.1: Zum Beweis von Satz 2.16

2.1 ist der Erzeuger φ konvex und monoton fallend und mit ihm seine Pseudo-Inverse.

Deshalb gilt für alle $k = 0, \dots, n-2$

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \varphi^{[-1]} \left(\frac{(n-k-1)w}{n} \right) \leq \frac{1}{2} \varphi^{[-1]} \left(\frac{(n-k)w}{n} \right) + \frac{1}{2} \varphi^{[-1]} \left(\frac{(n-k-2)w}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} t_k + \frac{1}{2} t_{k+2}, \end{aligned}$$

also gilt

$$0 \leq t_1 - t_0 \leq t_2 - t_1 \leq \dots \leq t_n - t_{n-1} = 1 - t_{n-1}$$

und aufgrund der Stetigkeit der Pseudo-Inversen $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t_{n-1}) = 1 - \varphi^{[-1]}(0) = 0$. So ist nun der Inhalt von $K_C(t)$ gleich der Summe aus dem Inhalt des Rechteckes $[0, t] \times [0, 1]$ und dem Inhalt des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$. Für alle k gilt

$$\begin{aligned} V_C(R'_k) &= C(t_k, t_{n-k+1}) - C(t_k, 0) + C(t_{k-1}, 0) - C(t_{k-1}, t_{n-k+1}) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(t_k) + \varphi(t_{n-k+1})) - \varphi^{[-1]}(\varphi(t_{k-1}) + \varphi(t_{n-k+1})) \\ &= \varphi^{[-1]}((n-k)w/n + (k-1)w/n) - \varphi^{[-1]}((n-k+1)w/n + (k-1)w/n) \\ &= \varphi^{[-1]}((n-1)w/n) - \varphi^{[-1]}(w). \end{aligned}$$

Nun können wir auf den Inhalt von $K_C(t)$ schließen:

$$\begin{aligned} V_C(K_C(t)) &= V_C([0, t] \times [0, 1]) + V_C(\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n) \\ &= t + \lim_{n \rightarrow \infty} V_C(S'_n) \\ &= t + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n V_C(R'_k) \\ &= t + \lim_{n \rightarrow \infty} n \varphi^{[-1]}((n-1)w/n) - \varphi^{[-1]}(w) \\ &= t - \lim_{n \rightarrow \infty} w \frac{\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)}{w/n} \\ &= t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \end{aligned}$$

Dabei wird im letzten Schritt der Umstand ausgenutzt, dass $\varphi(0) > \varphi(t) = w$ und $\varphi^{[-1]}$ somit zumindest auf einer ϵ -Umgebung von w gleich φ^{-1} ist. $\square$

Seien U und V zwei auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen und C die zugehörige Copula, dann kann die Funktion $K_C(t)$ aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht als die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $C(U, V)$ interpretiert werden.

Satz 2.17: (vgl. [28]) Sei C eine archimedische Copula mit dem zugehörigen Erzeuger φ . Kendalls Tau τ_C zu dieser Copula lässt sich dann wie folgt bestimmen:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Bew.: Für zwei $[0, 1]$ -gleichverteilte Zufallsvariablen U und V mit gemeinsamer Copula C ist $K_C(t)$ die Verteilungsfunktion zu $C(U, V)$. Nach (1.14) gilt nun

$$\begin{aligned}
 \tau_C &= 4E[C(U, V)] - 1 \\
 &= 4 \int_{[0,1]} t dK_C(t) - 1 \\
 &= 4 \int_0^1 t \frac{d}{dt} K_C(t) dt - 1 \\
 &= 4tK_C(t)|_0^1 - 1 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt \\
 &= 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt.
 \end{aligned}$$

Nach Satz 2.16 ist $K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}$ und, da φ monoton und so fast überall differenzierbar ist, gilt fast überall $K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$. So gilt

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt,$$

und der Beweis ist komplett. □

2.2 Beispiele einparametrischer Familien

Wir behandeln nun einige wichtige Familien archimedischer Copulas. Ein Überblick über deutlich mehr Familien findet sich z.B. in den Lehrbüchern von Nelsen [28] und Joe [19]. Die hier angegebenen Grenzfälle sind der Übersicht im Buch von Nelsen entnommen (S. 94ff).

Die Abbildungen in diesem Abschnitt wurden in GNU R erzeugt, die dazu benötigten Dichten mit Maple ermittelt.

Frank-Copula

Ein erstes Beispiel einer parametrischen Familie archimedischer Copulas ist die *Familie der Frank-Copulas*. Sie hat die Erzeuger

$$\varphi_\theta(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}.$$

Die zugehörige Inverse ist dann $\varphi_\theta^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln[e^{-t}(e^{-\theta} - 1) + 1]$.

Die Frank-Copula in zwei Variablen mit Parameter $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ hat somit die Form

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Als Extremfälle ergeben sich $C_{-\infty} = W$, $C_0 = \Pi$ und $C_\infty = M$. Mit Hilfe von Isolindien-diagrammen der Dichte ist ersichtlich, dass die Masse für fallendes θ , bei Ausgangspunkt $\theta = 0$, zunehmend auf der Nebendiagonalen konzentriert und dies symmetrisch zu beiden Diagonalen. Umgekehrt konzentriert sich die Masse für steigendes θ entsprechend auf der Hauptdiagonalen. Für die Frank-Copula in n Variablen

$$C_\theta(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right)$$

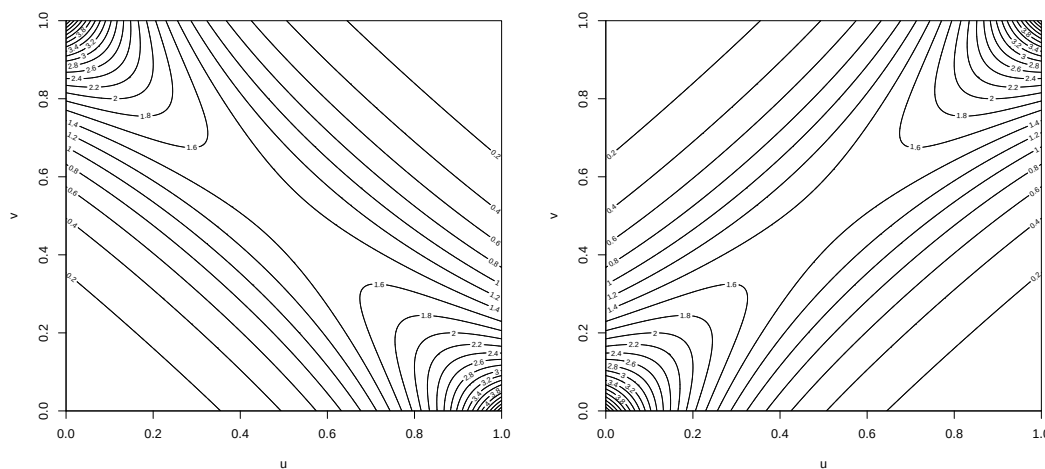


Abbildung 2.2: Isolindien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Frank-Copula mit Parameter $\theta = -5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 5$ (rechts).

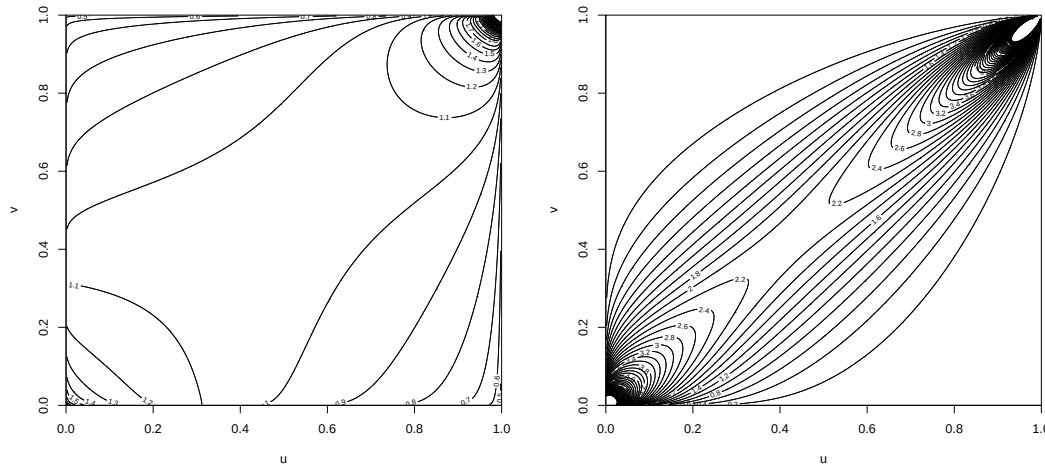


Abbildung 2.3: Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Gumbel-Hougaard-Copula mit Parameter $\theta = 1,1$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 3$ (rechts).

ist der Parameter θ aus dem Intervall $(0, \infty)$ zu wählen, denn nur für solche ist φ_θ vollständig monoton.

Gumbel-Hougaard-Copula

Ein zweites Beispiel einer solchen parametrischen Familie ist die *Familie der Gumbel-Hougaard-Copulas*. Ihre Erzeuger haben die Form $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$. Damit ergibt sich für die zweidimensionale Gumbel-Hougaard-Copula mit Parameter $\theta \in [1, \infty)$

$$C_\theta(u, v) = \exp \left(- \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right).$$

Als Grenzfälle der GH-Copula für $\theta = 1$ bzw. $\theta \rightarrow \infty$ ergeben sich die Unabhängigkeitscopula bzw. die obere Fréchet-Höfding-Grenze. In Abbildung 2.3 erkennt man, dass die Dichte nur im Fall $\theta = 1$ symmetrisch zur Nebendiagonalen ist. Für wachsenden Parameter ist wie bei der Frank-Copula eine wachsende Konzentration der Masse auf der Hauptdiagonalen festzustellen, die aber im Fall der GH-Copula für das obere Ende $(u, v \rightarrow 1)$ stärker zunimmt. Die Symmetrie zur Hauptdiagonalen gilt für die Dichten aller archimedischen Copulas der bisher behandelten Form. Dass dies für höhere Dimensionen nicht für alle Copulas gilt, die als archimedisch bezeichnet werden, werden wir im Abschnitt über den Verschachtelungsansatz sehen.

Allgemein ergibt sich als Form der n -dimensionale Gumbel-Hougaard-Copulas

$$C_\theta(\mathbf{u}) = \exp \left(- \left[- \sum_{i=1}^n \ln u_i \right]^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

In der Literatur wird die Gumbel-Hougaard-Familie auch häufig kurz als Gumbel-Familie bezeichnet, allerdings ist diese Bezeichnung auch für eine weitere parametrische Familie gebräuchlich.

Gumbel-Copula

Als Familie der *Gumbel-Copulas* bezeichnet man nämlich auch die archimedischen Copulas mit Erzeuger $\varphi_G(t) = \ln(1 - \theta \ln t)$ für $\theta \in (0, 1]$. Mit der zugehörigen Inversen $\varphi_\theta^{-1}(t) = \exp \frac{1-e^t}{\theta}$ ergibt sich für die zweidimensionale Variante

$$C_\theta(u, v) = uv \exp(-\theta \ln u \ln v).$$

Als Grenzfall für $\theta \rightarrow 0$ ergibt sich die Unabhängigkeits-Copula.

Für die Masse der Dichte ist zu beobachten, dass sich diese ausgehend von der Gleichverteilung der Unabhängigkeitscopula relativ langsam von den Enden der Hauptdiagonale in Richtung den Enden der Nebendiagonale verschiebt. Dabei nimmt die Masse am unteren Ende der Hauptdiagonale sichtbar schneller ab.

Ali-Mikhail-Haq-Copula

Eine weitere Familie archimedischer Copulas ist die *Ali-Mikhail-Haq-Familie*. Sie basiert auf dem Erzeuger

$$\varphi_\theta(t) = \ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}$$

und der zugehörigen Inversen $\varphi_\theta^{-1}(t) = \frac{1-\theta}{\exp t - \theta}$.

Die zweidimensionale Ali-Mikhail-Haq-Copula mit Parameter $\theta \in [-1, 1)$ ist somit durch

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}$$

definiert.

Ein Spezialfall der AMH-Copula ist die Unabhängigkeitscopula. Diese wird in der Mitte des Parameterraumes im Fall $\theta = 0$ angenommen.

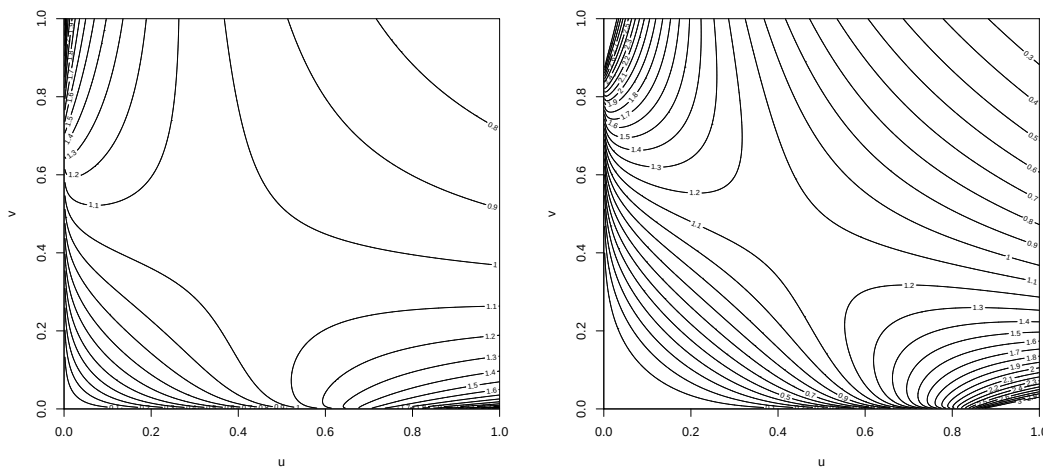


Abbildung 2.4: Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 0,3$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 0,8$ (rechts).

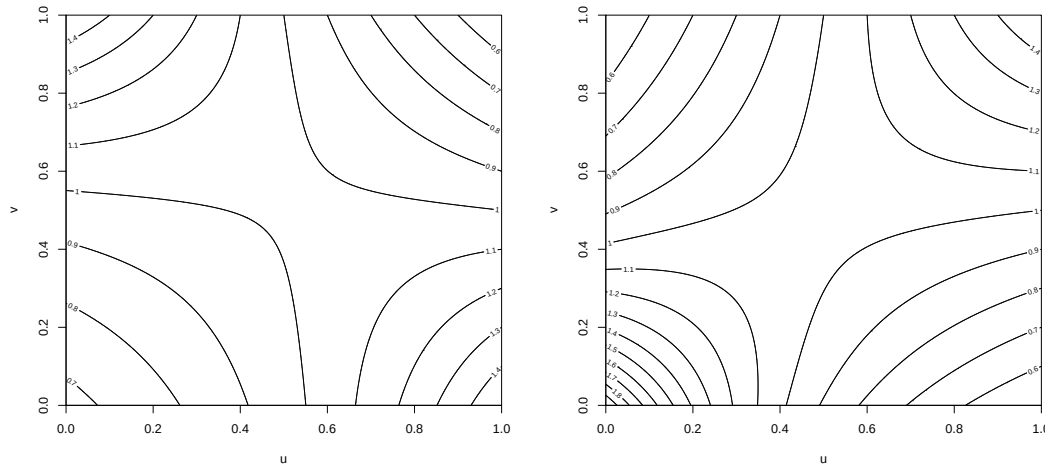


Abbildung 2.5: Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Ali-Mikhail-Haq-Copula mit Parameter $\theta = -0,5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 0,5$ (rechts).

Clayton-Copula

Die Familie der *Clayton-Copulas* ist in der Literatur auch oft als Familie der *Cook-Johnson-Copulas* bezeichnet. Sie wird durch die Funktion

$$\varphi_{\theta}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$$

erzeugt und hat bivariat folglich die Form

$$C_{\theta}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \mathbb{I}_{\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \geq 0\}}.$$

Die Dichte der Clayton-Copula hat vor allem für negative θ eine beachtenswerte Form. Die Masse verlagert sich ausgehend vom Spezialfall $C_0 = \Pi$ hin zum Grenzfall $C_{-1} = W$, dabei findet die Verlagerung vom unteren Ende der Hauptdiagonalen, zu den Enden der Nebendiagonalen deutlich schneller ab, als dies am oberen Ende der Fall ist.

Für positiven Parameter scheint die Dichte ein Gegenstück zu der der Joe-Copula zu sein, die wir uns als nächstes anschauen werden. Als Parameter θ ist das Intervall $[-1, \infty)$ zulässig mit Ausnahme der Null.

Joe-Copula

Die Familie der *Joe-Copulas* trägt ihren Namen, weil sie erstmals von Joe untersucht wurde. Ihr Erzeuger ist die Funktion $\varphi_{\theta}(t) = -\ln(1 - (1 - t)^{\theta})$. Mit der Inversen $\varphi_{\theta}^{-1}(t) = 1 - (1 - e^{-t})^{\frac{1}{\theta}}$ ergibt sich die Form

$$C_{\theta}(u, v) = 1 - [(1 - u)^{\theta} + (1 - v)^{\theta} - (1 - u)^{\theta}(1 - v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Der Parameter θ ist hier aus dem Intervall $[1, \infty)$ zu wählen. Die Grenzfälle entsprechen denen, der GH-Familie, aber trotzdem sind die Unterschiede bei den Dichten sofort ersichtlich. Zwar konzentriert sich die Masse bei der Joe Copula natürlich auch zunehmend auf der Hauptdiagonalen, aber am oberen Ende deutlich schneller und am unteren Ende merklich langsamer.

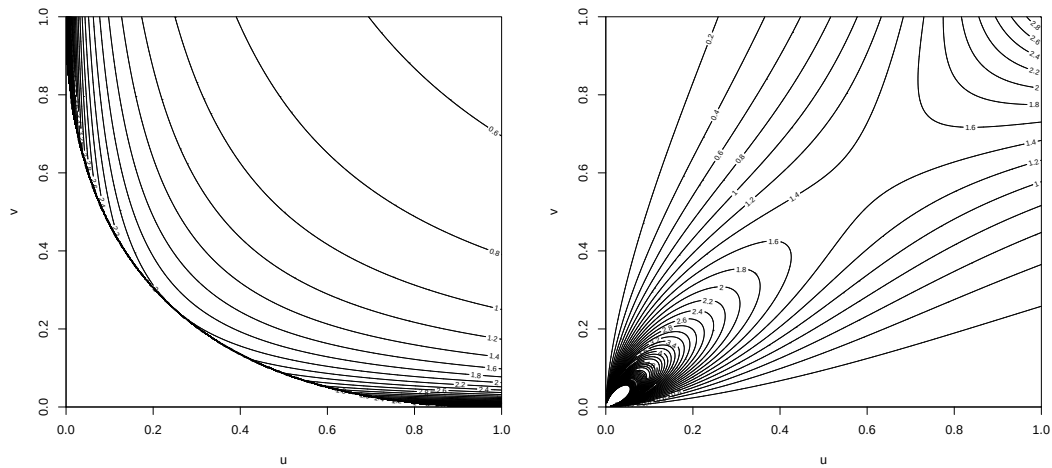


Abbildung 2.6: Isolinen-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Clayton-Copula mit Parameter $\theta = -0,5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 2$ (rechts).

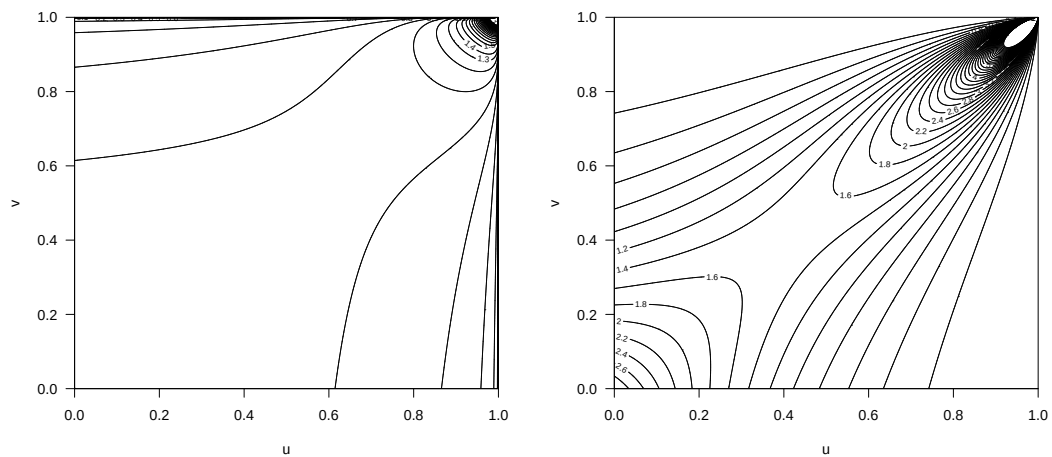


Abbildung 2.7: Isolinen-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Joe-Copula mit Parameter $\theta = 5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 15$ (rechts).

2.3 Der Verschachtelungs-Ansatz

Neben der symmetrischen Konstruktion besteht eine weitere Möglichkeit zur Erweiterung des Konzeptes archimedischer Copulas auf höhere Dimensionen. Sie besteht in der Verschachtelung von archimedischen Copulas. Wir werden diese zweite Konstruktion auf Basis eines Artikels von McNeil [26] vorstellen.

Im einfachsten, also dreidimensionalen Fall, liefert die Verschachtelung von zwei archimedischen Copulas eine Funktion der Form:

$$C_1(x_1, C_2(x_2, x_3)) = \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(x_1) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_3))).$$

Bei den durch Verschachtelung generierten Funktionen handelt es sich unter bestimmten Voraussetzungen wieder um Copulas. Diese können allerdings nicht mehr durch jeweils eine einzelne erzeugende Funktion beschrieben werden. Diesem Nachteil, im Vergleich zur symmetrischen Konstruktion, steht aber der Vorteil der höheren Flexibilität gegenüber, denn so können nun auch asymmetrische Beziehungen archimedisch modelliert werden. Für den Verschachtelungs-Ansatz und die im Kapitel 5 behandelten Algorithmen sind die Begriffe der *Laplace-* und der *Laplace-Stieltjes-Transformierten* von zentraler Bedeutung. Wir nutzen dabei die Definitionen aus [17]:

Definition 2.18: 1. Sei die Funktion $F \in \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K} | f \text{ ist lokal integrierbar}\}$, dann bezeichnet man die durch das Lebesgue-Integral

$$\mathcal{L}[F](s) := \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-sx)F(x)dx := \int_{[0,r]} \exp(-sx)F(x)dx$$

für jedes $s \in \mathbb{C}$, für das der Grenzwert existiert, definierte Funktion als *Laplace-Stieltjes-Transformierte* von F . Die Zahl

$$\text{abs}(\mathcal{L}[F]) := \inf\{\Re(s) : \mathcal{L}[F](s)\}$$

nennt man die *Konvergenzabzisse* von $\mathcal{L}[F]$. Ist diese endlich, so bezeichnet man F als *Laplace-transformierbar*.

2. Sei $F \in BV_{loc}([0, \infty)) := \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K} | f \text{ von lokal beschränkter Variation}\}$, dann bezeichnet man die durch das Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$\mathcal{LS}[F](s) := \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-sx)dF(x) := \int_{[0,r]} \exp(-sx)dF(x)$$

für jedes $s \in \mathbb{C}$, für das der Grenzwert existiert, definierte Funktion als *Laplace-Stieltjes-Transformierte* von F . Die Zahl

$$\text{abs}(\mathcal{LS}[F]) := \inf\{\Re(s) : \mathcal{LS}[F](s)\}$$

nennt man die *Konvergenzabzisse* von $\mathcal{LS}[F]$. Ist diese endlich, so bezeichnet man F als *Laplace-Stieltjes-transformierbar*.

Wie S. Bernstein [2] zeigte kann jede Funktion f , die auf dem Intervall $[0, \infty)$ vollständig monoton ist und für die die Gleichung $f(0) = 1$ gilt, durch ein Integral der Form

$$\int_0^\infty e^{-tx} dG(x) \text{ für } t \geq 0 \quad (2.14)$$

dargestellt werden. Dabei ist G eine Verteilungsfunktion mit $G(0) = 0$. Eine solche Funktion f ist also die Laplace-Stieltjes-Transformierte der Verteilungsfunktion G .

Einen archimedischen Erzeuger, dessen Inverses eine solche Funktion ist, nennen wir verkürzend *LST-archimedischer Erzeuger*. Mit den folgenden Lemmata verfolgen wir das Ziel in Satz 2.25 Kriterien für die Erzeuger beweisen zu können, die sicherstellen, dass aus einer bestimmten Form der Verschachtelung der zugehörigen Copulas auch eine Copula resultiert. Außerdem werden wir zwei Darstellungen der resultierenden Copula beweisen können, die für die Algorithmen zum numerischen Erzeugen dieser Copula wichtig sind. Das erste dieser Lemmata stammt aus dem Buch von Nelsen [28] und besteht aber aus einem Resultat von Widder [32] und zweien von Feller [11].

Lemma 2.19:

1. Sind f und g vollständig monotone Funktionen, dann ist auch das Produkt fg vollständig monoton.
2. Ist g eine vollständig monotone und f eine absolut monotone Funktion, dann ist die Verknüpfung $f \circ g$ vollständig monoton.
3. Ist f eine vollständig monotone Funktion und g eine positive Funktion mit vollständig monotoner Ableitung, dann ist die Verknüpfung $f \circ g$ vollständig monoton.

Bew.: Zum Beweis von Teil 1 nutzen wir die Leibnizsche Regel:

$$\frac{d^n fg}{dx^n}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dx^k}(x) \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}(x)$$

Sind nun f und g vollständig monotone Funktionen, so sind für gerades n in jedem Summanden entweder beide Ableitungen nichtnegativ oder nichtpositiv. Für ungerades n ist in jedem Summanden eine Ableitung nichtnegativ und die andere nichtpositiv. Es ergibt sich also für alle n : $(-1)^n \frac{d^n fg}{dx^n}(x) \geq 0$

Zum Beweis von Teil 2 nutzen wir die Formel von Faà di Bruno (vgl. [20])

$$\frac{d^n (f \circ g)}{dx^n}(x) = \sum_{\mathbf{k} \in T_n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \frac{d^{k_1+\cdots+k_n} f}{dx^{k_1+\cdots+k_n}}(g(x)) \prod_{\substack{m=1 \\ k_m \geq 1}}^n \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m g}{dx^m}(x) \right)^{k_m},$$

wobei $T_n := \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{i=1}^n i k_i = n\}$.

Offensichtlich gilt für jedes $\mathbf{k} \in T_n$

$$\prod_{m=1}^n \left(\frac{d^m g}{dx^m}(x) \right)^{k_m} \geq 0 \implies \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \frac{d^{k_1+\cdots+k_n} f}{dx^{k_1+\cdots+k_n}}(g(x)) \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m g}{dx^m}(x) \right)^{k_m} \geq 0. \quad (2.15)$$

Für gerades m gilt grundsätzlich $\left(\frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m} \geq 0$ und so gilt

$$\prod_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}-1}(m) \left(\frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m} \geq 0 \implies \prod_{m=1}^n \left(\frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m} \geq 0. \quad (2.16)$$

Über die Vektoren $\mathbf{k} \in T_n$ wissen wir, dass $\sum_{m=1}^n m k_m = n$ gilt. Für

$$n_g := \sum_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}}(m) m k_m$$

ergibt sich als Summe gerader Zahlen eine gerade Zahl und für

$$n_u := \sum_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}-1}(m) m k_m = n - n_g$$

entsprechend genau dann eine (un)gerade Zahl, wenn n (un)gerade ist. Es folgt, dass die

$$\text{Summe } s := \sum_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}-1}(m) k_m \text{ genau dann (un)gerade ist, wenn } n \text{ (un)gerade ist.}$$

Für jedes $\mathbf{k} \in T_n$ ist $\prod_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}-1}(m) \left(\frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m}$ ein Produkt von s nichtpositiven Faktoren.

So ist das Produkt für gerades n nichtnegativ und nach den Implikationen (2.15) und (2.16) auch $\frac{d^n(f \circ g)}{dx^n}(x) \geq 0$. Für ungerades n ist das Produkt nichtpositiv und analoge Implikationen liefern uns die Ungleichung $\frac{d^n(f \circ g)}{dx^n}(x) \leq 0$.

Der Beweis des dritten Teils greift noch einmal auf die Formel von Faà di Bruno zurück. Ist n gerade, so gilt für jedes $\mathbf{k} \in T_n$, dass $\sum_m m k_m$ gerade und damit auch $\sum_m \mathbb{I}_{2\mathbb{N}-1}(m) k_m$ gerade ist. Daraus ergibt sich die Äquivalenz:

$$s_g := \sum_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}}(m) k_m \text{ ist gerade} \Leftrightarrow s := \sum_{m=1}^n k_m \text{ ist gerade.}$$

Sind nun s und s_g gerade, so ist $\frac{d^{k_1+\dots+k_n} f}{dx^{k_1+\dots+k_n}}(g(x)) = \frac{d^s f}{dx^s}(g(x)) \geq 0$ und gleichzeitig $\prod_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}}(m) \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m} \geq 0$, da die Anzahl der Faktoren, die allesamt nichtpositiv sind, gerade ist.

Sind s und s_g ungerade, so gilt $\frac{d^{k_1+\dots+k_n} f}{dx^{k_1+\dots+k_n}}(g(x)) \leq 0$ und $\prod_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}}(m) \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m} \leq 0$.

Für gerades n ist folglich jeder der Summanden $\frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \frac{d^{k_1+\dots+k_n} f}{dx^{k_1+\dots+k_n}}(g(x)) \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m g}{dx^m}(x)\right)^{k_m}$ nichtnegativ und damit auch die Summe.

Für ungerades n erhält man analog die Äquivalenz

$$s_g := \sum_{m=1}^n \mathbb{I}_{2\mathbb{N}}(m) k_m \text{ ist ungerade} \Leftrightarrow s := \sum_{m=1}^n k_m \text{ ist gerade,}$$

und damit stets nichtpositive Summanden. Es folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 2.20: Nach Teil 3 des Lemmas gilt insbesondere, dass für eine positive Funktion g mit vollständig monotoner Ableitung die Funktion e^{-g} vollständig monoton ist.

Die in diesem Abschnitt noch folgenden Lemmata und der abschließende Satz stammen alle aus bzw. basieren auf dem Aufsatz von McNeil [26] Wir führen die zugehörigen Beweise weiter aus.

Lemma 2.21: Sind φ_1 , φ_2 und φ_3 LST-archimedische Erzeuger und jeweils die erste Ableitung von $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ und $\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}$ vollständig monoton, so ist dies auch bei der ersten Ableitung von $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ der Fall.

Bew.: Seien $f := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, $g := \varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}$ und $h = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} = f \circ g$. $f' \circ g$ ist die Verknüpfung einer vollständig monotonen Funktion und einer positiven Funktion mit vollständig monotoner Ableitung und somit nach dem dritten Teil von Lemma 2.19 vollständig monoton. Nun gilt $h'(t) = g'(t)f'(g(t))$ für $t > 0$ und als Produkt zweier vollständig monotoner Funktionen ist auch h' , die erste Ableitung von $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$, vollständig monoton. $\square$

Korrolar 2.22: (vgl. [26]) Sei φ_k ein LST-archimedischer Erzeuger für $k = 1, \dots, n$ und sei die erste Ableitung von $\varphi_k \circ \varphi_{k+1}^{-1}$ vollständig monoton für $k = 1, \dots, n-1$, dann ist auch die erste Ableitung von $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}$ vollständig monoton für $1 \leq k < j \leq n$.

Nun definieren wir für $k \in \{1, \dots, n\}$, $j > k$ und $v > 0$ den Erzeuger

$$\varphi_{k,j}(\cdot; v) := \varphi_j \circ \varphi_k^{-1} \left(-\frac{\ln(\cdot)}{v} \right).$$

Das zugehörige Inverse ist dann $\varphi_{k,j}^{-1}(\cdot; v) = \exp(-v\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}(\cdot))$ und nach Korrolar 2.22 und der Bemerkung 2.20 ist $\varphi_{k,j}(\cdot; v)$ ebenfalls LST-archimedischer Erzeuger.

Lemma 2.23: Für $k \in \{1, \dots, n-2\}$, $j \in \{k+2, \dots, n\}$ und $v, \tilde{v} \geq 0$ gilt

$$\exp(-v\varphi_{k,k+1}(\varphi_{k,j}^{-1}(\cdot; \tilde{v}); \tilde{v})) = \varphi_{k+1,j}^{-1}(\cdot, v).$$

Bew.: Die Behauptung folgt durch die folgende einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \exp(-v\varphi_{k,k+1}(\varphi_{k,j}^{-1}(\cdot; \tilde{v}); \tilde{v})) &= \exp \left(-v\varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1} \left(-\frac{\ln(\exp(-\tilde{v}\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}(\cdot)))}{\tilde{v}} \right) \right) \\ &= \exp(-v\varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1}(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}(\cdot))) \\ &= \exp(-v\varphi_{k+1} \circ \varphi_j^{-1}(\cdot)). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Definition von $\varphi_{k+1,j}^{-1}(\cdot, v)$. $\square$

Zur Beschreibung der Verschachtelungs-Copulas führen wir eine neue Notation ein: Die zwei-dimensionale Copula zum LST-archimedischen Erzeuger φ_1 bezeichnen wir dazu mit $C_2(x_1, x_2; \varphi_1)$ und können so rekursiv für $n \geq 3$ die n -dimensionale Copula zu den LST-archimedischen Erzeugern $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ definieren:

$$C_n(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) := \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x_1) + \varphi_1(C_{n-1}(x_2, \dots, x_n; \varphi_2, \dots, \varphi_n))) \quad (2.17)$$

Lemma 2.24: Sei $n \geq 1$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ LST-archimedische Erzeuger. Sei zudem die Funktion $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig und streng monoton wachsend, so dass $\tilde{\varphi}_k^{-1} = F \circ \varphi_k^{-1}$ für $k = 1, \dots, n$ ebenfalls LST-archimedische Erzeuger sind. Dann erfüllt die Funktion C_n die Bedingung

$$F(C_n(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) = C_n(F(x_1), \dots, F(x_n); \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}). \quad (2.18)$$

Bew.: Der Beweis verläuft induktiv über die Dimension n . Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} F(C_2(x_1, x_2; \varphi_1)) &= F \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x_1) + \varphi_1(x_2)) \\ &= F \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ F^{-1}(F(x_1)) + \varphi_1 \circ F^{-1}(F(x_2))) \\ &= \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\varphi}_1(F(x_1)) + \tilde{\varphi}_1(F(x_2))) \\ &= C_2(F(x_1), F(x_2); \tilde{\varphi}_1) \end{aligned}$$

Gilt nun (2.18) für $n = k - 1$, so gilt auch

$$\begin{aligned} F(C_k(x_1, \dots, x_k; \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1})) &= \\ &= F \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(x_1) + \varphi_1(C_{k-1}(x_2, \dots, x_k; \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}))) \\ &= F \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ F^{-1}(F(x_1)) + \varphi_1 \circ F^{-1}(F(C_{k-1}(x_2, \dots, x_k; \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1})))) \\ &= \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\varphi}_1(F(x_1)) + \tilde{\varphi}_1(C_{k-1}(F(x_2), \dots, F(x_k); \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_{k-1}))) \\ &= C_k(F(x_1), \dots, F(x_k); \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_k). \end{aligned}$$

Folglich gilt (2.18) für jedes beliebige $n \geq 2$. □

Satz 2.25: Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ LST-archimedische Erzeuger und ist für $k = 1, \dots, n - 2$ die erste Ableitung von $\varphi_k \circ \varphi_{k+1}^{-1}$ vollständig monoton, dann ist die in (2.18) definierte Funktion $C_n(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ eine Copula und lässt sich als Mischung von Verteilungsfunktionen in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} C_n(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) &= \\ &= \int_0^\infty F_1^{v_1}(x_1) C_{n-1}(F_1^{v_1}(x_2), \dots, F_1^{v_1}(x_n); \varphi_{1,2}(\cdot, v_1), \dots, \varphi_{1,n-1}(\cdot, v_1)) dG_1(v_1) \quad (2.19) \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty F_1^{v_1}(x_1) \dots F_{n-1}^{v_{n-1}}(x_{n-1}) F_{n-1}^{v_{n-1}}(x_n) dG_{n-1}(v_{n-1}; v_{n-2}) \dots dG_2(v_2; v_1) dG_1(v_1), \quad (2.20) \end{aligned}$$

dabei sei G_1 eine Verteilungsfunktion, deren Laplace-Stieltjes-Transformierte φ_1 ist, $G_k(v; v_{k-1})$ für $k = 2, \dots, n - 1$ Verteilungsfunktionen, die entsprechend $\varphi_{k-1,k}(\cdot; v_{k-1})$ zugeordnet werden können und $F_k(x) = \exp(-\varphi_k(x))$ für $k = 1, \dots, n - 1$.

Bew.: Wir können, weil die Funktion φ_1 ein LST-archimedischer Erzeuger ist, die Darstellung (2.14) nutzen, um die Definition (2.18) von C_n umzuformen. So ist dann

$$C_n(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \int_0^\infty e^{-v_1 \varphi_1(x_1)} e^{-v_1 \varphi_1(C_{n-1}(x_2, \dots, x_n; \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}))} dG_1(v_1).$$

Nun schreiben wir das Produkt im Inneren des Integrals um. Der erste Faktor $e^{-v_1\varphi_1(x_1)}$ ist gleich $F_1^{v_1}(x_1)$. Die Funktionen $F_k^v(x) = \exp(-v\varphi_k(x))$ und insbesondere $F_1^{v_1}(x)$ sind in x stetig und streng monoton wachsend. Es handelt sich bei F_k und damit auch bei F_k^v mit $v > 0$ um Verteilungsfunktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. So ist nun der zweite Faktor, nach Lemma (2.24) und Korollar (2.22), gleich

$$C_{n-1}(F_1^{v_1}(x_2), \dots, F_1^{v_1}(x_n); \varphi_{1,2}(\cdot; v_1), \dots, \varphi_{1,n-1}(\cdot; v_1)).$$

Damit haben wir die Richtigkeit der Darstellung (2.19) gezeigt.

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion C_n tatsächlich eine Copula ist. Da es sich bei C_n um eine Verschachtelung von archimedischen Copulas handelt, ist C_n selbst offensichtlich geerdet und für die eindimensionalen Randfunktionen $C_{n,k}$ gilt $C_{n,k}(u) = u$ für jedes $k = 1, \dots, n$ und $u \in [0, 1]$.

Wir zeigen nun, dass die Funktion $C_n(x_1, \dots, x_n; \varphi_1; \dots, \varphi_{n-1})$ n -wachsend ist: Dafür sei $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ein Teilquader in $[0, 1]^n$ und $[\mathbf{a}', \mathbf{b}']$ die Projektion dieses Teilquaders auf die letzten $n-1$ Komponenten. Dann gilt

$$\begin{aligned} V_{C_n(\cdot; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) &= \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum j_k} C_n(a_1^{j_1} b_1^{1-j_1}, \dots, a_n^{j_n} b_n^{1-j_n}; \varphi_1; \dots, \varphi_{n-1}) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum j_k} \int_0^\infty F_1^{v_1}(a_1^{j_1} b_1^{1-j_1}) F_1^{v_1}(C_{n-1}(a_2^{j_2} b_2^{1-j_2}, \dots, a_n^{j_n} b_n^{1-j_n}; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) dG(v_1) \\ &= \int_0^\infty \underbrace{(F_1^{v_1}(b_1) - F_1^{v_1}(a_1))}_{\geq 0} \underbrace{V_{C_{n-1}(\cdot; \varphi_{1,2}(\cdot, v_1), \dots, \varphi_{1,n-1}(\cdot, v_1))}([F_1^{v_1}(\mathbf{a}'), F_1^{v_1}(\mathbf{b}')])}_{\stackrel{(*)}{\geq 0}} dG(v_1). \end{aligned}$$

Die Ungleichung (*) gilt, wenn die Funktion $C_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; \varphi_{1,2}(\cdot, v_1), \dots, \varphi_{1,n-1}(\cdot, v_1))$ eine Copula ist. Um dies zu zeigen, nutzen wir wiederholt die gleiche Argumentation und erhalten so für $k = 2, \dots, n-2$

$$\begin{aligned} C_{n-k+1}(x_{k+1}, \dots, x_n; \varphi_{k,k+1}(\cdot, v_{k-1}), \dots, \varphi_{k,n}(\cdot, v_{k-1})) &= \int_0^\infty F_k^{v_k}(x_k; v_{k-1}) \times \\ &\times C_{n-k}(F_k^{v_k}(x_{k+1}; v_{k-1}), \dots, F_k^{v_k}(x_n; v_{k-1}); \varphi_{k,k+1}(\cdot, v_k), \dots, \varphi_{k,n}(\cdot, v_k)) dG(v_k; v_{k-1}) \end{aligned}$$

mit $F_k(x; v_{k-1}) = \exp(-\varphi_{k-1,k}^{-1}(x; v_{k-1}))$.

Letztlich ist also nur zu zeigen, dass $C_2(x_{n-1}, x_n; \varphi_{n-2,n-1}(\cdot, v_{n-2}))$ eine Copula, also insbesondere n -wachsend ist. Die erste Ableitung von $\varphi_{n-2} \circ \varphi_{n-1}^{-1}$ ist nach Voraussetzung vollständig monoton und somit ist $\varphi_{n-2,n-1}(\cdot, v_{n-2})$ vollständig monoton. Die Funktion $C_2(x_{n-1}, x_n; \varphi_{n-2,n-1}(\cdot, v_{n-2}))$ ist nun die zwei-dimensionale archimedische Copula zum Erzeuger $\varphi_{n-2,n-1}(\cdot, v_{n-2})$. Wir nutzen nun wieder die Eigenschaft eines LST-archimedischen Erzeugers als Integral darstellbar zu sein:

$$\begin{aligned} C_2(x_{n-1}, x_n; \varphi_{n-2,n-1}(\cdot, v_{n-2})) &= \\ &= \int_0^\infty e^{-v_{n-1}\varphi_{n-1,n-2}(x_{n-1}; v_{n-1})} e^{-v_{n-1}\varphi_{n-1,n-2}(x_n; v_{n-1})} dG_{n-1}(v_{n-1}; v_{n-2}) \\ &= \int_0^\infty F_{n-1}^{v_{n-1}}(x_{n-1}; v_{n-2}) F_{n-1}^{v_{n-1}}(x_n; v_{n-2}) dG_{n-1}(v_{n-1}; v_{n-2}). \end{aligned}$$

Um nun die Darstellung (2.20) zu beweisen, müssen wir noch abschließend zeigen, dass

$$F_k^{v_k}(x) = F_k^{v_k}(F_{k-1}^{v_{k-1}}(\cdots F_2^{v_2}(F_1^{v_1}(x); v_1) \cdots ; v_{k-2}); v_{k-1}) \quad (2.21)$$

für alle $k \geq 2$ gilt. Dies zeigen wir induktiv: Für $k = 2$ gilt

$$\begin{aligned} F_2^{v_2}(x) &= \exp(-v_2 \varphi_2(x)) \\ &= \exp(-v_2 \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1(x)) \\ &= \exp\left(-v_2 \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(\exp(-v_1 \varphi_1(x)))}{v_1}\right)\right) \\ &= \exp(-v_2 \varphi_{1,2}^{-1}(\exp(-v_1 \varphi_1(x)); v_1)) \\ &= F_2^{v_2}(F_1^{v_1}(x); v_1). \end{aligned}$$

Gelte nun (2.21) für ein $k \geq 2$, so gilt auch

$$\begin{aligned} F_{k+1}^{v_{k+1}}(x) &= \exp\left(-v_{k+1} \varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1} \left(-\frac{\ln(\exp(-v_k \varphi_k(x)))}{v_k}\right)\right) \\ &= F_{k+1}^{v_{k+1}}(F_k^{v_k}(x); v_k) \\ &= F_{k+1}^{v_{k+1}}(F_k^{v_k}(\cdots F_2^{v_2}(F_1^{v_1}(x); v_1) \cdots ; v_{k-1}); v_k). \end{aligned}$$

Damit sind nun auch beide Darstellungen bewiesen. □

Kapitel 3

Transformationen

Das folgende Kapitel befasst sich mit der Transformation von Copulas, also der Möglichkeit Copulas so mit bestimmten Funktionen zu verknüpfen, dass das Resultat wieder eine Copula ist. Im Fall archimedischer Copulas besteht die Option den Erzeuger zu transformieren.

3.1 Transformation des Erzeugers

Junker und May [21] präsentieren zwei Klassen von Funktionen, mit deren Hilfe es möglich ist, aus dem Erzeuger einer 2-Copula problemlos weitere Erzeuger und damit weitere Copulas zu generieren.

Die Gestalt der Funktionen dieser Klassen wird im Artikel durch den folgenden Satz beschrieben und bewiesen.

Satz 3.1: *Ist φ ein Erzeuger für eine archimedische 2-Copula und zudem...*

1. ... $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine streng monoton wachsende, stetige und konkave Funktion mit $g(1) = 1$, dann ist auch die Verkettung $\varphi \circ g$ ein solcher Erzeuger.
2. ... $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ eine streng monoton wachsende, stetige und konvexe Funktion mit $f(0) = 0$, dann ist die Verkettung $f \circ \varphi$ ebenfalls ein solcher Erzeuger.

Bew.: Wir überprüfen nun jeweils die Eigenschaften eines Erzeugers nach Lemma 2.1.

1. Die Funktion $\varphi \circ g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ ist als Verschachtelung zweier stetiger Funktionen stetig. Da die Funktion g streng monoton wachsend und φ streng monoton fallend ist, ist auch $\varphi \circ g$ streng monoton fallend. Außerdem gilt $\varphi \circ g(1) = \varphi(1) = 0$. So bleibt nur zu zeigen, dass die Funktion $\varphi \circ g$ auch konvex ist. g ist konkav, also gilt für $\lambda \in (0, 1)$ und $x, y \in [0, 1]$

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Weil φ monoton fallend und konvex ist, gilt

$$\begin{aligned} \varphi(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) &\leq \varphi(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \\ &\leq \lambda \varphi \circ g(x) + (1 - \lambda) \varphi \circ g(y), \end{aligned}$$

und somit ist $\varphi \circ g$ Erzeuger einer archimedischen 2-Copula.

2. Die Argumente dafür, dass $f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige, streng monoton fallende Funktion ist, gleichen denen, die wir auch im ersten Fall bemühen.

Es gilt $f \circ \varphi(1) = f(0) = 0$ und die Konvexität ergibt sich durch folgende Rechnung: Für $\lambda \in (0, 1)$ und $x, y \in [0, 1]$ gilt die Ungleichung

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y),$$

da φ konvex ist. Unter Ausnutzung des monotonen Wachstums der Funktion f und deren Konvexität ergibt sich

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq f(\lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)) \\ &\leq \lambda f \circ \varphi(x) + (1 - \lambda)f \circ \varphi(y). \end{aligned}$$

Damit stellen die beiden Verknüpfungen zwei einfache Möglichkeiten zur Transformation von Erzeugern dar. $\square$

Junker und May geben die folgenden Beispiele für Funktionen, die offensichtlich in diese Klassen fallen.

Beispiel 3.1: Nach Satz 3.1 sind unter anderem die folgenden Funktionen Kandidaten, um 2-Copulas zu transformieren:

1. $g(t) = \frac{\sin(at)}{\sin(a)}$ mit $a \in (0, \frac{\pi}{2})$;
2. $g(t) = \frac{\ln(at+1)}{\ln(a+1)}$ mit $a \in (0, \infty)$;
3. $g(t) = \frac{e^{-\theta}-1}{e^{-\theta}-1}$ mit $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$;
4. $f(\varphi) = \varphi^a$ mit $a \in [1, \infty)$;
5. $f(\varphi) = a^\varphi - 1$ mit $a \in (1, \infty)$;
6. $f(\varphi) = a^{-\varphi} - 1$ mit $a \in (0, 1)$.

Junker und May führen ausgehend vom Erzeuger φ_θ einer Frank-Copula, mit Hilfe der 4. Funktion aus dem Beispiel, den transformierten Erzeuger $\varphi_\omega = \varphi_\theta^\delta$ mit $\omega = (\theta, \delta)$ für $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ und $\delta \in [1, \infty)$ ein. Dadurch ergibt sich die archimedische Copula

$$C_\omega(u, v) = \varphi_\omega^{-1}(\varphi_\omega(u) + \varphi_\omega(v)) \quad (3.1)$$

$$= -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left[- \left(\left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta + \left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta v} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] \right]. \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.2: Junker und May geben das folgende Lemma an:

‘Wenn eine Familie zweidimensionaler archimedischer Copulas mit parametrischem Erzeuger φ_θ bezüglich des Parameters θ positiv geordnet ist, also $\theta_1 \leq \theta_2$ schon $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$ impliziert, dann bleibt diese Ordnung auch nach der Transformation $\varphi_\theta \mapsto \varphi_\theta^\delta$ mit $\delta \in [1, \infty)$ erhalten.’

Der gegebene Beweis ist allerdings untauglich, da der darin zitierte Korollar eine Implikation in die andere als die genutzte Richtung gibt.

Wir führen nun die Beweise zu den Sätzen aus [21] über die Eigenschaften der Copula C_ω weiter aus.

Satz 3.3:

1. Die Copula C_ω weist keine obere Auslauf-Abhängigkeit auf, ist aber unten Auslauf-abhängig mit Parameter $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}$.
2. Ist der Parameter θ positiv, so ist φ_ω^{-1} vollständig monoton auf dem Intervall $[0, \infty)$. Es gilt also $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi_\omega^{-1} \geq 0$ für $t \in [0, \infty)$ und alle $k = 0, 1, \dots$

Bew.: 1. Wir berechnen die beiden Parameter mit Hilfe der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C_\omega(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} - \frac{\ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left(2^{\frac{1}{\delta}} \ln \left[\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right) \right]}{\theta u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} - \frac{\ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)^{2^{\frac{1}{\delta}}} \right]}{\theta u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} - \frac{-\theta e^{-\theta u} (e^{-\theta} - 1)^{1-2^{\frac{1}{\delta}}} 2^{\frac{1}{\delta}} (e^{-\theta u} - 1)^{2^{\frac{1}{\delta}} - 1}}{\theta \left[1 + (e^{-\theta} - 1)^{1-2^{\frac{1}{\delta}}} (e^{-\theta u} - 1)^{2^{\frac{1}{\delta}}} \right]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C_\omega(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} 2 - \frac{e^{-\theta u} (e^{-\theta} - 1)^{1-2^{\frac{1}{\delta}}} 2^{\frac{1}{\delta}} (e^{-\theta u} - 1)^{2^{\frac{1}{\delta}} - 1}}{1 + (e^{-\theta} - 1)^{1-2^{\frac{1}{\delta}}} (e^{-\theta u} - 1)^{2^{\frac{1}{\delta}}}} \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\delta}} \end{aligned}$$

2. Wir wollen zeigen, dass $\varphi_\omega^{[-1]}$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ vollständig monoton ist, wenn der Parameter θ positiv ist. Für $\theta > 0$ ist die Inverse $\varphi_\theta^{[-1]}$ des Erzeugers einer Frank-Copula vollständig monoton (vgl. Bsp. n-dim. Frank Copula) und für $\delta > 1$ ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto x^{\frac{1}{\delta}}$$

positiv mit vollständig monotoner Ableitung. Es gilt

$$\varphi_\omega^{-1}(t) = \varphi_{(\theta, \delta)}^{-1}(t) = \varphi_\theta^{-1}(t^{\frac{1}{\delta}}) = \varphi_\theta^{-1} \circ f(t)$$

Nach Feller [12] gilt für eine solche Verkettung einer vollständig monotonen Funktion mit einer positiven Funktion mit vollständig monotoner Ableitung, dass sie auch selbst vollständig monoton ist. $\square$

Der zweite Teil des Beweises zeigt, dass auf diese Weise, also durch die Verkettung mit der vierten Funktion, auch eine Transformation einer beliebigen archimedischen n -Copula möglich ist.

Bevor wir zu den weiteren Eigenschaften von C_ω kommen, müssen wir noch den Satz 4.4.8 von Nelsen [28] zitieren und den zugehörigen Beweis weiter ausführen.

Satz 3.4: Ist $\{C_\theta | \theta \in \Theta\}$ eine Familie archimedischer Copulas mit differenzierbaren Erzeugern φ_θ und γ ein Endpunkt des Parameterintervalls Θ . Dann ist $\lim_{\theta \rightarrow \gamma} C_\theta(u, v)$ genau dann gleich $M(u, v)$, wenn für alle $t \in (0, 1)$ der Grenzwert $\lim_{\theta \rightarrow \gamma} \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = 0$ ist.

Bew.: Wir nehmen zunächst für ein beliebiges, aber fest gewähltes $t \in (0, 1)$ an, es gelte $\lim_{\theta \rightarrow \gamma} \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = 0$. Wir wählen nun ein ϵ aus dem Intervall $(0, t)$. Da φ_θ für $\theta \in \Theta$ ein archimedischer Erzeuger ist, also positiv und monoton fallend, gilt

$$0 \leq -\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} < \epsilon$$

im Fall $|\gamma| < \infty$ für jedes ausreichend nah bei γ liegende θ und in den Fällen mit $\gamma = \infty$ bzw. $\gamma = -\infty$ für jedes ausreichend große bzw. ausreichend kleine θ . Wir wissen, dass φ_θ konvex ist und so liegt $y = \varphi_\theta(t) + (x - t)\varphi'_\theta(t)$ als Tangente an φ_θ im Punkt $(t, \varphi_\theta(t))$ auf $x \in (0, 1)$ unterhalb von $\varphi_\theta(x)$. Insbesondere gilt dies für $x = t + \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)}$. Es gilt also

$$\varphi_\theta\left(t + \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)}\right) > 2\varphi_\theta(t)$$

und somit

$$t = C_\theta(t, 1) \geq C_\theta(t, t) = \varphi_\theta^{[-1]}(2\varphi_\theta(t)) > t + \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} > t - \epsilon.$$

Folglich ist $C_\theta(t, t) = t$ und nach Lemma 1.7 für jedes $s \in [t, 1]$

$$C_\theta(s, t) = t = C_\theta(t, s)$$

Da t beliebig aus dem Intervall $(0, 1)$ gewählt war, gilt allgemein

$$\lim_{\theta \rightarrow \gamma} C_\theta(u, v) = \min\{u, v\} = M(u, v).$$

Um die Rückrichtung zu zeigen, verwenden wir den Beweis von Genest und MacKay [14]. Wir nutzen dabei Kendalls Rangkorrelationskoeffizienten, der für eine zweidimensionale Copula C nach Gleichung (1.13) durch

$$\tau_C = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

definiert ist. Wir nehmen nun also an, dass $\lim_{\theta \rightarrow \gamma} C_\theta(u, v) = M(u, v)$ ist. Nach Beispiel 1.2 gilt für Kendalls τ der unteren Fréchet-Höfding-Grenze

$$\begin{aligned} \tau_M &= 4 \int_{[0,1]^2} M(u, v) dM(u, v) - 1 \\ &= 4 \int_0^1 t dt - 1 = 1. \end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt nach Satz 2.17

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow \gamma} \tau_{C_\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow \gamma} \left(1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} dt \right) \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \left(\lim_{\theta \rightarrow \gamma} \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} \right) dt.\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir den Satz der beschränkten Konvergenz. Dies ist möglich, da $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$ zum einen stets nichtpositiv ist und zum anderen, wie zuvor bereits erwähnt, die Gerade $y = \varphi_\theta(t) + (x - t)\varphi'_\theta(t)$ unterhalb der konvexen Funktion $\varphi_\theta(x)$ liegt, sofern $\varphi'_\theta(t)$ existiert. Dies gilt insbesondere auch für den Punkt $x = 1$ und somit gilt für fast alle $t \in (0, 1)$ auch $1 > 1 - t \geq -\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)}$.

Auf Grund der Stetigkeit von Kendalls Rangkorrelationskoeffizienten gilt $\lim_{\theta \rightarrow \gamma} \tau_{C_\theta} = \tau_M$ und so ist auch

$$\int_0^1 \left(\lim_{\theta \rightarrow \gamma} \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} \right) dt = 0.$$

Es folgt die Behauptung. □

Nun kommen wir zum Beweis von weiteren Eigenschaften.

Satz 3.5: Sei C_ω die Copula, die wir durch 3.2 definiert hatten, dann gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} C_\omega = M = \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\omega \quad (3.3)$$

$$\lim_{\substack{\delta=1 \\ \omega \rightarrow 0}} C_\omega = \Pi \quad (3.4)$$

$$\lim_{\substack{\delta=1 \\ \omega \rightarrow -\infty}} C_\omega = W \quad (3.5)$$

Bew.: Aus Satz 3.4 können wir folgern, dass die Gleichungen (3.3) gelten

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} C_\omega(u, v) = M(u, v) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\omega(u, v)$$

gelte. Dies liegt darin begründet, dass für beliebiges, fest gewähltes $t \in (0, 1)$ einerseits, bei fixiertem $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, die Gleichungskette

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)_\omega}{\varphi'(t)_\omega} &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\left(-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)^\delta}{\delta \left(-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)^{\delta-1} \left(-\frac{e^{-\theta} - 1}{e^{-\theta t} - 1} \right) \left(-\frac{\theta e^{-\theta t}}{e^{-\theta} - 1} \right)} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\delta} \frac{\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}}{\theta \frac{e^{-\theta t}}{e^{-\theta} - 1}} \\ &= 0\end{aligned}$$

und andererseits bei fixiertem $\delta \in [1, \infty)$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)_\omega}{\varphi'(t)_\omega} &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\delta} \frac{\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}}{\theta \frac{e^{-\theta t}}{e^{-\theta} - 1}} \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\ln \frac{x^t - 1}{x - 1}}{\frac{x^t}{x^t - 1} \ln x} \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\ln \left[\left(\frac{x^t - 1}{x - 1} \right)^{x^t - 1} \right]}{\ln [x^{(x^t)}]} \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\left(\frac{x - 1}{x^t - 1} \right)^{x^t - 1} (x^t - 1) \left(\frac{x^t - 1}{x - 1} \right)^{x^t - 2} \frac{tx^{t-1}(x-1) - (x^t-1)}{(x-1)^2}}{x^{-(x^t)} x^{(x^t)} (tx^{t-1} \ln x + x^t x^{-1})} \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{\frac{tx^{t-1}(x-1) - (x^t-1)}{x-1}}{(1 + t \ln x) x^{t-1}} \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\delta} \left[\frac{t}{1 + t \ln x} - \frac{x^t - 1}{(x - 1)(1 + t \ln x) x^{t-1}} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

hält.

Für (3.4), also den Grenzwert $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\omega(u, v)$, nutzen wir die Substitution $\theta = -\ln x$ und wenden dann die Regel von l'Hospital an.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\delta=1 \\ \theta \rightarrow 0}} C_\omega(u, v) &= \lim_{\substack{\delta=1 \\ \theta \rightarrow 0}} -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left(- \left[\left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta + \left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta v} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right) \right] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left(\ln \left[\frac{ue^{-\theta u}}{e^{-\theta}} \right] + \ln \left[\frac{ve^{-\theta v}}{e^{-\theta}} \right] \right) \right] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} -\frac{1}{\theta} \ln [1 + (e^{-\theta} - 1) uve^{(2-u-v)\theta}] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} -\frac{-e^{-\theta} uve^{(2-u-v)\theta} + (2-u-v) uve^{(2-u-v)\theta} (e^{-\theta} - 1)}{1 + (e^{-\theta} - 1) uve^{(2-u-v)\theta}} \\
&= uv \\
&= \Pi(u, v)
\end{aligned}$$

Für den Beweis von (3.5) bedarf es einzig einiger elementarer Umformungen.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\delta=1 \\ \theta \rightarrow \infty}} C_\omega(u, v) &= \lim_{\substack{\delta=1 \\ \theta \rightarrow \infty}} -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left(- \left[\left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta + \left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta v} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right) \right] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left(\ln \left[\frac{ue^{-\theta u}}{e^{-\theta}} \right] + \ln \left[\frac{ve^{-\theta v}}{e^{-\theta}} \right] \right) \right] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\theta} \ln [1 + (e^{-\theta} - 1) uve^{(2-u-v)\theta}] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\theta} \ln [1 + uve^{(1-u-v)\theta} - uve^{(2-u-v)\theta}] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } u < 1 - v; \\ \lim_{\theta \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\theta} \ln [(e^{(u+v-1)\theta} + uv - uve^\theta)e^{(1-u-v)\theta}], & \text{für } u \geq 1 - v; \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } u > 1 - v; \\ \lim_{\theta \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\theta} \ln (e^{(u+v-1)\theta} + uv - uve^\theta) + (u + v - 1), & \text{für } u \geq 1 - v; \end{cases} \\
&= \max\{u + v - 1, 0\} \\
&= W(u, v)
\end{aligned}$$

Um neben der oberen Auslauf-Abhängigkeit genauso die untere Auslauf-Abhängigkeit abbilden zu können, führen Junker und May nach der Copula C_ω noch die Copula C_Ω ein. Diese ist eine Konvexkombination von C_ω und $\overline{C}_{\omega_s}$, einer Überlebens-Copula der gleichen Familie. ω_s ist dabei der zweidimensionale Parameter (θ_s, δ_s) . Es gilt

$$\begin{aligned}
C_\Omega(u, v) &= \alpha \overline{C}_{\omega_s}(u, v) + (1 - \alpha) C_\omega(u, v) \\
&= \alpha (u + v - 1 + C_{\omega_s}(1 - u, 1 - v)) + (1 - \alpha) C_\omega(u, v).
\end{aligned}$$

3.2 Transformation beliebiger 2-Copulas

Nun wollen wir eine weitere einfache Möglichkeit betrachten, mit Hilfe von Transformationen, aus einer beliebigen 2-Copula weitere Copulas zu erzeugen. Bei dieser Transformation, die von Durrleman et al. [9] vorgestellt wird, bezeichne $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nun eine Bijektion. Zu beliebiger Copula C definieren wir für alle $(u, v) \in [0, 1]^2$ die Funktion C_γ durch

$$C_\gamma(u, v) := \gamma^{-1}(C(\gamma(u), \gamma(v))). \quad (3.6)$$

Die Funktion C_γ ist unter bestimmten Voraussetzungen an C und γ auch selbst eine Copula und damit eine Transformation der Copula C , dies wird von Durrleman et al. mit dem folgenden Satz [9] bewiesen. Wir führen den Beweis unter der Zusatzvoraussetzung einer absolutstetigen Copula weiter aus. Dies ist für die meisten gängigen archimedischen Copulas keine Einschränkung:

Satz 3.6: *Ist die Einschränkung von γ ein zweifach differenzierbarer C^1 -Diffeomorphismus von $(0, 1)$ auf $(0, 1)$, also eine stetig differenzierbare Bijektion mit stetig differenzierbarer*

Umkehrfunktion, und γ stetig mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$, dann ist C_γ genau dann eine Copula, wenn

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(u, v) \geq \frac{\gamma''(\gamma^{-1}(C(u, v)))}{[\gamma'(\gamma^{-1}(C(u, v)))]^2} \frac{\partial C}{\partial x}(u, v) \frac{\partial C}{\partial y}(u, v) \quad (3.7)$$

für alle Punkte $(u, v) \in [0, 1]^2$, an denen die Ableitungen von C existieren.

Bew.: Zum Beweis beider Richtungen betrachten wir die gemischte Ableitung $\frac{\partial^2 C_\gamma}{\partial x \partial y}$. Wir wissen nach Lemma 1.7, dass eine Copula in allen Komponenten nichtfallend ist, somit ist diese Ableitung nichtnegativ, sofern es sich bei C_γ um eine Copula handelt. Es gilt überall dort, wo die entsprechenden partiellen Ableitungen von C existieren, die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C_\gamma(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \gamma^{-1}(C(\gamma(x), \gamma(y))) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma'(x) \frac{\partial C}{\partial x}(\gamma(x), \gamma(y))}{\gamma'(\gamma^{-1}(C(\gamma(x), \gamma(y))))} \right) \\ &= \frac{\gamma'(x) \gamma'(y)}{\gamma'(\gamma^{-1}(C(\gamma(x), \gamma(y))))} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(\gamma(x), \gamma(y)) - \frac{\frac{\partial C}{\partial x}(\gamma(x), \gamma(y)) \frac{\partial C}{\partial y}(\gamma(x), \gamma(y)) \gamma''(\gamma^{-1}(C(\gamma(x), \gamma(y))))}{[\gamma'(\gamma^{-1}(C(\gamma(x), \gamma(y))))]^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Funktion γ ist nach Voraussetzung eine stetige Bijektion, also streng monoton. Sie ist, wie wir durch $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$ wissen, monoton steigend. Folglich ist γ' auf dem Intervall $(0, 1)$ positiv. Da auch die Umkehrfunktion γ^{-1} überall auf $(0, 1)$ positiv ist, ist der erste Faktor aus (3.8), $\frac{\gamma'(x) \gamma'(y)}{\gamma'(\gamma^{-1}(C(\gamma(x), \gamma(y))))}$, für alle Punkte in $(0, 1)^2$ positiv. Die gemischte partielle Ableitung ist also nur dann nichtnegativ, wenn auch die Ungleichung (3.7) erfüllt ist.

Wir wissen, dass C eine Copula ist. Deshalb gilt für jedes $v \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} C_\gamma(1, v) &= \gamma^{-1}(C(\gamma(1), \gamma(v))) \\ &= \gamma^{-1}(C(1, \gamma(v))) \\ &= \gamma^{-1}(\gamma(v)) \\ &= v \end{aligned}$$

und nach analoger Rechnung $C_\gamma(u, 1) = u$, $C_\gamma(0, v) = C_\gamma(u, 0) = 0$ für alle $u, v \in [0, 1]$. Die Funktion C_γ ist also eine Copula, falls sie 2-wachsend ist. Im Fall einer absolut stetigen Copula C ist dies nun nach Bedingung (3.7) erfüllt, denn damit ist auch der zweite Faktor aus (3.8) sicher nichtnegativ. Es gilt also

$$\frac{\partial^2 C_\gamma}{\partial x \partial y} \geq 0.$$

Durch die Stetigkeit von γ induziert die absolute Stetigkeit von C eine solche von C_γ und man erhält durch Integration der gemischten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial^2 C_\gamma(u, v)}{\partial x \partial y} dv du \\ &= C_\gamma(u_2, v_2) - C_\gamma(u_2, v_1) - C_\gamma(u_1, v_2) + C_\gamma(u_1, v_1). \end{aligned}$$

Das schließt den Beweis. □

In [9] wird aus dem Satz der folgende Korollar gezogen.

Korollar 3.7: Ist γ stetig und konvex mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$ und die Einschränkung von γ ein zweifach differenzierbarer C^1 -Diffeomorphismus von $(0, 1)$ auf $(0, 1)$, dann ist C_γ eine Copula.

Die Mengen aller Funktionen mit der Form der Funktion γ aus Satz 3.6 bzw. Korollar 3.7 wollen wir durch $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G}^*$ bezeichnen.

Wir führen den Satz 5.1.5 aus dem Buch von Nelsen als Hilfssatz ein und führen seinen Beweis weiter aus.

Satz 3.8: Sei C eine 2-Copula derart, dass das Produkt $\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y}$ auf $[0, 1]^2$ integrierbar ist, dann gilt

$$\int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) = \frac{1}{2} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) dudv. \quad (3.9)$$

Bew.: Wir betrachten zuerst den Fall einer absolut stetigen Copula C . In diesem Fall gilt

$$\int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(u, v) dudv. \quad (3.10)$$

Das innere Integral auf der rechten Seite der Gleichung (3.10) können wir nun durch partielle Integration auswerten:

$$\begin{aligned} \int_0^1 C(u, v) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(u, v) du &= \left[C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) \right]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) du \\ &= v \cdot 1 - 0 \cdot 0 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) du. \end{aligned}$$

So erhalten wir für absolut stetiges C

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) &= \int_0^1 \left(v - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) du \right) dv \\ &= \int_0^1 v dv - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) dudv \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) dudv. \end{aligned}$$

Um nun auch die Voraussetzung der absoluten Stetigkeit fallen zu lassen und auch den allgemeinen Fall zu beweisen, bilden und vergleichen wir die Riemann-Summen beider Seiten der Gleichung (3.9). Wir beginnen mit der linken Seite und zerlegen dafür den 2-Quader $[0, 1]^2$ in die $n \cdot m$ Teilrechtecke $R_{ij} := [u_{i-1}, v_{j-1}] \times [u_i, v_j]$ mit $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$, wobei $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = 1$ und $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_{m-1} < v_m = 1$. Wir nutzen die Notation $\Delta u_i := u_i - u_{i-1}$ bzw. $\Delta v_j := v_j - v_{j-1}$. Das C -Maß von R_{ij} ist $V_C(R_{ij}) = C(u_{i-1}, v_{j-1}) - C(u_i, v_{j-1}) - C(u_{i-1}, v_j) + C(u_i, v_j)$, somit ergibt sich für die erste zu betrachtende Riemann-Summe

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n C(u_i, v_j) [C(u_{i-1}, v_{j-1}) - C(u_i, v_{j-1}) - C(u_{i-1}, v_j) + C(u_i, v_j)].$$

Diese Summe formen wir jetzt, unter Zuhilfenahme einer nährenden Null, zu einer Differenz von Summen um:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [(C(u_i, v_j))^2 - C(u_i, v_j)C(u_i, v_{j-1}) - C(u_i, v_j)C(u_{i-1}, v_j) + C(u_i, v_j)C(u_{i-1}, v_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [(C(u_i, v_j))^2 - C(u_i, v_j)C(u_i, v_{j-1}) - (C(u_{i-1}, v_j))^2 + C(u_{i-1}, v_j)C(u_{i-1}, v_{j-1})] \\ & \quad - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)] [C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})] \end{aligned}$$

Der Minuend kann nun stark vereinfacht werden, da es sich bei der inneren Summe um eine Teleskopsumme handelt:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [(C(u_i, v_j))^2 - C(u_i, v_j)C(u_i, v_{j-1}) - (C(u_{i-1}, v_j))^2 + C(u_{i-1}, v_j)C(u_{i-1}, v_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^m [(C(1, v_j))^2 - C(1, v_j)C(1, v_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^m [v_j^2 - v_j v_{j-1}] \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \Delta v_j \end{aligned}$$

Der Minuend ist also die Riemann-Summe von $\int_0^1 v dv = \frac{1}{2}$. Der Subtrahend lässt sich auch als

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[\frac{C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)}{\Delta u_i} \right] \left[\frac{C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})}{\Delta v_j} \right] \Delta u_i \Delta v_j$$

schreiben und ist offenbar die Riemann-Summe von $\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) du dv$. Somit stimmen die Riemann-Summen beider Seiten der Gleichung 3.9 überein. $\square$

Die übrigen beiden Sätze des Kapitels sind wiederum dem Artikel [9] entnommen und die Beweise weiter ausgeführt.

Satz 3.9: Sei $\gamma \in \mathcal{G}$, C eine Copula derart, dass das Produkt $\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y}$ auf $[0, 1]^2$ integrierbar ist und für alle $x \in [0, 1]$ gelte

$$0 < \alpha \leq \gamma'(x) \leq \beta < +\infty,$$

dann gilt für τ_γ , Kendalls τ der transformierten Copula, im Vergleich zum τ der Ursprungscopula C ,

$$1 + \frac{\tau - 1}{\alpha^2} \leq \tau_\gamma \leq 1 + \frac{\tau - 1}{\beta^2}.$$

Bew.: Zum Beweis schauen wir uns die Definition von Kendalls τ an

$$\tau = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Mit Hilfe von Satz (3.8) lässt sich dies umschreiben als

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) du dv \right) - 1 \\ &= 1 - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) du dv. \end{aligned}$$

Für τ_γ , Kendalls τ der transformierten Copula C_γ , bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \tau_\gamma &= 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C_\gamma(u, v) du dv \\ &= 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C_\gamma(u, v)}{[\gamma'(\gamma^{-1}(C(u, v)))]^2} du dv, \end{aligned}$$

denn die partielle Ableitung von C_γ nach der ersten Variablen gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(a, b) = \frac{\partial}{\partial x} \gamma^{-1}(C(\gamma(a), \gamma(b))) = \frac{\gamma'(a) \frac{\partial}{\partial x} C(\gamma(a), \gamma(b))}{\gamma'(\gamma^{-1}(C(\gamma(a), \gamma(b))))}$$

und analoges für die partielle Ableitung nach der zweiten Variablen. Die Substitution $u = \gamma(a)$ und ihre Entsprechung für die andere Ableitung liefern besagte Gleichheit.

Nun kommt der Ungleichungskette $0 < \alpha \leq \gamma'(x) \leq \beta \leq +\infty$ Bedeutung zu. Diese gilt nach Voraussetzung für alle x aus dem Intervall $[0, 1]$ und, da jedes $\gamma \in \mathcal{G}$ eine Bijektion auf dem Intervall $[0, 1]$ ist, impliziert sie

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(x))} \leq \frac{1}{\beta}. \quad (3.11)$$

So gelangen wir schnell zu den gewünschten Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
 \tau_\gamma &= 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C_\gamma(u, v)}{[\gamma'(\gamma^{-1}(C(u, v)))]^2} dudv \\
 &\geq 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C_\gamma(u, v)}{\alpha^2} dudv \\
 &= 1 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C_\gamma(u, v) dudv \\
 &= 1 + \frac{\tau - 1}{\alpha^2}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \tau_\gamma &\leq 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial x} C_\gamma(u, v) \frac{\partial}{\partial y} C_\gamma(u, v)}{\beta^2} dudv \\
 &= 1 + \frac{\tau - 1}{\beta^2}
 \end{aligned}$$

Satz 3.10: Sei $\gamma \in \mathcal{G}$ und gelte $0 < \alpha \leq \gamma'(x) \leq \beta < \infty$ für alle $x \in [0, 1]$, dann gilt für ρ_γ , Spearman's ρ der transformierten Copula C_γ , und deren Verhältnis zum ρ der Ausgangscopula C

$$\frac{\rho + 3}{\beta^3} - 3 \leq \rho_\gamma \leq \frac{\rho + 3}{\alpha^3} - 3.$$

Bew.: Zum Beweis schauen wir uns hier die Definition von Spearman's ρ einer Copula C an.

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3$$

Für ρ_γ , Spearman's ρ der transformierten Copula C_γ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \rho_\gamma &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C_\gamma(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v} - 3 \\
 &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma^{-1}(C(\gamma(\tilde{u}), \gamma(\tilde{v})))}{\gamma'(\tilde{u})\gamma'(\tilde{v})} \gamma'(\tilde{u})\gamma'(\tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v} - 3 \\
 &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma^{-1}(C(u, v))}{\gamma'(\gamma^{-1}(u))\gamma'(\gamma^{-1}(v))} dudv - 3,
 \end{aligned}$$

dabei nutzen wir im letzten Schritt die Substitutionen $u = \gamma(\tilde{u})$ und $v = \gamma(\tilde{v})$. Nach Voraussetzung gilt wieder für $x \in [0, 1]$ die Ungleichungskette

$$0 < \alpha \leq \gamma'(x) \leq \beta \leq +\infty,$$

folglich gelten auch die Ungleichungen (3.11). Die Kette impliziert zudem, da γ eine Bijektion auf dem Intervall $[0, 1]$ ist, für die Ableitung der Umkehrabbildung auf demselben Intervall die Ungleichungen

$$\frac{1}{\beta} \leq (\gamma^{-1})'(x) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Aus diesen lässt sich nun, weil $\gamma^{-1}(0) = 0$ gilt, folgern, dass für $x \in [0, 1]$ gilt:

$$\frac{x}{\beta} \leq \gamma^{-1}(x) \leq \frac{x}{\alpha}. \quad (3.12)$$

So kommen wir nun zu den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \rho_\gamma &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma^{-1}(C(u, v))}{\gamma'(\gamma^{-1}(u))\gamma'(\gamma^{-1}(v))} dudv - 3 \\ &\stackrel{(3.11)}{\leq} 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma^{-1}(C(u, v))}{\beta^2} dudv - 3 \\ &\stackrel{(3.12)}{\leq} 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{C(u, v)}{\beta}}{\beta^2} dudv - 3 \\ &= \frac{\rho}{\beta^3} + \frac{3}{\beta^3} - 3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \rho_\gamma &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma^{-1}(C(u, v))}{\gamma'(\gamma^{-1}(u))\gamma'(\gamma^{-1}(v))} dudv - 3 \\ &\stackrel{(3.11)}{\geq} 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma^{-1}(C(u, v))}{\alpha^2} dudv - 3 \\ &\stackrel{(3.12)}{\geq} 12 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{C(u, v)}{\alpha}}{\alpha^2} dudv - 3 \\ &= \frac{\rho}{\alpha^3} + \frac{3}{\alpha^3} - 3, \end{aligned}$$

die es zu beweisen galt. □

Kapitel 4

Gewinnung einer Copula

Beim praktischen Umgang mit mehrdimensionalen Daten ist es zumeist so, dass die zugrunde liegende Verteilung und auch die beschreibende Copula nicht bekannt ist. Deshalb ist es wichtig sich mit Möglichkeiten vertraut zu machen, um zu einer Menge von Daten eine Copula zu finden, die die Abhängigkeiten gut beschreibt.

4.1 Die empirische Copula

Eine relativ simple Möglichkeit, um aus einer Stichprobe mit 2-dimensionalen numerischen Daten eine beschreibende Copula zu gewinnen, basiert auf dem Konzept der *empirischen Abhängigkeitsfunktion*. Das Konzept geht auf eine Arbeit von Deheuvels [5] zurück.

Wir greifen auf die Definition und Darstellung bei Nelsen [28] (vgl. S. 176) zurück und versuchen das Konzept an einem Beispiel zu verdeutlichen.

Definition 4.1: Für eine Stichprobe $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ mit $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ zweier stetiger Zufallsvariablen X und Y mit Stichprobengröße n bezeichnet man die Funktion

$$C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \frac{\text{Anzahl der Paare } (x_k, y_k) \text{ der Stichprobe mit } x_k \leq x_{(i)} \text{ und } y_k \leq y_{(j)}}{n}.$$

als *empirische Abhängigkeitsfunktion*. Dabei bezeichnen $x_{(i)}$ bzw. $y_{(j)}$ mit $1 \leq i, j \leq n$ die *Ordnungsstatistik* der Stichprobe.

Die empirische Abhängigkeitsfunktion wird in der Literatur auch häufig als *empirische Copula* bezeichnet. Sie ist allerdings nur auf einem 2-dimensionalen Gitter definiert und somit keinesfalls eine Copula. Im Regelfall lässt sich C_n aber zumindest zu einer Copula fortsetzen. Bei der Fortsetzung $\tilde{C}_n$ von C_n , die durch $\tilde{C}_n(0, 0) := 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n \left(0, \frac{j}{n} \right) &:= 0 \text{ für } j = 1, \dots, n, \\ \tilde{C}_n \left(\frac{i}{n}, 0 \right) &:= 0 \text{ für } i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

und

$$\tilde{C}_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) := C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right), \text{ für } i, j = 1, \dots, n$$

definiert ist, handelt es sich um eine Subcopula, sofern es für die x_i und y_j klare Rangfolgen gibt, also $x_{(i)} < x_{(i+1)}$ und $y_{(j)} < y_{(j+1)}$ für alle $1 \leq i, j \leq n-1$ gilt. Genau in diesem Fall gilt für die Ränder

$$\tilde{C}_n\left(\frac{i}{n}, 1\right) = \frac{\text{Anzahl der } x_k \leq x_{(i)}}{n} = \frac{i}{n}$$

und

$$\tilde{C}_n\left(1, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Anzahl der } y_k \leq y_{(j)}}{n} = \frac{j}{n}.$$

Geerdet ist die Funktion $\tilde{C}_n$ offensichtlich unabhängig von der Stichprobe. Ebenso allgemein ist

$$\tilde{C}_n\left(\frac{i_2}{n}, \frac{j_2}{n}\right) - \tilde{C}_n\left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_2}{n}\right) - \tilde{C}_n\left(\frac{i_2}{n}, \frac{j_1}{n}\right) + \tilde{C}_n\left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_1}{n}\right)$$

für alle $0 \leq i_1 < i_2 \leq n$ und $0 \leq j_1 < j_2 \leq n$ nichtnegativ, denn der Term lässt sich anschaulich durch

$$\frac{\text{Anzahl der Paare } (x_k, y_k) \text{ mit } x_{(i_1)} < x_k \leq x_{(i_2)} \text{ und } y_{(j_1)} < y_k \leq y_{(j_2)}}{n}$$

beschreiben, wobei $x_{(0)}$ und $y_{(0)}$ durch $(x_{(1)} - 1)$ bzw. $(y_{(1)} - 1)$ definieren.

Nach Lemma 1.6 lässt sich diese Subcopula dann durch Interpolation zu einer Copula C fortsetzen. Abbildung 4.1 soll die Konstruktion verdeutlichen. Ausgehend von einer kleinen Stichprobe von nur zehn Punkten, die in der linken Grafik eingezeichnet sind, werden die Gitterpunkte in der rechten Grafik konstruiert. Links sind durch jeden dieser Punkte zwei Linien gezogen, die die beiden Achsenabschnitte kennzeichnen. Durch diese Linien und die beiden Achsen entstehen Rechtecke. Der Anteil der Stichproben-Punkte, die innerhalb oder auf dem Rand eines solchen Rechteckes liegt, liefert uns nun den Wert

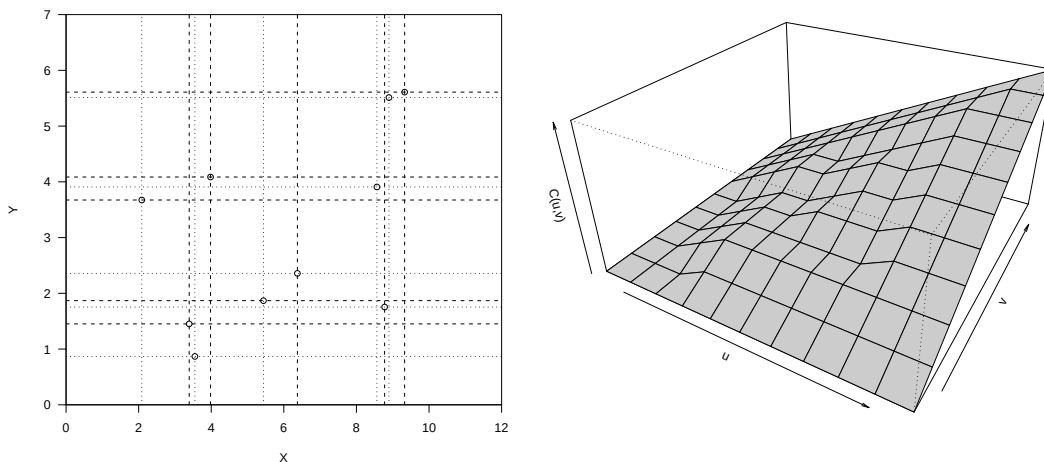


Abbildung 4.1: Stichprobe (l.) mit Umfang $n = 10$ und die daraus konstruierte Copula (r.)

des entsprechenden Gitterpunktes.

Das Konzept lässt sich problemlos auf den n -dimensionalen Fall übertragen. Die resultierende Copula ist aber bereits im Zweidimensionalen zumeist sehr kompliziert und kann nicht zusammenhängend angegeben werden. Deshalb ist es oft sinnvoller mit Hilfe theoretischer Überlegungen einfachere Copulas auszumachen, die die Verteilung der Daten widerspiegeln könnten.

4.2 Anpassungstests

4.2.1 Test parametrischer Familien

Bezeichnet $C_\theta(u, v)$ eine spezifische parametrische Familie von Copulas mit $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ und ist (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit unbekannter Copula $C(u, v)$, dann ist es von großem Interesse verifizieren zu können, ob $C(u, v)$ zur Familie $C_\theta(u, v)$ gehört und eventuell das zugehörige θ zu bestimmen. Von Dobric und Schmid [7] wird dieses Problem unter anderem mit Hilfe des χ^2 -Tests in Angriff genommen.

Ausgangspunkt ist eine Stichprobe mit n unabhängig identisch verteilten Beobachtungen (x_i, y_i) für $i \in \{1, \dots, n\}$ des Zufallsvektors (X, Y) . Wird nun angenommen der Vektor folge der Copula C_θ einer bestimmten parametrischen Familie, so wird die Nullhypothese

$$H_0 : C(u, v) = C_\theta(u, v) \text{ für } \theta \in \Theta$$

getestet werden.

Für das Testverfahren wird eine Zerlegung des Einheitswürfels $[0, 1]^2$ benötigt. Im einfachsten Fall wird hierzu ein regelmäßiges Gitter über dem Würfel platziert. Wir folgen dem Vorgehen von Dobric und Schmid [7] und nutzen die Aufspaltung in $r \cdot s$ Rechtecke identischer Größe, die wir durch

$$B_{ij} := \left(\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right] \times \left(\frac{j-1}{s}, \frac{j}{s} \right] \text{ für } i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}$$

definieren. Auf dieser Basis werden die Größen

$$p_{ij}(\theta) := P_\theta[(U, V) \in B_{ij}] = \int_{B_{ij}} dC_\theta(u, v) \text{ für } i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}$$

bestimmt. Der Wert $p_{ij}(\theta)$ bezeichnet also die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufälligen Zustand der Zufallsvektor (U, V) aus zwei $U[0, 1]$ -verteilten Zufallsvariablen U und V mit der gemeinsamen Copula C_θ im Rechteck B_{ij} liegt.

Es werden nun zwei Fälle betrachtet:

1. Fall: Die Randverteilungen F_X und F_Y sind bekannt. In diesem Fall kann man aus der Stichprobe $\{(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq n\}$ leicht eine Stichprobe der zugehörigen Copula C generieren. Dazu wird die einfache Transformation

$$(u_i, v_i) := (F_X(x_i), F_Y(y_i)) \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

genutzt. Nun kann mit Hilfe der Werte

$$N_{ij} := \#\{(u_i, v_i) | 1 \leq i \leq n\} \cap B_{ij}$$

die für beliebiges θ die zugehörige Chi-Quadrat-Statistik

$$\chi_{emp}^2(\theta) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - np_{ij}(\theta))^2}{np_{ij}(\theta)}$$

bestimmt werden. Es wird versucht dies für $\theta = \tilde{\theta}$ zu tun. Dabei bezeichnet $\tilde{\theta}$ den *Minimum-Chi-Quadrat-Schätzer*. Dieser ist implizit durch die Gleichung

$$\chi_{emp}^2(\tilde{\theta}) = \min_{\theta \in \Theta} \chi_{emp}^2(\theta)$$

definiert. Es handelt sich also einfach um den Wert aus dem Parameterraum, der den Wert der Statistik minimiert.

Sind die Regularitätsbedingungen (vgl. [15])

1. $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p_{ij}(\theta) = 1$, für $\theta \in \Theta$
2. $p_{ij}(\theta) > c > 0$, für $i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}$ und $\theta \in \Theta$
3. $\frac{\partial^2 p_{ij}(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l}$ für $k, l \in \{1, \dots, d\}$
4. Die Matrix $D(\theta) = \left\| \frac{\partial p_{ij}(\theta)}{\partial \theta_k} \right\|$ hat vollen Rang, also Rang d .

erfüllt, so ist die asymptotische Verteilung von $\chi_{emp}^2(\tilde{\theta})$ für ein gegen unendlich strebendes n eine Chi-Quadrat-Verteilung mit $r \cdot s - 1 - d$ Freiheitsgraden, also χ_{s-1-d}^2 . Eine χ_k^2 -verteilte Zufallsvariable zeichnet sich durch die Verteilungsfunktion der Form

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{t^{k/2-1} e^{-1/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t) dt$$

aus.

In der Praxis ist dieserr erste Fall nahezu unbrauchbar, da in der Regel nicht nur die zugrunde liegende Copula, sondern auch die Randverteilungen unbekannt sind. Somit dient er vor allem als unsere Grundlage für die Betrachtung des Falles mit unbekannten Randverteilungen.

2. Fall: Die Randverteilungen F_X und F_Y sind unbekannt.

$$\hat{U}_i = \hat{F}_{X,n}(X_i) \text{ und } \hat{V}_i = \hat{F}_{Y,n}(Y_i) \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dabei seien die Funktionen $\hat{F}_{X,n}$ und $\hat{F}_{Y,n}$ wie folgt definiert:

$$\hat{F}_{X,n}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} \text{ und } \hat{F}_{Y,n}(y) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i \leq y\}}.$$

Offensichtlich ergibt sich, sofern $X_i \neq X_j$ und $Y_i \neq Y_j$ für $i \neq j$,

$$\hat{U}_i = \frac{\text{Rang des Wertes } X_i \text{ unter den Beobachtungen } X_1, \dots, X_n}{n}$$

$r = s$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varnothing \chi_{emp}^2$	15,4	24,0	35,0	48,0	63,3	80,1	99,0	119,0	142,0	167,0	193,1
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	31,5	47,2	67,5	102,3	125,7	160,8	187,4	228,0	265,4	300,7	378,4
$\varnothing \hat{\theta}$	3,43	3,43	3,41	3,40	3,39	3,37	3,36	3,34	3,32	3,30	3,29
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
$\alpha = 1\%$	1,3%	1,3%	1,0%	1,3%	1,3%	1,0%	0,9%	0,7%	0,5%	0,8%	0,5%
$\alpha = 5\%$	5,8%	4,7%	4,6%	5,6%	5,0%	5,2%	4,6%	4,4%	4,3%	3,7%	3,7%
$\alpha = 10\%$	10,9%	9,7%	9,5%	11,2%	10,8%	9,9%	8,9%	8,5%	8,9%	7,9%	8,5%

Tabelle 4.1: Resultate zu Aufbau Ia (Frank-Copula)

und

$$\hat{V}_i = \frac{\text{Rang des Wertes } Y_i \text{ unter den Beobachtungen } Y_1, \dots, Y_n}{n}.$$

Die Zufallsvariablen $\hat{U}$ und $\hat{V}$ sind in der Regel nicht unabhängig, aber ihre gemeinsame Verteilung auch nicht durch die Copula $C(u, v)$ gegeben.

Nun definiert man analog zum ersten Fall:

$$\hat{N}_{ij} := \#\{(\hat{u}_i, \hat{v}_i) | 1 \leq i \leq n\} \cap B_{ij}$$

die zugehörige angepasste Chi-Quadrat-Statistik

$$\hat{\chi}_{emp}^2(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(\hat{N}_{ij} - np_{ij}(\hat{\theta}))^2}{np_{ij}(\hat{\theta})}$$

mit $\hat{\theta}$, dem Minimum-Chi-Quadrat-Schätzer für $\hat{\chi}_{emp}^2$.

Im zweiten Fall bauen die Klassenhäufigkeiten auf $(\hat{U}_i, \hat{V}_i)$ und damit auf der Rangordnung der X_i und Y_i auf. Dies impliziert, sofern die Zufallsvariablen X und Y stetig sind, fast sicher, dass zwar die Klassenhäufigkeiten $\hat{N}_{ij}$ nicht a priori bekannt sind, aber zumindest die Ränder $\sum_i \hat{N}_{ij}$ und $\sum_j \hat{N}_{ij}$. Ist die Stichprobengröße n durch s bzw. durch r teilbar, so gilt

$$\sum_{i=1}^r \hat{N}_{ij} = n \cdot \frac{1}{s} \text{ für } j \in \{1, \dots, s\} \text{ bzw. } \sum_{j=1}^s \hat{N}_{ij} = n \cdot \frac{1}{r} \text{ für } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Damit erhält man als asymptotische Verteilung von $\hat{\chi}_{emp}^2(\hat{\theta})$ für ein gegen unendlich strebendes n eine Chi-Quadrat-Verteilung mit $r \cdot s - (s + r - 1) - d = (r - 1)(s - 1) - d$ Freiheitsgraden.

Der angepasste χ^2 -Test bei unbekannter Randverteilungen

Wir werden nun analog zum Vorgehen von Dobric und Schmid den angepassten Chi-Quadrat-Test gemäß des zweiten Falles durchführen, also für unbekannte Randverteilungen. Wir simulieren dazu mehrere verschiedene einparametrische Familien archimedischer Copulas.

Zum Aufbau des Tests: Die Stichprobengröße beträgt jeweils $n = 2500$ und für jedes Zufallsexperiment werden $N = 2000$ Wiederholungen durchgeführt. Die Kantenlängen der B_{ij} sind, wie beschrieben regelmäßig, also gleich $1/r$ bzw. $1/s$. Für jede Durchführung wird nun $\hat{\chi}^2(\hat{\theta})$ berechnet und die Hypothese H_0 verworfen sofern $\hat{\chi}^2(\hat{\theta}) > c$, wobei c das $(1-\alpha)$ -Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung mit $(r-1)(s-1)-1$ Freiheitsgraden darstelle.

Aufbau I (Die Familie der Frank-Copulas) Als erstes testen wir die Nullhypothese

$$H_0 : C(u, v) = C_\theta(u, v) \text{ mit } \theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\},$$

wobei C_θ die zweidimensionale Frank-Copula zum Parameter θ bezeichne. Als Ausgangsdaten werden nun also 2000 mal jeweils 2500 Punkte gemäß einer solchen Copula simuliert. Wie in [7] wählen wir als Parameter $\theta = 3, 45$. Nun werden numerisch für fest gewählte r und s die 2000 Minimum-Chi-Quadrat-Schätzer $\hat{\theta}$ zu den einzelnen Stichproben ermittelt. Es wird also zu jeder Stichprobe der Schätzer $\hat{\theta}$ gewählt, der χ_{emp}^2 minimiert. Die zugehörigen Resultate sind in zwei Tabellen zusammengefasst:

- a) In Tabelle 4.1 sind die Werte für $r = s \in \{5, 6, \dots, 15\}$ gelistet.
- b) In Tabelle 4.2 sind die Werte für $s \in \{5, 6, \dots, 15\}$ und konstantes $r = 10$ gelistet.

In den Zeilen ‘1%’, ‘5%’ und ‘10%’ findet sich dabei die Ablehnungsquote, für den Fall, dass das 99%-, 95%- bzw. 90%-Quantil heran gezogen wird.

Aufbau II (Die Familie der Clayton-Copulas) Aufbau II unterscheidet sich vom ersten vor allem durch die betrachtete Familie. Wir testen nun die Hypothese

$$H_0 : C(u, v) = C_\theta(u, v) \text{ mit } \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Diesmal bezeichnet C_θ die Clayton-Copula mit Parameter θ . Die getesteten Daten wurden entsprechend einer Clayton-Copula mit Parameter $\theta = 2$ erzeugt.

In Tabelle 4.3 sind die entsprechenden Werte für die Fälle $r = s \in \{5, 6, \dots, 15\}$ gelistet.

Aufbau III (Die Familie der Ali-Mikhail-Haq-Copulas) Nun wollen wir diesen Test auch für die AMH-Copulas durchführen. Wir testen also wiederum die Nullhypothese

$$H_0 : C(u, v) = C_\theta(u, v) \text{ mit } \theta \in [-1, 1),$$

s	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\phi \chi_{emp}^2$	35,2	44,4	52,9	61,7	71,0	79,8	89,0	97,9	106,5	115,4	124,6
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	64,1	83,3	109,1	120,3	135,4	152,0	176,8	190,1	206,4	229,1	241,9
$\phi \hat{\theta}$	3,42	3,4	3,4	3,39	3,38	3,37	3,37	3,36	3,35	3,35	3,33
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
$\alpha = 1\%$	0,8 %	0,9 %	1,0 %	0,8 %	0,9 %	0,9 %	1,2 %	1,1 %	0,8 %	0,9 %	1,0 %
$\alpha = 5\%$	4,5 %	5,3 %	4,5 %	4,9 %	4,5 %	4,6 %	5,4 %	4,5 %	3,7 %	4,7 %	4,3 %
$\alpha = 10\%$	9,6 %	10,3 %	9,8 %	9,3 %	8,9 %	9,3 %	9,7 %	9,8 %	9,0 %	9,4 %	9,5 %

Tabelle 4.2: Resultate zu Aufbau Ib (Frank-Copula)

$r = s$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\phi \chi_{emp}^2$	15,5	24,0	35,4	47,6	62,5	78,7	97,3	117,0	138,7	162,0	187,5
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	33,1	49,2	69,9	91,0	121,2	151,9	196,0	232,2	289,0	338,0	393,6
$\phi \hat{\theta}$	1,99	1,98	1,96	1,95	1,94	1,92	1,91	1,89	1,88	1,87	1,85
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
$\alpha = 1\%$	1,5 %	1,4 %	1,1 %	0,9 %	1,1 %	0,7 %	0,7 %	0,9 %	0,9 %	0,4 %	0,8%
$\alpha = 5\%$	6,9 %	5,6 %	4,7 %	4,2 %	3,8 %	4,3 %	4,2 %	3,2 %	3,0 %	2,9 %	2,5%
$\alpha = 10\%$	11,8 %	9,8 %	10,9 %	8,8 %	9,0 %	7,9 %	8,4 %	6,6 %	6,4 %	5,9 %	5,0%

Tabelle 4.3: Resultate zu Aufbau II (Clayton-Copula)

wobei C_θ nun eine AMH-Copula bezeichnet.

Für Tabelle 4.4 wurde die Stichprobe entsprechend einer AMH-Copula mit Parameter $\theta = 0,5$ erzeugt und dann für $r = s \in \{1, \dots, 15\}$ getestet.

Für Tabelle 4.5 wurden Stichproben entsprechend AMH-Copulas mit verschiedenen Werten für den Index ρ_s erzeugt, also zu verschiedenen Parametern θ . Konkret erzeugen wir zu $\rho \in \{-0,2 + 0,1k | k = \{0, \dots, 6\}\}$ bzw. zu $\theta \in \{-\frac{349}{500}, -\frac{323}{1000}, 0, \frac{139}{500}, \frac{517}{1000}, \frac{719}{1000}, \frac{889}{1000}\}$ die zugehörigen Copulas. Getestet wird jeweils mit $r = s = 10$.

Aufbau IV (Die Familie der Gumbel-Hougaard-Copulas) Wir erzeugen nun elf Stichproben zur Gumbel-Hougaard-Copula mit Parameter $\theta = 4$ und untersuchen die Nullhypothese

$$H_0 : C(u, v) = C_\theta(u, v) \text{ mit } \theta \in [1, \infty),$$

für $r = s \in \{5, \dots, 15\}$

Aufbau V (Die angepasste Frank-Copulas) Nun betrachten wir neben den bekannten einparametrischen Copulas eine Transformierte. Genauer die Transformation einer Frank-Copula, die in Kapitel 3 als C_ω eingeführt wurde. Sie hat die Form

$$C_{(\theta, \delta)}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + (e^{-\theta} - 1) \exp \left[- \left(\left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta + \left(-\ln \left[\frac{e^{-\theta v} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right] \right)^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] \right].$$

Wir erhalten so praktisch eine zweiparametrische Familie von Copulas. Die von uns erzeugte Stichprobe folgt der Copula mit Parametern $\theta = 2,5$ und $\delta = 3,34$. Wir testen die Nullhypothese

$$H_0 : C(u, v) = C_{(\theta, \delta)}(u, v) \text{ mit } \theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\} \text{ und } \delta \in [1, \infty).$$

$r = s$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\phi \chi_{emp}^2$	15,3	24,0	35,0	48,0	62,9	80,2	99,1	119,5	143,1	168,0	195,0
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	30,2	46,6	68,0	93,8	129,4	156,6	192,2	230,0	268,9	329,4	369,3
$\phi \hat{\theta}$	0,50	0,50	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,48
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\alpha = 1\%$	1,2 %	0,9 %	1,0 %	0,8 %	1,1 %	1,5 %	0,8 %	0,8 %	0,8 %	0,9 %	0,8%
$\alpha = 5\%$	5,2 %	5,0 %	4,8 %	4,7 %	5,1 %	4,8 %	5,2 %	3,7 %	4,7 %	5,1 %	5,2%
$\alpha = 10\%$	10,6 %	9,6 %	9,6 %	10,8 %	10,5 %	9,7 %	9,8 %	8,9 %	10,1 %	10,0 %	9,9%

Tabelle 4.4: Resultate zu Aufbau IIIa (AMH-Copula)

ρ_s	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$\hat{\theta}$	-0,698	-0,323	0,000	0,278	0,517	0,719	0,889
$\hat{\phi} \chi_{emp}^2$	80,2	80,1	80,1	80,2	79,7	80,0	80,5
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	156,7	165,5	150,0	154,2	163,9	152,9	164,9
$\hat{\phi} \hat{\theta}$	-0,68	-0,32	0,00	0,27	0,51	0,71	0,88
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\alpha = 1\%$	1,1 %	1,1 %	0,8 %	0,7 %	1,0 %	1,0 %	1,4%
$\alpha = 5\%$	4,9 %	5,2 %	4,8 %	5,0 %	5,3 %	5,5 %	5,0%
$\alpha = 10\%$	9,4 %	10,6 %	9,0 %	9,9 %	10,1 %	10,0 %	10,9%

Tabelle 4.5: Resultate zu Aufbau IIIb (AMH-Copula)

Es ist zu beachten, dass nun eine χ^2 -Verteilung mit $(r-1)(s-1)-2$ Freiheitsgraden zur Bestimmung der Quantile verwendet werden muss.

Güte des χ^2 -Tests

Die Ablehnungsraten, die bei den einzelnen Tests ermittelt wurden, liegen in den meisten Fällen tatsächlich im zu erwartenden Bereich. Es ist allerdings festzustellen, dass für eine steigende Anzahl von Rechtecken, also mit wachsendem Produkt $r \cdot s$ die Ablehnungsquote sinkt. Einen Sonderfall stellen die Ergebnisse zu Aufbau V dar. Hier fällt die Ablehnungsquote für das 99%-Quantil systematisch zu hoch aus. Dies ist wahrscheinlich damit zu begründen, dass für jeden Aufbau zur Ermittlung der Schätzer Intervallschachtelungen durchgeführt wurden. Im eindimensionalen ist dies, trotz fehlender Monotonität, relativ problemlos möglich. Ab dem zweidimensionalen Fall kann dies aber zu häufigeren und deutlicheren Fehlern führen. Die Ergebnisse mit diesem Verfahren wären wohl noch schlechter ausgefallen, wenn die Startwerte nicht so nah an den tatsächlichen Werten gesetzt worden wären.

Mit Hilfe eines Kerndichteschätzers kann man verdeutlichen, wie genau die Verteilung der χ_{emp}^2 einer χ^2 -Verteilung entspricht.

Kerndichteschätzer Wir berechnen zum Aufbau II, also für eine Clayton-Copula mit $\theta = 2$, speziell für $r = s = 10$, den Kerndichteschätzer zur Bandbreite $b = 130$ unter Verwendung des Epanechnikov-Kerns $k(t) = \frac{3}{4}(1-t^2)\mathbb{I}_{[-1,1]}(t)$ nach der Formel

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{nb} \sum_{j=1}^n k\left(\frac{t - x_j}{b}\right).$$

$r = s$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\hat{\phi} \chi_{emp}^2$	14,6	23,3	32,7	44,3	56,8	70,5	86,4	102,5	120,7	139,4	159,6
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	39,5	85,9	133,8	198,1	324,9	357,6	471,3	494,3	666,8	867,0	905,7
$\hat{\phi} \hat{\theta}$	3,94	3,92	3,90	3,87	3,86	3,83	3,81	3,79	3,77	3,74	3,72
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02
$\alpha = 1\%$	1,6 %	4,3 %	3,0 %	3,3 %	3,2 %	3,1 %	3,2 %	2,5 %	2,0 %	2,1 %	1,9 %
$\alpha = 5\%$	7,1 %	7,9 %	5,4 %	6,6 %	6,0 %	6,1 %	4,7 %	4,0 %	3,7 %	3,5 %	3,0 %
$\alpha = 10\%$	11,7 %	11,7 %	8,3 %	9,3 %	8,3 %	7,8 %	5,9 %	5,0 %	4,8 %	4,2 %	3,9 %

Tabelle 4.6: Resultate zu Aufbau IV (Gumbel-Hougaard-Copula)

$r = s$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varnothing \chi_{emp}^2$	13,3	21,3	30,7	41,6	53,8	66,7	81,3	97,7	114,8	132,2	151,7
$\text{Var}(\chi_{emp}^2)$	54,0	93,5	179,3	235,5	343,3	432,3	534,2	720,0	872,0	1034,7	1125,8
$\varnothing \hat{\theta}$	2,32	2,29	2,32	2,37	2,37	2,43	2,48	2,50	2,54	2,59	2,64
$\text{Var}(\hat{\theta})$	0,53	0,48	0,48	0,52	0,53	0,56	0,60	0,63	0,63	0,63	0,64
$\varnothing \hat{\delta}$	3,38	3,37	3,33	3,30	3,28	3,24	3,20	3,17	3,14	3,10	3,07
$\text{Var}(\hat{\delta})$	0,12	0,10	0,10	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,12
$\alpha = 1\%$	5,0%	2,7%	3,4%	3,7%	3,6%	2,8%	3,1%	2,8%	2,7%	2,1%	2,1%
$\alpha = 5\%$	6,8%	5,8%	6,8%	6,2%	5,5%	4,9%	4,8%	4,1%	4,1%	3,1%	2,9%
$\alpha = 10\%$	9,8%	8,6%	8,7%	8,4%	7,5%	6,5%	6,1%	4,9%	5,2%	4,0%	3,9%

Tabelle 4.7: Resultate zu Aufbau V (angepasste Frank-Copula)

Dabei betrachten wir die $n = 2000$ $\hat{\chi}_{emp}^2$ -Werte als Stichprobenwerte $x_1, \dots, x_{2000}$. In der Abbildung 4.2 ist dieser Kerndichteschätzer mit durchgängiger Linie eingezeichnet. Die gestrichelte Linie in der Grafik beschreibt den Verlauf der Dichte einer χ^2 -Verteilung mit 80 Freiheitsgraden. Es wird deutlich, wie genau beide übereinstimmen.

AMH-Copula gegen Frank-Copula Um zu zeigen, wie zuverlässig es der χ^2 -Test ermöglicht, zu erkennen, dass eine bestimmte Copula einer Stichprobe nicht zu Grunde liegt, testen wir nun Mischungen von zwei Copulas. Als Beispiel wählen wir die Familien der AMH- und der Frank-Copulas. Wir mischen jeweils Copulas mit identischem Korrelationskoeffizient ρ_s , erzeugen eine Stichprobe auf Basis dieser Mischung und testen ob dieser Stichprobe eine AMH-Copula zugrunde liegt.

Wir testen also die Nullhypothese

$$H_0 : C(u, v, \lambda) = C_\theta(u, v),$$

für die Familie der AMH-Copulas C_θ und die Copula

$$C(u, v, \lambda) = (1 - \lambda)C_{\theta_A}(u, v) + \lambda C'_{\theta_F}(u, v) \text{ für } \lambda \in \{0, 1 * k \text{ für } k \in \{1, \dots, 10\}\},$$

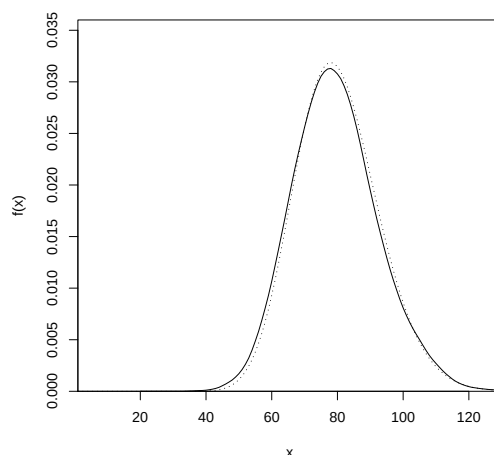


Abbildung 4.2: Ein Kerndichteschätzer der Dichte der Test-Statistik für Aufbau II (durchgezogen) und die Dichte einer χ^2_{80} -Verteilung (gepunktet)

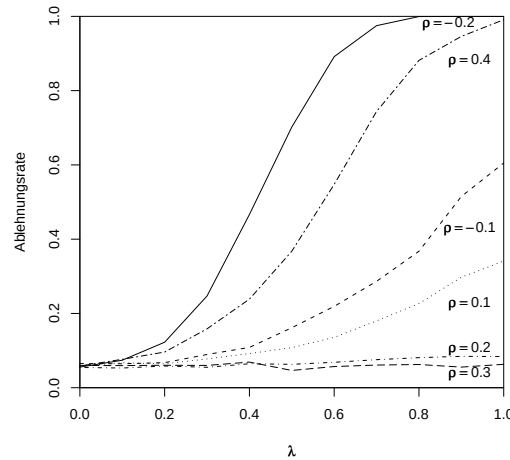


Abbildung 4.3: Ablehnungsquoten für die Mischung von Frank- und AMH-Copulas

wobei C'_{θ_F} die Frank-Copula bezeichnet und θ_F und θ_A so gewählt sind, dass

$$\rho_s(C_{\theta_A}) = \rho_s(C'_{\theta_F}).$$

Das Ergebnis für das 95%-Quantil sehen wir in Abbildung 4.3. Es ist festzustellen, dass sich die beiden Copulas im Fall $\rho = 0,2$ bzw. $\rho = 0,3$ zu ähnlich sind, um bei der gegebenen Stichprobengröße unterscheidbar zu sein. In den übrigen Fällen ist der Test durchaus in der Lage die falsche Hypothese zu verwerfen.

4.2.2 Die Rosenblatt-Transformation

Eine Alternative zum Vorgehen im vorigen Abschnitt beim Durchführen eines Anpassungstests besteht darin die gegebenen Daten entsprechend der angenommenen Verteilung zu einer Gleichverteilung zu transformieren und danach mit dem χ^2 -Test auf Unabhängigkeit zu prüfen.

Die Idee findet sich z. B. in der Arbeit von Diebold et al. [6]. Sie wird aber schon bei Rosenblatt [30] erwähnt. Zur folgenden Definition vgl. Breyman et al. [3].

Definition 4.2: Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit absolut stetiger Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Seien

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &:= F_1(x_1) = P(X_1 \leq x_1) \hat{=} \text{Verteilungsfunktion von } X_1 \\ G_2(x_1, x_2) &:= F_{2|1}(x_2|x_1) = P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) \\ &\hat{=} \text{bedingte Verteilungsfunktion von } X_2 \text{ für gegebenes } X_1 \\ &\vdots \\ G_n(x_1, \dots, x_n) &:= F_{n|1,2,\dots,n-1}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) = P(X_n \leq x_n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &\hat{=} \text{bedingte Verteilung von } X_n \text{ für gegebene } X_1 \text{ bis } X_{n-1} \end{aligned}$$

Die Transformation T definiere einen zweiten Zufallsvektor $\mathbf{Z}$ durch $Z_1 := G_1(X_1)$, $Z_2 := G_2(X_1, X_2)$, $\dots$, $Z_n := G_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Sei also $T(\mathbf{X}) = \mathbf{Z}$. Diese Transformation

der Zufallsvariablen $\mathbf{X}$ nennt man *Wahrscheinlichkeitsintegral-Transformation* oder nach Murray Rosenblatt, der einen der ersten Artikel [30] über sie veröffentlichte, *Rosenblatt-Transformation*.

Der Nutzen der Rosenblatt-Transformation liegt darin, dass die durch den neuen Zufallsvektor $\mathbf{Z}$ gegebenen Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, wie wir sehen werden, allesamt gleichverteilt auf dem Einheitsintervall und untereinander unabhängig sind. Dies gibt uns die Möglichkeit standardmäßig auf Gleichverteilung zu prüfen.

Lemma 4.3: Sei $\mathbf{X}$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor mit absolut stetiger Verteilungsfunktion und sei $\mathbf{Z} = T(\mathbf{X})$ die Rosenblatt-Transformierte, dann sind die Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ unabhängig und jeweils gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$.

Bew.: Wir werden nun mittels Induktion über die Dimension n zeigen, dass der Zufallsvektor $\mathbf{Z} = T(\mathbf{X})$ auf dem n -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^n$ gleichverteilt ist.

Der Induktionsanfang ist klar. Ist $\mathbf{X}$ eindimensional, also eine stetige Zufallsvariable, so entspricht die zugehörige Verteilungsfunktion der Transformaten und diese ist somit gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$.

Sei nun für jeden n -dimensionalen Zufallsvektor mit absolut stetiger Verteilungsfunktion die zugehörige Transformierte gleichverteilt auf dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$, so gilt für einen $(n + 1)$ -dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X}$, mit der Rosenblatt-Transformierten $\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} P(Z_i \leq z_i; 1 \leq i \leq n + 1) &= P(T(X_1, \dots, X_n) \in [0, z_1] \times \dots \times [0, z_n], Z_{n+1} \leq z_{n+1}) \\ &= P((X_1, \dots, X_n) \in T^{-1}([0, z_1] \times \dots \times [0, z_n]), Z_{n+1} \leq z_{n+1}) \\ &= \int_{T_n^{-1}} P(Z_{n+1} \leq z_{n+1} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) P_n(dx_1, \dots, dx_n) \\ &= \int_{T_n^{-1}} z_{n+1} P_n(dx_1, \dots, dx_n) \\ &= z_{n+1} P((X_1, \dots, X_n) \in T_n^{-1}) \\ &= z_{n+1} P(T(X_1, \dots, X_n) \in [0, z_1] \times \dots \times [0, z_n]) \\ &= t_{n+1} t_n \dots t_1. \end{aligned}$$

Wobei $T_n^{-1} := T^{-1}([0, z_1] \times \dots \times [0, z_n])$ und $P_n := P^{X_1, \dots, X_n}$ sind.

$\mathbf{Z}$ ist also gleichverteilt auf dem Einheitswürfel und die Komponenten $Z_1, \dots, Z_n$ sind unabhängig und jeweils gleichverteilt auf $[0, 1]$. $\square$

Diese Transformation wollen wir nun, wie in [10] geschehen, auf Copulas übertragen: Für den absolut stetigen Zufallsvektor $\mathbf{X}$ sind die eindimensionalen Randverteilungen allesamt stetig. Nach dem Satz von Sklar existiert also genau eine Copula C mit

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

Allgemein ist jede n -Copula eine n -dimensionale Verteilungsfunktion, deren eindimensionalen Randverteilungen alle Gleichverteilungen auf $[0, 1]$ sind. Das heißt zur Copula C existieren $U[0, 1]$ verteilte $U_1, U_2, \dots, U_n$ derart, dass $C \sim (U_1, \dots, U_n)$.

Im Weiteren bezeichne $C_i(u_1, \dots, u_i) := C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)$ für alle $i = 1, 2, \dots, n-1$ die i -dimensionale Randverteilung $F_{(U_1, U_2, \dots, U_i)}$. Entsprechend wird

$$C_n(u_1, u_2, \dots, u_n) := C(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

gesetzt. Nun betrachten wir die bedingten Verteilungen von U_k zu gegebenen ersten $k-1$ Komponenten von $\mathbf{U}$. Für $k = 2, \dots, n$ lassen sich diese durch

$$\begin{aligned} C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= F_{U_k | U_1, \dots, U_{k-1}}(u_1, \dots, u_k) \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \end{aligned}$$

ausdrücken. Für eine konsistente Schreibweise setzen wir außerdem $C_1(u_1) := u_1$. Nach Lemma 4.3 ist $(C_1(u_1), C_2(u_2 | u_1), \dots, C_n(u_n | u_1, \dots, u_{n-1}))$ gleichverteilt auf dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$.

Kapitel 5

Algorithmen

5.1 Erzeugen archimedischer Copulas

Im Folgenden werden wir die sechs Algorithmen zum Erzeugen von archimedischen und verschachtelten archimedischen Copulas betrachten, die A. J. McNeil im Artikel [26] vorstellt. Wir zeigen jeweils, dass sie die gewünschten Ergebnisse liefern.

5.1.1 Der symmetrische Fall

Der erste Algorithmus ist auch gleichzeitig der wichtigste, da er das Simulieren im symmetrischen Fall ermöglicht und darüber hinaus einige der übrigen Algorithmen auf diesen zurückgreifen. Er hat die folgende Form:

1. Algorithmus zum Erzeugen einer archimedischen Copula

1. Erzeuge eine Zufallsvariable Y zur Verteilungsfunktion G mit Laplace-Stieltjes-Transformierter φ^{-1} .
2. Erzeuge $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariablen $V_1, \dots, V_d$, die voneinander unabhängig sind.
3. Setze $(U_1, \dots, U_d) := \left(\varphi^{-1} \left(-\frac{\ln(V_1)}{Y} \right), \dots, \varphi^{-1} \left(-\frac{\ln(V_d)}{Y} \right) \right)$.

Es ist leicht zu zeigen, dass der so konstruierte Vektor $(U_1, \dots, U_d)$ tatsächlich gemäß der archimedischen d -Copula mit Erzeuger φ verteilt ist.

$$\begin{aligned}
P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) &= P\left(\varphi^{-1}\left(-\frac{\ln(V_1)}{Y}\right) \leq u_1, \dots, \varphi^{-1}\left(-\frac{\ln(V_d)}{Y}\right) \leq u_d\right) \\
&= P(V_1 \leq e^{-\varphi(u_1)Y}, \dots, V_d \leq e^{-\varphi(u_d)Y}) \\
&\stackrel{*1}{=} \int_0^\infty P(V_1 \leq e^{-\varphi(u_1)Y}, \dots, V_d \leq e^{-\varphi(u_d)Y} | Y = y) dG(y) \\
&\stackrel{*2}{=} \int_0^\infty \prod_{i=1}^d P(V_i \leq e^{-\varphi(u_i)Y} | Y = y) dG(y) \\
&= \int_0^\infty \prod_{i=1}^d e^{-y\varphi(u_i)} dG(y) \\
&= \int_0^\infty e^{-y(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))} dG(y) \\
&\stackrel{*3}{=} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)) \\
&= C_n(u_1, \dots, u_d).
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Gleichheit (*¹) nutzen wir die Tatsache, dass Y gemäß G verteilt ist; zum Beweis von (*²), dass die Zufallsvariablen V_i unabhängig sind, und für Gleichheit (*³), dass die Verteilung G die Laplace-Stieltjes-Transformierte von φ^{-1} ist.

5.1.2 Verschachtelte archimedische Copulas

Der zweite Algorithmus dient zum Erzeugen einer einfachen verschachtelten Copula der Form

$$C_3(u_1, u_2, u_3; \varphi_1, \varphi_2) = C_{\varphi_1}(u_1, C_{\varphi_2}(u_2, u_3)).$$

2. Algorithmus zum Erzeugen einer archimedischen Copula

1. Erzeuge eine Zufallsvariable Y zur Verteilungsfunktion G_1 mit Laplace-Stieltjes-Transformierter φ_1^{-1} .
2. Erzeuge eine $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariablen V_1 .
3. Erzeuge mit dem ersten Algorithmus den Zufallsvektor (V_2, V_3) entsprechend der archimedischen Copula mit Erzeuger $\varphi_{1,2}(\cdot, Y) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\left(-\frac{\ln(\cdot)}{Y}\right)$.
4. Setze $(U_1, U_2, U_3) := \left(\varphi_1^{-1}\left(-\frac{\ln(V_1)}{Y}\right), \varphi_1^{-1}\left(-\frac{\ln(V_2)}{Y}\right), \varphi_1^{-1}\left(-\frac{\ln(V_3)}{Y}\right)\right)$.

Auch hier können wir schnell nachrechnen, dass der Algorithmus die gewünschte Verteilung erzeugt. Dabei nutzen wir, wie auch bei den Beweisen der folgenden Algorithmen,

die vereinfachende Notation $F_i^Y(x)$ für $e^{-\varphi_i(x)Y}$.

$$\begin{aligned}
P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) &= P(V_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)Y}, V_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)Y}, V_3 \leq e^{-\varphi_1(u_3)Y}) \\
&= \int_0^\infty P(V_1 \leq F_1^Y(u_1), V_2 \leq F_1^Y(u_2), V_3 \leq F_1^Y(u_3) | Y = y) dG_1(y) \\
&\stackrel{*1}{=} \int_0^\infty P(V_1 \leq F_1^Y(u_1) | Y = y) P(V_2 \leq F_1^Y(u_2), V_3 \leq F_1^Y(u_3) | Y = y) dG_1(y) \\
&\stackrel{*2}{=} \int_0^\infty F_1^y(u_1) C_{\varphi_{1,2}(\cdot, y)}(F_1^y(u_2), F_1^y(u_3)) dG_1(y) \\
&\stackrel{*3}{=} \int_0^\infty F_1^y(u_1) F_1^y \circ C_{\varphi_2}(u_2, u_3) dG_1(y) \\
&= \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1 \circ C_{\varphi_2}(u_2, u_3)) \\
&= C_{\varphi_1}(u_1, C_{\varphi_2}(u_2, u_3)).
\end{aligned}$$

Die Gleichheit (*¹) gilt, da der Vektor (V_2, V_3) unabhängig von V_1 konstruiert wird. Beim nächsten Schritt wird ausgenutzt, dass (V_2, V_3) eine Copula mit Erzeuger $\varphi_{1,2}(\cdot; y)$ ist und zur Erklärung von Gleichheit (*³) reicht das Wissen, dass $F_1^y \circ \varphi_2^{-1}$ die Inverse zum Erzeuger $\varphi_{1,2}(\cdot, y)$ ist und somit die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
C_{\varphi_{1,2}(\cdot, y)}(F_1^y(u_2), F_1^y(u_3)) &= \varphi_{1,2}^{-1}(\cdot, y) (\varphi_{1,2}(u_2, y) + \varphi_{1,2}(u_3, y)) \\
&= F_1^y \circ \varphi_2^{-1} \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(e^{-y\varphi_1(u_2)})}{y} \right) + \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(e^{-y\varphi_1(u_3)})}{y} \right) \right) \\
&= F_1^y \circ C_{\varphi_2}(u_2, u_3).
\end{aligned}$$

gilt.

Der folgende Algorithmus dient demselben Zweck, wie der vorherige. Allerdings wird bei diesem auf einen Rückgriff auf den ersten Algorithmus verzichtet.

3. Algorithmus zum Erzeugen einer archimedischen Copula

1. Erzeuge eine Zufallsvariable Y_1 zur Verteilungsfunktion G_1 mit Laplace-Stieltjes-Transformierter φ_1^{-1} .
2. Erzeuge eine Zufallsvariable Y_2 zur Verteilungsfunktion $G_2(\cdot, Y_1)$ mit Laplace-Stieltjes-Transformierter $\varphi_{1,2}^{-1}(\cdot, Y_1) = \exp(-Y_1 \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \cdot)$.
3. Erzeuge unabhängige $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariablen V_1, V_2, V_3 .
4. Setze $(U_1, U_2, U_3) := \left(\varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(V_1)}{Y_1} \right), \varphi_2^{-1} \left(-\frac{\ln(V_2)}{Y_2} \right), \varphi_2^{-1} \left(-\frac{\ln(V_3)}{Y_2} \right) \right)$.

Für den Beweis verwenden wir hier die verkürzenden Bezeichnungen

$$P_{Y=y}(\cdot) := P(\cdot | Y = y) \text{ und } P_{Y_i=y_i}(\cdot) := P(\cdot | Y_i = y_i \text{ für alle } i \in M).$$

So können wir nun schreiben:

$$\begin{aligned}
P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) &= P(V_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)Y_1}, V_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)Y_2}, V_3 \leq e^{-\varphi_1(u_3)Y_2}) \\
&\stackrel{*1}{=} \int_0^\infty P_{Y_1=y_1}(V_1 \leq F_1^{Y_1}(u_1), V_2 \leq F_2^{Y_2}(u_2), V_3 \leq F_2^{Y_2}(u_3)) dG_1(y_1) \\
&\stackrel{*2}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty P_{\substack{Y_i=y_i \\ i \in \{1,2\}}}(V_1 \leq F_1^{Y_1}(u_1), V_2 \leq F_2^{Y_2}(u_2), V_3 \leq F_2^{Y_2}(u_3)) dG(y_2; y_1) dG_1(y_1) \\
&\stackrel{*3}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty F_1^{y_1}(u_1) F_2^{y_2}(u_2) F_2^{y_2}(u_3) dG(y_2; y_1) dG_1(y_1) \\
&\stackrel{*4}{=} C_3(u_1, u_2, u_3; \varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Für die Schritte $(*)^1$ und $(*)^2$ nutzen wir die Verteilung von Y_1 und Y_2 , für Schritt $(*)^3$ die Tatsache, dass die V_i unabhängig und $U[0, 1]$ -verteilt sind. Die letzte Gleichheit $(*)^4$ folgt aus Satz 2.25.

Den Fall vierdimensionaler Copulas der Form $C_{\varphi_1}(C_{\varphi_2}(u_1, u_2), C_{\varphi_3}(u_3, u_4))$ soll nun der vierte Algorithmus abdecken.

4. Algorithmus zum Erzeugen einer archimedischen Copula

1. Erzeuge eine Zufallsvariable Y zur Verteilungsfunktion G_1 mit Laplace-Stieltjes-Transformierter φ_1^{-1} .
2. Erzeuge mit dem ersten Algorithmus (V_1, V_2) entsprechend der archimedischen Copula mit Erzeuger $\varphi_{1,2}(\cdot, Y) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(\cdot)}{Y} \right)$
3. Erzeuge mit dem ersten Algorithmus (V_3, V_4) entsprechend der archimedischen Copula mit Erzeuger $\varphi_{1,3}(\cdot, Y) = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(\cdot)}{Y} \right)$
4. Zur Definition von (U_1, U_2, U_3, U_4) setze $U_i := \varphi_1^{-1} \left(-\frac{\ln(V_i)}{Y} \right)$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned}
P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) &= P(V_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)Y}, V_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)Y}, V_3 \leq e^{-\varphi_1(u_3)Y}) \\
&= \int_0^\infty P_{Y=y}(V_i \leq F_1^Y(u_i) : i \in \{1, 2, 3, 4\}) dG_1(y) \\
&\stackrel{*1}{=} \int_0^\infty C_{\varphi_{1,2}(\cdot, y)}(F_1^y(u_1), F_1^y(u_2)) C_{\varphi_{1,3}(\cdot, y)}(F_1^y(u_3), F_1^y(u_4)) dG_1(y) \\
&\stackrel{*2}{=} \int_0^\infty F_1^y \circ C_{\varphi_2}(u_1, u_2) F_1^y \circ C_{\varphi_3}(u_3, u_4) dG_1(y) \\
&= C_{\varphi_1}(C_{\varphi_2}(u_1, u_2), C_{\varphi_3}(u_3, u_4)).
\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir bei Schritt $(*)^1$ aus, dass die Vektoren (V_1, V_2) und (V_3, V_4) unabhängig voneinander nach der Copula mit Erzeuger $\varphi_{1,2}(\cdot; Y)$ bzw. $\varphi_{1,3}(\cdot; Y)$ konstruiert wurden.

Bei Schritt $(*)^2$ nutzen wir, dass, wie wir schon im Beweis zum zweiten Algorithmus gezeigt haben, die Gleichung

$$C_{\varphi_{1,2}(\cdot, y)}(F_1^y(u_1), F_1^y(u_2)) = F_1^y \circ C_{\varphi_2}(u_1, u_2)$$

und analog dazu

$$C_{\varphi_{1,3}(\cdot, y)}(F_1^y(u_3), F_1^y(u_4)) = F_1^y \circ C_{\varphi_3}(u_3, u_4)$$

gilt. Nun wenden wir uns den beiden Algorithmen zum Erzeugen verschachtelter Copulas beliebiger Dimension zu. Der erste Algorithmus ist rekursiv. Er greift also auf sich selbst und in der letzten Stufe auch auf Algorithmus 1 zurück.

5. Algorithmus zum Erzeugen einer archimedischen Copula

1. Erzeuge eine Zufallsvariable Y zur Verteilungsfunktion G_1 mit Laplace-Stieltjes-Transformierter φ_1^{-1} .
2. Erzeuge eine $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariable V_1 .
3. Erzeuge $(V_2, \dots, V_{d+1})$ entsprechend der verschachtelten archimedischen Copula $C_d(v_2, \dots, v_{d+1}; \varphi_{1,2}(\cdot; Y), \dots, \varphi_{1,d}(\cdot; Y))$.
4. Zur Definition von $(U_1, \dots, U_{d+1})$ setze $U_i := \varphi_1^{-1}\left(-\frac{\ln(V_i)}{Y}\right)$ für $i \in \{1, \dots, d+1\}$.

$$\begin{aligned} P(U_i \leq u_i : i \in \{1, \dots, d+1\}) &= P(V_i \leq F_1^Y(u_i) : i \in \{1, \dots, d+1\}) \\ &= \int_0^\infty P_{Y=y}(V_i \leq F_1^Y(u_i) : i \in \{1, \dots, d+1\}) dG(y) \\ &\stackrel{*1}{=} \int_0^\infty F_1^y(u_1) C_d(F_1^y(u_2), \dots, F_1^y(u_{d+1}); \varphi_{1,2}(\cdot; y), \dots, \varphi_{1,d}(\cdot; y)) dG(y) \\ &\stackrel{*2}{=} C_{\varphi_1}(u_1, C_d(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d)). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Gleichheit $(*)^1$ verweisen wir auf die Unabhängigkeit qua Konstruktion von V_1 von den restlichen V_i , für $(*)^2$ greifen wir wiederum auf Satz 2.25 zurück. Der letzte Algorithmus erzeugt nun dieselbe Copula ohne Rekursion.

6. Algorithmus zum Erzeugen einer archimedischen Copula

1. Erzeuge eine Zufallsvariable Y_1 zur Verteilungsfunktion G_1 mit Laplace-Stieltjes-Transformierter φ_1^{-1} .
2. Erzeuge für $k \in \{2, \dots, d\}$ jeweils eine Zufallsvariable Y_k zur Verteilungsfunktion $G_k(\cdot; Y_{k-1})$ mit Laplace-Stieltjes-Transformierter

$$\varphi_{k-1,k}^{-1}(\cdot, Y_{k-1}) = \exp\left(-Y_{k-1} \varphi_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(\cdot)\right).$$

3. Erzeuge unabhängige $U[0, 1]$ -verteilte Zufallsvariablen $V_1, \dots, V_{d+1}$.
4. Zur Definition von $(U_1, \dots, U_{d+1})$ setze $U_i := \varphi_i^{-1} \left(-\frac{\ln(V_i)}{Y_i} \right)$ für $i \in \{1, \dots, d\}$ und $U_{d+1} := \varphi_d^{-1} \left(-\frac{\ln(V_{d+1})}{Y_d} \right)$.

$$\begin{aligned}
P(U_i \leq u_i : i \in \{1, \dots, d+1\}) &= P(V_i \leq F_i^{Y_i}(u_i) : i \in \{1, \dots, d\}, V_{d+1} \leq F_d^{Y_d}(u_{d+1})) \\
&= \int_0^\infty P_{Y_1=y_1}(V_i \leq F_i^{Y_i}(u_i) : i \in \{1, \dots, d\}, V_{d+1} \leq F_d^{Y_d}(u_{d+1})) dG_1(y_1) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P_{\substack{Y_i=y_i \\ i \in \{1,2\}}}(V_i \leq F_i^{Y_i}(u_i) : i \in \{2, \dots, d\}, V_{d+1} \leq F_d^{Y_d}(u_{d+1})) dG_2(y_2; y_1) dG_1(y_1) \\
&= \dots \\
&= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_{\substack{Y_i=y_i \\ i \in \{1, \dots, d\}}}(V_i \leq F_i^{Y_i}(u_i) : i \in \{2, \dots, d\}, V_{d+1} \leq F_d^{Y_d}(u_{d+1})) dG_d(y_d; y_{d-1}) \dots dG_1(y_1) \\
&\stackrel{*1}{=} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty F_1^{y_1}(u_1) \dots F_d^{y_d}(u_d) F_d^{Y_d}(u_{d+1}) dG_d(y_d; y_{d-1}) \dots dG_1(y_1) \\
&\stackrel{*2}{=} C_{\varphi_1}(u_1, C_d(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d))
\end{aligned}$$

Wir nutzen zunächst in (*¹) wieder die Unabhängigkeit der V_i und die ihnen zugrunde liegende Gleichverteilung aus und verweisen dann für (*²) auf Satz 2.25.

Mit diesen sechs Algorithmen lässt sich eine große Zahl von Copulas simulieren, allerdings nur, falls zu den gewünschten Erzeugern φ_i auch die zugehörigen Verteilungsfunktionen $G_i = \mathcal{LS}^{-1}[\varphi_i^{-1}]$ bekannt sind. Für einige oft behandelte Familien archimedischer Copulas ist das natürlich der Fall (vgl. Hofert [17]):

In der Spalte $G = \mathcal{L}[\varphi^{-1}]$ sind für stetige Verteilungsfunktionen zu Clayton- und Gumbel-Copula die Verteilungen aufgeführt. Dabei bezeichnet Γ die Gammaverteilung und S die α -Stabil-Verteilung. Ist die Verteilung von G für eine Familie diskret, so findet man in der entsprechenden Spalte für alle natürlichen Zahlen mit den p_k die zugehörigen Massenfunktionen von G . Das Invertieren einer Laplace-Stieltjes-Transformation ist aber ein Problem, das sich nicht allgemein lösen lässt.

Famile	Θ	$\varphi(t)$	$G = \mathcal{LS}^{-1}[\varphi^{-1}]$
Frank	$(0, \infty)$	$-\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$p_k = \frac{1}{k\theta} (1 - e^{-\theta})^k, k \in \mathbb{N}$
Ali-Mikhail-Haq	$[0, 1)$	$\ln \left(\frac{1 - \theta(1-t)}{t} \right)$	$p_k = (1 - \theta)\theta^{k-1}, k \in \mathbb{N}$
Clayton	$(0, \infty)$	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\Gamma(\frac{1}{\theta}, 1)$
Gumbel	$[1, \infty)$	$\ln(1 - \theta \ln(t))$	$S(\frac{1}{\theta}, 1, (\cos(\frac{\pi}{2\theta}))^\theta, 0; 1)$
Joe	$[1, \infty)$	$-\ln(1 - (1 - t)^\theta)$	$p_k = (-1)^{k+1} \binom{1/\theta}{k}, k \in \mathbb{N}$

Tabelle 5.1: Verteilungen der $\mathcal{LS}^{-1}[\varphi^{-1}]$ zu ausgewählten Familien archimedischer Copulas

5.2 Numerisches Invertieren der Laplace-Transformierten

Hofert [16] etabliert durch Betrachtung des Produktes $t(\mathcal{L}[F](t))$ für eine Verteilungsfunktion F mit $F(0) = 0$, über die Gleichungskette

$$\begin{aligned} t(\mathcal{L}[F](t)) &= t \int_0^\infty e^{-tx} F(x) dx = t \int_0^\infty e^{-tx} \int_0^x dF(u) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^x t e^{-tx} dF(u) dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty \int_u^\infty t e^{-tx} dx dF(u) \\ &= \int_0^\infty [-e^{-tx}]_u^\infty dF(u) = \int_0^\infty e^{-tu} dF(u) \end{aligned}$$

einen Zusammenhang zwischen der Laplace- und der Laplace-Stieltjes-Transformierten von F . Die Gleichungen basieren auf einfachen Umstellungen und für $(*)$ auf der Verwendung des Satzes von Fubini-Tonelli (vgl. [23]). Gilt also $\varphi^{-1}(t) = \mathcal{LS}[F](t)$, so gilt ebenso $\varphi^{-1}(t) = t(\mathcal{L}[F](t))$ und damit auch $F(x) = (\mathcal{L}^{-1}(\varphi^{-1}(t)/t))(x)$ für $x \in [0, \infty)$. Dies ermöglicht uns durch numerisches Invertieren der Laplace-Transformation auch für die meisten archimedischen Copulas relativ schnelle Algorithmen zu finden um die Copulas zu simulieren. Besonders bei der Simulation einer durch Transformationen angepassten archimedischen Copula ist dies hilfreich, da in einem solchen Fall selten die Verteilungsfunktion F bekannt ist.

Es wurden mittlerweile schon mehr als 100 verschiedene Algorithmen zum Invertieren der Laplace-Transformation entwickelt. Die Algorithmen, die sich über die Jahre durchgesetzt haben, lassen sich laut Abate und Valkó [1] in vier Kategorien einteilen. Sie basieren auf

1. der Veränderung des Integrationsweges des Bromwich-Integrals,
2. der Kombination von Gaver-Funktionalen,
3. der Laguerre-Funktionen-Entwicklung oder
4. der Fourier-Reihen-Entwicklung.

Es gibt einige vergleichende Studien, die jeweils einige wenige dieser Algorithmen unter die Lupe nehmen. Zu nennen sind da z. B. die schon etwas älteren Artikel von Davies und Martin [4], Narayanan [27] und Duffy [8]. Von Hofert [16] werden einige Algorithmen auf Präzision und Laufzeit getestet in seiner ausgezeichneten Dissertation [17] stellt er vier vor, unter anderem den Gaver-Wynn-Rho-Algorithmus.

5.2.1 Gaver-Wynn-Rho-Algorithmus

Ausgangspunkt des Gaver-Wynn-Rho-Algorithmus ist die Gleichung

$$f(x) = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f(y) \delta_n(y; x) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(y) \delta_n(y; x) dy, \quad (5.1)$$

die wir für eine beschränkte Funktion f und eine Folge $(\delta_n(\cdot; x))_{n \in \mathbb{N}}$ von Dichten, die für jedes fest gewählte $x \in (0, \infty)$ gegen den Massepunkt x konvergiert, mit Hilfe des Satzes

von der beschränkten Konvergenz erhalten. Gaver [13] wählt als Dichte-Folge

$$\delta_n(y; x) := n \binom{2n}{n} d(x) (1 - \exp(-d(x)y))^n \exp(-nd(x)y) \quad (5.2)$$

$$= n \binom{2n}{n} d(x) \left(\left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{y/x} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{y/x} \right)^n \quad (5.3)$$

mit $d := \frac{\ln(2)}{x}$. Bei $\delta_n(\cdot, x)$ handelt es sich um die Dichte der $(n+1)$. Ordnungsstatistik einer Stichprobe mit Umfang $2n$ von $\text{Exp}(d(x))$ -verteilten Zufallsgrößen. Die zweite Darstellung, die einfach aus $\exp(-\ln(2)\frac{y}{x}) = \exp(\ln(2))^{-y/x} = (\frac{1}{2})^{y/x}$ folgt, hilft uns beim Beweis der gewünschten Konvergenz:

Die Stirling-Formel besagt, dass für $n \rightarrow \infty$ die asymptotische Gleichheit $n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ gilt. Damit gilt auch $n \binom{2n}{n} \cong \sqrt{\frac{n}{\pi}} 2^{2n}$. Für $x = y$ ergibt sich für

$$\delta_n(x; x) \cong \sqrt{\frac{n}{\pi}} 2^{2n} \frac{\ln(2)}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Für $x \neq y$ existiert ein $c \in (0, 1)$ mit $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{y/x}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{y/x} = \frac{c}{4}$ und so gilt

$$\delta(y; x)_n \cong \sqrt{\frac{n}{\pi}} 2^{2n} \frac{\ln(2)}{x} \left(\frac{c}{4}\right)^n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{\ln(2)}{x} c^n \rightarrow 0.$$

Die gewählte Folge ist somit für unsere Zwecke geeignet.

Durch die Berechnung des Integrals aus Gleichung (5.1) mit den so gewählten Dichten in der ersten von Gleichung (5.2) erhalten wir die sogenannten Gaver-Funktionale

$$f_n(x) := n \binom{2n}{n} d(x) \int_0^\infty f(y) (1 - \exp(-d(x)y))^n \exp(-nd(x)y) dy \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dies lässt sich leicht umformen:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \binom{2n}{n} d(x) \int_0^\infty f(y) (1 - \exp(-d(x)y))^n \exp(-nd(x)y) dy \\ &= n \binom{2n}{n} d(x) \int_0^\infty f(y) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\exp(-d(x)y))^k \right) (\exp(-d(x)y))^n dy \\ &= n \binom{2n}{n} d(x) \int_0^\infty f(y) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\exp(-(n+k)d(x)y)) \right) dy \\ &= n \binom{2n}{n} d(x) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^\infty f(y) (-(n+k) \exp(d(x)y)) dy \\ &= n \binom{2n}{n} d(x) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \mathcal{L}[f]((n+k)d(x)) dy. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Um für $j \in \{1, \dots, n\}$ das j . Gaver-Funktional zu berechnen, nutzen wir eine Rekursion: Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$ sei

$$I_{k,l} := \frac{(k+l)!}{k!(l-1)!} d(x) \int_0^\infty f(y) (1 \exp(-d(x)y))^k \exp(-ld(x)y) dy \text{ für } x \in (0, \infty).$$

Es gilt also für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{0,l} &= \frac{l!}{0!(l-1)!} d(x) \int_0^\infty f(y) (1 \exp(-d(x)y))^0 \exp(-ld(x)y) dy \\ &= ld(x) \int_0^\infty f(y) \exp(-ld(x)y) dy \\ &= ld(x) \mathcal{L}[f](ld(x)). \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Darstellung gemäß (5.4) lässt sich die Relation

$$I_{k,l} = \left(1 - \frac{k}{l}\right) I_{k,l-1} - \frac{k}{l} I_{k-1,l+1} \text{ für } k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

beweisen.

Wir können nun die Werte der $I_{k,l}$ iterativ berechnen. Um das n . Gaver-Funktional zu erhalten, gilt es $I_{n,n}(x)$ zu bestimmen. Dazu benötigen wir $I_{0,l}$ für $l \in \{n, \dots, 2n\}$ und $I_{k,l}$ für $k \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{n, \dots, 2n-k\}$. Bei dieser Form der rekursiven Berechnung ergibt sich ein Problem. Wie Gaver [13] zeigte, konvergieren die Gaver-Funktionale, wenn sich die Funktion f in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt, nur logarithmisch gegen f . Somit ist es sinnvoll den Algorithmus zu beschleunigen.

Wynn [33] setzt bei der Beschleunigung der Konvergenz auf den ρ -Algorithmus, eine nicht-lineare Transformation. Der ρ -Algorithmus basiert auf der Thiele-Interpolation.

$$\begin{aligned} \rho_{k,0} &:= 0, \rho_{k,1} := y_k \text{ für } k \in \{0, \dots, n\}, \\ \rho_{k,l} &:= \rho_{k+1,l-2} + \frac{x_k - x_{k+l-1}}{\rho_{k,l-1} - \rho_{k+1,l-1}} \text{ für } k \in \{2, \dots, n+1\} \text{ und } l \in \{0, \dots, n-k+1\} \end{aligned}$$

Die rekursive Definition von $\rho_{k,l}$ lässt sich nun nach $\rho_{k,l-1}$ auflösen. Für $k=0$ ergibt sich dann

$$\rho_{0,l-1} = \rho_{1,l-1} + \frac{x_0 - x_{l-1}}{\rho_{0,l} - \rho_{1,l-2}} \text{ für } l \in \{2, \dots, n+1\}.$$

Setzt man nun für eine Funktion g noch $x_0 = x$ und $y_0 = g(x)$, so kann die Gleichung zur rekursiven Berechnung von $g(x)$ genutzt werden. Die Formel liefert nun nach zweimaligem Einsetzen

$$g(x) = y_0 = \rho_{0,1} = \rho_{1,1} + \frac{x - x_1}{\rho_{1,2} + \frac{x - x_2}{\rho_{1,3} + \frac{x - x_3}{\rho_{0,4} - \rho_{1,2}} - \rho_{1,1}}} - \rho_{1,0}$$

dies lässt sich nun beliebig tief fortführen. Wird dieser Verschachtelungsprozess nach n -maligem Einsetzen gestoppt und ist n eine ungerade Zahl, so nennt man die entstandene

Interpolations-Funktion Tielsche Interpolationsformel. Sie interpoliert die Funktion g an den Punkten $x_1, \dots, x_n$. Außerdem gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \rho_{0,n+2}$, denn für $x \rightarrow \infty$ gilt $x - x_k \cong x - x_l$ für alle $k, l \in \{1, \dots, n\}$ und trotz der rekursiven Definition der $\rho_{k,l}$ sind sämtliche in der Verschachtelung genutzten $\rho_{k,l}$ von x unabhängig.

Die Anwendung des ρ -Algorithmus auf die Gaver-Funktionale liefert uns den Gaver-Wynn-Rho-Algorithmus. Hofert verweist auf die Arbeit von Abate und Valkó [1], in der diese Form der Konvergenz-Beschleunigung unter den getesteten Verfahren am besten abschneidet. Dort wird die Empfehlung ausgesprochen beim Einsatz des Algorithmus auf eine ausreichende Länge der Mantisse von mindestens $2,1M$ Stellen zu achten.

Die nachfolgende explizite Form ist bereits auf unsere Bedürfnisse, also das Invertieren einer Laplace-Stieltjes-Transformierten $\mathcal{LS}(G) = \varphi^{-1}$ zugeschnitten.

Gaver-Wynn-Rho-Algorithmus

1. Wähle ein $M \in 2\mathbb{N} - 1$.
2. Setze $c := \ln(2)$.
3. Initialisiere eine $(M + 1) \times 2M$ -Matrix $A = (a_{jk})$ und eine $M \times (M + 1)$ -Matrix $B = (b_{jk})$.
4. Führe nun für beliebiges $x \in (0, \infty)$ folgende Schritte aus:
 - (a) Setze $a_{1,k} := \varphi^{-1}\left(\frac{kc}{x}\right)$ für $k \in \{1, \dots, 2M\}$.
 - (b) Berechne nun sukzessive

$$a_{j,k} := \left(1 + \frac{k}{j-1}\right) a_{j-1,k} - \frac{k}{j-1} a_{j-1,k+1}$$

für $j \in \{2, \dots, M+1\}$ und $k \in \{j-1, \dots, 2M-j+1\}$.

- (c) Setze $b_{j,1} := 0$ und $b_{j,2} := a_{j+1,j}$ für $j \in \{1, \dots, M\}$.
- (d) Berechne nun sukzessive $b_{j,k} := b_{j+1,k-2} + \frac{k-2}{b_{j+1,k-1} - b_{j,k-1}}$ für $k \in \{3, \dots, M+1\}$ und $j \in \{1, \dots, M-k+2\}$.
- (e) Berechne nun $\tilde{F}(x) := b_{1,M+1}$.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Abate and P. P. Valkó. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993, 2004.
- [2] S. Bernstein. Sur les fonctions absolument monotones . *Acta Mathematica*, 52(1):1–66, 1929.
- [3] W. Breymann, A. Dias, and P. Embrecht. Dependence structures for multivariate high-frequency data. *Quantitative Finance*, 3:1–14, 2003.
- [4] B. Davies and B. Martin. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. *Journal of Computational Physics*, 33:1–32, 1979.
- [5] P. Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d’indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 65(5):274–292, 1979.
- [6] F. X. Diebold, T. Gunther, and A. S. Tay. Evaluating density forecasts, with applications to financial risk management. *International Economic Review*, 39:863 – 883, 1998.
- [7] J. Dobric and F. Schmid. Testing of goodness of fit for parametric families of copulas: Application to financial data. *Communications in statistics/ Simulation and computation*, 34:1053–1068, 2005.
- [8] D. G. Duffy. On the numerical inversion of Laplace Transform: comparison of three new methods on characteristic problems from applications. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 19:333–359, 1993.
- [9] V. Durrleman, A. Nikeghbali, and T. Roncalli. A simple transformation of copulas. *Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, working paper*, 2000.
- [10] P. Embrechts, A. J. McNeil, and D. Straumann. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In *M.A.H. Dempster (Hrsg.): Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 2002.
- [11] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume II. John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [12] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1971.

- [13] D. P. Gaver. Observing stochastic processes and approximate transform inversion. *Operations Research*, 14:444–459, 1966.
- [14] C. Genest and R. J. MacKay. Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *The Canadian Journal of Statistics*, 14(2):145–159, 1986.
- [15] P. E. Greenwood and M. S. Nikulin. *A Guide to Chi-Squared Testing*. Wiley-Interscience, N. Y., 1996.
- [16] M. Hofert. Sampling Archimedean copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52:5163–5174, 2008.
- [17] M. Hofert. *Sampling Nested Archimedean Copulas with Applications to CDO Pricing*. Dissertation, Universität Ulm, 2010.
- [18] W. Hoeffding. Maßstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik, Universität Berlin*, 5:181–233, 1940.
- [19] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London, 1997.
- [20] W. P. Johnson. The Curious History of Faà di Bruno’s Formula. *American Mathematical Monthly*, 109(3):217–234, 2002.
- [21] M. Junker and A. May. Measurement of Aggregate Risk with Copulas. *Econometrics Journal*, 8(3):428–454, Dezember 2005.
- [22] C. H. Kimberling. A Probabilistic Interpretation of Complete Monotonicity. *Aequationes mathematicae*, 10:152–164, 1974.
- [23] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer, Berlin, 2004.
- [24] E. L. Lehmann. Some concepts of dependence. *Ann. Math. Stat.*, 37(5):1137–1153, 1966.
- [25] D. D. Mari and S. Kotz. *Correlation and Dependence*. Imp. College Press, London, 2001.
- [26] A. J. McNeil. Sampling Nested Archimedean Copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(6):567–581, 2008.
- [27] G. V. Narayanan and D. E. Beskos. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1829–1854, 1982.
- [28] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics 139*. Springer, N.Y., 1999.

- [29] D. Pfeifer and J. Neslehova. Modeling and Generating Dependent Risk Processes for IRM and DFA. *ASTIN Bulletin*, 34(2):333–360.
- [30] M. Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23:470–472, 1952.
- [31] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [32] D. Widder. *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [33] P. Wynn. On a Procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 52(4):663–671, 1956.

Abbildungsverzeichnis

1.1	$W_2(u, v)$ im 3D-Diagramm (l.) bzw. im Isolinien-Diagramm (r.)	14
1.2	$M_2(u, v)$ im 3D-Diagramm (l.) bzw. im Isolinien-Diagramm (r.)	14
2.1	Zum Beweis von Satz 2.16	35
2.2	Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Frank-Copula mit Parameter $\theta = -5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 5$ (rechts).	38
2.3	Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Gumbel-Hougaard-Copula mit Parameter $\theta = 1, 1$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 3$ (rechts).	39
2.4	Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 0, 3$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 0, 8$ (rechts).	40
2.5	Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Ali-Mikhail-Haq-Copula mit Parameter $\theta = -0, 5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 0, 5$ (rechts).	41
2.6	Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Clayton-Copula mit Parameter $\theta = -0, 5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 2$ (rechts).	42
2.7	Isolinien-Diagramm zur Dichte der zweidimensionalen Joe-Copula mit Parameter $\theta = 5$ (links) bzw. mit Parameter $\theta = 15$ (rechts).	42
4.1	Stichprobe (l.) mit Umfang $n = 10$ und die daraus konstruierte Copula (r.)	64
4.2	Ein Kerndichteschätzer der Dichte der Test-Statistik für Aufbau II (durchgezogen) und die Dichte einer χ^2_{80} -Verteilung (gepunktet)	71
4.3	Ablehnungsquoten für die Mischung von Frank- und AMH-Copulas	72

Tabellenverzeichnis

4.1	Resultate zu Aufbau Ia (Frank-Copula)	67
4.2	Resultate zu Aufbau Ib (Frank-Copula)	68
4.3	Resultate zu Aufbau II (Clayton-Copula)	69
4.4	Resultate zu Aufbau IIIa (AMH-Copula)	69
4.5	Resultate zu Aufbau IIIb (AMH-Copula)	70
4.6	Resultate zu Aufbau IV (Gumbel-Hougaard-Copula))	70
4.7	Resultate zu Aufbau V (angepasste Frank-Copula)	71
5.1	Verteilungen der $\mathcal{LS}^{-1}[\varphi^{-1}]$ zu ausgewählten Familien archimedischer Copulas	80