



Modellierung und Bewertung von Ausfallrisiken in freien Stromhandelssystemen

Diplomarbeit

eingereicht bei

PD Dr. Volkert Paulsen

Institut für Mathematische Statistik

Fachbereich Mathematik

von

Alexander Forstbach

Jüdefelderstraße 50, 48143 Münster

Studiengang Mathematik

Matrikel-Nr. 308910

Münster, den 27.04.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Strommärkte	3
2.1	Strommärkte	3
2.1.1	Terminmarkt	4
2.1.2	Spotmarkt	5
2.1.3	Regelenergiemarkt	6
3	Der Versicherungsvertrag	9
3.1	Ausfallrisiken	9
3.1.1	Wiedereindeckungsrisiko	9
3.1.2	Regelenergieerisiko	10
3.2	Ausgestaltung der Versicherung	10
3.2.1	Gegenstand der Versicherung	10
3.2.2	Zeitraum der Versicherung	11
3.2.3	Abdeckung des Wiedereindeckungsrisikos	11
3.2.4	Abdeckung des Regelenergieerisikos	12
3.3	Varianten der Versicherung	12
3.3.1	Swap	12
3.3.2	Summe europäischer Optionen	13
3.3.3	Asiatische Option	13
4	Mathematisches Modell der Versicherung	14
4.1	Modellierung des Ausfalls	14
4.1.1	Modellierung von Teilausfällen	15
4.2	Modellierung des Wiedereindeckungsrisikos	15
4.3	Modellierung der Regelenergiezahlungen	16
4.4	Zahlungen am Ende der Laufzeit	17
4.5	Modell der Versicherung	17
4.5.1	Swap	17
4.5.2	Summe europäischer Optionen	17
4.5.3	Asiatische Option	18
5	Bewertung in unvollständigen Märkten	19
5.1	Ein Modell für einen unvollständigen Markt	19
5.2	Unvollständigkeit der realen Märkte	22

INHALTSVERZEICHNIS

5.2.1	Strommarkt	22
5.2.2	Versicherungsmarkt	23
5.3	Bewertungstheorie für unvollständige Märkte	23
5.4	Bewertung über Nutzenfunktionen	24
5.4.1	Bestimmung des Bewertungsmaßes	25
5.5	Übergang zu Abstandsfunktionalen	29
5.5.1	Die relative Entropie	30
5.6	Relative Entropie und Erwartungsnutzen	35
5.6.1	Herleitung im Einperiodenmodell	36
5.7	Abstandsfunktionale und Nutzenfunktionen	38
6	Aktuarielle Bewertung	40
7	Der Preisprozess	42
7.1	Das Kluge-Modell	42
7.1.1	Zyklen im Strommarkt	43
7.1.2	Der Diffusions-Prozess	44
7.1.3	Der Spike-Prozess	46
7.1.4	Der kombinierte Prozess	50
7.2	Kalibrierung des Prozesses	50
7.2.1	Kleinste-Quadrate-Schätzung	51
7.2.2	Markov Chain Monte Carlo-Schätzung	52
8	Bewertung des Kontraktes	54
8.1	Marktteilnehmer und Nutzenfunktionen	54
8.2	Das risikoneutrale Kluge-Modell	56
8.2.1	Herleitung der risikoneutralen Dynamik	56
8.2.2	Kalibrierung des risikoneutralen Kluge Modells	61
8.3	Risikoneutrale Bewertung	62
8.3.1	Swap	63
8.3.2	Summe europäischer Optionen	63
8.3.3	Asiatische Option	63
9	Numerische Ergebnisse	64
9.1	Diskretisierung	64
9.2	Auswertung der Schätzung der realen Parameter	65
9.3	Aufteilung der Risikoprämie	67
9.4	Ermittlung der risikoneutralen Parameter	69

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

9.5	Bewertung mittels Monte Carlo-Simulation	71
10	Fazit	75
A	Kurze Herleitung einer Nutzenfunktion	79
B	Berechnung der Abstandsfunktionale	83

Abbildungsverzeichnis

1	Übersicht der verschiedenen Strommärkte	4
2	Darstellung einer Merit Order mit angedeuteter Nachfragekurve	6
3	Übersicht der vorgestellten Kontrakte	18
4	Stunden-Spotpreise der Jahre 2006 bis 2008	65
5	Geschätzte deterministische Entwicklung der Stundenpreise der Jahre 2006-2008	66
6	Output des MCMC-Algorithmus	68
7	Beispielpfad 1 unter Verwendung der geschätzten realen Pa- rameter	69
8	Beispielpfad 2 unter Verwendung der geschätzten realen Pa- rameter	70
9	Realisierte Werte der Monte Carlo-Simulation für Swap 1 . . .	73
10	Realisierte Werte der Monte Carlo-Simulation für die Summe aus europäischen Optionen	74

Tabellenverzeichnis

1	Ergebnis der Kleinste-Quadrate-Schätzung	66
2	Ergebnis der MCMC-Schätzung	67
3	Risikoneutrale Parameter	71
4	Kontraktspezifikationen	72
5	Berechnete Preise der Kontrakte	73

1 Einleitung

Geschäfte mit dem Gut Strom sind riskant. Zu den auf Finanzmärkten üblichen Risiken wie Kreditrisiken oder Kontrahentenrisiken treten beim Handel mit Strom Ausfallrisiken auf. Strom wird nicht wie andere Güter oder Finanztitel gekauft, gelagert und zu einem späteren Zeitpunkt wieder verkauft, sondern kann erst im Moment der Abnahme produziert werden. Auch kann Strom nicht auf Vorrat produziert werden und für Notfälle aufbewahrt werden. Gleichwohl wird Strom in großen Mengen schon lange vor der Produktion verkauft, sodass Abnehmer und Lieferzeitpunkt im Voraus feststehen. Fällt nun ein Kraftwerk aus, kann für den Stromlieferanten ein erheblicher Schaden entstehen.

Ende der neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts wurde von den Stadtwerken Cottbus ein kombiniertes Strom- und Heizkraftwerk in Betrieb genommen. Dieses Kraftwerk zeichnete sich durch eine innovative und besonders effiziente Technologie basierend auf der im Raum Cottbus üblichen Braunkohle aus. Die Stadtwerke Cottbus begannen den Strom aus zukünftiger Produktion mit Hilfe von Termingeschäften zu verkaufen, um langfristige und planbare Deckungsbeiträge zu erwirtschaften. Zum Problem wurde das Geschäftskonzept, da die innovative Technologie nicht ausgereift war, sodass häufige Ausfälle und die damit verbundenen Kosten die Stadtwerke im Jahr 2005 an den Rand der Insolvenz brachten.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie physische Stromlieferungen versichert werden können. Wir interessieren uns für das Risiko eines Kraftwerksausfalls für den Kraftwerksbetreiber. Bei einem Kraftwerksausfall übernimmt ein Versicherer die Stromlieferung des Versicherungsnehmers. Der Versicherer speist aus eigenen Kapazitäten den fehlenden Strom in das Netz ein, sodass der Kraftwerksausfall kompensiert wird. Die Bewertung eines solchen Kontrakts wird durch die Unvollständigkeit der betrachteten Märkte verkompliziert und bedarf einiger theoretischer Vorüberlegung. In dieser Arbeit soll ein Verfahren zur Bewertung einer physischen Kraftwerksversicherung vorgestellt werden.

Für einen Marktteilnehmer mit einem diversifizierten Kraftwerkspark kann das Anbieten einer physischen Versicherung attraktiv sein. Eine physische Versicherung bietet die Möglichkeit, Kapazitäten zu vermarkten, deren Grenzkosten der Produktion häufig über dem Marktpreis für Strom liegen. Solche Kraftwerke können am Spotmarkt nur unregelmäßig vermarktet werden. Eine physische Versicherung ermöglicht in diesen Fällen ein kontinuierliches Erwirtschaften von Deckungsbeiträgen.

Die Unvollständigkeit eines Versicherungsmarktes mit Strom als Underlying erhöht die Attraktivität einer Versicherungslösung für einen Anbieter. Als Versicherungsnehmer kommen üblicherweise kleine Marktteilnehmer mit geringen Kapazitäten in Betracht. Diese Marktteilnehmer weisen eine starke Risikoaversion auf und dadurch eine hohe Zahlungsbereitschaft für einen physischen Versicherungsvertrag. Die Bereitstellung von Kraftwerken für Versicherungszwecke kann so vorteilhafter für einen Anbieter sein, als die alternative Vermarktung auf dem Regelenenergiemarkt. Dort tritt der weit weniger risikoaverse Übertragungsnetzbetreiber als einziger Nachfrager auf.

Die verschiedenen Strommärkte wie Spot- und Regelenenergiemarkt werden in Kapitel 2 eingehend erläutert. Die Ausgestaltung und Modellierung der Versicherung wird in den Kapiteln 3 und 4 vorgenommen. Kapitel 5 behandelt die Bewertung in unvollständigen Märkten und die Auswahl eines Bewertungsmaßes. Kapitel 6 erläutert den Übergang von der Bewertungstheorie in allgemeinen Finanzmarktmodellen zur Bewertung in Strommärkten. In Kapitel 7 wird ein Modell für Stundenpreise für Strom vorgestellt und die Besonderheiten der Strompreisentwicklung erläutert. In Kapitel 8 wird die risikoneutrale Gestalt des Spotpreismodells ermittelt und die Bewertung der einzelnen Kontrakte behandelt. Kapitel 9 zeigt die numerischen Ergebnisse der Bewertung von physischen Stromkontrakten. In Kapitel 10 wird ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen der Arbeit gegeben.

2 Grundlagen der Strommärkte

In diesem Kapitel wollen wir auf die Besonderheiten der Strommärkte eingehen. Die Betrachtung der Strommärkte ist notwendig, da die physische Versicherung, die von uns modelliert wird, Strom als Underlying hat. Es bedarf folglich einer gründlichen Analyse der Strukturen des Strommarktes. Dazu gehört eine Betrachtung der Eigenschaften von Strom, der Spot- und Terminmärkte auf Strom und des Regelenenergiemarktes. Die Ausgestaltung des Versicherungskontrakts wird in Kapitel 3 vorgenommen. Die spezifischen Eigenschaften von Strom und die ökonomischen Besonderheiten von Strommärkten werden in [W], [BSK], [LS] und [FI] vertieft.

2.1 Strommärkte

Strom ist ein spezielles Gut. Die besonderen Eigenschaften umfassen eine nicht vorhandene Speicherbarkeit in ökonomisch bedeutenden Mengen. Des Weiteren ist Strom leitungsgebunden, homogen und nicht substituierbar. Diese Eigenschaften haben dazu geführt, dass Strom lange Zeit über monopolistische Strukturen erzeugt und an die Endkunden vertrieben wurde. In den letzten Jahrzehnten ist weltweit ein Übergang zu wettbewerblichen Strukturen politisch forciert worden, wobei einzig das Hochspannungsnetz als natürliches Monopol angesehen wird (vgl. [B]).

Der Handel mit Strom erfolgt in deregulierten Märkten über zwei unterschiedliche Systeme. Einerseits existieren Pool-Modelle wie der PJM-Pool (Pennsylvania-Jersey-Maryland) oder der australische Pool. In anderen Ländern hat man Power-Exchange-Modelle gewählt, die sich durch die Existenz einer Strombörse auszeichnen. Solche Strombörsen gibt es etwa in Deutschland (EEX in Leipzig) oder in Skandinavien (Nord-Pool). Wir werden unsere Versicherung für Systeme mit Strombörsen entwerfen, wobei wir implizit den deutschen Strommarkt als Grundlage nehmen. Eine Strombörse stellt innerhalb eines Strommarktes den Großhandelsmarkt dar. An den Strombörsen handeln Erzeuger und Weiterverteiler, etwa Stadtwerke, die den Strom an Endkunden im Rahmen von Versorgungsverträgen verkaufen. Weitere Marktteilnehmer sind große Industrieunternehmen mit hohem Strombedarf und finanzielle Spekulanten.

Der Stromhandel an einer Strombörse spielt sich auf drei unterschiedlichen Märkten ab: Terminmarkt, Spotmarkt und Regelenenergiemarkt. Die Märkte unterscheiden sich durch ihre jeweilige zeitliche Reichweite.

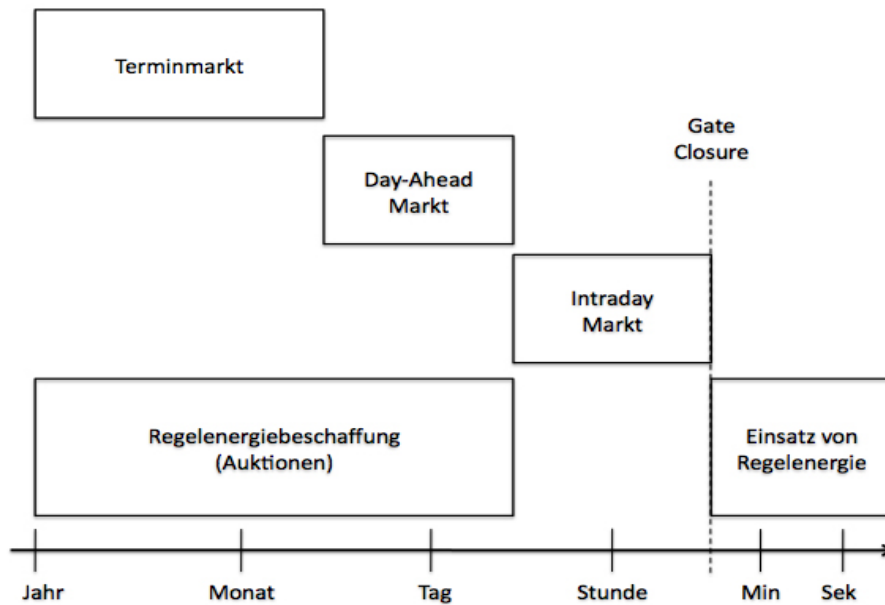


Abbildung 1: Übersicht der verschiedenen Strommärkte

2.1.1 Terminmarkt

Auf Terminmärkten werden Forwards und Futures gehandelt. Forwards sind bilaterale Kontrakte, die zur vertraglichen Fixierung von physischen Stromgeschäften over-the-counter (OTC) gehandelt werden. Dabei kann auf ein Clearing verzichtet werden, sodass die Vertragspartner das Kontrahentenrisiko tragen. Alternativ kann das Clearinghouse der Börse für ein OTC-Clearing in Anspruch genommen werden. Der Umfang und Zeitraum einer Lieferung, sowie der zeitliche Vorlauf und die preisliche Ausgestaltung werden von den Vertragspartnern ausgehandelt. Forwards werden aufgrund dieser Flexibilität auch als strukturierte Produkte bezeichnet.

Futures werden an der Börse gehandelt. Da Futures in Lieferzeitraum und -umfang einheitlich sind, spricht man von standardisierten Produkten. An der EEX werden Peakload und Baseload Futures gehandelt, wobei erstere eine Lieferung von 12 MWh in dem Zeitintervall von 8.00 Uhr bis 20.00 Uhr an jedem Tag eines Monats verbriefen, also die konstante Lieferung von 1 MW über diesen Zeitraum. Baseload Futures liefern über den gesamte Tag

konstant 1 MW, also 24 MWh pro Tag. Futures sind in der Regel rein finanzielle Kontrakte, können aber in physische Kontrakte umgewandelt werden. Der finanzielle Ausgleich erfolgt gegen einen Monatsdurchschnitt der Day-Ahead Preise, wobei Futures während des Liefermonats weiter gehandelt werden können. Da der Monatsdurchschnitt der Day-Ahead Preise einen Tag vor Ende des Lieferzeitraums bekannt ist, müssen die Future-Preise an diesem Tag gleich dem Monatsdurchschnitt der Day-Ahead Preise sein, da sonst Arbitrage-Möglichkeiten entstehen. An Stelle dieses *Cash Settlements* kann eine physische Erfüllung treten. In diesem Fall wird der Auftrag erteilt, eine dem Future entsprechende Nachfrageposition in der Spotmarktauktion aufzubauen.

An der EEX werden Futures mit bis zu einem Jahr Vorlauf gehandelt. Dabei werden Jahres-, Quartals- und Monatsfutures gehandelt. Futures mit einer Laufzeit von mehr als einem Monat werden bei Lieferung in einzelne Monatsfutures aufgespalten (Kaskadierung). Das Volumen des Futureshandels an der EEX entsprach 2007 etwa 60 Prozent des in Deutschland verbrauchten Stroms, wobei dadurch keine Aussage über das finanziell gehandelte Volumen in Deutschland getroffen werden kann, da finanzielle Kontrakte auch OTC gehandelt werden.

2.1.2 Spotmarkt

Der Spotmarkt beinhaltet *Day-Ahead*- und *Intraday*-Handel. Der Day-Ahead Markt besteht aus fortlaufendem Handel und Auktionshandel, wobei der fortlaufende Handel für Block-Lieferungen zu Baseload- oder Peakload-Phasen genutzt wird, während beim Auktionshandel einzelne Stunden oder eine Kombination aus mehreren Stunden gehandelt werden können. Der Auktionshandel wird über die Abgabe von Angebots- und Nachfragefunktionen der Marktteilnehmer, bestehend aus maximal 230 Wertepaaren, abgewickelt. Aus den Angebotsfunktionen lässt sich eine *Merit Order* ableiten. Diese zeigt graphisch auf, welche Kraftwerke bei der aktuellen Nachfrage Strom liefern dürfen. Dabei wird den vom Erneuerbare Energien Gesetz (EEG) geförderten regenerativen Energieformen eine Sonderstellung eingeräumt. Diese haben bei der Einspeisung Vorrang und werden über Netznutzungsentgelte finanziert. Der Day-Ahead-Handel schließt um 11.55 Uhr am Tag vor dem Liefertag.

Auf dem Intraday-Markt können Strommengen bis zum *Gate Closure* 75 Mi-

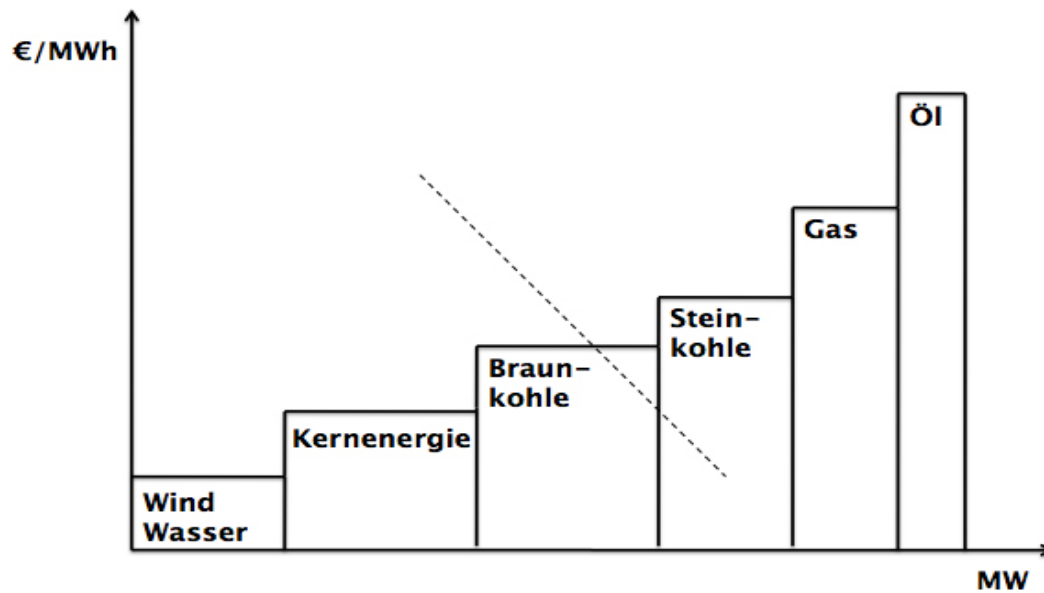


Abbildung 2: Darstellung einer Merit Order mit angedeuteter Nachfragekurve

nuten vor Lieferung gehandelt werden. Dies wird genutzt um eventuelle Fehlmengen oder Überschussmengen aus dem Day-Ahead Handel zu vermarkten. Aus den gehandelten Strommengen ermittelt der Übertragungsnetzbetreiber (ÜNB) einen *Fahrplan* für Stromlieferungen. Dieser zeigt Einspeisungs- und Ausspeisungsmengen und -orte auf und wird dazu genutzt, Engpässe zu ermitteln, welche dann mittels *Countertrading* oder *Zonal Pricing*¹ aufgehoben werden.

2.1.3 Regelenenergiemarkt

Regelenergie ist eine Dienstleistung, welche der ÜNB am Markt einkauft. Der ÜNB ist für die Stabilität des Netzes verantwortlich. Das Netz wird instabil, wenn die Menge des eingespeisten Stroms von der Menge des ausgespeisten Stroms abweicht, da dann die Frequenz des Stroms von den vorgesehenen 50 Hz abweicht. Die Regelenergie wird in drei Stufen eingeteilt:

- Primärregelenergie

¹Countertrading und Zonal Pricing sind Verfahren zur Beseitigung von Engpässen. Für eine detaillierte Betrachtung vgl. [B].

- Sekundärregelenergie
- Tertiärregelenergie

Die Primärregelenergie, auch Sekundenreserve genannt, gleicht vollautomatisch Schwankungen aus. Sie wird von Dampfkraftwerken bereitgestellt, welche sich ohnehin am Netz befinden und nicht mit optimalem Wirkungsgrad fahren. Der Wirkungsgrad wird im Falle geringer Netzschwankungen automatisch erhöht, indem etwa zusätzlicher Dampf durch die Turbinen geleitet wird. Die Sekundenreserve muss ab 30 Sekunden nach einem Frequenzabfall vollständig verfügbar sein und wird dann sukzessive von der Sekundärregelenergie ersetzt. Diese muss nach 5 Minuten vollständig bereitstehen und wird, falls notwendig, danach von der Tertiärregelenergie schrittweise abgelöst. Die Tertiärregelung muss 15 Minuten nach Eintritt der Schwankung zur Verfügung stehen und liefert dann Strom für maximal 45 Minuten. Tertiärregelenergie wird auch als Minutenreserve bezeichnet. Die Sekundenreserve wird über Netznutzungsentgelte finanziert. Es findet bei dieser Regelenergieform keine direkte Zurechnung der Kosten auf den Verursacher der Schwankung statt. Die Kosten für Sekundär- und Tertiärregelenergie hingegen werden dem Verursacher direkt zugerechnet.

Nach Ablauf der durch Sekunden- und Minutenreserve abgedeckten 60 Minuten muss der Bilanzkreisverantwortliche für Ersatzeinspeisungen sorgen. Der Bilanzkreisverantwortliche koordiniert die Stromübertragungen innerhalb eines Bilanzkreises. Jede der vier Regelzonen in Deutschland ist in eine Vielzahl von Bilanzkreisen aufgeteilt. Bei Schwankungen innerhalb der Bilanzkreise werden zunächst alle Bilanzkreise einer Regelzone saldiert, sodass Bilanzkreise mit zu hohen Einspeisungen den Strom in Form von Ausgleichsenergie an Bilanzkreise mit zu niedrigen Einspeisungen verkaufen. Erst bei einem Ungleichgewicht innerhalb der gesamten Regelzone gleicht der ÜNB Abweichungen mit Hilfe von positiver und negativer Regelenergie aus und verkauft positive Regelenergie in Form von Ausgleichsenergie an die Bilanzkreise. Bei negativer Regelenergie kauft der ÜNB den zusätzlichen Strom auf. Die Kosten für positive und negative Ausgleichsenergie richten sich dabei nach dem Vorzeichen des Regelzonensaldos. Wenn ein Bilanzkreis beispielsweise zuviel Strom produziert, in der gesamten Regelzone jedoch Strom fehlt, wird der Bilanzkreis für seinen zusätzlich produzierten Strom entlohnt und erhält einen relativ hohen Preis. Die Kosten werden dem verursachenden Bilanzkreis zugeordnet und innerhalb des Bilanzkreises dem verursachenden Marktteilnehmer. In dieser Konstellation ist folglich mit hohen Kosten im

Fall eines Kraftwerksausfalls für den Betreiber zu rechnen. Es ist anzumerken, dass nur fehlende positive Reserve zu einem kritischen Zustand für das System führen kann, da fehlende negative Reserve durch herunterfahren von Kraftwerken kompensiert werden kann.

Regelenergie wird in einseitigen Auktionen gehandelt. Der ÜNB tritt als einziger Nachfrager auf und wählt die vorzuhaltenden Kapazitäten nach Leistungspreisgeboten aus. Der Leistungspreis beschreibt die Entlohnung der Kraftwerke für die vorgehaltene Kapazität. Im Falle einer Schwankung werden die Kraftwerke entsprechend einer Merit Order anhand der gebotenen Arbeitspreise der Kraftwerksbetreiber eingesetzt. Die Höhe der Reserve orientiert der ÜNB an technischen Parametern, etwa der Einspeisung in einer Regelzone und Lastprognosefehlern.

3 Der Versicherungskontrakt

Im vorherigen Kapitel wurden die Besonderheiten des Strommarktes behandelt. Die Ausgestaltung Versicherung hängt wesentlich davon ab, welche Risiken abgedeckt werden müssen. Im Fall der physischen Versicherung sind das alle Risiken, die aus einem Ausfall des Kraftwerks resultieren.

3.1 Ausfallrisiken

Um ein Konzept zu entwickeln wie ein Kraftwerksausfall zu versichern ist, muss zunächst festgestellt werden, welche Schäden bei einem Ausfall auftreten können. Wir unterscheiden zwischen den Risiken einer Insolvenz des Vertragspartners und den Risiken eines technischen Ausfalls ohne Insolvenz. Bei der Insolvenz eines Vertragspartners können Schäden dadurch entstehen, dass Lieferungen nicht getätigt oder Zahlungen nicht geleistet werden. Die Unterscheidung ist notwendig, da die vertraglichen Verpflichtungen bei einem technischen Ausfall ohne Insolvenz weiter bestehen. Risiken, die aus einer möglichen Insolvenz eines Vertragspartners resultieren, werden nicht weiter behandelt. Eine ausführliche Betrachtung der relevanten Risiken findet sich in [BSK].

3.1.1 Wiedereindeckungsrisiko

Definition 3.1 *Das Wiedereindeckungsrisiko (WER) eines Marktteilnehmers ist die positive Differenz aus Spotpreis und vorab vereinbarten Kaufpreis multipliziert mit der zu liefernden Menge.*

$$WER_t = (S_t - F_t) m_t$$

Dabei bezeichnet F_t den vorher vereinbarten Preis der Lieferung, S_t den Spotpreis und m_t die zum Betrachtungszeitpunkt ausstehende Menge.

Bemerkungen Das Wiedereindeckungsrisiko trägt bei der Modellierung eines Ausfalls ohne Insolvenz, etwa bei einem technischen Ausfall, der Verkäufer, da er vertraglich verpflichtet ist, die vereinbarte Menge zu vorher vereinbarten Konditionen zu liefern. Bei einem Ausfall durch Insolvenz des Verkäufers trägt der Käufer das WER, da er seine Ansprüche auf Lieferung gegen den Verkäufer nicht oder nur in geringerem Maße geltend machen kann. Die Kosten der Wiedereindeckung hängen proportional von der zu liefernden

Menge m ab, so dass die Größe m bei der weiteren Betrachtung vernachlässigt werden kann.

3.1.2 Regelenenergierisiko

Zusätzlich zum Wiedereindeckungsrisiko interessieren wir uns für das Regelenenergierisiko. Das Risiko besteht in den Kosten für Ausgleichsenergie, welche ein Marktteilnehmer leisten muss, wenn der Übertragungsnetzbetreiber Abweichungen im Fahrplan über Regelenenergie ausgleichen muss. Die Kosten für Ausgleichsenergie können die Kosten für die Wiedereindeckung deutlich übersteigen, so dass man ein zusätzliches Risiko betrachten muss.

Definition 3.2 *Das Regelenenergierisiko ist das Risiko, dass durch einen Ausfall unmittelbar vor oder während der Lieferperiode zusätzliche Kosten, über die Wiedereindeckung hinaus, entstehen.*

Die Höhe der Kosten der Ausgleichsenergie sind abhängig vom aktuellen Spotpreis und dem gesamten Regelzonensaldo.

Bemerkung Die Kosten für die erste Regelenenergiestufe werden vom Netzbetreiber nicht auf einzelne Marktteilnehmer nach dem Verursacherprinzip umgelegt, sondern über Netzentgelte von allen Marktteilnehmern getragen.

3.2 Ausgestaltung der Versicherung

Die Versicherung muss so ausgestaltet sein, dass der Versicherungsnehmer gegen die auftretenden Ausfallrisiken abgesichert ist. Des Weiteren müssen Beginn und Ende der Versicherungsperiode festgelegt werden. Ferner soll gelten, dass die Versicherung den (technischen) Ausfall eines Kraftwerks absichert und keine Absicherung gegen Strompreisschwankungen darstellt.

3.2.1 Gegenstand der Versicherung

Definition 3.3 *Der Gegenstand der Versicherung sind die physischen Stromlieferungen aus einem Forwardvertrag. Der Forwardvertrag wird bilateral im Zeitpunkt 0 geschlossen und verpflichtet den Verkäufer zu Lieferungen von Strom an Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n$ an den Käufer.*

Der Preis der Lieferungen wird im Zeitpunkt 0 fixiert und wird mit F_{t_i} bezeichnet. Die Höhe der Lieferung ist zu allen Lieferzeitpunkten t_i identisch und wird in Megawatt angegeben.

Bemerkung Bei Stromlieferungen wird über einen Zeitraum geliefert. Der Lieferzeitpunkt t_i ist die Kurzform für das Intervall $(t_{i-1}, t_i]$ in dem Lieferungen stattfinden, wobei nicht über das gesamte Intervall geliefert werden muss.

Beispiel 3.4 *Ein Peakload Jahresforward liefert über ein Jahr täglich eine festgelegte Menge Strom m während der Peak-Phase eines Tages, also zwischen acht und zwanzig Uhr. Der Lieferzeitpunkt t_i ist in diesem Fall der i -te Tag des Jahres, das Lieferintervall ist von null bis vierundzwanzig Uhr, tatsächlich geliefert wird zwischen acht und zwanzig Uhr.*

3.2.2 Zeitraum der Versicherung

Die Versicherung eines Forwards kann naturgemäß erst nach Verkauf des Forwards erfolgen. In der Regel liegt zwischen Abschluss des Forwardvertrags und Lieferungen ein Zeitraum, in dem eine Versicherung des Forwards erfolgen kann. Mit Abschluss des Versicherungsvertrags wird die Versicherung des Forwards gültig. Ein Ausfall eines Kraftwerks vor Beginn der Lieferperiode, der jedoch Auswirkungen auf die Lieferungen hat, ist somit auch versichert. Der Kontrakt endet mit der letzten Lieferung.

Definition 3.5 *Der Zeitpunkt des Abschlusses des Versicherungsvertrags $0 < t^*$ ist gleichzeitig auch Beginn der Versicherungsabdeckung. Die Versicherung endet mit der letzten Lieferung im Zeitpunkt t_n . Das von der Versicherung abgedeckte Intervall ist somit das Intervall $(t^*, t_n]$.*

Bemerkung Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt der Vereinbarung der Versicherung t^* kein Ausfall vorliegt.

3.2.3 Abdeckung des Wiedereindeckungsrisikos

Bei einem Kraftwerksausfall übernimmt der Versicherer die Verpflichtungen, die aus dem Forwardvertrag für den Versicherungsnehmer resultieren. Der Versicherer verpflichtet sich folglich, die vertraglich vereinbarten Stromlieferungen des Versicherungsnehmers zu erfüllen, durch eigene Produktion oder über den Spotmarkt.

Als Alternative kann das WER auch finanziell abgesichert werden. In diesem Fall werden die durch einen Ausfall des Kraftwerks entstandenen Kosten ersetzt.

3.2.4 Abdeckung des Regelenenergierisikos

Der Versicherer übernimmt die Regelenenergieverpflichtungen. Bei einem Ausfall in der Lieferperiode obliegt es dem Versicherer, Ersatz einspeisungen vorzunehmen oder die Strafzahlungen für Inanspruchnahme von Regelenenergie zu leisten.

3.3 Varianten der Versicherung

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, die auftretenden Risiken abzuschließen. Wir werden im Folgenden drei Kontrakte betrachten, welche mit ihren unterschiedlichen Ausgestaltungen die gewünschten Zahlungsströme erzeugen. Dabei werden wir unterscheiden zwischen physischen und finanziellen Versicherungen, wobei erstere Ersatz einspeisungen als Versicherungsleistung vorsehen, während letztere die Kosten aus einem Ausfall decken. Eine Absicherung gegen das Regelenenergierisiko ist bei allen Kontrakten physisch oder finanziell möglich.

3.3.1 Swap

Bei dem Swap-Kontrakt als physischem Kontrakt springt der Versicherer bei einem Ausfall ein und liefert den vereinbarten Strom an den Vertragspartner des Versicherungsnehmers, bis das Kraftwerk des Versicherungsnehmers wieder am Netz ist. Der Versicherer erhält in der Phase, in der er den Vertrag des Versicherungsnehmers bedient, die Zahlungen aus dem Forward.

Der Versicherungsnehmer tauscht gedanklich für die Dauer des Ausfalls seinen vorher bekannten Zahlungsstrom F_t gegen einen variablen Zahlungsstrom S_t , mit dem er sofort seine Verpflichtungen erfüllt und dadurch für das Intervall des Ausfalls einen aggregierten Zahlungsstrom von Null hat. Diesen Kontrakt kann man als Payer Swap, welcher nur bei einem Ausfall aktiv wird, auffassen.

Alternativ zu einer Abdeckung der gesamten Dauer eines Ausfalls ist es möglich den Zeitraum der Versicherungsleistung zu begrenzen. In diesem Fall kann bei einem langfristigen Ausfall ein Teil des WER beim Versicherungsnehmer liegen.

3.3.2 Summe europäischer Optionen

Der zweite Kontrakt sichert den Versicherungsnehmer gegen hohe Spotpreise ab. Falls die Spotpreise bei der Day-Ahead Auktion den Forwardpreis übersteigen, wird der Versicherer aktiv. Er übernimmt die Verpflichtung des Versicherungsnehmers und erfüllt diese physisch über eigene Kapazitäten. Er erhält vom Versicherungsnehmer den Forwardpreis für die entsprechende Lieferung.

Bei niedrigen Spotpreisen leistet die Versicherung nicht. In solchen Phasen ist der Versicherungsnehmer in der Lage, Strom am Spotmarkt einzukaufen und an den Forwardkäufer zu liefern, ohne Verluste zu erleiden. Notwendig ist jedoch ein Zugang des Versicherungsnehmers zum Intraday-Handel, da ansonsten der Handel am Spotmarkt in den ersten Stunden nach einem Ausfall unmöglich ist. Abhängig von der Leistungsdauer ergeben sich für den Versicherungsnehmer bei diesem Kontrakt zusätzliche Gewinnpotenziale, wenn etwa der Spotpreis dauerhaft unter seinen Grenzkosten der Produktion bleibt. Es ist daher sinnvoll, die Leistungsdauer dieses Kontrakts zu beschränken. Dieser Versicherungskontrakt kann als Portfolio aus europäischen Optionen auf Strom betrachtet werden.

3.3.3 Asiatische Option

Eine Variante einer finanziellen Versicherung ist die asiatische Option. Analog zu dem Finanzderivat wird bei diesem Kontrakt über die Dauer des Ausfalls die durchschnittliche Spotpreishöhe ermittelt. Falls diese einen bestimmten Wert übersteigt, erhält der Versicherungsnehmer einen finanziellen Ausgleich. Dieser Kontrakt eignet sich nicht zur physischen Versicherung, da der Durchschnittsspotpreis über den Zeitraum eines Ausfalls natürlich nur ex-post ermittelt werden kann, die physische Lieferung aber sofort erfolgen muss.

4 Mathematisches Modell der Versicherung

Wir werden ein mathematisches Modell für die Versicherung angeben. Dazu verwenden wir den theoretischen Unterbau aus [BR], Kapitel 2 bis 8. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ und eine Zufallsgröße $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $P(\tau = 0) = 0$ und $P(\tau > t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Die Zufallsgröße τ beschreibt den zufälligen Ausfallszeitpunkt eines Kraftwerks. Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion von τ mit $F(t) = P(\tau \leq t)$ und definieren die Funktion $G(t) := 1 - F(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Des Weiteren definieren wir den *Ausfallprozess* H bezüglich des Ausfallszeitpunktes τ durch $H_t : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ mit $H_t(\omega) = 1_{\{\tau \leq t\}}(\omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Der Ausfallprozess ist ein rechtsstetiger Sprungprozess, der vor dem Ausfall den Wert 0 hat und nach dem Ausfall den Wert 1. Mit Hilfe des Sprungprozesses H_t können wir die Filtration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ definieren, wobei $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u : u \leq t)$. Die σ -Algebra $\mathcal{H}_t$ beinhaltet die Informationen bis zum Zeitpunkt t bezüglich des Sprungprozesses. Wir wissen aus $\mathcal{H}_t$, ob vor dem Zeitpunkt t ein Ausfall stattgefunden hat. Falls ein Ausfall vor t stattgefunden hat, ist die Information über den genauen Zeitpunkt des Ausfalls in $\mathcal{H}_t$ enthalten. Wir definieren $\mathcal{H}_\infty = \sigma(H_u : u \in \mathbb{R}_+) = \sigma(\tau)$.

Wir betrachten nun eine Filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$. Dabei enthält $\mathcal{G}_t$ alle zum Zeitpunkt t verfügbaren Informationen. Dabei soll gelten, dass eine weitere Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ existiert, derart dass $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$, mit $\mathbb{F} \vee \mathbb{H} = (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ und $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{H}_t)$.

In dieser Situation betrachten wir drei verschiedene Filtrationen. $(\mathcal{F}_t)$ sammelt die Informationen, die der Preisprozess S_t generiert, $(\mathcal{H}_t)$ beinhaltet die Informationen bezüglich eines Ausfalls und $(\mathcal{G}_t)$ enthält alle bis zu einem bestimmten Zeitpunkt verfügbaren Informationen.

Bemerkung Aus $P(\tau > t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ folgt sofort, dass keine Konstante K existiert, mit $P(\tau \leq K) = 1$. Es ist folglich τ eine unbeschränkte Zufallsgröße. Offensichtlich ist τ eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{H}_t)$, da $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{H}_t$ per Definition gilt.

4.1 Modellierung des Ausfalls

Sei τ eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion. τ sei der Ausfallszeitpunkt eines Kraftwerks. Sei $\hat{\tau} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine weitere Zufallsgröße mit

stetiger Verteilungsfunktion. Wir bezeichnen mit $\hat{\tau}$ die Dauer des Ausfalls, folglich ist $\tau + \hat{\tau}$ der Zeitpunkt der Wiederherstellung des Kraftwerks.

Wir definieren analog zu $H_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ den Sprungprozess $R_t = 1_{\{\tau + \hat{\tau} \leq t\}}$, der zum Zeitpunkt der Rückkehr von 0 auf 1 springt. Damit lautet das Intervall des Ausfalls

$$\mathbb{I} = [\tau, \tau + \hat{\tau}) = \{t \in \mathbb{R}_+ : (H_t - R_t) = 1\}$$

Bemerkung Da es sich bei τ und $\hat{\tau}$ um Zufallsvariablen handelt, ist offensichtlich, dass das Intervall $\mathbb{I} : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}$ eine Zufallsgröße darstellt.

4.1.1 Modellierung von Teilausfällen

Bei Kraftwerksausfällen ist auch die Möglichkeit eines Teilausfalls denkbar. In diesem Fall produziert das Kraftwerk weiter Strom, mit der Einschränkung, dass ein Teil der Kapazität nicht verfügbar ist. Je nach Umfang eines solchen Teilausfalls kann es zu Lieferschwierigkeiten bezüglich vorher geschlossener Forward-Verträge kommen.

Sei $N(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein allgemeiner Zählprozess. Es gelte $P(N(0) = 0) = 1$. $N(t)$ gibt in jedem Zeitpunkt $t \in [0, t_n]$ an, wieviele Teilausfälle zu diesem Zeitpunkt bereits stattgefunden haben. Die Zeitpunkte, an denen Sprünge auftreten, bezeichnen wir mit τ_i , $i \in \mathbb{N}$.

Sei $A_i : \Omega \rightarrow [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$ eine Familie von Zufallsgrößen mit Werten in dem Intervall $[0, 1]$. A_i gibt an, welcher Anteil der verbleibenden Kapazität bei dem i -ten Teilausfall wegfällt. Sei $K(t)$ die zum Zeitpunkt $t \in [0, t_n]$ verfügbare Kapazität. Setze $K(0) = K_0$. Dann gilt $K(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} (1 - A_i) K_0$. Zwischen zwei Teilausfällen bleibt die Kapazität konstant, so dass $K(t) = K_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ gesetzt werden kann. Außerdem gilt, dass beim i -ten Teilausfall die Kapazität um $A_i K_{i-1}$ sinkt.

Ferner betrachten wir zu jedem Teilausfall Zufallsvariablen $\hat{\tau}_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ für die Dauer der einzelnen Teilausfälle. Mit diesen zusätzlichen Ausfallzeitpunkten definieren wir analog zu oben Sprungprozesse $H_t^i = 1_{\{N(t)=i\}}$, $i \in \mathbb{N}$ und $R_t^i = 1_{\{\tau_i + \hat{\tau}_i \leq t\}}$, $i \in \mathbb{N}$. Wir erhalten also zu jedem Teilausfall ein Intervall $\mathbb{I}^i$ für die Dauer des Ausfalls.

4.2 Modellierung des Wiedereindeckungsrisikos

Im Zeitintervall des Ausfalls $\mathbb{I}$ wird die Versicherung gegen das WER aktiv. Das Intervall $\mathbb{I}$ wird charakterisiert durch $(H_t - R_t) = 1$, also den Zeitraum,

in dem das Kraftwerk ausgefallen und noch nicht repariert ist. In dem Zeitraum des Ausfalls betrachten wir unterschiedliche Prozesse $\hat{S}_t$, die je nach Ausgestaltung der Versicherung, siehe Kapitel 3.3, den Zahlungsstrom beschreiben.

Es sei $r_u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ für alle $u > 0$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_u$. r_u beschreibt den kurzfristigen Zinssatz. Es sei für alle $t \geq 0$

$$B_t := \exp \left(- \int_0^t r_u du \right)$$

der Abzinsungsprozess. Die diskontierten Zahlungen, die aus der Versicherung resultieren, können dann charakterisiert werden durch

$$W_t = \int_{(0,t]} B_u (H_u - R_u) \hat{S}_u du$$

Falls wir Teilausfälle mit Hilfe von Zählprozessen modellieren, lauten die Zahlungen wie folgt:

$$W_t = \sum_{i=1}^{\infty} A_i K_{i-1} \int_{(0,t_n]} B_u (H_u^i - R_u^i) \hat{S}_u du$$

4.3 Modellierung der Regelennergiezahlungen

Die Kosten für die anzufordernde Ausgleichsenergie sind abhängig vom Spotpreis. Ein einfaches Modell erhält man, wenn man den Spotpreis mit einem konstanten Faktor R multipliziert. Die Primärregelennergie sichert das Stromnetz gegen kurzfristige Frequenzschwankungen ab. Diese Stufe wird von allen Marktteilnehmern über Netzentgelte finanziert und wird dementsprechend nicht versichert. Bei der Modellierung der Kosten werden Sekundär- und Tertiärregelennergie nicht unterschieden.

Für Regelennergie ergeben sich also zusätzliche Kosten von $(R - 1)S_t$ falls ein Ausfall innerhalb des Lieferzeitraums $[t_0, t_n]$ stattfindet. Dann ist $Z_t = (R - 1)S_t 1_{[t_0, t_n]}(t)$ der Wert für die Regelennergiekosten und wir erhalten folgenden Prozess für Regelennergie:

$$RE_t = \int_{(0,t]} B_u Z_u dH_u$$

4.4 Zahlungen am Ende der Laufzeit

Bei einem finanziellen Ausgleich werden Zahlungen am Ende der Laufzeit geleistet, wenn ein Ausfall eingetreten ist. Diese werden beschrieben mit:

$$X^d(t_n) = B_{t_n} X 1_{\{\tau \leq t_n\}}$$

Dabei ist $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_{t_n}$ und die Gestalt von X abhängig von der jeweiligen Ausgestaltung des zu Grunde liegenden Versicherungskontrakts. Falls keine solchen Zahlungen vorliegen, wird $X = 0$ gesetzt.

4.5 Modell der Versicherung

Die Versicherung D_t können wir als Summe der diskontierten Auszahlungen innerhalb des Versicherungszeitraums $(0, t]$ auffassen.

$$\begin{aligned} D_t &= X^d(t_n) 1_{[t_n, \infty)}(t) + W_t + RE_t \\ &= B_{t_n} X 1_{\{\tau \leq t_n\}} 1_{[t_n, \infty)}(t) + \int_{(0, t]} B_u (H_u - R_u) \hat{S}_u du + \int_{(0, t]} B_u Z_u dH_u \quad (1) \end{aligned}$$

4.5.1 Swap

Im Fall des Payer Swap werden die Zahlungsströme getauscht, in dem Sinne, dass der Versicherungsnehmer einen variablen Zahlungsstrom erhält, um damit direkt seine Verpflichtungen zu erfüllen, und seinen fixen Zahlungsstrom abgibt. Der Prozess $\hat{S}_t$ ist wie folgt definiert:

$$\hat{S}_t = (S_t - F_t)$$

Da am Ende der Laufzeit keine Zahlung erfolgt, gilt $X = 0$.

4.5.2 Summe europäischer Optionen

Die Absicherung gegen hohe Spotpreise greift nur, wenn der Spotpreis über dem Forwardpreis liegt. Also gilt für diesen Kontrakt:

$$\hat{S}_t = (S_t - F_t)^+$$

Auch bei diesem Kontrakt erfolgt keine Zahlung am Ende: $X = 0$.

4.5.3 Asiatische Option

Bei diesem Kontrakt ist keine Zahlung während eines Ausfalls vorgesehen. Bei der Modellierung setzen wir folglich $\hat{S}_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Am Ende der Laufzeit erfolgt eine Zahlung abhängig vom arithmetischen Mittel des Spotpreises über den Zeitraum des Ausfalls:

$$X = |\mathbb{I}| \left(\frac{1}{|\mathbb{I}|} \int_{(0, t_n]} (H_u - R_u) S_u du - F_0 \right)^+$$

Zahlungen werden nur dann geleistet, wenn das arithmetische Mittel der Spotpreise den Forwardpreis F_0 übersteigt. Optional ist bei diesem Kontrakt die Versicherung einer Regelenergiezahlung, welche bei einem Ausfall unmittelbar fällig ist.

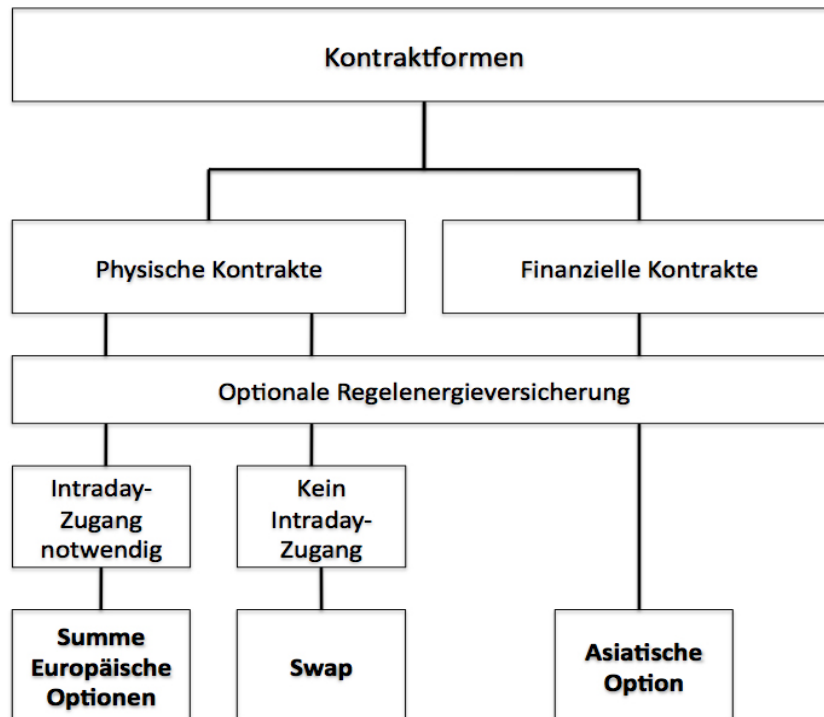


Abbildung 3: Übersicht der vorgestellten Kontrakte

5 Bewertung in unvollständigen Märkten

In den bisherigen Kapiteln wurden Strommärkte vorgestellt und ein physischer Versicherungsvertrag entworfen. Das Ziel der folgenden Kapitel wird die Bewertung eines solchen Vertrags sein. Für die Bewertung des Versicherungsvertrages ist vorab zu klären, welcher Markttyp vorliegt hinsichtlich der Eigenschaften der Arbitragefreiheit und der Vollständigkeit. Arbitragefreiheit bezeichnet die Unmöglichkeit in einem Markt ohne Risiko Gewinn zu generieren. Arbitragefreiheit wird als Grundlage für die finanzökonomische Bewertungstheorie vorausgesetzt. Vollständigkeit liegt in einem Markt vor, wenn aus Derivaten resultierende Zahlungsströme jederzeit durch den Handel von Basisassets replizierbar sind, vgl. [BSK] und [FI]. Ein Markt heißt unvollständig, falls die letzte Bedingung nicht erfüllt ist.

Das Underlying des von uns entworfenen Versicherungsvertrags ist Strom. Der Vertrag kann also als Derivat auf Strom betrachtet werden. Demnach müssen bei der Bewertung des Versicherungsvertrags die Eigenschaften des Strommarktes und die Besonderheiten des Versicherungsmarktes berücksichtigt werden.

Wir wollen einen Anfangspreis für die in Kapitel 3 und 4 beschriebene Versicherung bestimmen. Die Bestimmung des Preises soll mit Hilfe der risikoneutralen Bewertung erfolgen. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ wie in Kapitel 4 beschrieben. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P ist das reale Maß, das die Entwicklung des Spotpreisprozesses S_t beschreibt. Das Ziel ist es, ein zu P äquivalentes Bewertungsmaß Q^* zu finden.

In einem diskreten Mehrperiodenmodell liefert das *Fundamental Theorem of Asset Pricing*, dass aus der Arbitragefreiheit eines Marktes die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes folgt (Vgl. [FS]). Für zeitstetige Modelle ist die Forderung nach Arbitragefreiheit nicht ausreichend. In [DS] wird gezeigt, dass ein äquivalentes Martingalmaß in einem stetigen Marktmodell genau dann existiert, wenn die stärkere Bedingung *No Free Lunch with Vanishing Risk* (NFLVR) erfüllt ist. Diese Forderung an das Marktmodell impliziert ihrerseits Arbitragefreiheit.

Der Zusammenhang wird mit Hilfe eines Marktmodells genauer erläutert.

5.1 Ein Modell für einen unvollständigen Markt

Wir beschreiben ein zeitstetiges Modell für einen unvollständigen Markt. Dabei orientieren wir uns an [DS] und [BK].

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wie in Kapitel 4 erläutert, mit einer Filtration $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Es seien $(S_0, \dots, S_d)$ $d + 1$ Basis- oder Ankerassets, die in dem Markt in dem Handelszeitraum $[0, T]$ gehandelt werden. Für jedes $0 \leq i \leq d$ sei S_i ein strikt positives Semi-Martingal mit der *càdlàg* Eigenschaft. Die *càdlàg* Eigenschaft besagt, dass der Prozess rechtsstetig ist und Limiten nach links existieren. Der Prozess S_0 ist der Normierungsprozess und kann als risikolose Anlage interpretiert werden. Für die Basisassets gilt, dass die $S_i(t)$ für alle $0 \leq i \leq d$ und $t \in [0, T]$ $\mathcal{F}_t$ -messbar sind. Die σ -Algebra $\mathcal{F}_t$ sammelt folglich die Informationen aus den Wertentwicklungen der Basisassets bis zum Zeitpunkt t . Weiter gehen wir davon aus, dass Claims X_T existieren, die nicht mit Hilfe der $d + 1$ Basisassets repliziert werden können. Das Marktmodell ist damit unvollständig.

Ein Handel der Basisassets ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt in $[0, T]$ möglich. Der Handel eines Basisassets zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist eine Änderung der Position $\phi_i(t^-)$, die in dem Asset S_i gehalten wird, zu einer neuen Position $\phi_i(t)$. Der Wert der neuen Position ist offenbar $\phi_i(t) S_i(t)$.

Eine Handelsstrategie auf diesem Markt ist ein previsibler, lokal beschränkter Prozess $H(t) = (\phi_0(t), \dots, \phi_d(t)) \in \mathbb{R}^d$. Diese Anforderungen an H stellen die Existenz des stochastischen Integrals $\int_0^t H(u) dS(u)$ sicher. Eine Handelsstrategie ist folglich ein Prozess, der die Größe der Positionen in den Basisassets vorgibt.

Definition 5.1 Sei H eine Handelsstrategie, $S = (S_0, \dots, S_d)$.

(i) Der Wert V einer Handelsstrategie H im Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$V_H(t) = H(t) \cdot S(t) = \sum_{i=0}^d \phi_i(t) S_i(t)$$

(ii) Der Gewinn G aus einer Handelsstrategie H im Zeitpunkt t ist

$$G_H(t) = \int_0^t H(u) dS(u) = \sum_{i=0}^d \int_0^t \phi_i(u) dS_i(u)$$

(iii) Eine Handelsstrategie H heißt selbstfinanzierend, falls gilt

$$V_H(t) = V_H(0) + G_H(t) \quad \forall t \geq 0$$

Wir wollen die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes in einem stetigen Marktmodell erläutern. Dazu reicht der Arbitragebegriff zeitdiskreter Modelle nicht aus. Die Stetigkeit der Modelle ermöglicht kontinuierliches Handeln, sodass selbst bei Arbitragefreiheit risikolose Gewinne möglich sind, vgl. [BK]. Die Erweiterung des Arbitragebegriffs führt uns zur NFLVR-Bedingung. Die NFLVR-Bedingung ist in einem zeitstetigen Modell äquivalent zur Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes. Um die NFLVR-Bedingung zu erläutern, führen wir zunächst zulässige Handelsstrategien ein und erklären dann den Begriff eines *Free Lunch with Vanishing Risk*, aufbauend auf den Ausführungen von [K].

Definition 5.2 Sei $S = (S_0, \dots, S_d)$. Eine selbstfinanzierende Strategie H heißt zulässig, falls ein $\phi_0 \in \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$V(H) \geq -\phi_0 S_0$$

Der Wert einer zulässigen Strategie ist folglich von unten begrenzt. Der Arbitragebegriff kann für zulässige Strategien im zeitstetigen Modell analog zum zeitdiskreten Modell eingeführt werden.

Definition 5.3 Eine zulässige Strategie H heißt Arbitrage, falls $V_H(0) = 0$, $V_H(T) \geq 0$ P -f.s. und $P(V_H(T) > 0) > 0$ gilt. Der Markt heißt arbitragefrei, falls keine solche Strategie existiert.

Anders als im zeitdiskreten Modell ist Arbitragefreiheit nicht hinreichend für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes. Es müssen zusätzlich Strategien ausgeschlossen werden, welche Arbitrage-Strategien beliebig nahe kommen. Solche Strategien nennt man *Free Lunches*. Ein Free Lunch with Vanishing Risk ist eine Auszahlung $X \geq 0$ mit $P(X > 0) > 0$, die anders als ein Arbitrage nicht ohne Anfangskapital, aber mit beliebig kleinem Anfangskapital erzeugt werden kann.

Definition 5.4 Eine Zufallsgröße $X \geq 0$ mit $P(X > 0) > 0$ heißt Free Lunch with Vanishing Risk, wenn eine Folge $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zulässiger Strategien und eine gegen Null konvergierende Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ existieren mit $V_{H_n}(0) \leq v_n$ und $V_{H_n}(T) \geq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Auszahlung X stellt bei einem Anfangskapital von Null ein Arbitrage dar. Im Falle eines Free Lunch kann mit Anfangskapital v_n die Auszahlung eines Arbitrage repliziert werden. Die NFLVR-Bedingung ist erfüllt wenn keine

Free Lunches existieren. Wie bereits angedeutet, folgt mit NFLVR die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes. Wir können die zeitstetige Version des Fundamental Theorem of Asset Pricing angeben.

Theorem 5.5 *In einem Finanzmarktmodell mit lokal beschränkten Preisen existiert ein lokales äquivalentes Martingalmaß genau dann, wenn NFLVR gilt.*

Beweis siehe [DS], Theorem 1.1. □

5.2 Unvollständigkeit der realen Märkte

Strommärkte und Versicherungsmärkte sind unvollständig. Die Betrachtung einer Versicherung mit Strom als Underlying erfolgt demnach auf einem unvollständigen Markt. In unvollständigen Märkten ist es Marktteilnehmern nicht möglich, das Risiko eines Derivats mit Hilfe dynamischer Handelstrategien vollständig zu eliminieren. Dadurch hängt die Bewertung eines Zahlungsstroms in einem unvollständigen Markt von der Bereitschaft eines Marktteilnehmers ab, Risiko zu übernehmen. Im Gegensatz zu vollständigen Märkten liefert in diesem Fall die Abwesenheit von Arbitrage-Möglichkeiten keinen eindeutigen Preis für ein Derivat, vergleiche [FI].

5.2.1 Strommarkt

Die Unvollständigkeit des Strommarktes resultiert aus den Besonderheiten des Gutes Strom. Strom ist ein homogenes Produkt. Es ist keine direkte Zuordnung von Strom möglich, vielmehr ist Strom eine Flussgröße. Besitz von Strom im engeren Sinne ist nicht möglich, der Handel von Strom erfolgt über den Handel von Ein- und Ausspeiserechten.

Die Übertragung von Strom erfolgt mittels Stromnetzen, wobei rechtliche und physikalische Übertragungsengpässe auftreten können. Da Strom leitungsgebunden ist, kann Strom nur in Verbindung mit der Übertragung gehandelt werden, sodass sich etwaige technische Restriktionen auf den Strommarkt auswirken.

Zudem ist Strom in ökonomisch relevanten Mengen nicht speicherbar und als Energieträger kurzfristig nicht substituierbar. Daraus resultiert eine sehr preisunelastische Nachfragefunktion. Die Folge ist, dass eine Anpassung der

Strommenge über das Angebot vorgenommen wird, welches wiederum technischen Restriktionen unterliegt, etwa durch begrenzte Hochfahrraten von Kraftwerken.

Die Replizierbarkeit von Derivaten auf Strom ist im Vergleich zu Finanzderivaten deutlich eingeschränkt. Auf Finanzmärkten existierende Handelsstrategien, die den Kauf des Underlyings am Spotmarkt und das Halten des Underlyings über einen Zeitraum verwenden, können auf dem Strommarkt nicht genutzt werden, da am Spotmarkt eingekaufter Strom in dem Zeitraum verbraucht werden muss, in dem er produziert wird. Die fehlende Speicherbarkeit von Strom eliminiert folglich alle Strategien, denen ein Halten des Underlyings zu Grunde liegt.

Zusätzlich beobachten wir auf dem Strommarkt Unstetigkeiten der Preisverläufe, auch *Spikes* genannt, welche zusätzliches nicht diversifizierbares Risiko erzeugen. Eine umfassende Betrachtung der Unvollständigkeit der Strommärkte findet sich in [FI], [BSK], [W] und [CGM].

5.2.2 Versicherungsmarkt

Versicherungsmärkte weisen Besonderheiten im Vergleich zu anderen Finanzmärkten auf. Der Wert einer Versicherung hängt nicht nur vom Wert des Underlyings ab. Vielmehr ist der Versicherungswert abhängig davon, ob ein Versicherungsfall eintritt oder nicht. Dieser Eintritt ist exogen und stochastisch. Aufgrund herrschender Informationsasymmetrien können Versicherer und Dritte einen Versicherungsfall nicht vorhersehen. Der Zahlungsstrom eines Versicherungsvertrags ist für Marktteilnehmer demnach nicht duplizierbar.

Auf beiden Märkten ist die Replizierbarkeit der gehandelten Güter durch die Eigenschaften dieser Märkte eingeschränkt. Diese notwendige Bedingung der Vollständigkeit eines Marktes ist folglich bei der Betrachtung von Versicherungen mit Strom als Underlying nicht erfüllt, sodass bei der Bewertung des Kontrakts für unvollständige Märkte geeignete Verfahren angewendet werden müssen.

5.3 Bewertungstheorie für unvollständige Märkte

Es eignen sich zwei Methoden für die Bewertung von Kontrakten in unvollständigen Märkten, siehe [FI], [FS], [F] und [CGM]. Der intuitivere Ansatz basiert darauf, die Nutzenfunktionen der Marktteilnehmer zu verwenden,

um ein Wahrscheinlichkeitsmaß aus einer Menge $\mathcal{Q}$ von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen auszuwählen. Die zweite Variante ist eine technische Methode, bei der ein äquivalentes Martingalmaß für die Bewertung des Kontrakts mittels eines Abstandsfunktional auf dem Raum der absolutstetigen Maße bezüglich P gefunden wird. Man wählt dasjenige Maß $Q^* \in \mathcal{Q}$ aus, welches den geringsten Abstand zu P aufweist.

Beide Ansätze können verknüpft werden. Zu einer Nutzenfunktion, die einem Marktteilnehmer unterstellt wird, kann eine Abstandsfunktion gefunden werden, so dass beide Verfahren zu demselben risikoneutralen Maß führen.

5.4 Bewertung über Nutzenfunktionen

Um ein Derivat mit Hilfe der Nutzenfunktion eines Marktteilnehmers zu bewerten, werden wir zunächst eine Nutzenfunktion definieren. Die formale Herleitung einer Nutzenfunktion kann in Anhang A nachgelesen werden. Ein äquivalentes Martingalmaß kann dann aus einem Nutzenmaximierungsargument hergeleitet werden.

Definition 5.6 Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion, falls u streng konkav, streng monoton steigend und stetig auf D ist.

Bemerkung Bei der Definition von Nutzenfunktionen finden sich in der Literatur zusätzliche Annahmen, vergleiche etwa [D] und [BK]. Wir werden im Folgenden annehmen, dass die Funktion $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, mit $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$.

Beispiel 5.7 In der Literatur häufig verwendete Nutzenfunktionen sind:

- $u(x) = \ln(x)$
- $u(x) = x^\alpha / \alpha$ für $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$
- $u(x) = (x^\alpha - 1) / \alpha$ für $\alpha < 1$
- $u(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$ für $\alpha > 0$

5.4.1 Bestimmung des Bewertungsmaßes

Im folgenden Abschnitt wollen wir mit Hilfe der Nutzenfunktionen der Marktteilnehmer ein Bewertungsmaß aus der Menge der äquivalenten Martingalmaße auswählen. Dabei verwenden wir das Konzept des *fairen Preises*. Wir betrachten eine Situation, in der ein Investor Basisassets oder Derivate handeln kann. Aus diesen Wertpapieren stellt der Investor eine Strategie zusammen mit dem Ziel, seinen Nutzen am Ende eines Betrachtungszeitraums zu maximieren. Der faire Preis für ein Derivat liegt dann vor, wenn der Kauf des Derivats den terminalen Nutzen des Investors nicht ändert. Wir werden zeigen, wie aus dieser Überlegung ein Bewertungsmaß ermittelt werden kann. Für die Herleitung des Bewertungsmaßes müssen bezüglich des maximalen erwarteten terminalen Nutzens eines Investors Annahmen getroffen werden. Dieser maximale terminale Nutzen wird beschrieben durch

$$\sup_{\psi \in \mathcal{T}} E(u(X_x^\psi(T)))$$

Dabei bezeichnet u die Nutzenfunktion des Investors, X die Basisassets des Marktes, ψ eine Handelsstrategie, x die Anfangsausstattung des Investors und T den Endpunkt des Betrachtungszeitraums. Wir werden im Folgenden annehmen, dass die Funktion differenzierbar bezüglich des Anfangskapitals x ist und dass das Supremum angenommen wird. In der Realität sind diese Annahmen schwierig zu verifizieren. Die Ergebnisse behalten unter milderer Voraussetzungen dennoch ihre Gültigkeit, vgl. [BK].

Zunächst ist die Frage zu klären, unter welchen Umständen der Nutzen eines Investors maximiert werden kann. Die Herangehensweise ist für ein Einperiodenmodell in [FS] dargestellt. Wir betrachten eine Menge von zulässigen Portfolios $\{\xi \in \mathbb{R}^d | \xi \cdot X \in D \text{ P-f.s.}\}$, deren Auszahlung im Definitionsbereich D der Nutzenfunktion u liegt, wobei X die Basisassets des Marktes bezeichnet. Der Investor erhält ein äquivalentes Martingalmaß P^* , welches durch

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{u'(\xi^* \cdot X)}{E_P(u'(\xi^* \cdot X))} \quad (2)$$

charakterisiert ist, wobei ξ^* das Portfolio mit maximalem erwarteten Nutzen $E(u(\xi^* \cdot X))$ darstellt. Die Existenz eines solchen Portfolios folgt im Einperiodenmodell aus der Arbitragefreiheit des Marktmodells. Der Preis eines Derivats Y lautet dann:

$$E_{P^*}(Y) = E_P\left(\frac{dP^*}{dP}Y\right) = \frac{E(u'(\xi^* \cdot X)Y)}{E(u'(\xi^* \cdot X))}$$

Die Situation in einem stetigen Modell wird in [D] und [BK] erläutert. Wir befinden uns in einem unvollständigen Markt. In einem vollständigen Markt sind wir in der Lage, den Preis eines Claims eindeutig über Replikation zu ermitteln. Wir bestimmen den Wert der Assets, die notwendig sind, um die Auszahlung des Claims darzustellen. In einem unvollständigen Markt ist dies nicht eindeutig möglich. Die Idee des fairen Preises im Folgenden ist eine Fortsetzung des Konzepts der Replikation über hedgebare Claims hinaus.

Wir betrachten einen Investor mit einer Nutzenfunktion $u(x)$. Der Investor hält eine Geldmenge x , und kann aus den Anker-Assets des Marktes $S_1, \dots, S_d$ ein dynamisches Portfolio $\psi \in \mathcal{T}$ zusammenstellen, wobei $\mathcal{T}$ alle zugelassenen Strategien beinhaltet. Der Wert einer solchen Strategie zum Zeitpunkt t wird mit $X_x^\psi(t)$ angegeben. Dieser Wert ist offensichtlich abhängig von der Anfangsausstattung x . Das Ziel des Investors ist nun die Maximierung seines terminalen Nutzens in einem festgelegten Zeitpunkt T . Wir bezeichnen den maximalen Nutzen mit

$$V(x) = \sup_{\psi \in \mathcal{T}} E(u(X_x^\psi(T)))$$

Angenommen, es stehe zudem ein Derivat Y zum Handel bereit, wobei Y alle Voraussetzungen an Integrierbarkeit erfülle. Wir wollen den fairen Preis eines solchen Derivats bestimmen. Wir betrachten eine Situation in der der Investor entscheiden kann, einen Teil δ seines Vermögens in das Derivat anzulegen um so seinen Wohlstand zu erhöhen.

$$W(\delta, x, p) = \sup_{\psi \in \mathcal{T}} E\left(u(X_{x-\delta}^\psi(T) + \frac{\delta}{p}Y)\right)$$

Definition 5.8 *Es sei die Funktion $\delta \mapsto W(\delta, x, p)$ für jedes Wertepaar (x, p) differenzierbar in $\delta = 0$. Es existiere eine eindeutige Lösung $\hat{p}(x)$ der Gleichung $\frac{\partial W}{\partial \delta}(0, x, p) = 0$.*

Dann heißt $\hat{p}(x)$ der faire Preis für Y im Zeitpunkt $t = 0$.

Der Preis $\hat{p}(x)$ ist gerade so groß, dass der Nutzen eines Investments in das Derivat Y neutral ist. Der Investor kann seinen maximalen Nutzen $V(x)$ nicht vergrößern, wenn er einen Teil seines Geldes in dem Derivat anlegt.

Das Konzept des fairen Preises stellt eine Erweiterung des arbitragefreien Preises für unvollständige Märkte dar. Zunächst ist sicherzustellen, dass das Konzept konsistent zu der Preisbildung in vollständigen Märkten ist. Dazu wollen wir zeigen, dass auf einem vollständigen Markt der faire Preis dem

Preis für das Replikationsportfolio entspricht.

Sei dazu p der Preis für ein Derivat Y und $p_0 = p$ sei der Preis für das Replikationsportfolio. Der Wert des Derivats in T ist gleich dem Wert des Replikationsportfolios. Dann gilt, dass $W(\delta, x, p) = W(0, x, p)$ für alle zulässigen $\delta > 0$. Damit gilt $\frac{\partial}{\partial \delta} W(0, x, p) = 0$ und p ist der faire Preis.

Sei umgekehrt p der faire Preis für das Derivat Y und es gelte $p_0 > p$. Falls der Investor für δ Geldeinheiten in das Derivat investiert und δ/p Einheiten des Replikationsportfolios verkauft, ergibt sich folgende Situation. Der Investor hat das Risiko aus dem Derivat eliminiert und hält ein Portfolio mit dem maximalen Nutzen $V(x + (\frac{p_0}{p} - 1)\delta)$. Da $p_0 > p$ folgt für alle $\delta > 0$:

$$V\left(x + \left(\frac{p_0}{p} - 1\right)\delta\right) > V(x)$$

Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial \delta} W(0, x, p) > 0$$

und ein Widerspruch zu der Annahme, dass p der faire Preis für das Derivat ist. Für $p_0 < p$ verläuft der Beweis analog. Damit gilt, dass der faire Preis in einem vollständigen Modell gleich dem Preis des Replikationsportfolios sein muss.

Bemerkung Aus Theorem 2.2 in [KS] folgt, dass eine optimale Strategie zur Maximierung des Nutzens genau dann existiert, wenn die *asymptotische Elastizität* der Nutzenfunktion $u(x)$ echt kleiner als 1 ist.

$$AE(u) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xu'(x)}{u(x)} < 1 \quad (3)$$

Diese Forderung ist für die von uns im Folgenden betrachteten Nutzenfunktionen erfüllt.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass das Supremum $V(x)$ angenommen wird. Dann existiert $\psi^* \in \mathcal{T}$ mit $V(x) = E(u(X_x^{\psi^*}))$. Die Strategie ψ^* ist die Lösung des Optimierungsproblems für den Erwartungsnutzen bei Anfangskapital x .

Theorem 5.9 (Davis)

Sei V differenzierbar auf $\mathbb{R}_+$ mit $V'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Dann ist der faire Preis $\hat{p}(x)$ aus Definition 5.8 gegeben durch

$$\hat{p} = \frac{E(u'(X_x^{\psi^*}(T))Y)}{V'(x)} = E_P\left(\frac{u'(X_x^{\psi^*}(T))}{V'(x)}Y\right) \quad (4)$$

Bemerkung Offenbar ist der Preis $\hat{p}$ aus Theorem 5.9 analog zu dem im Einperiodenmodell ermittelten Preis $E_{P^*}(Y)$ unter Verwendung der Dichte aus Gleichung (2).

Korollar 5.10 Sei $E_P(u'(X_x^{\psi^*})) < \infty$. Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q^u durch

$$\frac{dQ^u}{dP} = \frac{u'(X_x^{\psi^*})}{E_P(u'(X_x^{\psi^*}))} \quad (5)$$

Dann ist Q^u ein Martingalmaß.

Definition 5.11 Wenn das Maß Q^u wohldefiniert ist, heißt das Maß Q^u das Utility Martingale Measure (UMM) bezüglich $u(x)$.

Für den Beweis von Theorem 5.9 müssen wir noch folgendes Lemma angeben.

Lemma 5.12 Für eine beliebige Menge A sei $f : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Definiere zu $\delta \in \mathbb{R}$ die Funktion $v(\delta) := \sup_{\pi \in A} f(\pi, \delta)$. Zu $\delta_0 \in \mathbb{R}$, v differenzierbar in δ_0 , existiere $\pi^* \in A$ mit $v(\delta_0) = f(\pi^*, \delta_0)$ und die Abbildung $\delta \mapsto f(\pi^*, \delta)$ sei differenzierbar in δ_0 . Dann gilt

$$\frac{d}{d\delta} v(\delta_0) = \frac{\partial}{\partial \delta} f(\pi^*, \delta_0)$$

Beweis von Theorem 5.9

Sei $\psi^*(\delta) \in \mathcal{T}$ derart, dass

$$W(\delta, x, p) = E \left[u \left(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T) + \frac{\delta}{p} Y \right) \right]$$

für $\delta = 0$. Dann gilt mit Lemma 5.12

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} W(\delta, x, p) \right|_{\delta=0} = \frac{\partial}{\partial \delta} E \left[u \left(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T) + \frac{\delta}{p} Y \right) \right] \Big|_{\delta=0}$$

Um die Ableitung von $E(u(\cdot))$ zu bestimmen betrachten wir die Taylor-Entwicklung erster Ordnung von u um den Punkt $X_{x-\delta}^{\psi^*}(T)$ und anschließend den Erwartungswert. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & E \left[u \left(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T) + \frac{\delta}{p} Y \right) \right] \\ &= E(u(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T))) + \frac{\delta}{p} E(u'(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T))Y) + o(\delta) \end{aligned}$$

Vernachlässigung von $\mathbf{o}(\delta)$ und Differenzierung nach δ liefert

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \delta} E \left[u \left(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T) + \frac{\delta}{p} Y \right) \right] \right|_{\delta=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \delta} E(u(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T))) \right|_{\delta=0} + \frac{1}{p} E(u'(X_x^{\psi^*(0)}(T))Y) \end{aligned}$$

Es gilt nach Annahme $V(x) = E(u(X_x^{\psi^*(0)}(T)))$.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} E(u(X_{x-\delta}^{\psi^*(\delta)}(T))) \right|_{\delta=0} = -E(u'(X_x^{\psi^*(0)}(T))) = -V'(x)$$

Mit der Bedingung aus Definition 5.8 folgt für den fairen Preis $\hat{p}$

$$-V'(x) + \frac{1}{\hat{p}} E(u'(X_x^{\psi^*}(T))Y) = 0$$

und daraus die Behauptung. $\square$

5.5 Übergang zu Abstandsfunktionalen

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie ein äquivalentes Martingalmaß aus der Nutzenfunktion eines Marktteilnehmers hergeleitet werden kann. Ein Investor bewertet Derivate so, dass sein Nutzen maximiert wird. Die Bestimmung von Nutzenfunktionen und entsprechenden Parametern ist allerdings nicht trivial. Ein Investor ist in der Regel nicht in der Lage seine eigene Nutzenfunktion zu spezifizieren. Ein Ansatz zur Bestimmung der Nutzenfunktion ist die Auswertung von Investitionsentscheidungen in der Vergangenheit, wobei die Ergebnisse einer solchen Auswertung in der Regel weder über einen Zeitraum noch bezüglich der verschiedenen handelbaren Produkte konsistent sind, wie in [CGM] beschrieben.

Eine weitere Möglichkeit, ein Maß aus der Menge der äquivalenten Martingalmaß auszuwählen, verwendet eine Abstandsfunktion auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße. Die Ausgangssituation wird in [FI] beschrieben. Auf einem Raum von Wahrscheinlichkeitsmaßen können wir eine Abstandsfunktion von zwei Maßen Q und Q' definieren als

$$I(Q, Q') = E_Q \left[\Phi \left(\frac{dQ'}{dQ} \right) \right], Q \sim Q'$$

Dabei ist Φ eine reellwertige Funktion auf $(0, \infty)$ mit $\Phi(1) = 0$. Die Funktion Φ muss stetig, strikt konvex und differenzierbar auf dem Definitionsbereich sein. Mit der Funktion I können wir das risikoneutrale Maß bestimmen, indem wir das Minimum betrachten, falls dieses existiert. Q^* ist das risikoneutrale Maß, wenn gilt

$$I(Q^*, P) = \min_{Q_i \in M_e} I(Q_i, P)$$

Je nach Auswahl des Funktional Φ erhält man jeweils ein äquivalentes Martingalmaß mit minimalem Abstand zu dem realen Maß P .

Die Bestimmung des äquivalenten Bewertungsmaßes mit Hilfe einer Abstandsfunktion ist für uns aus folgendem Grund interessant. Man kann zu einer gegebenen Nutzenfunktion ein Abstandsfunktional auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße finden, sodass das risikoneutrale Maß, welches man mit dem Nutzenmaximierungsargument bestimmt, minimalen Abstand zu dem realen Maß hat. Dieser Zusammenhang wird in [BF] allgemein hergestellt. Bellini und Frittelli zeigen unter Annahme einer Nutzenfunktion entsprechend Definition 5.6, dass das Nutzen maximierende Maß ein Abstandsfunktional minimiert. Die Herleitung ist technischer Natur und verwendet funktionalanalytische Argumente vielmehr denn finanzmathematische. Im Rahmen dieser Arbeit soll die allgemeine Herleitung nicht thematisiert werden, lediglich die Ergebnisse werden im Folgenden verwendet. Stattdessen werden wir die Vorgehensweise anhand des Falls einer exponentiellen Nutzenfunktion aufzeigen. Das Nutzen maximierende Maß UMM stellt in diesem Fall das *Minimale Entropie Maß* dar, d.h. es minimiert den Abstand zu dem realen Maß, wenn als Abstandsfunktional die *relative Entropie* gewählt wird. Die Entropie wird in [F] ausführlich behandelt. Der Übergang von Nutzenmaximierung zu Abstandsminimierung erfolgt in [M], [K] und [FS].

5.5.1 Die relative Entropie

Sei $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$, $0 \in \mathbb{T}$ ein Intervall. Sei $\mathbb{X}$ eine Familie von reellwertigen, adaptierten stochastischen Prozessen $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, P)$. Die Räume $L^0(P)$, $L^\infty(P)$ und $L^1(P)$ bezeichnen die P -f.s. endlichen, beschränkten bzw. bezüglich P integrierbaren Zufallsvariablen.

Definiere die Menge

$$K = \text{Lin}\{H \cdot (X_t - X_s) | H \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_s, P), s, t \in \mathbb{T} : s \leq t, X \in \mathbb{X}\}$$

Dabei ist $H \cdot (X_t - X_s)$ wie folgt zu interpretieren. Investiert man gemäß der Handelsstrategie H in die Basisassets, deren Preisverläufe durch X beschrieben werden, und hält die Anteile über einen Zeitraum $[s, t]$, so ist $H \cdot (X_t - X_s)$ der resultierende Gewinn. Wir bezeichnen ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q als Martingalmaß, falls alle Elemente $X \in \mathbb{X}$ unter Q Martingale bezüglich $\mathcal{F}_t$ sind. Dann bezeichnet $\mathcal{M}$ die Menge der absolutstetigen, $\mathcal{M}_e$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße zu P .

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{Q \ll P \mid E_Q(k) = 0 \ \forall k \in K\} \\ \mathcal{M}_e &= \{Q \in \mathcal{M} \mid Q \sim P\}\end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir ein Abstandsfunktional auf der Menge $\mathbb{M}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definitionen 5.13 Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist die relative Entropie von Q bezüglich P definiert als:

$$I(Q, P) = \begin{cases} E_P\left(\frac{dQ}{dP} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right) & : \text{für } Q \ll P \\ +\infty & : \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Für eine Teilmenge $\mathcal{Q} \subset \mathbb{M}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße setzen wir:

$$I(\mathcal{Q}, P) = \inf\{I(Q, P) : Q \in \mathcal{Q}\}$$

Definition 5.14 Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_0 \in \mathcal{M}$ heißt Minimales Entropie Maß (MEM), falls gilt:

$$I(Q_0, P) = \min_{Q \in \mathcal{M}} I(Q, P) = \min_{Q \in \mathcal{M}} E_P\left(\frac{dQ}{dP} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right)$$

Bemerkungen

- (i) Das Minimum aus Definition 5.14 kann auch über die Menge $\mathcal{M}^0 = \{Q \in \mathcal{M} : I(Q, P) < \infty\}$ gebildet werden.
- (ii) Setze $\phi(x) := x \ln(x)$, $x \in (0, \infty)$ und $\phi(0) := 0$. Dann können wir $I(Q, P)$ für $Q \ll P$ schreiben als

$$I(Q, P) = E_P\left(\phi\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right)$$

- (iii) Es gilt $I(Q, P) \geq 0 \ \forall Q \in \mathbb{M}$ und $I(Q, P) = 0 \iff Q = P$. Die Abbildung ϕ ist strikt konvex und es folgt

$$I(Q, P) = E_P \left(\phi \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right) \geq \phi \left(E_P \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right) = 0$$

und Gleichheit genau dann, wenn $Q = P$.

Nach Angabe dieser Definitionen werden als nächstes Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit eines MEM getroffen.

Theorem 5.15 *Sei $I(\mathcal{M}, P) < \infty$ und X beschränkt für alle $X \in \mathbb{X}$. Dann existiert ein eindeutiges MEM.*

Beweis Eindeutigkeit folgt direkt, da die Abbildung $Q \mapsto I(Q, P)$ streng konvex ist.

Um die Existenz zu zeigen, betrachten wir eine Folge $(Q_n)_{n \geq 1} \subset M^0$ mit $I(Q_n, P) \downarrow I(\mathcal{M}, P)$. Mit $\sup_{n \geq 1} E_P \left(\phi \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right) \leq I(Q_1, P)$ folgt gleichmäßige Integrierbarkeit der Folge $\left(\frac{dQ_n}{dP} \right)_{n \geq 1}$. Das Kompaktheitstheorem von Dunford-Pettis liefert eine Teilfolge $\left(\frac{dQ_{n_k}}{dP} \right)_{k \geq 1}$, die in der $\sigma(L^1(P), L^\infty(P))$ -Topologie konvergiert.

Dann existiert nach dem Hahn-Banach-Theorem eine Folge $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$, $\tilde{Q}_n \in \text{Conv}(Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots)$, die in der $L^1(P)$ -Norm gegen einen Grenzwert $\psi_0 = \frac{dQ_0}{dP_0} \in L^1(P)$ konvergiert, wobei Conv die konvexe Hülle bezeichnet. Es gilt $\tilde{Q}_n \in \mathcal{M}$, da $Q_n \in \mathcal{M}^0$ und die Prozesse $X \in \mathbb{X}$ sind nach Voraussetzung beschränkt. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\tilde{Q}_n}(f) = E_P \left(f \frac{d\tilde{Q}_n}{dP} \right) \longrightarrow E_P \left(f \frac{dQ_0}{dP} \right) = E_{Q_0}(f) \\ &\forall f \in K \subseteq \mathcal{L}^\infty(P) \end{aligned}$$

Also gilt $Q_0 \in \mathcal{M}$ und Q_0 ist ein Martingalmaß. Um zu zeigen, dass Q_0 das MEM ist, betrachten wir die Eigenschaften der relativen Entropie. Die Konvexität der Abbildung $Q \mapsto I(Q, P)$ impliziert $I(\tilde{Q}_n, P) \leq I(Q_n, P)$, da $I(Q_n, P) \downarrow I(\mathcal{M}, P)$ und $\tilde{Q}_n \in \text{Conv}(Q_n, Q_{n+1}, \dots)$. Dann folgt mit dem

Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
 I(Q_0, P) = E_P \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi \left(\frac{d\tilde{Q}_n}{dP} \right) \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_P \left(\phi \left(\frac{d\tilde{Q}_n}{dP} \right) \right) \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\tilde{Q}_n, P) \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(Q_n, P) = I(\mathcal{M}, P)
 \end{aligned}$$

□

Folglich existiert ein eindeutiges MEM. Allerdings ist $Q_0 \in \mathcal{M}$ aus dem Raum der zu P absolutstetigen Maße. Im Sinne des betrachteten Finanzmarktmodells sind wir an einem äquivalenten Martingalmaß interessiert.

Theorem 5.16 *Sei $Q_0 \in \mathcal{M}$ ein MEM. Falls ein Maß $Q_1 \in \mathcal{M}_e$ mit $I(Q_1, P) < +\infty$ existiert, so ist $Q_0 \sim P$.*

Für den Beweis von Theorem 5.16 wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 5.17 *Seien $Q_0, Q_1 \in \mathcal{M}^0$ und $Q_x = xQ_1 + (1-x)Q_0$, $x \in [0, 1]$. Dann ist $E_{Q_1} \left(\ln \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \right)$ wohldefiniert und es gilt:*

$$\left. \frac{d}{dx} I(Q_x, P) \right|_{x=0} = E_{Q_1} \left(\ln \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \right) - I(Q_0, P)$$

Beweis Setze $I(x) := \phi \left(\frac{dQ_x}{dP} \right)$, $x \in [0, 1]$. Da ϕ konvex folgt, dass $\frac{I(x) - I(0)}{x}$ monoton fallend für $x \downarrow 0$ ist. Aus $I(Q_1, P) < \infty$, $I(Q_0, P) < \infty$ folgt $E_P(I(1) - I(0)) < \infty$ und $\left(\frac{dQ_1}{dP} \ln \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \right)^+ \in L^1(P)$. Monotone Konvergenz liefert:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dx} I(Q_x, P) \right|_{x=0} &= \lim_{x \downarrow 0} E_P \left(\frac{I(x) - I(0)}{x} \right) = E_P(I'(0)) \\
 &= E_P \left(\phi' \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{dQ_x}{dP} \right) \right|_{x=0} \right) = E_P \left(\phi' \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \left(\frac{dQ_1}{dP} - \frac{dQ_0}{dP} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann mit $\phi'(x) = \ln(x) + 1$.

□

Beweis von Theorem 5.16

Setze $Q_x = xQ_1 + (1-x)Q_0 \in \mathcal{M}$, $x \in [0, 1]$. Dann gilt $\left. \frac{d}{dx} I(Q_x, P) \right|_{x=0} \geq 0$, sonst existiert $x > 0$ mit $I(Q_x, P) < I(Q_0, P)$. Widerspruch zur Minimalität von Q_0 .

Damit folgt $Q_0 \sim P$, da sonst $P\left(\frac{dQ_0}{dP} = 0\right) > 0$ und wegen $Q_1 \in \mathcal{M}_e$ $Q_1\left(\frac{dQ_0}{dP} = 0\right) > 0$ und dann mit Lemma 5.17 und $\phi(0) = -\infty$

$$\left.\frac{d}{dx}I(Q_x, P)\right|_{x=0} < 0 \quad \square$$

Wir erhalten folglich zu beschränkten Preisprozessen ein MEM, falls ein Martingalmaß existiert, das endlichen Abstand zu P aufweist. Falls zusätzlich ein äquivalentes Martingalmaß mit endlichem Abstand zu P existiert, ist das MEM ein äquivalentes Martingalmaß und kann zu Bewertungszwecken verwendet werden. Folgendes Theorem gibt Aufschluss über die Gestalt eines MEM. Wir definieren dazu zunächst die Mengen

$$\mathfrak{L} = \bigcap_{Q \in \mathcal{M}} L^1(Q)$$

$$C_0 = \{f \in \mathfrak{L} : E_Q(f) \leq 0 \forall Q \in \mathcal{M}^0\}$$

$\mathfrak{L}$ ist die Menge der Zufallsvariablen, die bezüglich aller zu P absolutstetigen Martingalmaße integrierbar sind.

Theorem 5.18 *Es gelte $I(\mathcal{M}_e, P) < \infty$. Q_0 ist MEM genau dann, wenn*

- (i) $Q_0 \in \mathcal{M}$
- (ii) $\frac{dQ_0}{dP} = c \exp(-f_0)$ P -f.s., wobei $f_0 \in \mathcal{L}^1(Q_0)$, $E_{Q_0}(f_0) = 0$ und $c > 0$
- (iii) $f_0 \in C_0$

Beweis Zeige zunächst die Rückrichtung. Aus (i) und (ii) folgt $Q_0 \sim P$, da $\frac{dQ_0}{dP} > 0$ P -f.s., und $I(Q_0, P) < \infty$.

Sei Q_1 Wahrscheinlichkeitsmaß mit $I(Q_1, P) < \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(Q_1, P) &\geq I(Q_1, P) - I(Q_1, Q_0) \\ &= E_P\left(\phi\left(\frac{dQ_1}{dP}\right)\right) - E_{Q_0}\left(\phi\left(\frac{dQ_1}{dQ_0}\right)\right) \\ &= E_{Q_1}\left(\ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)\right) \\ &= I(Q_0, P) + E_P\left(\left(\frac{dQ_1}{dP} - \frac{dQ_0}{dP}\right) \ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)\right) \\ &= I(Q_0, P) - c E_{Q_1}(f_0) \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen mit $E_{Q_0}(f_0) = 0$ folgt. Aus (iii) folgt, dass $E_{Q_1}(f_0) \leq 0$, da $Q_1 \in \mathcal{M}^0$ nach Voraussetzung gilt. Dann folgt:

$$I(Q_1, P) \geq I(Q_0, P) \quad \forall Q_1 \in \mathcal{M}$$

Damit ist Q_0 das MEM.

Um die Hinrichtung zu zeigen, sei Q_0 das MEM. Dann liefert $I(\mathcal{M}_e, P) < \infty$ die Äquivalenz von Q_0 und P mit Theorem 5.16 und damit (i).

Weiter folgt aus der Äquivalenz von Q_0 und P , dass die Radon-Nikodym Dichte $\frac{dQ_0}{dP}$ existiert. Setze $f_0 = I(Q_0, P) - \ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)$ P -f.s. Es gilt $I(Q_0, P) < \infty$, also:

$$\frac{dQ_0}{dP} = \exp(I(Q_0, P) - f_0) = \exp(I(Q_0, P)) \exp(-f_0)$$

Mit $c := \exp(I(Q_0, P))$ folgt (ii).

Zu $Q_1 \in \mathcal{M}^0$ definiere $Q_x = xQ_1 + (1-x)Q_0$. Da Q_0 MEM folgt

$$\left. \frac{d}{dx} I(Q_x, P) \right|_{x=0} \geq 0$$

Mit Lemma 5.17 folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_{Q_1} \left[\ln \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \right] - I(Q_0, P) \\ &= E_{Q_1} \left[(-1) \left(I(Q_0, P) - E_{Q_1} \left[\ln \left(\frac{dQ_0}{dP} \right) \right] \right) \right] \\ &= -E_{Q_1}(f_0) \leq I(Q_1, P) - I(Q_0, P) < \infty \end{aligned}$$

Da Q_0 MEM ist die letzte Differenz größer oder gleich null. Folglich gilt $0 \leq -E_{Q_1}(f_0) < \infty$ und (iii) folgt, da Q_1 aus $\mathcal{M}_0$ beliebig gewählt war. $\square$

5.6 Relative Entropie und Erwartungsnutzen

Es ist nun möglich, den Übergang von der Generierung eines äquivalenten Martingalmaßes aus einem Nutzenmaximierungsargument zu der Ermittlung eines Maßes mittels Abstandsfunktion zu vollziehen. Wir betrachten den Spezialfall einer exponentiellen Nutzenfunktion $u(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, wobei α die Risikoaversion eines Marktteilnehmers darstellt. Die Herleitung im Einperiodenmodell von [FS] dient der Anschaulichkeit.

Das Konzept des *neutralen* Preises in [K] verwendet ein diskretes Mehrperiodenmodell. Hier wird der Markt durch die Auswahl des Bewertungsmaßes so vervollständigt, dass der maximale erreichbare terminale Nutzen minimiert wird. Das Ergebnis ist für diskrete Modelle dasselbe, welches [BF] mit Hilfe des *Minimax-Maßes* für allgemeine Modelle erzielen.

Der Übergang für exponentielle Nutzenfunktionen von dem *fairen* Preis für ein Derivat gemäß Abschnitt 5.4.1 zum MEM erfolgt in [M].

5.6.1 Herleitung im Einperiodenmodell

Wir betrachten eine Menge von zulässigen Handelsstrategien $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $Y \in \mathbb{R}^d$ sei der abgezinste Netto-Erlös von d handelbaren Wertpapieren. Dann ist das Ziel, den Erwartungsnutzen $E(u(\xi \cdot Y)) = 1 - E(\exp(-\alpha \xi \cdot Y))$ zu maximieren, wobei wir annehmen, dass $E(u(\xi \cdot Y)) > -\infty$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Die Momentenerzeugende Funktion (MEF) von Y lautet:

$$Z(\lambda) = E(\exp(\lambda \cdot Y)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d$$

Die Maximierung des Nutzens ist folglich äquivalent zur Minimierung der MEF, wenn wir $\lambda := -\alpha \xi$ setzen. Wir stellen fest, dass der maximal erreichbare Nutzen von der Risikoaversion α nicht abhängt.

Definition 5.19 Die Exponentialfamilie von P bezüglich Y ist die Menge von Maßen $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}^d\}$ definiert durch

$$\frac{dP_\lambda}{dP} = \frac{\exp(\lambda \cdot Y)}{Z(\lambda)} \quad (7)$$

Bemerkung λ und λ' liefern dasselbe Element in der Exponentialfamilie genau dann, wenn

$$(\lambda - \lambda')Y = 0 \quad P - f.s.$$

Wir können mit Hilfe der Exponentialfamilie den Zusammenhang zwischen Nutzenmaximierung und Minimierung der relativen Entropie herstellen.

Lemma 5.20 Setze

$$m(\lambda) := E_\lambda(Y) = E_P \left(\frac{\exp(\lambda \cdot Y)}{Z(\lambda)} Y \right) = \frac{E(Y \exp(\lambda \cdot Y))}{Z(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d$$

Die Funktion

$$\lambda \mapsto \lambda m_0 - \log Z(\lambda)$$

nimmt ihr Maximum genau dann an, wenn m_0 im relativen Inneren der konvexen Hülle des Trägers von P^Y liegt: $m_0 \in \text{ri}\Gamma(P^Y)$, wobei P^Y die Verteilung von Y unter P ist.

In diesem Fall erfüllt ein Maximierer λ^* :

$$m_0 = m(\lambda^*) = E_{\lambda^*}(Y)$$

Beweis in [FS]. □

Theorem 5.21 Sei $m_0 := m(P_{\lambda_0})$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$. $I(Q, P)$ sei die relative Entropie. Dann gilt für ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $E_Q(Y) = m_0$

$$I(Q, P) \geq I(P_{\lambda_0}, P) = \lambda_0 m_0 - \log Z(\lambda_0)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $Q = P_{\lambda_0}$
Insbesondere maximiert λ_0 die Funktion

$$\lambda \mapsto \lambda m_0 - \log Z(\lambda)$$

über alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Beweis Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $E_Q(Y) = m_0$. Wir zeigen zunächst, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$I(Q, P) = I(Q, P_\lambda) + \lambda m_0 - \log Z(\lambda)$$

Falls $Q \not\ll P$ sind beide Seiten gleich $+\infty$. Für $Q \ll P$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} &= \frac{dQ}{dP_\lambda} \frac{dP_\lambda}{dP} = \frac{dQ}{dP_\lambda} \frac{\exp(\lambda \cdot Y)}{Z(\lambda)} \\ \implies I(Q, P) &= E_Q \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) = E_Q \left(\ln \frac{dQ}{dP_\lambda} + \log \exp(\lambda \cdot Y) - \log Z(\lambda) \right) \\ &= I(Q, P_\lambda) + \lambda E_Q(Y) - \log Z(\lambda) \end{aligned}$$

Aus $I(Q, P) \geq 0$ folgt

$$I(Q, P_\lambda) \geq \lambda m_0 - \log Z(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$ und für alle Maße Q mit $E_Q(Y) = m_0$. Gleichheit gilt für $I(Q, P_\lambda) = 0 \iff Q = P_\lambda$.
Dann gilt $m(\lambda) = m_0$ und jedes solche λ erfüllt $I(P_\lambda, P) = \lambda m_0 - \log Z(\lambda)$.
Dann maximiert λ_0 die Funktion $\lambda m_0 - \log Z(\lambda)$ gemäß Lemma 5.20 und P_{λ_0} minimiert die relative Entropie auf der Menge

$$M_0 := \{Q \in \mathcal{M} \mid E_Q(Y) = m_0\}$$

Nach Bemerkung 5.5.1 (iii) ist die relative Entropie $I(Q, P)$ streng konvex, folglich ist das Minimum auf der Menge M_0 eindeutig. Alle $\lambda \in \mathbb{R}^d$ mit $m(\lambda) = m_0$ induzieren dasselbe Maß P_{λ_0} . □

Bemerkung Für $m_0 = 0$ ist die Menge M_0 die Menge der Martingalmaße.

5.7 Abstandsfunktionale und Nutzenfunktionen

Der Zusammenhang zwischen Nutzenfunktion und Abstandsfunktional gilt nicht nur für die oben gewählten Spezialfälle. Wie in [BF] gezeigt, kann einem Nutzen maximierenden Maß UMM ein passendes Abstandsfunktional $H(Q, P)$ zugeordnet werden, sodass das UMM minimalen Abstand zum realen Maß hat. Aus [BF] entnehmen wir folgende Beispiele:

- *Log Utility* Sei $u(x) = \ln(x)$, $x \in (0, \infty)$. Dann minimiert das UMM die relative Entropie $I(P, Q)$ von P bezüglich Q :

$$I(P, Q) = E_Q \left(\phi \left(\frac{dP}{dQ} \right) \right)$$

- *Power Class of Utility*

$$u(x) = \frac{p}{1-p} |x|^p, \text{ wobei } \begin{cases} x \in (0, \infty) & : p < 0 \\ x \in [0, \infty) & : 0 < p < 1 \\ x \in (-\infty, 0] & : p > 1 \end{cases}$$

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

- (i) $p < 0$. Dann minimiert das UMM das Hellinger Integral:

$$H(q; Q, P) = E_P \left(\left(\frac{dQ}{dP} \right)^q \right)$$

(ii) $p = \frac{1}{2}$. Dann ist $u(x) = \sqrt{x}$ und das UMM minimiert

$$H(Q, P) = E_P \left(\frac{dP}{dQ} \right)$$

(iii) $p = \frac{2}{3}$. Dann gilt $u(x) = 2\sqrt[3]{x^2}$ und folgendes Abstandsfunktional wird minimiert:

$$H(Q, P) = Var_P \left(\frac{dP}{dQ} \right)$$

(iv) $p = 2$. Dann gilt $u(x) = -2x^2$ und das UMM minimiert

$$H(Q, P) = Var_P \left(\frac{dQ}{dP} \right)$$

Bemerkung Die Bedingung aus Gleichung (3) an die asymptotische Elastizität ist für die *Power Class* für $p > 1$ nicht erfüllt. Diese Nutzenfunktionen werden im Folgenden außer Acht gelassen.

6 Aktuarielle Bewertung

Im letzten Kapitel ist die finanzmathematische Bewertungstheorie für unvollständige Märkte vorgestellt worden. Wesentlich für die Theorie ist ein Marktmodell mit Basisassets und Derivaten, in dem Handelsstrategien für Basisassets eine entscheidende Rolle spielen. Bei der Betrachtung von Strommärkten stößt die finanzmathematische Vorgehensweise an ihre Grenzen. Der Handel mit Spotenergie ist als Day-Ahead- und Intraday-Handel durchaus möglich. Jedoch kann Strom nicht gelagert werden, sodass jene Handelsstrategien ausgeschlossen sind, die den Kauf und das Halten der Basisassets vorsehen. Die Verwendung finanzmathematischer Verfahren zur Bewertung von Stromderivaten ist somit fraglich, obgleich in der Literatur üblich, vergleiche etwa [G], [BSK] oder [LS].

Für die Bewertung des Versicherungsvertrags müssen wir ein geeignetes Bewertungsmaß finden. Dazu werden wir einen Ansatz der aktuariellen Bewertung verfolgen. Der Kern der aktuariellen Bewertung besteht darin, dass Versicherungsverträge durch den erwarteten Verlust bewertet werden. Der Verlust wird bestimmt durch die Ausfallrate der Kraftwerke und die Entwicklung der Strompreise. Die Schwierigkeit besteht in der Ermittlung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Verlust.

Im Rahmen der aktuariellen Bewertung fassen wir Forward-Kontrakte als Basisverträge eines Versicherungsmarktes für Strom auf. Aus den beobachtbaren Forward-Preisen können wir auf die Verteilung schließen, mit der vom Markt Versicherungen für Strom bewertet werden. Wir bezeichnen Wahrscheinlichkeitsmaße als risikoneutral, wenn sie zu dem realen Maß P äquivalent sind und die Forward-Kurve beschreiben. Für ein risikoneutrales Maß Q gilt für alle $t \geq 0$

$$E_Q(S_t) = F_0(t)$$

wobei $F_0(t)$ den Forward-Preis im Zeitpunkt 0 für eine Lieferung in t bezeichnet und S_t den Spotpreis im Zeitpunkt t .

Aufgrund der Unvollständigkeit der betrachteten Strom- und Versicherungsmärkte ist das Wahrscheinlichkeitsmaß Q im Allgemeinen nicht eindeutig. Für die Bewertung wählen wir aus der Menge der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße das Maß aus, welches den Abstand zu dem realen Maß P auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße minimiert.

Im folgenden Kapitel werden wir ein Spotpreismodell für Strom vorstellen und Verfahren zur Schätzung der Parameter erläutern. In Kapitel 8 ermitteln

wir die Gestalt des Modells unter einem risikoneutralen Maß und zeigen das Vorgehen zur Auswahl des Bewertungsmaßes auf. In Kapitel 9 werden dann Parameter für das Modell geschätzt und drei verschiedene Versicherungskontrakte numerisch bewertet.

7 Der Preisprozess

Im vorigen Kapitel wurde das Verfahren beschrieben, mit dem wir einen physischen Versicherungskontrakt bewerten wollen. Im folgenden Kapitel werden wir ein Modell für die Spotpreisentwicklung angeben. Das Spotpreismodell muss geeignet sein die sogenannten *Stylized Facts* des Gutes Strom wiederzugeben. Diese umfassen eine Bewegung der Spotpreise im Jahres-, Wochen- und Tagesrhythmus, sowie eine stochastische Entwicklung um ein langfristiges Niveau und die auf verschiedenen Strommärkten zu beobachtenden Spikes, also Sprünge des Spotpreises mit kurzfristiger Rückkehr zum langfristigen Preisniveau. Spikes dieser Art finden sich auch auf dem deutschen Strommarkt. In der Literatur werden verschiedene Ansätze verfolgt, dazu gehören *Jump-Diffusion*-Modelle und Modelle die auf Levy-Prozessen beruhen, insbesondere *Regime-Switching*-Modelle.

Im nächsten Schritt werden anhand von beobachteten Marktdaten die Parameter des Modells unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß P kalibriert. Die Parameter werden dabei so bestimmt, dass das Modell die beobachtete Spotpreisentwicklung möglichst genau beschreibt. Später werden die realen Parameter dazu genutzt, den Abstand des Maßes P zu äquivalenten Maßen Q anzugeben.

7.1 Das Kluge-Modell

Wir verwenden eine Variante des in [KL] vorgeschlagenen Modells. Der Spotpreis setzt sich aus drei Komponenten zusammen:

$$S_t = f(t) + X_t + Y_t \quad (8)$$

Dabei stellt $f(t)$ den deterministischen Teil dar, X_t und Y_t sind stochastische Komponenten.

$$dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma dW_t \quad (9)$$

$$dY_t = -\beta Y_t dt + J_t dN_t \quad (10)$$

Die σ -Algebra $\mathcal{F}_t$, welche die Informationen der Preisentwicklung sammelt, wird von X_t und Y_t erzeugt.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, Y_t)$$

Es seien weiter die Prozesse (W_t) , (N_t) und die Sprunghöhen (J_i) paarweise unabhängig.

Die einzelnen Komponenten des Spotpreismodells werden im Folgenden vorgestellt.

7.1.1 Zyklen im Strommarkt

Die deterministische Komponente $f(t)$ wird in dem Modell verwendet, um die komplexen Zyklen des Strommarkts abzubilden. Wie in Kapitel 2 beschrieben ist Strom ein Gut mit speziellen Eigenschaften. Fehlende Lagerfähigkeit und geringe Substituierbarkeit führen zu hoher Volatilität der Spotpreise und zu kurzzeitigen Spikes mit extrem hohen Preisen, sowie zu variierenden Preisniveaus zu bestimmten Tages- und Jahreszeiten. Der Spotpreis richtet sich gemäß der Merit Order nach dem Kraftwerk mit den höchsten Grenzkosten, welches Strom liefert. Ist die Nachfrage hoch, können Kraftwerke mit niedrigen Grenzkosten, etwa Kernkraftwerke, die Nachfrage nicht mehr alleine bedienen, sodass auch Steinkohlekraftwerke oder Gaskraftwerke Strom zu höheren Grenzkosten produzieren.

Der Stromverbrauch richtet sich nach äußeren Einflüssen. Im Winter wird in Deutschland mehr Strom verbraucht als im Sommer. Die Gründe dafür sind der höhere Bedarf an elektrischem Licht und an Wärme, die in Teilen durch Strom erzeugt wird. In wärmeren Gebieten, etwa in Südeuropa oder den südlichen USA, ist der Verbrauch im den Sommermonaten deutlich höher als während des Winterhalbjahres. Dies erklärt sich durch einen hohen Bedarf an Kühlung durch Klimaanlage, welche mit Strom betrieben werden.

Desweiteren kann man im Wochenrhythmus Schwankungen beobachten, mit hohem Verbrauch an Werktagen und niedrigem an Wochenenden. Innerhalb eines Tages ist der Verbrauch während der Arbeitsstunden zwischen 8.00 Uhr und 20.00 Uhr höher als am Rest des Tages.

Die deterministische Funktion $f(t)$ kann man folglich als Summe der verschiedenen Einflüsse darstellen.

$$f(t) = a_0 + f_Y(t) + f_W(t) + f_D(t) \quad (11)$$

wobei $t \in \mathbb{N} : 1 \leq t \leq \mathcal{N}$, und f_Y eine Jahresschwankung, f_M eine Monatsschwankung und f_D eine tägliche Schwankung darstellen. Für ein Tagespreismodell gilt dann $\mathcal{N} = 365$, für ein Stundenpreismodell $\mathcal{N} = 8760$. Der Parameter a_0 stellt ein konstantes Niveau dar, um welches der Spot-

preis schwankt. In [KL] wird ein Design aus sich überlagernden Sinus- und Cosinusschwingungen für den Jahres- und Wochenzyklus vorgeschlagen.

$$f_Y(t) + f_W(t) := \sum_{i=1}^6 a_i \cos(2\pi\gamma_i t) + b_i \sin(2\pi\gamma_i t)$$

$\gamma_1 = \frac{1}{N}$, $\gamma_2 = \frac{2}{N}$ und $\gamma_3 = \frac{4}{N}$ sind jährliche Schwingungen, während $\gamma_4 = \frac{1}{W}$, $\gamma_5 = \frac{2}{W}$ und $\gamma_6 = \frac{4}{W}$ mit $W \in \{7, 168\}$ wöchentliche Schwingungen darstellen.

Die Preisunterschiede innerhalb eines Tages sind im Tagespreismodell offensichtlich irrelevant, folglich gilt $f_D(t) \equiv 0$ für $N = 365$. Für ein Stundenpreismodell können analog zusätzliche Schwingungen addiert werden. Dieses Vorgehen ist allerdings bedingt sinnvoll, da sich der Strompreis in der Baseload-Phase auf einem durchgehend niedrigen Niveau mit geringen Schwankungen bewegt. Alternativ schlagen wir folgende Darstellung für $f_D(t)$ vor:

$$f_D(t) = \mu_D 1_{\{k24 + [8, 20] : 0 \leq k \leq 364\}}(t)$$

Die Funktion $f_D(t)$ erhöht den Spotpreis während der Peakload-Phase eines Tages um den Faktor μ_D , wobei $k24 + [8, 20] := [8 + k24, 20 + k24]$ für $0 \leq k \leq 346$.

7.1.2 Der Diffusions-Prozess

Der Spotpreis für Strom hängt von den stochastischen Größen Angebot und Nachfrage ab. Obwohl die Nachfrage, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, gewissen Saisonalitäten unterliegt, ist der Spotpreis natürlich nicht deterministisch.

Die stochastische Entwicklung um die deterministische Funktion $f(t)$ wird mit einem *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* mit Langfristniveau 0 und Anfangsbedingung $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ beschrieben.

$$dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma dW_t$$

Dabei ist $\kappa \in \mathbb{R}_+$ die Mean-Reversion-Geschwindigkeit und $\sigma \in \mathbb{R}_+$ die Standardabweichung des Wiener Prozesses W_t .

Satz 7.1 *Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess in der obigen Form hat die Lösung:*

$$X_t = x_0 \exp(-\kappa t) + \sigma \int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s) \quad (12)$$

Beweis Wir leiten die Lösung mit Hilfe von Itô's Produktregel her. Betrachten dazu die Funktion $g(t, x) = \exp(\kappa t)x$. Dann gilt

$$dg(t, X_t) = X_t d\exp(\kappa t) + \exp(\kappa t) dX_t + d[\exp(\kappa \cdot), X](t)$$

Dabei ist der letzte Summand gleich Null, da $\exp(\kappa t)$ eine stetige deterministische Funktion und X_t stetig ist. Dann folgt mit der Definition von dX_t

$$\begin{aligned} dg(t, X_t) &= \kappa \exp(\kappa t) dt X_t + \exp(\kappa t) (-\kappa X_t dt + \sigma dW_t) \\ &= \exp(\kappa t) \sigma dW_t \\ \implies \int_0^t dg(s, X_s) &= \int_0^t \sigma \exp(\kappa s) dW(s) \\ \implies \exp(\kappa t) X_t - x_0 &= \sigma \int_0^t \exp(\kappa s) dW(s) \\ \implies X_t &= x_0 \exp(-\kappa t) + \sigma \int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s) \end{aligned}$$

□

Dabei ist das Integral über die Brownsche Bewegung ein *Itô Integral*. Weiter ist das Itô Integral $\sigma \int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s)$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - \exp(-2\kappa t))$.

Korollar 7.2

$$\begin{aligned} (i) \quad E(X_t) &= x_0 \exp(-\kappa t) \\ (ii) \quad Var(X_t) &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - \exp(-2\kappa t)) \end{aligned}$$

Beweis

(i)

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(x_0 \exp(-\kappa t) + \sigma \int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s)\right) \\ &= x_0 \exp(-\kappa t) + \sigma E\left(\int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s)\right) \end{aligned}$$

Da $\int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s)$ ein Itô-Integral und folglich ein Martingal ist, wissen wir, dass $E(\int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s)) = 0$. Damit folgt:

$$E(X_t) = x_0 \exp(-\kappa t)$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \sigma^2 \text{Var} \left(\int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s) \right) \\ &= \sigma^2 E \left(\left(\int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

da $\int_0^t \exp(\kappa(s-t)) dW(s)$ unabhängig von x_0 ist und einen deterministischen Integranden hat. Mit der Itô Isometrie lässt sich dann die Varianz bestimmen. Dann gilt:

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \int_0^t \exp(2\kappa(s-t)) ds = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - \exp(-2\kappa t))$$

□

Aus der Verteilung des Prozesses X_t ergibt sich die MEF.

Lemma 7.3 *Sei (X_t) ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit Anfangswert x_0 und langfristigem Niveau 0. Dann ist die MEF von X_t*

$$M_X(\theta, t) := E(e^{\theta X_t}) = \exp \left(\theta x_0 e^{-\kappa t} + \theta^2 \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \right) \quad (13)$$

Beweis Siehe [KL]

□

7.1.3 Der Spike-Prozess

Die auf dem deutschen Strommarkt zu beobachtenden starken Preisausschläge in Phasen hoher Stromnachfrage werden mit einem Spike-Prozess Y_t modelliert. Der Spike-Prozess genügt der folgenden stochastischen Differentialgleichung (SDE):

$$dY_t = -\beta Y_{t-} dt + J_t dN_t \quad (14)$$

Der Prozess N_t ist ein Poisson-Prozess mit Intensität λ . Der Prozess J_t beschreibt die Höhe eines Sprungs. J_t ist definiert durch

$$J_t = \begin{cases} J_i & : dN_t = 1, N_t = i \\ 0 & : \text{Sonst} \end{cases} \quad (15)$$

Die Zufallsgrößen J_i , $i \in \mathbb{N}$ sind unabhängig und identisch verteilt. J_i beschreibt die Höhe des i -ten Sprungs. Die Intensität λ gibt die Häufigkeit der Spikes an. Der Mean-Reversion Parameter β steuert die Geschwindigkeit, mit der der Sprungprozess auf das langfristige Niveau zurückgeführt wird. Wir beobachten, dass Spikes im Strommarkt nicht sehr lange vorhalten. Vielmehr kehrt der Spotpreis in der Regel im Verlauf eines Tages auf sein altes Niveau zurück. Für die Modellierung bedeutet das, dass eine hohe Mean-Reversion-Geschwindigkeit β verwendet werden muss.

Die starke Mean-Reversion Eigenschaft des Spike-Prozesses steht in Kontrast zu der deutlich geringeren Mean-Reversion-Geschwindigkeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Durch die Aufspaltung des stochastischen Teils der Spotpreisentwicklung in zwei separate Prozesse (X_t) und (Y_t) können die verschiedenen Rückkehrgeschwindigkeiten modelliert werden.

Satz 7.4 *Sei der Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Spike Prozess, der (14) genügt. Sei $\{J_1, J_2, \dots\}$ die Folge der durch (15) definierten unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, deren Momentenerzeugende Funktion $M_J(\theta) := E(\exp(\theta J))$ wohldefiniert ist für $\theta \in C \subset \mathbb{C}$. Seien weiter $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ die zufälligen Sprungzeiten des homogenen Poisson-Prozesses $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Intensität λ . Als Anfangsbedingung setzen wir $Y_0 = 0$. Dann lautet die Lösung der SDE (14)*

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\beta(t-\tau_i)} J_i \quad (16)$$

Die Momentenerzeugende Funktion von Y_t ist gegeben durch:

$$M_Y(\theta, t) := E(\exp(\theta Y_t)) = \exp \left(\lambda \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta s}) - 1 ds \right), \quad \forall \theta \in C \quad (17)$$

Beweis Betrachte einen stochastischen Prozess $Z_t := e^{\beta t} Y_t$. Es gilt:

$$dZ_t = de^{\beta t} Y_t + e^{\beta t} dY_t + d[e^{\beta \cdot}, Y]_t$$

Die Kovariation ist gleich 0. Damit folgt:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \beta e^{\beta t} Y_t dt + e^{\beta t} (-\beta Y_t dt + J_t dN_t) \\ \implies dZ_t &= e^{\beta t} J_t dN_t \end{aligned}$$

Integration liefert

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t e^{\beta s} J_s dN_s = \sum_{i=1}^{N_t} e^{\beta \tau_i} J_i$$

wobei τ_i die Sprungzeiten des Poisson-Prozesses darstellen. Mit der Definition von Z_t und $Y_0 = 0$ folgt

$$Y_t = e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{N_t} e^{\beta \tau_i} J_i = \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\beta(t-\tau_i)} J_i$$

Es gilt J_s , J_t und τ_i paarweise unabhängig für alle $s \neq t$, also können wir folgenden Erwartungswert bedingt an τ_i angeben.

$$\begin{aligned} E(e^{\theta Y_t} | \tau_1 = s) &= E \left[\exp \left(\theta \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\beta(t-\tau_i)} J_i \right) \middle| \tau_1 = s \right] \\ &= E \left[\exp(\theta e^{-\beta(t-s)} J_1) \right] E \left[\exp \left(\theta \sum_{i=2}^{N_t} e^{-\beta(t-\tau_i)} J_i \right) \middle| \tau_1 = s \right] \end{aligned}$$

Aus der Homogenität des Poisson-Prozesses folgt, dass die Verteilung der Summe von s bis t gleich der Verteilung der Summe von 0 bis $t-s$ ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} E(e^{\theta Y_t} | \tau_1 = s) &= E \left[\exp(\theta e^{-\beta(t-s)} J) \right] M_Y(\theta, t-s) \\ &= M_{J_1}(\theta e^{-\beta(t-s)}) M_Y(\theta, t-s) \end{aligned}$$

Da N_t ein Poisson-Prozess ist, ist die Sprungzeit exponentialverteilt: $\tau_1 \sim \exp(\lambda)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} M_Y(\theta, t) &= E \left(E(e^{\theta Y_t} | \tau_1) \right) \\ &= \int_0^t E(e^{\theta Y_t} | \tau_1 = s) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta(t-s)}) M_Y(\theta, t-s) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta(s)}) M_Y(\theta, s) \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta(s)}) M_Y(\theta, s) \lambda e^{\lambda s} ds \end{aligned}$$

Ableiten nach t liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial M_Y}{\partial t}(\theta, t) \\
&= M_J(\theta e^{-\beta t}) M_Y(\theta, t) \lambda - \lambda \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta s}) M_Y(\theta, s) \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \\
&= \lambda (M_J(\theta e^{-\beta t}) - 1) M_Y(\theta, t)
\end{aligned}$$

Mit $Y_0 = 0$ gilt $M_Y(\theta, 0) = 1$ und es folgt:

$$M_Y(\theta, t) = \exp \left(\lambda \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta s}) - 1 ds \right)$$

□

Korollar 7.5 Die ersten beiden Momente von Y_t mit $t \in \mathbb{R}_+$ lauten

$$\begin{aligned}
E(Y_t) &= M'_Y(0, t) = \frac{\lambda}{\beta} E(J) (1 - e^{-\beta t}) \\
E(Y_t^2) &= M''_Y(0, t) = E(Y_t)^2 + \frac{\lambda}{2\beta} E(J^2) (1 - e^{-2\beta t})
\end{aligned}$$

Beispiel 7.6 Wir nehmen für J eine Exponentialverteilung an, wobei die Sprunghöhe im Erwartungswert μ_J betragen soll, also $J \sim \exp\left(\frac{1}{\mu_J}\right)$. Dann ist die MEF von J gegeben durch

$$\begin{aligned}
M_J(\theta) &= E(e^{\theta J}) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu_J} e^{\theta x} e^{-\frac{1}{\mu_J} x} dx = \frac{1}{1 - \mu_J \theta} \quad , \quad \mu_J \theta < 1 \\
\implies M_Y(\theta, t) &= \left(\frac{1 - \mu_J \theta e^{-\beta t}}{1 - \mu_J \theta} \right)^{\frac{\lambda}{\beta}} \quad , \quad \mu_J \theta < 1
\end{aligned}$$

Für $Y_0 = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
E(Y_t) &= \frac{\lambda \mu_J}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\
Var(Y_t) &= \frac{\lambda \mu_J^2}{\beta} (1 - e^{-2\beta t})
\end{aligned}$$

7.1.4 Der kombinierte Prozess

Wir betrachten an dieser Stelle den Spotpreisprozess in Gleichung (8).

Lemma 7.7 *Sei $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ der Spotpreis, $S_t = f(t) + X_t + Y_t$. Dann lautet die MEF von (S_t) :*

$$\begin{aligned} M_S(\theta, t) = & \exp \left(\theta f(t) + \theta x_0 e^{-\kappa t} + \frac{\theta^2 \sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \right. \\ & \left. + \theta Y_0 e^{-\beta t} + \lambda \int_0^t M_J(\theta e^{-\beta s}) - 1 ds \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Beweis X_t, Y_t sind stochastisch unabhängig für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $f(t)$ ist eine deterministische Funktion.

$$\begin{aligned} \implies E(e^{\theta S_t}) &= E(e^{\theta(f(t) + X_t + Y_t)}) = E(e^{\theta f(t)} e^{\theta X_t} e^{\theta Y_t}) \\ &= e^{\theta f(t)} E(e^{\theta X_t}) E(e^{\theta Y_t}) \end{aligned}$$

Mit den Momentenerzeugenden Funktionen von (X_t) und (Y_t) , siehe (13) und (17), folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 7.8 *Sei (S_t) der Spotpreisprozess aus (8). Dann gilt:*

$$\begin{aligned} E(S_T | X_t, Y_t) \\ = f(T) + X_t e^{-\kappa(T-t)} + Y_t e^{-\beta(T-t)} + \lambda \int_t^T M_J(e^{-\beta s}) - 1 ds \end{aligned}$$

Beweis

Seien $X_t = x$ und $Y_t = y$ gegeben. Dann erfüllen X_{t+s} und Y_{t+s} für $s \geq 0$ die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dX_{t+s} &= -\kappa X_{t+s} ds + \sigma d(W_{t+s} - W_t) \\ dY_{t+s} &= -\beta Y_{t+s} ds + J_{(t+s)-} d(N_{t+s} - N_t) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $X_t = x$ und $Y_t = y$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

7.2 Kalibrierung des Prozesses

Um den Preisprozess zu numerischen Berechnungen zu verwenden, werden wir die Parameter des verwendeten Modells unter dem realen Maß P schätzen. Die Schätzung der Parameter erfolgt mit der *Markov Chain Monte Carlo*-Methode (MCMC).

7.2.1 Kleinste-Quadrate-Schätzung

Den deterministischen Teil $f(t)$ des Preisprozesses wollen wir mit einer *Kleinste-Quadrate-Schätzung* (KQ) kalibrieren. Zunächst betrachten wir die Erwartungswertfunktionen der Prozesse X_t und Y_t . Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess X_t ist der Vorgang unkompliziert, da die stochastische Komponente in Form einer Brownschen Bewegung auftaucht. Wenn wir als Anfangswert $x_0 = 0$ setzen ergibt sich für alle $t \geq 0$

$$E(X_t) = 0$$

Die Erwartungswertfunktion des Prozesses Y_t ist von mehreren Parametern abhängig, vgl. Korollar 7.5. Mit Anfangsbedingung $Y_0 = 0$ gilt:

$$E(Y_t) = \frac{\lambda}{\beta} E(J) (1 - e^{-\beta t})$$

Die Parameter β und λ und der Erwartungswert von J sind allerdings unbekannt - diese zu schätzen ist das Ziel. Um dieser Problematik auszuweichen verwenden wir ein Filterverfahren für die Daten. Dabei werden sukzessive Spikes in dem Spotpreisverlauf identifiziert und Sprünge aus den Daten gefiltert, bis eine Normalverteilungsannahme an die gefilterten Daten zu einem vorher spezifizierten Konfidenzniveau nicht mehr abgelehnt werden kann.

Die gefilterten Daten werden dann so um die saisonale Komponente bereinigt, dass der quadrierte Abstand der Regressionsfunktion f_Θ zu den realen gefilterten Daten S^F minimal ist.

Die zu schätzenden Parameter sind $\Theta_W = (a_0, a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6)$, vergleiche Abschnitt 7.1.1. Falls die deterministische Funktion eines Stundenmodells geschätzt wird, ist zusätzlich das höhere Niveau μ_D der Peak-Load-Phase zu quantifizieren. Dann ist $\Theta_D = (\Theta_W, \mu_D) = (a_0, a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6, \mu_D)$.

Mit einer Zeitreihe der Länge N von beobachteten Strompreisen S lautet die Minimierungsaufgabe:

$$\sum_{j=1}^N \left(S_{t_j}^F - f_{\Theta_D}(t_j) \right)^2 \longrightarrow \min_{\Theta_D}!$$

Bemerkung Ein Filtern der Daten wird für die anschließende Markov Chain Monte Carlo-Methode nicht benötigt. Die gefilterten Daten werden nur zur Schätzung der deterministischen Komponente verwendet.

7.2.2 Markov Chain Monte Carlo-Schätzung

Die beobachteten Preise bereinigt um die deterministische Entwicklung $S_t - f(t) = X_t + Y_t$ stellen die stochastische Komponente des Prozesses dar. Die Schätzung der Parameter wird mit MCMC durchgeführt. Die Vorgehensweise bei MCMC wird ausführlich in [JP] aufgezeigt.

Die MCMC-Methode basiert auf der Bayesianischen Statistik. In diesem Kontext werden Parameter nicht als deterministische Größen aufgefasst, sondern vielmehr als Zufallsvariablen. Das Ziel der MCMC-Methode ist es, eine *aposteriori*-Verteilung der Parameter bedingt auf die beobachteten Preise zu ermitteln.

Eventuelles Vorwissen über Parameter fließt über eine *apriori*-Verteilung der Parameter ein, die für jeden Parameter vorgegeben wird. Falls wenig Informationen über Parameter vorliegen, können *diffuse* apriori-Verteilungen mit sehr großer Varianz gewählt werden. Die beobachteten Preise fließen ein, indem die modellendogene Verteilung der Preise, die sogenannte *Likelihood*-Verteilung, für die beobachteten Preise ausgewertet wird. Die *aposteriori*-Verteilung wird als Produkt von apriori- und Likelihood-Verteilung berechnet und beinhaltet alle vorhandenen Informationen über die Parameter.

Der gesuchte Zufallsvektor ist in unserem Fall $\Theta = (\kappa, \sigma, \beta, \lambda, \mu_J)$ mit Realisierungen $\Theta(\omega) = \theta \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

Das MCMC-Verfahren läuft nun wie folgt ab:

- Auswahl der apriori-Verteilungen für die einzelnen Parameter.
- Bestimmung der Likelihood.
- Im ersten Schritt:
 1. Ziehe $(\sigma^{(0)}, \kappa^{(0)})$ aus den apriori-Verteilungen für (σ, κ) . Simuliere eine Diffusion $X^{(0)}$ mit Hilfe der Ziehungen $(\sigma^{(0)}, \kappa^{(0)})$. Ermittle Y aus $Y = S - f - X^{(0)}$. Berechne die aposteriori-Verteilungen für β , λ und μ mit Hilfe von Y . Ziehe $(\beta^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ aus den aposteriori-Verteilungen.
 2. Verwende die gezogenen Parameter $(\beta^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ zur Generierung von $Y^{(1)}$. Ermittle X aus $X = S - f - Y^{(1)}$. Berechne mit X die aposteriori-Verteilungen für κ und σ . Ziehe $(\sigma^{(1)}, \kappa^{(1)})$ aus den aposteriori-Verteilungen.

- Im $n+1$ -ten Schritt: Simuliere die Diffusion $X^{(n)}$ mit Hilfe von $(\sigma^{(n)}, \kappa^{(n)})$. Berechne neue aposteriori-Verteilungen für β , λ und μ und generiere Ziehungen $(\beta^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}, \mu^{(n+1)})$ aus den aposteriori-Verteilungen. Simuliere den Spike-Prozess $Y^{(n+1)}$ mit Hilfe von $(\beta^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}, \mu^{(n+1)})$. Berechne aposteriori-Verteilungen für κ und σ und ziehe $(\sigma^{(n+1)}, \kappa^{(n+1)})$.

Das MCMC-Verfahren erzeugt eine Markov-Kette von Realisationen des Parametervektors $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dabei gilt, dass nach einer Einschwingphase $n \leq n^* \in \mathbb{N}$ die Ziehungen aus der Gleichgewichtsverteilung der Markov-Kette erfolgen, vgl [H]. Die Gleichgewichtsverteilung ist die gesuchte aposteriori-Verteilung bedingt auf die beobachteten Preise. Die Werte für die Parameter, die wir für unser Modell verwenden werden, ergeben sich als Erwartungswerte aus der Gleichgewichtsverteilung und werden als arithmetisches Mittel über eine hinreichend große Anzahl von Realisationen $(\theta_n)_{n \geq n^*}$ berechnet.

8 Bewertung des Kontraktes

Im vorherigen Kapitel wurde das Modell für die Spotpreisentwicklung vorgestellt und die Ermittlung der Parameter unter dem realen Maß P erläutert. Im folgenden Kapitel wird der Übergang von der Betrachtung unter P zu der Betrachtung des Spotpreismodells unter einem risikoneutralen Maß vollzogen. Das Ziel der gesamten Vorüberlegungen ist die Bewertung des Versicherungskontrakts D_t . Es gilt also den Wert V des Kontraktes zu bestimmen.

$$V = E_{Q^*}(D_T)$$

wobei $Q^* \in \mathcal{M}_e$ das Bewertungsmaß darstellt und der Kontrakt D_t gemäß Kapitel 4 gestaltet ist.

Für die Bewertung treffen wir die Annahme, dass Unabhängigkeit zwischen dem Ausfall eines Kraftwerks und der Spotpreisentwicklung herrscht. Die Annahme ist sinnvoll, da wir als Versicherungsnehmer den Betreiber eines Kraftwerks mit geringer Kapazität betrachten. Dadurch ist nicht davon auszugehen, dass der betrachtete Kraftwerksausfall die Merit Order stark beeinflusst.

Den Maßwechsel vom realen Maß P zu dem Bewertungsmaß Q^* vollziehen wir über eine Anpassung der Parameter des Kluge-Modells. Wir erhalten dann das risikoneutrale Kluge-Modell und können damit den Wert unseres Kontrakts berechnen.

Die Auswahl eines Maßes Q^* aus der Menge der risikoneutralen Maße $\mathcal{M}_e$ treffen wir dabei über das Abstandsminimierungsargument aus Kapitel 5, nachdem wir für die jeweiligen Marktteilnehmer Nutzenfunktionen spezifiziert haben.

8.1 Marktteilnehmer und Nutzenfunktionen

Wir betrachten einen vereinfachten Markt für Versicherungsleistungen auf dem physischen Strommarkt. Wir gehen von zwei Marktteilnehmern aus. Dabei ist wie oben bereits erwähnt der Versicherungsnehmer ein kleiner Marktteilnehmer in dem Sinne, dass er als Betreiber eines Kraftwerks mit geringer Kapazität fungiert. Er verfügt nicht über einen weiteren Kraftwerkspark, sondern generiert sein Einkommen durch den Betrieb eines einzigen Kraftwerks. Der Versicherer ist typischerweise ein großer Marktteilnehmer. Es ist sinnvoll anzunehmen, dass für den Fall einer physischen Versicherung der Versicherer selbst über einen diversifizierten Kraftwerkspark mit großer Kapazität

verfügt. Dieser vermarktet je nach Zusammensetzung des Kraftwerksparks seine Kapazitäten vornehmlich über Forwards und am Spotmarkt. Zusätzlich hat er die Möglichkeit nicht vermarktete Kapazität am Regelenergiemarkt oder als Versicherung anzubieten. Es ist davon auszugehen, dass für den Versicherer verschiedene Einkommensquellen zur Verfügung stehen.

Weiter unterstellen wir für die Bewertung der Versicherung unterschiedliche Risikoaversionen der beiden Marktteilnehmer. Der Versicherungsnehmer muss bei einem unversicherten Ausfall Regelenergiekosten und Kosten für Spotenergie leisten, die auf Grund der geringen Unternehmensgröße die Zahlungsfähigkeit bedrohen kann. Der Versicherer muss bei einem Ausfall lediglich mit der Produktion von Strom zu Grenzkosten rechnen, sowie mit entgangenen Gewinnen am Spotmarkt bei einem Ausfall in einer Hochpreisphase. Diese Opportunitätskosten haben auf Grund der geringen Ausfallwahrscheinlichkeit und der unterstellten Unabhängigkeit eines Ausfalls von der Höhe der Spotpreise einen geringen Einfluss auf die Risikoaversion des Versicherers. Wir unterstellen somit eine höhere Risikoaversion des Versicherungsnehmers relativ zum Versicherer. Es wird keine Aussage über die absolute Risikoaversion eines Marktteilnehmers getroffen.

Die Risikoaversion der Marktteilnehmer kann durch die Auswahl der Nutzenfunktionen zum Ausdruck gebracht werden.

Definition 8.1 *Sei u eine auf dem Definitionsbereich D zweimal differenzierbare Nutzenfunktion. Dann heißt*

$$\alpha(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

der Arrow-Pratt-Koeffizient für absolute Risikoaversion von u im Punkt x .

In [FS] wird gezeigt, dass ein höherer Arrow-Pratt-Koeffizient eines Marktteilnehmers gleichbedeutend mit einer höheren Risikoprämie ist, die dieser Marktteilnehmer für die Übernahme von Risiko verlangt. Folglich impliziert ein höherer Arrow-Pratt-Koeffizient eine höhere Risikoaversion.

Wir werden für den Versicherer im Folgenden eine logarithmische Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$ und für den Versicherungsnehmer eine exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$ verwenden. Für alle Wohlstandsniveaus $x > 1$ ist der Arrow-Pratt-Koeffizient des Versicherungsnehmers größer als der Koeffizient des Versicherers.

Die Auswertung des Versicherungskontrakts mittels dieser beiden Nutzenfunktionen liefert zwei verschiedene Preise für den Versicherungskontrakt und

damit ein Intervall von möglichen Preisen, die durch Verhandlungen festgelegt werden müssen. Die Eingangs des Abschnitts erwähnte Einkommenssituation kann Aufschluss über die Verhandlungsposition der Kontrahenten geben.

8.2 Das risikoneutrale Kluge-Modell

Wir wollen das risikoneutrale Kluge-Modell angeben. Das risikoneutrale Modell bezeichnet in diesem Fall das Modell unter dem risikoneutralen Maß. Wir schränken die Menge der risikoneutralen Maße zunächst auf solche ein, die die Prozesse nicht verändern. In einem zweiten Schritt bestimmen wir Parameter so, dass die Forward Curve getroffen wird. Aus den möglichen Parameterkombinationen wählen wir dann eine, welche das Abstandsfunktional minimiert. Die detaillierte Herleitung findet sich in [KL].

8.2.1 Herleitung der risikoneutralen Dynamik

Im folgenden Abschnitt werden wir die Gestalt des risikoneutralen Kluge-Modells angeben. Wir werden sehen, dass das transformierte Modell aufgrund der getroffenen Annahmen seine Gestalt nicht ändert. Die Transformation erfolgt über eine Anpassung der Parameter und der Funktion f . Anschließend werden wir das risikoneutrale Modell so ausrichten, dass die Forward-Kurve getroffen wird.

Betrachte die Ausgangssituation

$$\begin{aligned} S_t &= f(t) + X_t + Y_t \\ dX_t &= -\kappa X_t dt + \sigma dW_t \\ dY_t &= -\beta Y_{t-} dt + J_t dN_t \end{aligned}$$

Gemäß [HH], Theorem 3.1, definieren wir ein risikoneutrales Maß $Q \in \mathcal{M}_e^0$ durch

$$\frac{dQ}{dP} = \Pi_T$$

mit einem Prozess $(\Pi_t)_{t \in [0, T]}$ gegeben durch:

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_{t-}} = \gamma_J(dN_t - \lambda dt) - \Psi(X_t, t)dW_t$$

Ψ ist der Marktpreis für Diffusionsrisiko und $\gamma_J > -1$ ist der Marktpreis für Sprungrisiko.

Lemma 8.2 Sei $\Psi(X_t, t) =: \Psi(t)$ gegeben mit

$$E \left[\exp \left(- \int_0^t \Psi(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Psi^2(u) du \right) \right] = 1$$

Unter dem Maß Q mit Radon-Nikodym-Dichte $\frac{dQ}{dP} = \Pi_T$ bezüglich P ist

$$W^Q(t) = W(t) + \int_0^t \Psi(X_u, u) du$$

eine Brownsche Bewegung. Weiter ist unter Q der Prozess $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda(1 + \gamma_J)$, dargestellt durch $N^Q(t)$.

Das risikoneutrale Modell lautet dann:

$$\begin{aligned} S_t &= f(t) + X_t + Y_t \\ dX_t &= (-\kappa X_t - \Psi(X_t, t)\sigma)dt + \sigma dW_t^Q \\ dY_t &= -\beta Y_{t-}dt + J_t dN_t^Q \end{aligned}$$

Beweis Betrachten zunächst die einzelnen Prozesse und deren risikoneutrale Darstellung. Betrachte den Prozess $\Psi(X_t, t)$ für $0 \leq t \leq T$. $\Psi(t)$ ist an $\mathcal{F}_t$ adaptiert. Setze

$$Z_1(t) = \exp \left(- \int_0^t \Psi(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Psi^2(u) du \right)$$

Dann gilt mit Itô's Lemma:

$$dZ_1(t) = -\Psi(X_t, t)Z_1(t)dW_t$$

Sei Q_1 gegeben durch $\frac{dQ_1}{dP} = Z_1(T)$. Dann folgt mit Girsanovs Theorem, dass

$$W_t^{Q_1} = W_t + \int_0^t \Psi(X_u, u) du$$

eine Brownsche Bewegung unter Q_1 ist.

Sei $N(t)$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ . Sei $N(t) - \lambda t$ der kompensierte Poisson-Prozess. Sei für $\hat{\lambda} > 0$

$$Z_2(t) = \exp(\lambda - \hat{\lambda}) \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^{N(t)}$$

Dann gilt, wieder mit Itô's Lemma

$$dZ_2(t) = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\lambda} Z_2(t_-)(dN(t) - \lambda dt)$$

Insbesondere ist analog zu oben unter dem Maß Q_2 , definiert durch $\frac{dQ_2}{dP} = Z_2(T)$, $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\hat{\lambda}$.

Das eigentliche Ziel ist es, die risikoneutrale Dynamik für beide stochastischen Prozesse unter einem gemeinsamen Maß anzugeben. Wir nehmen an, dass Brownsche Bewegung, Poisson-Prozess und Sprunghöhe J_t unabhängig sind. Seien die Prozesse Z_1 und Z_2 wie oben definiert. Definiere einen zusätzlichen Prozess

$$Z(t) = Z_1(t)Z_2(t)$$

Z_1 und Z_2 sind Martingale. Desweiteren ist Z_1 stetig und Z_2 kommt ohne Itô-Komponente aus, sodass $d[Z_1, Z_2](t) = 0$ gilt. Wir können Itô's Produktregel anwenden und erhalten

$$Z(t) = Z_1(t)Z_2(t) = Z_1(0)Z_2(0) + \int_0^t Z_1(s_-)dZ_2(s) + \int_0^t Z_2(s_-)dZ_1(s)$$

Beide Integrale sind Martingale. Das Integral über dZ_1 ist ein Itô-Integral und somit ein Martingal. Um zu sehen, dass das Integral über dZ_2 diese Eigenschaft hat, vergleiche [SH], Theorem 11.4.5. Es gilt also, dass $Z(t)$ ein Martingal ist und aus $Z_1(0) = Z_2(0) = 1$ folgt $E(Z_t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

Setzen $\hat{\lambda} := \lambda(1 + \gamma_J)$ und $\Pi(t) = Z_1(t)Z_2(t)$. Dann gilt

$$dZ_2(t) = \gamma_J(t)Z_2(t_-)(dN(t) - \lambda dt)$$

und

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= Z_1(t_-)dZ_2(t) + Z_2(t_-)dZ_1(t) \\ &= Z_1(t_-)Z_2(t) \frac{dZ_2(t)}{Z_2(t)} + Z_2(t_-)Z_1(t) \frac{dZ_1(t)}{Z_1(t)} \\ \Rightarrow \frac{d\Pi_t}{\Pi_{t-}} &= -\Psi(X_t, t)dW_t + \gamma_J(dN(t) - \lambda dt) \end{aligned}$$

Unter dem Maß Q definiert durch $\Pi_T = \frac{dQ}{dP}$ ist

$$W^Q(t) = W(t) + \int_0^t \Psi(s)ds$$

eine Brownsche Bewegung und $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\hat{\lambda} = \lambda(1 + \gamma_J)$. Die letzte Aussage folgt aus Theorem 11.6.9 in [SH].
Es bleibt die Gestalt des risikoneutralen Modells zu zeigen:

$$\begin{aligned} dW_t^Q &= dW_t + \Psi(X_t, t)dt \\ \implies dW_t &= dW_t^Q - \Psi(X_t, t)dt \\ \implies dX_t &= -\kappa X_t dt + \sigma dW_t \\ &= -\kappa X_t dt + \sigma(dW_t^Q - \Psi(X_t, t)dt) \\ &= (-\kappa X_t - \sigma\Psi(X_t, t))dt + \sigma dW_t^Q \end{aligned}$$

□

Wir wollen nur solche äquivalenten Maße betrachten, welche die Klassen der Prozesse nicht verändern. Die Risikoprämien sind dann so zu wählen, dass X_t unter dem Bewertungsmaß einen affinen stochastischen Prozess darstellt und $N^Q(t)$ ein homogener Poisson-Prozess ist. Wir setzen

$$\Psi(X_t, t) = \frac{\hat{\kappa} - \kappa}{\sigma} X_t - \frac{\hat{\kappa}}{\sigma} \mu(t)$$

wobei $\mu(t)$ eine deterministische Funktion darstellt und

$$\gamma_J = \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} - 1$$

Wir erhalten dann als risikoneutrale Dynamik

$$\begin{aligned} dX_t &= \hat{\kappa}(\mu(t) - X_t)dt + \sigma dW_t^Q \\ dY_t &= -\beta Y_t dt + J_t dN_t^Q \end{aligned}$$

wobei N_t^Q mit der konstanten Intensität $\hat{\lambda}$ versehen ist.

Wir wollen nun das Modell unter Q in die Form des Kluge-Modells unter P bringen. Dazu muss die deterministische Funktion f geeignet angepasst werden.

Lemma 8.3 *Es sei f_1 gegeben durch*

$$f_1(t) := \hat{\kappa} \exp(-\hat{\kappa}t) \int_0^t \exp(\hat{\kappa}s) \mu(s) ds$$

Dann löst f_1 die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f_1'(t) + \hat{\kappa} f_1(t) = \hat{\kappa} \mu(t)$$

Das risikoneutrale Kluge-Modell kann geschrieben werden als

$$S_t = f(t) + f_1(t) + X_t + Y_t$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} dX_t &= -\hat{\kappa} X_t dt + \sigma dW_t^Q \\ dY_t &= -\beta Y_{t-} dt + J_t dN_t^Q \end{aligned}$$

Beweis Sei $\tilde{X}_t := X_t - f_1(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= dX_t - f_1'(t)dt \\ &= \hat{\kappa}(\mu(t) - X_t)dt + \sigma dW_t^Q - (\hat{\kappa}\mu(t) - \hat{\kappa}f_1(t))dt \\ &= \hat{\kappa}(\mu(t) - (\tilde{X}_t + f_1(t)))dt + \sigma dW_t^Q - (\hat{\kappa}\mu(t) - \hat{\kappa}f_1(t))dt \\ &= -\hat{\kappa}\tilde{X}_t dt + \sigma dW_t^Q \end{aligned}$$

□

Dann erhalten wir die risikoneutrale Version des Kluge Modells durch

$$S_t = \hat{f}(t) + X_t + Y_t \tag{19}$$

$$dX_t = -\hat{\kappa} X_t dt + \sigma dW_t^Q \tag{20}$$

$$dY_t = -\beta Y_{t-} dt + J_t dN_t^Q \tag{21}$$

Dabei sind $\hat{f}(t) = f(t) + f_1(t)$, die Intensität $\hat{\lambda}$ und $\hat{\kappa}$ von der Wahl von Q abhängig.

Die Gestalt des Modells ist somit festgelegt. Für das Modell unter einem risikoneutralen Maß gilt, dass die Forward-Kurve getroffen wird. Dafür sind die Parameter und die Funktion $\hat{f}$ entsprechend anzupassen. Wir werden im Folgenden das Modell so ausrichten, dass die Forward-Kurve getroffen wird.

Korollar 8.4 Sei $t = 0$ und F_0^T der Preis eines Forwards abgeschlossen in 0 mit Fälligkeit in T . Dann gilt:

$$\hat{f}(T) = F_0^T - X_0 e^{-\hat{\kappa}T} - Y_0 e^{-\beta T} - \hat{\lambda} \int_0^T M_J(e^{-\beta s}) - 1 ds$$

Beweis Für den Forwardpreis F_0^T gilt der Zusammenhang:

$$F_0^T = E_Q(S_T | \mathcal{F}_0) = E_Q(S_T | X_0, Y_0)$$

Mit Korollar 7.8 folgt, dass

$$F_0^T = \hat{f}(T) + X_0 e^{-\hat{\kappa}T} + Y_0 e^{-\beta T} + \hat{\lambda} \int_0^T M_J(e^{-\beta s}) - 1 ds$$

□

8.2.2 Kalibrierung des risikoneutralen Kluge Modells

Das Modell muss unter einem risikoneutralen Maß die Forward-Kurve treffen. Durch die Unvollständigkeit des Marktes ist das risikoneutrale Maß nicht eindeutig. Aus der Menge der risikoneutralen Maße muss eine Auswahl des Bewertungsmaßes vorgenommen werden. Wir werden den Abstand der risikoneutralen Maße zu dem Maß P auf einem Maßraum als Auswahlkriterium verwenden. Es wird das Maß mit dem minimalen Abstand als Bewertungsmaß verwendet.

Die Berechnung der Abstandsfunktionale erfolgt über die Radon-Nikodym-Dichten der risikoneutralen Maße bezüglich des realen Maßes P . In den vorherigen Abschnitten wurde die Menge der risikoneutralen Maße bereits durch die Festlegung der Dichte Π_t eingeschränkt. Im Folgenden werden die Parameter des risikoneutralen Modells so angepasst, dass simultan der Abstand zur Forward-Kurve und das Abstandsfunktional minimiert werden. Die bereits mit dem MCMC-Verfahren kalibrierten realen Parameter bleiben dabei unverändert.

Sei $\Pi_T = \frac{dQ}{dP}$ gegeben durch

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_{t-}} = \gamma_J(dN_t - \lambda dt) - \Psi(X_t, t)dW_t$$

mit $\gamma_J(t) = \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} - 1$ und $\Psi(X_t, t) = \frac{\hat{\kappa} - \kappa}{\sigma} X_t - \frac{\hat{\kappa}}{\sigma} \mu(t)$. Es sei $\mathcal{R} = [0, 1] \times \mathbb{R}_+$ der Parameterraum und $\hat{\theta} = (\hat{\lambda}, \hat{\kappa}) \in \mathcal{R}$. Weiter seien F_D der Vektor der beobachteten Forwardpreise und $F(\theta) = E_Q(S(\theta) | X, Y)$ die modellendogenen Forwardpreise. Da sichergestellt werden muss, dass simultan die beobachteten Forwardpreise getroffen werden und das Abstandsfunktional minimiert wird, erhalten wir die risikoneutralen Parameter als Lösung des folgenden

Minimierungsproblems.

$$\min_{\theta \in \mathcal{R}} \|F_D - F(\theta)\| + \hat{\alpha} |H(Q, P)|$$

Dabei ist $\hat{\alpha}$ ein *Penalty-Parameter*, der die Abstände $H(Q, P)$ gewichtet. Sei $\phi(x)$ die Funktion, so dass

$$H(Q, P) = E_P \left[\phi \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right]$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \min_{\theta \in \mathcal{R}} \|F_D - F(\theta)\| + \hat{\alpha} |H(Q, P)| \\ &= \min_{\theta \in \mathcal{R}} \|F_D - F(\theta)\| + \hat{\alpha} |E_P [\phi(\Pi_T(\theta))]| \end{aligned}$$

Beispiel 8.5 Wir betrachten einen Marktteilnehmer mit exponentieller Nutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Das zugehörige Abstandsfunktional ist die relative Entropie. Damit gilt $\phi(x) = x \ln(x)$ und $H(Q, P) = I(Q, P) = E_P(\Pi_T \ln(\Pi_T))$ und das Minimierungsproblem lautet

$$\min_{\theta \in \mathcal{R}} \|F_D - F(\theta)\| + \hat{\alpha} |E_P [\Pi_T(\theta) \ln(\Pi_T(\theta))]|$$

8.3 Risikoneutrale Bewertung

Durch die Lösung des Optimierungsproblems werden die risikoneutralen Parameter festgelegt. Mit Hilfe dieser Parameter kann die riskoneutrale Bewertung des Versicherungskontrakts vorgenommen werden. Wir berechnen den risikoneutralen Erwartungswert.

Wir nehmen an, dass der Preis der Lieferungen aus dem Forward konstant ist: $F_t = F_0$ für alle $t \in [t_0, t_n]$. Den Preis V eines Versicherungskontrakts können wir angeben als:

$$\begin{aligned} V &= E_{Q^*}(D_T) \\ &= E_{Q^*} \left(B_{t_n} X 1_{\{\tau \leq t_n\}} 1_{[t_n, \infty)}(T) \right. \\ &\quad \left. + \int_{(t, T]} B_u (H_u - R_u) \hat{S}_u du + \int_{(t, T]} B_u Z_u dH_u \right) \end{aligned}$$

8.3.1 Swap

Für den Swap-Kontrakt gilt dann:

$$\begin{aligned}
 V &= E_{Q^*}(D_T) \\
 &= E_{Q^*} \left(\int_{(t,T]} B_u (H_u - R_u) \hat{S}_u du + \int_{(t,T]} B_u Z_u dH_u \right) \\
 &= E_{Q^*} \left(\int_{(t,T]} B_u (H_u - R_u) (S_u - F_u) du + \int_{(t,T]} B_u Z_u dH_u \right)
 \end{aligned}$$

8.3.2 Summe europäischer Optionen

Im Falle einer europäischen Option ändert sich lediglich die Auszahlung $\hat{S}$.

$$\begin{aligned}
 V &= E_{Q^*}(D_T) \\
 &= E_{Q^*} \left(\int_{(t,T]} B_u (H_u - R_u) \hat{S}_u du + \int_{(t,T]} B_u Z_u dH_u \right) \\
 &= E_{Q^*} \left(\int_{(t,T]} B_u (H_u - R_u) (S_u - F_u)^+ du + \int_{(t,T]} B_u Z_u dH_u \right)
 \end{aligned}$$

8.3.3 Asiatische Option

Dieser Kontrakt sieht lediglich einen finanziellen Ausgleich am Ende der Laufzeit vor.

$$\begin{aligned}
 V &= E_{Q^*}(D_T) \\
 &= E_{Q^*} (B_{t_n} X 1_{\{\tau \leq t_n\}} 1_{[t_n, \infty)}(T))
 \end{aligned}$$

mit X wie in Kapitel 4.5.3.

Die numerische Auswertung der risikoneutralen Erwartungswerte erfolgt im numerischen Kapitel 9 mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation.

9 Numerische Ergebnisse

In den vorherigen Kapiteln wurde das Verfahren zur Bewertung des Kontrakts beschrieben. In dem folgenden Kapitel wollen wir für bestimmte Kontrakte Preise angeben.

Die numerische Auswertung der beschriebenen Kontrakte bedarf einiger Vorbereitung. Dazu gehört die Ermittlung von realen und risikoneutralen Parametern anhand der beobachteten Marktdaten. Weiter müssen die Kontrakte genau spezifiziert werden, damit die Ergebnisse interpretiert werden können. Die eigentliche Bewertung erfolgt dann mit einer Monte Carlo-Simulation. Die Vorgehensweise der Bewertung ist für verschiedene Kontraktsspezifikationen identisch, sodass im Rahmen dieser Arbeit nur drei verschiedene physische Kontrakte ausgewertet werden.

9.1 Diskretisierung

Um die in Kapitel 7 vorgeschlagenen stetigen Modelle in Kombination mit den beobachteten diskreten Preisen zu verwenden, müssen die Modelle diskretisiert werden. Wir betrachten dazu Zeitpunkte $t_0, \dots, t_N$ mit $\Delta t_i = \Delta t$ konstant für $0 \leq i \leq N - 1$ und den Spotpreisprozess

$$S_t = f(t) + X_t + Y_t$$

Für die deterministische Funktion ergeben sich die diskreten Werte durch Auswertung an den entsprechenden Zeitpunkten. Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess X_t können wir folgende diskrete Version angeben, vgl. [S]:

$$x_{i+1} = \exp(-\kappa \Delta t) x_i + u_i, \quad 0 \leq i \leq N - 1$$

wobei gilt

$$u_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp(-\kappa(t_{i+1} - s)) \sigma dW(s)$$

Mit der Itô-Isometrie folgt, dass:

$$u_i \sim N \left(0, \frac{\sigma^2}{2\kappa} (\exp(-2\kappa \Delta t) - 1) \right)$$

Die Diskretisierung des Spikeprozesses erfolgt gemäß [LH], indem der Poisson-Prozess mit einem Bernoulli-Sprungprozess approximiert wird.

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \exp(-\beta \Delta t) y_i + J_i \Delta q_i, \quad 0 \leq i \leq N - 1 \\ \Delta q_i &\sim \text{Bernoulli}(\lambda \Delta t) \end{aligned}$$

wobei $\lambda \Delta t \ll 1$ angenommen wird.

Für die Verteilung der J_i nehmen wir eine Exponentialverteilung an:

$$J_i \sim \text{Exp}(\mu_J) \text{ für } i \geq 1$$

9.2 Auswertung der Schätzung der realen Parameter

Mit Hilfe des diskretisierten Modells können die Parameter des Modells unter dem realen Maß P bestimmt werden. Die realen Parameter können dann genutzt werden, um den Abstand der risikoneutralen Maße zu dem Maß P zu bestimmen. Die Schätzung der realen Parameter erfolgt anhand von Spot-Stundenpreisen der Jahre 2006 bis 2008. Zunächst werden mit einem Filter

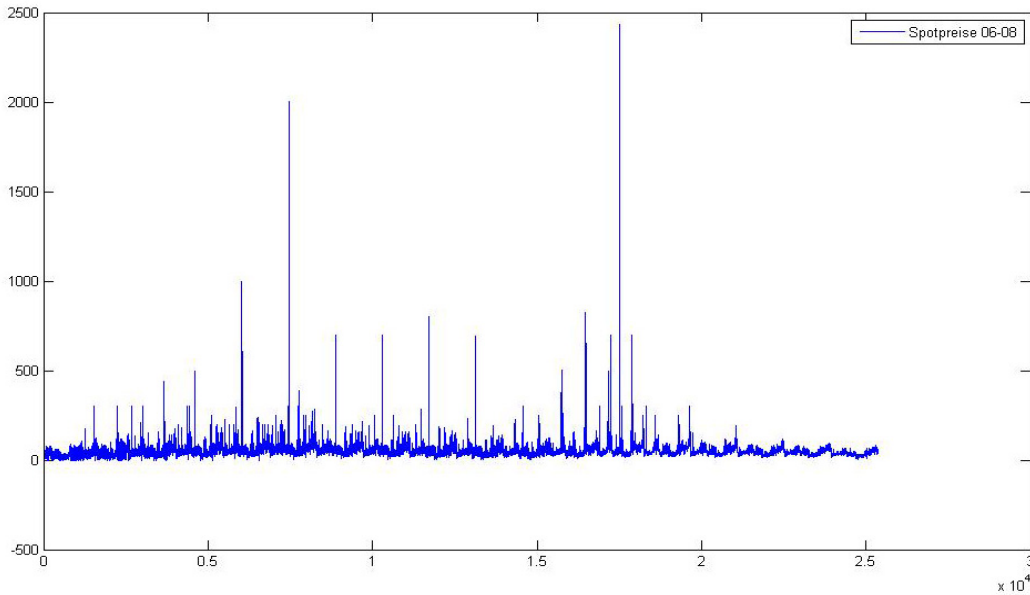


Abbildung 4: Stunden-Spotpreise der Jahre 2006 bis 2008

28 Spikes den Daten entnommen. Dann werden mit einer Kleinst-Quadrate-Schätzung die Parameter der Funktion $f(t)$ geschätzt. Die zu schätzende

Parameter	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Schätzwert	50.48	0.61	0.46	-0.15	0.01	-0.47	-0.14

Parameter	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	μ_D
Schätzwert	0.40	-0.84	-1.17	-0.22	0.20	-0.06	0.10

Tabelle 1: Ergebnis der Kleinste-Quadrate-Schätzung

Funktion lautet:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + f_Y(t) + f_W(t) + f_D(t) \\
 f_Y(t) + f_W(t) &= \sum_{i=1}^6 a_i \cos(2\pi\gamma_i t) + b_i \sin(2\pi\gamma_i t) \\
 f_D(t) &= \mu_D 1_{\{k24+[8,20] : 0 \leq k \leq 364\}}(t)
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 1.

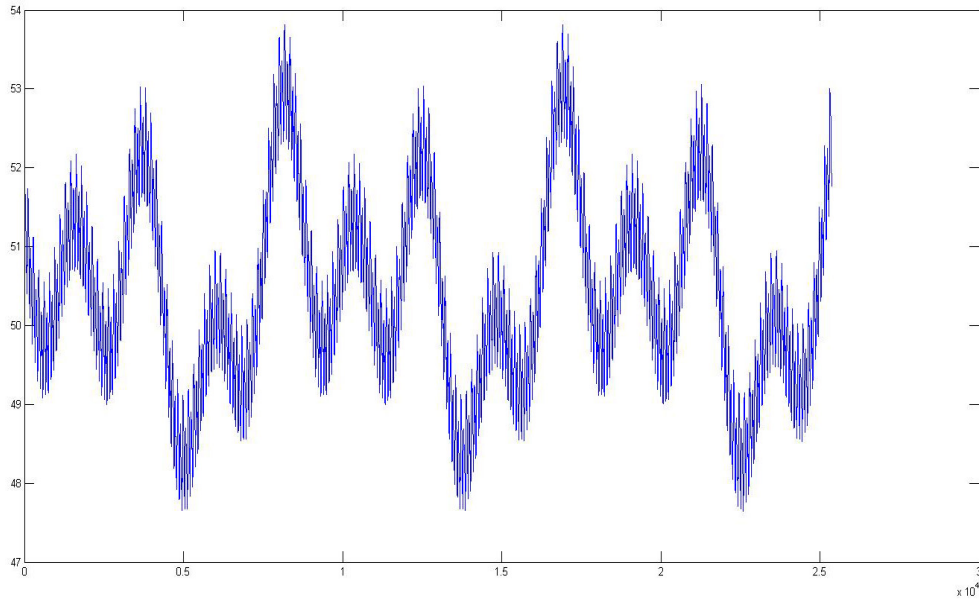


Abbildung 5: Geschätzte deterministische Entwicklung der Stundenpreise der Jahre 2006-2008

Parameter	Apriori Verteilung	Apriori Ziehung	Schätzwert
κ	Exp(0.5)	0.0993096	0.1527034791
σ^2	IG(2,10)	9.3793	46.420796492
μ_J	Exp(500)	899.0888	456.00925435
λ	Beta(2,10)	0.18148961	0.0000395855
β	Exp(1)	4.4412582	1.0122822963

Tabelle 2: Ergebnis der MCMC-Schätzung

Die deterministische Spotpreisentwicklung unter Verwendung der geschätzten Parameter ist in Abbildung 5 dargestellt.

Der um die Deterministik bereinigte Prozess $S_t - f(t) = X_t + Y_t$ wurde mit der Markov Chain Monte Carlo-Methode geschätzt. Die apriori-Verteilungen wurden für λ und σ^2 der Literatur entsprechend (vgl. [LH]) und für β , κ und μ_J diffus gewählt, wobei letztere drei Parameter größer Null sein müssen. Es wurde ein MCMC-Algorithmus mit 100.000 Durchläufen und einer Einschwingphase (Burn-In) von 5.000 Durchläufen verwendet. Die Rechendauer betrug 6213.56 Sekunden. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 2.

9.3 Aufteilung der Risikoprämie

Die Allokation der Risikoprämie kann einen Einfluss auf den Wert des zu bewertenden Derivats haben, vgl. [BHS]. Als Risikoprämie bezeichnet man die zusätzliche Rendite, die ein Investor für die Übernahme von Risiko verlangt. Die Aufteilung der Risikoprämie bestimmt die risikoneutrale Dichte und somit den Erwartungswert des Spotpreises unter einem risikoneutralen Maß und die Gestalt des Abstandsfunktional. In dem von uns gewählten Modell können sowohl Preise für Diffusionsrisiko Ψ als auch für Sprungrisiko γ_J unterstellt werden, vgl. Abschnitt 8.2. Die Aufteilung muss vor der Anpassung der risikoneutralen Parameter vorgenommen werden, da sie die Werte der risikoneutralen Parameter direkt beeinflusst.

Die Einbeziehung von Diffusionsrisiko liefert eine Änderung der Mean-Reversion-Geschwindigkeit und des langfristigen Niveaus, ausgedrückt durch die Funktion f_1 . Eine niedrigere Mean-Reversion-Geschwindigkeit führt dazu, dass Preise sich weiter vom langfristigen Niveau entfernen können. Durch

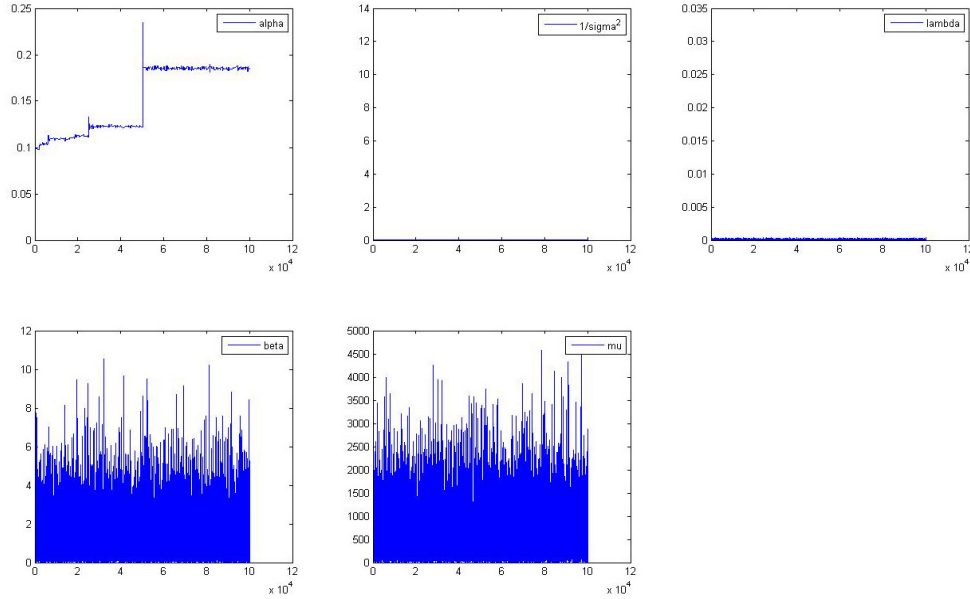


Abbildung 6: Output des MCMC-Algorithmus

die Erhöhung des langfristigen Niveaus ergeben sich zusätzlich im Erwartungswert höhere Preise. Das Auftreten von Sprungrisiko kommt durch eine höhere Sprungintensität zum Ausdruck. Spikes treten in diesem Fall häufiger auf als unter dem realen Maß P .

Wir betrachten die beiden Spezialfälle, dass erstens nur Diffusionsrisiko und zweitens nur Sprungrisiko in den Preisen enthalten ist. Im ersten Fall ändert sich die Intensität des Poisson-Prozesses nicht. Die Risikoprämie ist gegeben durch

$$\Psi(X_t, t) = \frac{\hat{\kappa} - \kappa}{\sigma} X_t - \frac{\hat{\kappa}}{\sigma} \mu(t)$$

und ist orts- und zeitabhängig. Die Funktion $\mu(t)$ ist deterministisch. Wir beschreiben $\mu(t)$ mit einer normierten und verschobenen Version der Funktion $f(t)$ multipliziert mit einem Faktor μ

$$\mu(t) = \mu \frac{f(t) - \min(f)}{\text{mean}(f)}$$

wobei $\text{mean}(f)$ das arithmetische Mittel von $f(t) - \min(f)$ darstellt. Bei der risikoneutralen Kalibrierung muss folglich nur der Parameter μ ermittelt

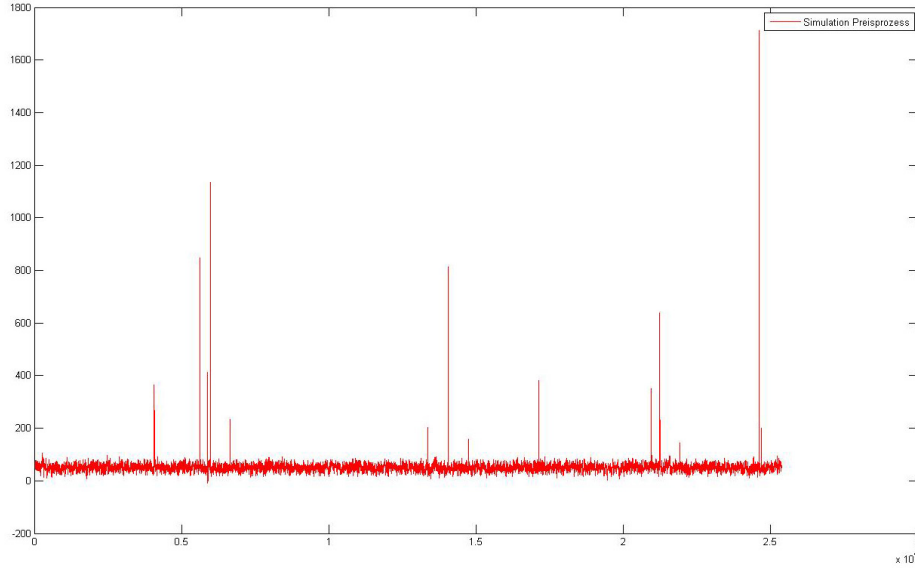


Abbildung 7: Beispielpfad 1 unter Verwendung der geschätzten realen Parameter

werden. Die Wahl dieser Form für $\mu(t)$ folgt aus der Entwicklung der Risikoprämie über die Zeit. In Phasen hoher Spotpreise wird eine deutlich höhere Risikoprämie bezahlt als in Phasen niedriger Spotpreise. Eine Orientierung an der unterstellten Deterministik f erscheint daher sinnvoll.

Im zweiten Fall wird nur Sprungrisiko bepreist. Die Risikoprämie ist in diesem Fall konstant über die Zeit und wird beschrieben durch

$$\gamma_J = \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} - 1$$

Eine Auflistung findet sich in Tabelle 3.

9.4 Ermittlung der risikoneutralen Parameter

Im nächsten Schritt werden die Parameter so angepasst, dass die Forward-Kurve approximiert und gleichzeitig das Abstandsfunktional minimiert wird. Die risikoneutralen Parameter ergeben sich als Lösung des Optimierungs-

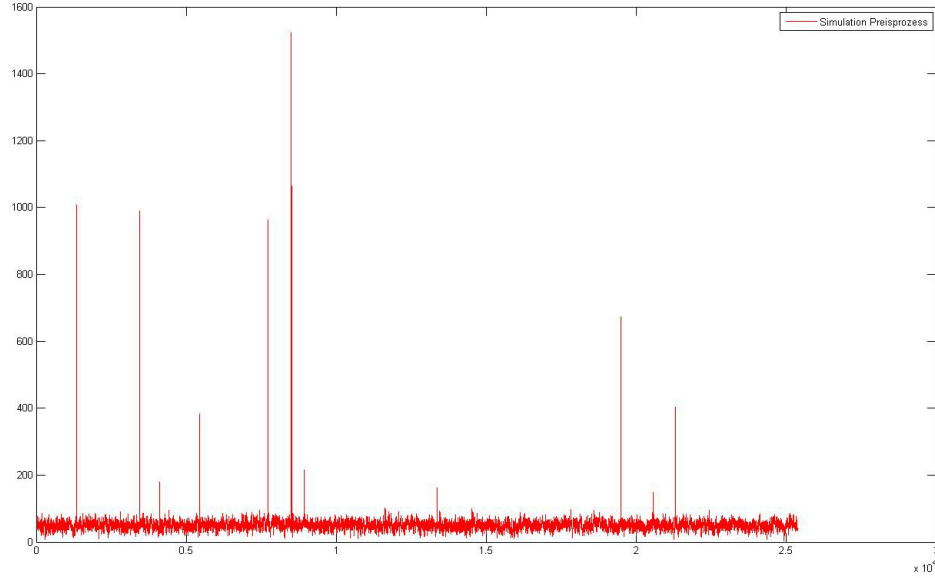


Abbildung 8: Beispielpfad 2 unter Verwendung der geschätzten realen Parameter

problems

$$\min_{\theta \in \mathcal{R}} \|F_D - F(\theta)\| + \hat{\alpha} |H(Q, P)|$$

Wir betrachten eine Hourly Forward Curve F_D , die im Zeitpunkt t Preise für die zukünftigen Stunden des Zeitintervalls $[t, T]$ angibt. Für den ersten Teil gilt $\|F_D - F(\theta)\| = \|F_D - E_Q(S_T | \mathcal{F}_t)\|$ mit

$$E_Q(S_T | \mathcal{F}_t) = \hat{f}(T) + X_t e^{-\hat{\kappa}(T-t)} + Y_t e^{-\beta(T-t)} + \hat{\lambda} \int_t^T M_J(e^{-\beta s}) - 1 ds$$

Dann gilt bei Bepreisung von Diffusionsrisiko

$$E_Q(S_T | \mathcal{F}_t) = \hat{f}(T) + X_t e^{-\hat{\kappa}(T-t)} + Y_t e^{-\beta(T-t)} + \lambda \int_t^T M_J(e^{-\beta s}) - 1 ds$$

mit $\hat{f}$ wie in Abschnitt 8.2 und bei Bepreisung von Sprungrisiko

$$E_Q(S_T | \mathcal{F}_t) = f(T) + X_t e^{-\kappa(T-t)} + Y_t e^{-\beta(T-t)} + \hat{\lambda} \int_t^T M_J(e^{-\beta s}) - 1 ds$$

Risikoprämie	Parameter	Versicherer	Versicherungsnehmer
Diffusionsrisiko	$\hat{\kappa}$	0.0805998141	0.0805998104
	μ	2.3432396812	2.3433150882
	$\hat{\lambda}$	λ	λ
Sprungrisiko	$\hat{\kappa}$	κ	κ
	μ	0	0
	$\hat{\lambda}$	0.0000557280	0.0003819660

Tabelle 3: Risikoneutrale Parameter

Im zweiten Teil wird das Abstandsfunktional minimiert. Dies erfolgt über den zugehörigen Erwartungswert. Für den Penalty-Parameter soll im Folgenden $\hat{\alpha} = 1$ gelten.

Beispiel 9.1 *Sei die Nutzenfunktion durch $u(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, $\alpha > 0$ gegeben und es werde ausschließlich Sprungrisiko bepreist. Dann ist das zu berechnende Abstandsfunktional*

$$\begin{aligned}
H(Q, P) &= E_P(\phi(\Pi_T)) = E_P(\Pi_T \ln(\Pi_T)) = E_Q(\ln(Z_2(T))) \\
&= \int (\lambda - \hat{\lambda}) + \ln\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right) N(T) dQ \\
&= \int_0^\infty (\lambda - \hat{\lambda}) + \ln\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right) x \frac{(\hat{\lambda}T)^x}{x!} \exp(-\hat{\lambda}T) dx
\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{N}_0$ und Z_2 gemäß Abschnitt 8.2.

Die Auswertung des Erwartungswertes erfolgt über numerische Integration. Die ermittelten risikoneutralen Parameter finden sich in Tabelle 3, die Berechnung der übrigen Erwartungswerte in Anhang B.

9.5 Bewertung mittels Monte Carlo-Simulation

Den Preis für die Versicherungskontrakte ermitteln wir mit Hilfe der Monte Carlo-Simulation. Dabei werden wir nur Varianten der physischen Kontrakte bewerten, die Vorgehensweise ist für finanzielle Kontrakte ähnlich. Die Spezifikationen der Kontrakte finden sich in Tabelle 4. Die Kontrakte werden sechs

Kontrakt	Swap 1	Swap 2	Summe Europäer
Auszahlungsprofil	$(S - F)$	$(S - F)$	$(S - F)^+$
Laufzeit in h	8760		
Abdeckung in h	Unbeschränkt	Max. 36	Max. 36
Vorlauf in Monaten	6		
Regelenergiesatz	$1.2 \cdot S$		
Anzahl Ausfälle	Max. 2	Unbeschränkt	Unbeschränkt
Ausfall-Prozess	Poisson-Prozess		
Ausfall-Intensität	0.00001		
Forward-Preis	Jahres-Forward: $F=50$		
Versicherte Leistung	1 MW		

Tabelle 4: Kontraktspezifikationen

Monate vor Beginn der Versicherungsabdeckung vereinbart und versichern Stromlieferungen für ein Jahr. Die Anzahl der abgesicherten Ausfälle variiert, genauso die Abdeckung der Versicherung, die entweder bis zur nächsten Day-Ahead gehandelten Stunde oder bis zum stochastischen Wiedereintritt festgelegt wird. Der Ausfall wird mit Hilfe eines Poisson-Prozesses simuliert. Der für die Bewertung angenommene Forward-Preis entspricht in der Größenordnung den Preisen für Baseload-Jahresforwards an der EEX.

Varianten dieser Kontrakte können natürlich nach demselben Prinzip bewertet werden, wenn etwa eine andere Laufzeit, andere Ausfallraten oder ein anderer Forward-Preis angenommen werden. Die Simulation läuft in zwei Phasen ab.

- Zuerst wird der Ausfallprozess simuliert. Treten ein oder mehrere Ausfälle ein, werden die Zeitpunkte fixiert und die jeweilige Versicherungsdauer ermittelt.
- In einem zweiten Schritt werden Preisverläufe mit den risikoneutralen Parametern erzeugt. Die Auszahlungen werden dann je nach Kontrakt ermittelt.

Die Simulation wurde mit 10.000 Pfaden und 100.000 Wiederholungen durchgeführt. Die Versicherungspreise sind in der Tabelle 5 aufgeführt. Graphische Ergebnisse der Simulation finden sich in den Abbildungen 9 und 10.

Kontrakte	Risiko	Versicherer	Versicherungsnehmer
Swap1	Sprungrisiko	0.9043752565	1.0811198017
	Diffusionsrisiko	0.90667663	0.945681690
Swap2	Sprungrisiko	0.905391306	1.1626462697
	Diffusionsrisiko	0.95611328	0.95635149
Europ.	Sprungrisiko	5.91129881	6.15471870
	Diffusionsrisiko	7.85603088	7.85603104

Tabelle 5: Berechnete Preise der Kontrakte

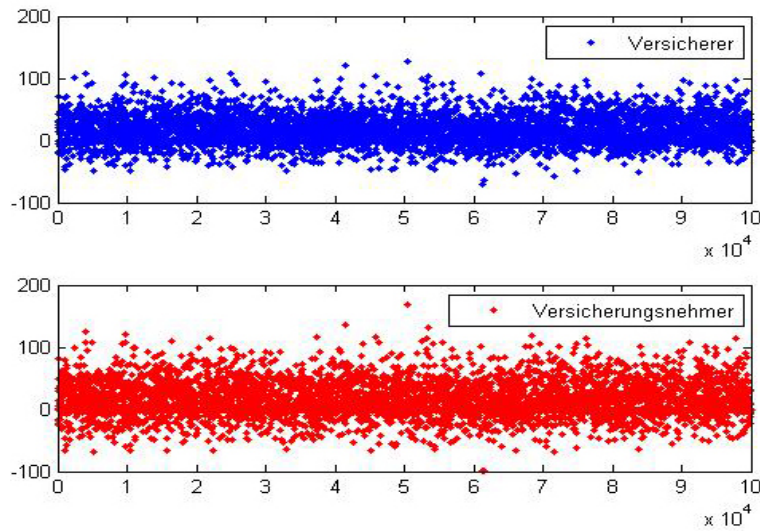


Abbildung 9: Realisierte Werte der Monte Carlo-Simulation für Swap 1

Der geringe Preisunterschied für Versicherer und Versicherungsnehmer bei der Bepreisung von Sprungrisiko folgt aus den ähnlichen risikoneutralen Parametern, siehe Tabelle 3.

Die vielfach höheren Preise für die Summe aus europäischen Optionen folgt aus der Definition des Kontrakts. Dieser Kontrakt sieht nur eine Leistung des Versicherers bei hohen Spotpreisen vor, sodass der Versicherungsnehmer bei niedrigen Preisen Gewinnpotentiale behält. Dieser Zusammenhang wird auch in den Abbildungen 9 und 10 deutlich. Bei der Bewertung des Swaps werden auch negative Werte realisiert, der Wert der Summe aus europäischen Optionen ist immer größer oder gleich null.

Die relativ hohen Preisunterschiede der Kontrakte bei Bepreisung von Sprun-

grisiko machen Preisverhandlungen für den Abschluss eines Geschäfts notwendig, da die Aufteilung dieser zusätzlichen Rente auf die Marktteilnehmer vorab unklar ist.

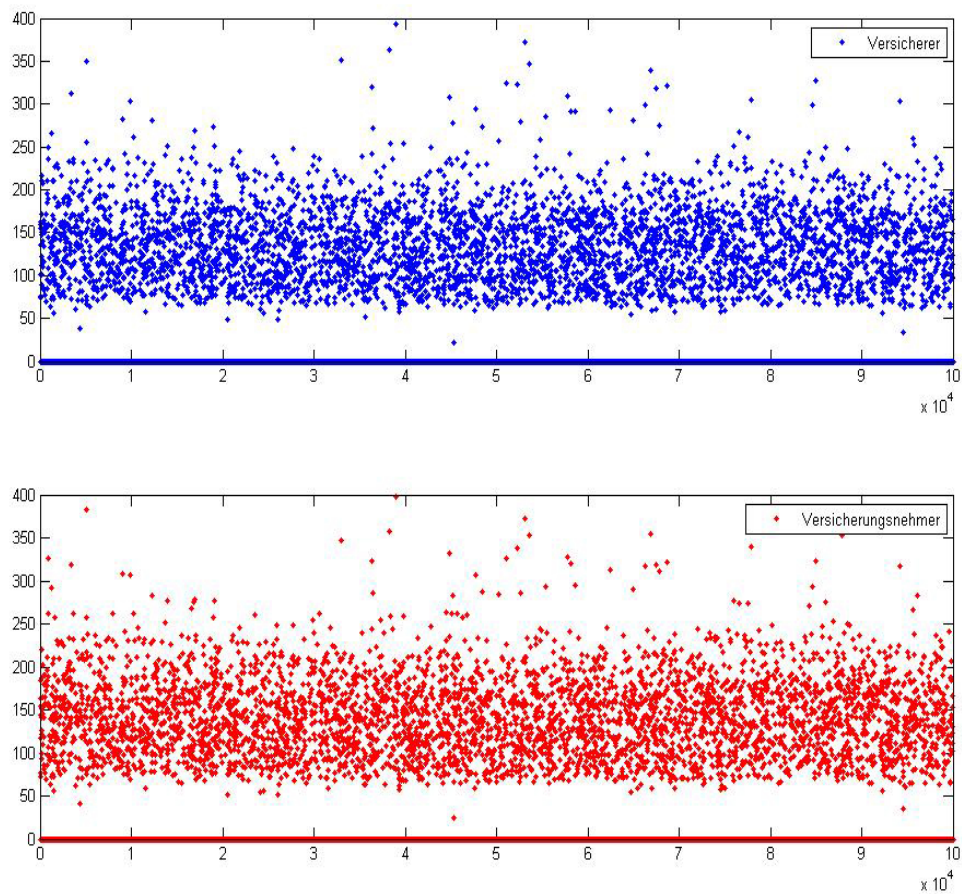


Abbildung 10: Realisierte Werte der Monte Carlo-Simulation für die Summe aus europäischen Optionen

10 Fazit

Wir haben ein Verfahren vorgestellt, mit dem Versicherungsleistungen für Kraftwerksausfälle bewertet werden können. Dabei wurde die Unvollständigkeit der Stromspotmärkte und der Versicherungsmärkte behandelt. Die unterschiedlichen Werte für die Versicherungsleistung aus Sicht von Versicherer und Versicherungsnehmer spiegeln die Unvollständigkeit und die unterschiedlichen Risikoaversionen der beiden Marktteilnehmer wider. Der Preis für eine Versicherung wird im Fall des Abschlusses eines Geschäfts in dem Intervall der beiden Preise liegen und über Verhandlungen ermittelt. Dabei hängen die Verhandlungspositionen von verschiedenen Faktoren wie Größe und Diversifizierung der Unternehmen ab. Das von uns zugrunde gelegte Szenario legt ein Übergewicht auf Seiten des Versicherers nahe.

Das Konzept der physischen Versicherung kann noch erheblich erweitert werden. Die Modellierung und Bewertung weiterer Kontraktformen ist ebenso denkbar wie eine detailliertere Modellierung des Ausfallprozesses. Weiter können auch Teilausfälle betrachtet werden. Dazu kann ein Prozess konstruiert werden, etwa in der Form, dass ein erster Ausfall eine höhere Intensität für weitere Teilausfälle zur Folge hat. Auch bei der Aufteilung der Risikoprämien sind Varianten denkbar, beruhend auf einer sinnvollen Aufteilung der Risikoprämie in Sprung- und Diffusionsrisiko.

Eine zusätzliche Erweiterung stellt die Betrachtung einer physischen Versicherung im Zusammenhang mit der Vermarktung von Strom aus erneuerbaren Energien dar. Im Fall eines Windkraftwerks ist das exogene Ereignis kein Kraftwerksausfall, sondern vielmehr das Ausbleiben von Wind. Die Versicherung müsste unter Berücksichtigung eines auf Wind ausgerichteten Ausfallsprozesses, etwa mit deterministischer oder stochastischer Intensität, bewertet werden.

Die angesprochenen Erweiterungen können ohne Weiteres auf das theoretische Fundament aus dieser Arbeit aufgebaut werden. Die Ergebnisse zur Bewertung auf unvollständigen Märkten sind universell, Nutzenfunktionen und Modelle für Preisprozesse können variiert werden. Die Bewertung durch Monte Carlo-Simulation lässt sich bei einer Veränderung der Modelle schnell anpassen.

Literatur

- [B] **Brunekreeft, G. /Keller, K.**, 2000, *Elektrizität: Verhandelter versus regulierter Netzzugang*, In: Knieps, Günter, Brunekreeft, Gert, Zwischen Regulierung und Wettbewerb: Netzsektoren in Deutschland, Physica.
- [BJ] **Björk, T.**, 2004, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford Finance.
- [BF] **Bellini, F. /Frittelli, M.**, 2002, *On the Existence of Minimax Martingale Measures*, Mathematical Finance, Vol. 12, No. 1, pp 1-21.
- [BHS] **Branger, N. /Hansis, A. /Schlag, C.**, 2008, *Expected Option Returns and the Structure of Jump Risk Premia*, Mathematical Finance-Bachelier Congress, pp 313-338, Springer.
- [BK] **Bingham, N.H. /Kiesel, R.**, 2004, *Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer Finance.
- [BR] **Bielecki, T. /Rutkowski, M.**, 2004, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer Finance.
- [BSK] **Borchert, J. /Schemm, R. /Korth, S.**, 2006, *Stromhandel. Institutionen, Marktmodelle, Pricing und Risikomanagement*, Schäffer-Poeschel.
- [CGM] **Carr, P. /Geman, H. /Madan, D.B.**, 2001, *Pricing and Hedging in Incomplete Markets*, Journal of Financial Economics, Vol. 62, pp 131-167.
- [CT] **Cont, R. /Tankov, P.**, 2004, *Financial Modeling With Jump Processes*, Chapman and Hall CRC.
- [CW] **Chung, K. L. /Williams, R. J.**, 1990, *Introduction to Stochastic Integration*, Second Edition, Birkhäuser.
- [D] **Davis, M.H.A.**, 1997, *Option Pricing in Incomplete Markets*, Mathematics of Derivative Securities, pp 216-226, Cambridge University Press.

- [DS] **Delbaen, F. /Schachermayer, W.**, 1994, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen, Vol. 300, pp 463-520.
- [F] **Frittelli, M.**, 2000, *The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets*, Mathematical Finance, Vol. 10, No. 5, pp 39-52.
- [FI] **Fiorenzani, S.**, 2006, *Quantitative Methods for Electricity Trading and Risk Management*, Palgrave Macmillan.
- [FS] **Föllmer, H. /Schied, A.**, 2004, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, de Gruyter.
- [G] **Geman, H.**, 2005, *Commodities and commodity derivatives. Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy*, Wiley Finance.
- [GJ] **Günther, M. /Jüngel, A.**, 2003, *Finanzderivate mit MATLAB. Mathematische Modellierung und numerische Simulation*, Vieweg.
- [GS] **Gerber, H. U. /Shiu, E. S. W.**, 1994, *Option Pricing by Esscher Transforms*, Transactions of Society of Actuaries, Vol. 46, pp 99-191.
- [H] **Häggström, O.**, 2002, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, London Mathematical Society, Student Texts 52, Cambridge University Press.
- [HH] **Henderson, V. /Hobson, D.**, 2003, *Coupling and Option Price Comparisons in a Jump-Diffusion Model*, Stochastics and Stochastic Reports, Vol. 75, No. 3, pp 79-101.
- [I] **Ihara, S.**, 1993, *Information Theory for Continuous Systems*, World Scientific.
- [JP] **Johannes, M. /Polson, N.**, 2003, *MCMC Methods for Continuous-Time Financial Econometrics*, Working Paper.
- [K] **Kallsen, J.**, 2000, *Utility-Based Derivative Pricing in Incomplete Markets*, Mathematical Finance-Bachelier Congress, pp 313-338, Springer.
- [KL] **Kluge, T.**, 2006, *Pricing Swing Options and Other Derivatives*, Oxford University Press.

- [KS] **Kramkov, D. /Schachermayer, W.**, 1999, *The condition on the Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets*, Annals of Applied Probability, Vol. 9, No. 3, pp 904-950.
- [LH] **Lin, S.-J. /Huang, M.-T.**, 2002, *Estimating Jump-Diffusion Models using the MCMC Simulation*, NTHU Working Paper 0215E.
- [LS] **Lucia, J. /Schwartz, E.**, 2002, *Electricity Prices and Power Derivatives. Evidence from the Nordic Power Exchange*, Review of Derivatives Research, no. 5, pp. 5- 50.
- [M] **Miyahara, Y.**, 1999, *Minimal Entropy Martingale Measures for Jump Type Price Processes in Incomplete Assets Markets*, Asia-Pacific Financial Markets, Vol. 6, pp 97-113.
- [S] **Singer, H.**, 1998, *Finanzmarktökonomie*, Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge 171, Physica.
- [SCH] **Schönbucher, P.**, 2003, *Credit derivatives pricing models. Models, Pricing and Implementation*, Wiley Finance.
- [SH] **Shreve, S.**, 2004, *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*, Springer Finance.
- [W] **Weron, R.**, 2006, *Modeling and forecasting electricity loads and prices. A Statistical Approach*, Wiley Finance.

A Kurze Herleitung einer Nutzenfunktion

Zunächst definieren wir eine Präferenzrelation auf einer Menge $\mathcal{X}$.

Definition A.1 Eine Präferenzrelation auf $\mathcal{X}$ ist eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

(i) Asymmetrie: $x \succ y \implies y \not\succ x$

(ii) Negative Transitivität: $x \succ y \wedge z \in \mathcal{X} \implies x \succ z \vee z \succ y$

Die Präferenzrelation $\succ$ induziert schwache Präferenz

$$x \succeq y : \iff y \not\succ x$$

und Indifferenz

$$x \sim y : \iff x \succeq y \wedge y \succeq x$$

Eine Präferenzrelation gibt offensichtlich eine Ordnung auf der Menge $\mathcal{X}$ an. Man kann für je zwei Elemente $x, y \in \mathcal{X}$ feststellen, welches gegenüber dem Anderen bevorzugt wird. Als nächstes wollen wir die Präferenzrelation quantifizieren.

Definition A.2 Die Abbildung $U : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt numerische Darstellung oder Quantifizierung einer Präferenzrelation $\succ$ falls gilt

$$x \succ y \iff U(x) > U(y)$$

oder, äquivalent dazu

$$x \succeq y \iff U(x) \geq U(y)$$

Um die Frage nach der Existenz einer solchen Quantifizierung zu klären, muss zunächst das Konzept der Stetigkeit einer Präferenzrelation eingeführt werden.

Definition A.3 Sei $\mathcal{X}$ ein topologischer Raum. Eine Präferenzrelation $\succ$ auf $\mathcal{X}$ heißt stetig, falls für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt, dass

$$\bar{B}(x) := \{y \in \mathcal{X} | y \succ x\} \text{ und } \underline{B}(x) := \{y \in \mathcal{X} | x \succ y\}$$

offene Teilmengen von $\mathcal{X}$ sind.

Damit kann nun die Existenz einer numerischen Darstellung beschrieben werden.

Theorem A.4 *Sei $\mathcal{X}$ ein topologischer Raum, der eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

- $\mathcal{X}$ hat eine abzählbare Basis aus offenen Mengen
- $\mathcal{X}$ ist abzählbar und separabel

Dann besitzt jede stetige Präferenzrelation eine stetige numerische Darstellung.

Beweis siehe [FS]. □

Wir betrachten die Menge $\mathcal{X}$ mit der Präferenzrelation $\succ$. Wir wollen $\mathcal{X}$ auffassen als die Menge der gehandelten Güter auf einem Markt mit zugehörigen zufälligen Zahlungsströmen. Wir können somit diese Menge $\mathcal{X}$ identifizieren mit einer Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1(S, \mathcal{S})$ der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem Messraum $(S, \mathcal{S})$. Wir werden annehmen, dass $\mathcal{M}$ konvex ist.

Beispiel A.5 *Sei $\mathcal{X} = \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{R})$ die Menge der endlichen Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \{X : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid |X| < \infty \text{ } P - f.s.\}$ Dann kann $\mathcal{X}$ in $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ eingebettet werden über die Abbildung $X \mapsto P^X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ und $\mathcal{M}$ ist das Bild dieser Abbildung.*

Die Quantifizierung U der Präferenzrelation $\succ$ wollen wir genauer angeben.

Definition A.6 *Eine numerische Darstellung U von $\succ$ heißt von Neuman-Morgenstern-Darstellung (vNM), falls*

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx) \quad \forall \mu \in \mathcal{M}$$

Bemerkung Die vNM-Darstellung ist affin. Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ und $\alpha \in [0, 1]$ gilt $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \in \mathcal{M}$ und

$$U(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu)$$

Die vNM-Darstellung gibt Aufschluss über die Quantifizierung. Damit eine vNM-Darstellung existiert, müssen die Präferenzrelationen zusätzliche Anforderungen erfüllen.

Definitionen A.7 (i) Eine Präferenzrelation $\succ$ auf $\mathcal{M}$ erfüllt das Unabhängigkeitsaxiom, falls für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\mu \succ \nu \implies \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda$$

für alle $\lambda \in \mathcal{M}$, $\alpha \in [0, 1]$.

(ii) Das Archimedische Axiom ist erfüllt wenn gilt:

$$\forall \mu \succ \lambda \succ \nu \quad \exists \alpha, \beta \in (0, 1) : \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \succ \lambda \succ \beta\mu + (1 - \beta)\nu$$

Theorem A.8 Sei $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1(S)$ der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S versehen mit der schwachen Topologie. Sei $\succ$ eine stetige Präferenzrelation auf $\mathcal{M}$, die das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt. Dann existiert eine vNM-Darstellung

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx)$$

wobei $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und stetig ist. U und u sind eindeutig bis auf positive affine Transformationen.

Da sich das Theorem auf beschränkte Funktionen u begrenzt, wollen wir die Aussage erweitern. Dazu führen wir den Raum $\mathcal{M}_b(S)$ der Maße auf S mit beschränktem Träger ein. Wähle dazu einen beliebigen Punkt $x_0 \in S$, $r \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_b(S) = \bigcup_{r>0} \mathcal{M}_1(\bar{B}_r(x_0)) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(S) \mid \mu(\bar{B}_r(x_0)) = 1 \text{ für ein } r \geq 0\}$$

Die Definition des Raumes der Maße mit beschränktem Träger hängt nicht von der Auswahl des Punktes $x_0 \in S$ ab. Folglich ist der Raum wohldefiniert. Es ist nun möglich, dass Theorem A.8 zu erweitern, sodass auch unbeschränkte Funktionen $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ zugelassen werden können.

Korollar A.9 Sei $\succ$ eine Präferenzrelation auf $\mathcal{M}_b(S)$, deren Einschränkung $\succ|_{\mathcal{M}_1(\bar{B}_r(x_0))}$ auf jedem Raum $\mathcal{M}_1(\bar{B}_r(x_0))$ stetig ist bezüglich der schwachen Topologie. Falls $\succ$ das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt, existiert die vNM-Darstellung

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx)$$

mit $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. U und u sind eindeutig bis auf positive affine Transformationen.

Definition A.10 Eine Präferenzrelation $\succ$ auf der Menge $\mathcal{M}$ heißt monoton, falls

$$x > y \implies \delta_x \succ \delta_y$$

und risikoavers, falls $\forall \mu \in \mathcal{M}$

$$\delta_{m(\mu)} \succ \mu$$

außer für den Fall $\mu = \delta_{m(\mu)}$.

Risikoaversion bedeutet folglich, dass ein Marktteilnehmer eine sichere Zahlung in Höhe des Erwartungswertes immer der zufälligen Auszahlung eines Assets vorzieht. Dass dies nicht gilt, falls die Auszahlung konstant ist (etwa bei einem Zero-Bond), ist offensichtlich, wenn man bedenkt, dass in diesem Fall beide Zahlungsströme gleich sind. Die Monotonie beschreibt die triviale Aussage: ‘mehr Geld ist besser als weniger Geld’. Wenn wir von rationalen Investoren ausgehen, ist Monotonie für jede Präferenzrelation erfüllt. Monotonie und Risikoaversion können wir in Relation setzen zu der Gestalt der vNM-Darstellung:

Lemma A.11 Die Präferenzrelation $\succ$ habe eine vNM-Darstellung $U(\mu) = \int u d\mu$. Dann gilt:

(i) $\succ$ monoton $\iff u$ streng monoton steigend

(ii) $\succ$ risikoavers $\iff u$ streng konkav

Beweis (i): Für $x > y$ gilt Monotonie von $\succ$ genau dann, wenn $U(\delta_x) > U(\delta_y) \iff u(x) > u(y)$.

(ii): $\implies$: Sei $\succ$ risikoavers. Dann gilt mit $x, y \in S$ mit $x \neq y$ und $\alpha \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha x + (1-\alpha)y} &\succ \alpha \delta_x + (1-\alpha) \delta_y \\ \implies u(\alpha x + (1-\alpha)y) &> \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) \end{aligned}$$

Folglich ist u streng konkav.

$\Leftarrow$: Sei u streng konkav. Dann folgt mit der Jensenschen Ungleichung

$$U(\delta_{m(\mu)}) = u\left(\int x \mu(dx)\right) \geq \int u(x) \mu(dx) = U(\mu)$$

□

Wir betrachten Präferenzrelationen auf der Menge $\mathcal{M}$ der Verteilungen der Auszahlungen in $S \subset \mathbb{R}$. Wir gehen davon aus, dass Investoren rational und risikoavers sind. Die Funktionen u in den vNM-Darstellungen müssen demnach streng monoton steigend und streng konkav sein.

Definition A.12 Eine Funktion $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion, falls u streng konkav, streng monoton steigend und stetig auf S ist.

Als nächstes betrachten wir die Konzepte von Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie. Wir betrachten eine Präferenzrelation auf $\mathcal{M}$ für die eine vNM-Darstellung existiert. Es gilt also:

$$U(\mu) = \int u d\mu, \quad u : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt die Existenz einer reellen Zahl $c(\mu)$ mit $c(\mu) = \int u d\mu = U(\mu)$ für $\mu \in \mathcal{M}$.

Definition A.13 Die Zahl $c(\mu) \in S$ heißt das Sicherheitsäquivalent zu $\mu \in \mathcal{M}$. Die Differenz $\rho(\mu) = m(\mu) - c(\mu)$ wird als Risikoprämie bezeichnet.

Bemerkungen 1. Aus $u(c(\mu)) = \int u d\mu$ folgt sofort $\delta_{c(\mu)} \sim \mu$. Ein Investor ist also indifferent im Bezug auf die konstante Auszahlung $c(\mu)$ und Kauf des Assets $X \in \mathcal{X}$ mit Verteilung $P^X = \mu$.

2. Falls Risikoaversion gilt, folgt $c(\mu) \leq m(\mu)$ mit der Jensenschen Ungleichung da u konkav, und es gilt $c(\mu) < m(\mu) \iff \mu \neq \delta_{m(\mu)}$.

B Berechnung der Abstandsfunktionale

Sprungrisiko und Log-Nutzenfunktion

Das zu bestimmende Abstandsfunktional ist die relative Entropie von P bezüglich Q für $\Pi_T = Z_2(T)$, $Z_2(T)$ wie in Abschnitt 8.2.

$$\begin{aligned} H(Q, P) &= I(P, Q) = E_Q(\Pi_T \ln(\Pi_T)) = E_Q(Z_2(T) \ln(Z_2(T))) \\ &= \int \left(\exp(\lambda - \hat{\lambda}) \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^{N(T)} \right) \left((\lambda - \hat{\lambda}) + \ln \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right) N(T) \right) dQ \\ &= \int_0^\infty \left(\exp(\lambda - \hat{\lambda}) \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^x \right) \cdot \\ &\quad \left((\lambda - \hat{\lambda}) + \ln \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right) x \right) x \left(\frac{\hat{\lambda} T}{x!} \right) \exp(-\hat{\lambda} T) dx \end{aligned}$$

Diffusionsrisiko und Exponentielle Nutzenfunktion

Das Abstandsfunktional ist die relative Entropie von Q bezüglich P für $\Pi_T = Z_1(T)$, $Z_1(T)$ wie in Abschnitt 8.2.

$$\begin{aligned}
H(Q, P) &= I(Q, P) = E_P(\Pi_T \ln(\Pi_T)) = E_Q(\ln(\Pi_T)) \\
&= E_Q \left(- \int_0^T \psi(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \right) \\
&= E_Q \left(- \int_0^T \psi(u) (dW^Q(u) - \psi(u) du) - \frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \right) \\
&= E_Q \left(- \int_0^T \psi(u) dW^Q(u) + \int_0^T \psi^2(u) du - \frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \right) \\
&= E_Q \left(- \int_0^T \psi(u) dW^Q(u) + \frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \right) \\
&= E_Q \left(\frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \right) \\
&= \frac{1}{2} E_Q \left(\int_0^T \left(\frac{\hat{\kappa} - \kappa}{\sigma} \right)^2 X_u^2 - 2 \frac{(\hat{\kappa} - \kappa) \hat{\kappa}}{\sigma^2} X_u \mu(u) + \left(\frac{\hat{\kappa}}{\sigma} \right)^2 \mu^2(u) du \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\hat{\kappa} - \kappa}{\sigma} \right)^2 \left(X_0^2 \exp(-2\hat{\kappa}u) + \frac{\sigma^2}{2\hat{\kappa}} (1 - \exp(-\hat{\kappa}u)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\hat{\kappa} - \kappa) \hat{\kappa}}{\sigma^2} \mu(u) X_0 \exp(-\hat{\kappa}u) + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\kappa}}{\sigma} \right)^2 \mu^2(u) du \right)
\end{aligned}$$

Diffusionsrisiko und Log-Nutzenfunktion

Das Abstandsfunktional ist die relative Entropie von P bezüglich Q . Die Dichte ist $\Pi_T = Z_1(T)$.

$$\begin{aligned}
H(Q, P) &= I(P, Q) = E_Q(\Pi_T \ln(\Pi_T)) = E_Q(Z_1(T) \ln(Z_1(T))) \\
&= E_Q \left(- \int_0^T \psi(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \cdot \right. \\
&\quad \left. \exp \left(- \int_0^T \psi(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \psi^2(u) du \right) \right)
\end{aligned}$$

Der Wert wird mittels Simulation ermittelt.

Diffusions- und Sprungrisiko

Zu berechnen sind die Erwartungswerte $E_P(\Pi_T \ln(\Pi_T))$ und $E_Q(\Pi_T \ln(\Pi_T))$ mit $\Pi_T = Z_1(T) Z_2(T)$. Da Sprungprozess und Wiener Prozess unter P und Q unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}
 E_P(\Pi_T \ln(\Pi_T)) &= E_P(Z_1(T) Z_2(T) \ln(Z_1(T) Z_2(T))) \\
 &= E_P(Z_1(T) Z_2(T) (\ln(Z_1(T)) + \ln(Z_2(T)))) \\
 &= E_P(Z_1(T) Z_2(T) \ln(Z_1(T))) \\
 &\quad + E_P(Z_1(T) Z_2(T) \ln(Z_2(T))) \\
 &= E_P(Z_2(T)) E_P(Z_1(T) \ln(Z_1(T))) \\
 &\quad + E_P(Z_1(T)) E_P(Z_2(T) \ln(Z_2(T))) \\
 &= E_P(Z_1(T) \ln(Z_1(T))) + E_P(Z_2(T) \ln(Z_2(T)))
 \end{aligned}$$

Die Berechnung der einzelnen Erwartungswerte findet sich oben.

Der Erwartungswert unter Q kann analog berechnet werden.