Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Bewertung von Derivaten in einem Finanzmarkt mit restringierten Handelsstrategien

am 14. Mai 2013 als Diplomarbeit vorgelegt von

André Fuhrken

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir betrachten ein Finanzmarktmodell mit einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, endlich vielen Handelsperioden und endlich vielen risky Assets. Desweiteren betrachten wir Derivate, dessen Auszahlungen sich durch Amerikanische oder Europäische Claims darstellen lassen.

Im zweiten Kapitel betrachten wir die Möglichkeiten solche Claims in unserem Finanzmarktmodell bei Arbitagefreiheit zu bewerten. Dazu blicken wir zunächst auf die Menge der arbitragefreien Preise eines Claims. Das sind die Preise, die im Gleichgewichtszustand eines transparenten, markteffizienten Finanzmarktes realisiert werden könnten.

Wir stellen fest, dass hedgebare Claims einen eindeutig bestimmten arbitragefreien Preis besitzen. Insbesondere kann man zu diesem Preis eine Superhedge Strategie finanzieren. Mit einer Superhedge Strategie kann sich der Verkäufer des Claims gegen jede mögliche Forderung des Käufers absichern.

Für einen nicht hedgebaren Claim stellen wir fest, dass sich die Menge der arbitragefreien Preise durch ein reelles Intervall darstellen lässt. Die obere Intervallgrenze bildet dabei den minimalen Preis, zu dem sich eine Superhedge Strategie finanzieren lässt. Dieser Preis zählt nicht zu den arbitragefreien Preisen.

Desweiteren gibt es einen Prozess, für den minimalen Preis, zu dem eine Superhedge Strategie für einen Claim finanzierbar ist. Dieser Prozess heißt upper Snell envelope.

Wir fragen uns nun was passiert, wenn in diesem Finanzmarkt die Menge der Handelsstrategien begrenzt wird. Das könnte zur Folge haben, dass die Hedgestrategien eines Claims nicht mehr zulässig sind. Oder allgemeiner könnte sich der minimale Preis zudem eine Superhedge Strategie noch finanzierbar ist nach oben verschieben. Desweiteren verliert die upper Snell envelope ihre Aussagekraft als Prozess des minimalen Preises, zu dem eine Superhedge Strategie finanzierbar ist, da sie die Unzulässigkeiten einiger Handelsstrategien nicht berücksichtigt.

Daher ist es unser Ziel eine Modifizierung der upper Snell envelope zu entwickeln, die den minimalen Prozess angibt, zu dem eine zulässige Superhedge Strategie für einen Claim finanzierbar ist.

Dazu werden wir im dritten Kapitel zunächst die Menge der zulässigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\overline{\mathfrak{S}}$ auf eine Weise modellieren, die uns im vierten Kapitel eine günstige Charakterisierung der Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$ ermöglicht.

Anschließend nutzen wir diese Charakterisierung der Arbitragefreiheit als Voraussetzung von Theorem(5.9), welches uns eine Bedingung für die Existenz einer uniform Doob decomposition liefert.

Dann führen wir die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope ein und zeigen durch Theorem(6.14), dass dieser Prozess eine uniform Doob decomposition besitzt.

Dadurch können wir in Theorem(7.2) zeigen, dass die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope von H der Prozess des minimalen Preises ist, zu dem eine Superhedge Strategie für einen Claim finanzierbar ist.

Im zweiten Abschnitt des siebten Kapitels wollen wir das Risiko eines Derivates bestimmen.

Die Motivation dazu liegt darin, dass der Preis zu dem ein Claim vollständig abgesichert werden kann, in der Regel kein arbitragefreier Preis ist. Erst recht dann nicht wenn die Menge der Handelsstrategien restringiert ist. Bietet man das Derivat also zu solch einem Preis in einem transparenten, markteffizienten Finanzmarkt an, so wird er sich dort nicht halten können.

Wir werden die Differenz aus dem Verkaufspreis und den möglichen Forderungen des Käufers eines Derivates durch die Zufallsvariablen auf $L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ darstellen und als Profitfunktionen bezeichnen.

Wir werden insbesondere das convex risk measure $\rho^{\mathfrak{S}}$ betrachten, dass uns den Betrag angibt, um den wir eine Profitfunktion erhöhen müssten, damit sie vollständig und ohne zusätzliche Kosten durch eine zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie abgesichert ist. Dieser Betrag stellt das Risiko der Profitfunktion dar.

2 Einführung des Finanzmarktmodells ohne Restriktionen

In diesem Kapitel führen wir zunächst das Finanzmarktmodell ein, das wir in dieser Diplomarbeit behandeln werden. Wir modellieren zunächst nur den Finanzmarkt ohne restringierte Handelsstrategien, geben einen Überblick über die Eigenschaften von Handelsstratgien und charakterisieren die Existenz von Arbitragemöglichkeiten. Dazu beweisen wir das No-Arbitrage Theorem(2.11) für den Einperiodenfall. Außerdem betrachten wir Amerikanische und Europäische Claims, als Darstellung der möglichen Auszahlungen eines Derivates. Insbesondere betrachten wir dabei die Menge der arbitragefreien Preise und die Kosten einer Superhedge Strategie eines abdiskontierten Claims.

Es sei noch bemerkt, dass die Multiplikation zweier Vektoren $X = (X_1, \dots, X_d)$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ mit $d \in \mathbb{N}$ als $X \cdot Y = \sum_{i=1}^{d} X_i \cdot Y_i$ zu verstehen ist. Desweiteren sei in der Regel mit $|\cdot|$ die Euklidische Norm gemeint.

2.1 Das Finanzmarktmodell ohne restringierte Handelsstrategien

Wir betrachten ein diskretes Finanzmarktmodell mit $d+1$ Assets und einem Handelszeitraum $[0,T]$, wobei d und T natürliche Zahlen seien. Die Assetpreise sollen zu den Zeitpunkten $t \in \{0, \dots, T\}$ zufällig neu bestimmt werden und die Anfangspreise zum Zeitpunkt 0 bekannt sein. So sei der Preis des i-ten Assets durch einen positiven, reellwertigen, stochastischen Prozess $(S_t^i)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ auf einem diskreten, filtriertem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}, P)$ modelliert, wobei $\mathfrak{F}_0$ trivial und $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}$ sei. Für $i = 1, \dots, d+1$ seien die Prozesse $(S_t^i)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ adaptiert an $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$.

Wir schreiben $\overline{S}_t = (S_t^0, S_t) = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$ für den Vektor der Assetpreise zum Zeitpunkt t.

Abdiskontierte Assetpreise

Es sei $(S_t^0)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ der Preisprozess des numéraire Assets. Wir nehmen an, er sei echt positiv P-f.s. und schreiben $(X_t^i)_{t\in\{0,\dots,T\}} = (S_t^i/S_t^0)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ für den abdikontierten Preisprozess des i-ten Assets. Mit $\overline{X}_t = (1, X_t) = (1, X_t^1, \dots, X_t^d)$ bezeichnen wir den Vektor der abdiskontierten Assetpreise zum Zeitpunkt t.

Bemerkung. *Die Multiplikation zweier Vektoren $X = (X_1, \dots, X_d)$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ mit $d \in \mathbb{N}$ sei durch $X \cdot Y = \sum_{i=1}^{d} X_i \cdot Y_i$ erklärt und mit $|\cdot|$ ist in der Regel die Euklidische*

Norm gemeint.

selbstfinanzierende Handelsstrategien

Definition 2.1. *Eine Handelsstrategie* $\overline{\xi}$ *ist ein* $\mathbb{R}^{d+1}$*-wertiger, vorhersehbarer, stochastischer Prozess* $\overline{\xi}_t = (\xi_t^0, \xi_t) = (\xi_t^0, \xi_t^1, \dots, \xi_t^d)$ *auf* $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \{0,\dots,T\}}, P)$*, wobei* ξ_t^i *für die Anzahl des i-ten Assets im Portfolio zum Zeitpunkt t steht.*

Definition 2.2. *Es sei* $\overline{\xi}$ *eine Handelsstrategie. Der durch* $V_0 = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0$ *und* $V_t = \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t$ *für* $t \in \{1, \dots, T\}$ *definierte Prozess V heißt abdiskontierter Werteprozess der Handelsstrategie* $\overline{\xi}$ *mit Anfangskapital* V_0 *und Vermögensentwicklung* $(V_t)_{t \in \{1,\dots,T\}}$.

Definition 2.3. *Eine Handelsstrategie* $\overline{\xi}$ *heißt selbstfinanzierend, falls* $\overline{X}_t \cdot \overline{\xi}_t = \overline{X}_t \cdot \overline{\xi}_{t+1}$ *für jedes* $t \in \{1, \dots, T-1\}$ *gilt.*

Bemerkung 2.4.

1. *Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzierend bedeutet, dass während des Handelszeitraums kein Kapital hinzugefügt oder entnommen wird.*

2. *Außerdem ist eine Handelsstrategie* $\overline{\xi}$ *genau dann selbstfinanzierend, wenn ihr Werteprozess V der Summe aus Periodengewinne und Anfangskapital entspricht. Das heißt* $V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1})$ *für alle* $t \in \{1, \dots, T\}$.

3. *Wichtig ist auch, dass zu einem Anfangskapital* V_0 *und einem vorhersehbaren, d-dimensionalen Prozess* ξ *genau ein vorhersehbarer Prozess* ξ^0 *existiert, so dass* $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ *eine selbstfinanzierende Handelsstategie mit Anfangskapital* V_0 *bildet.*

4. *Da* $\mathfrak{F}_0$ *trivial ist, sind die Handelsstratigien, im Falle* $T = 1$*, durch die Vektoren des* $\mathbb{R}^{d+1}$ *gegeben.*

2.2 Arbitragemöglichkeiten

Definition 2.5. *Eine Selbstfinanzierende Handelsstrategie heißt Arbitragemöglichkeit, wenn ihr Werteprozess V die Bedingungen* $V_0 \leq 0$, $V_T \geq 0$ P-*f.s. und* $P[V_T > 0] > 0$ *erfüllt.*

Den folgenden Satz werden wir später unter Lemma(4.7) auf den Finanzmarkt mit restringierten Handelsstrategien zuschneiden.

Satz 2.6. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Arbitragemöglichkeit.*

2. *Es existieren* $t \in \{1, \dots, T\}$ *und ein vorhersehbarer,* $\mathbb{R}^d$*-wertiger Prozess* ξ*, so dass*

$$\xi_t (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \ P\text{-}f.s. \text{ und } P[\xi_t (X_t - X_{t-1}) > 0] > 0. \tag{2.1}$$

3. *Es gibt* $t \in \{1, \ldots, T\}$ *und einen beschränkten, vorhersehbaren und* $\mathbb{R}^d$*-wertigen Prozess* ξ*, der* (2.1) *erfüllt.*

4. *Es gibt eine Arbitragemöglichkeit* $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$*, so dass* ξ *beschränkt und dessen Anfangskapital* $V_0 = 0$ *ist*

Beweis. Der Beweis ist der gleiche, wie in Lemma(4.7), wenn wir für $\mathfrak{S}$ einfach die Menge aller vorhersehbaren, $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozesse nehmen ist dort 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 1. gezeigt. □

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{P}$

Definition 2.7. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\tilde{P}$ *auf* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *heißt äquivalentes Martingalmaß, wenn es äquivalent zu* P *ist und wenn jeder abdiskontierte Assetpreisprozess ein* $\tilde{P}$*-Martingal ist.*

Es bezeichne $\mathcal{P}$ *die Menge der äquivalenten Martingalmaße.*

Bemerkung 2.8. *Im Fall* $T = 1$ *ist ein zu* P *äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß* $\tilde{P}$ *genau dann ein äquivalentes Martingalmaß, wenn es die Gleichung* $\tilde{E}[X_1 - X_0] = 0$ *erfüllt. Weil* $\mathfrak{F}_0$ *trivial ist, ist* X_0 $\tilde{P}$*-f.s. konstant und* $\tilde{E}[X_1 \mid \mathfrak{F}_0] = \tilde{E}[X_1]$*. Daher sind die Aussagen äquivalent.*

Proposition 2.9. *Es sei* Q *ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das auf* $\mathfrak{F}_0$ *trivial ist und es gelte* $E_Q[|X_t|] < \infty$ *für jedes* $t \in \{0, \ldots, T\}$*. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

1. Q *ist ein Martingalmaß.*

2. *Der Werteprozess jeder beschränkten, selbstfinanzierenden Handelsstrategie ist ein* Q*-Martingal.*

3. *Für den Werteprozess* V *einer beliebigen, beschränkten, selbstfinanzierenden Handelsstrategie gilt:* $E_Q[V_T] = V_0$.

Beweis. Ein Beweis steht in [1] unter Proposition 5.15. □

Proposition 2.10. *Es sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\mathcal{C}$ *sei eine nicht leere konvexe Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *in der der Nullvektor nicht enthalten ist. Dann gibt es ein* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *mit*

$$\eta \cdot x \geq 0 \;\forall\; x \in \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \exists\; x_0 \in \mathcal{C} : \eta \cdot x_0 > 0.$$

Beweis. Ein Beweis steht in [1] unter Proposition A.1. □

Theorem 2.11. *Das Finanzmarktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn* $\mathcal{P} \neq \emptyset$ *gilt. Ist dies der Fall, so existiert ein Maß* $P^* \in \mathcal{P}$ *mit beschränkter Dichte* $\frac{dP^*}{dP}$.

Beweis. Wir beweisen hier nur den Einperiodenfall $T = 1$. In [1] steht unter Theorem 5.17 der Beweis für den Fall endlich vieler Handelssperioden.

$(\Leftarrow)$: Zuerst zeigen wir die hinreichende Bedingung für Arbitragefreiheit.

Es seien $P^* \in \mathcal{P}$ und V der Werteprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$, sodass $V_1 \geq 0$ P-f.s. und $P[V_1 > 0] > 0$ gilt. Da P^* äquivalent zu P ist, erhalten wir dies auch für P^* anstelle von P. Das impliziert $E^*[V_1] > 0$. Wegen der Martingaleigenschaft von X unter P^* und da $\mathfrak{F}_0$ trivial ist liefert uns das

$$V_0 = \sum_{i=0}^{d} X_0^i \cdot \xi_1^i = \sum_{i=0}^{d} E^*[X_1^i] \cdot \xi_1^i = \sum_{i=0}^{d} E^*[\xi_1^i \cdot X_1^i] = E^*[V_1] > 0.$$

Folglich kann $\overline{\xi}$ keine Arbitragemöglichkeit sein. Weil dies für beliebige $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt, kann es keine Arbitragemöglichkeiten geben.

$(\Rightarrow)$: Als nächstes zeigen wir, dass die Existenz eines Maßes aus $\mathcal{P}$ mit beschränkter P-Dichte eine notwendige Bedingung für Arbitragefreiheit ist.

Wir setzen also voraus, dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Dann gilt nach Satz(2.6) für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\xi(X_1 - X_0) \geq 0 \text{ P-f.s.} \Rightarrow \xi(X_1 - X_0) = 0 \text{ P-f.s.} \tag{2.2}$$

Aufgrund der Bemerkung(2.2) genügt es uns ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^* zu finden, welches die Bedingung $E^*[X_1 - X_0] = 0$ erfüllt und eine beschränkte P-Dichte besitzt.

Zunächst betrachten wir den Fall $E[|X_1 - X_0|] < \infty$.

Es sei $\mathcal{Q}$ die konvexe Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $Q \sim P$ mit beschränkter P-Dichte dQ/dP. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{C} := \{E_Q[X_1 - X_0 \mid Q \in \mathcal{Q}]\}.$$

$\mathcal{C}$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, denn mit $Q_1,\ Q_2 \in \mathcal{Q}$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ liegt auch $Q_\alpha := \alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2$ in der Menge $\mathcal{Q}$ und aus

$$\alpha E_{Q_1}[X_1 - X_0] + (1-\alpha)E_{Q_2}[X_1 - X_0] = E_{Q_\alpha}[X_1 - X_0] \in \mathcal{C}$$

folgt die Konvexität.

Wir wollen nun zeigen, dass der Nullvektor in $\mathcal{C}$ enthalten ist. Dazu nehmen wir jetzt an, es gelte $0 \notin \mathcal{C}$. Mit dieser Annahme sind nun alle Vorraussetzungen für Proposition(2.10) erfüllt. Demnach gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\xi \cdot x \geq 0 \;\forall\, x \in \mathcal{C} \quad \wedge \quad \exists\, x_0 \in \mathcal{C} : \xi \cdot x_0 > 0.$$

Folglich besitzt ξ die Eigenschaften

$$E_Q[\xi \cdot (X_1 - X_0)] \geq 0 \;\forall Q \in \mathcal{Q} \quad \wedge \quad \exists\, Q_0 \in \mathcal{Q} : E_{Q_0}[\xi \cdot (X_1 - X_0)] > 0.$$

Wegen der Äquivalenz von Q_0 zu P gelten Q_0- fast sichere Eigenschaften auch P- fast sicher. Folglich ist

$$P[\xi \cdot (X_1 - X_0) > 0] > 0.$$

Nun behaupten wir, dass $\xi \cdot (X_1 - X_0) \geq 0$ P-f.s. gilt. Dazu definieren wir

$$A := \{\xi \cdot (X_1 - X_0) < 0\} \text{ und}$$
$$\varphi_n := \big(1 - \frac{1}{n}\big) \cdot I_A + \frac{1}{n} I_{A^c}.$$

Durch

$$\frac{dQ_n}{dP} := \frac{1}{E[\varphi_n]} \cdot \varphi_n, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

wird eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen definiert. Wegen $0 < \varphi_n \leq 1$, folgt $Q_n \in \mathcal{Q}$. Deshalb ist

$$0 \leq \xi \cdot E_{Q_n}[(X_1 - X_0)] = \frac{1}{E[\varphi_n]} E[\xi(X_1 - X_0))\varphi_n].$$

Wegen $0 < \varphi_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daher mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$E[\xi(X_1 - X_0))I_A] = E[\lim_{n\to\infty} \xi(X_1 - X_0))\varphi_n] = \lim_{n\to\infty} E[\xi(X_1 - X_0))\varphi_n] \leq 0.$$

Darum ist $\xi \cdot (X_1 - X_0) \geq 0$ P-f.s. Dies steht im Widerspruch zu Bedingung (2.2) und liefert uns den Beweis des Theorems für den Fall $E[|X_1 - X_0|] < \infty$.

Für den Fall, dass $|X_1 - X_0|$ nicht P-integrierbar ist, lässt sich stets ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ finden, sodass dessen P-Dichte beschränkt und $|X_1 - X_0|$ $\tilde{P}$-integrierbar ist. Durch

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{c}{1 + |X_1 - X_0|} \qquad \text{mit } c := \Big(E\big[\frac{1}{1 + |X_1 - X_0|}\big]\Big)^{-1}$$

lässt sich ein solches Maß definieren. Wegen $(|X_1 - X_0| + 1)^{-1} \in (0, 1]$ ist $c < \infty$ und es gilt

$$\tilde{E}[|X_1 - X_0|] = E\big[c \cdot \frac{|X_1 - X_0|}{1 + |X_1 - X_0|}\big] \leq c < \infty.$$

Tauscht man P durch ein äquivalentes Maß aus, so bleibt die Menge der Arbitragemöglichkeiten unverändert. Denn was P-f.s. gilt, bleibt auch unter einem solchen Maß fast sicher bestehen. Für $\tilde{P}$ anstelle von P liefert der erste Teil des Beweises daher ein Martingalmaß P^* mit beschränkter $\tilde{P}$-Dichte. Wegen $P \sim \tilde{P} \sim P^*$ ist $P^* \in \mathcal{P}$ und aufgrund von

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{dP^*}{d\tilde{P}} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dP}$$

ist dP^*/dP beschränkt. Damit ist das Theorem auch in diesem Fall bewiesen.

$\square$

2.3 Bewertung von Derivaten im arbitragefreien Finanzmarkt

Ein Derivat ist ein Finanzgut, dessen Wert von den zukünftigen Kursen anderer Handelsgüter abhängt. In unserem Finanzmarkt haben wir dazu endlich viele Assets modelliert, die als solche Handelsgüter in Frage kommen.

Durch Amerikanische und Europäische Claims stellen wir die möglichen Auszahlungen eines Derivates dar, die durch den Käufer des Derivates innerhalb unseres Handelszeitraums $[0, T]$ einmalig eingefordert werden können.

Definition 2.12. *Als Amerikanischen Claim bezeichnen wir einen nicht negativen, reellwertigen, adaptierten Prozess* $H = (H_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ *auf* $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}), P)$.

Als Europäischen Claim bezeichnen wir eine $\mathfrak{F}_T$*- messbare, reellwertige, nicht negative Zufallsvariable* C *auf* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. *Mit*

$$H_t^C := \begin{cases} 0 & \text{falls } t < T \\ C_t & \text{falls } t = T \end{cases}$$

können wir einen Europäischen Claim C als einen Amerikanischen Claim der Form H^C darstellen.

Durch einen Europäischen Claim haben wir damit diejenigen Derivate modelliert, deren Auszahlung nur zum Zeitpunkt T eingefordert werden können. Bei einem Amerikanischen Claim dagegen sind die möglichen Ausübungszeitpunkte durch die Menge $\{0, \ldots, T\}$ gegeben.

Die Ausübungsstrategien des Käufers eines Amerikanischen Claims modellieren wir durch die Menge $\mathcal{T}$ der $\mathbb{N}_0$-wertigen Stoppzeiten, deren Werte nicht größer als T sind. Außerdem seien

$$\mathcal{T}_t := \{\sigma \in \mathcal{T} \mid \sigma \geq t\},$$
$$\mathcal{T}_\tau := \{\sigma \in \mathcal{T} \mid \sigma \geq \tau\}.$$

Für einen abdiskontierten Amerikanischen Claim bezeichnen wir mit $\Pi(H)$ Die Menge aller arbitragefreien Preise für H ausgedrückt in Einheiten des numéraire Assets.

Theorem 2.13. *Falls* H *bzgl. jedem* $P^* \in \mathcal{P}$ *integrierbar ist, so ist* $\Pi(H)$ *ein reelles Intervall mit*

$$\pi_{inf}(H) = \inf_{P^*\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E^*[H_\tau],$$
$$\pi_{sup}(H) = \sup_{P^*\in\mathcal{P}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E^*[H_\tau]$$

als Intervallgrenzen. Ist das Finanzmarktmodell vollständig, das heißt $\mathcal{P}$ *ist einelementig, dann ist der arbitragefreie Preis des Claims eindeutig bestimmt*

Beweis. In [1] steht ein Beweis unter Theorem 6.31. □

Definition 2.14. *Ein abdiskontierter Amerikanischer Claim H heißt hedgebar, wenn es eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$ und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\xi}$ gibt, für dessen Werteprozess V*

$$V_t \geq H_t \ \forall\ t \in \{0, \dots, T\} \ \wedge \ V_\tau = H_\tau \qquad P\text{-f.s.}$$

gilt. Die Handelsstrategie $\overline{\xi}$ heißt dann Hedge Strategie für H.

Das nachfolgende Theorem charakterisiert die arbitragefreien Preise hedgebarer abdiskontierter Amerikanischer Claims.

Theorem 2.15. *Für einen abdiskontierten Amerikanischen Claim H sind unter der Voraussetzung, dass H bzgl. jedem $P^* \in \mathcal{P}$ integrierbar ist, die folgenden Bedingungen äquivalent:*

$$\begin{aligned} &(a)\ H \text{ ist hedgebar},\\ &(b)\ |\Pi(H)| = 1,\\ &(c)\ \pi_{sup}(H) \in \Pi(H). \end{aligned}$$

Insbesondere ist der eindeutige arbitragefreie Preis für H gleich dem Anfangskapital einer Hedgestrategie für H.

Beweis. In [1] steht ein Beweis unter Theorem 6.34. □

Nun betrachten wir abdiskontierte Amerikanische Claims H mit

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^*[H_t] < \infty.$$

Das heißt, dass die obere Intervallgrenze $\pi_{\text{sup}}(H)$ der arbitragefreien Preise von H endlich ist. Nach Bemerkung 7.10 in [1] liegt $\pi_{\text{sup}}(H)$ genau dann im Intervall $\Pi(H)$, wenn $\Pi(H)$ einelementig ist.

Wir interessieren uns nun weiterhin für die obere Intervalgrenze von $\Pi(H)$ und führen in der folgenden Definition die Superhedge Strategien von H ein.

Definition 2.16. *Es sei H ein abdiskontierter Amerikanischer Claim. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\xi}$ mit einem Werteprozess V, so dass*

$$V_t \geq H_t \qquad P\text{-f.s. für alle } t \in \{0, \dots, T\}$$

heißt Superhedge Strategie für H.

Nach dem Korollar 7.9 in [1] gibt es eine Superhedge Strategie mit Anfangskapital $\pi_{\text{sup}}(H)$ und dieser Betrag stellt das minimale Anfangskapital dar mit dem eine Superhedge Strategie finanzierbar ist.

Desweiteren wird im Abschnitt 7.3 in [1] gezeigt, dass der durch

$$U_t^{\uparrow} := \sup_{P^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} E^*[H_\tau \mid \mathfrak{F}_t], \qquad t = 0, \dots, T$$

definierte Prozess, der Prozess des minimalen Preises ist, zudem eine Superhedge Strategie finanzierbar ist. Das können wir aus dem folgenden Theorem schließen. Aus diesem erhalten wir insbesondere $U_0^{\uparrow} = \pi_{\sup}(H)$.

Theorem 2.17. *Es bezeichne* $\mathcal{U}_t^{\uparrow}(H)$ *die Menge aller* $\mathfrak{F}_t$*-messbaren Zufallsvariablen* $U_t \geq 0$*, für die es einen d-dimensionalen vorhersehbaren Prozess* ξ *gibt, so dass*

$$U_t + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \geq H_u \qquad \text{für alle } u \geq t \ P\text{-f.s.}$$

Dann gilt

(a) $U_t^{\uparrow} \in \mathcal{U}_t^{\uparrow}(H)$,
(b) $U_t^{\uparrow}$ *essinf* $\mathcal{U}_t^{\uparrow}(H)$.

Beweis. In [1] steht ein Beweis unter Theorem 7.13. □

Der Prozess $U^{\uparrow}$ wird upper Snell envelope von H genannt.

3 Modellierung der zulässigen Handelsstrategien

Durch eine Menge $\overline{\mathfrak{S}}$, die die Bedingungen oberhalb der Definition(3.2) erfüllt, lassen sich zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategien in einem Finanzmarkt auf eine Weise modellieren, die uns eine Charakterisierung der Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$ gemäß Theorem(4.17) ermöglicht.

Wir zeigen in Beispiel(3.5) und Beispiel(3.4), wie sich Beschränkungen der Höhe des Kapitals, das in risky assets investiert werden darf bzw. wie sich Begrenzungen der short und long positions auf diese Weise modellieren lassen.

Die Struktur von $\mathfrak{S}$ lässt sich größtenteils auf den durch $\mathfrak{S}$ erzeugten Kegel $\mathcal{R}$ und die daraus konstruierte Menge $\hat{\mathcal{R}}$ übertragen, was wir in Lemma(3.6) und Lemma(3.7) zeigen werden. Dadurch können wir Lemma(4.7) und Lemma(4.11) auch für $\hat{\mathcal{R}}$ anstelle von $\mathfrak{S}$ anwenden. Das ist für uns wichtig, um die Voraussetzungen des Kreps-Yan Theorem(4.12) im Beweis von Lemma(4.13) erfüllen zu können.

Die Räume $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

Da wir öfters mit den Räumen $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ zu tun haben, geben wir an dieser Stelle eine kurze Einführung.

$\mathfrak{L}^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bezeichne den Raum der P-f.s. endlichen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Für eine Zufallsvariable Z auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definieren wir

$$\|Z\|_p := \begin{cases} E[|Z|^p]^{1/p}, & \text{falls } 0 < p < \infty, \\ inf\{c \geq 0 \mid P[|Z| > c] = 0\}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Für $p \in (0, \infty]$ bezeiche $\mathfrak{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ den Raum der Zufallsvariablen Z auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, sodass $\|Z\|_p < \infty$.

Um $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit $p \in [0, \infty]$ zu erklären bedienen wir uns der Äquivalenzrelation $\sim$ die durch

$$Z \sim \tilde{Z} :\Leftrightarrow Z = \tilde{Z} \text{ P-f.s.}, \qquad Z, \tilde{Z} \in \mathfrak{L}^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

definiert sei. Für $p \in [0, \infty]$ sei $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ die Menge aller Äquivalenzklassen aus $\mathfrak{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bezüglich $\sim$. Das heißt mit einem $[Y] \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ identifizieren wir alle Zufallsvariablen aus $\mathfrak{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ die sich nur auf P-Nullmengen von Y unterscheiden.

Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bezüglich der Norm $\| \cdot \|_p$ ein Banachraum.

Die Metrik

$$d(X,Y) := E[|X-Y| \wedge 1], \qquad X,Y \in L^0(\Omega,\mathfrak{F},P)$$

induziert die Topologie der P-stochastischen Konvergenz. Mit dieser Topologie bildet $L^0(\Omega,\mathfrak{F},P)$ einen topologischen Vektorraum.

Statt $[Y] \in L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$ schreiben wir einfach $Y \in L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$.

Mit $L^p(\Omega,\mathfrak{F},P;\mathbb{R}^d)$ bezeichnen wir den Raum der Zufallsvariablen aus $L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$.

Die Räume N_t und $N_t^\perp$

Bei der Modellierung der zulässigen Handelsstrategien spielen die Unterräume

$$\begin{aligned} N_t &= \{\eta_t \in L^0(\Omega,\mathfrak{F}_{t-1},P;\mathbb{R}^d) : \eta_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0 \text{ P-f.s.}\}, \\ N_t^\perp &= \{\xi_t \in L^0(\Omega,\mathfrak{F}_{t-1},P;\mathbb{R}^d) : \xi_t \cdot \eta_t = 0 \text{ P-f.s. } \forall\, \eta_t \in N_t\} \end{aligned}$$

eine wichtige Rolle. Deren Eigenschaften werden im Beweis von Lemma (4.11) gebraucht.

Bemerkung 3.1. *N_t und $N_t^\perp$ besitzen die folgenden Eigenschaften:*

1. *Zu jedem $\xi_t \in L^0(\Omega,\mathfrak{F}_{t-1},P;\mathbb{R}^d)$ gibt es eine eindeutige Zerlegung $\xi_t = \eta_t + \xi_t^\perp$, wobei $\eta_t \in N_t$ und $\xi_t^\perp \in N_t^\perp$ ist.*
2. *N_t und $N_t^\perp$ sind abgeschlossen in $L^0(\Omega,\mathfrak{F}_{t-1},P;\mathbb{R}^d)$. Daher liegt der Grenzwert jeder P-stochastisch konvergenten Folge aus N_t bzw. $N_t^\perp$ stets wieder in N_t bzw. $N_t^\perp$. Außerdem sind N_t und $N_t^\perp$ invariant unter der Multiplikation mit Funktionen aus $L^0(\Omega,\mathfrak{F}_{t-1},P,\mathbb{R}^d)$.*
3. *$N_t \cap N_t^\perp = \{0\}$.*

Beweis. Der Beweis steht in [1] unter Lemma 1.57. □

Die zulässigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\overline{\mathfrak{S}}$

Im zweiten Kapitel haben wir ein Finanzmarktmodell eingeführt. In diesem Modell wollen wir nun mit der Modellierung der Restriktionen beginnen. Wir tun dies, indem wir zulässige selbstfinanzierenden Handelsstrategien definieren. Mit zulässig sind diejenigen gemeint, die weiterhin gehandelt werden dürfen.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine Menge von d-dimensionalen, $\mathbb{R}^d$-wertigen, vorhersehbaren Prozessen auf $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}},P)$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $0 \in \mathfrak{S}$
2. $\mathfrak{S}$ ist predictably convex, d.h. falls $\xi,\eta \in \mathfrak{S}$ und h ein vorhersehbarer Prozess mit $0 \le h \le 1$ ist, dann ist
$$h_t \cdot \xi_t + (1-h_t) \cdot \eta_t \in \mathfrak{S}_t.$$

3. Für jedes $t \in \{1, ..., T\}$ ist die Menge
$$\mathfrak{S}_t := \{\xi_t : \xi \in \mathfrak{S}\} \text{ abgeschlossen in } L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d).$$
4. Betrachten wir die eindeutig bestimmte Zerlegung aus Bemerkung(3.1) so gilt für alle $t \in \{1, ..., T\}$: $\xi_t \in \mathfrak{S}_t$ impliziert $\xi_t^{\perp} \in \mathfrak{S}_t$.

Die Menge $\mathfrak{S}$ ist eine Darstellung der zulässigen Investitionsstrategien in risky Assets.

Definition 3.2. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\varphi}$ heißt zulässig, wenn sie in der Menge*

$$\overline{\mathfrak{S}} := \{\overline{\xi} = (\xi^0, \xi) \mid \xi \in \mathfrak{S} \wedge \overline{\xi} \textit{ ist selbstfinanzierende Handelsstrategie}\}$$

enthalten ist.

Desweiteren bezeichnen wir

$$\mathfrak{S}_t^{\infty} := \mathfrak{S}_t \cap L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d),$$
$$\mathfrak{S}^{\infty} := \{\xi \in \mathfrak{S} \mid \xi_t \in L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) \ \forall\, t \in \{1, \ldots, T\}\}.$$

Die folgende Bemerkung liefert uns eine Bedingung, unter der es leichter ist, Beispiele für $\mathfrak{S}$ zu finden.

Bemerkung 3.3. *Die Bedingung, dass für alle $t \in \{1, \ldots, T\}$ und $\xi_t \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ die Eigenschaft*

$$\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0 \qquad P\text{-f.s.} \Rightarrow \xi_t = 0 \qquad P\text{-f.s.} \tag{3.1}$$

gilt, heißt non-redundance Bedingung. Sie impliziert $N_t = \{0\}$ für alle $t \in \{1, \ldots, T\}$, wodurch die Bedingung (4) *von $\mathfrak{S}$ oberhalb der Definition(*3.2*) automatisch erfüllt ist. Aus Bemerkung(*3.1*) folgt dann nämlich $\xi_t = \xi_t^{\perp}$ für alle $\xi \in \mathfrak{S}$ und $t \in \{1, \ldots, T\}$.*

Begrenzungen der long und short positions

Beispiel 3.4. *Für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$ sei C_t eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, in der die* 0 *enthalten ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{S}$ als die Menge aller d-dimensionaler, vorhersehbarer Prozesse ξ mit $\xi_t \in C_t$ P-f.s..*

*Wenn die non-redundance Bedingung (*3.1*) gilt, erfüllt $\mathfrak{S}$ die Bedingungen* (1) *bis* (4) *oberhalb der Definition(*3.2*). Dabei ist natürlich $0 \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ ist predictably convex aufgrund der Konvexität der C_t und aus der Abgeschlossenheit der C_t folgt die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{S}_t$ in $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$. Für eine stochastisch konvergente Folge $(\xi_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{S}_t$ mit Limes ξ_t gilt nämlich $\xi_t^n(\omega) \in C_t$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Da es eine P-f.s.-konvergente Teilfolge mit Limes ξ_t gibt, ist schließlich $\xi_t \in C_t$ P-f.s.*

Durch diese Konstruktion modellieren wir nun Begrenzungen der long und short positions. Für $-\infty \leq a_t^k \leq 0 \leq b_t^k \leq \infty$ *und* $k \in \{1, \dots, d\}$ *sei* $C_t = [a_t^1, b_t^1] \times \dots \times [a_t^d, b_t^d]$ *für jedes* $t \in \{1, \dots, T\}$. *Wir setzen* $\mathfrak{S}$ *als die Menge aller d-dimensionaler, vorhersehbarer Prozesse* ξ *mit* $\xi_t \in C_t$ *P-f.s. für alle* $t \in \{1, \dots, T\}$. *Weil die Mengen* C_t *abgeschlossen und konvex sind erfüllt auch diese Variante von* $\mathfrak{S}$ *die Bedingungen oberhalb der Definition(*3.2*).*

Begrenzung der Kapitalinvestitionen

Beispiel 3.5. *Für zwei Konstanten* a*,* b *mit* $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$ *setzen wir* $\mathfrak{S}$ *als die Menge aller d-dimensionaler, vorhersehbarer Prozesse mit Werten in* $\mathbb{R}^d$*, so dass*

$$a \leq \xi_t \cdot X_{t-1} \leq b \qquad \text{P-f.s für alle } t \in \{1, \dots, T\}.$$

Klar ist $0 \in \mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ *ist predictable convex, denn für* $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ *und einen vorhersehbaren Prozess* h *mit* $0 \leq h_t \leq 1$ *liegt* $(h_t \xi_t + (1 - h_t)\eta_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ *in* $\mathfrak{S}$*, denn es gilt:*

$$a = (h_t + 1 - h_t)a \leq h_t \xi_t X_{t-1} + (1 - h_t)\eta_t X_{t-1} \leq (h_t + 1 - h_t)b = b \qquad \text{P-f.s.}$$

Für jedes $t \in \{1, \dots, T\}$ *ist* $\mathfrak{S}_t$ *abgeschlossen in* $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P; \mathbb{R}^d)$. *Für den Limes* ξ_t *einer stochastisch konvergenten Folge* $(\xi_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *aus* $\mathfrak{S}_t$ *gilt nämlich* $a \leq \xi_t^n X_{t-1} \leq b$ *P-f.s. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und daher auch* $a \leq \xi_t X_{t-1} \leq b$ *P-f.s..*

*Ist die non-redundance Bedingung (*3.1*) erfüllt, so ist gemäß Bemerkung(*3.3*) auch die Bedingung* (4) *von* $\mathfrak{S}$ *oberhalb der Definition(*3.2*) erfüllt.*

Der durch $\overline{\mathfrak{S}}$ erzeugte Kegel $\overline{\mathcal{R}}$ und der Kegel $\hat{\mathcal{R}}$

Für den Beweis des No-Arbitrage Theorems betrachten wir die Kegel

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}} &:= \{\lambda \cdot \overline{\xi} \mid \overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}, \lambda \geq 0\}, \\
\mathcal{R} &:= \{\lambda \cdot \xi \mid \xi \in \mathfrak{S}, \lambda \geq 0\}, \\
\mathcal{R}_t &:= \{\lambda \cdot \xi_t \mid \xi_t \in \mathfrak{S}_t, \lambda \geq 0\}, \qquad t \in \{1, \dots, T\}.
\end{aligned}$$

Mit $\hat{\mathcal{R}}_t$ bezeichnen wir den $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$-Abschluss von $\mathcal{R}_t$ und durch

$$\xi \in \hat{\mathcal{R}} :\Leftrightarrow \xi_t \in \hat{\mathcal{R}}_t \qquad \text{für alle } t \in \{1, \dots, T\}$$

definieren wir den Raum $\hat{\mathcal{R}}$. Dieser Raum ist ebenfalls ein Kegel.

Lemma 3.6. $\mathcal{R}$ *erfüllt die Bedingungen* (1), (2) *und* (4) *von* $\mathfrak{S}$ *oberhalb der Definition(*3.2*).*

Beweis. (1): Wegen $0 \in \mathfrak{S}$, ist auch $0 \in \mathcal{R}$.

(2): Es seien $\lambda, \mu \geq 0$, $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ und h ein vorhersehbarer Prozess mit $0 \leq h_t \leq 1$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$. Im folgenden nutzen wir die Eigenschaften (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ oberhalb der Definition(3.2). Es sei $t \in \{1, \dots, T\}$. Im Falle $\lambda, \mu \geq 1$ gilt

$$2\lambda\mu(h_t \frac{\xi_t}{\mu} \frac{1}{2} + (1 - h_t) \frac{\eta_t}{\lambda} \frac{1}{2}) \in \mathcal{R}_t.$$

Um das nachzuvollziehen überlegen wir uns zuerst, dass $h_t/\mu \cdot \xi_t$ und $(1 - h_t)/\lambda \cdot \eta_t$ in $\mathfrak{S}_t$ liegen und bedenken dann, dass $1/2$ auch einen vorhersehbaren Prozess darstellt. Außerdem ist $2\lambda\mu \geq 0$.

In den nächsten beiden Fällen können wir mit sehr ähnlich argumentieren.

Im Falle $\lambda, \mu < 1$ ist

$$\frac{2}{\lambda\mu}(\lambda\xi_t h_t \frac{1}{2} + \mu\eta_t(1 - h_t)\frac{1}{2}) \in \mathcal{R}_t$$

und im Falle $\lambda < 1, \mu \geq 1$ gilt

$$2\mu(\xi_t h_t \frac{\lambda}{2\mu} + \eta_t(1 - h_t)\frac{1}{2}) \in \mathcal{R}_t.$$

(4): Zu einem $\tilde{\xi} \in \mathcal{R}$ gibt es ein $\xi \in \mathfrak{S}$ und ein $\lambda \geq 0$ mit $\tilde{\xi} = \lambda \cdot \xi$. Außerdem gibt es gemäß Bemerkung(3.1) zu jedem $t \in \{1, \dots, T\}$ eine eindeutig bestimmte Zerlegung $\tilde{\xi}_t = \tilde{\eta}_t + \tilde{\xi}_t^{\perp}$ mit $\tilde{\xi}_t^{\perp} \in N_t^{\perp}$ und $\tilde{\eta}_t \in N_t$.

Für ξ gibt es ebenfalls zu jedem $t \in \{1, \dots, T\}$ ein $\eta_t \in N_t$ und ein $\xi_t^{\perp} \in N_t^{\perp}$, so dass die Zerlegung $\xi_t = \eta_t + \xi_t^{\perp}$ eindeutig bestimmt ist. Nach Bemerkung(3.1) gilt $\lambda \cdot \xi_t^{\perp} \in N_t^{\perp}$ und $\lambda \cdot \eta_t \in N_t$.

Daher ist auch die Zerlegung $\lambda \cdot \xi_t = \lambda \cdot \xi_t^{\perp} + \lambda \cdot \eta_t$ im Sinne von Bemerkung(3.1) eindeutig. Die Eigenschaft (4) von $\mathfrak{S}$ liefert uns $\xi_t^{\perp} \in \mathfrak{S}_t$. Also ist $\tilde{\xi}_t^{\perp} = \lambda \cdot \xi_t^{\perp} \in \mathcal{R}_t$.

□

Lemma 3.7. *$\hat{\mathcal{R}}$ erfüllt die Bedingungen* (1) *bis* (4) *von $\mathfrak{S}$ oberhalb der Definition(*3.2*).*

Beweis. Das $\hat{\mathcal{R}}$ die Eigenschaften (1) und (3) erfüllt ist klar.

Zunächst zeigen wir, dass die Bedingung (2) durch $\hat{\mathcal{R}}$ erfüllt wird.

Es seien $\xi, \eta \in \hat{\mathcal{R}}$ und für $t \in \{1, \dots, T\}$ seien $(\xi_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sowie $(\eta_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei P-stochastisch konvergente Folgen aus $\mathcal{R}_t$ mit ξ_t bzw. η_t als Grenzwerte. Desweiteren sei h ein vorhersehbarer Prozess mit $0 \leq h_t \leq 1$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$.

Nach Lemma(3.6) ist $\big(\xi_t^n \cdot h_t + \eta_t^n \cdot (1 - h_t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge in $\mathcal{R}_t$ und außerdem ist sie konvergent mit Grenzwert $\xi_t \cdot h_t + \eta_t \cdot (1 - h_t)$, der folglich in $\hat{\mathcal{R}}_t$ liegt. Das gilt für jedes $t \in \{1, \dots, T\}$.

Jetzt bleibt nur noch Bedingung (4) zu zeigen. Es sei $\xi \in \hat{\mathcal{R}}$. Für jedes $t \in \{1, \dots, T\}$ gibt es dann eine P-stochastisch konvergente Folge $(\xi_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{R}_t$ mit ξ_t als ihren Grenzwert. Da jede P-stochastisch konvergente Folge eine P-f.s.-konvergente Teilfolge besitzt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass diese Folge P-f.s. konvergiere. Nach Bemerkung(3.1) gibt es eindeutige Zerlegungen $\xi_t^n = \eta_t^n + \xi_t^{n\perp}$ und $\xi_t = \eta_t + \xi_t^{\perp}$, so dass $\eta_t^n, \eta_t \in N_t$ und $\xi_t^{n\perp}, \xi_t^{\perp} \in N_t^{\perp}$ gilt. Nach Lemma(3.6) liegt die Folge $(\xi_t^{n\perp})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}_t$. Wegen

$$\eta_t + \xi_t^{\perp} = \lim_{n\to\infty}(\eta_t^n + \xi_t^{n\perp}) \text{ P-f.s. } \Leftrightarrow \xi_t^{\perp} = \lim_{n\to\infty}(\eta_t^n - \eta_t + \xi_t^{n\perp}) \text{ P-f.s.} \tag{3.2}$$

genügt es uns zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(\eta_t^n - \eta_t) = 0$ P-f.s. gilt, denn damit würde $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_t^{n\perp} = \xi_t^{\perp}$ gelten und es wäre $\xi_t^{\perp} \in \hat{\mathcal{R}}_t$.

Wegen Gleichung(3.2) und der Abgeschlossenheit von N_t und $N_t^{\perp}$ in $L^0\{\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d\}$ gemäß Bemerkung(3.1), gilt für alle $\mu \in N_t$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu \cdot (\eta_t^n - \eta_t) = \lim_{n\to\infty} \mu \cdot (\xi_t^{n\perp} - \xi_t^{\perp}) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} (\eta_t^n - \eta_t)(X_t - X_{t-1}) = 0.$$

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\eta_t^n - \eta_t) \in N_t \cap N_t^{\perp}$ und nach Bemerkung(3.1) ist $N_t \cap N_t^{\perp} = \{0\}$.

□

4 Charakterisierung der Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$

Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis von Theorem(4.17). Demnach gibt es genau dann keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß in $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ existiert.

Mit Hilfe von Proposition(4.4) und Lemma(4.5) zeigen wir, dass die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ hinreichend für Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$ ist.

Den Beweis der notwendigen Bedingung für Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$ erlangen wir durch das Theorem(4.14) und Lemma(4.13). Das Lemma(4.13) erhalten wir durch eine Anwendung des Kreps-Yan Theorem(4.12).

In Proposition(4.6) zeigen wir, dass es genau dann Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$ gibt, wenn es in $\hat{\mathcal{R}}$ welche gibt. Dabei bezeichnen wir ein $\xi \in \hat{\mathcal{R}}$ als Arbitragemöglichkeit, wenn die durch ξ und dem Anfangskapital $V_0 = 0$ eindeutig bestimmte zuläsige Handelsstrategie $\overline{\xi}$ eine Arbitragemöglichkeit darstellt.

Zusammen mit den Eigenschaften einer Arbitragemöglichkeit in $\overline{\mathfrak{S}}$ bzw. in $\hat{\mathcal{R}}$ aus Lemma(4.7) erhalten wir eine Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch den Raum der Periodengewinnmöglichkeiten in Proposition(4.8). Diese nutzen wir dazu um mit Lemma(4.11) und Lemma(4.9) die Voraussetzungen des Kreps-Yan Theorems zu schaffen.

Die Menge $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$

Definition 4.1. *Mit $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ bezeichnen wir die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\widetilde{P} \sim P$, so dass $X_t \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, \widetilde{P}; \mathbb{R}^d)$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ und so dass der Werteprozess jeder Handelsstrategie in $\overline{\mathfrak{S}}$ ein lokales $\widetilde{P}$-Supermartingal ist.*

Bemerkung 4.2. *Es gilt $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$.*

Beweis. Für ein Maß $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ ist nach Proposition(2.9) jeder Werteprozess einer beschränkten, zulässigen selbstfinanzierenden Handelsstrategie ein Martingal. Für eine nicht beschränkte, zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\xi}$ mit Werteprozess V können wir durch Lokalisierung mittels der Folge von Stoppzeiten

$$\tau_n = \inf\{t \in \mathbb{N}_0 : |\xi_{t+1}| \geq n \text{ P-f.s.}\}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

analog zum letzten Schritt des Beweises von Theorem(4.17) zeigen, dass V ein lokales Martingal ist. Daraus folgt dann $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$. □

Bemerkung 4.3. (a) *Die Klassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ stimmen überein, falls $\overline{\mathfrak{S}}$ alle beschränkten selbstfinanzierenden Handelsstrategien enthält.*

Beweis. Um das zu zeigen, sei $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$. Für jede beschränkte selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\xi}$ ist der zugehörige Werteprozess V also ein $\tilde{P}$-Supermartingal. Da $-\overline{\xi}$ ebenfalls eine beschränkte selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Werteprozess $-V$ ist, ist V ein $\tilde{P}$-Martingal. Nach Proposition(2.9) ist $\tilde{P} \in \mathcal{P}$. $\square$

(b) *In Beispiel(3.5) haben wir eine Begrenzungen der Höhe des Kapitals, das in risky assets investiert werden darf, modelliert. Hier gibt es genau dann keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$, wenn es im uneingeschränkten Finanzmarkt keine Arbitragemöglichkeiten gibt, das heißt hier gilt $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$.*

Beweis. Wenn es nämlich eine Arbitragemöglichkeit im uneingeschränkten Finanzmarkt gäbe, dann folgt aus Bemerkung(2.6), dass es ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und einen $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbaren Prozess ξ_t mit

$$\xi_t(X_t - X_{t-1}) \geq 0 \text{ P-f.s. und } P[\xi_t(X_t - X_{t-1}) > 0] > 0$$

gibt. Desweiteren gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass dies auch für $\tilde{\xi}_t := \xi_t \cdot I_{\{\xi_t \cdot X_{t-1} \leq c\}}$ anstelle von ξ_t gilt. Wählt man dann ein $\epsilon > 0$ klein genug, dann folgt $a \leq \epsilon \cdot \tilde{\xi}_t \cdot X_{t-1} \leq b$ und durch $\eta_t := \epsilon \cdot \tilde{\xi}_t$ und $\eta_s := 0$ für $s \neq t$ wird eine Arbitragemöglichkeit $\overline{\eta} \in \overline{\mathfrak{S}}$ definiert. $\square$

(c) *Modellieren wir in Beispiel(3.4) ein short selling Verbot, das heißt wir setzen $a_t^k = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, d\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$. Dann können wir aus der Existenz eines Maßes aus $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ nicht auf die Existenz eines Maßes in $\mathcal{P}$ schließen.*

Beweis. Sei nämlich $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$, dann erhalten wir für jedes $\overline{\xi} \in \mathfrak{S}^{\infty}$ mit $\xi \not\equiv 0$ und jedes $t \in \{1, \dots, T-1\}$ die Ungleichung

$$\tilde{E}[\xi_{t+1} X_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] \leq \xi_t X_t.$$

Wegen

$$\tilde{E}[\xi_{t+1} X_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] \geq \xi_t X_t \Leftrightarrow \tilde{E}[-\xi_{t+1} X_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] \leq -\xi_t X_t$$

und $-\xi \notin \mathfrak{S}^{\infty}$, ist nach Voraussetzung nicht klar, ob der Werteprozess von $\overline{\xi}$ ein Martingal ist.

Nach Proposition(2.9) ist es daher nicht möglich darauf zu schließen, ob $\tilde{P}$ in $\mathcal{P}$ liegt. $\square$

Proposition 4.4. *Ein lokales Q-Supermartingal Z dessen Negativteile Z_t^- für jedes $t \in \{0, \dots, T\}$ Q-integrierbar sind, ist bereits ein Q-Supermartingal.*

Beweis. Sei $t \in \{1, \dots, T\}$ und $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für Z. Es gilt nach Voraussetzung

$$Z_{\tau_n \wedge t} \geq -\max_{0 \leq s \leq T} Z_s^- \geq -\sum_{s=0}^{T} Z_s^- \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, Q) \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dadurch ist das Lemma von Fatou für bedingte Erwartungen anwendbar. Außerdem gilt $\liminf_{n\to\infty} Z_{t\wedge\tau_n} = \lim_{n\to\infty} Z_{t\wedge\tau_n} = Z_t$, da τ_n eine lokalisierende Folge für Z ist. Deshalb und wegen der Supermartingaleigenschaft von $(Z_{t\wedge\tau_n})_{t\in\{0,\dots,T\}}$ erhalten wir

$$E_Q[Z_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \leq \liminf_{n\to\infty} E_Q[Z_{t\wedge\tau_n} \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \leq \liminf_{n\to\infty} Z_{t-1\wedge\tau_n} = Z_{t-1} \text{ Q-f.s.} \tag{4.1}$$

Deshalb und aufgrund der Supermartingaleigenschaft von $(Z_{t\wedge\tau_n})_{t\in\{0,\dots,T\}}$ gilt $E_Q[Z_t] \leq E_Q[Z_0] < \infty$. Da außerdem Z^- Q-integrierbar ist, gilt

$$E_Q[|Z_t|] = E_Q[Z_t^+ - Z_t^-] + 2E_Q[Z_t^-] \leq E_Q[Z_0] + 2E_Q[Z_t^-] < \infty \tag{4.2}$$

für alle $t \in \{0,\dots,T\}$. Da lokale Supermartingale bereits adaptiert sind, ist Z aufgrund von (4.1) und (4.2) ein Q-Supermartingal.

□

Lemma 4.5. *Es sei $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}} \neq \emptyset$ und V der Werteprozess einer Handelsstrategie in $\overline{\mathfrak{S}}$, so dass $V_T \geq 0$ P-f.s. gelte. Dann gilt bereits $V_t \geq 0$ P-f.s. für jedes $t \in \{1,\dots,T\}$.*

Beweis. Wir beweisen dies durch eine Rückwärtsinduktion nach t. Sei $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$. Es gilt bereits $V_T \geq 0$ nach Voraussetzung. Für den Induktionsschritt $(t \to t-1)$ machen wir die Induktionsannahme, dass $V_t \geq 0$ für ein beliebiges, aber festes $t \in \{1,\dots,T\}$ gilt. Für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi) \in \overline{\mathfrak{S}}$ des Werteprozesses V sei $\xi_s^{(c)} := \xi_s \cdot I_{\{|\xi_s| \leq c\}}$ für ein $c > 0$ und für alle $s \in \{1,\dots,T\}$. Wegen der Eigenschaft (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ ist $\xi^{(c)} \in \mathfrak{S}$. Aufgrund der Porposition(4.4) ist der Werteprozess $V^{(c)}$ von $\xi^{(c)}$ ein $\tilde{P}$-Supermartingal. Da $\overline{\xi^{(c)}}$ selbstfinanzierend ist, gilt mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
V_{t-1} \cdot I_{\{|\xi_t| \leq c\}} &= \xi_t \cdot I_{\{|\xi_t| \leq c\}} \cdot X_{t-1} \\
&= \xi_t^{(c)} \cdot X_{t-1} - \xi_t^{(c)} \cdot X_t + \xi_t \cdot I_{\{|\xi_t| \leq c\}} \cdot X_t \\
&= V_t \cdot I_{\{|\xi_t| \leq c\}} - \xi_t^{(c)} \cdot (X_t - X_{t-1}) \\
&\geq -\xi_t^{(c)} \cdot (X_t - X_{t-1}) \\
&= V_{t-1}^{(c)} - V_t^{(c)}.
\end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir die bedingte Erwartung $\tilde{E}[\cdot \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$ auf beiden Seiten der Ungleichung. Da $V_{t-1} I_{\{|\xi_t| \leq c\}}$ $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbar ist, führt dies aufgrund der Supermartingaleigenschaft zu

$$V_{t-1} \cdot I_{\{|\xi_t| \leq c\}} \geq \tilde{E}[V_{t-1}^{(c)} - V_t^{(c)} \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \geq 0 \; \tilde{P}\text{-f.s.}$$

Lassen wir c gegen ∞ laufen, so ergibt sich $V_{t-1} \geq 0$ P-f.s.

□

Proposition 4.6. *Der Raum $\hat{\mathcal{R}}$ enthält genau dann keine Arbitragemöglichkeiten, wenn der Raum $\overline{\mathfrak{S}}$ keine enthält.*

Beweis. Angenommen in $\overline{\mathfrak{S}}$ gäbe es eine Arbitragemöglichkeit. Da $\overline{\mathfrak{S}}$ eine Teilmenge von $\hat{\mathcal{R}}$ ist, gäbe es dann auch eine Arbitragemöglichkeit in $\hat{\mathcal{R}}$.

Wir nehmen jetzt an es gäbe eine Arbitragemöglichkeit $\xi \in \hat{\mathcal{R}}$. Damit soll gemeint sein, dass es einen vorhersehbaren, $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen Prozess $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ mit Werteprozess V und Anfangskapital $V_0 = 0$ gibt mit

$$V_T = \sum_{k=1}^{T} \xi_k (X_k - X_{k-1}) \geq 0 \text{ P-f.s. und } P[V_T > 0] > 0.$$

Weil $\xi_t \in \hat{\mathcal{R}}_t$ für alle $t \in \{1, \ldots, T\}$ gilt, gibt es zu jedem $t \in \{1, \ldots, T\}$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $\lambda^n \geq 0$ sowie ein $\xi_t^n \in \mathfrak{S}_t$, so dass $(\lambda^n \cdot \xi_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{R}_t$ ist, die P-Stochastisch gegen ξ_t konvergiert. Da wir hier sonst zu einer P-f.s. konvergenten Teilfolge übergehen könnten, können wir ohne Einschränkung P-fast sichere Konvergenz annehmen.

Wegen

$$\lim_{n \to \infty} \lambda^n \cdot \xi_t^n = \xi_t < \infty \text{ P-f.s. } \wedge \xi_t \not\equiv 0$$

ist auch $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n < \infty$. Aufgrund der Eigenschaften (1), (2) und (4) von $\mathfrak{S}$ gilt für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$:

$$\frac{\lambda^n}{\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \lambda^m} \cdot \xi_t^n \in \mathfrak{S}_t,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^n}{\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \lambda^m} \cdot \xi_t^n = \frac{1}{\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \lambda^m} \cdot \xi_t \in \mathfrak{S}_t.$$

Sei nun W der Werteprozess von $\xi / \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \lambda^m$ mit $W_0 = 0$. Dann gilt $W_T = V_T \cdot \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \lambda^m \geq 0$ P-f.s. und $P[W_T > 0] = P[V_T > 0] > 0$. Also gibt es auch eine Arbitragemöglichkeit in $\overline{\mathfrak{S}}$.

$\square$

Lemma 4.7. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*

1. *Es gibt eine Arbitragemöglichkeit in* $\overline{\mathfrak{S}}$.

2. *Es existieren* $t \in \{1, \ldots, T\}$ *und* $\xi_t \in \mathfrak{S}_t$, *so dass*

$$\xi_t (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \text{ } P\text{-f.s. und } P[\xi_t (X_t - X_{t-1}) > 0] > 0. \tag{4.3}$$

3. *Es gibt* $t \in \{1, \ldots, T\}$ *und* $\xi_t \in \mathfrak{S}_t^\infty$, *die Bedingung* (4.3) *erfüllen.*

Bemerkung: Dies lässt sich analog auch für $\mathcal{R}$ *und* $\hat{\mathcal{R}}$ *anstelle von* $\mathfrak{S}$ *zeigen. Nach Lemma*(3.7) *und Lemma*(3.6) *gelten nämlich auch dort die Bedingungen* (1) *und* (2) *von* $\mathfrak{S}$.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) : Es sei $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}$ eine Arbitragemöglichkeit mit Werteprozess V und Anfangskapital $V_0 = 0$. Wir definieren

$$t := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid V_k \geq 0 \text{ P-f.s. und } P[V_k > 0] > 0\}.$$

Nach Voraussetzung ist $t \leq T$ und entweder gilt $V_{t-1} = 0$ P-f.s. oder $P[V_{t-1} < 0] > 0$. Im ersten Falle folgt aus der Selbstfinanzierbarkeit

$$\xi_t(X_t - X_{t-1}) = V_t - V_{t-1} = V_t \text{ P-f.s.}$$

Nach Definition von t erfüllt ξ_t also die Gleichung (4.3).

Im zweiten Falle setze $\eta_t := \xi_t I_{\{V_{t-1}<0\}}$ für alle $t \in \{1, \ldots, T\}$. Wegen der Eigenschaften (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ ist $\eta \in \mathfrak{S}$. Es gilt

$$\eta_t(X_t - X_{t-1}) = (V_t - V_{t-1})I_{\{V_{t-1}<0\}} \geq -V_{t-1}I_{\{V_{t-1}<0\}} \geq 0 \text{ P-f.s.}$$

Weil außerdem $P[V_{t-1} < 0] > 0$ gilt, ist $P[\eta_t(X_t - X_{t-1}) > 0] > 0$. Also erfüllt η_t anstelle von ξ_t die Gleichung (4.3).

2) $\Rightarrow$ 3) Wir nehmen ein $\xi \in \mathfrak{S}$, dass die Gleichung (4.3) erfüllt. Dann wählen wir ein $c > 0$ mit

$$P[\xi_t(X_t - X_{t-1}) > 0) \ \wedge |\xi_t| \leq c] > 0.$$

Der Prozess $(\xi_s I_{\{|\xi_s| \leq c\}})_{s \in \{1,\ldots,T\}}$ liegt aufgrund der Eigenschaften (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}^\infty$ und $\xi_t I_{\{|\xi_t| \leq c\}}$ erfüllt anstelle von ξ_t die Gleichung (4.3).

3) $\Rightarrow$ 1) Nach Voraussetzung existiert ein $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ und ein $t \in \{1, \ldots, T\}$, sodass ξ_t die Gleichung (4.3) erfüllt. Definiere η durch $\eta_t = \xi_t$ und $\eta_s = 0$ für $s \neq t$. Zu η gibt es nach Bemerkung(2.4) genau eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\eta} = (\eta^0, \eta)$ mit einem Werteprozess V dessen Anfangskapital $V_0 = 0$ beträgt. Da $\overline{\eta}$ selbstfinanzierend ist, gilt

$$V_T = \sum_{s=1}^{T} \eta_s(X_s - X_{s-1}) = \xi_t(X_t - X_{t-1}).$$

Nach Voraussetzung ist $\overline{\eta} = (\eta^0, \eta)$ eine Arbitragemöglichkeit mit $\eta \in \mathfrak{S}^\infty$.

□

Die Periodengewinnmöglichkeiten $\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}}$ und $\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}}$

Die Menge der Gewinne durch Handelsstrategien $\overline{\xi}$ mit $\xi \in \mathfrak{S}$ bzw. $\xi \in \hat{\mathcal{R}}$ in einer Periode $t \in \{1, \ldots, T\}$ definieren wir durch

$$\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} := \{\xi_t(X_t - X_{t-1}) \mid \xi_t \in \mathfrak{S}_t\},$$
$$\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} := \{\xi_t(X_t - X_{t-1}) \mid \xi_t \in \hat{\mathcal{R}}_t\}.$$

Proposition 4.8. *Es gibt genau dann keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$, wenn für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$ gilt:*

$$\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}.$$

Beweis. Aufgrund von Lemma(4.7) enthält $\overline{\mathfrak{S}}$ genau dann keine Arbitragemöglichkeiten, wenn es kein $\xi \in \mathfrak{S}$ gibt, sodass die Bedingung (4.3) für ein $t \in \{1, \ldots, T\}$ erfüllt ist und das ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}$ für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$ gilt.

Dies gilt auch für $\hat{\mathcal{R}}$ anstelle von $\mathfrak{S}$, weil Lemma(4.7) auch für $\hat{\mathcal{R}}$ anstelle von $\mathfrak{S}$ gilt.

Mit Proposition(4.6) ist der Beweis erbracht.

□

Lemma 4.9. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

$$(a)\big(\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)\big) \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\},$$
$$(b)\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}.$$

Beweis. Wegen $0 \in -L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ ist

$$\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) \subset \big(\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)\big) \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d).$$

Folglich folgt Aussage (b) aus Aussage (a).

Angenommen es gilt die Aussage (b), dann nehmen wir uns ein

$$Z \in \big(\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)\big) \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d).$$

Es existiert dann ein $U \in L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ und ein $\xi \in \hat{\mathcal{R}}_t$ mit

$$0 \leq Z \leq \xi \cdot (X_t - X_{t-1}) - U.$$

Deshalb gilt $\xi \cdot (X_t - X_{t-1}) \geq U \geq 0$. Aus (b) folgt nun $\xi \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0$. Dann muss $U = 0$ gelten und somit ist $Z = 0$, was uns die Aussage (a) liefert.

□

Lemma 4.10. *Es sei $t \in \{1, \ldots, T\}$ und $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge aus $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ mit $\liminf\limits_{n \to \infty} |\xi_n| < \infty$. Dann gibt es ein $\xi \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ und eine streng monoton steigende Folge $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbaren, $\mathbb{N}$-wertigen Zufallsvariablen, sodass gilt:*

$$\xi_{\sigma_m(\omega)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \xi(\omega) \qquad \textit{für } P\textit{-f.a. } \omega \in \Omega.$$

Beweis. Es sei $W(\omega) := \liminf\limits_{n \to \infty} |\xi_n(\omega)|$.

Auf der P-Nullmenge $\{W = \infty\}$ definieren wir $\sigma_m := m$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Auf $\{W < \infty\}$ sei $\sigma_1^0 := 1$ und wir definieren durch

$$\sigma_m^0 := \inf\{n > \sigma_{m-1}^0 \mid ||\xi_n| - W| \leq \frac{1}{m}\}, \qquad m = 2, 3, \ldots$$

eine Folge $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbarer, $\mathbb{N}$-wertiger Zufallsvariablen.

Aus dieser Folge definieren wir nun rekursiv für $i = 1, \dots, d$ neue Folgen $(\sigma_m^i)_{m\in\mathbb{N}}$, sowie die i-ten Komponenten des Limes ξ. Dazu setzen wir

$$\xi^i = \liminf_{n\to\infty} \xi^i_{\sigma_m^{i-1}}.$$

Dabei ist ξ^1 bereits durch die Folge $(\sigma_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$ definiert und zusammen mit $\sigma_1^i := 1$ konstruieren wir daraus rekursiv für $m = 2, 3, \dots$ und $i = 1, \dots, d$

$$\sigma_m^i(\omega) = \inf\{\sigma_n^{i-1}(\omega) \mid \sigma_n^{i-1}(\omega) > \sigma_{m-1}^i \ \wedge \ |\xi^i_{\sigma_n^{i-1}} - \xi^i(\omega)| \le \frac{1}{m}\}.$$

Zum Schluss setzen wir $\sigma_m := \sigma_m^d$ auf $\{W < \infty\}$. Anhand der Konstruktion sehen wir, dass $(\xi_{\sigma_m(\omega)})_{m\in\mathbb{N}}$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$ komponentenweise gegen $\xi(\omega)$ konvergiert.

□

Lemma 4.11. $\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} \cap L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}$ *impliziert das* $\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} - L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ *eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von* $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ *ist.*
Bemerkung: Die Aussage gilt auch für $\hat{\mathcal{R}}$ *anstelle von* $\mathfrak{S}$*, da* $\hat{\mathcal{R}}$ *alle Bedingungen von* $\mathfrak{S}$ *oberhalb von Definition(*3.2*) erfüllt.*

Beweis. Es sei $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} - L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P, \mathbb{R}^d)$, die für $n \to \infty$ stochastisch gegen ein W in $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P, \mathbb{R}^d)$ konvergiert. Da die stochastische Konvergenz die P-f.s. Konvergenz bzgl. einer geeigneten Teilfolge impliziert, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $W_n \to W$ P-f.s. Wegen Eigenschaft (4) von $\mathfrak{S}$ existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in N_t^\perp \cap \mathfrak{S}_t$ und ein $U_n \in L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P, \mathbb{R}^d)$, so dass $W_n = \xi_n(X_t - X_{t-1}) - U_n$. Bei dieser Notation ist darauf zu achten, dass das n an dieser Stelle anders als sonst kein Zeitparameter ist.

Angenommen es gelte $\liminf_{n\to\infty} |\xi_n| < \infty$ P-f.s. Dann können wir Lemma(4.10) anwenden, was uns eine streng monoton steigenende Folge von $\mathbb{N}$-wertigen, $\mathfrak{F}_{t-1}-$messbaren Zufallsvariablen $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\xi \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P, \mathbb{R}^d)$ liefert, so dass $\xi_{\sigma_m(\omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi(\omega)$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$ gilt.

Daraus folgt

$$U_{\sigma_n} = \xi_{\sigma_n}(X_t - X_{t-1}) - W_{\sigma_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(X_t - X_{t-1}) - W =: U \text{ P-f.s.}$$

Nun behaupten wir $\sum_{k=1}^n \xi_k I_{\{\sigma_m = k\}} \in \mathfrak{S}_t$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Behauptung lässt sich per Induktion durch die Eigenschaften (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ beweisen. Im Induktionsanfang ist $\xi_1 I_{\{\sigma_m=1\}} \in \mathfrak{S}_t$, weil $I_{\{\sigma_m=1\}}$ $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbar ist. Im Induktionsschritt $(n \to n+1)$ gilt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k I_{\{\sigma_m=k\}} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\sigma_m=k\}} I_{\{\sigma_m \le n\}} + \xi_{n+1} I_{\{\sigma_m=n+1\}} I_{\{\sigma_m>n\}} \in \mathfrak{S}_t,$$

da $I_{\{\sigma_m=n+1\}} \cdot I_{\{\sigma_m>n\}}$ $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbar ist. Die Eigenschaft (3) von $\mathfrak{S}$ liefert uns schließlich $\xi_{\sigma_m} \in \mathfrak{S}_t$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und damit auch $\xi \in \mathfrak{S}_t$. Desweiteren ist $L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P, \mathbb{R}^d)$

abgeschlossen, weshalb U dort enthalten ist. Unter der Annahme $\liminf_{n\to\infty} |\xi_n| < \infty$ P-f.s. ist also

$$W = \xi(X_t - X_{t-1}) - U \in \mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} - L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P, \mathbb{R}^d).$$

Nun definieren wir $A := \{\liminf_{n\to\infty} |\xi_n| = \infty\} \in \mathfrak{F}_{t-1}$ und behaupten $P[A] = 0$. Um diese Behauptung zu beweisen definieren wir

$$\zeta_n := \begin{cases} \frac{\xi_n}{|\xi_n|}, \text{ falls } |\xi_n| > 0 \\ (1, 0, \dots, 0), \text{ sonst} \end{cases}.$$

Wegen $|\zeta_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir Lemma(4.10) erneut anwenden und erhalten eine streng monoton steigenende Folge von $\mathbb{N}$-wertigen, $\mathfrak{F}_{t-1}-$messbaren Zufallsvariablen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\zeta \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P, \mathbb{R}^d)$, so dass $\zeta_{\tau_m(\omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta(\omega)$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$ gilt. Mit der Konvergenz von $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt nun

$$0 \leq I_A \frac{U_{\tau_n}}{|\xi_{\tau_n}|} = I_A\big(\zeta_{\tau_n}(X_t - X_{t-1}) - \frac{W_{\tau_n}}{|\xi_{\tau_n}|}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I_A\zeta(X_t - X_{t-1}) \text{ P-f.s..}$$

Wegen $\liminf_{n\to\infty} |\xi_n| = \infty$ gibt es eine Teilfolge $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|\xi_{n_k}| \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} \zeta_{n_k} = \zeta$ P-f.s. auf A. Deshalb folgt aus Eigenschaft (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ bzw. Eigenschaft (3) von $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} I_A \cdot \zeta_{n_k} &= I_A \cdot \frac{\xi_{n_k}}{|\xi_{n_k}|} \in \mathfrak{S}_t \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \\ I_A \cdot \zeta &= \lim_{k\to\infty} I_A \cdot \zeta_{n_k} \in \mathfrak{S}_t. \end{aligned}$$

Da außerdem $L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ abgeschlossen in $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ ist, gilt

$$I_A\zeta(X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} \cap L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}.$$

Deshalb liegt $I_A\zeta$ in N_t.

Weil wir zu Beginn die ξ_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ so gewählt haben, dass sie in $N^\perp$ liegen gilt für jedes $\eta \in N_t$

$$\zeta_{\tau_n} \cdot \eta = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{\tau_n = k\}} \frac{1}{|\xi_k|} \xi_k \cdot \eta = 0 \qquad \text{P-f.s.}$$

Daher ist $\zeta_{\tau_n} \in N_t^\perp$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ der Fall ist, folgt $\zeta \in N_t^\perp$ aufgrund der Abgeschlossenheit von $N_t^\perp$ in $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ gemäß Bemerkung(3.1). Wegen der Invarianz unter der Multiplikation mit Funktionen aus $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ von $N^\perp$ und wegen $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$ ist $\zeta I_A \in N_t^\perp$. Nach Bemerkung(3.1) ist $\zeta I_A \in N_t^\perp \cap N_t = \{0\}$. Aber $|\zeta| = 1$ P-f.s., denn $|\zeta_n| = 1$ P-f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$. Also muss $P[A] = 0$ gelten.

□

Kreps-Yan Theorem 4.12. *Es sei $\mathcal{C}$ ein abgeschlossener, konvexer Kegel in L^1, so dass $-L^\infty_+ \subset \mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \cap L^1_+ = \{0\}$ gelte. Dann gibt es ein $Z \in L^\infty$ mit $Z > 0$ P-f.s. und $E[XZ] \leq 0$ für alle $X \in \mathcal{C}$.*

Beweis. Im 1. Schritt zeigen wir, für ein $c > 0$ und ein $Z \in L^\infty$ mit $E[YZ] \leq c$ für jedes $Y \in \mathcal{C}$ folgt bereits

$$E[YZ] \leq 0 \; \forall \; Y \in \mathcal{C} \;\; \wedge \;\; Z \geq 0 \text{ P-f.s.}$$

Angenommen es gibt ein $\tilde{Y} \in \mathcal{C}$ mit $E[\tilde{Y}Z] > 0$. $\mathcal{C}$ ist ein Kegel, daher gibt es ein $a \geq 0$ mit $a \cdot \tilde{Y} \in \mathcal{C}$ und $E[a \cdot \tilde{Y}Z] >$ c. Doch das ist ein Widerspruch.

Nach Voraussetzung ist $\hat{Y} := -I_{\{Z<0\}} \in \mathcal{C}$. Wegen $E[Z^-] = E[\hat{Y}Z] \leq 0$ ist $Z \geq 0$ P-f.s.

In einem 2. Schritt zeigen wir, dass es für jedes $Y \in L^1_+$ mit $Y \not\equiv 0$ ein $Z \in \mathcal{Z}$ mit $E[YZ] > 0$ gibt. Dabei sei

$$\mathcal{Z} := \{Z \in L^\infty \mid 0 \leq Z \leq 1 \wedge P[Z > 0] > 0 \wedge E[YZ] \leq 0 \; \forall \; Y \in \mathcal{C}\}.$$

Es sei nun $B := \{Y\}$ mit $B \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Da $\mathcal{C}$ nicht leer, konvex und abgeschlossen ist, sind die Voraussetzungen des Separationssatzes von Hahn-Banach erfüllt und weil L^∞ der Dualraum von L^1 ist, gibt es ein $Z \in L^\infty$ mit

$$\sup_{W \in \mathcal{C}} E[WZ] < E[YZ].$$

Da wir auch $Z/\|Z\|_\infty$ anstelle von Z nehmen könnten, dürfen wir ohne Einschränkungen der Allgemeinheit $\|Z\|_\infty \leq 1$ annehmen. Aus dem 1. Schritt folgt $Z \in \mathcal{Z}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{C} \cap L^1_+ = \{0\}$ und daher gilt $\sup_{W \in \mathcal{C}} E[WZ] = 0 < E[YZ]$. Dies gilt insbesondere für jedes $Y \in L^1_+$ mit $Y \not\equiv 0$.

Im 3. Schritt zeigen wir, dass für eine Folge positiver reeller Zahlen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^\infty a_k = 1$ und eine Folge $(Z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{Z}$ auch

$$\tilde{Z} := \sum_{k=1}^\infty a_k Z^{(k)} \in \mathcal{Z}$$

gilt. Aufgrund des 3. Schrittes ist für jedes $Y \in \mathcal{C}$

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k Z^{(k)} Y| \leq |Y| \in L^1.$$

Deshalb folgt

$$E[\tilde{Z}Y] = \sum_{k=1}^\infty a_k E[Z^{(k)}Y] \leq 0 \qquad \forall \; Y \in \mathcal{C}$$

aus dem Satz der dominierten Konvergenz von Lebesgue. Damit ist $\tilde{Z} \in \mathcal{Z}$ klar.

Im 4. Schritt sei $c := \sup\{P[Z > 0] \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ und wir wählen eine Folge $(Z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{Z}$ mit $P[Z^{(n)} > 0] \to c$ für $n \to \infty$. Aus Schritt drei folgt

$$Z^* = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} Z^{(n)} \in \mathcal{C},$$

was $P[Z^* > 0] \leq c$ impliziert. Außerdem gilt

$$\{Z^* > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z^{(n)} > 0\},$$

was uns $P[Z^* > 0] = \lim_{k\to\infty} P[\bigcup_{n=1}^{k} \{Z^{(n)} > 0\}] \geq c$ liefert.

Im letzten Schritt zeigen wir nun $Z^* > 0$ P-f.s. Angenommen das stimmt nicht, dann ist $Y^* := I_{\{Z^*=0\}} \in L^1_+$ und $Y^* \not\equiv 0$. Schritt zwei liefert uns ein $Z \in \mathcal{Z}$ mit $E[Y^* Z] > 0$. Dadurch ist $P[\{Z > 0\} \cap \{Z^* = 0\}] > 0$ und es folgt

$$P[0,5 \cdot (Z + Z^*) > 0] > P[Z^* > 0] = c$$

im Widerspruch zur Definition von c.

□

Lemma 4.13. *Falls $\overline{\mathfrak{S}}$ keine Arbitragemöglichkeiten beinhaltet und X P-integrierbar ist, so gibt es zu jedem $t \in \{1, \ldots, T\}$ ein $Z_t \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$, so dass $Z_t > 0$ P-f.s. und*

$$E[Z_t \xi_t (X_t - X_{t-1})] \leq 0 \text{ für alle } \xi \in \mathfrak{S}^\infty. \tag{4.4}$$

Beweis. Es sei $t \in \{1, \ldots, T\}$. Da es keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$ gibt, folgt aus Proposition(4.8)

$$\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} \cap L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}. \tag{4.5}$$

Konvergiert eine Folge in L^1 gegen eine Zufallsvariable, so konvergiert sie auch stochastisch dagegen und die Zufallsvariable liegt in L^1. Aus Lemma(4.11) folgt deshalb, dass

$$\mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}} := \left(\mathcal{K}_t^{\hat{\mathcal{R}}} - L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)\right) \cap L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$$

abgeschlossen in $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ ist. Desweiteren ist $\mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}}$ ein Kegel, weil $\hat{\mathcal{R}}_t$ ein Kegel ist. Nach Lemma(4.11) ist $\mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}}$ konvex. Außerdem ist $-L^\infty_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}}$ klar. Aus Zeile (4.5) und dem Lemma(4.9) folgt

$$\mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}} \cap L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) = \{0\}.$$

Somit sind die Voraussetzungen des Kreps-Yan Theorems(4.12) erfüllt. Damit existiert ein $Z_t \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$, so dass $Z_t > 0$ P-f.s. und $E[Z_t \cdot W] \leq 0$ für alle $W \in \mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}}$. Weil wir die P-Integrierbarkeit von X vorausgesetzt haben gilt

$$\{\xi_t (X_t - X_{t-1}) \mid \xi_t \in \mathfrak{S}_t^\infty\} \subseteq \mathcal{C}_t^{\hat{\mathcal{R}}}.$$

Daher gilt die Aussage (4.4). □

Das wesentliche Supremum einer Menge von Zufallsvariablen

Theorem 4.14. *Es sei Φ eine Menge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.*

(a) *Es gibt eine Zufallsvariable φ^* mit den folgenden zwei Eigenschaften.*
   (i) $\varphi^* \geq \varphi$ *P-f.s. für alle* $\varphi \in \Phi$.
   (ii) $\varphi^* \leq \psi$ *P-f.s. für jede Zufallsvariable* ψ *mit* $\psi \geq \varphi$ *P-f.s. für alle* $\varphi \in \Phi$.

(b) *Angenommen Φ sei aufwärts gerichtet,*
das heißt zu $\varphi, \tilde{\varphi} \in \Phi$ gibt es $\psi \in \Phi$ mit $\psi \geq \varphi \vee \tilde{\varphi}$.
Dann gibt es eine konvergente, monoton steigende Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Φ,
sodass $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ *P-f.s. gilt.*

Definition 4.15. *Die Zufallsvariable φ^* aus Theorem(4.14) heißt wesentliches Supremum von Φ bzgl. P und wir schreiben* $\operatorname*{esssup}\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi := \varphi^*$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass der Wertebreich jedes $\varphi \in \Phi$ im Intervall [0,1] liegt. Denn andernfalls könnten wir statt Φ die Menge $\tilde{\Phi} := \{f \circ \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ für eine streng monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ betrachten.

Für abzählbare Teilmengen $\Psi \subset \Phi$ sei $\varphi_\Psi(\omega) := \sup\limits_{\varphi\in\Psi} \varphi(\omega)$. Dann ist φ_Ψ messbar.

Wir behaupten nun, dass die obere Schranke

$$c := \sup\{E[\varphi_\Psi] \mid \Psi \subset \Phi \text{ abzählbar}\}$$

durch eine abzählbare Teilmenge $\Psi^* \subset \Phi$ angenommen wird. Um das zu zeigen nehmen wir uns eine Folge $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbarer Teilmengen mit $E[\varphi_{\Psi_n}] \to c$ für $n \to \infty$. Wir definieren $\Psi^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$. Dann ist Ψ^* als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar und $E[\varphi_{\Psi^*}] = c$.

Jetzt zeigen wir, dass $\varphi^* := \varphi_\Psi$ die Eigenschaften aus (a) erfüllt.

Angenommen das φ^* die Eigenschaft (i) nicht erfüllt, dann gibt es ein $\varphi \in \Phi$ mit $P[\varphi > \varphi^*] > 0$. Aber dann gilt für $\Psi' := \Psi^* \cup \{\varphi\}$

$$E[\varphi_{\Psi'}] > E[\varphi_{\Psi^*}],$$

was im Widerspruch zur Definition von c steht.

Jetzt nehmen wir an, es gibt eine Zufallsvariable ψ mit $\psi \geq \varphi$ P-f.s. für alle $\varphi \in \Phi$ und ein $A \in \mathfrak{F}$ mit $P[A] > 0$ und $\psi < \varphi^*$ P-f.s. auf A. Das impliziert $E[\varphi^* I_A] > E[\psi I_A]$. Doch dann muss es $\varphi \in \Phi$ geben, mit $\varphi > \psi$ P-f.s. auf A, was einen Widerspruch zur Annahme liefert.

Zum Schluss muss noch (b) gezeigt werden. Um eine geeignete Folge zu konstruieren nutzen wir aus, dass Ψ^* abzählbar ist. Das heißt wir können dessen Elemente durchnummerieren. Es sei $\Psi^* = \{\varphi_1^1, \varphi_2^2, \dots\}$. Wir starten eine Folge mit $\varphi_1 := \varphi_1^1$ und setzen sie durch

$$\varphi_k := \varphi_1^1 \vee \dots \vee \varphi_k^k, \qquad k = 2, 3, \dots$$

sukzessiv fort. Da Φ aufwärts gerichtet ist, liegt diese Folge in Φ und aus der Definition von φ^* folgt schließlich $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ P-f.s.

□

Bemerkung 4.16. *Es seien Φ eine Familie von Zufallsvariablen, X eine beliebige Zufallsvariable und Y eine positive Zufallsvariable, die jeweils auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definiert sind. Desweiteren gelte $Y \cdot \operatorname{esssup}_{\varphi\in\Phi} \varphi \geq 0$ P-f.s. Dann gilt:*

$$(a)\ Y \cdot \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi} \varphi = \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi}(\varphi \cdot Y) \qquad P\text{-}f.s.$$

$$(b)\ X + \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi} \varphi = \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi}(\varphi + X) \qquad P\text{-}f.s.$$

$$(c)\ X \vee \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi} \varphi = \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi}(\varphi \vee X) \qquad P\text{-}f.s.$$

Das folgt aus dem Theorem(4.14) (a), indem wir das Gegenteil annehmen und zum Widerspruch führen.

Theorem 4.17. *Es gibt genau dann keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$, wenn $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ eine nicht-leere Menge ist. In diesem Fall gibt es ein Maß $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ mit einer beschränkten Dichte $d\widetilde{P}/dP$.*

Beweis. Wir nehmen $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}} \neq \emptyset$ an und zeigen, dass dies Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$ impliziert

Es sei $\tilde{P}$ ein Maß in $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ und V der Werteprozess einer Handelsstrategie in $\overline{\mathfrak{S}}$, sodass $V_T \geq 0$ P-f.s. gelte. Das Lemma(4.5) liefert uns $V_t \geq 0$ P-f.s. für alle $t \in \{0, \dots, T\}$. Da V nach Voraussetzung ein lokales $\tilde{P}$-Supermartingal ist und weil dessen Negativteile $V_t^- \equiv 0$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ integrierbar sind, lässt sich die Proposition(4.4) anwenden. Somit ist V ein $\tilde{P}$-Supermartingal. Wegen $V_0 \geq \tilde{E}[V_T \mid \mathfrak{F}_0] = \tilde{E}[V_T]$ kann V nicht der Werteprozess einer Arbitragemöglichkeit sein, womit der erste Teil bewiesen ist.

Jetzt zeigen wir, dass Arbitragefreiheit in $\overline{\mathfrak{S}}$ die Existenz eines Maßes $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ mit beschränkter Dichte $\frac{d\tilde{P}}{dP}$ impliziert. Wir werden das gewünschte Maß induktiv konstruieren.

Zunächst können wir ohne Einschräkung $E[|X_s|] < \infty$ für alle $s \in \{0, \dots, T\}$ annehmen. Denn falls dies nicht gelten sollte, könnten wir durch

$$\frac{dP'}{dP} = c \cdot exp\big(-\sum_{s=1}^{T} |X_s|\big) \qquad \text{mit } c := E[exp\big(-\sum_{s=1}^{T} |X_s|\big)]^{-1}$$

ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P' mit beschränkter Dichte konstruieren, bzgl. dem X integrierbar ist. Falls nun ein zu P' äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$

mit beschränkter Dichte $\frac{d\tilde{P}}{dP'}$ existiert, so dass jeder Werteprozess einer Handelsstrategie aus $\overline{\mathfrak{S}}$ ein lokales $\tilde{P}$-Supermartingal ist, dann wäre $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ und $\frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{d\tilde{P}}{dP'} \cdot \frac{dP'}{dP}$ wäre ebenfalls beschränkt.

Dadurch sind die Voraussetzungen von Lemma(4.13) erfüllt und es gibt eine Zufallsvariable $Z_T \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_T, P; \mathbb{R}^d)$, so dass $Z_T > 0$ P-f.s. und $E[Z_T \xi_T (X_T - X_{T-1})] \leq 0$ für alle $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ gilt. Durch

$$\frac{d\tilde{P}_T}{dP} = \frac{Z_T}{E[Z_T]}$$

definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}_T$.

Für $t \in \{1, \ldots, T\}$ werden wir mit $\tilde{E}_t[\cdot]$ den Erwartungswert eines mit $\tilde{P}_t$ bezeichneten Maßes bezeichnen.

Wegen $\frac{d\tilde{P}_T}{dP} > 0$ P-f.s. ist $\tilde{P}_T$ äquivalent zu P. Da für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ $E[|X_t|] < \infty$ gilt, ist auch $\tilde{E}_T[|X_t|] = E[\frac{d\tilde{P}_T}{dP}|X_t|] < \infty$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$.

Wir behaupten

$$\tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}] \leq 0 \text{ für alle } \xi \in \mathfrak{S}^\infty. \tag{4.6}$$

Um dies zu zeigen betrachten wir die Menge

$$\Phi := \{\tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}] \mid \xi \in \mathfrak{S}^\infty\}$$

und zeigen, dass sie gemäß Theorem(4.14) aufwärts gerichtet ist.

Für $\xi, \tilde{\xi} \in \mathfrak{S}^\infty$ sei

$$A := \{\tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}] > \tilde{E}_T[\tilde{\xi}_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}]\}.$$

Definiere nun ξ' durch $\xi'_t := 0$ für $t < T$ und $\xi'_T := \xi_T I_A + \tilde{\xi}_T I_{A^c}$. Da $\mathfrak{S}$ predictable konvex ist, gilt $\xi' \in \mathfrak{S}$. Darüber hinaus gilt

$$\tilde{E}_T[\xi'_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}] = \tilde{E}_T[\tilde{\xi}_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}] \vee \tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}].$$

Also ist Φ aufwärts gerichtet und das Theorem(4.14) liefert uns die Existenz einer monoton steigenden, $\tilde{P}_T$-*f.s.* konvergenten Folge in Φ mit $\operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} \tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}]$ als Grenzwert. Das Theorem(4.14) (a) (i) und der Satz von der monotonen Konvergenz liefern uns daher

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_T[\operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} \tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}]] &= \sup_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} \tilde{E}_T[\tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}]] \\
&= \sup_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} \tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1})] \\
&= \sup_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} E[\xi_T(X_T - X_{T-1})\frac{Z_T}{E[Z_T]}] \\
&= \frac{1}{E[Z_T]} \sup_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} E[\xi_T(X_T - X_{T-1})Z_T] \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $0 \in \mathfrak{S}$ gilt schließlich $\operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} \tilde{E}_T[\xi_T(X_T - X_{T-1}) \mid \mathfrak{F}_{T-1}] = 0$ $\tilde{P}$-f.s. Daraus folgt die Behauptung(4.6).

Jetzt nehmen wir an, für ein beliebiges, festes $t \in \{1, \dots, T-1\}$ gibt es zu jedem $s \in \{t+1, \dots, T\}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}_s \sim P$ mit beschränkter Dichte $\frac{d\tilde{P}_s}{dP}$, so dass $\tilde{E}_s[|X_k|] < \infty$ für alle $k \in \{0, \dots, T\}$ und auch $\tilde{E}_s[\xi_k(X_k - X_{k-1}) \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \leq 0$ P-f.s. für alle $k \geq s$, $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ gilt.

Wir behaupten, dass es dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}_t \sim P$ mit $\tilde{E}_t[|X_k|] < \infty$ für alle $k \in \{0, \dots, T\}$ und mit $\frac{d\tilde{P}_t}{dP} < \infty$ gibt, so dass $\tilde{E}_t[\xi_k(X_k - X_{k-1}) \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \leq 0$ P-f.s. für alle $k \geq t$, $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ gilt.

Dazu verwenden wir erneut Lemma(4.13), aber diesmal mit $\tilde{P}_{t+1}$ anstelle von P und erhalten ein strikt positives $\tilde{Z}_t \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, \tilde{P}_{t+1}; \mathbb{R}^d)$ welches Zeile (4.4) mit $\tilde{E}_{t+1}[\cdot]$ anstelle von $E[\cdot]$ erfüllt. Wir verfahren nun wie bei der Konstruktion von $\tilde{P}_T$, indem wir $\tilde{P}_t$ durch

$$\frac{d\tilde{P}_t}{d\tilde{P}_{t+1}} = \frac{\tilde{Z}_t}{\tilde{E}_{t+1}[\tilde{Z}_t]}$$

definieren. Da diese Dichte echt größer null ist, gilt $\tilde{P}_t \sim \tilde{P}_{t+1} \sim P$. Wegen $\tilde{Z}_t \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, \tilde{P}_{t+1}; \mathbb{R}^d)$ hat $\tilde{P}_t$ eine beschränkte Dichte bzgl. $\tilde{P}_{t+1}$ und P. Daher ist $\tilde{E}_t[|X_s|] = E_t[\frac{d\tilde{P}_t}{d\tilde{P}_{t+1}} \frac{d\tilde{P}_{t+1}}{dP} |X_s|] < \infty$. Da die Dichte $\frac{d\tilde{P}_t}{d\tilde{P}_{t+1}}$ $\mathfrak{F}_t$-messbar ist, liefert uns der Satz von Bayes, dass P-f.s. für $k \geq t+1$ und $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_t[\xi_k(X_k - X_{k-1}) \mid \mathfrak{F}_{k-1}] &= \tilde{E}_t[\xi_k(X_k - X_{k-1}) \mid \mathfrak{F}_{k-1}]\Big(\frac{d\tilde{P}_t}{d\tilde{P}_{t+1}}\Big|_{\mathfrak{F}_k}\Big)\Big(\frac{d\tilde{P}_{t+1}}{d\tilde{P}_t}\Big|_{\mathfrak{F}_{k-1}}\Big) \\
&= \tilde{E}_t[\xi_k(X_k - X_{k-1})\Big(\frac{d\tilde{P}_t}{d\tilde{P}_{t+1}}\Big|_{\mathfrak{F}_k}\Big) \mid \mathfrak{F}_{k-1}]\Big(\frac{d\tilde{P}_{t+1}}{d\tilde{P}_t}\Big|_{\mathfrak{F}_{k-1}}\Big) \\
&= \tilde{E}_{t+1}[\xi_k(X_k - X_{k-1}) \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Analog zum Beweis der Behauptung (4.6) lässt sich $\tilde{E}_t[\xi_t(X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \leq 0$ für alle $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ zeigen.

Damit haben wir induktiv ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}_1 \sim P$ mit beschränkter Dichte $\frac{d\tilde{P}_t}{dP}$ konstruiert, bzgl. dem X integrierbar ist und so dass der Werteprozess zu jedem $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}$ mit $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ ein $\tilde{P}_1$-Supermartingal ist.

Es bleibt zu zeigen, dass der Werteprozess jeder zulässigen Handelsstrategie in $\overline{\mathfrak{S}}$ ein lokales $\tilde{P}_1$-Supermartingal ist.

Es sei also $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}$ und V dessen Werteprozess. Wir definieren

$$\tau_n := \inf\{t \in \mathbb{N}_0 : |\xi_{t+1}| \geq n \text{ P-f.s.}\} \wedge T.$$

Aufgrund der Vorhersehbarkeit von ξ ist $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten. Wegen $\xi_t \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ ist ξ_t P-f.s. endlich für alle $t \in \{1, \dots, T\}$. Folglich gilt $\tau_n \xrightarrow{n \to \infty} T$.

Da $\overline{\xi}$ selbstfinanzierend ist und wegen $I_{\{\tau_n<t\}}\xi_t^{\tau_n}(X_t^{\tau_n} - X_{t-1}^{\tau_n}) = 0$ gilt

$$V_t^{\tau_n} - V_{t-1}^{\tau_n} = \xi_t^{\tau_n}(X_t^{\tau_n} - X_{t-1}^{\tau_n}) = \xi_t I_{\{\tau_n \geq t\}}(X_t - X_{t-1})$$

für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Weil $\{\tau_n \geq t\} = \{\tau_n < t\}^c = (\bigcup_{i=1}^{t-1}\{\tau_n = i\})^c$ in $\mathfrak{F}_{t-1}$ liegt und wegen der Eigenschaften (1) und (2) von $\mathfrak{S}$, gilt $\xi_t I_{\{\tau_n \geq t\}} \in \mathfrak{S}_t^\infty$. Darum gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \{1, \dots, T\}$:

$$\tilde{E}_1[V_t^{\tau_n} - V_{t-1}^{\tau_n} \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = \tilde{E}_1[\xi_t I_{\{\tau_n \geq t\}}(X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \leq 0.$$

Da $V_t^{\tau_n}$ $\mathfrak{F}_t$-messbar und $\tilde{E}_1[|V_t^{\tau_n}|] < \infty$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir gezeigt, dass V ein lokales $\tilde{P}_1$-Supermartingal ist. Also ist $\tilde{P}_1 \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$.

$\square$

5 Die uniform Doob decomposition

Das Ziel dieses Kapitels ist die Charakterisierung der nicht negativen adaptierten Prozesse U der Form

$$U_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) - B_t \tag{5.1}$$

für $t \in \{0, \dots, T\}$, einem $\xi \in \mathfrak{S}$ und einem adaptierten aufsteigenden Prozess B mit $B_0 = 0$. Diese Zerlegung von U wird uniform Doob decomposition genannt und dient als Grundlage für die Suche nach der Existenz einer zulässigen Superhedge Strategie mit möglichst kleinem Werteprozess, der wir im nächsten Kapitel nachgehen.

In einem arbitragefreien Finanzmarktmodell ohne restringierte Handelsstrategien besitzt der Prozess U genau dann eine Zerlegung wie in (5.1) mit $\overline{\mathfrak{S}}$ als Menge aller selbstfinanzierender Handelsstrategien, wenn U bezüglich jedem $P^* \in \mathcal{P}$ ein Supermartingal ist.

In einem Finanzmarktmodell mit restringierten Handelsstrategien könnte man vermuten, dass dies auch so für $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ anstelle von $\mathcal{P}$ funktioniert. Immerhin ist ein Prozess U mit einer Zerlegung wie in (5.1) bezüglich jedem $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ ein lokales Supermartingal. Das liegt nämlich an der lokalen Supermartingaleigenschaft des Werteprozesses eines $\xi \in \mathfrak{S}$ mit Anfangskapital U_0. Diese Vermutung wird allerdings durch das Beispiel(5.1) widerlegt.

Mithilfe der upper variation Prozesse für $\mathfrak{S}$ und der Klasse $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ gelangen wir in diesem Kapitel zu einer hinreichenden Bedingung für die Existenz der uniform Doob decomposition für nicht negative adaptierte Prozesse U innerhalb eines Finanzmarktmodells mit restringierten Handelsstrategien. Diese Bedingung ist in Theorem(5.9) aufgeführt.

Beispiel 5.1. *Wir betrachten ein Einperiodenmodell mit einem risikolosen Bond $S_0^0 \equiv S_1^0 \equiv 1$ und einem risky asset S^1. Wir nehmen an es gelte $S_0^1 \equiv 1$ und S_1^1 nimmt die Werte $S_1^1(\omega^-) = 0,5$ und $S_1^1(\omega^+) = 1,5$ mit $\Omega := \{\omega^-, \omega^+\}$ an. Wir nehmen ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω mit $P[\{\omega^-\}] = 1 - P[\{\omega^+\}] \in (0,1)$. Es sei $\mathfrak{S} = [0,1]$.*

Dann ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ genau dann in $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ enthalten, wenn $\tilde{P}[\{\omega^+\}] \in (0, \frac{1}{2}]$ gilt.

Für ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ und den Werteprozess V einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\overline{\xi}$ mit $\xi \in [0,1]$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\tilde{E}[V_1 - V_0 \mid \mathfrak{F}_0] &= \tilde{E}[V_1 - V_0] = \tilde{E}[\xi(X_1 - X_0)] = \tilde{E}[\xi(S_1^1 - 1)] \\ &= \tilde{P}[\{\omega^+\}] \cdot \xi \cdot 0,5 - \tilde{P}[\{\omega^-\}] \cdot \xi \cdot 0,5 \\ &= \tilde{P}[\{\omega^+\}] \cdot \xi \cdot 0,5 - (1 - \tilde{P}[\{\omega^+\}]) \cdot \xi \cdot 0,5 \\ &= \xi(-0,5 + \tilde{P}[\{\omega^+\}])\end{aligned}$$

und

$$\tilde{E}[V_1 - V_0 \mid \mathfrak{F}_0] \leq 0 \Leftrightarrow \tilde{P}[\{\omega^+\} \leq 0,5.$$

Außerdem ist $\tilde{P}$ genau dann äquivalent zu P, wenn $\tilde{P}[\{\omega^+\}] \in (0,1)$ ist.

Daher ist ein Prozess U mit Anfangswert U_0 definiert durch $U_1(\omega^-) := 0$ und $U_1(\omega^+) := 2U_0$ bezüglich jedem $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ ein nicht negatives Supermartingal.

Falls U wie in Gleichung (5.1) zerlegbar ist, so gilt

$$2U_0 = U_1(\omega^+) = U_0 + \xi \cdot (S_1^1(\omega^+) - S_0^1(\omega^+)) - B_1(\omega^+) \leq U_0 + 0,5 \cdot \xi$$

für einen monoton steigenden, adaptierten Prozess B mit $B_0 = 0$. Daraus folgt $U_0 \leq 0,5\xi$. Also besitzt U eine solche Zerlegung nicht, falls $U_0 > 0,5$ ist.

Der upper variation Prozess A^Q für $\mathfrak{S}$ bzgl. $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$

Definition 5.2. *Für ein bzgl. P absolut stetiges Maß Q ist der upper variation Prozess für $\mathfrak{S}$ ein aufsteigender Prozess A^Q, der durch*

$$A_0^Q := 0 \text{ und } A_{t+1}^Q - A_t^Q := \operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}} \left[\xi_{t+1} \cdot (E_Q[X_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t]) - X_t\right]$$

für $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ definiert ist.

Definition 5.3. *$\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ bezeichne die Menge aller zu P äquivalenten Maße Q, so dass:*

$$E_Q[A_T^Q] < \infty,$$
$$E_Q[|X_{t+1} - X_t| \mid \mathfrak{F}_t] < \infty \text{ P-f.s. für alle } t \in \{0, \ldots, T-1\}.$$

Beispiel 5.4. *Es seien a und b vorhersehbare, $\mathbb{R}^d$-wertige, P-f.s. beschränkte Prozesse auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit*

$$a_t \leq 0 \leq b_t \text{ P-f.s. für alle } t \in \{1, \ldots, T-1\}$$

und $\mathfrak{S}$ sei die Menge aller vorhersehbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozesse ξ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit $a_t \leq \xi_t \leq b_t$ P-f.s. für alle $t \in \{1, \ldots, T\}$. Nehmen wir außerdem $E[|X_{t+1} - X_t|] < \infty$ P-f.s. an, dann erfüllt $\mathfrak{S}$ die Bedingungen oberhalb von Definition(3.2) und jedes zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit

$$E_Q[|X_{t+1} - X_t|] < \infty \text{ P-f.s. für alle } t \in \{1, \ldots, T-1\}$$

liegt in $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$.

Das 0 in $\mathfrak{S}$ liegt ist klar. Aufgrund unserer Annahme ist die non-redundance Bedingung aus Bemerkung(3.3) erfüllt, was uns die Bedingung (4) liefert. $\mathfrak{S}$ ist predictable convex, denn für $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ und für einen vorhersehbaren, $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozess h mit $0 \leq h_t \leq 1$ gilt für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$:

$$a_t \cdot (h_t + (1 - h_t)) \leq h_t \cdot \xi_t + (1 - h_t) \cdot \eta_t \leq b_t \cdot (h_t + (1 - h_t)).$$

Für $t \in \{1, \dots, T\}$ und eine stochastisch konvergente Folge $(\xi_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{S}_t$ mit ξ_t als Grenzwert gibt es eine Teilfolge $(\xi_t^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_t(\omega) \le \xi_t^{n_k}(\omega) \le b_t(\omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a_t(\omega) \le \lim_{k\to\infty} \xi_t^{n_k}(\omega) = \xi_t(\omega) \le b_t(\omega)$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$.

Weil

$$\begin{aligned}&\operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}^\infty} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= b_{t+1}E_Q[X_{t+1} - X_t \mid \mathfrak{F}_t]^+ - a_{t+1}E_Q[X_{t+1} - X_t \mid \mathfrak{F}_t]^- \text{ P-f.s.}\end{aligned}$$

gilt und sowohl a als auch b P-f.s. beschränkt sind, ist

$$E[A_T^Q] = \sum_{t=0}^{T-1} E[\operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}^\infty} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t]] < \infty$$

und somit ist $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$.

Proposition 5.5. *Für den upper variation Prozess für $\mathfrak{S}$ eines zu P äquivalenten Maßes Q gilt*

$$A_{t+1}^Q - A_t^Q = \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}^\infty} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t].$$

Beweis. Um das zu zeigen, definieren wir

$$\begin{aligned}\Phi' &:= \{E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] : \xi \in \mathfrak{S}^\infty\},\\ \Phi &:= \{E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] : \xi \in \mathfrak{S}\}.\end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis der Behauptung (4.6) im Beweis von Theorem(4.17) lässt sich zeigen, dass Φ aufwärts gerichtet ist. Deshalb gibt es eine Folge $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{S}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} E_Q[\xi_{t+1}^n(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] =: \varphi^*,$$

wobei φ^* das wesentliche Supremum von Φ bezeichne. Mit $\varphi^{*\prime}$ bezeichnen wir das wesentliche Supremum von Φ'. Aufgrund der Eigenschaft (ii) des wesentlichen Supremums aus Theorem(4.14) gilt $\varphi^* \ge \varphi^{*\prime}$, denn für jedes $\psi \in \Phi'$ ist $\varphi^* \ge \psi$ P-f.s. Andererseits gilt $\varphi^{*\prime} \ge \varphi^*$, denn

$$\begin{aligned}&\varphi^{*\prime} \ge E_Q[\xi_{t+1}^n I_{\{|\xi_{t+1}^n| \le n\}} \cdot (X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\\ &\lim_{n\to\infty} E_Q[\xi_{t+1}^n(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = \lim_{n\to\infty} E_Q[\xi_{t+1}^n I_{\{|\xi_{t+1}^n| \le n\}}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = \varphi^*.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.6. *Da der Werteprozess einer beschränkten selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}$ unter einem Maß Q aus $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ ein Q-Supermartingal ist, gilt für alle $t \in \{0, \dots, T-1\}$.*

$$E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] \le 0$$

Deshalb erhalten wir aus Proposition(5.5) für $t \in \{0, \dots, T-1\}$:

$$A^Q_{t+1} - A^Q_t = \operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] \qquad \textit{für } Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}, \tag{5.2}$$

$$A^{\tilde{P}}_T = 0 \qquad \textit{für } \tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{S}} \subset \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}.$$

Proposition 5.7. *Falls $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ und V der Werteprozess einer Handelsstrategie aus $\overline{\mathfrak{S}}$ ist, dann ist $V - A^Q$ ein lokales Q-Supermartingal.*

Beweis. Es sei $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi) \in \overline{\mathfrak{S}}$ und V der zugehörige Werteprozess. Definiere

$$\tau_n(\omega) := \min(\{t \in \mathbb{N} : |\xi_{t+1}(\omega)| > n \vee E_Q[|X_{t+1} - X_t| \mid \mathfrak{F}_t](\omega) > n\}, T)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$. Es gilt $\lim_{n \to \infty} \tau_n = T$. Weil

$$|V^{\tau_n}_{t+1} - V^{\tau_n}_t| \le I_{\{\tau_n \ge t+1\}} \cdot |\xi_{t+1}| \cdot |X_{t+1} - X_t| \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q; \mathbb{R}^d)$$

für alle $t \in \{0, \dots, T-1\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liegt $V^{\tau_n}_t$ in $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q; \mathbb{R}^d)$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} E_Q[V^{\tau_n}_{t+1} - V^{\tau_n}_t \mid \mathfrak{F}_t] &= I_{\{\tau_n \ge t+1\}} \xi_{t+1} \cdot (E_Q[X_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t]) - X_t) \\ &\le (A^Q)^{\tau_n}_{t+1} - (A^Q)^{\tau_n}_t. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Vorhersehbarkeit von A^Q und der Adaptiertheit von V^{τ_n} impliziert das

$$\begin{aligned} E_Q[V^{\tau_n}_{t+1} - A^{Q\tau_n}_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] &= E_Q[V^{\tau_n}_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] - A^{Q\tau_n}_{t+1} \\ &\le E_Q[V^{\tau_n}_t \mid \mathfrak{F}_t] - A^{Q\tau_n}_t \\ &= V^{\tau_n}_t - A^{Q\tau_n}_t. \end{aligned}$$

Weil außerdem $A^{Q\tau_n}_t$, $V^{\tau_n}_t \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q; \mathbb{R}^d)$ für jedes $t \in \{0, \dots, T\}$ gilt, ist $V^{\tau_n} - A^{Q\tau_n}$ ein Q-Supermartingal.

□

Bemerkung 5.8. *Falls $\mathfrak{S}^\infty$ alle beschränkten, vorhersehbaren, $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozesse auf $\Omega, \mathfrak{F}, P$ enthält, so gilt $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}} = \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$.*

Beweis. Um das zu zeigen nehmen wir uns ein $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ und ein $t \in \{0, \dots, T-1\}$. Angenommen es gibt ein $A \in \mathfrak{F}$ mit $P[A] > 0$ und

$$\operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] > 0 \qquad \text{P-f.s. auf A.}$$

Dann gibt es ein $\tilde{\xi} \in \mathfrak{S}^\infty$ mit $E_Q[\tilde{\xi}_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] > 0$ P-f.s. auf A. Folglich ist

$$\lambda \cdot E_Q[\tilde{\xi}_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] > 0 \qquad \text{P-f.s. auf A}$$

für alle $\lambda > 0$, weil $\lambda \cdot \tilde{\xi}$ nach Voraussetzung ebenfalls in $\mathfrak{S}^\infty$ liegt. Dadurch ist

$$\operatorname*{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}^\infty} E_Q[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = \infty \qquad \text{P-f.s. auf A.}$$

Doch wegen $Q \in \mathcal{Q}_\mathfrak{S}$ ist dies nicht möglich und wir haben einen Widerspruch zur Annahme. Daher ist $A_T^Q \equiv 0$.

Nach Proposition(5.7) ist damit der Werteprozess jeder Handelsstrategie aus $\overline{\mathfrak{S}}$ ein lokales Q-Supermartingal.

In $\overline{\mathfrak{S}}$ gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, d\}$ eine Handelsstrategie ξ mit $\xi_t^i \equiv 1$ und $\xi_t^j \equiv 0$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ und $j \neq i$. Dabei ist X_t^i als Werteprozess dieser Handelsstrategie für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$ Q-integrierbar. Das liefert uns $Q \in \mathcal{P}_\mathfrak{S}$.

□

Existenz einer uniform Doob decomposition

Theorem 5.9. *Es gelte $\mathcal{P}_\mathfrak{S} \neq \emptyset$ und es sei U ein adaptierter Prozess mit $U_T \geq 0$ P-f.s. Dann ist äquivalent*

a) $U - A^Q$ ist für jedes $Q \in \mathcal{Q}_\mathfrak{S}$ ein Q-Supermartingal

b) Es gibt ein $\xi \in \mathfrak{S}$ und einen adaptierten, monoton steigenden Prozess B, mit $B_0 = 0$ und

$$U_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1}) - B_t \text{ P-f.s. für alle } t \in \{0, \ldots, T\}. \tag{5.4}$$

Beweis. $b) \Rightarrow a)$: Es sei $Q \in \mathcal{Q}_\mathfrak{S}$ und es sei $\overline{\xi}$ die selbstfinanzierende Handelsstrategie zu $\xi \in \mathfrak{S}$ mit Werteprozess V und Anfangskapital $V_0 = U_0$. Wegen Proposition(5.7) ist

$$M_t^Q := U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1}) - A_t^Q = V_t - A_t^Q, \qquad t = 0, \ldots, T$$

ein lokales Q-Supermartingal. Nach Voraussetzung und wegen $B_T \geq 0$, gilt

$$V_T = M_T^Q + A_T^Q \geq U_T \geq 0 \qquad \text{P-f.s.}$$

Dadurch ist Lemma(4.5) anwendbar. Folglich ist $M_t^Q \geq -A_t^Q$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$. Insbesondere ist M_t^Q für diese t durch $-A_t^Q$ nach unten beschränkt. Weil $Q \in \mathcal{Q}_\mathfrak{S}$ gilt, ist $E_Q[A_T^Q] < \infty$ und somit Proposition(4.4) anwendbar. Es folgt, dass M^Q ein Q-Supermartingal ist. Für jedes $t \in \{0, \ldots, T\}$ ist $B_t \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q; \mathbb{R}^d)$, denn

$$M_T^Q + A_T^Q \geq B_T \geq B_t \geq 0 \text{ P-f.s.}$$

Somit ist $M_t - B_t \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q; \mathbb{R}^d)$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$. Weil M ein Q-Supermartingal ist gilt für jedes $t \in \{0, \ldots, T\}$

$$E_Q[M_{t+1} - B_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] \leq E_Q[M_{t+1} - B_t \mid \mathfrak{F}_t] \leq M_t - B_t \qquad \text{P-f.s.}$$

Daher ist $M - B = U - A^Q$ ein Q-Supermartingal.

$a) \Rightarrow b)$: Es genügt zu zeigen, dass es ein $\xi \in \mathfrak{S}$ gibt, so dass für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$ eine positive Zufallsvariable R_t mit der Eigenschaft

$$U_t - U_{t-1} = \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) - R_t \in \mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$$

existiert. Dann nämlich können wir durch $B_0 = 0, B_1 = R_1$ und $B_{t+1} = R_{t+1} + B_t$ einen monoton steigenden, adaptierten Prozess B definieren, der die Gleichung (5.4) erfüllt.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass P in der Menge $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ liegt. Denn andernfalls könnte man P durch ein beliebiges äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß austauschen, ohne dass sich an der Formulierung des Problems etwas ändern würde. Der Grund dafür ist, dass P-fast sichere Eigenschaften auch $\tilde{P}$-fast sicher sind, falls P und $\tilde{P}$ zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße sein sollten.

Nach Aussage (5.3) ist $A_T^P \equiv 0$. Deshalb ist U nach Voraussetzung ein P-Supermartingal.

Wir nehmen nun an, es gelte

$$U_t - U_{t-1} \notin \mathcal{C}_t^{\mathfrak{S}} := \left(\mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}} - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d) \cap L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)\right) \tag{5.5}$$

und werden diese Annahme zum Widerspruch führen.

Nach Lemma(4.11) ist $\mathcal{C}_t^{\mathfrak{S}}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$. Der Separationssatz von Hahn-Banach liefert uns daher die Existenz einer Zufallsvariablen $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$, so dass

$$\alpha := \sup_{W \in \mathcal{C}_t^{\mathfrak{S}}} E[ZW] < E[Z(U_t - U_{t-1})] =: \beta < \infty. \tag{5.6}$$

Da $-\lambda I_{\{Z<0\}} \in \mathcal{C}_t^{\mathfrak{S}}$ für alle $\lambda \geq 0$ gilt, muss folglich $0 \leq -\lambda E[Z I_{\{Z<0\}}] \leq \alpha$ für alle $\lambda \geq 0$ gelten. Daher ist $Z \geq 0$ P-f.s.

Zunächst behaupten wir Z derart modifizieren zu können, dass Z nach unten durch ein $\epsilon > 0$ beschränkt ist und die Gleichung (5.6) erfüllt.

Zu einem $W \in \mathcal{C}_t^{\mathfrak{S}}$ erhalten wir ein $\xi_t(X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{K}_t^{\mathfrak{S}}$ mit P-integrierbarem Negativteil, das W dominiert. Für ein $c > 0$ gibt es zu einem $(\xi_t I_{\{|\xi_t| \leq c\}})_{t \in \{1,\ldots,T\}} \in \mathfrak{S}^\infty$ genau eine selbstfinanzierende, zulässige Handelsstrategie zum Anfangskapital null dessen Werteprozess ein Supermartingal ist. Zusammen mit dem Lemma von Fatou erhalten wir dadurch

$$E[W] \leq E[\xi_t(X_t - X_{t-1})] \leq \liminf_{c \to \infty} E[\xi_t(X_t - X_{t-1}) I_{\{|\xi_t| \leq c\}}] \leq 0. \tag{5.7}$$

Wir definieren $Z^\epsilon := \epsilon \cdot 1 + (1 - \epsilon) \cdot Z$ für ein $\epsilon \in (0, 1)$. Aufgrund der Zeilen (5.6) und (5.7) und wegen $\alpha \geq 0$ gilt dann für alle $W \in \mathcal{C}_t^{\mathfrak{S}}$:

$$\begin{aligned} &E[Z^\epsilon W] < 0 \;\Rightarrow\; E[Z^\epsilon W] \leq \alpha, \\ &E[Z^\epsilon W] \geq 0 \;\Rightarrow\; E[Z^\epsilon W] \leq (1 - \epsilon)^{-1} E[Z^\epsilon W] \leq E[ZW] \leq \alpha. \end{aligned}$$

Wegen $\alpha < E[Z(U_t - U_{t-1})]$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit

$$\alpha < (1-\epsilon)E[Z(U_t - U_{t-1})] + \epsilon E[U_t - U_{t-1}] = E[Z^\epsilon(U_t - U_{t-1})] < \infty.$$

Das beweist unsere Behauptung und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass Z durch ein $\epsilon > 0$ von unten beschränkt ist.

Für den nächsten Schritt bezeichnen wir $E[Z \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$ mit Z_{t-1} und definieren ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$\frac{dQ}{dP} := \frac{Z}{Z_{t-1}}.$$

Wir wollen zeigen, dass Q in der Menge $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ liegt. Da die P-Dichte von Q beschränkt und echt positiv ist und weil $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ gilt, erhalten wir für alle $s \in \{1, \ldots, T\}$:

$$E_Q[|X_s - X_{s-1}| \mid \mathfrak{F}_{s-1}] = E\big[\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathfrak{F}_s} \cdot |X_s - X_{s-1}| \mid \mathfrak{F}_{s-1}\big] \cdot \frac{dP}{dQ}\Big|_{\mathfrak{F}_{s-1}} < \infty \qquad \text{P-f.s.} \quad (5.8)$$

Wegen der $\mathfrak{F}_t$-Messbarkeit von $\frac{dQ}{dP}$ gilt

$$(\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathfrak{F}_s}) \cdot (\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathfrak{F}_{s-1}})^{-1} = 1$$

für $s > t$ und aufgrund der Projektivität der Bedingten Erwartung gilt für $s < t$:

$$(\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathfrak{F}_s}) = E[E[\frac{Z}{Z_{t-1}} \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \mid \mathfrak{F}_s] = 1.$$

Weil P in $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ liegt, gibt es zu $\xi \in \mathfrak{S}^\infty$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie zum Anfangskapital null mit einem Werteprozess V, der die lokale Supermartingaleigenschaft besitzt. Deshalb folgt durch Anwendung der Bayes-Formel, dass

$$E_Q[\xi_s(X_s - X_{s-1}) \mid \mathfrak{F}_{s-1}] = E[\xi_s(X_s - X_{s-1}) \mid \mathfrak{F}_{s-1}] = E[V_s - V_{s-1} \mid \mathfrak{F}_{s-1}] \leq 0 \quad (5.9)$$

für alle $s \neq t$ gilt. Genau wie im Beweis der Behauptung(4.6) im Beweis von Theorem(4.17) lässt sich zeigen, dass die Familie

$$\Phi := \{E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}] : \xi \in \mathfrak{S}\},$$

im Sinne von Theorem(4.14) aufwärts gerichtet ist. Dieses Theorem liefert uns eine monoton steigende, konvergente Folge aus Φ mit $\operatorname{esssup}_{\xi \in \mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$ als ihren Grenzwert. Das Theorem(4.14) (a) (i) und der Satz von der monotonen Konvergenz liefern uns daher

$$\begin{aligned}
&E_Q[Z_{t-1} \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \\
&= \sup_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[Z_{t-1} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \\
&= \sup_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) Z_{t-1} \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \\
&= \sup_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) Z_{t-1}] \\
&= \sup_{\xi\in\mathfrak{S}} E[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) Z] \\
&\leq \alpha.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Aus $Z_{t-1} \geq \epsilon$ P-f.s. und der Ungleichung (5.10) folgt nun

$$\begin{aligned}
E_Q[A_t^Q - A_{t-1}^Q] &= E_Q[\operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \\
&\leq E_Q[\frac{Z_{t-1}}{\epsilon} \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \leq \frac{\alpha}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Das zusammen mit der Ungleichung (5.9) und Proposition(5.5) impliziert

$$A_T^Q = \sum_{k=1}^{T} E_Q[\operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \leq \frac{\alpha}{\epsilon}.$$

Also ist $E_Q[A_T^Q] < \infty$. Weil außerdem die Bedingung (5.8) erfüllt ist, liegt Q in der Menge $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$.

Im letzten Schritt zeigen wir, dass $U - A^Q$ kein Q-Supermartingal sein kann. Hierzu nutzen wir erneut die Ungleichung (5.10) und erhalten

$$\begin{aligned}
E_Q[Z_{t-1} E_Q[U_t - U_{t-1} \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] &= E_Q[Z_{t-1}(U_t - U_{t-1})] \\
&= E[Z(U_t - U_{t-1})] = \beta \\
&> \alpha \\
&\geq E_Q[Z_{t-1} \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathfrak{S}} E_Q[\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}]] \\
&= E_Q[Z_{t-1}(A_t^Q - A_{t-1}^Q)].
\end{aligned}$$

Aber dann wäre $E_Q[U_t - U_{t-1} \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \leq A_t^Q - A_{t-1}^Q$ P-f.s. nicht möglich, wodurch $U - A^Q$ kein Q-Supermartingal sein könnte. Das liefert uns aufgrund der Voraussetzung einen Widerspruch zur Annahme (5.5).

$\square$

6 Die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope

Zu einem abdiskontierten Amerikanischen oder Europäischen Claim H suchen wir einen möglichst kleinen Prozess V zu dem es eine zulässige Superhedge Strategie für H gibt, dessen Werteprozess mit V übereinstimmt. Eine Superhedge Strategie ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie dessen Werteprozess den Amerikanischen abdiskontierten Claim dominiert.

Die uniform Doob decomposition motiviert uns adaptierte Prozesse U zu betrachten, so dass $U - A^Q$ für jedes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ ein Q-Supermartingal ist und so dass H durch U dominiert wird, das heißt $U_t \geq H_t$ für jedes $t \in \{0, \ldots, T\}$.

Nach Theorem(5.9) folgt dann die Existenz einer zulässigen Superhedge Strategie, dessen Werteprozess V die Ungleichung $V \geq U \geq H$ erfüllt. In diesem Kapitel nehmen wir an, dass $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}} \neq \emptyset$ gilt, damit ist insbesondere die Voraussetzung von Theorem(5.9) geschaffen, welches zwar in diesem Kapitel nicht weiter zum Tragen kommt, dafür aber im nächsten Kapitel in Kombination mit Theorem(6.14) die Grundlage des Beweises von Theorem(7.2) bildet.

Wenn wir nun ein festes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ betrachten, so ist der kleinste H dominierende Prozess U, so dass $U - A^Q$ ein Q-Supermartingal ist durch den Prozess $\tilde{U}^Q + A^Q$ gegeben, wobei $\tilde{U}^Q$ die Snell envelope von $H - A^Q$ bezeichnet. Dies zeigen wir in Proposition(6.4).

Deshalb liegt die Vermutung nahe, dass die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope von H der kleinste Prozess U ist, der H dominiert, so dass $U - A^Q$ für jedes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ ein Q-Supermartingal ist. Dies bestätigen wir in Theorem(6.14) für Amerikanische Claims und in Proposition(6.16) speziell für Europäische Claims.

Für den Beweis benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen. Durch Lemma(6.8) erhalten wir eine hinreichende Bedingung dafür, dass das pasting zweier Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ auch in $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ liegt. Diese Bedingung können wir in Lemma(6.10) nutzen um eine Stoppzeit zu konstruieren, bezüglich der das pasting stets in $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ enthalten ist, was uns eine Formel für die Snell envelope bzgl. des pastings liefert. Damit können wir Lemma(6.11) beweisen. Die Eigenschaften der dort konstruierten, gegen die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope konvergierenden Folge ermöglichen es uns die Rekursionsformel für die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope aus Proposition(6.13) zu beweisen. Durch diese Rekursionsformel erhalten wir schließlich den Beweis von Theorem(6.14). Durch Lemma(6.15) können wir die Aussage von Theorem(6.14) auf Europäische Claims übertragen.

Proposition 6.1. *Für eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$, eine reellwertige Zufallsvariable $Y \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$ und ein $t \in \{1, \ldots, T\}$ gilt:*

$$E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \mid \mathfrak{F}_t] = E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \mid \mathfrak{F}_\tau] \qquad Q\text{-f.s.}$$

Beweis. Es sei $A \in \mathfrak{F}_\tau$. Wegen $A \cap \{\tau = t\} \in \mathfrak{F}_t$ ist

$$E_Q[E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_A] = E_Q[E_Q[Y \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau=t\}} \cdot I_A] = E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \cdot I_A].$$

Wegen $E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau \leq s\}} = 0$ für $0 \leq s < t$ ist $E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau \leq s\}}$ $\mathfrak{F}_s$-messbar für jedes $s \in \{0, \dots, T\}$. Daraus folgt die $\mathfrak{F}_\tau$-Messbarkeit von $E_Q[Y \cdot I_{\{\tau=t\}} \mid \mathfrak{F}_t]$. □

Die Snell envelope

Definition 6.2. *Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ und einen adaptierten Prozess L mit $L_t \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ definieren wir den Prozess*

$$U_T^Q := L_T \text{ und } U_t := L_t \vee E_Q[U_{t+1}^Q \mid \mathfrak{F}_t], \qquad t = T-1, \dots, 0.$$

Der Prozess U^Q heißt Snell envelope von L bezüglich Q.

Proposition 6.3. *Die Snell envelope U^Q von L ist das kleinste Q-Supermartingal, das L dominiert. Das heißt, falls U ein weiteres L dominierendes Q-Supermartingal ist, dann gilt $U_t \geq U_t^Q \geq L_t$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$.*

Beweis. Wir beweisen die Proposition durch Induktion. Weil aus der Definition $U_{t-1}^Q \geq E_Q[U_t^Q \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$ für jedes $t \in \{1, \dots, T\}$ folgt, ist U^Q ein Q-Supermartingal. Für ein weiteres L dominierendes Q-Supermartingal U gilt $U_T \geq L_T = U_T^Q$. Mit der Induktionsvoraussetzung $U_t \geq U_t^Q$ für ein festes $t \in \{1, \dots, T\}$ erhalten wir für den Induktionsschritt $(t \to t-1)$

$$U_{t-1} \geq E_Q[U_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \geq E_Q[U_t^Q \mid \mathfrak{F}_{t-1}].$$

Durch die Voraussetzung gilt deshalb $U_{t-1} \geq L_t \vee E_Q[U_t^Q \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = U_{t-1}^Q$. □

An dieser Stelle wollen wir noch einmal an die in Abschnitt(2.3) eingeführten Schreibweisen erinnern.

$\mathcal{T}$ sei die Menge der $\mathbb{N}_0$-wertigen Stoppzeiten, deren Werte nicht größer sind als T. Außerdem seien

$$\mathcal{T}_t := \{\sigma \in \mathcal{T} \mid \sigma \geq t\},$$
$$\mathcal{T}_\tau := \{\sigma \in \mathcal{T} \mid \sigma \geq \tau\}.$$

Theorem 6.4. *Die Snell envelope U^Q von L bezüglich Q erfüllt für jedes $t \in \{0, \dots, T\}$ die Gleichung*

$$U_t^Q = \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q[L_\tau \mid \mathfrak{F}_t].$$

Beweis. Der Beweis steht in [1] unter Theorem 6.18. □

Die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope eines Amerikanischen Claims

Für abdiskontierte Amerikanische Claims H nehmen wir an, dass

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q[H_\tau - A^Q_\tau] < \infty \tag{6.1}$$

gilt. Es sei bemerkt, dass diese Bedingung erfüllt ist, falls H beschränkt ist.

Definition 6.5. *Es sei H ein abdiskontierter Amerikanischer Claim. Für ein $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ und $t \in \{0,\dots,T\}$ definieren wir*

$$\tilde{U}^Q_t := \operatorname*{esssup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} E_Q[H_\tau - A^Q_\tau \mid \mathcal{F}_t].$$

Nach Theorem(6.4) und aufgrund der Annahme (6.1) ist $\tilde{U}^Q$ die Snell envelope von $H - A^Q$ bezüglich Q. Desweiteren definieren wir

$$\tilde{U}^\uparrow_t := \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}}(A^Q_t + \tilde{U}^Q_t)$$

für $t \in \{0,\dots,T\}$. Den Prozess $\tilde{U}^\uparrow$ nennen wir upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope von H. Dessen Anfangswert ist durch

$$\tilde{U}^\uparrow_0 = \sup_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_Q[H_\tau - A^Q_\tau]$$

gegeben.

Proposition 6.6. *Es sei H ein abdiskontierter Amerikanischer Claim und $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$. Die Snell envelope von $H - A^Q$ bezüglich Q erfüllt zu jedem $\tau \in \mathcal{T}$ P-f.s. die Gleichung:*

$$\tilde{U}^Q_\tau = \operatorname*{esssup}_{\sigma\in\mathcal{T}_\tau} E_Q[H_\sigma - A^Q_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau].$$

Beweis. Die Bemerkung gilt aufrgund der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\tilde{U}^Q_\tau + A^Q_\tau &= \sum_{s=0}^{T} I_{\{\tau=s\}} \operatorname*{esssup}_{\sigma\in\mathcal{T}_s}(E_Q[H_\sigma - A^Q_\sigma \mid \mathcal{F}_s] + A^Q_s)\\
&= \sum_{s=0}^{T} \operatorname*{esssup}_{\sigma\in\mathcal{T}_s} E_Q[(H_\sigma - A^Q_\sigma + A^Q_s) I_{\{\tau=s\}} \mid \mathcal{F}_s]\\
&= \sum_{s=0}^{T} \operatorname*{esssup}_{\sigma\in\mathcal{T}_\tau} E_Q[(H_\sigma - A^Q_\sigma + A^Q_\tau) I_{\{\tau=s\}} \mid \mathcal{F}_\tau]\\
&= \operatorname*{esssup}_{\sigma\in\mathcal{T}_\tau} E_Q[H_\sigma - A^Q_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau] + A^Q_\tau.
\end{aligned}$$

Die erste und vierte Gleichung lässt sich durch die Bemerkung(4.16) (b) begründen.

Die zweite Gleichung erhalten wir durch Anwenden der Bemerkung(4.16) (a) mit $Y = I_{\{\tau=s\}}$ und $\Phi = \{E_Q[H_\sigma - A^Q_\sigma \mid \mathcal{F}_s] + A^Q_\tau : \sigma \in \mathcal{T}_s\}$. Wegen

$$I_{\{\tau=s\}} E_Q[H_\sigma - A^Q_\sigma + A^Q_\tau \mid \mathcal{F}_s] \geq 0 \text{ für } \sigma \equiv s$$

sind nämlich die Voraussetzungen zur Anwendung dieser Bemerkung erfüllt.

Zur Erklärung der dritten Gleichung benutzen wir zum einen die Proposition6.1 und zum anderen benutzen wir, dass

$$\operatorname*{esssup}_{\sigma \in \mathcal{T}_\tau \cup \mathcal{T}_s} E_Q[(H_\sigma - A_\sigma^Q + A_\tau^Q) I_{\{\tau = s\}} \mid \mathcal{F}_s] = \operatorname*{esssup}_{\sigma \in \mathcal{T}_\tau \cap \mathcal{T}_s} E_Q[(H_\sigma - A_\sigma^Q + A_\tau^Q) I_{\{\tau = s\}} \mid \mathcal{F}_s]$$

P-f.s. gilt. Um Letzteres zu zeigen, definieren wir zunächst $\tilde{\sigma} := \sigma I_{\{\tau=s\}} + (s \vee \tau) I_{\{\tau \neq s\}}$ für ein beliebiges $\sigma \in (\mathcal{T}_\tau \cup \mathcal{T}_s) \setminus (\mathcal{T}_\tau \cap \mathcal{T}_s)$. Daraus folgt schließlich $\tilde{\sigma} \in \mathcal{T}_\tau \cap \mathcal{T}_s$ und

$$E_Q[(H_\sigma - A_\sigma^Q + A_\tau^Q) I_{\{\tau = s\}} \mid \mathcal{F}_s] = E_Q[(H_{\tilde{\sigma}} - A_{\tilde{\sigma}}^Q + A_\tau^Q) I_{\{\tau = s\}} \mid \mathcal{F}_s] \qquad \text{P-f.s.}$$

□

Das pasting

Definition 6.7. *Das pasting zweier äquivalenter Wahrscheinlichkeitsmaße Q_1 und Q_2 in eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß*

$$\tilde{Q}[A] := E_{Q_1}[Q_2[A] \mid \mathfrak{F}_\tau], \qquad A \in \mathfrak{F}.$$

Der Satz von der Monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen und die Gleichung $\tilde{Q}[A] = E_{Q_1}[E_{Q_2}[I_A] \mid \mathfrak{F}_\tau]$ für $A \in \mathfrak{F}$ liefern uns, dass $\tilde{Q}$ tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

In Lemma 6.40 aus [1] wird gezeigt, dass für Stoppzeiten σ und $\mathfrak{F}_T$-messbare, positive Zufallsvariablen Y

$$E_{\tilde{Q}}[Y \mid \mathfrak{F}_\sigma] = E_{Q_1}[E_{Q_2}[Y \mid \mathfrak{F}_{\tau \vee \sigma}] \mid \mathfrak{F}_\sigma] \tag{6.2}$$

gilt.

Lemma 6.8. *Es seien $\tau \in \mathcal{T}$, Q_1, $Q_2 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ und $\tilde{Q}$ sei das pasting von Q_1 und Q_2 in τ. Dann gilt $E_{\tilde{Q}}[|X_{t+1} - X_t| \mid \mathfrak{F}_t] < \infty$ P-f.s. und der upper variation prozess für $\mathfrak{S}$ und $\tilde{Q}$ ist durch*

$$A_t^{\tilde{Q}} = A_{t \wedge \tau}^{Q_1} + (A_t^{Q_2} - A_\tau^{Q_2}) \cdot I_{\{\tau < t\}}$$

gegeben. Desweiteren liegt $\tilde{Q}$ in der Menge $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$\left. \frac{dQ_2}{dQ_1} \right|_{\mathfrak{F}_t} \geq \epsilon \qquad \text{P-f.s. auf } \{\tau < T\} \tag{6.3}$$

gilt.

Beweis. Wir betrachten die Gleichung (6.2) mit $\sigma \equiv t$ und $Y = |X_{t+1} - X_t|$. Wir zeigen zunächst, dass $|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau > t\}}$ $\mathfrak{F}_{\tau \vee t}$-messbar ist und dass

$$E_{Q_2}[|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau \leq t\}} \mid \mathfrak{F}_{\tau \vee t}] = E_{Q_2}[|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau \leq t\}} \mid \mathfrak{F}_t] \qquad \text{P-f.s.}$$

gilt.

Es ist $\{\tau > t\} \cap \{\tau \vee t \leq s\} = \{t < \tau \leq s\}$. Für $0 \leq s \leq t$ gilt $|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{t<\tau\leq s\}} = 0$ und für $t < s \leq T$ ist $|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{t<\tau\leq s\}}$ $\mathfrak{F}_s$-messbar.

Daraus folgt, dass $|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau>t\}}$ $\mathfrak{F}_{\tau\vee t}$-messbar ist.

Es ist $E_{Q_2}[|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau\leq t\}} \mid \mathfrak{F}_t]$ $\mathfrak{F}_{\tau\vee t}$-messbar und für jedes $A \in \mathfrak{F}_{\tau\vee t}$ ist $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$, wodurch

$$E_{Q_2}[I_A \cdot E_{Q_2}[|X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau\leq t\}} \mid \mathfrak{F}_t]] = E_{Q_2}[I_A \cdot |X_{t+1} - X_t| \cdot I_{\{\tau\leq t\}}]$$

gilt. Das war zu zeigen.

Jetzt nehmen wir noch die $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Eigenschaft hinzu und erhalten

$$\begin{aligned}E_{\tilde{Q}}[|X_{t+1} - X_t| \mid \mathfrak{F}_t] = E_{Q_1}&[|X_{t+1} - X_t| \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau>t\}}\\ &+ E_{Q_2}[|X_{t+1} - X_t| \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau\leq t\}} < \infty \text{ P-f.s.}\end{aligned}$$

Wir betrachten erneut die Gleichung (6.2) für $\sigma \equiv t$, einmal mit $Y = (\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t))^+$ und ein weiteres mal mit $Y = (\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t))^-$. Auf analoge Weise wie zuvor, aber diesmal unter Ausnutzung der Linearität der bedingten Erwartung, erhalten wir

$$\begin{aligned}E_{\tilde{Q}}[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = E_{Q_1}&[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau>t\}}\\ &+ E_{Q_2}[\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] \cdot I_{\{\tau\leq t\}} < \infty \text{ P-f.s.}\end{aligned}$$

Nehmen wir auf beiden Seiten der Gleichung das wesentliche Supremum über $\xi_{t+1} \in \mathfrak{S}^{\infty}_{t+1}$, so gelangen wir über die Zeile (5.2) zu

$$A^{\tilde{Q}}_{t+1} - A^{\tilde{Q}}_t = (A^{Q_1}_{t+1} - A^{Q_1}_t) \cdot I_{\{\tau>t\}} + (A^{Q_2}_{t+1} - A^{Q_2}_t) \cdot I_{\{\tau\leq t\}}. \tag{6.4}$$

Weil $(A^{Q_1}_{\tau\wedge(t+1)} - A^{Q_1}_{\tau\wedge t}) \cdot I_{\{\tau\leq t\}}$ gleich 0 ist, gilt

$$A^{Q_1}_{t+1} - A^{Q_1}_t \cdot I_{\{\tau>t\}} = (A^{Q_1}_{\tau\wedge(t+1)} - A^{Q_1}_{\tau\wedge t}). \tag{6.5}$$

Da wir statt $I_{\{\tau\leq t\}}$ auch $I_{\{\tau<t+1\}}$ oder $I_{\{\tau<t\}} + I_{\{\tau=t\}}$ schreiben können, erhalten wir

$$\begin{aligned}&(A^{Q_2}_{t+1} - A^{Q_2}_t) \cdot I_{\{\tau\leq t\}}\\ &= A^{Q_2}_{t+1} \cdot I_{\{\tau<t+1\}} - A^{Q_2}_t \cdot I_{\{\tau<t\}} - A^{Q_2}_t \cdot I_{\{\tau=t\}}\\ &= A^{Q_2}_{t+1} \cdot I_{\{\tau<t+1\}} - A^{Q_2}_t \cdot I_{\{\tau<t\}} - A^{Q_2}_\tau \cdot I_{\{\tau<t+1\}} + A^{Q_2}_\tau \cdot I_{\{\tau<t\}}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Setzen wir nun die Gleichungen (6.5) und (6.6) in (6.4) ein, so erhalten wir aufgrund der Eigenschaft

$$A^{\tilde{Q}}_t = \sum_{k=1}^{t} A^{\tilde{Q}}_k - A1^{\tilde{Q}}_{k-1} \qquad \text{P-f.s.}$$

eines upper variation Prozesses $A^{\tilde{Q}}$ die gewünschte Formel für $A^{\tilde{Q}}_t$.

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass $E_{\tilde{Q}}[A^{\tilde{Q}}_T] < \infty$ gilt, wenn $\tilde{Q}$ die Bedingung (6.3) erfüllt. Es bezeichne Z_t die Q_1-Dichte von Q_2 auf $\mathfrak{F}_t$. Unsere Formel für $A_T^{\tilde{Q}}$, die Gleichung (6.2) mit $\sigma \equiv 0$, die Bayes-Formel und die Bedingung (6.3) liefern uns

$$\begin{aligned}
E_{\tilde{Q}}[A_T^{\tilde{Q}}] &= E_{\tilde{Q}}[A_\tau^{Q_1} + A_T^{Q_2} - A_\tau^{Q_2}] \\
&= E_{Q_1}[E_{Q_2}[A_\tau^{Q_1} + A_T^{Q_2} - A_\tau^{Q_2} \mid \mathfrak{F}_\tau]] \\
&= E_{Q_1}[A_\tau^{Q_1} + E_{Q_2}[A_T^{Q_2} - A_\tau^{Q_2} \mid \mathfrak{F}_\tau]] \\
&= E_{Q_1}[A_\tau^{Q_1}] + E_{Q_1}[\frac{1}{Z_\tau} E_{Q_1}[(A_T^{Q_2} - A_\tau^{Q_2}) \cdot Z_T \mid \mathfrak{F}_\tau]] \\
&\leq E_{Q_1}[A_\tau^{Q_1}] + \frac{1}{\epsilon} E_{Q_1}[(A_T^{Q_2} - A_\tau^{Q_2}) \cdot Z_T] \\
&\leq E_{Q_1}[A_T^{Q_1}] + \frac{1}{\epsilon} E_{Q_2}[A_T^{Q_2}].
\end{aligned}$$

Da $A_T^{Q_2}$ Q_2-integrierbar und $\mathfrak{F}$-messbar ist, ist hier der Maßwechsel und die Anwendung der Bayesformel für die bedingte Erwartung möglich. In der letzten Ungleichung haben wir ausgenutzt, dass und A^{Q_2} positiv und monoton steigend ist. Da Q_1 und Q_2 in der Menge $\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ liegen, ist schließlich $E_{\tilde{Q}}[A_T^{\tilde{Q}}] < \infty$. □

Bemerkung 6.9. *Es seien $\rho, \tau \in \mathcal{T}$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ und $\tilde{Q}$ sei das pasting von Q_1 und Q_2 in τ. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
A_\rho^{\tilde{Q}} &= \sum_{t=1}^{T} A_t^{\tilde{Q}} I_{\{\rho=t\}} = \sum_{t=1}^{T} (A_{t\wedge\tau}^{Q_1} + (A_t^{Q_2} - A_\tau^{Q_2})) \cdot I_{\{\tau<t\}} \cdot I_{\{\rho=t\}} \\
&= \sum_{t=1}^{T} (A_{\rho\wedge\tau}^{Q_1} + (A_\rho^{Q_2} - A_\tau^{Q_2})) \cdot I_{\{\tau<\rho\}} \cdot I_{\{\rho=t\}} = A_{\rho\wedge\tau}^{Q_1} + (A_\rho^{Q_2} - A_\tau^{Q_2}) \cdot I_{\{\tau<\rho\}}.
\end{aligned}$$

Lemma 6.10. *Es seien Q_1, $Q_2 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$, $\epsilon > 0, \tau \in \mathcal{T}$ und $B \in \mathfrak{F}_\tau$, so dass $\frac{dQ_2}{dQ_1}\Big|_{\mathfrak{F}_\tau} \geq \epsilon$ P-f.s. auf B gelte. Es sei $\tilde{Q}$ das pasting von Q_1 und Q_2 in die Stoppzeit $\sigma := \tau I_B + T I_{B^c}$. Dann ist $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ und die Snell envelopes dieser drei Maße stehen in folgender Beziehung zueinander:*

$$\tilde{U}_\tau^{\tilde{Q}} + A_\tau^{\tilde{Q}} = (\tilde{U}_\tau^{Q_1} + A_\tau^{Q_1}) \cdot I_{B^c} + (\tilde{U}_\tau^{Q_2} + A_\tau^{Q_2}) \cdot I_B \qquad P\text{-f.s.}$$

Beweis. Wegen $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_\sigma$ gilt auch $\frac{dQ_2}{dQ_1}\Big|_{\mathfrak{F}_\sigma} \geq \epsilon$ P-f.s. auf B. Dabei ist σ so konstruiert, dass $B = \{\sigma < T\}$ gilt. Aus Lemma(6.8) folgt daher $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$. Für $A_\rho^{\tilde{Q}}$ mit $\rho \in \mathcal{T}_\tau$ können wir die Formel aus Bemerkung(6.9) anwenden:

$$\begin{aligned}
A_\rho^{\tilde{Q}} &= A_{\sigma\wedge\rho}^{Q_1}(I_B + I_{B^c}) + (A_\rho^{Q_2} - A_\sigma^{Q_2}) \cdot I_{\{\sigma<\rho\}} \\
&= A_\tau^{Q_1} I_B + A_\rho^{Q_1} I_{B^c} + A_\tau^{Q_1} I_{B^c} - A_\tau^{Q_1} I_{B^c} + (A_\rho)^{Q_2} - A_\sigma^{Q_2}) \cdot I_B \\
&= A_\tau^{Q_1} + (A_\rho^{Q_1} - A_\tau^{Q_1}) \cdot I_{B^c} + (A_\rho)^{Q_2} - A_\sigma^{Q_2}) \cdot I_B.
\end{aligned}$$

Durch die Gleichung (6.2) erhalten wir für eine Zufallsvariable Y

$$\begin{aligned} E_{\tilde{Q}}[Y \mid \mathfrak{F}_\tau] &= E_{Q_1}[E_{Q_2}[Y \mid \mathfrak{F}_{\tau\vee\sigma}] \mid \mathfrak{F}_\tau] \cdot (I_B + I_{B^c}) \\ &= E_{Q_1}[Y \mid \mathfrak{F}_\tau] \cdot I_{B^c} + E_{Q_2}[Y \mid \mathfrak{F}_\tau] \cdot I_B. \end{aligned}$$

Aufgrund dieser beiden Formeln gilt nun

$$\begin{aligned} &E_{\tilde{Q}}[H_\rho - A_\rho^{\tilde{Q}} \mid \mathfrak{F}_\tau] + A_\tau^{\tilde{Q}} \\ &= (E_{Q_1}[H_\rho - A_\rho^{Q_1} \mid \mathfrak{F}_\tau] + A_\tau^{\tilde{Q}}) \cdot I_{B^c} + (E_{Q_2}[H_\rho - A_\rho^{Q_2} \mid \mathfrak{F}_\tau] \mid \mathfrak{F}_\tau] + A_\tau^{\tilde{Q}}) \cdot I_B \\ &= (E_{Q_1}[H_\rho - A_\rho^{Q_1} \mid \mathfrak{F}_\tau] + A_\tau^{Q_1}) \cdot I_{B^c} + (E_{Q_2}[H_\rho - A_\rho^{Q_2} \mid \mathfrak{F}_\tau] \mid \mathfrak{F}_\tau] + A_\tau^{Q_2}) \cdot I_B. \end{aligned}$$

Für je zwei Stoppzeiten $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{T}_\tau$ ist auch $\rho_1 I_B + \rho_2 I_{B^c} \in \mathcal{T}_\tau$ und umgekehrt lässt sich jede Stoppzeit $\rho \in \mathcal{T}_\tau$ als Summe $\rho_1 I_B + \rho_2 I_{B^c}$ zweier Stoppzeiten $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{T}_\tau$ schreiben. Nehmen wir für $\rho = \rho_1 I_{B^c} + \rho_2 I_B$ auf beiden Seiten der Gleichung das wesentliche Supremum $\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathcal{T}_\tau}$ und kombinieren das mit Proposition(6.6), so erhalten wir

$$\tilde{U}_\tau^{\tilde{Q}} + A_\tau^{\tilde{Q}} = (\tilde{U}_\tau^{Q_1} + A_\tau^{Q_1}) \cdot I_{B^c} + (\tilde{U}_\tau^{Q_2} + A_\tau^{Q_2}) \cdot I_B \qquad \text{P-f.s.}$$

□

Lemma 6.11. *Es seien $Q_0 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$, $\tau \in \mathcal{T}$ und $\delta > 0$. Dann gibt es eine Menge $\Lambda_\delta \in \mathfrak{F}_\tau$, so dass $Q_0[\Lambda_\delta] \geq 1 - \delta$ und es gibt Maße $Q_k \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ mit $Q_k = Q_0$ auf $\mathfrak{F}_\tau$, so dass*

$$\tilde{U}_\tau^{Q_k} + A_\tau^{Q_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(\tilde{U}_\tau^Q + A_\tau^Q) = \tilde{U}_\tau^\uparrow \qquad \textit{P-f.s. auf } \Lambda_\delta.$$

Beweis. Es seien $\tau \in \mathcal{T}$, $\delta > 0$, $Q_0 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ und $(Q_n^0)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ mit $Q_0^0 = Q_0$.

Wir behaupten zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ existieren $Q_k \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ und $\Lambda_\delta^k \in \mathfrak{F}_\tau$, so dass $\Lambda_\delta^k \subset \Lambda_\delta^{k-1}$, $Q_0[\Lambda_\delta^k] \geq 1 - (1 - 2^{-k})\delta$ und

$$\tilde{U}_\tau^{Q_k} + A_\tau^{Q_k} = \max_{n\leq k}(\tilde{U}_\tau^{Q_n^0} + A_\tau^{Q_n^0}) \qquad \text{P-f.s. auf } \Lambda_\delta^k \tag{6.7}$$

gilt.

Die Behauptung beweisen wir durch Induktion. Für den Induktionsanfang $k = 0$ erfüllen $\Lambda_\delta^0 := \Omega$ und Q_0 die geforderten Bedingungen. Für den Induktionschritt $(k \to k+1)$ erfüllen also Q_k und Λ_δ^k die Induktionsvoraussetzung. Aufgrund der Äquivalenz der Maße Q_k und Q_{k+1}^n existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die Menge

$$D := \Big\{ \frac{dQ_{k+1}^0}{dQ_k} \Big\}\Big|_{\mathfrak{F}_\tau} \geq \epsilon \Big\} \in \mathfrak{F}_\tau$$

die Ungleichung $Q_0[D] \geq 1 - (1 - 2^{-(k+1)})\delta$ erfüllt. Dadurch gilt $Q_0[\Lambda_\delta^{k+1}] \geq 1 - (1 - 2^{-(k+1)})\delta$ für $\Lambda_\delta^{k+1} := \Lambda_\delta^k \cap D$. Jetzt definieren wir die Menge

$$B := \{\tilde{U}_\tau^{Q_{k+1}^0} + A_\tau^{Q_{k+1}^0} > \tilde{U}_\tau^{Q_k} + A_\tau^{Q_k}\} \cap D.$$

Q_{k+1} sei das pasting von Q_k und Q^0_{k+1} in die Stoppzeit $\sigma := \tau I_B + T I_{B^c}$. Nach Lemma(6.10) ist $Q_{k+1} \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{U}^{Q_{k+1}}_\tau + A^{Q_{k+1}}_\tau &= (\tilde{U}^{Q_k}_\tau + A^{Q_k}_\tau) \cdot I_{B^c} + (\tilde{U}^{Q^0_{k+1}}_\tau + A^{Q^0_{k+1}}_\tau) \cdot I_B && \text{P-f.s.} \\
&= (\tilde{U}^{Q_k}_\tau + A^{Q_k}_\tau) \vee (\tilde{U}^{Q^0_{k+1}}_\tau + A^{Q^0_{k+1}}_\tau) && \text{P-f.s. auf } D \\
&= \max_{n \le k+1} (\tilde{U}^{Q^0_n}_\tau + A^{Q^0_n}_\tau) && \text{P-f.s. auf } \Lambda^{k+1}_\delta.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Als nächstes zeigen wir, dass wir die Folge $(Q^0_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ so wählen können, dass

$$\lim_{n\to\infty} \max_{n \le k} (\tilde{U}^{Q^0_n}_\tau + A^{Q^0_n}_\tau) = \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}} (\tilde{U}^Q_\tau + A^Q_\tau) = \tilde{U}^{\uparrow}_\tau \qquad \text{P-f.s.} \tag{6.8}$$

gilt. Dazu betrachten wir die Menge $\Phi = \{\tilde{U}^Q_\tau + A^Q_\tau \mid Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}\}$. Der Beweis von Theorem(4.14) zeigt, dass es eine abzählbare Teilmenge $\Psi \subset \Phi$ mit $\operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Psi} \varphi = \operatorname*{esssup}_{\varphi\in\Phi} \varphi$ gibt. Deshalb können wir $(Q^0_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ so wählen, dass $\Psi = \{\tilde{U}^{Q^0_n}_\tau + A^{Q^0_n}_\tau \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ gilt. Diese Folge erfüllt die Gleichung (6.8). Dort können wir die Gleichung (6.7) einsetzen.

Nun definieren wir $\Lambda_\delta := \cap_{k\in\mathbb{N}_0} \Lambda^k_\delta$ und erhalten $Q_0[\Lambda_\delta] = \lim_{k\to\infty} Q_0[\Lambda^k_\delta] = 1 - \delta$.

Da Q_1 das pasting von Q_0 und Q^0_1 in die Stoppzeit σ ist, stimmt Q_1 mit Q_0 auf $\mathfrak{F}_\tau$ überein. Wir nehmen an, dass Q_k für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ für jedes $s \in \{0, \ldots, k\}$ mit jedem Q_s auf $\mathfrak{F}_\tau$ übereinstimmt. Da Q_{k+1} das pasting von Q_k und Q^0_{k+1} in die Stoppzeit σ ist, folgt für alle $A \in \mathfrak{F}_\sigma$

$$Q_{k+1}[A] = E_{Q^0_{k+1}}[Q_k[A] \mid \mathfrak{F}_\sigma] = Q_k[A].$$

Insgesamt gibt es also für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Übereinstimmung von Q_k mit Q_0 auf $\mathfrak{F}_\tau$. $\square$

Bemerkung 6.12. *Für ein $Q_0 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ bezeichne $\mathcal{Q}_t(Q_0)$ die Menge aller $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$, die mit Q_0 auf $\mathfrak{F}_t$ übereinstimmen. Für $\tau \equiv t$ gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\Lambda_\delta \in \mathfrak{F}$ mit $Q_0[\Lambda_\delta] = 1-\delta$ und eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{Q}_t(Q_0)$, so dass*

$$\tilde{U}^{Q_k}_t + A^{Q_k}_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q_0)} (\tilde{U}^Q_t + A^Q_t) = \tilde{U}^{\uparrow}_t \qquad \textit{P-f.s. auf } \Lambda_\delta$$

gilt. Dadaurch erhalten wir sogar

$$\operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q_0)} (\tilde{U}^Q_t + A^Q_t) = \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q_0)} (\tilde{U}^Q_t) + A^{Q_0}_t = \tilde{U}^{\uparrow}_t \qquad \textit{P-f.s.}$$

Denn angenommen für $A := \{ \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q_0)} (\tilde{U}^Q_\tau + A^Q_\tau) \neq \tilde{U}^{\uparrow}_\tau\} \in \mathfrak{F}$ gilt $P[A] > 0$, dann können wir δ so klein wählen, dass $P[A] + P[\Lambda_\delta] > 1$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch, da Λ_δ und A disjunkt sind.

Desweiteren ist klar, dass $A^Q_t = A^{Q_0}_t$ für jedes $Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)$ gilt. Da Q und Q_0 auf $\mathfrak{F}_t$ übereinstimmen, ist nämlich eine Version der bedingten Erwartung bzgl. Q und $\mathfrak{F}_t$ Q-f.s. identsch mit der bzgl. Q_0 und $\mathfrak{F}_t$.

Proposition 6.13. *Für ein festes $Q_0 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ sei $\mathcal{Q}_t(Q_0)$ die Menge aller $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$, die mit Q_0 auf $\mathfrak{F}_t$ übereinstimmen. Für die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope $\tilde{U}^{\uparrow}$ eines abdiskontierten Amerikanischen Claims H gilt die folgende Rekursionsformel:*

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0} = (H_t - A_t^{Q_0}) \vee \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)} E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t], \qquad t = 0, \dots, T-1.$$

Beweis. Es seien $Q_0 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ und $t \in \{0, \dots, T-1\}$. Dann gilt P-f.s.:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0} &= \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)} \tilde{U}_t^{Q} \\ &= \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)} \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q[H_\tau - A_\tau^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)} ((H_t - A_t^{Q}) \vee E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t]) \\ &= (H_t - A_t^{Q}) \vee \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)} E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t]. \end{aligned}$$

Aus der Bemerkung(6.12) folgt die erste Gleichung. Die dritte Gleichung folgt aus der Definition der Snell envelope und die letzte Gleichung erhalten wir durch die Bemerkung(4.16) (c) und weil $A_t^{Q_0}$ für jedes $Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)$ mit A_t^{Q} übereinstimmt.

Wegen der Gleichungskette und

$$\tilde{U}_{t+1}^{Q} \leq \operatorname*{esssup}_{\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} (\tilde{U}_{t+1}^{\tilde{Q}} + A_{t+1}^{\tilde{Q}}) - A_{t+1}^{Q} = \tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q}$$

gilt

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0} \leq (H_t - A_t^{Q_0}) \vee \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)} E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] \qquad \text{P-f.s.} \tag{6.9}$$

Wir wählen nun ein festes $Q \in \mathcal{Q}_t(Q_0)$. Für ein $\delta > 0$ liefert uns das lemma(6.11) eine Menge $\Lambda_\delta \in \mathfrak{F}_{t+1}$ mit $Q[\Lambda_\delta] \geq 1 - \delta$ und eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{Q}_{t+1}(Q)$, so dass $\tilde{U}_{t+1}^{Q_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q}$ P-f.s. auf Λ_δ. Da Q_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit Q auf $\mathfrak{F}_{t+1}$ übereinstimmt gilt P-f.s. auf Λ_δ:

$$\begin{aligned} E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] = \lim_{k \to \infty} E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{Q_k} \mid \mathfrak{F}_t] &= \lim_{k \to \infty} E_{Q_k}[\tilde{U}_{t+1}^{Q_k} \mid \mathfrak{F}_t] \\ &\leq \limsup_{k \to \infty} ((H_t - A_t^{Q_k}) \vee E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{Q_k} \mid \mathfrak{F}_t]) \\ &= \limsup_{k \to \infty} \tilde{U}_t^{Q_k} \leq \operatorname*{esssup}_{\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_{t+1}(Q)} \tilde{U}_t^{\tilde{Q}} \\ &\leq \operatorname*{esssup}_{\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_t(Q)} \tilde{U}_t^{\tilde{Q}} = \tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q} = \tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Satz von Lebesgue für bedingte Erwartungen wegen $|\tilde{U}_{t+1}^{Q_k}| \leq \tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q} \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Die dritte Gleichung folgt aus der Definition der Snell envelope und die dritte Ungleichung gilt wegen $\mathcal{Q}_{t+1}(Q) \subset \mathcal{Q}_t(Q)$.

Diese Kette an Gleichungen und Ungleichungen gilt sogar P-f.s., denn angenommen für $A := \{\nexists\ (Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}_{t+1}(Q) : \tilde{U}_{t+1}^{Q_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q}\}$ gilt $P[A] > 0$, dann könnte man δ so klein wählen, dass $P[A] + P[\Lambda_\delta] > 1$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch, da A und Λ_δ disjunkt sind. Weil außerdem $\tilde{U}_t^{\uparrow} \geq H_t$ gilt, erhalten wir

$$\operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q_0)} E_Q[\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] \vee (H_t - A_t^{Q_0}) \leq \tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0} \qquad \text{P-f.s.}$$

Mit der Ungleichung (6.9) ist die Proposition bewiesen. □

Theorem 6.14. *Die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$-Snell envelope eines abdiskontierten Amerikanischen Claims H ist der kleinste Prozess U, der H dominiert und für den gilt, dass für jedes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ der Prozess $U - A^Q$ ein Q-Supermartingal ist.*

Beweis. Für ein $Q_0 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ liefert die Proposition(6.13)

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0} \geq E_{Q_0}[\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q_0} \mid \mathfrak{F}_t] \vee (H_t - A_t^{Q_0}) \geq E_{Q_0}[\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow} - A_{t+1}^{Q_0} \mid \mathfrak{F}_t].$$

$\tilde{U}^{\uparrow} - A^{Q_0}$ ist ein Q_0-Supermartingal, denn für jedes $t \in \{0,\dots,T\}$ ist $\tilde{U}_t^{\uparrow} - A_t^{Q_0}$ außerdem $\mathfrak{F}_t$-messbar und Q_0-integrierbar. Desweiteren wird H von $\tilde{U}^{\uparrow}$ dominiert.

Es sei U ein weiterer Prozess, der H dominiert, so dass für jedes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ der Prozess $U - A^Q$ ein Q-Supermartingal ist. Wir wählen nun ein festes Q aus $\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$. Dann wird $H - A^Q$ von $U - A^Q$ dominiert. Weil gemäß Proposition(6.3) $\tilde{U}^Q$ das kleinste Q-Supermartingal ist, das $H - A^Q$ dominiert, folgt $U - A^Q \geq \tilde{U}^Q$. Also gilt $U \geq A^Q + \tilde{U}^Q$ für jedes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$. Aus Theorem(4.14) (a) (ii) folgt

$$U_t \geq \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(\tilde{U}_t^{Q} + A_t^{Q}) = \tilde{U}_t^{\uparrow} \qquad \text{P-f.s. für alle } t \in \{0,\dots,T\}.$$

□

Lemma 6.15. *Es sei τ^* eine Stoppzeit und H ein abdiskontierter Amerikanischer Claim, dessen Auszahlung gleich 0 ist falls er durch die gegebene Stoppzeit τ^* noch nicht ausgeübt wurde. Das heißt $H_t(\omega) = 0$, falls $t \neq \tau^*$. Dann ist die upper Snell envelope durch*

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} = I_{\{\tau^*\geq t\}} \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(E_Q[H_{\tau^*} - A_{\tau^*}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^{Q})$$

für $t \in \{0,\dots,T\}$ gegeben.

Beweis. Nach Definition ist

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} = \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}} \operatorname*{esssup}_{\tau\in\mathcal{T}_t}(E_Q[H_\tau - A_\tau^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^{Q}). \tag{6.10}$$

Auf $\{\tau^* < t\}$ ist $H_\tau \equiv 0$ und auf $\{\tau^* = t\}$ ist $H_\tau = H_\tau \cdot I_{\{\tau=\tau^*\}}$ für jede Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}_t$. Daher ist $\tau \equiv t$ die optimale Stoppzeit aus $\mathcal{T}_t$ in Gleichung (6.10) auf $\{\tau^* \leq t\}$. Damit ist gemeint, dass die Gleichung

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} \cdot I_{\{\tau^*\leq t\}} = I_{\{\tau^*=t\}} \cdot \operatorname*{esssup}_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(E_Q[H_{\tau^*} - A_{\tau^*}^{Q} \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^{Q})$$

gilt.

Wir wollen nun zeigen, dass $\tau \equiv \tau^*$ die optimale Stoppzeit aus $\mathcal{T}_t$ in Gleichung (6.10) auf $\{\tau^* > t\}$ ist.

Ein $\tilde{\sigma} \in \mathcal{T}_t$ mit $P[\tilde{\sigma} > \tau^*] > 0$ kann nicht die optimale Wahl einer Stoppzeit aus $\mathcal{T}_t$ in Gleichung (6.10) sein, denn dann wäre $\tau := \tilde{\sigma} \wedge \tau^*$ mindestens genau so gut, weil jeder Prozess A^Q mit $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ monoton steigend ist und $H_\tau = H_\tau \cdot I_{\{\tau=\tau^*\}}$ für jedes $\tau \in \mathcal{T}_t$ gilt.

Deshalb müssen wir nur noch den Fall ausschließen, dass es eine Stoppzeit $\sigma \in \mathcal{T}_t$ mit $\sigma \leq \tau^*$ auf $\{\tau^* > t\}$ und mit $P[\sigma < \tau^*] > 0$ gibt, so dass

$$\operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(E_Q[H_\sigma - A_\sigma^Q \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^Q) > \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(E_Q[H_{\tau^*} - A_{\tau^*}^Q \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^Q)$$

mit echt positiver Wahrscheinlichkeit auf $\{\tau^* > t\}$ gelten würde. In diesem Fall gäbe es ein $Q_1 \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$, so dass

$$E_{Q_1}[H_\sigma - A_\sigma^{Q_1} \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^{Q_1} > \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(E_Q[H_{\tau^*} - A_{\tau^*}^Q \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^Q) \tag{6.11}$$

mit echt positiver Wahrscheinlichkeit auf $\{\tau^* > t\}$ gilt. Um diesen Fall auszuschließen nehmen wir ein $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}$, ein $\epsilon > 0$ und definieren

$$B_\epsilon := \{ \frac{d\tilde{P}}{dQ_1}\bigg|_{\mathfrak{F}_\sigma} \geq \epsilon\}.$$

Es sei Q^ϵ das pasting von Q_1 und $\tilde{P}$ in die Stoppzeit $\tilde{\tau} := \sigma I_{B_\epsilon} + T I_{B_\epsilon^c}$. Nach Lemma(6.10) liegt Q^ϵ in der Menge $\mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}$ und wegen Lemma(6.8) gilt P-f.s. auf $\{\tau^* > t\}$:

$$\begin{aligned}
A_t^{Q^\epsilon} &= A_{t\wedge\tilde{\tau}}^{Q_1} + (A_t^{\tilde{P}} - A_{\tilde{\tau}}^{\tilde{P}}) \cdot I_{\{\tilde{\tau}<t\}} = A_t^{Q_1}, \\
A_\sigma^{Q^\epsilon} &= \sum_{s=t}^{T} A_s^{Q^\epsilon} I_{\{\sigma=s\}} = \sum_{s=t}^{T} A_s^{Q_1} I_{\{\sigma=s\}} = A_\sigma^{Q_1} \text{ und} \\
A_{\tau^*}^{Q^\epsilon} &= A_{\tau^*\wedge\tilde{\tau}}^{Q_1} I_{B_\epsilon^c} + A_{\tau^*\wedge\tilde{\tau}}^{Q_1} I_{B_\epsilon} = A_{\tau^*}^{Q_1} I_{B_\epsilon^c} + A_\sigma^{Q_1} I_{B_\epsilon}.
\end{aligned}$$

Auf $\{\tau^* > t\}$ ist $H_\sigma = H_\sigma I_{\{\sigma=\tau^*\}} \leq H_{\tau^*}$. Deshalb gilt

$$E_{Q_1}[H_\sigma - A_\sigma^{Q_1} \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^{Q_1} \leq E_{Q^\epsilon}[H_{\tau^*} - A_{\tau^*}^{Q^\epsilon} \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^{Q^\epsilon} \qquad \text{P-f.s. auf } \{\tau^* > t\} \cap B_\epsilon.$$

Lassen wir ϵ gegen 0 laufen, so kommt die Wahrscheinlichkeit $P[B_\epsilon]$ beliebig nahe an 1 heran, wodurch wir einen Widerspruch zur Gleichung (6.11) bekommen. Auf $\{\tau^* > t\}$ gilt daher:

$$\tilde{U}_t^\uparrow = \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{G}}}(E_Q[H_{\tau^*} - A_{\tau^*}^Q \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^Q).$$

□

Proposition 6.16. *Für einen abdiskontierten Europäischen Claim H mit* $\sup\limits_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} E_Q[H - A_T^Q] < \infty$ *hat dessen upper Snell envelope die Form*

$$\tilde{U}_t^{\uparrow} = \underset{Q\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}}{\text{esssup}}(E_Q[H - A_T^Q \mid \mathfrak{F}_t] + A_t^Q), \qquad t = 0, \ldots, T.$$

Beweis. Eine Anwendung von Lemma(6.15) mit $\tau^* \equiv T$ liefert uns den Beweis. □

7 Bewertung von Derivaten bei restringierten Handelsstrategien

Durch Amerikanische Claims stellen wir die Auszahlungsmöglichkeiten eines Derivates dar.

Wir betrachten einen abdiskontierten Amerikanischen Claim H der die Voraussetzung (6.1) erfüllt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn H beschränkt ist.

Wenn es keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$ gibt, wissen wir durch Theorem(5.9) und Theorem(6.14), dass die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope von H eine uniform Doob decomposition besitzt.

Dadurch können wir in Theorem(7.2) zeigen, dass die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope eines abdiskontierten Amerikanischen Claims, der Prozess des minimalen Preises ist, zu dem eine zulässige Superhedge Strategie finanziert werden kann. In anderen Worten ausgedrückt, ist das der Prozess des Preises mit dem sich der Verkäufer des Derivates vollständig gegen alle möglichen Forderungen des Käufers absichern kann. Man beachte, dass der Preis in Einheiten des numéraire Assets ausgedrückt ist.

Durch ein $Y \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ können wir die Gewinn- und Verlustmöglichkeiten eines Derivates darstellen, die sich je nach Szenario $\omega \in \Omega$ aus dessen Kosten und Auszahlungen bis zum Ende der Laufzeit T ergeben könnten. Wir bezeichnen Y als Profitfunktion.

Wir werden die convex risk measure einführen, um das Risiko eines Derivates anhand dessen Profitfunktion zu quantifizieren. Der Wert einer Profitfunktion unter einem convex risk measure lässt sich insbesondere als Kapitalbedarf interpretieren. Er gibt nämlich den Betrag an, um den wir die Profitfunktion erhöhen müssten, damit sie acceptable wird. Eine Profitfunktion ist acceptable, wenn sie bzgl. dieses risk measures kein Risiko beinhaltet.

Wir betrachten insbesondere das convex risk measure $\rho^{\mathfrak{S}}$ bezüglich dem eine Profitfunktion acceptable ist, wenn wir sie ohne zusätzliche Kosten durch eine zulässige selbstfinanzierende Handelsstrategie vollständig absichern können.

Das Korollar(7.15) ist eine Anwendung von Theorem(7.2). In dem Fall, dass unter den zulässigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien keine Arbitragemöglichkeiten existieren, gibt es eine Darstellung des convex risk measure $\rho^{\mathfrak{S}}$ durch eine penalty function auf $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$.

7.1 Die Kosten einer zulässigen Superhedge Strategie

Definition 7.1. *Es sei H ein abdiskontierter Amerikanischer Claim. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}$ mit einem Werteprozess V, so dass*

$$V_t \geq H_t \qquad P\text{-f.s. für alle } t \in \{0, \ldots, T\}$$

heißt zulässige Superhedge Strategie für H.

Für einen abdiskontierten Amerikanischen Claim H bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H)$ die Menge aller $\mathfrak{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen $U_t \geq 0$ für die es $\eta \in \mathfrak{S}$ gibt, so dass

$$U_t + \sum_{k=t+1}^{u} \eta_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \geq H_u \qquad \forall\, u \geq t \text{ P-f.s.} \tag{7.1}$$

$\tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H)$ stellt die Menge aller Preise ausgedrückt in Einheiten des numéraire Assets dar, zu denen eine Superhedge Strategie für H zum Zeitpunkt t finanzierbar ist

Theorem 7.2. *Es gelte $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}} \neq \emptyset$ und es sei H ein abdiskontierter Amerikanischer Claim, für den*

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q[H_\tau - A_\tau^Q] < \infty.$$

gilt. Dann erhalten wir für die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope $\tilde{U}_t^{\uparrow}$ von H die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &(a)\ \tilde{U}_t^{\uparrow} \in \tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H), \\ &(b)\ \tilde{U}_t^{\uparrow} = essinf(\tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H)). \end{aligned}$$

Beweis. Die uniform Doob decomposition kombiniert mit Theorem(5.9) und Theorem(6.14) liefert uns einen adaptierten, monoton steigenden Prozess B und ein $\xi \in \mathfrak{S}$, so dass

$$\begin{aligned} \tilde{U}_u^{\uparrow} &= \tilde{U}_t^{\uparrow} + (\tilde{U}_u^{\uparrow} - \tilde{U}_t^{\uparrow}) \\ &= \tilde{U}_t^{\uparrow} + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + B_t - B_u \qquad \text{P-f.s. für } u \geq t \end{aligned}$$

gilt. Wegen $\tilde{U}^{\uparrow} \geq H$, ist $\tilde{U}_t^{\uparrow}$ in der Menge $\tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H)$ enthalten und Teil (a) ist gezeigt.

Aus Teil (a) folgt nun $\tilde{U}_t^{\uparrow} \geq$ essinf$(\tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H))$. Also genügt es uns $\tilde{U}_t^{\uparrow} \leq$ essinf$(\tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H))$ zu zeigen.

Wir nehmen uns ein $U_t \in \tilde{\mathcal{U}}_t^{\uparrow}(H)$ und wählen ein $\eta \in \mathfrak{S}$, das die Gleichung (7.1) erfüllt. Dann definieren wir $B := \{\tilde{U}_t^{\uparrow} \leq U_t\}$ und werden zeigen, dass P[B]=1 ist. Es sei

$$\hat{U}_t := \tilde{U}_t^{\uparrow} \wedge U_t = \tilde{U}_t^{\uparrow} \cdot I_B + U_t \cdot I_{B^c}.$$

Damit gilt $\hat{U}_t \leq \tilde{U}^{\uparrow}_t$. Es sei ξ der vorhersehbare Prozess aus der uniform Doob decomposition des P-Supermartingals $\tilde{U}^{\uparrow}$. Wir definieren uns

$$\hat{\xi}_s := \begin{cases} \xi_s & \text{falls } s \leq t \\ \xi_s \cdot I_B + \eta_s \cdot I_{B^c} & \text{falls } s > t \end{cases}$$

Aufgrund der Eigenschaften (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ gilt $\hat{\xi}_s \in \mathfrak{S}$ und $\hat{U}_t$ liegt in $\tilde{\mathcal{U}}^{\uparrow}_t(H)$, da $\hat{U}$ und $\hat{\xi}$ anstelle von U und η die Gleichung (7.1) erfüllt. Es sei

$$\hat{V}_s := \tilde{U}^{\uparrow}_0 + \sum_{k=1}^{s} \hat{\xi}_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \qquad s = 0, \ldots, T.$$

Dann ist

$$\hat{V}_s \geq I_B\big(\tilde{U}^{\uparrow}_0 + \sum_{k=1}^{s} \xi_k (X_k - X_{k-1})\big) + I_{B^c}\big(U^{\uparrow}_0 + \sum_{k=1}^{s} \eta_k (X_k - X_{k-1})\big) \geq H_s \geq 0$$

für alle $s \in \{0, \ldots, T\}$. Aufgrund von Proposition(5.7) und Proposition(4.4) ist $\hat{V} - A^Q$ ein Q-Supermartingal für jedes $Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{U}^{\uparrow}_t &= \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q[H_\tau - A^Q_\tau + A^Q_t \mid \mathfrak{F}_t] \\
&\leq \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q[\hat{U}_t + \sum_{k=t+1}^{\tau} \hat{\xi}_k \cdot (X_k - X_{k-1}) - A^Q_\tau + A^Q_t \mid \mathfrak{F}_t] \\
&= \operatorname*{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \big(\hat{U}_t + E_Q[\hat{V}_\tau - A^Q_\tau - (\hat{V}_t - A^Q_t) \mid \mathfrak{F}_t]\big) \\
&\leq \hat{U}_t.
\end{aligned}$$

Dabei können wir H_τ in der ersten Ungleichung aufgrund der Zeile (7.1) mit $\tau, \hat{U}_t$ und $\hat{\xi}_k$ anstelle von u, U_t und η_k nach oben hin abschätzen. $\square$

7.2 Das Risiko eines Derivates

Durch ein $Y \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ beschreiben wir die Gewinn und Verlustmöglichkeiten, die sich aus der Differenz des Verkaufspreises und den möglichen Forderungen des Käufers eines Derivates, je nach eintretendes Szenario $\omega \in \Omega$, ergeben können.

Definition 7.3. *Wir nennen ein $Y \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ Profitfunktion.*

risk measure

Definition 7.4. *Eine Abbildung $\rho : L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ heißt monetary risk measure, falls für alle $Y, Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und $m \in \mathbb{R}$ gilt:*

Monotonie: $Y \leq Z \Rightarrow \rho(Y) \geq \rho(Z)$,
cash invariance: $m \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(Y + m) = \rho(Y) - m$.

Ein monetary risk measure $\rho : L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ heißt convex risk measure, wenn es die Konvexitätsbedingung erfüllt. Das heißt für alle $Y, Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ gilt:

$$\rho(\lambda Y + (1-\lambda)Z) \leq \lambda\rho(Y) + (1-\lambda)\rho(Z) \qquad \text{für alle } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Bemerkung 7.5. *Ein monetary risk measure ρ dient dazu, das Risiko einer Profitfunktion Y zu quantifizieren. Je größer die Zahl $\rho(Y)$ ist, desto höher ist das Risiko.*

Die cash invariance garantiert, dass eine sichere Erhöhung des Profites Y auch eine Senkung des Risikos $\rho(Y)$ in gleicher Höhe herbeiführt. Mit sicher ist gemeint, das die Erhöhung unabhängig vom Szenario $\omega \in \Omega$ sein soll.

Die Monotonie Eigenschaft bedeutet, dass die Steigerung einer Profitfunktion eine Verringerung des Risikos bewirken kann, aber auf keinen Fall das Risiko erhöht.

Die Konvexitätsbedingung garantiert, dass eine Diversifikation von Profitfunktionen keine Erhöhung des Risikos verursacht.

Acceptance set $\mathcal{A}_\rho$ eines monetary risk measure ρ

Definition 7.6. *Eine Profitfunktion Y heißt acceptable bzgl. ρ, wenn $\rho(Y) \leq 0$ ist.*

Bemerkung 7.7. *Wegen $\rho(Y + \rho(Y)) = 0$ lässt sich $\rho(Y)$ als Kapitalbedarf interpretieren. Ist $\rho(Y)$ größer als null, so gibt ρ den Betrag an, um den Y auf sichere Weise erhöht werden muss, um bezüglich ρ acceptable zu sein. Mit sicher ist gemeint, das die Erhöhung unabhängig vom Szenario $\omega \in \Omega$ sein soll. Ist $\rho(Y)$ negativ, so ist Y bereits acceptable bzgl. ρ und $\rho(Y)$ ist der Betrag den man noch maximal abziehen könnte, sodass Y acceptable bleibt.*

Definition 7.8. *Ein monetary risk measure ρ induziert die Menge*

$$\mathcal{A}_\rho := \{Y \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R} \mid \rho(Y) \leq 0\}.$$

$\mathcal{A}_\rho$ ist die Menge aller Profitfunktionen die bezüglich ρ acceptable sind und wird acceptance set von ρ genannt.

Proposition 7.9. *Es sei ρ ein monetary risk measure mit acceptance set $\mathcal{A}_\rho$. Dann ist $\mathcal{A}_\rho$ genau dann konvex, wenn ρ ein convex risk measure ist.*

Beweis. $\mathcal{A}_\rho$ sei konvex. Für $\lambda \in [0,1]$, $Y, Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und $m, n \in \mathbb{R}$, so dass $m + Y, n + Z \in \mathcal{A}_\rho$ gilt, erhalten wir

$$0 \geq \lambda\rho(m+Y) + (1-\lambda)\rho(n+Z) \geq \rho(\lambda Y + (1-\lambda)Z) - (\lambda m + (1-\lambda)n).$$

Aus der cash invariance erhalten wir nach Umformung der zweiten Ungleichung die Konvexität von ρ.

Jetzt sei ρ konvex und wir zeigen, dass dann auch $\mathcal{A}_\rho$ konvex ist. Für $Y, Z \in \mathcal{A}_\rho$ und $\lambda \in [0,1]$ erhalten wir durch die Konvexität von ρ

$$0 \geq \lambda\rho(Y) + (1-\lambda)\rho(Z) \geq \rho(\lambda Y + (1-\lambda)Z).$$

Das liefert uns die Konvexität von $\mathcal{A}_\rho$. □

Das durch $\mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$ induzierte convex risk measure $\rho^{\mathfrak{S}}$

Wir suchen ein monetary risk measure bzgl. dem eine Profitfunktion acceptable ist, wenn sie ohne zusätzliche Kosten durch eine Handelsstrategie aus $\overline{\mathfrak{S}}$ abgesichert werden kann. Die Menge der acceptable Profitfunktionen soll also durch

$$\mathcal{A}^{\mathfrak{S}} := \{Y \in L^\infty \mid \exists\, \xi \in \mathfrak{S} : Y + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \text{ P-f.s.}\}$$

gegeben sein. Dazu nehmen wir an, dass

$$\inf\{m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}}\} > -\infty$$

gilt. Dadurch wird gewährleistet, dass

$$\rho^{\mathfrak{S}}(Y) := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + Y \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}}\}$$

eine Abbildung $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ definiert.

Proposition 7.10. *Die Abbildung $\rho^{\mathfrak{S}}$ ist ein convex risk measure und dessen acceptance set $\mathcal{A}_{\rho^{\mathfrak{S}}}$ entspricht der Menge $\mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$.*

Beweis. Um die Monotonie von $\rho^{\mathfrak{S}}$ zu zeigen, nehmen wir uns $Y_1, Y_2 \in L^\infty$ mit $Y_1 \leq Y_2$. Für jedes $n > \rho^{\mathfrak{S}}(Y_1) = inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + Y_1 \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}}\}$ gibt es ein $\xi \in \mathfrak{S}$, so dass

$$0 \leq Y_1 + n + \sum_{t=1}^{T} \xi_t (X_t - X_{t-1}) \leq Y_2 + n + \sum_{t=1}^{T} \xi_t (X_t - X_{t-1})$$

P-f.s. gilt. Folglich ist $\rho^{\mathfrak{S}}(Y_2) \leq \rho^{\mathfrak{S}}(Y_1)$.

Für den Beweis der cash invariance seien $m \in \mathbb{R}$, $Y \in L^\infty$. Dann gibt es zu jedem $n > \rho^{\mathfrak{S}}(Y)$ ein $\xi \in \mathfrak{S}$, so dass

$$Y + n + \sum_{t=1}^{T} \xi_t (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \qquad \text{P-f.s.}$$

und für jedes $n < \rho^{\mathfrak{S}}(Y)$ gibt es kein solches ξ.

Nur anders formuliert gibt es zu jedem $n > \rho^{\mathfrak{S}}(Y) - m$ ein $\xi \in \mathfrak{S}$, so dass

$$Y + m + n + \sum_{t=1}^{T} \xi_t (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \qquad \text{P-f.s.}$$

und für jedes $n < \rho^{\mathfrak{S}}(Y) - m$ existiert kein solches ξ. Deshalb ist $\rho^{\mathfrak{S}}(Y + m) = \rho^{\mathfrak{S}}(Y) - m$.

Als nächstes zeigen wir, dass $\mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$ konvex ist. Es seien $Y, Z \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Dann existieren $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$, so dass folgendes P-f.s. gilt:

$$\lambda Y + \sum_{t=1}^{T} \lambda \xi_t (X_t - X_{t-1}) \geq 0,$$

$$(1-\lambda) Z + \sum_{t=1}^{T} (1-\lambda) \eta_t (X_t - X_{t-1}) \geq 0,$$

$$\lambda Y + (1-\lambda) Z + \sum_{t=1}^{T} \big(\lambda \xi_t + (1-\lambda)\eta_t\big)(X_t - X_{t-1}) \geq 0.$$

Wegen der Bedingungen (1) und (2) von $\mathfrak{S}$ ist $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in \mathfrak{S}$. Folglich ist $\mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$ konvex. Weil

$$Y \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}} \Leftrightarrow inf\{m \in \mathbb{R} \mid Y + m \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}}\} \leq 0 \Leftrightarrow \rho^{\mathfrak{S}}(Y) \leq 0 \Leftrightarrow Y \in \mathcal{A}_{\rho^{\mathfrak{S}}}$$

gilt, sind die Mengen $\mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$ und $\mathcal{A}_{\rho^{\mathfrak{S}}} = \{Y \in L^\infty \mid \rho^{\mathfrak{S}} \leq 0\}$ identisch. Nach Proposition(7.9) ist $\rho^{\mathfrak{S}}$ ein convex risk measure. □

Bemerkung 7.11. *Falls $\mathfrak{S}$ keine Arbitragemöglichkeiten enthält, gilt $\rho^{\mathfrak{S}}(0) = 0$.*

Denn wäre $\rho^{\mathfrak{S}}(0) < 0$, dann gibt es ein $n > 0$ mit $-n \in \mathcal{A}^{\mathfrak{S}}$. Dann gibt es aber ein $\xi \in \mathfrak{S}$ mit einem Werteprozess V zum Anfanfangskapital null mit $V_T \geq n$ P-f.s., was nach Voraussetzung aber nicht sein kann. Wegen $0 \in \mathfrak{S}$ ist $\rho^{\mathfrak{S}}(0) > 0$ nicht möglich.

Darstellung der convex risk measures durch penalty functions

Zunächst bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{1,f}$ die Menge aller endlich additiven Mengenfunktionen $Q : \mathfrak{F} \to [0,1]$ mit $Q[\Omega] = 1$.

Proposition 7.12. *Durch ein Funktional $\alpha : \mathcal{M}_{1,f} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\inf_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} \alpha(Q) \in \mathbb{R}$ wird mit*

$$\rho(Y) := \sup_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \alpha(Q))$$

ein convex risk measure auf $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definiert.

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften des Erwartungswertes ist die Abbildung

$$X \mapsto E_Q[-X] - \alpha(Q)$$

ein konvexes, monotones und cash invariantes Funktional auf $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn man das Supremum über $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$ nimmt. □

Definition 7.13. *Das Funktional α aus Proposition(7.12) heißt penalty function für ρ auf $\mathcal{M}_{1,f}$. Wir sagen, dass ρ durch α auf $\mathcal{M}_{1,f}$ dargestellt wird.*

Theorem 7.14. *Durch* $\alpha^{min}(Q) := \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} (E_Q[-Y])$ *wird eine penalty function definiert und jedes convex risk measure* ρ *kann durch die penalty function* $\alpha^{min}(Q)$ *auf* $\mathcal{M}_{1,f}$ *dargestellt werden. Das heißt*

$$\rho(Y) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} (E_Q[-Y] - \alpha^{min}(Q)), \qquad \text{für alle } Y \in L^\infty.$$

Beweis. Ein Beweis steht in [1] unter Theorem 4.16. □

Unter bestimmten Bedingungen gibt es auch kleinere Klassen endlich additiver Mengenfunktionen als $\mathcal{M}_{1,f}$ auf denen ein convex risk measure dargestellt werden kann. Solche Bedingungen stehen zum Beispiel in [1] unter Theorem 4.33 oder Theorem4.43.
Unabhängig davon liefert uns das folgende Korollar ebenfalls Bedingungen unter denen $\rho^{\mathfrak{S}}$ durch eine penalty function auf einer kleineren Klasse endlich additiver Mengenfunktionen darstellbar ist.

Korollar 7.15. *Die Bedingungen* (*b*) *und* (*c*) *sind äquivalent und implizieren die Bedingung* (*a*). *Falls* $\rho^{\mathfrak{S}}(0) = 0$ *ist, sind auch* (*a*) *und* (*b*) *äquivalent.*

(*a*) *Für jedes nicht konstante und nicht negative* $Y \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *gilt für alle* $\lambda > 0$: $\rho^{\mathfrak{S}}(-\lambda \cdot Y) > \rho^{\mathfrak{S}}(0)$.

(*b*) $\overline{\mathfrak{S}}$ *enthält keine Arbitragemöglichkeiten*

(*c*) $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}} \neq \emptyset$.

Falls es keine Arbitragemöglichkeiten in $\overline{\mathfrak{S}}$ *gibt, so gilt die Gleichung*

$$\rho^{\mathfrak{S}}(Y) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} (E_Q[-Y] - E_Q[A_T^Q]) \tag{7.2}$$

für alle $Y \in L^\infty$. *Das bedeutet, dass sich* $\rho^{\mathfrak{S}}$ *durch die penalty function*

$$\alpha(Q) = \begin{cases} E_Q[A_T^Q] & \text{falls } Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen lässt.

Beweis. Die Äquivalenz von (*b*) und (*c*) ist in Theorem(4.17) gezeigt.

Als nächstes zeigen wir, dass aus (*c*) sowohl die Gleichung (7.2) als auch (*a*) folgt.

Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}$ und nach Zeile (5.3) gilt $A_T^{\tilde{P}} \equiv 0$. Daher ist $\alpha : \mathcal{M}_{1,f} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Funktional mit $\inf_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} E_Q[A_T^Q] = 0$.

Nach Proposition(7.12) definiert die rechte Seite der Gleichung (7.2) ein convex risk measure.

Deshalb genügt es, die Gleichheit für $Y \in L^\infty$ mit $Y \leq 0$ P-f.s. zu zeigen. Für jedes monetary risk measure ρ gibt es nämlich ein $c \geq 0$ mit $Y \leq c$ P-f.s. und $\rho(Y) = \rho(Y - c) - c$. Dadurch könnten wir sonst $Y - c$ betrachten.

$-Y$ ist ein Europäischer Claim und gemäß Proposition(6.16) ist $\sup_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} (E_Q[-Y] - E_Q[A_T^Q])$ der Anfangswert der upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope von $-Y$. Außerdem gilt

$$\rho^{\mathfrak{S}}(Y) = inf\{m \in \mathbb{R} \mid \exists\, \xi \in \mathfrak{S} : m + \sum_{t=1}^{T} \xi_t (X_t - X_{t-1}) \geq -Y \text{ P-f.s.}\} = \tilde{\mathcal{U}}_0^{\uparrow}(-Y).$$

Aus Theorem(7.2) folgt daher die Gleichung (7.2). Dadurch gilt

$$\rho^{\mathfrak{S}}(Y) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}} (E_Q[-Y] - E_Q[A_T^Q]) \geq \sup_{\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}} \tilde{E}[-Y]$$

und aufgrund von (b) ist $\rho^{\mathfrak{S}}(0) = 0$. Somit folgt $\rho^{\mathfrak{S}}(-\lambda \tilde{Y}) \geq \sup_{\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}} \tilde{E}[\lambda \tilde{Y}] > \rho^{\mathfrak{S}}(0)$ für jedes nicht konstante $\tilde{Y} \in L^{\infty}$ mit $\tilde{Y} \geq 0$ P-f.s. und jedes $\lambda > 0$.

Nun zeigen wir, unter der Bedingung $\rho^{\mathfrak{S}}(0) = 0$ folgt (b) aus (a). Angenommen $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{S}}$ ist eine Arbitragemöglichkeit mit Werteprozess V. Wegen $\rho^{\mathfrak{S}}(0) = 0$ ist $P[V_T > 0] \in (0,1)$. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ mit $P[V_T > \lambda] \in (0,1)$ und $I_{\{V_T > \lambda\}}$ ist weder konstant nocht negativ und liegt in L^{∞}. Wegen

$$-\lambda \cdot I_{\{V_T > \lambda\}} + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \geq 0 \qquad \text{P-f.s.}$$

ist $\rho^{\mathfrak{S}}(-\lambda \cdot Y) \leq 0 = \rho^{\mathfrak{S}}(0)$. Doch das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (a).

$\square$

8 Zusammenfassung

Durch einen Amerikanischen Claim stellen wir die Auszahlungsmöglichkeiten eines Derivates dar. Um Derivate in einem Finanzmarkt mit restringierten Handelsstrategien bewerten zu können, haben wir zunächst den Rahmen für ein Finanzmarktmodell mit restringierten Handelsstrategien durch die an bestimmte Bedingungen geknüpfte Menge $\mathfrak{S}$ geschaffen.

Dieser Modellrahmen ermöglicht uns eine Charakterisierung der Arbitragefreiheit unter allen zulässigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\overline{\mathfrak{S}}$, bei der die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes nicht notwendig ist. Ist die Arbitragefreiheit gewährleistet, so stellt die upper $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$-Snell envelope eines Amerikanischen Claims den Prozess des minimalen Preises dar, zudem eine zulässige Superhedge Strategie dieses Amerikanschen Claims finanzierbar ist. Desweiteren haben wir eine Rekursionsformel für diesen Prozess konstruiert.

Als Beispiele für restringierte Handelsstrategien haben wir Begrenzungen der short und long positions, sowie Beschränkungen der Kapitalinvestitionen modelliert.

Zuletzt haben wir durch das convex risk measure $\rho^{\mathfrak{S}}$ ein Maß für das Risiko eines Derivates konstruiert. Dabei stellen wir die Differenz aus Verkaufspreis und mögliche Forderungen des Käufers eines Derivates durch Zufallsvariablen aus $L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ dar, die wir Profitfunktionen nennen. Das convex risk measure $\rho^{\mathfrak{S}}$ gibt den Betrag an, um den man die Profitfunktion erhöhen müsste, damit sie vollständig und ohne zusätzliche Kosten durch eine zulässige Superhedge Strategie abgesichert werden kann. Dieser Betrag stellt das Risiko eines Derivates dar. Desweiteren haben wir eine Darstellung von $\rho^{\mathfrak{S}}$ durch eine penalty function auf der Menge $\mathcal{Q}_{\mathfrak{S}}$ geliefert.

Literaturverzeichnis

[1] Föllmer, Hans : *Stochastic Finance: an introduction in discrete time.* 2011, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/New York, dritte Auflage.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 14.05.2013