



Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik

Ein Forward Algorithmus zur Berechnung von amerikanischen Optionspreisen

Diplomarbeit
in Finanzmathematik

bei Herrn PD Dr. Volkert Paulsen
am Institut für Mathematische Statistik
vorgelegt von

Ali El Khechen

Matrikelnummer: 313899
Leererstraße 38, 48565 Steinfurt
Münster, 1. August 2009

Einleitung

Die heutigen Kapitalmärkte lassen sich in zwei Klassen aufteilen, Kassahandel und Terminmarkt. Bei ersterem werden Wertpapiere zum gegenwärtigen Kurs (Spotkurs) gehandelt, die nach Vertragsabschluss sofort geliefert werden. Bei letzterem werden Verträge über Käufe und Verkäufe von Gütern gehandelt, die zu einem zukünftigen Zeitpunkt erfolgen sollen oder können. Diese Güter können natürliche Ressourcen, Lebensmittel, Kredite sein, aber auch die auf dem Kassamarkt gehandelten Wertpapiere und Währungen. Man spricht hier auch von Finanzderivaten auf Basiswerte oder Basisgüter [Günther and Jüngel 2003]. Der Ausdruck derivative Finanzgüter ist ebenfalls gebräuchlich [Irle 2003]. „Ein Finanzderivat ist somit ein Vertrag, dessen Wert am Fälligkeits- oder Verfallstag T durch einen Wert (oder die Werte) eines Basisguts (underlying asset) zur Zeit T oder bis zum Zeitpunkt T eindeutig bestimmt wird“ [Günther and Jüngel 2003]. Beim Handel mit Finanzderivaten stellt sich die natürliche Frage nach dem „fairen“ Preis eines solchen Produktes, der sogenannten Optionsprämie. Für die vorliegende Arbeit interessierenden Finanzderivate bildet die Klasse der Optionen. Eine Option gibt dem Käufer das Recht, ein bestimmtes Finanzgut zu einem zukünftigen vereinbarten Ausübungszeitpunkt T (europäische Option) bzw. in einem Zeitraum $[0, T]$ (amerikanische Option) zu einem vorher vereinbarten Preis zu kaufen (Calloption) oder zu verkaufen (Putoption). „Es existieren eine Vielzahl mathematischer Ansätze zur Bewertung von Optionen [...]. Da in vielen Fällen allerdings keine geschlossenen analytischen Formeln zur Berechnung theoretischer Optionspreise existieren, wird die Bedeutung numerischer approximativer Verfahren deutlich.“ [Wilkens 2000]. Der faire Preis europäischer Call- und Putoptionen lässt sich explizit mit Hilfe der Black-Scholes Formel bestimmen, siehe etwa [Irle 2003]. Der Preis amerikanischer Calloptionen stimmt mit dem seines europäischen Gegenstücks überein. Im Falle einer amerikanischen Putoption mit endlicher Laufzeit T , erschwert die Tatsache, dass die Option im Zeitraum $[0, T]$ ausgeübt werden kann, die Bewertung erheblich. Zur Handhabung dieses Problems benötigt man die Theorie des optimalen Stoppens. Die wichtigsten Definitionen sind in Abschnitt 1.3 zusammengefasst. Einfacher ist die Analyse des entsprechenden Stopproblems mit unendlichem Zeithorizont, was also zu einem amerikanischen Put mit unendlicher Laufzeit führt. Man spricht von einem amerikanischen Put mit unendlicher Laufzeit, wenn eine Ausübung zu jedem zukünftigen Zeitpunkt möglich ist [Irle 2003]. Für diesen sogenannten *perpe-*

tual Put lässt sich eine exakte Formel für das Black-Scholes Modell mit einer risikofreien Anlage und nur *einem* risikobehafteten Finanzgut (z.B. eine Aktie) angeben [Paulsen 2001].

Bislang ist die Rückwärtsinduktion das Instrument zum Finden des Preises einer amerikanischen Putoption mit endlicher Laufzeit. Der in dieser Arbeit präsentierte Forward-Algorithmus ist der Versuch einen weiteren Ansatz zur fairen Bewertung dieses Derivates zu erbringen. Durch diesen Algorithmus wird man in der Lage sein den optimalen Ausübungszeitpunkt der Option zu bestimmen um so Rückschlüsse auf die zu zahlende Prämie zu ziehen.

Interessant ist nun die Analyse von Optionen auf zwei oder mehr risikobehafteten Basisgütern, die in der Literatur als *Multi-Asset-* oder *Rainbow Optionen* bezeichnet werden [Hull 2006], [Günther and Jüngel 2003].

Die Motivation für die vorliegende Arbeit ist die Analyse der wahrscheinlich populärsten Rainbow Option, nämlich der Basketoption [Hull 2006]. Diese stellt eine Option auf ein Portfolio (Basket) von Basisgütern, etwa einem Aktienkorb, Aktienindizes oder Währungen, dar. Ihre Auszahlung ist demnach vom Wert der in ihr enthaltenden Finanzgüter zum Ausübungszeitpunkt abhängig. Methoden zur Bewertung europäischer Basketoptionen werden z.B. in [Hull 2006] beschrieben.

Zusammenfassung

Diese Arbeit verfolgt das Ziel den von Prof. Dr. Albrecht Irle beschriebenen Algorithmus, *Forward Improvement Iteration* (FII) [Irle 2006], zur näherungsweise Bestimmung des Stopgebiets einer amerikanischen Put Option zu bestimmen. Dieser Algorithmus für das allgemeine Stopproblem wurde bereits in [Irle 1980] behandelt.

Der erste Hauptteil der Arbeit, in Kapitel 2, besteht aus der Präsentation der zum Algorithmus gehörenden Sätze, Theorem 2.2 und Theorem 2.5, sowie dessen Beweise. Einige allgemeine Anwendungsmöglichkeiten des Algorithmus werden in Abschnitt 3 erläutert, gefolgt von wichtigen Bemerkungen über dessen Einsatz in Abschnitt 3.3, und einem Anwendungsbeispiel aus der Finanzmathematik, Beispiel 3.5.1.

Betrachtet wird ein allgemeines Stopproblem für $g(Z_n)$ mit $Z_n, n = 1, 2, \dots$ eine homogene Markovkette und einer messbaren Abbildung g . Der Algorithmus bildet ein Verfahren zum Finden einer optimalen Stopzeit. Im Kontext des Handels mit amerikanischen Optionen stelle man sich diese Stopzeit als die optimale Ausübungsstrategie vor. Der Algorithmus bestimmt iterativ eine Folge von absteigenden Mengen $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \dots$ von Teilmengen des zugrunde liegenden Zustandsraum die gewisse Eigenschaften erfüllen. Es kann gezeigt werden, dass der erste Eintrittszeitpunkt in die Schnittmenge F der Mengen $B_0, B_1 \dots$ eine optimale Stopzeit ist. Zunächst wird diese Aussage, für das allgemeine Stopproblem aus [Irle 1980] und danach speziell für Markovketten bewiesen. Der Beweis für den allgemeinen Fall wird für den Beweis im Markovschen Fall von Nutzen sein. Die anschließenden Bemerkungen geben wichtige Aufschlüsse über die Anwendung des Algorithmus und dessen Implementierung an.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Implementierung des Forward Improvement Iteration. Vorerst werden die Beispiele aus Abschnitt 4 aus dem Paper besprochen. Anschließend wird der Forward-Algorithmus für den perpetual Put auf einen amerikanischen Put mit endlicher Laufzeit angewandt und dieses Resultat mit dem Ergebnis durch Rückwärtsinduktion (siehe etwa [Irle 2003]) verglichen. Zur Konstruktion der Mengenfolge ist die Berechnung eines bedingten Erwartungswertes nötig, der abhängig von einer Stopzeit ist. Es werden 2 Verfahren behandelt um diesen Wert zu bestimmen. Die erste Variante basiert auf Simulation einzelner Pfade, Abschnitt 4.1. Die zweite Variante liefert eine Lösung als lineare Gleichung, Abschnitt 4.3. Als Program-

mierumgebung wurde MATLAB von *The MathWorks* benutzt. Grund dafür ist die Einfachheit des Programmierstils, die es ermöglicht in das Gebiet der Programmierung einzusteigen ohne sich mit der Deklaration von Variablen und vor allem sich mit der Speicherverwaltung zu quälen. Der Nachteil der sich bei dieser Wahl offensichtlich ergibt, ist die lange Rechenzeit die im Vergleich zu C bzw. C++ wesentlich länger ist [Saleri 2006]. Einige ausgewählte Quelltexte werden im Anhang abgedruckt.

Im dritten Teil wird versucht, den FII auf einen amerikanischen Basketput anzuwenden. Eingangs werden die benötigten Definitionen gegeben, anschließend das Resultat für den Eindimensionalen perpetual Put auf ein Portfolio aus zwei Basiswerten mit endlicher Laufzeit angewandt. Über die Struktur der Stopmenge dieser Multi-Asset Option wird bereits in [Paulsen 2001] berichtet. Ziel wird es sein, mit Hilfe des Forward-Algorithmus die Stopmenge in einer vernünftigen Zeit identifizieren zu können.

Als Hilfsmittel diente neben MATLAB das Open-Source Vektorgrafikprogramm *InkScape*, mit der die Grafiken 4.9 und 4.10 gezeichnet wurden. Die Arbeit wurde mit \LaTeX verfasst.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mir mit ihrer persönlichen und fachlichen Anteilnahme beim Gelingen meiner Diplomarbeit geholfen haben. Ganz herzlich bedanke ich mich bei Herrn PD Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung des Themas und für die freundliche Unterstützung wann immer ich mit Fragen auf ihn zu kam.

Münster, 1. August 2009

Ali El Khechen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
Zusammenfassung	iii
Abbildungsverzeichnis	3
Tabellenverzeichnis	4
1 Definitionen und Grundlagen	5
1.1 Der Optionsbegriff	5
1.2 Amerikanische Claims	8
1.3 Probleme des optimalen Stoppens	10
1.3.1 Beispiele	11
2 Der Forward Improvement Iteration Algorithmus	12
2.1 Motivation	12
2.2 Methode zum Lösen allgemeiner Stopprobleme	13
2.2.1 Satz und Beweis	16
2.3 Modell für Markov'sche Stopprobleme	21
2.3.1 Satz und Beweis im Markov'schen Fall	23
3 Anwendungsgebiete, Bemerkungen und ein Korollar	26
3.1 Zeitabhängiger Pay-Off	26
3.1.1 Beispiel: Endlicher Horizont	26
3.1.2 The House Selling Problem & Lineare Kosten	27
3.1.3 Beispiel: Diskontierung	28
3.2 Der Monotone Fall	28
3.3 Bemerkungen zur Anwendung des Forward-Algorithmus	29
3.4 Der FII auf einem endlichen Zustandsraum; Ein Korollar	30
3.5 Amerikanische Put Optionen	31
4 Der Forward-Algorithmus und seine Anwendung	34
4.1 Simulation	35
4.2 Beispiele	37
4.3 Der Algorithmische Schritt als eine Lineare Gleichung	47
4.4 Der Algorithmus	49

5	Der Forward-Algorithmus auf einer Basketoption	51
5.1	Einführung	51
5.2	Das Modell	54
5.2.1	Der Forward-Algorithmus auf einen Index mit 2 Basis- gütern	55
5.2.2	Numerisches Beispiel mit Simulation	57
5.2.3	Numerisches Beispiel mit Linear Equation	60
5.2.4	Die Implementierung des Algorithmus	60
	Fazit	63
	Literaturverzeichnis	65
	Anhang	66
	Eidesstattliche Erklärung	70

Abbildungsverzeichnis

4.1	Stop- und Fortsetzungsgebiet für Beispiel 4.2.1 mit $\alpha = 0.99$. . .	38
4.2	Die optimalen Werte aus Beispiel 4.2.1 für $\alpha = 0.99$	38
4.3	Stop- und Fortsetzungsgebiet für Beispiel 4.2.1 mit $\alpha = 0.98^{(1/20)}$. . .	39
4.4	Die optimalen Werte aus Beispiel 4.2.1 für $\alpha = 0.98^{1/20}$	40
4.5	Stop- und Fortsetzungsgebiet für Beispiel 4.2.2 mit $f(x, y) = (x + y - 5)^+$	40
4.6	Die optimalen Werte aus Beispiel 4.2.2 für $f(x, y) = (x + y - 5)^+$	41
4.7	Stop- und Fortsetzungsgebiet für Beispiel 4.2.2 mit $f(x, y) = ((x + y - 5)^+)^2$	42
4.8	Die optimalen Werte aus Beispiel 4.2.2 für $f(x, y) = ((x + y - 5)^+)^2$	42
4.9	Binomialbaum für eine amerikanische Option.	44
4.10	Stop- und Fortsetzungsgebiet für eine amerikanische Putoption.	45
5.1	Stopgebiet aus Beispiel 5.2.1 für unterschiedliche ρ und σ_1 . . .	58
5.2	Die Stopmenge für die Put-Basketoption aus Beispiel 5.2.1. . . .	59
5.3	Stopgebiet aus Beispiel 5.2.1 für $n = 9$ und $n = 10$	59

Tabellenverzeichnis

4.1	1. Vergleich der beiden Verfahren, Backward Induction und Forward Iteration mit Simulation.	44
4.2	2. Vergleich der beiden Verfahren, Backward Induction und Forward Iteration mit linearen Gleichungen.	48
5.1	Rechenzeit des Forward Algorithmus für eine Put-Basketoption auf 2 underlying.	57
5.2	Rechenzeiten mit Linearen Gleichungen für eine Basket Putoption.	61

Kapitel 1

Definitionen und Grundlagen

Die folgenden Definitionen entsprechen, soweit nicht extra vermerkt, denen aus [Irlé 2003].

1.1 Der Optionsbegriff

Eine Option stellt einen Vertrag zwischen zwei Parteien dar, die Ihrem Käufer (holder) das Recht (aber nicht die Pflicht) einräumt, eine feste Menge des im Vertrag gehandelten Finanzguts (Basisgut oder underlying) zu einem bei Vertragsabschluss definierten Ausübungspreis (strike oder exercise price) vom Verkäufer der Option (writer oder Stillhalter), zu einem zukünftigen Zeitpunkt T oder während der Vertragslaufzeit, zu kaufen oder zu verkaufen. Der Stillhalter geht also, im Gegensatz zum Käufer eine Pflicht ein, einer möglichen Forderung nachzukommen.

1.1.1 Definition (europäisch, amerikanisch, Calloption, Putoption).

Eine europäische Kaufoption (Call) bzw. Verkaufsoption (Put) gibt ihrem Inhaber das Recht ein Basisgut zum Zeitpunkt T zum Ausübungspreis K vom Verkäufer der Option zu kaufen bzw. ihm zu verkaufen.

Bezeichnet S_T den Marktpreis des Finanzguts zur Zeit T und K den Strikepreis, so ist der Wert der europäischen Calloption zur Zeit T

$$(S_T - K)^+ := \max\{S_T - K, 0\},$$

der des europäischen Put

$$(K - S_T)^+ := \max\{K - S_T, 0\}.$$

Die Option wird amerikanisch genannt, wenn sie auch im Zeitraum $[0, T]$ ausübbar ist. Dabei bezeichnet 0 den Zeitpunkt des Vertragsabschluss.

Der Verkäufer einer Option wird vom Käufer einer solchen zu Vertragsabschluss einen gewissen Preis, die sogenannte Optionsprämie (*premium of the option*), für das im Optionskontrakt verbriefte Recht verlangen.

Die Prämie hängt zunächst von folgenden Ausstattungsmerkmalen ab:

- Art der Option (europäisch oder amerikanisch)
- Ausübungspreis
- risikolose Zinssatz
- Vertragslaufzeit

Zum anderen hängt es vom zugrunde gelegten Modell für die zukünftige Preisentwicklung des Basisguts und anderen Marktparametern ab. Diese werden im Black-Scholes Modell folgendermaßen bezeichnet:

- die Volatilität (Maß für die Größe der Preisschwankungen im Basiswert)
- erwartete Dividendenzahlungen innerhalb der Laufzeit

Siehe [Zhang 1995].

Die Optionen in Definition 1.1.1 werden zusammenfassend als Standard oder Plain Vanilla Optionen bezeichnet.

1.1.2 Definition (Plain Vanilla, Standard Option).

Eine Plain Vanilla oder Standard Option ist durch folgende Charakteristiken geprägt: (1) der Vertrag bezieht sich auf nur ein Basisgut, (2) die Laufzeit startet in der Gegenwart, (3) nur der Preis des Underlying zum Ende der Laufzeit bzw. bei Ausübung hat Einfluss auf die Auszahlung der Funktion, (4) der Strikepreis ist fix, (5) ob es sich um einen Call oder Put handelt ist bei Abschluss bekannt, (6) die Auszahlung der Option ist stets die Differenz zwischen dem Marktpreis des Basisgutes und dem Strikepreis [Zhang 1995].

1.1.3 Definition (Pfadabhängige Option).

Eine pfadabhängige Option ist eine Option dessen Auszahlung bei Ausübung oder am Laufzeitende vom gesamten Pfad des Preisprozesses und dem Spotpreis, dem aktuellen Marktpreis, des gehandelten Guts abhängt [Wilmott et al. 1995].

Plain Vanilla Optionen sind durch die *Einschränkungen* in (1)-(6) gekennzeichnet. Diese machen sie weniger flexibel als die nachfolgend beschriebenen Exotischen Optionen.

1.1.4 Definition (Exotische Option).

Eine Exotische Option ist eine Option die over-the-counter, d.h. außerbörslich,

gehandelt wird und die mindestens eine der Einschränkungen (1)-(6) einer Plain Vanilla Option überwindet [Zhang 1995].

Soviel zu den Optionstypen. Spannender und mathematisch anspruchsvoller ist die Frage nach dem „fairen“ Preis einer Option. Die faire Bewertung der Optionspreise geschieht in der modernen Finanzmathematik unter der Annahme von Arbitragefreiheit.

1.1.5 Definition (Arbitrage, arbitragefrei, No-Arbitrage-Prinzip).

Als Arbitrage bezeichnet man die Möglichkeit eines sofortigen risikolosen Gewinns. Ein Markt in dem keine Arbitrage existiert, nennt man arbitragefrei. Preisfestlegungen, die für Finanzgüter so durchgeführt werden, dass keine Arbitrage entsteht, bezeichnet man als No-Arbitrage-Prinzip [Günther and Jüngel 2003].

Arbitrage ist z.B. möglich, wenn ein Basisgut auf zwei verschiedenen Märkten zu unterschiedlichen Preisen gehandelt wird. Grundsätzlich wird angenommen, dass es in einem gut funktionierenden Markt nicht möglich ist risikolosen Profit zu machen. Die auf diese Annahme beruhenden Arbeiten von Fisher Black und Myron Scholes (1973) und unabhängig davon Robert Merton, haben eine mathematisch gut formalisierbare Theorie zur Preisfindung von Optionen geliefert [Günther and Jüngel 2003]. Wesentlich für die Preisfestsetzung in einem Finanzmarkt ist das aus dem No-Arbitrage-Prinzip abgeleitete Duplikationsprinzip. Demnach müssen zwei Zahlungsströme die in der Zukunft identisch sind heute den selben Wert haben. Andernfalls ist Arbitrage möglich. Fundamental ist nun, dass ein arbitragefreier Markt die Existenz eines dem Finanzmarktmodell zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß, äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes impliziert. Die umgekehrte Richtung ist ebenfalls richtig. Dadurch ist man in der Lage - gegebenfalls nur numerisch - die Bewertungsfrage zu beantworten.

1.2 Amerikanische Claims

Betrachtet werde ein Finanzmarktmodell im n -Perioden Fall, d.h. die Vertragsdauer $[0, T]$ wird in n äquidistante Zeitpunkte geteilt, an denen Handel möglich ist. Der Informationsverlauf ist gegeben durch die Filtration $\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_i)_{i=0, \dots, n}$ und der adaptierte Preisprozess durch $\tilde{S} = (S_i)_{i=0, \dots, n}$, mit $S_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^g$.

1.2.1 Definition (Claim im n -Perioden-Modell).

Ein Claim $\tilde{C} = (C_i)_{i=1, \dots, n}$ ist ein adaptierter reellwertiger Prozess. Der Besitz eines solchen Claims liefert dem Inhaber die Auszahlung C_i zu den Zeitpunkten $i = 1, \dots, n$.

„Diese Auszahlungen sind in den praktisch interessanten Fällen natürlich als nicht-negativ anzusehen. Zentrales Anliegen des Verkäufers ist [...] die Absicherung gegen die durch den Verkauf dieses Claims eingegangenen Verpflichtungen, deren jeweilige Höhe zufallsabhängig ist“ [Irle 2003]. Bei einer europäischen Option entspricht die Forderung gerade den Wert des Puts bzw. des Calls zum Ende der Laufzeit. Die Zuhilfenahme des äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes liefert einen möglichen Anfangspreis für die Option. Ist das Finanzmarktmodell sogar vollständig, d.h. jede Forderung ist duplizierbar (nachahmbar, replizierbar), so ist dieser Preis eindeutig. Man kann weiter zeigen [Irle 2003], dass die Optionsprämien vom europäischen und amerikanischem Call übereinstimmen müssen.

Schwieriger wird es bei der Bewertung eines amerikanischen Put. Nachfolgende Erläuterung entspricht der aus [Irle 2003, Kapitel 4] mit Auszahlungsprozess $(K - S_i)^+$, $i = 0, \dots, n$.

Betrachtet werde ein vollständiges n -Perioden-Modell, also ein Modell mit Handelszeitpunkten $0, 1, \dots, n$. Ein amerikanischer Claim ist gegeben durch einen adaptierten reellwertigen stochastischen Prozess $\tilde{Z} = (Z_i)_{i=0, \dots, n}$. Dabei gibt Z_i die Einzahlung an, die der Inhaber der Option (auch als Inhaber des amerikanischen Claims bezeichnet) bei Ausübung zum Zeitpunkt i erhält. Auf der anderen Seite ist dies gerade die Auszahlung, die der Verkäufer zur Zeit i tätigen muss. Bei einem amerikanischem Put auf ein Basisgut mit Marktpreisen S_i zur Zeit i ist $Z_i = (K - S_i)^+$.

Ausübungsstrategien sind Stopzeiten $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ bzgl. der im Modell vorliegenden Filtration. Zu jeder solchen Strategie τ gehört der Claim

$$C(\tilde{Z}, \tau) = ((K - S_0)^+ 1_{\{\tau=0\}}, (K - S_1)^+ 1_{\{\tau=1\}}, \dots, (K - S_n)^+ 1_{\{\tau=n\}})$$

und ihre Anwendung ergibt für den Inhaber des amerikanischen Claims eine Gesamtauszahlung

$$Z_\tau = \sum_{i=0}^n (K - S_i)^+ 1_{\{\tau=i\}}.$$

Bezeichne $B = (B_i)_{i=0, \dots, n}$ der Diskontierungsfaktor zur Zeit i , so erhält man entsprechend die abdiskontierte Gesamtauszahlung

$$B_\tau Z_\tau = \sum_{i=0}^n B_i (K - S_i)^+ 1_{\{\tau=i\}}.$$

Der Kauf eines solchen Claims ist äquivalent zum Erwerb der Möglichkeit, genau einen Claim aus sämtlichen Claims der Form $C(\tilde{Z}, \tau)$ frei wählen zu können, da die Option zu jedem Zeitpunkt bis n ausführbar ist. Aus dem No-Arbitrage-Prinzip ergibt sich, dass der faire Preis des amerikanischen Claims $s(\tilde{Z})$ das Supremum über die fairen Preise aller Claims die zur Auswahl stehen sein muss:

$$s(\tilde{Z}) = \sup_{\tau} s(C(\tilde{Z}, \tau)).$$

Befindet man sich im Zeitpunkt k , so sind nur noch die Zeitpunkte k, \dots, n zur Ausübung möglich mit resultierender Preisfestsetzung

$$s(\tilde{Z}, k) = \sup_{\tau \geq k} s(\tilde{C}, \tau).$$

Unter Benutzung eines äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes (auch äquivalentes Martingalmaß) Q erhält man:

$$s(\tilde{Z}) = \sup_{\tau} E_Q(B_\tau Z_\tau | \mathcal{G}_0)$$

und

$$s(\tilde{Z}, k) = \sup_{\tau \geq k} \frac{1}{B_k} E_Q(B_\tau Z_\tau | \mathcal{G}_k).$$

Zur Bestimmung des fairen Preises eines amerikanischen Claims ist somit die Optimierungsaufgabe der Bestimmung von

$$\sup_{\tau} E_Q(B_\tau Z_\tau | \mathcal{G}_0)$$

zu lösen.

Sei angenommen, dass die zum Zeitpunkt 0 vorliegenden Preis bekannt und fest sind und $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ gilt, so führt dies zur Bestimmung von

$$\sup_{\tau} E_Q(B_\tau Z_\tau) = \sup_{\tau} E_Q(B_\tau (K - S_\tau)^+)$$

Zur Lösung von Optimierungsproblemen dieser Art liegt die Theorie des optimalen Stoppens vor, deren Grundzüge in Kapitel 1.3 dargestellt werden.

1.2.2 Bemerkung (Rückwärtsinduktion). Ein bekannter Ansatz zur numerischen Lösung dieses Problems ist das Prinzip der Rückwärtsinduktion

(engl.: backward induction). Befindet man sich bereits im Zeitpunkt n , ohne vorher gestoppt zu haben, so hat man die Auszahlung $Z_n = (K - S_n)^+$ zu akzeptieren. Zum Zeitpunkt $n - 1$ hat man die Wahl zu stoppen mit resultierender Auszahlung $Z_{n-1} = (K - S_{n-1})^+$ oder aber eine weitere Beobachtung durchzuführen, was die zum $n - 1$ noch nicht bekannte Auszahlung Z_n liefert. Folgendes Entscheidungskriterium bietet sich da an:
 Stoppe in i , falls Z_i größer oder gleich dem bedingten Erwartungswert dessen ist, was sich bei optimaler Fortsetzung ergibt. Andernfalls führe eine weitere Beobachtung durch.

1.3 Probleme des optimalen Stoppens

Wie eingangs erklärt führt die Preisfindung eines amerikanischen Puts im n -Perioden-Modell zur Bestimmung von

$$s(\tilde{Z}) = \sup_{\tau} E_Q(B_{\tau} Z_{\tau}).$$

Einen Zugang zu Optimierungsproblemen dieser Art liefert die Theorie des optimalen Stoppens, deren Grundzüge dargestellt werden sollen.

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ und eine Filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$. Ferner sei $(Z_n)_{n \geq 1}$ ein adaptierter reellwertiger Prozess mit $E|Z_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und setzen $Z_{\infty} = \limsup Z_n$. Es sei weiter

$$\mathcal{S} = \{\tau : \tau \text{ Stopzeit, } EZ_{\tau} \text{ existiert}\}$$

Das *Problem des optimalen Stoppens* ist eine Optimierungsaufgabe,

$$EZ_{\tau} \text{ über } \tau \in \mathcal{S} \text{ zu maximieren,}$$

also die Bestimmung des Werts des Stopproblems

$$v = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} EZ_{\tau}$$

und einer optimalen Stopzeit

$$\tau^* \in \mathcal{S} \text{ mit } EZ_{\tau^*} = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} EZ_{\tau}.$$

Definiere weiter für $r, t \in \mathcal{T}, r \leq t$:

$$\mathcal{S}_r^t = \{\tau \in \mathcal{S} : r \leq \tau \leq t\}$$

ferner

$$v_r^t = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_r^t} EZ_{\tau}.$$

Verleiche [Irle 2003, Kapitel 4].

1.3.1 Beispiele

Folgende Beispiele zeigen, dass es Situationen gibt für die sich eine optimale Stopzeit leicht bestimmen lässt (Beispiel 1.3.1) und wo eine Antwort nicht offensichtlich ist (Beispiel 1.3.2).

1.3.1 Beispiel. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{G}, P) . Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Supermartingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $EM_1 < \infty$. Für jede beschränkte Stopzeit $\tau \in \mathcal{S}_1^t$ gilt wegen dem Optional Sampling Theorem, dass $EM_\tau \leq EM_1$ (siehe z.B. [Alsmeyer 2002]). Damit ergibt sich $v_1^t = EM_1$ und $\tau = 1$ ist optimal in \mathcal{S}_1^t . In diesem einfachen Beispiel ist es möglich τ explizit anzugeben.

Das nächste Beispiel ist [Irle 2003, Kapitel 4] entnommen. Es ist auch bekannt als das Sekretärinnenproblem.

1.3.2 Beispiel. (Problem der besten Wahl). Ein Abteilungsleiter hat aus n Bewerbern einen für eine Stelle auszuwählen. Die Bewerber werden nacheinander zum Vorstellungsgespräch gebeten. Unmittelbar nach jedem Gespräch ist zu entscheiden, ob der Bewerber eingestellt wird oder nicht. Ein Rückgriff auf zuvor abgelehnte ist somit nicht möglich. Gesucht wird eine Entscheidungsregel, die mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit den besten Bewerber aussucht. Die Qualität der Bewerber lässt sich durch die absoluten Rangzahlen $1, \dots, n$ (1 für beste Qualifikation) messen. Die Reihenfolge der Gespräche sei zufällig und sämtliche $n!$ verschiedenen Vorstellungsreihenfolgen gleichwahrscheinlich. Bei der Vorstellung des k -ten Bewerbers kennt der Abteilungsleiter den Rang des Interviewten nur im Vergleich zu den bereits Befragten. Eine Entscheidung über die Einstellung des k -ten Bewerbers kann nur aufgrund der relativen Kennzahlen R_1, \dots, R_k getroffen werden. R_i gibt an, der wievielt-beste der i -te Bewerber unter den ersten i ist. Formal bedeutet dies:

Sei $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega \text{ Permutation der Zahlen } \{1, \dots, n\}\}$, \mathcal{G} die Potenzmenge und P die Laplace-Verteilung auf (Ω, \mathcal{G}) , d.h. jede Vorstellungsreihenfolge ist gleichwahrscheinlich. Es sei $\mathcal{T} = \{1, \dots, n\}$ und es bezeichne $X_i(\omega) = \omega_i$ den absoluten Rang des i -ten Bewerbers. Die relativen Ränge R_i sind definiert durch:

$$R_i(\omega) = |\{k \leq i : \omega_k \leq \omega_i\}| = |\{k \leq i : X_k(\omega) \leq X_i(\omega)\}|.$$

Etwas lax formuliert ist $R_i(\omega) - 1$ die Anzahl der Personen die besser sind als der i -te Bewerber. Die Information die beim Interview des i -ten Bewerbers zur Verfügung steht wird beschrieben durch $\mathcal{G}_i = \sigma(R_1, \dots, R_i)$. Gesucht ist nun eine Stopzeit τ^* bzgl. $(\mathcal{G}_i)_{i=1, \dots, n}$ derart, dass der ausgewählte Bewerber der Beste ist, d.h. absoluten Rang 1 hat, durch τ^* maximiert wird.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass es nicht einfach ist den Wert von v zu bestimmen. Weder ist klar, dass eine optimale Stopzeit überhaupt existiert. Das es eine für diesen Fall gibt, wird in [Irle 2003] und [Dynkin and Juschkewitsch 1969, Kapitel 3] behandelt.

Kapitel 2

Der Forward Improvement Iteration Algorithmus

2.1 Motivation

In diesem Abschnitt soll eine kurze Motivation für die anschließenden Definitionen in Abschnitt 2.2 gegeben werden. Neben der Erläuterung wird in Klammern auf die formale Definition hingewiesen. Die Beispiele in Kapitel 3 dienen ebenfalls dem verbesserten Verständnis der Definitionsbildung.

Der folgende Algorithmus *Forward Improvement Iteration* (kurz FII) genannt, verlangt die spezielle Konstruktion einer absteigenden Folge von Mengen die gewisse Bedingungen erfüllen. Es wird sich zeigen, dass man auf der Schnittmenge dieser Folge eine Stopzeit so definieren kann, dass sie optimal ist unter allen zulässigen.

Es wird von einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{G}, P) mit Filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$ ausgegangen. $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$ beschreibt die Menge aller *Ereignisse* bis zur Zeit $n \in \mathbb{N}_0$. Man betrachtet eine Folge $\mathcal{C} = (C_n)_{n \geq 0}$ dieser Ereignisse (siehe (2.2)) und eine Stopzeit $\tau_n(\mathcal{C}) = \inf\{k \geq n : 1_{C_k} = 1\}$. Für festes $\omega \in \Omega$ bedeutet dies: Stoppe das erste mal nach n an dem $\omega \in C_k$ gilt (vgl. (2.4)).

Auf der Menge C_n schränkt man sich auf die $\omega \in \Omega$ ein für die zusätzlich

$$\{E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\} \quad (2.1)$$

gilt. Man schränkt sich demnach auf jene Elemente aus dem Grundraum ein, die in C_n enthalten sind und für die der Prozess zur Zeit n besser ist als der bedingte Erwartungswert dessen, was bei geeigneter Fortführung erzielt würde (siehe (2.5)).

Den Prozess $(X_n)_{n \geq 0}$ stelle man sich als eine zufällige Auszahlung vor, die eine Person zur Zeit n erhält. Im Zusammenhang mit (2.1) wäre es naheliegend mit

einer sofortigen Auszahlung einverstanden zu sein, wenn die Person wüsste, dass Sie durch Warten keinen höheren Betrag erwirtschaften kann. Es stellt sich Ihr die Frage, zu welchem Zeitpunkt Sie sich den Betrag am Besten auszahlen lassen sollte.

Führt man die Verfeinerung wie in (2.1) hinreichend oft durch (siehe (2.6)-(2.9)), so lässt sich in der Tat eine optimale Strategie finden.

2.2 Methode zum Lösen allgemeiner Stopprobleme

Die folgenden Notationen sind angelehnt an [Irle 1980] bzw. [Irle 2006].

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{G}, P) . Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ ein bzgl. der Filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$ adaptierter reellwertiger Prozess. Für die weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass

$$E|X_n| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und setze } X_\infty = \limsup X_n$$

und für alle Stopzeiten $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$ zusätzlich:

$$E|X_\tau| < \infty.$$

Es bezeichne \mathcal{T} die Menge aller Stopzeiten bzgl. $(\mathcal{G}_j)_{j \in \bar{\mathbb{N}}_0}$ wobei

$$\bar{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\} \text{ und } \mathcal{G}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n\right).$$

Es ist bekannt, dass

$$\sup\{EX_\tau : \tau \in \mathcal{T}\} = \sup\{EX_\tau : \tau \in \mathcal{T}; \tau < \infty \text{ fast sicher}\}.$$

Ferner wird sich das Supremum auch bei Zulassen von zufälligen Stopzeiten nicht vergrößern.

Als Nächstes folgen die nötigen Definitionen:

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \{\mathcal{C} = (C_n)_{n \leq \infty} : C_n \in \mathcal{G}_n, C_\infty = \Omega\} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \{\tau \in \mathcal{T} : \{\tau = n\} \subseteq C_n \text{ für alle } n\} \quad (2.3)$$

$$\tau_n(\mathcal{C}) = \inf\{k \geq n : 1_{C_k} = 1\} \quad \text{mit } \tau(\mathcal{C}) = \tau_0(\mathcal{C}). \quad (2.4)$$

Darüber hinaus gelte die Vereinbarung $\inf \emptyset = \infty$.

Die so definierte Stopzeit $\tau_n(\mathcal{C})(\omega) = \inf\{k \geq n : 1_{C_k}(\omega) = 1\}$ stoppt für fest gewähltes ω zum ersten Zeitpunkt $k \geq n$ an dem $\omega \in C_k$ ist.

Für ein $\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ definiere die Folgenglieder von $\mathcal{C}^* = (C_n^*)_{n \geq 1}$ durch

$$C_n^* = \{E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\} \cap C_n, \text{ mit } C_\infty^* = \Omega \quad (2.5)$$

C_n^* besteht also aus allen $\omega \in \Omega$ die in C_n enthalten sind und zusätzlich die Eigenschaft besitzen, dass der bedingte Erwartungswert des Prozesses, gestoppt zu demjenigen Zeitpunkt $k \geq n+1$ an dem $\omega \in C_k$ ist, höchstens so gut ist wie der Prozess zum Zeitpunkt n .

Definiere induktiv

$$\mathcal{C}^0 = (\Omega)_{n \geq 1} \quad \mathcal{C}^k = (\mathcal{C}^{k-1})^* \quad (2.6)$$

Zur Veranschaulichung betrachte diese Mengenbildung für den Wert $k = 1$:

$$\mathcal{C}^1 = (\mathcal{C}^0)^* = (\{E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C}^0)} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\})_n = (\{E(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\})_n \quad (2.7)$$

Für $k > 1$ hingegen lässt sich $\tau_{n+1}(\mathcal{C})$ nicht explizit angeben:

$$C^k = (\mathcal{C}^{k-1})^* = (\{E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C}^{k-1})} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\})_n \cap C_n^{k-1} \quad (2.8)$$

wobei C_n^{k-1} das n -te Folgeglied von \mathcal{C}^{k-1} ist.

Setze weiter

$$F_n = \bigcap_k C_n^k \quad F = (F_n)_{n \geq 1} \quad (2.9)$$

Für den Beweis des anschließenden Lemma ist folgende Veranschaulichung der Mengen \mathcal{C}^k hilfreich:

\mathcal{C}^1		C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	C_5^1	...	C_m^1	...
\cup		\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	...	\cup	...
\mathcal{C}^2		C_1^2	C_2^2	C_3^2	C_4^2	C_5^2	...	C_m^2	...
\cup		\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	...	\cup	...
\mathcal{C}^3		C_1^3	C_2^3	C_3^3	C_4^3	C_5^3	...	C_m^3	...
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...
\mathcal{C}^k		C_1^k	C_2^k	C_3^k	C_4^k	C_5^k	...	C_m^k	...
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...
F		F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	...	F_m	...

Das folgende Lemma wird im Beweis von Theorem 2.2 benötigt.

2.1 Lemma. *Mit obigen Definitionen folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(\mathcal{C}^k) = \tau(F)$.*

Beweis. Da die Mengen \mathcal{C}^k für wachsendes k eine antitone Folge bilden, gilt $\tau(\mathcal{C}^k) \leq \tau(\mathcal{C}^{k+1})$ für beliebiges k . Auf $\{\tau(F) < \infty\}$ ist $\tau(\mathcal{C}^k)$ zusätzlich nach oben beschränkt durch $\tau(F)$ und konvergiert damit gegen eine endliche natürliche Zahl. Angenommen $m := \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(\mathcal{C}^k)(\omega) < \tau(F)(\omega) =: \xi$ für alle $\omega \in \{\tau(F) < \infty\}$. Dann muss wegen der Definition der Stopzeit gelten, dass

$\omega \in C_m^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit auch $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_m^k = F_m$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\xi > m$ auf $\{\tau(F) < \infty\}$.

Sei nun $\omega \in \{\tau(F) = \infty\}$ beliebig. Angenommen $m := \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(\mathcal{C}^k) < \infty$, d.h. es existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\tau(\mathcal{C}^k)(\omega) = m$ für alle $k \geq N_0$. Daraus folgt $\omega \in C_m^k$ für alle $k \geq N_0$ und insbesondere $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_m^k = F_m$. Widerspruch. \square

2.2.1 Satz und Beweis

Nach den Vorbereitungen nun das angekündigte Ergebnis, dass bereits in [Irle 1980] bekannt gegeben und bewiesen wurde. Mit den Bezeichnungen wie oben gilt:

2.2 Theorem. *Ist die Bedingung*

$$E[X_{\lim \sigma_n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{\sigma_n}] \quad (2.10)$$

für jede aufsteigende Folge von Stopzeiten $(\sigma_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{T}$ erfüllt, dann gilt

- (i) $EX_{\tau(C^0)} \leq EX_{\tau(C^1)} \leq \dots \uparrow EX_{\tau(F)}$
- (ii) $EX_{\tau(F)} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} EX_{\tau} = \sup\{EX_{\tau} : \tau \in \mathcal{T}\}$ d.h. τ ist optimal.

Beweisidee.

- (a) Betrachte die Menge C_n und C_n^* wie eingangs definiert. Für ein $\sigma \in \mathcal{T}(C)$ setze

$$\sigma^* = \inf\{n \geq \sigma : 1_{C_n^*} = 1\}.$$

Dann kann man zeigen, dass

$$EX_{\sigma^*} \geq EX_{\sigma}$$

ist, woraus sofort (i) folgt.

- (b) Unter Zuhilfenahme von (a) lässt sich zeigen, dass es zu einem beliebigem $\tau \in \mathcal{T}$ ein $\tau' \in \mathcal{T}(F)$ existiert derart, dass

$$EX_{\tau'} \geq EX_{\tau}.$$

- (c) Für diesen Schritt betrachte $\rho, \tau \in \mathcal{T}(F)$ mit $\rho \leq \tau$ fast sicher. Wie bewiesen werden kann, führt dies zu

$$EX_{\rho} \geq EX_{\tau}.$$

- (d) Für den letzten Schritt wähle eine beliebige Stopzeit τ . Gemäß (b) existiert ein $\tau' \in \mathcal{T}(F)$ derart, dass

$$EX_{\tau'} \geq EX_{\tau}.$$

Nach Definition von $\tau'_0(F)$ ist $\tau'_0(F) \leq \tau'$. Mit (c) gilt letztlich

$$EX_{\tau'_0} \geq EX_{\tau_0} \geq EX_{\tau}.$$

□

Es folgt der ausführliche Beweis von Theorem 2.2.

Beweis.

(a) Sei $\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ beliebig, $\sigma \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ und

$$\sigma^* = \inf\{n \geq \sigma : 1_{C_n^*} = 1\} \quad (2.11)$$

Es ist $\sigma^* \in \mathcal{T}(\mathcal{C}^*)$ da $\{\sigma^* = m\} \subseteq C_m^*$.

Für ein $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ setze

$$\hat{\rho} = \sum_n (\tau_{n+1}(\mathcal{C}) \cdot 1_{\{\{\rho=n\}-C_n^*\}} + \rho \cdot 1_{\{\{\rho=n\} \cap C_n^*\}}) \quad (2.12)$$

wobei $\hat{\rho} = \rho$ auf der Menge $\{\rho = \infty\}$ gesetzt sei. Man sieht ein, dass $\hat{\rho}$ wieder eine Stopzeit ist. Da $\{\rho = n\} \subseteq C_n$ und außerhalb von C_n^* $X_n \leq E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} | \mathcal{G}_n)$ ist, gilt mit $A_n = \{\rho = n\} - C_n^*$:

$$\int_{A_n} X_\rho dP = \int_{A_n} X_n dP \leq \int_{A_n} E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} | \mathcal{G}_n) dP. \quad (2.13)$$

Wegen der definierenden Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes ist

$$\int_{A_n} E(X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} | \mathcal{G}_n) dP = \int_{A_n} X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} dP. \quad (2.14)$$

Da in (2.12) die Mengen $\{\rho = n\}$ für jedes n disjunkt sind (damit auch $\{\rho = n\} - C_n^*$), ist

$$\int_{A_n} X_{\tau_{n+1}(\mathcal{C})} dP = \int_{A_n} X_{\hat{\rho}} dP. \quad (2.15)$$

Das links vom Ungleichheitszeichen stehende Integral in (2.13) ist demnach höchstens so groß wie das rechts stehende Integral in (2.15).

Nun stimmen ρ und $\hat{\rho}$ auf $B_n = \{\rho = n\} \cap C_n^*$ überein, so dass

$$\int_{B_n} X_\rho dP = \int_{B_n} X_{\hat{\rho}} dP. \quad (2.16)$$

Nun ist $\Omega = \bigcup_n (A_n \cup B_n) \cup \{\rho = \infty\}$, also

$$\int_{\Omega} X_\rho dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} X_\rho dP + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n} X_\rho dP + \int_{\{\rho=\infty\}} X_\rho dP$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} X_{\hat{\rho}} dP + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n} X_{\hat{\rho}} dP + \int_{\{\hat{\rho}=\infty\}} X_{\rho} dP = \int_{\Omega} X_{\hat{\rho}} dP$$

Also $E(X_{\rho}) \leq E(X_{\hat{\rho}})$.

Definiere induktiv $\sigma_0 = \sigma$ und

$$\sigma_k = \hat{\sigma}_{k-1} = \sum_n (\tau_{n+1}(\mathcal{C}) \cdot 1_{\{\{\sigma_{k-1}=n\}-C_n^*\}} + \sigma_{k-1} \cdot 1_{\{\{\sigma_{k-1}=n\} \cap C_n^*\}}).$$

Damit gilt $\sigma \leq \sigma_k \leq \sigma_{k+1}$ fast sicher und ferner $\lim \sigma_k = \sigma^*$ fast sicher, da $\sigma_{k+1} \geq \sigma_k + 1$ auf der Menge $\{\sigma_k < \sigma^*\}$ gilt.¹

Aus Voraussetzung (2.10) folgt dann $EX_{\sigma^*} = \lim EX_{\sigma_k} \geq EX_{\sigma}$. Dies zeigt, dass für die Wahl einer Stopzeit von der Form σ^* der Erwartungswert des gestoppten Prozesses besser ist, als der bezüglich einer beliebigen Stopzeit $\sigma \in \mathcal{T}$.

(b) Zu beliebigem $\tau \in \mathcal{T}$, definiere

$$\tau_k = \inf\{n \geq \tau : 1_{C_n^k} = 1\}$$

und

$$\tau' = \inf\{n \geq \tau : 1_{F_n} = 1 \cap_k C_n^k = 1\}.$$

Dann ist wegen

$$\tau_0 = \inf\{n \geq \tau : 1_{C_n^0} = 1\} = \inf\{n \geq \tau : 1_{\Omega} = 1\} = \tau,$$

also $\tau = \tau_0$. Wegen der Definition von \mathcal{C}^k ist $C_n^{k+1} \subseteq C_n^k$, daher gilt

$$\tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : 1_{C_n^{k+1}} = 1\}.$$

Aufgrund der Definition von σ^* am Anfang des Beweises, folgt ferner

$$\tau_{k+1} = \tau_k^*.$$

Aus (a) folgt nun:

$$EX_{\tau_k} \leq EX_{\tau_{k+1}}.$$

Damit, und aus $\tau_k \leq \tau_{k+1}$ und $\lim \tau_k = \tau'$ (vgl. Lemma 2.1) mit Voraussetzung (2.10) ist nun

$$EX_{\tau'} = \lim EX_{\tau_k} \geq EX_{\tau}.$$

Da $\tau' \in \mathcal{T}(F)$ ist, erhält man

$$\sup\{EX_{\tau} : \tau \in \mathcal{T}(F)\} = \sup\{EX_{\tau} : \tau \in \mathcal{T}\}.$$

¹eine ausführliche Begründung befindet sich, der Übersichtlichkeit halber, im Anschluss des Beweises in Form eines Lemmas.

(c) Wähle $\rho, \tau \in \mathcal{T}(F)$ mit $\rho \leq \tau$ fast sicher. Sei

$$\rho_k = \tau \cdot 1_{\{\rho=\tau\}} + \sum_n \tau_{n+1}(\mathcal{C}^k) \cdot 1_{\{\rho < \tau, \rho=n\}}$$

und

$$\tilde{\rho} = \tau \cdot 1_{\{\rho=\tau\}} + \sum_n \tau_{n+1}(F) \cdot 1_{\{\rho < \tau, \rho=n\}}.$$

Es gilt $\rho \leq \rho_k \leq \rho_{k+1}$ und $\lim \rho_k = \tilde{\rho}$ unter Beachtung von $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}^k = F$.

Da $\rho \in \mathcal{T}(F)$, d.h.

$$\{\rho = n\} \subseteq \bigcap_k C_n^k \subseteq C_n^{k+1}$$

und wegen

$$C_n^{k+1} = (C_n^k)^* = \{E(X_{\tau_{n+1}(C^k)} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\} \cap C_n^k$$

gilt für beliebiges k und n :

$$\{\rho = n < \tau\} \subseteq C_n^{k+1} \subseteq \{E(X_{\tau_{n+1}(C^k)} | \mathcal{G}_n) \leq X_n\}.$$

Es ist $\rho \in \mathcal{T}(F)$ und mit $B = \{\rho = n < \tau\}$ führt dies zu

$$\int_B X_\rho dP = \int_B X_n dP \geq \int_B E(X_{\tau_{n+1}(C^k)} | \mathcal{G}_n) dP,$$

Wieder mit der definierenden Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes gilt

$$\int_B E(X_{\tau_{n+1}(C^k)} | \mathcal{G}_n) dP = \int_B X_{\tau_{n+1}(C^k)} dP.$$

Aufgrund der Definition von ρ_k gilt letztlich

$$\int_B X_{\tau_{n+1}(C^k)} dP = \int_B X_{\rho_k} dP.$$

Damit ist nun

$$EX_\rho \geq EX_{\rho_k} \text{ für jedes } k$$

und somit mit Voraussetzung (2.10)

$$EX_\rho \geq \lim EX_{\rho_k} = EX_{\tilde{\rho}}.$$

Definiere weiter $\rho^0 = \rho$ und induktiv

$$\rho^k = \tilde{\rho}^{k-1} = \tau 1_{\{\rho^{k-1}=\tau\}} + \sum_n \tau_{n+1}(F) 1_{\{\rho^{k-1}=n < \tau\}}.$$

Dann ist $\rho^{k+1} \geq \rho^k$ fast sicher nach Definition von ρ^{k+1} , denn auf der Menge $\{\rho^k = n < \tau\}$ gilt $\tau_{n+1}(F) = \inf\{m \geq \rho^k + 1 : 1_F = 1\}$. Auf diese Weise folgt

$$EX_\rho \geq EX_{\rho^k} \geq EX_{\rho^{k+1}}.$$

Da $\rho^{k+1} \geq \rho^k + 1$ auf $\{\rho^k < \tau\}$ gilt, ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k = \tau$ fast sicher (vgl. Lemma 2.3). Insgesamt wiederrum:

$$EX_\rho \geq \lim EX_{\rho^k} = EX_\tau.$$

Es wurde gezeigt: Sind ρ, τ zwei Stopzeiten in \mathcal{T} mit $\rho \leq \tau$ fast sicher, so ist es stets vorteilhaft früher zu stoppen.

(d) Da $\tau(F) = \tau_0(F) \leq \tau$ für alle $\tau \in \mathcal{T}(F)$ gilt, folgt aus (c) und (b):

$$EX_{\tau(F)} = \sup\{EX_\tau : \tau \in \mathcal{T}(F)\} = \sup\{EX_\tau : \tau \in \mathcal{T}\}$$

Also ist $\tau(F) = \tau_0(F)$ optimal. □

2.3 Lemma. Sei $\sigma^* = \inf\{n \geq \sigma : 1_{C_n^*} = 1\}$, $\sigma_0 = \sigma$, $I_n = \{\sigma_{k-1} = n\} - C_n^*$ und $J_n = \{\sigma_{k-1} = n\} \cap C_n^*$. Setze

$$\sigma_k = \hat{\sigma}_{k-1} = \sum_n (\tau_{n+1}(\mathcal{C}) \cdot 1_{I_n} + \sigma_{k-1} \cdot 1_{J_n}). \quad (2.17)$$

Dann gilt

- (i) $\sigma_{k+1} \geq \sigma_k + 1$ auf der Menge $\{\sigma_k < \sigma^*\}$
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \sigma^*$ fast sicher.

Beweis. Um (i) zu zeigen, wähle ein $\omega \in \{\sigma_k < \sigma^*\}$. Angenommen es gelte $\sigma_{k+1}(\omega) = \sigma_k(\omega) = n$. Nach (2.17) muss $\omega \in C_n^*$ sein. Daraus folgt, dass bereits $\sigma^*(\omega) \leq n$ und somit $\sigma_k(\omega) \geq \sigma^*(\omega)$ ist. Widerspruch.

Für den Nachweis von (ii) betrachte zunächst den Fall $\sigma^* = \infty$. Für ein $\omega \in \{\sigma^* = \infty\}$ ist wegen (i) die Ungleichung $\sigma_{k+1}(\omega) \geq \sigma_k(\omega) + 1$ erfüllt. Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ liefert das Gewünschte.

Für den zweiten Fall sei $\omega' \in \{\sigma^* < \infty\}$. Nach Definition von σ^* gilt $\sigma_0(\omega') \leq \sigma^*(\omega')$. Ist $\omega' \in J_n$ folgt bereits $\sigma_{k+1}(\omega') = \sigma_k(\omega') = \sigma^*$. Ist jedoch $\omega' \in I_n$ gilt stets $\sigma^*(\omega') \geq \sigma_{k+1}(\omega')$. Wegen $\sigma \leq \sigma_k \leq \sigma_{k+1}$ fast sicher folgt die Behauptung. □

2.3 Modell für Markov'sche Stopprobleme

Zur Erinnerung betrachte folgende

2.3.1 Definition (stationäre Markovfolge) [Irle 2003].

Sei $\tilde{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{G}, P) mit Werten in einem messbaren Raum (S, \mathcal{S}) und adaptiert zu einer Filtration $\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{G}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$.

\tilde{Z} wird als stationäre Markovfolge bzgl. $\tilde{\mathcal{G}}$ mit Anfangszustand $z \in S$ bezeichnet, falls gilt:

$$(i) \quad Z_0 = z$$

(ii) Es existiert eine Abbildung $Q : \mathcal{S} \times S \rightarrow [0, 1]$, so dass

$Q(\cdot, s)$ Wahrscheinlichkeitsmaß für jedes s ist,

$Q(B, \cdot)$ messbar für jedes $B \in \mathcal{S}$ ist

und dass für alle n gilt

$$P(Z_{n+1} \in B | \mathcal{G}_n) = Q(B, Z_n).$$

Q wird als Übergangswahrscheinlichkeit und S als Zustandsraum bezeichnet. Aus dieser Definition folgt die Beziehung

$$\begin{aligned} E(g(Z_{n+1}) | \mathcal{G}_n) &= E(g(Z_{n+1}) | Z_n), \\ E(g(Z_{n+1}) | Z_n = z) &= \int g(s) Q(ds, z) \end{aligned}$$

für messbare Abbildungen $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit existierendem Erwartungswert $Eg(Z_{n+1})$.

Für die Modellbildung betrachte eine homogene Markovkette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten im messbaren Raum (S, \mathcal{S}) , mit

$$P(Z_{n+1} \in B | \mathcal{G}_n) = Q(B, Z_n), \quad \text{für alle } B \in \mathcal{S},$$

Übergangswahrscheinlichkeit $Q : \mathcal{S} \times S \rightarrow [0, 1]$. Sei $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Es wird das Stopprobleme für die Folge

$$X_n = g(Z_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

betrachtet. Im weiteren setze

$$g(Z_\infty) = \limsup g(Z_n), \quad \text{also } X_\infty = g(Z_\infty)$$

und letztlich $X_\tau = g(Z_\tau)$ für eine beliebige Stopzeit τ .

Es wird vorausgesetzt, dass $E_z g(Z_\tau) := E(g(Z_\tau) | Z_0 = z)$ für alle $\tau \in \mathcal{T}$ und $z \in S$ existiert. Ziel ist es, eine Stopzeit $\tau^* \in \mathcal{T}$ zu finden, derart dass

$$E_z g(Z_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_z g(Z_\tau), \quad \text{für alle } z \in S.$$

gilt. Es bezeichne

$$v(z) = \sup_{\tau} E_z g(Z_\tau), \quad z \in S$$

den Wert des Stopproblems.

Im Markov'schen Fall braucht FII nur auf Teilmengen des Zustandsraum S zu funktionieren. Sei $B \subseteq S$ messbar und setze

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(B) &= \{\tau \in \mathcal{T} : Z_\tau \in B \text{ auf } \{\tau < \infty\}\}, \\ \tau_n(B) &= \inf\{k \geq n : Z_k \in B\}, \quad \text{mit } \tau(B) = \tau_0(B) \end{aligned}$$

als den ersten Eintrittszeitpunkt von Z_k ab dem Zeitpunkt n in die Zustandsmenge B .

Definiere $B^* \subseteq S$ durch

$$B^* = \{z \in S : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_n})\} \cap B$$

was wegen der starken Markoveigenschaft äquivalent zu

$$B^* = \{z \in S : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1})\} \cap B$$

ist.

Als Stopzeit bezüglich der Menge B^* ist,

$$\tau_n(B^*) = \inf\{k \geq n : Z_k \in B^*\}, \quad \text{mit } \tau(B^*) = \tau_0(B^*)$$

Es ist $\tau_n(B), \tau_n(B^*) \in \mathcal{T}(B)$. Setze weiter

$$B^0 = S \quad B^k = (B^{k-1})^* \quad F = \bigcap_k B^k$$

2.4 Lemma. *Mit obigen Bezeichnungen gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(B^k) = \tau(F)$.*

Beweis. Es gilt $B^0 \supseteq B^1 \supseteq \dots$ und deshalb $\tau(B^0) \leq \tau(B^1) \leq \dots$. Die restliche Beweisführung verläuft analog zu dem von Lemma 2.1 für die Mengen B^k . \square

2.3.1 Satz und Beweis im Markov'schen Fall

Da die Beweisstrategie für diesen Spezialfall identisch ist mit der für den allgemeinen Fall, wird der Beweis nicht so detailliert ausfallen. Lediglich auf die sich ändernden Schreibweisen ist zu achten.

2.5 Theorem. *Es gelte*

$$E_z \left[g(Z_{\lim \sigma_n}) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_z \left[g(Z_{\sigma_n}) \right] \quad (2.18)$$

für alle $z \in S$ und für jede aufsteigende Folge von Stopzeiten $(\sigma_n)_n$.

Dann gilt für alle $z \in S$ mit den Bezeichnungen aus Seite 21:

- (i) $E_z g(Z_{\tau(B^0)}) \leq E_z g(Z_{\tau(B^1)}) \leq \dots \uparrow E_z g(Z_{\tau(F)})$ fast sicher.
- (ii) $E_z g(Z_{\tau(F)}) = v(z)$, dass heißt $\tau(F)$ ist optimal.

Beweis.

(a) Seien B und B^* wie oben. Wähle ein $\sigma \in \mathcal{T}(B)$ und setze

$$\sigma^* = \inf \{ n \geq \sigma : Z_n \in B^* \}.$$

σ^* ist der Übergangszeitpunkt der Markovkette Z_n in die Teilmenge B^* der Zustandsmenge B .

Es soll $E_z g(Z_{\sigma^*}) \geq E_z g(Z_\sigma)$ fast sicher gezeigt werden.

Für beliebiges $\rho \in \mathcal{T}(B)$ setze

$$\hat{\rho} = \sum_{n < \infty} (\tau_{n+1}(B) \cdot 1_{\{\rho=n\} \cap \{Z_n \notin B^*\}} + \rho \cdot 1_{\{\rho=n\} \cap \{Z_n \in B^*\}}) + \infty \cdot 1_{\{\rho=\infty\}}$$

Es ist $\hat{\rho} \in \mathcal{T}(B)$. Es gilt, mit $A_n = \{\rho = n\} \cap \{Z_n \notin B^*\}$:

$$\int_{A_n} X_\rho dP = \int_{A_n} X_n dP \leq \int_{A_n} E_z(X_{\tau_{n+1}(B)}) dP = \int_{A_n} X_{\tau_{n+1}(B)} dP. \quad (2.19)$$

Damit also $E_z X_\rho \leq E_z X_{\hat{\rho}}$ fast sicher. Definiere induktiv $\sigma_0 = \sigma$ und $\sigma_k = \hat{\sigma}_{k-1}$, was zu $E_z X_\sigma \leq E_z X_{\sigma_k} \leq E_z X_{\sigma_{k+1}} \leq \dots$ für alle k führt. Zunächst ist $\sigma \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma^*$ und mit Lemma 2.3 $\lim_k \sigma_k = \sigma^*$, da $\sigma_{k+1} \geq \sigma_k + 1$ auf $\{\sigma_k < \sigma^*\}$ gilt. Mit Voraussetzung (2.18) folgt:

$$E_z X_{\sigma^*} = \lim E_z X_{\sigma_k} \geq E_z X_\sigma$$

fast sicher.

Da $\tau(B^k) = \inf \{ m \geq \tau(B^{k-1}) : Z_m \in B^k \}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(B^k) = \tau(F)$ folgt

$$E_z X_{\tau(B^0)} \leq E_z X_{\tau(B^1)} \leq \dots \uparrow E_z X_{\tau(F)} \text{ fast sicher.}$$

- (b) Sei $\sigma \in \mathcal{T}$ beliebig. Definiere $\tau_k = \inf\{n \geq \sigma : Z_n \in B^k\}$ und $\tau = \inf\{n \geq \sigma : Z_n \in F\}$. Dann ist mit $\sigma = \tau_0$ und wegen $B^0 \supseteq B^1 \supseteq B^2 \dots$, $\tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k : Z_n \in B^{k+1}\}$. Aus (a) folgt $E_z X_{\tau_{k+1}} \geq E_z X_{\tau_k}$.

Es ist $\tau \leq \tau_{k+1}$. Nach Lemma 2.4 ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \tau$ und daher

$$E_z X_\tau = \lim_{k \rightarrow \infty} E_z X_{\tau_k} \geq E_z X_\sigma.$$

- (c) Seien $\rho, \tau \in \mathcal{T}(F)$ mit $\rho \leq \tau$ fast sicher. Definiere

$$\rho_k = \tau \cdot 1_{\{\rho=\tau\}} + \sum_{n < \infty} \tau_{n+1}(B^k) \cdot 1_{\{\rho < \tau, \rho=n\}}$$

und

$$\tilde{\rho} = \tau \cdot 1_{\{\rho=\tau\}} + \sum_{n < \infty} \tau_{n+1}(F) \cdot 1_{\{\rho < \tau, \rho=n\}}$$

Es gilt

$$\rho \leq \rho_k \leq \rho_{k+1} \leq \tilde{\rho} \leq \tau \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \tilde{\rho}$$

fast sicher.

Auf $\{\rho < \tau, \rho = n\}$ ist die zum Zeitpunkt ρ gestoppte Markovkette Z_ρ früher in F als der gestoppte Prozess Z_τ .

Da $\rho \in \mathcal{T}(B)$ ist $\{\rho < \tau, \rho = n\} \subseteq \{g(Z_n) \geq E_{Z_n} g(Z_{\tau_1(B^k)})\}$. Es bezeichne $\tilde{A}_n := \{\rho < \tau, \rho = n\}$. Damit ist

$$\int_{\tilde{A}_n} X_\rho dP = \int_{\tilde{A}_n} X_n dP \geq \int_{\tilde{A}_n} E_{Z_n} X_{\tau_{n+1}(B^k)} dP = \int_{\tilde{A}_n} X_{\tau_{n+1}(B^k)} dP$$

fast sicher. Auf $\{\rho = \tau\}$ ist $X_\rho = X_\tau$. Insgesamt erhält man

$$E_z g(Z_\rho) \geq E_z g(Z_{\rho_k})$$

fast sicher für jedes k und wegen Voraussetzung (2.18)

$$E_z X_\rho = E_z g(Z_\rho) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} E_z X_{\rho_k} = E_z X_{\tilde{\rho}}$$

fast sicher.

Definiere $\rho^0 = \rho$ und induktiv $\rho^k = \tilde{\rho}^{k-1}$ ein. Dann ist $\rho^{k+1} \geq \rho^k$ fast sicher nach Definition von ρ^{k+1} , denn auf der Menge $\{\rho^k = n < \tau\}$ gilt $\tau_{n+1}(F) = \inf\{m \geq \rho^k + 1 : Z_m \in F\}$. Auf diese Weise folgt

$$E_z X_\rho \geq E_z X_{\rho^k} \geq E_z X_{\rho^{k+1}}$$

fast sicher. Da $\rho^{k+1} \geq \rho^k + 1$ auf $\{\rho^k < \tau\}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k = \tau$ fast sicher.

Insgesamt erhält man:

$$E_z X_\rho \geq \lim_{k \rightarrow \infty} E_z X_{\rho^k} = E_z X_\tau$$

fast sicher.

(d) Sei $\sigma \in \mathcal{T}$ beliebig. Aus (b) folgt die Existenz eines $\tau \in \mathcal{T}(F)$ derart, dass

$$E_z X_\sigma \leq E_z X_\tau$$

fast sicher. Da $\tau_0(F) \leq \tau$ fast sicher für alle $\tau \in \mathcal{T}(F)$ gilt, folgt aus (c)

$$E_z X_{\tau_0(F)} \geq E_z X_\tau \geq E_z X_\sigma$$

fast sicher.

□

Im obigen Zusammenhang und für den weiteren Verlauf der Arbeit folgt eine Definition, die eine Klassifikation der Teilmenge B des Zustandsraum S im Rahmen von Optimalen Stopproblemen erlaubt. Sei $B^* \subseteq S$ mit

$$B^* = \{z : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B)})\} \cap B$$

mit den jeweiligen Notationen wie auf Seite 21.

2.3.2 Definition (continuation-, early exercise region).

Die Zustände $z \in B$ für ein $B \subseteq S$ lassen sich kategorisieren in Elementen aus dem Fortsetzungsgebiet (continuation region) B_C und dem Stopgebiet (early exercise region) B_E wobei

$$B_C = \{z \in B : g(z) < E_z g(Z_{\tau_1(B)})\} \quad (2.20)$$

und

$$B_E = \{z \in B : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B)})\} \quad (2.21)$$

bedeuten.

Kapitel 3

Anwendungsgebiete, Bemerkungen und ein Korollar

Die folgenden Erläuterungen und Beispiele dienen zur Veranschaulichung der Menge B^* . Insbesondere Beispiel 3.1.3 wird für die Bewertung einer Amerikanischen Option von Interesse sein. Wie in Beispiel 3.1.2 wird sich nämlich auch da zeigen, dass die Optimale Stopzeit nicht von dem Zeitpunkt abhängt, in der die Markovkette sich befindet. Im Fall eines Monotonen Stopproblems (Abschnitt 3.2) wird die Menge B^* von der einfachsten Bauart sein.

3.1 Zeitabhängiger Pay-Off

Gegeben sei eine messbare Abbildung $g : \mathcal{S} \times \{0, 1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(Z_n, n) \quad n = 0, 1, \dots$$

Der Algorithmus wird auf den zwei-dimensionalen Markov Prozess (Z_n, n) , mit $n \geq 0$ angewandt.

Für $B \subseteq \mathcal{S} \times \{0, 1, \dots\}$ ist B^* von der Form

$$B^* = \{(z, n) \in B : g(z, n) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B)}, n + \tau_1(B))\}$$

3.1.1 Beispiel: Endlicher Horizont

3.1.1 Beispiel (Endlicher Horizont). Im Fall von Stopproblemen mit endlichem Zeithorizont N und Auszahlungen

$$g(Z_n, n) \quad \text{in} \quad n = 0, 1, \dots, N$$

setze

$$g(z, k) = -\infty \quad \text{für} \quad k = N + 1, N + 2, \dots$$

dann gilt sofort, dass

$$B^* \subseteq \mathcal{S} \times \{N, N+1, \dots\},$$

das heißt, der FII betrachtet nur Stopzeiten die kleiner oder gleich N sind.

3.1.2 The House Selling Problem & Lineare Kosten

3.1.1 Beispiel (The House Selling Problem) [Ferguson Ferguson].

Für ein Haus, das Sie verkaufen möchten, trifft täglich ein Angebot ein. Es beschreibe Z_n die Höhe des am Tag n bekannt gewordenen Angebots. Sie können zusätzlich annehmen, dass die Angebote unabhängig und identisch verteilt sind. Jedes Angebot das eingeht kostet Sie einen fixen Betrag $c > 0$, welches z.B. als Lebensunterhaltskosten anfallen kann.

Trifft ein Angebot ein, müssen Sie entscheiden ob Sie mit dem Betrag einverstanden sind oder ob Sie auf ein besseres Angebot warten wollen. Sie wissen, dass letztendlich ein besseres Angebot eintreffen wird; doch wird dessen Höhe die Kosten für das Warten darauf kompensieren können?

Formal lautet das Problem: Gegeben ist eine Folge Z_1, Z_2, \dots unabhängig, identisch verteilter, Zufallsvariablen mit Werten in den positiven reellen Zahlen \mathbb{R}^+ die messbar sind bezüglich der Borelschen σ -Algebra hierauf. Weiter sei angenommen, dass der Rückgriff auf zuvor abgelehnte Angebote nicht mehr möglich ist.

Als Gewinnfunktion setze:

$$\begin{aligned} g(Z_n, 0) &= 0 \\ g(Z_n, n) &= Z_n - n \cdot c \quad n = 1, 2, \dots \\ g(Z_n, \infty) &= -\infty \end{aligned}$$

Die Bedingung die B^* nun definiert lautet:

$$\begin{aligned} z - c \cdot n &\geq E_z g(Z_{\tau_1(B)}, n + \tau_1(B)) \\ &= E_z Z_{\tau_1(B)} - c \cdot n - c \cdot E_z \tau_1(B) \\ \iff z &\geq E_z Z_{\tau_1(B)} - c \cdot E_z \tau_1(B) \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.1 ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Stopproblems bei linearen Kosten:

3.1.2 Beispiel (Lineare Kosten). Sei für ein $c > 0$ die Gewinn-/Auszahlungsfunktion gegeben durch

$$g(Z_n, n) = f(Z_n) - c \cdot n \quad n = 0, 1, \dots,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} B^* &= \{(z, n) \in B : f(z) - c \cdot n \geq E_z(g(Z_{\tau_1(B)}, n + \tau_1(B)))\} \\ &= \{(z, n) \in B : f(z) \geq E_z f(Z_{\tau_1(B)}) - c \cdot E_z(\tau_1(B))\} \end{aligned}$$

Dies macht deutlich, dass die Optimale Stopzeit im Fall linearer Kosten unabhängig vom Zeitpunkt n ist, in dem sich die Markovkette befindet.

3.1.3 Beispiel: Diskontierung

3.1.3 Beispiel (Diskontierung). Sei $0 < \alpha < 1$,

$$g(Z_n, n) = \alpha^n f(Z_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

Dann entsteht B^* aus den Tupeln:

$$\begin{aligned} B^* &= \{(z, n) \in B : \alpha^n f(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B)}, n + \tau_1(B))\} \\ &= \{(z, n) \in B : \alpha^n f(z) \geq \alpha^n E_z \alpha^{\tau_1(B)} f(Z_{\tau_1(B)})\} \\ &= \{(z, n) \in B : f(z) \geq E_z \alpha^{\tau_1(B)} f(Z_{\tau_1(B)})\}. \end{aligned}$$

Als Beispiel stelle man sich einen Finanzmarkt mit einer kontinuierlichen Zinsrate $0 < \alpha < 1$ und ein Finanzderivat mit zufallsabhängigem Preis Z_n und Auszahlung $f(Z_n)$ zur Zeit n vor. $g(Z_n) = \alpha^n f(Z_n)$ beschreibt dann den Gegenwartswert des Derivats.

3.2 Der Monotone Fall

Es gibt eine Klasse von einfachen Optimalen Stopproblemen für die die *1-stage look-ahead stopping rule*, welches den gegenwärtigen Wert einer Zufallsvariable mit dem zu erwartenden Wert im nächsten Zeitschritt vergleicht, unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen (siehe [Chow et al. 1971, Kapitel 5]) optimal ist. Diese Stopzeit ist also wie folgt definiert

$$s = \inf\{n \geq 1 : Z_n \geq E(Z_{n+1} | \mathcal{G}_n)\} \quad (3.1)$$

Diese sogenannten Monotonen Stopprobleme (*monotone stopping problems*) haben im Markov'schen Fall folgendes Aussehen. Für die Mengenfolge B^0, B^1, \dots , gilt

$$B^1 = \{z : g(z) \geq E_z g(Z_1)\}.$$

Somit ist $\tau(B^1)$ die 1-stage look-ahead rule. Man spricht von einem monotonen Stopproblem, wenn

$$P_z(Z_1 \in B^1) = 1, \quad \text{für alle } z \in B^1.$$

Dies impliziert, dass

$$P_z(\tau_1(B^1) = 1) = 1, \quad \text{für alle } z \in B^1$$

und somit

$$B^1 = B^2 = F \quad \text{und} \quad \tau(B^1) = \tau(F).$$

Sind die Voraussetzungen an den Prozess $(Z_n)_n$ aus Theorem 2.5 erfüllt, so ist $\tau_1(B^1)$ optimal.

3.3 Bemerkungen zur Anwendung des Forward-Algorithmus

Bei der Anwendung des Algorithmus sind einige Tatsachen, die im Folgenden als Bemerkungen notiert werden, zu beachten.

3.3.1 Bemerkung (Abbruchkriterium). Wenn $B^{k+1} = B^k$ für ein k ist, führt dies zum Abbruch der in k monoton fallenden Folge B^k und damit zu $B^k = F$.

Ist der zugrundeliegende Zustandsraum \mathcal{S} endlich mit $|\mathcal{S}| = n$, so ist $F = B^n$ und der Algorithmus stoppt in höchstens n Schritten.

3.3.2 Bemerkung. Sei

$$F^* = \{z \in \mathcal{S} : g(z) = v(z)\}$$

Dann folgt nach Konstruktion der Menge B^* induktiv, dass $F^* \subseteq B^k$ für alle k und damit $F^* \subseteq F$. Da $\tau(F)$ nach Theorem 2.5 optimal ist, gilt $g(z) = v(z)$ für $z \in F$, was $F \subseteq F^*$ impliziert, also insgesamt:

$$F = F^*.$$

Aus Theorem 2.5 folgt nun, dass $\tau(F^*)$ optimal ist.

3.3.3 Bemerkung (Initialisierung). Ist von einer Menge $B^0 \subseteq \mathcal{S}$ bereits bekannt, dass

$$B^0 \supseteq \{z \in \mathcal{S} : g(z) = v(z)\} = F,$$

wobei

$$v(z) = \sup_{\tau} E_z g(Z_{\tau}), \quad z \in \mathcal{S}$$

gilt, so folgt aus Bemerkung 3.3.2, dass es genügt nach einer optimalen Stopzeit in $\mathcal{T}(B^0)$ zu suchen: Startet der FII auf der Menge B^0 , so erhält man die Menge $F' = \bigcap_k B^k$. Nach Theorem 2.5 ist also $\tau(F')$ eine optimale Stopzeit. Aus Bemerkung 3.3.2 folgt nun $F' = \{z \in \mathcal{S} : g(z) = v(z)\} = F$.

Bevor der Algorithmus angewandt werden kann, sind theoretische Überlegungen über die *endliche* Teilmenge $B^0 \subseteq \mathcal{S}$ des Zustandsraum zu machen in dem der FII starten muss. Im Falle eines abzählbaren Zustandsraum versucht man unendlich viele Zustände zu klassifizieren, d.h. man versucht zu entscheiden, ob die Zustände bereits zu F gehören oder nicht. Die übrigen, endlichen vielen Zustände die es noch zu untersuchen gilt, sind Elemente aus B^0 . Hierauf wird der FII angewandt um zu entscheiden, welche $z \in B^0$ zu B_C bzw. zu B_E gehören. Dieses Ergebnis wird in Beispiel 3.5.1 auf Seite 31 benutzt.

3.3.4 Bemerkung (Simulation). Um den FII Algorithmus anzuwenden, gilt es eine Folge von Mengen

$$B^0 \supseteq B^1 \supseteq B^2 \supseteq \dots$$

zu bestimmen. In jedem Schritt, geht man von einer gewissen Menge B des Zustandsraum über zu einer Menge B^* gegeben durch

$$B^* = \{z : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B)})\} \cap B.$$

Für die Implementierung werden die Pfade des Prozesses $(Z_n)_{n \geq 0}$ simuliert, welche dann einen simulierten Wert für $g(Z_{\tau_1(B)})$ und eine Schätzung für $E_z g(Z_{\tau_1(B)})$ liefern. Dadurch wird man in der Lage sein die Menge B^* in jedem Schritt zu bestimmen.

3.4 Der FII auf einem endlichen Zustandsraum; Ein Korollar

In Theorem 2.5 wird die Voraussetzung $\lim E_z g(Z_{\sigma_k}) = E_z g(Z_\sigma)$ benutzt. Das auf diese Bedingung im Fall eines endlichen Zustandsraum \mathcal{S} verzichtet werden kann, zeigt folgendes

3.4.1 Korollar. *Sei \mathcal{S} endlich. Dann ist $\tau(F)$ eine optimale Stopzeit, dass heißt:*

$$E_z g(Z_{\tau(F)}) = v(z) \quad \text{für alle } z.$$

Beweis. Nach Bemerkung 3.3.1 genügt es die Behauptung für $F^* \subseteq F$ und $\tau(F^*)$ zu beweisen. Nach einem bekannten Resultat aus der Theorie optimaler Stopzeiten für Markovketten (siehe [Shiryayev 1978, Kapitel 2, Theorem 4]) ist $\tau(F^*)$ optimal und fast sicher endlich für alle $z \in \mathcal{S}$. Zieht man den Beweis von Theorem 2.5 nochmals heran, so ist deutlich dass nur noch Teil c) benötigt wird um die Behauptung zu beweisen. Dabei wird $\tau = \tau(F^*)$ gesetzt. Die Behauptung gilt damit für alle \mathbb{P}_z -fast sicher endlichen τ . Damit dies gezeigt werden kann, muss

$$E_z g(Z_{\tilde{\rho}}) \geq \lim E_z g(Z_{\rho_k}),$$

für eine beliebige monoton wachsende Folge $(\rho_k)_{k \geq 0}$ mit $\tilde{\rho} = \lim \rho_k \leq \tau$ bewiesen werden. Definiert man die Folgenglieder ρ_k und dessen Grenzwert $\tilde{\rho}$ wie im Beweis von Theorem 2.5 so erhält man das Gewünschte. Es gilt $\tilde{\rho} < \infty$ \mathbb{P}_z -fast sicher, was

$$g(Z_{\tilde{\rho}}) = \lim g(Z_{\rho_k}), \quad \mathbb{P}_z\text{-fast sicher,}$$

zur Folge hat und mit dem *Satz von der dominierenden Konvergenz* letztlich

$$E_z g(Z_{\tilde{\rho}}) = \lim E_z g(Z_{\rho_k}).$$

□

3.5 Amerikanische Put Optionen

Die wesentliche Eigenschaft einer amerikanischen Put Option, im Gegensatz zu der europäischen Verkaufsoption, ist dass der Besitzer einer solchen sein Recht vor Ende der Laufzeit ausüben kann. Dies erschwert die Bewertung und damit die Ermittlung des fairen Preises drastisch. Es existiert keine geschlossene Formel wie etwa im Fall europäischer Optionen. Für die amerikanische Option mit endlicher Vertragslaufzeit ist die Optionsprämie nur numerisch approximierbar.

Intuitiv sollte jedoch klar sein, dass der Optionspreis einer amerikanischen Put Option mindestens so hoch sein muss wie der seines europäischen Gegenstücks. Das *No-Arbitrage-Prinzip* bestätigt diese Vermutung [Irle 2003] oder [Kwok 1998, Abschnitt 1.2]. Im kommenden Beispiel soll die Stopmenge F für einen amerikanischen Perpetual Put mit Hilfe der zuvor entwickelten Theorie bestimmt werden. Das Wort „Perpetual“ macht darauf aufmerksam, dass von einem Put mit unendlicher Laufzeit die Rede ist. Hierbei handelt es sich nicht um ein handelbares Finanzgut. Vielmehr ist es ein mathematisches Konzept die eine Brücke zwischen der Bewertung amerikanischer Optionen im zeitdiskreten Modell und ihrer Analyse im zeitstetigen Fall spannt [Shreve 2004, Abschnitt 5.4].

Man betrachte ein Mehrperioden Cox-Ross-Rubinstein Finanzmarktmodell (abkürzend CRR-Modell) mit fester Zinsrate $0 < \alpha < 1$ pro Periode. Z_0 beschreibe den Anfangspreis des *risky asset*, einem Finanzgut mit zufälligen Marktpreisen pro Periode. Der Marktpreis kann in der i -ten Periode nur zwei Zustände annehmen. Entweder der Kurs steigt, oder er fällt. Im kommenden Beispiel steigt der Marktpreis für ein $a > 1$ auf $Z_i = aZ_{i-1}$ und fällt $Z_i = a^{-1}Z_{i-1}$.

Für Details zum Mehrperioden CRR-Modell - auch Binomial Modell genannt - siehe etwa [Pliska 1997, Abschnitt 3.5], [Shreve 2004, Kapitel 1], [Irle 2003, Abschnitt 3.8].

3.5.1 Beispiel (Cox- Ross- Rubinstein Modell). Betrachte das Problem der Bewertung eines Amerikanischen Perpetual Put in einem Cox- Ross- Rubinstein Modell. Für eine Konstante $a > 1$ sei ein Aktienverlauf modelliert durch den geometrischen Random Walk

$$Z_n = \prod_{i=1}^{k-1} Z_i \quad \text{auf dem Gitter} \quad \mathcal{Z} = \{a^l : l \in \mathbb{Z}\},$$

wobei für $0 < p < 1$

$$\mathbb{P}_z(Z_1 = az) = p = 1 - \mathbb{P}_z\left(Z_1 = \frac{z}{a}\right)$$

für unabhängig und identisch verteilte Z_i gilt. Offensichtlich ist Z_n eine Markovkette [Irle 2003, Beispiel 4.14].

Sei $0 < \alpha < 1$ der Diskontierungsfaktor und $K > 0$ der Ausübungspreis des

Put. Betrachte das Stopproblem für

$$g(Z_n, n) = \alpha^n (K - Z_n)^+, \quad n = 0, 1, \dots$$

Die Menge F aus Theorem 2.5 ist also eine Teilmenge des Zustandsraums $\{a^l : l \in \mathbb{Z}\}$. Desweiteren sei angenommen, dass $E_1 Z_1 \geq 1$ und $E_1 \log Z_1 \leq 0$. Es folgt insbesondere, $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ \mathbb{P}_z -fast sicher und wegen dem Wert $(K - Z_n)^+$ des Puts auch

$$F \subseteq \{a^l : a^l < K\}.$$

Der FII startet auf der Menge

$$B^0 = \{a^l : a^l < K\} = \{a^l : l \leq k\}$$

für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$; vgl. Bemerkung 3.3.3. Da

$$\tau_1(B^0) = \inf\{j \geq 1 : Z_j \in B^0\} = 1 \quad \text{für } j < k$$

ist die definierende Eigenschaft von $B^1 = (B^0)^*$

$$K - a^j \geq \alpha \left[p(K - a^{j+1}) + (1-p)(K - a^{j-1}) \right] \quad \text{für } j < k. \quad (3.2)$$

(3.2) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} K &\geq \alpha \left[pK - pa^{j+1} + K - aj - 1 - pK + paj - 1 \right] + a^j \\ \Leftrightarrow K - \alpha K &\geq -\alpha pa^{j+1} + \alpha pa^{j-1} - \alpha pa^{j+1} + a^j \\ \Leftrightarrow K(1 - \alpha) &\geq a^j(1 - \alpha(pa + (1-p)a^{-1})) = a^j(1 - \alpha E_1 Z_1) \end{aligned}$$

Da $E_1 Z_1 \geq 1$ vorausgesetzt war, ist diese Bedingung für beliebige $j < k$ erfüllt. (Ansonsten würde schon im einfachsten Fall $j = 0, K = 1$ ein Widerspruch entstehen).

Für $j = k$ ändert sich die definierende Eigenschaft zu:

$$K - a^k \geq E_{a^k} [\alpha^{\tau_1(B^0)} \cdot (K - Z_{\tau_1(B^0)})^+] \quad (3.3)$$

$$= \alpha[(1-p)(K - a^{k-1}) + p(K - a^k)E_a^{k+1} \alpha^\tau] \quad (3.4)$$

mit $\tau = \inf\{n \geq 0 : Z_n = a^k\}$. Zur Begründung beachte man, dass

$$\alpha^{\tau_1(B^0)} \cdot (K - Z_{\tau_1(B^0)})^+ = \begin{cases} 0, & \text{für alle Indizes } > k \\ \alpha \cdot (K - a^{k-1}) & \text{sonst, mit W'keit } (1-p) \\ \alpha^{\tau_1(B^0)} \cdot (K - a^k) & \text{sonst, mit W'keit } p. \end{cases}$$

Dabei ist a^k der Zustand, der beim nächsten Wiedereintrittszeitpunkt in die Menge B^0 erreicht wird. $E_{a^{k+1}}[\alpha^\tau] = e(\alpha)$ bezeichnet die erzeugende Funktion von α . Diese ergibt sich im zweiten Summanden in (3.4) aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_{a^k}(\tau_1(B^0) = k) \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{a^{k+1}}(\tau = k+1) \alpha^{k+1} = \alpha E_{a^{k+1}}[\alpha^\tau]$$

mit $\tau = \inf\{n \geq 0 : Z_n = a^k\}$.

$e(\alpha)$ läßt sich explizit angeben, siehe etwa [Feller 1957, Kapitel XIV, Abschnitt 4*]. Dann ist

$$\begin{aligned} e(\alpha) &= (1-p)\alpha + p\alpha e(\alpha)^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)\alpha^2}}{2p\alpha} \\ &= \frac{1}{2p\alpha} - \sqrt{\frac{1 - 4p(1-p)\alpha^2}{4p^2\alpha^2}} = \frac{1}{2p\alpha} - \sqrt{\frac{1}{4p^2\alpha^2} - \frac{1-p}{p}} \end{aligned}$$

Ersetzt man $E_{a^{k+1}}\alpha^\tau$ in Gleichung (3.4) durch $e(\alpha)$, so nimmt $B^1 = (B^0)^*$ folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} K - a^k &\geq \alpha[(1-p)(K - a^{k-1}) + p(K - a^k)e(\alpha)] \\ \Leftrightarrow K - a^k &\geq \alpha[K - pK - a^{k-1} + pa^{k-1} + pe(\alpha)K - pa^k e(\alpha)] \end{aligned}$$

Umstellen liefert

$$\begin{aligned} K - \alpha K + \alpha p K - \alpha p e(\alpha) K &\geq -\alpha a^{k-1} + \alpha p a^{k-1} - p \alpha a^k e(\alpha) + a^k \\ K(1 - [(1-p)\alpha + \alpha p e(\alpha)]) &\geq a^k(1 - [\alpha a^{-1} - \alpha p a^{-1} + p \alpha e(\alpha)]) \\ &\geq a^k(1 - [(1-p)\alpha a^{-1} + p \alpha e(\alpha)]). \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$B^1 = B^0 = \{a^l : l \leq k\} \quad \text{falls} \quad a^k \leq K \frac{1 - [(1-p)\alpha + \alpha p e(\alpha)]}{1 - [(1-p)\alpha a^{-1} + p \alpha e(\alpha)]}$$

und

$$B^1 = B^0 = \{a^l : l \leq k-1\} \quad \text{falls} \quad a^k > K \frac{1 - [(1-p)\alpha + \alpha p e(\alpha)]}{1 - [(1-p)\alpha a^{-1} + p \alpha e(\alpha)]}.$$

Wiederholen wir dieses Argument, so erhält man schließlich dass

$$F = \left\{ a^l : a^l \leq K \frac{1 - [(1-p)\alpha + \alpha p e(\alpha)]}{1 - [(1-p)\alpha a^{-1} + p \alpha e(\alpha)]} \right\}$$

Die Voraussetzungen aus Theorem 2.5 sind für dieses Modell offensichtlich erfüllt. Also ist $\tau(F)$ optimal.

Kapitel 4

Der Forward-Algorithmus und seine Anwendung

Es folgen zunächst die Beispiele aus [Irlle 2006, Abschnitt 4] um ein Gefühl und Verständnis für den Algorithmus zu entwickeln. Die Beispiele 4.1 und 4.2 aus dem Paper werden behandelt und es soll erläutert werden wie die Simulation zum Schätzen von $E_z g(Z_{\tau_1(B)})$ durchgeführt wird. Dabei wird nur das Resultat nochmals präsentiert. Wichtiger wird das Beispiel 4.2.6. Hier wird ein Cox-Ross-Rubinstein Modell für eine amerikanische Option mit endlicher Laufzeit untersucht. Der Forward Improvement Iteration klassifiziert die Zustände des Preisprozesses in Elemente aus der Fortsetzung- bzw. Stopmenge. Die erste Variante basiert auf Simulation einzelner Pfade. Die zweite Variante liefert eine Lösung als lineare Gleichung. Die Implementierung in ein MATLAB Programm wird skizziert. Nur der FII mit der 2. Variante liefert ein identisches Ergebnis wie die *backward induction* für die Einteilung der Zustände. Die 1. Variante scheitert hierbei aufgrund der Ungenauigkeit die durch die Simulation entsteht.

Für eine ausführliche Erläuterung zur Implementierung der Rückwärtsinduktion in MATLAB und zur näherungsweise Bestimmung des fairen Preises einer amerikanischen Option sind [Brandimarte 2006] und [Günther and Jüngel 2003] zu empfehlen.

Zur Bestimmung der zu konstruierenden Mengen B^* in den Beispielen, ist die Berechnung des bedingten Erwartungswertes $E_z g(Z_{\tau_1(B)})$ notwendig. Dazu wird auf die *Monte-Carlo-Methode* zurückgegriffen. Allgemein handelt es sich bei der Monte-Carlo-Methode um ein numerisches Verfahren „bei dem zuerst ein einem gegebenen Problem angepasstes stochastisches Modell aufgestellt wird und dann die entsprechenden Zufallsgrößen mit Hilfe von Zufallszahlen simuliert werden“ [Hengartner and Theodorescu 1978]. Die zu behandelnden Probleme sind stochastischer, aber auch deterministischer Natur. Für eine ausführliche Diskussion siehe [Glasserman 2004].

Die Programme stehen als m-Files in ihren jeweiligen Ordnern auf der CD zur Verfügung. Diese können mit MATLAB geöffnet und ausgeführt werden.

4.1 Simulation

Zur Schätzung des in

$$B^* = \{z : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B)})\} \cap B$$

benötigten gestoppten Erwartungswertes $E_z g(Z_{\tau_1(B)})$ werden M unabhängige Realisierungen z_1, \dots, z_M von Z_i in jedem Zustand simuliert. Anschließend wähle man

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(z_i) \quad (4.1)$$

als Approximation für den Erwartungswert $E_z g(Z_{\tau_1(B)})$. (siehe z.B. [Korn and Korn 1999])

Zur Bestimmung der Mengen der monoton fallenden Folge $B^0 \supseteq B^1 \supseteq \dots$ gehe man wie folgt vor:

1. Klassifiziere die Zustände des Zustandsraum \mathcal{S} so, dass man auf einer endlichen Teilmenge $B^0 \subseteq \mathcal{S}$ mit dem der FII starten kann (vgl. Bemerkung 3.3.2 auf Seite 29).
2. Da $B^0 = \mathcal{S}$ ist und somit

$$B^1 = (B^0)^* = \mathcal{S}^* = \{z : g(z) \geq E_z g(Z_1)\},$$

lässt sich im *1. Schritt* der bedingte Erwartungswert wie gewohnt bestimmen.

3. Im *2. Schritt* gilt es die Menge

$$B^2 = (B^1)^* = \{z : g(z) \geq E_z g(Z_{\tau_1(B^1)})\} \cap B^1$$

zu konstruieren. Eine näherungsweise Bestimmung des Erwartungswertes

$$E_z g(Z_{\tau_1(B^1)}) = E[g(Z_{\tau_1(B^1)} | Z_0 = z)]$$

für ein $z \in B^1$ lässt sich durch folgende Vorgehensweise realisieren: Starte in $z \in B^1$ mit den zugrundeliegenden Übergangswahrscheinlichkeiten und stoppe, wenn das erste mal wieder ein Zustand $z' \in B^1$ erreicht wird. Der Wert $g(z')$ in z' lässt sich daraufhin einfach bestimmen. Dies führe man bei Start in z M -mal durch um, wie oben bereits erwähnt, durch $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(z_i)$ den gesuchten Erwartungswert zu schätzen. Das Verfahren führe man für alle Zustände aus B^1 durch.

4. Aus 3. erhält man die Menge B^2 , auf die wiederum der 2. Schritt angewandt wird.
5. **Abbruchkriterium:** zum Abbruch der Iterationen ist die bereits in Bemerkung 3.3.1 erwähnte Tatsache zu berücksichtigen: Gilt im $k + 1$ -ten Iterationsschritt $B^{k+1} = B^k$, so bricht die absteigende Mengenfolge $B^0 \supseteq B^1 \supseteq \dots$ ab und es gilt $F = B^k$. Der Algorithmus stoppt nach k Schritten.

Die Ergebnisse aus den vorangehenden Kapiteln zur Bestimmung einer optimalen Stopzeit für eine Markovkette mit unendlicher Laufzeit wird nun auf eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum angewendet. Als Resultat erhält man eine Klassifizierung der Zustände in Elemente der Fortsetzungsmenge bzw. Stopmenge.

4.2 Beispiele

4.2.1 Beispiel. Sei $(Z_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette die auf dem Zustandsraum

$$\{0, 1, \dots, 20\} \times \{0, 1, \dots, 20\}$$

lebt. Die Auszahlungsfunktion (Pay-Off Funktion) ist gegeben durch

$$g(Z_n, n) = \alpha^n f(Z_n),$$

mit

$$\begin{aligned} f(5, 5) &= 10, \\ f(5, 15) &= f(15, 15) = 0, \\ f(x, y) &= 5 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Die definierende Eigenschaft für B^* lautet also

$$B^* = \{(z, n) \in B : f(z) \geq E_z \alpha^{\tau_1(B)} f(Z_{\tau_1(B)})\},$$

vergleiche Beispiel 3.1.3. Zur Simulation beachte man Bemerkung 4.2.5. Die Kette verhält sich wie folgt: Die Zustände $(5, 15)$ und $(15, 15)$ mit minimalster Auszahlung wirken absorbierend und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x+1, y | x, y) &= 0.25, \\ \mathbb{P}(x-1, y | x, y) &= 0.25, \\ \mathbb{P}(x, y+1 | x, y) &= 0.25, \\ \mathbb{P}(x, y-1 | x, y) &= 0.25, \end{aligned}$$

und entsprechenden Modifikationen am Rand, das heißt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1, y | 0, y) &= 0.5, \\ \mathbb{P}(19, y | 20, y) &= 0.5, \\ \mathbb{P}(x, 1 | x, 0) &= 0.5, \\ \mathbb{P}(x, 19 | x, 20) &= 0.5. \end{aligned}$$

Als erstes Beispiel wurde $\alpha = 0.99$ gesetzt. Der Algorithmus bricht nach 5 Iterationen ab. Das Resultat zeigen Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2. Das Programm befindet sich auf der CD im Ordner *Examples_Part_1* mit dem Namen `Example1.m`.

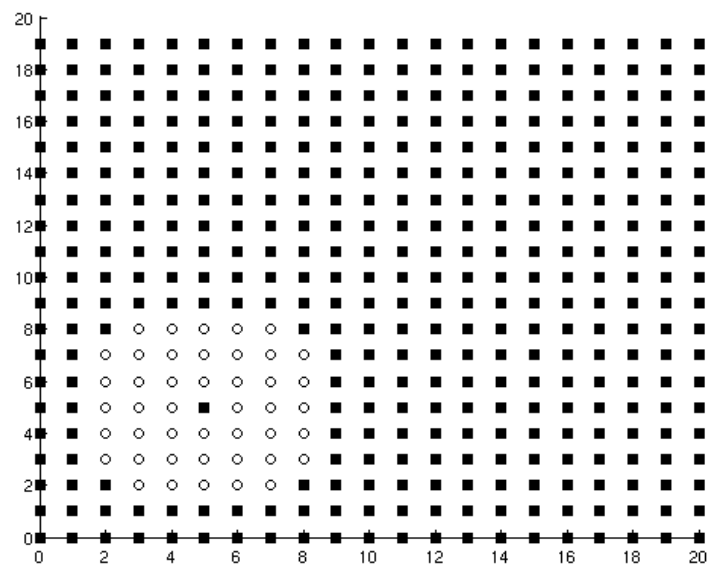


Abbildung 4.1: Fortsetzungsregion (Kreise) und Stopregion (Vierecke). $\alpha = 0.99$; 100000 Simulationen; Rechenzeit: 2,98 sec; Abbruch nach 5 Iterationen.

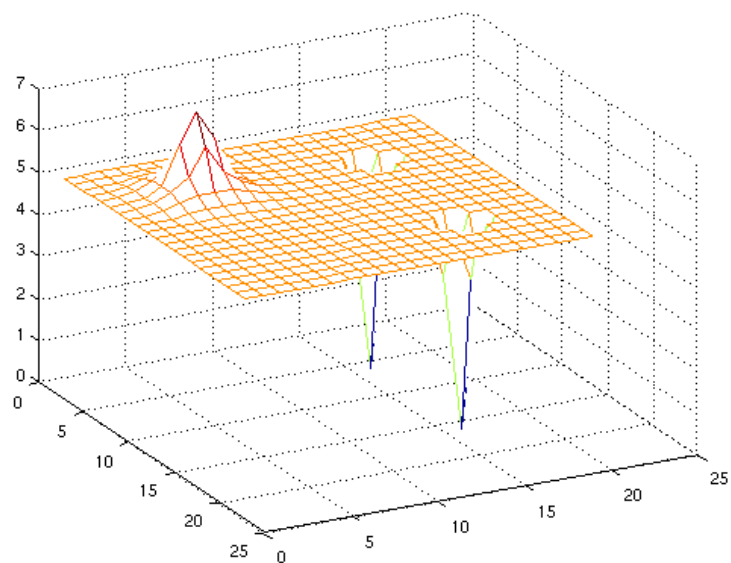


Abbildung 4.2: Die optimalen Werte.

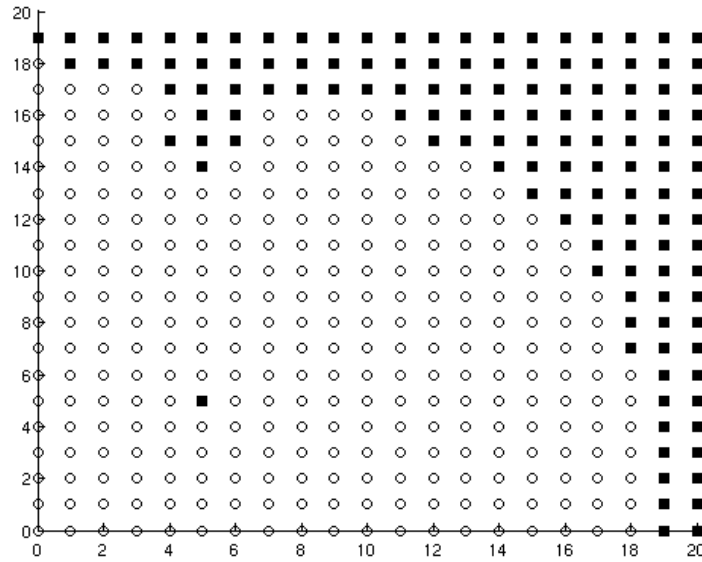


Abbildung 4.3: $\alpha = 0.98^{(1/20)}$; 10000 Simulationen; Rechenzeit: 3,92 sec; Abbruch nach 20 Iterationen.

In der selben Situation wird nun $\alpha = (0.98)^{1/20}$ gewählt. Der Algorithmus endet hier erst nach 20 Iterationen mit resultierenden Abbildungen 4.3 und 4.4. Das Programm ist in *Examples_Part_1* als `Example2.m` abgespeichert.

4.2.2 Beispiel. Sei wieder $(Z_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette. Diesmal wird der Zustandsraum

$$\{0, 1, \dots, 10\} \times \{0, 1, \dots, 10\}$$

betrachtet. Die Pay-Off Funktion ist wiederum von der Form

$$g(Z_n, n) = \alpha^n f(Z_n),$$

diesmal mit

$$f(x, y) = 0 \quad \text{an den Rändern,}$$

und

$$f(x, y) = (x + y - 5)^+ \quad \text{sonst.}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x + 1, y | x, y) &= 0.7 \times 0.6, \\ \mathbb{P}(x - 1, y | x, y) &= 0.7 \times 0.4, \\ \mathbb{P}(x, y + 1 | x, y) &= 0.3 \times 0.6, \\ \mathbb{P}(x, y - 1 | x, y) &= 0.3 \times 0.4. \end{aligned}$$

Ein Diskontierungsfaktor von $\alpha = 0.9$ liefert nach 4 Iterationen die Abbildungen 4.5 und 4.6. Das Programm in *Examples_Part_2* heißt `Example3.m`.

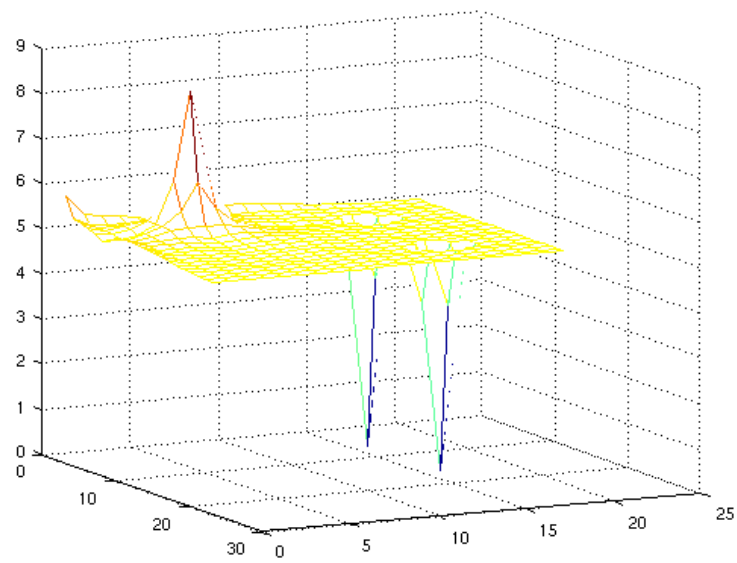


Abbildung 4.4: Die optimalen Werte.

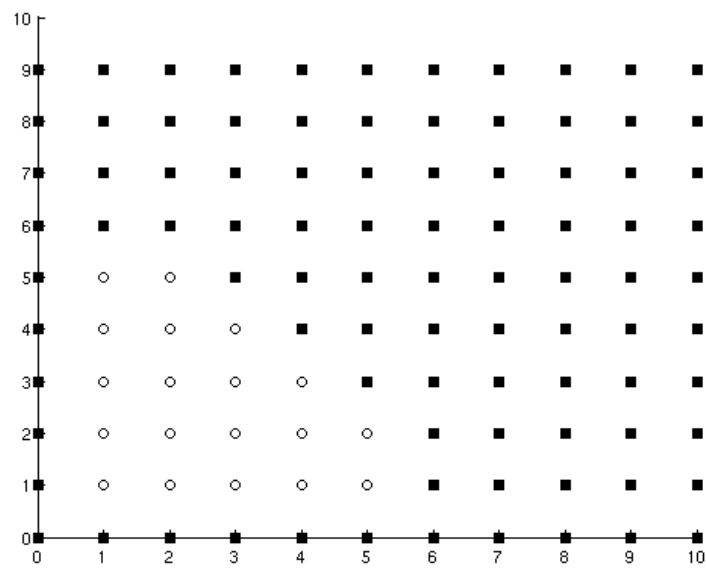


Abbildung 4.5: Fortsetzungsregion (Kreise) und Stopregion (Vierecke). $\alpha = 0.9$; 10000 Simulationen; Rechenzeit: 0.107 sec; Abbruch nach 4 Iterationen.

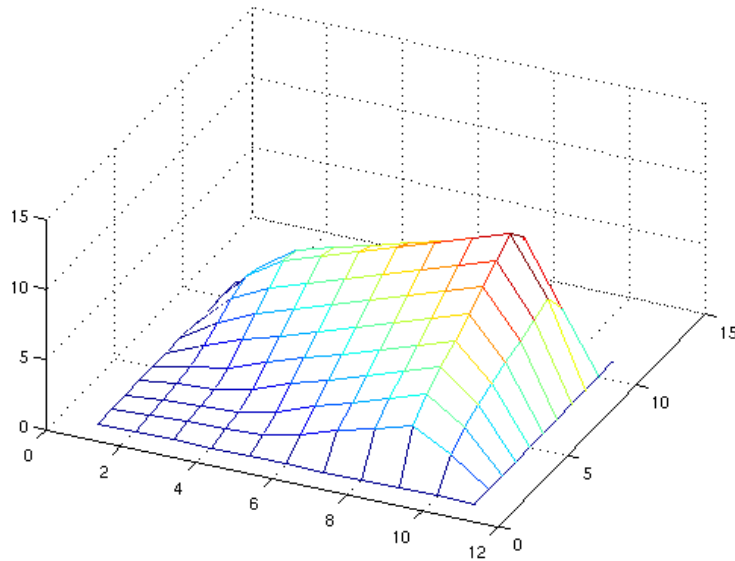


Abbildung 4.6: Die optimalen Werte.

Entscheidet man sich für die Auszahlungsfunktion $f(x, y) = ((x + y - 5)^+)^2$, so bekommt man die Fortsetzungs- bzw. Stopmenge wie sie in Abbildung 4.7 mit optimalen Werten wie in Abbildung 4.8. Das Programm befindet sich auf der CD im Ordner *Examples_Part_2* mit dem Namen *Example4.m*.

4.2.3 Bemerkung. Betrachtet man in Beispiel 4.2.1 die Funktion $g(Z_n, n)$ ohne Diskontierung, also $\alpha = 1$, so sieht die optimale Stopzeit wie folgt aus: Stoppe in den Zuständen $(5, 5), (5, 15), (15, 15)$ und den den acht Nachbarzuständen der Punkte $(5, 15)$ und $(15, 15)$. Dieses Beispiel macht den Einfluss des Diskontierungsfaktors auf das Stopgebiet deutlich. Sogar ein Diskontierungsfaktor nahe bei 1 führt zu einem deutlich unterschiedlichen Stopgebiet als $\alpha = 1$. Im zweiten Teil von Beispiel 4.2.1 wurde $\alpha = (0.98)^{1/20}$ gewählt. Ein anderer Wert nahe 1 liefert ein ähnliches Ergebnis.

4.2.4 Bemerkung. In Beispiel 4.2.2 kommt es an den Rändern zum Stoppen wohingegen in den Zuständen $x + y \leq 5$ fortgesetzt wird. Durch das Quadrieren der Pay-Off Funktion wird die Fortsetzungsmenge vergrößert. Aus Sicht der Optionsbewertung bildet die Auszahlungsfunktion in Beispiel 4.2.2 den Wert einer *Barriere* Call Option auf zwei Basisgüter mit *knock-out* an den Rändern. Barriere-Optionen (engl. barrier options) sind jene Optionen, bei denen der Kontrakt verfällt, falls der Aktienpreis ein gewisses Niveau, das als Barriere bezeichnet wird, erreicht [Irle 2003]. Die Barrieren bilden in diesem Beispiel die Ränder.

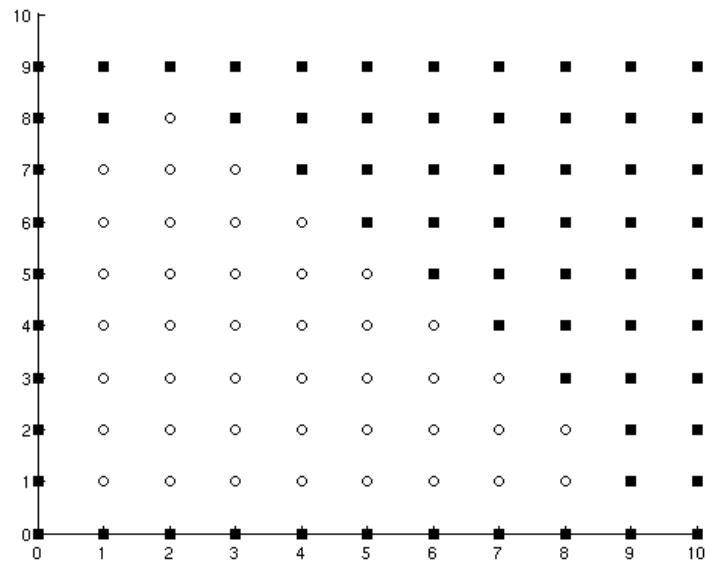


Abbildung 4.7: $\alpha = 0.9$; 10000 Simulationen; Rechenzeit: 0.142 sec; Abbruch nach 4 Iterationen.

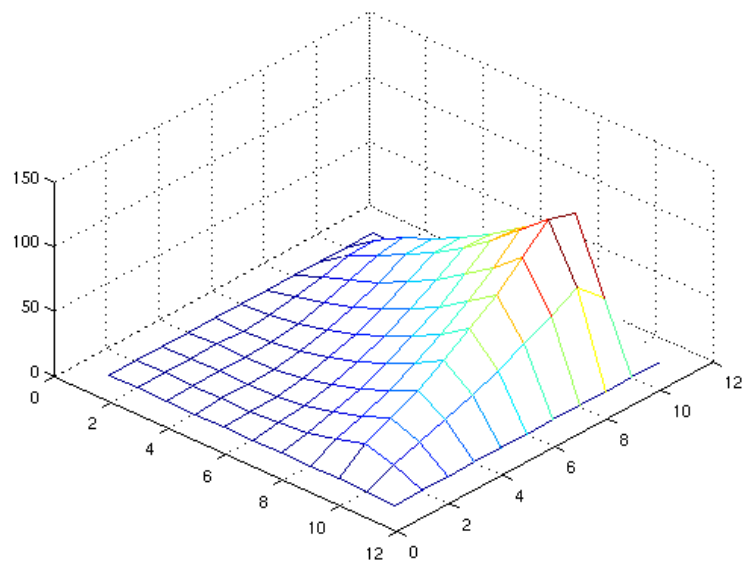


Abbildung 4.8: Die optimalen Werte.

4.2.5 Bemerkung. Bei der Simulation des Erwartungswertes

$$E_z \alpha^{\tau_1(B)} f(Z_{\tau_1(B)}) \quad (4.2)$$

ist der Vorfaktor $\alpha^{\tau_1(B)}$ mit zu berücksichtigen. Startet man in einem $z \in B^k$ und bezeichnet s_i (für *steps*) die Anzahl der Schritte bis zum nächsten Zustand $z' \in B^k$ im i -ten Simulationslauf, so ergibt sich eine Approximation von (4.2) durch den Term

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha^{s_i} f(z_i).$$

Für jeden Simulationsschritt gilt es also die Anzahl der benötigten Schritte zur Rückkehr in die Menge B^k zu berücksichtigen um den Wert $f(z_i)$ ordnungsgemäß abzudiskontieren.

Im nachfolgenden Beispiel wird der Forward Improvement Algorithmus auf eine amerikanische Putoption mit endlicher Laufzeit angewandt. Ziel ist hier mit Hilfe des FII eine Klassifizierung der möglichen Zustände des Aktienkursverlaufs durchzuführen. Es stellt sich sofort heraus, dass das Resultat durch Simulation nicht mit dem Ergebnis aus der Rückwärtsinduktion übereinstimmt. Jedoch liefert das exakte Verfahren mit linearen Gleichungen eine zufriedenstellende Lösung so dass die *early-exercise region* bzw. *continuation region* identisch sind. Man beachte, dass um die Eindeutigkeit des fairen Preises der Option zu gewährleisten der Erwartungswert bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes herangezogen werden muss.

4.2.6 Beispiel (Der FII für eine amerikanische Option). Betrachtet werde ein N -Perioden Cox-Ross-Rubinstein Modell bestehend aus einer Anleihe mit Preisentwicklung

$$(e^{r \cdot \Delta t})_{i=0, \dots, N}$$

mit Laufzeit T , $\Delta t = T/N$, einer Zinsrate $r > 0$ und einer Aktie mit Preisentwicklung

$$S_i = S_0 u^{N_i} d^{i-N_i} \quad i = 0, \dots, N.$$

Dabei gibt $N_i = \sum_{k=1}^i Y_k$ mit stochastisch unabhängigen Y_1, \dots, Y_N , $P(Y_k = 1) = p = 1 - P(Y_k = 0)$, die Anzahl der Aufwärtssprünge an [Irle 2003]. Die Laufzeit der Option sei beispielsweise $T = 1$ Jahr, die Verzinsung und die Preisänderung finde vierteljährig statt, d.h. $N = 4$.

In Anlehnung an [Wilkins 2000, Abschnitt 4.3] sei eine amerikanische Put Option mit Laufzeit $T = 1$ gegeben. Für den Aktienverlauf mit $N = 5$ Perioden gelte ferner $S_0 = 100$ der Anfangskurs, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$ die Volatilität, eine Up -Bewegung der Form

$$u = e^{(r-0.5 \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}, \quad (4.3)$$

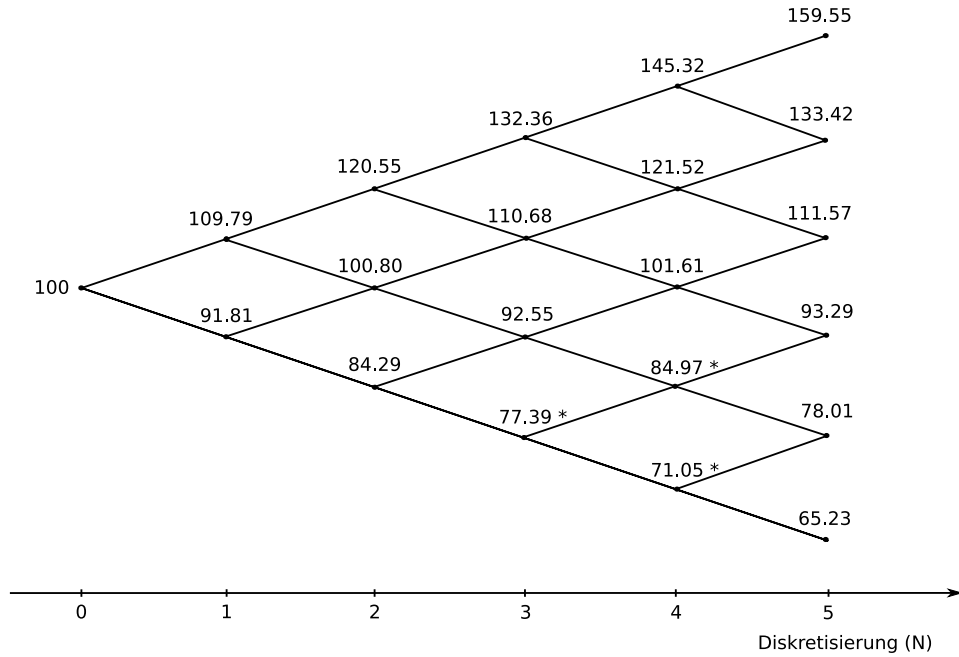


Abbildung 4.9: Binomialbaum für eine amerikanische Option; * in diesen Zuständen ist eine vorzeitige Ausübung vorteilhaft.

Abwärtsbewegung

$$d = e^{(r-0.5\cdot\sigma^2)\cdot\Delta t - \sigma\cdot\sqrt{\Delta t}} \quad (4.4)$$

und $p = 0.5$. Um Arbitrage auszuschließen gilt natürlich

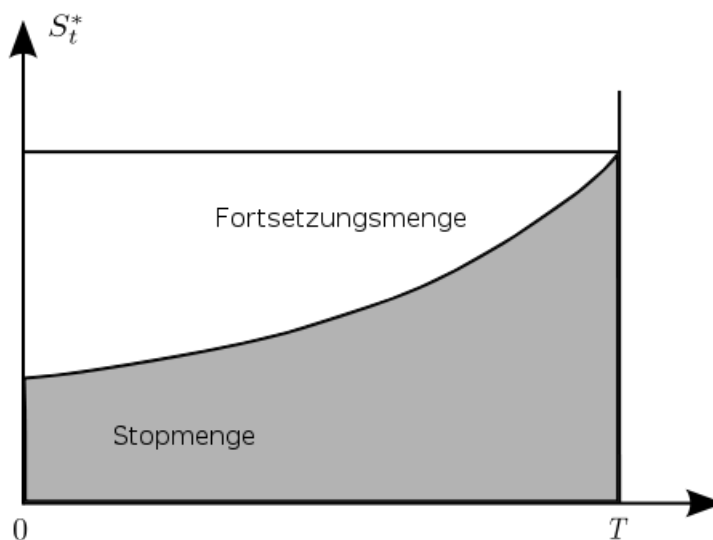
$$0 < d < 1 + r < u \quad (4.5)$$

siehe [Irlé 2003, Kapitel 1]. Abbildung 4.9 stellt den Preisprozess dar. Das Programm hierzu ist im Ordner *Fii_vs_Bwi_Sim* als `Forward_Improvement.m` gespeichert. Im Programm `Backward_Induction.m` ist der Algorithmus der Rückwärtsinduktion implementiert.

N	100	200	400	800	1000	2000
Backward Induction	0.003 s	0.01 s	0.04 s	0.169 s	0.267 s	1.07 s
FII mit Simulation	7.12 s	29.15 s	111.14 s	> 800 s	—	—

Tabelle 4.1: Die Rechenzeit der Backward Induction im Vergleich zum FII bei Simulation von 10000 Pfaden in Sekunden. Die BWI ist dem FII offensichtlich deutlich überlegen. Schuld für die hohe Rechenzeit ist die nötige Simulation. In Abschnitt 4.3 wird ein alternativer Ansatz vorgestellt. Zur Berechnung diente ein Intel Core2Duo @ 3.00GHz und Matlab R2008b.

4.2.7 Bemerkung (Die Wahl der Parameter). Für die Preisentwicklung der Aktie im vorherigen Beispiel wurde ein Preisverlauf nach dem Cox-Ross-Rubinstein Modell unterstellt. Dabei ist die Wahl der Parameter u, d, p nicht willkürlich gefallen, sondern so gewählt, dass sie den sogenannten *Momentenbedingungen* genügen [Wilkins 2000, Abschnitt 4.2.1]. Für die wohlbekannte CRR-Formel für europäische Optionen gehen eben diese Parameter ein. Hintergrund für dessen Wahl ist der Wunsch, dass „mit zunehmender Diskretisierungsfineinheit“ [Wilkins 2000] der Optionslaufzeit T , der Wert aus der CRR-Formel gegen den Optionswert aus der Black-Scholes Formel konvergiert. Für genauere Details hierzu siehe zum Beispiel [Günther and Jüngel 2003] oder [Wilkins 2000]. Die erwähnte Konvergenzeigenschaft wird z.B. in [Kwok 1998] behandelt. Auch die Werte für r, σ und Δt sind nicht beliebig, da sonst die Arbitragebedingung (4.5) verletzt werden könnte, da $d < 0$ möglich ist. Dies wird verhindert, wenn der Zeitschritt Δt klein genug gewählt wird, nämlich $\Delta t \leq \ln 2 / \sigma^2$ [Günther and Jüngel 2003]. Setzen von $d = 0$ aus (4.4) und auflösen nach Δt liefert dieses Ergebnis.



Qualitative sketch of the early exercise boundary for a vanilla American put. The option is exercised within the shaded area.

Abbildung 4.10: Stop- und Fortsetzungsgebiet für die amerikanische Putoption aus Beispiel 4.2.6.

4.2.8 Bemerkung. Offensichtlich wird die Option in Beispiel 4.2.6 nicht ausgeübt wenn sie nicht *im Geld* (*in-the-money*) ist. Für die Putoption bedeutet dies keine Ausübung zum Zeitpunkt $\Delta t \cdot i$ wenn $S_i > K$ ist. Selbst wenn $S_i < K$ ist kann es besser sein die Option zu halten und abzuwarten. Ein Besitzer einer Putoption wird von seinem Recht Gebrauch machen, sobald $S_i < K$ „groß“ genug ist, die Option damit *deep-in-the-money* ist. Wie hoch diese Differenz betragen muss hängt im Allgemeinen von der Restlaufzeit des Vertrages ab. Je näher der Verfallszeitpunkt rückt, desto eher ist der Investor bereit auszuüben. Man kann allgemein zeigen, dass die Stopmenge für eine amerikanische Putoption mit endlicher Laufzeit die Gestalt wie in Abbildung 4.10 besitzt (entnommen aus [Brandimarte 2006]). Der Rand des Stopgebiets legt den Wert S_i^*

fest, so dass für $S_i < S_i^*$ die Option deep-in-the-money ist und eine Ausübung lohnenswert ist. Der optimale Ausübungszeitpunkt ist demnach diejenige Strategie τ^* für die der gestoppte Preisprozess S_{τ^*} das erste mal in der Stopmenge ist (vgl. [Brandimarte 2006]).

4.3 Der Algorithmische Schritt als eine Lineare Gleichung

Der Übergang von der Teilmenge B in die Teilmenge B^* geschieht durch die Definition von

$$B^* = \{z : g(z) \geq E_z \alpha^{\tau_1(B)} g(Z_{\tau_1(B)})\} \cap B.$$

Wie in Abschnitt 4.1 vorgeschlagen und in den darauffolgenden Beispielen angewandt, wurden numerische Werte für $E_z \alpha^{\tau_1(B)} g(Z_{\tau_1(B)})$ durch pfadweise Simulationen der Markovkette erzielt. Wie man sich vorstellen kann, und dies ist tatsächlich so, ist der Rechenaufwand wesentlich höher als etwa bei der Rückwärtsinduktion. Um eine minimale Abweichung vom geschätzten zum wahren Wert zu versichern muss die Anzahl der Simulationsläufe erhöht werden. Vergleicht man in Beispiel 4.2.6 die beiden Verfahren für einen feineren Diskretisierungsgrad, also für größeres N , so muss man zur Enttäuschung feststellen, dass sie nicht dieselben Ergebnisse liefern. Erhöht man daraufhin die Simulationsschritte wird viel mehr Rechenzeit in Anspruch genommen. Im Artikel *On forward improvement iteration for stopping problems* stellt Prof. Dr. Albrecht Irlé einen alternativen Zugang zur Bestimmung des in B^* enthaltenen bedingten Erwartungswertes vor.

Es liege wieder ein Markov'sches Stopproblem wie in Abschnitt 2.3 vor. Sei (S, \mathcal{S}) ein endlicher messbarer Zustandsraum, $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung und $0 < \alpha \leq 1$. Setze

$$p_{zy} = P(Z_1 = y | Z_0 = z_0), \quad y, z \in S.$$

Der Übersichtlichkeit halber setze $h_i(B)(z) = E_z \alpha^{\tau_i} f(Z_{\tau_i(B)})$, $z \in S, i = 0, 1$.

4.1 Theorem. *Sei $B \subseteq S$ mit $P_z(\tau_0(B) < \infty) = 1$ für alle $z \in S$. Dann ist $h_0(B)$ die eindeutige Lösung für*

$$h(z) = f(z), z \in B, \quad h(z) = \alpha \sum_y p_{zy} h(y), \quad z \in S \setminus B. \quad (4.6)$$

Beweis. Nach Definition erfüllt $h_0(B)(z)$ die Gleichung $h_0(B)(z) = f(z)$ für $z \in B$. Ferner gilt $h_0(B)(z) = \sum_y p_{zy} \alpha h_0(B)(y)$, $z \in S \setminus B$ aufgrund einer wohlbekannten Konsequenz aus der Markoveigenschaft die als α -*harmonicity* von $h_0(B)$ auf $S \setminus B$ bezeichnet wird. Unter der Voraussetzung $P_z(\tau_0(B) < \infty) = 1$ folgt, zusammen mit der α -*harmonicity*, dass $h_0(B)$ ein Maximum in B besitzt. Diese Tatsache ist unter dem Namen *The (discrete) Maximum Principle* bekannt (vgl. [Bremaud 1999, Kapitel 2], [Axler et al. 2001]).

Die Eindeutigkeit folgt aus eben diesem Prinzip. Angenommen h, h' seien Lösungen der Gleichungen in 4.6. Setze $g = h - h'$. Dann liefern g und $-g$

Lösungen so, dass $f(z) = 0$ für $z \in B$ gilt. Aus dem *Maximum Principle* folgt $g \leq 0$, $-g \leq 0$, also $h = h'$. \square

4.2 Korollar. Sei $B^0 = S$, $B^k = (B^{k-1})^*$, $k = 1, 2, \dots$. Dann gilt für alle k : $h_0(B^k)$ ist die eindeutige Lösung für

$$h(z) = f(z), \quad z \in B^k, \quad h(z) = \alpha \sum_y p_{zy} h(y), \quad z \in S \setminus B^k. \quad (4.7)$$

Ferner gilt

$$h_1(B^k)(z) = h_0(B^k)(z), \quad z \in S \setminus B^k, \quad h_1(B^k)(z) = \alpha \sum_y p_{zy} h_0(B^k)(y), \quad z \in B^k. \quad (4.8)$$

Beweis. $h_1(B^k)(z) = h_0(B^k)(z)$, $z \in S \setminus B^k$ ist klar nach Definition von τ_i . Wegen vorherigem Satz genügt es $P_z(\tau_0(B^k) < \infty) = 1$ zu zeigen. Dazu definiere $F^* = \{z : f(z) = v(z)\}$ wobei $v(z)$ den Wert des Stopproblems darstellt. Wie bereits in Korollar 3.4.1 folgt auch hier, dass $\tau_0(F^*)$ eine optimale Stopzeit ist, für die $P_z(\tau_0(F^*) < \infty) = 1$ gilt; siehe [Shiryayev 1978, Kapitel 2, Theorem 4]. Damit, und wegen $F^* \subseteq B^k$ für alle k , muss bereits $P_z(\tau_0(B^k) < \infty) = 1$ für alle z gelten. \square

4.3.1 Beispiel. Mit obigem Ansatz verbessert sich die Rechenzeit für Beispiel 4.2.6 enorm, wie in Tabelle 5.2 einzusehen ist.

N	400	800	1000	2000	4000	8000
Backward Induction	0.005 s	0.022 s	0.035 s	0.137 s	0.675 s	4.2 s
FII mit lin. Gl.	0.065 s	0.157 s	0.231 s	0.84 s	3.2 s	27.7 s

Tabelle 4.2: Die Tabelle zeigt die Rechenzeit des Forward Algorithmus mit dem neuen Ansatz im Vergleich zur Rückwärtsinduktion. Die enorme Verbesserung ist offensichtlich. Durch den Wegfall der Simulationen ist die Berechnungsdauer enorm zurückgegangen. Die Anzahl der Iterationsschritte beträgt bei jeder Diskretisierung $m = 2$. Die Durchführung fand auf einem Intel Core2Duo @ 3.00GHz und Matlab R2008b statt.

4.4 Der Algorithmus

Im folgenden soll ein kurzer Überblick des Programmcodes in MATLAB gegeben werden.

Die Implementierung des FII erfolgt in drei Schritten. Sei S_0 der gegenwärtige Aktienkurs und seinen $S_{ij} = d^i u^{j-i} S_0$ für $i = 0, \dots, N$ und $j = 0, \dots, i$ die möglichen Aktienkurse zur Zeit $\Delta t \cdot i$.

1. Schritt: *Initialisierung des Binomialbaums.* Berechne die Werte des Preisprozesses für $i = 0, \dots, N$ und $j = 0, \dots, i$:

$$S_{ij} = S_0 d^i u^{j-i}.$$

2. Schritt: *Initialisierung der Auszahlungsfunktion.* Berechne die Werte der Auszahlungsfunktion für $i, j = 0, \dots, N$:

$$f_{ij} = (K - S_{ij})^+.$$

Da in B^0 die Stopzeit $\tau(B^0)$ stets 1 ist, lässt sich der Erwartungswert hier wie gewohnt berechnen.

3. Schritt: *Approximation des bedingten Erwartungswertes unter dem risikoneutralen Martingalmaß.* Mit Hilfe einer binären Matrix werden die Zustände die der Bedingung aus B^k erfüllen identifiziert. Diese erhalten das Label **1**. Für die übrigen $z' \in \mathcal{S}$ wird im $k+1$ -ten Schritt der bedingte Erwartungswert durch Simulationen näherungsweise bestimmt (Variante 1) bzw. mit linearen Gleichungen berechnet (Variante 2). Ist $S_{ij} =: z$, dann erhält man eine Matrix \mathbf{E} mit

$$E_{ij} = E_z \alpha^{\tau_1(B^k)} (K - S_{\tau_1(B^k)})^+.$$

Die Simulation wird wie in Bemerkung 4.2.5 erläutert, durchgeführt, die linearen Gleichungen wie in Abschnitt 4.3.

Abschließend sei erwähnt, dass „da in MATLAB alle Indizes für Vektoren und Matrizen bei 1 und nicht bei 0 anfangen, müssen die Schleifen von 1 bis $N+1$ anstatt von 0 bis N laufen“ [Günther and Jüngel 2003]. Die Matrix $\mathbf{S} = S_{ij}$ wird durch $\mathbf{S}(i+1, j+1)$ beschrieben, $\mathbf{f} = f_{ij}$ durch $\mathbf{f}(i+1, j+1)$ und $\mathbf{E} = E_{ij}$ durch $\mathbf{E}(i+1, j+1)$ mit $i, j = 0, 1, \dots, N$. Die Einträge in der unteren Dreiecksmatrix sind stets gleich Null gesetzt.

Es wird die Vorgehensweise bei der Implementierung der zweiten Variante skizziert (vgl. Anhang). Das Programm mit dem Namen `Forward_Improvement.m` befindet sich im Ordner `BWI_vs_FII_LG`.

4.4.1 Bemerkung (Der Algorithmische Schritt). Die offensichtliche Verbesserung der Rechengeschwindigkeit ist auf den Verzicht der Simulation zurückzuführen.

Nach Definition der Menge $B^* = \{z \in B : f(z) \geq E_z a^{\tau(B)} f(Z_{\tau(B)})\}$ geschieht die Konstruktion der Menge B^1 durch einfache bedingte Erwartungswertbildung. Für ein Finanzgut mit Laufzeit N und binomialer Preisentwicklung gemäß dem CRR-Modell sind diese Werte in einer "Erwartungswertmatrix" $\mathbf{E} = (E_{ij})$ gespeichert. Die Funktion $f(z)$ beschreibt dabei die Auszahlung oder Payoff welches die amerikanische Putoption im Zustand z liefert. Die Bedingung $f(z) \geq \alpha E_z f(Z_1)$ (*) liefert eine binäre Matrix $\mathbf{one} = (b_{ij})$, mit $b_{ij} = 1$ falls Bedingung (*) erfüllt ist und 0 sonst. Beachte, dass für die Matrizen \mathbf{E} die Einträge in (i, j) mit $i > j$ gleich Null und in \mathbf{one} gleich Eins gesetzt sind. Der algorithmische Schritt zur Konstruktion der Mengenfolge $B^2 \supseteq B^3 \supseteq \dots$ geschieht folgendermaßen: Durchlaufe die Matrix \mathbf{one} rückwärts durch, finde eine 0 und bestimme für diesen Zustand z_0 den "neuen" Payoff-Wert als diskontiertes arithmetisches Mittel der Auszahlungen in den beiden Nachbarzuständen eine Periode später. Ist ein Nachbar eine 1, so ist der Payoff-Wert in diesem Zustand zur Erwartungswertbildung heranzuziehen. Ist der Nachbarzustand ein Element der Fortsetzungsmenge, so dient der "neue" Wert zur Kalkulation.

Sind die linken Nachbarn z_1, z_2 aus denen z_0 erreichbar ist Elemente aus B^1 (in der \mathbf{one} Matrix als 1 codiert), so gilt es für sie zu entscheiden, ob sie in B^2 enthalten sind oder nicht. Hierzu wird für diese Zustände erneut der Erwartungswert wie oben gebildet, unter Beachtung ob Folgenachbarn 0 oder 1 codiert sind. Anschließend ist die definierende Eigenschaft aus B^* zu überprüfen.

Es folgt eine formale Erläuterung. Mit \mathbf{one} wie oben bezeichne weiter $\mathbf{f} = (f_{ij})$ die Auszahlungsmatrix und

$$\mathbf{f}_1 = (f_1(b_{ij})) = \begin{cases} f_{ij} & \text{falls } b_{ij} = 1 \\ h(b_{ij}) & \text{falls } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

die Auszahlungsmatrix welche die "neuen" Payoff-Werte berücksichtigt, wobei

$$h(b_{ij}) = \alpha(p \cdot f_1(b_{ij+1}) + (1-p) \cdot f_1(b_{i+1j+1}))$$

der oben erwähnte diskontierte Erwartungswert ist. $f_1(b_{ij})$ bezeichnet den (i, j) -ten Eintrag der Matrix \mathbf{f}_1 . Für die Zustände aus B^1 aus denen z_0 erreichbar ist, ist der gesuchte bedingte Erwartungswert wie in Korollar 4.2 zu bestimmen. Für $j \geq 2$ führt dies zu

$$\mathbf{E}_{neu} = (E_n(b_{ij-1})) = \begin{cases} h(b_{ij}) & \text{falls } b_{ij-1} = 1 \text{ und } (b_{ij} = 0 \text{ oder } b_{i+1j} = 0) \\ E_{ij} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Zustände $z_1, z_2 \in B^1$ liefert die Bedingung $f(z_i) \geq E_{z_i} \alpha^{\tau(B^1)} f(Z_{\tau(B^1)})$, $i = 1, 2$ des Forward Algorithmus ob $z_i \in B^2$ oder $z_i \notin B^2$ mit $i = 1, 2$ gilt. Beachte, dass für die Matrizen \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 und \mathbf{E}_{neu} die Einträge in (i, j) mit $i > j$ gleich Null gesetzt sind.

Kapitel 5

Der Forward-Algorithmus auf einer Basketoption

5.1 Einführung

Exotische Optionen, sind Optionen die over-the-counter, d.h. außerbörslich zwischen zwei Parteien gehandelt werden und somit keinen festen Vorgaben unterliegen [Sandmann 1999], [Bloss et al. 2008]. Im Gegensatz zu den Plain-Vanilla Optionen, dessen Auszahlung bei Ausübung vom aktuellen Marktpreis eines Underlying abhängt, kann eine exotische pfadabhängig oder auf mehrere Basisgüter gezeichnet sein. Ihre Auszahlung hängt somit vom gesamten Pfad des Preisprozesses bzw. vom Schlusskurs der in einem Korb enthaltenen Finanzgüter ab. Beispiel für ersteres sind *Barrier Optionen*, „deren Auszahlung neben der Call- oder Put-Bedingung zusätzlich vom Erreichen einer Kursschranke während der Laufzeit abhängt“ [Sandmann 1999]. Ein Beispiel für letzteres ist eine *Basketoption*.

Die Auszahlung einer Basketoption hängt von den Marktpreisen der im Basket angesammelten Finanzgüter ab. Eine Erkenntnis aus der Portfolio Theorie besagt, dass solange die Preise der Basisgüter in einem Basket nicht perfekt korreliert sind - dass heißt kein linearer Zusammenhang besteht (siehe z.B. [Cramer and Howitt 2004]) - wird dessen Optionsprämie niedriger sein als der Preis für eine Option auf die individuellen Basisgüter [Smithson 1998]. Die Möglichkeit durch geeignete Zusammenstellung des Basket *Diversifikationseffekten* zu erzielen, wodurch das Gesamtrisiko des Portfolios reduziert werden kann, machen diese Optionsart bei den Investoren beliebt [Wan 2000], [Hull 2006].

Ebenfalls aus [Smithson 1998] entnommen ist das folgende Beispiel: Basketoptionen sind beliebte Instrumente am Devisenmarkt. Eine U.S. Firma exportiert Güter nach Deutschland und Japan. Dabei möchte es sich vor einem Wachstum des Dollarkurses relativ zum Euro und Yen absichern und hat die Wahl zwischen dem Kauf separater Optionen auf den Euro und auf den Yen und

einer Basketoption auf beide Währungen. Sind Euro und Yen nicht perfekt korreliert wird die Prämie für die einzelnen Optionen höher ausfallen.

Indexoptionsscheine, eine Form von Basketoptionen, sind die am meist gehandelten Optionen an den Börsen [Zhang 1998].

5.1 Definition (Indexoption) [Geyer and Uttner 2007].

Indexoptionsscheine verbrieften das Recht auf die Auszahlung des Differenzbetrags (Cash-Settlement) zwischen dem Indexstand zum Zeitpunkt der Ausübung und dem Basispreis, welcher bei der Emission festgelegt wurde.

Indexoptionsscheine beziehen sich in der Regel auf Aktienindizes, wie etwa Gesamtmarktindizes (z. B. DAX) oder Branchenindizes (z. B. Dow Jones EuroStoxx Banks). Man betrachte beispielsweise einen Investor der vermutet, dass der deutsche Aktienmarkt in naher Zukunft stark steigen wird, sich aber nicht auf Einzelwerte festlegen kann. In diesem Fall kann man als Anleger eine Indexoption erwerben. Dieser hat als Underlying einen Index und somit eine Kennzahl die einen gesamten Marktbereich widerspiegelt. Die Spekulation auf Einzelwerte kann somit vermieden werden¹.

5.2 Definition (Basketoption).

Basketoption, auch Multi-Asset oder Portfolio Option mit Laufzeit T ist ein Vertrag über den Kauf (Call) bzw. Verkauf (Put) eines Korbs oder einer Ansammlung mehrerer riskanter Basisgüter zum Strike K mit Vertragslaufzeit T [Zhang 1998]. Üblicherweise wird die Vertragsdauer T in N äquidistante Perioden $n = 1, \dots, N$ unterteilt an denen eine Preisänderung stattfindet. Bezeichne $\mathbf{S} = (S_n^1, \dots, S_n^d)$ die Marktpreise der riskanten Güter $1, \dots, d$ in der n -ten Periode und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in (0, \infty)$ die Gewichte der einzelnen Basisgüter mit Index

$$I_a(n) = \sum_{i=1}^d a_i S_n^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_n \quad \text{für alle } n = 0, 1, \dots, N.$$

[Paulsen 2001]. Dann ist für $\delta \in \{-1, 1\}$ und Strike K

$$\max(0, \delta \cdot (K - I_a(n))) = (\delta \cdot (K - I_a(n)))^+ \quad (5.1)$$

der Wert einer Put-Basketoption ($\delta = 1$) bzw. Call-Basketoption ($\delta = -1$) bei Ausübung in t . Ist eine Ausübung nur am Ende der Vertragslaufzeit möglich so handelt es sich um eine europäische, ansonsten um eine amerikanische Basketoption.

Bezeichne $P_x = P(\cdot | \mathbf{S}_0 = x)$ für alle $\mathbf{x} \in (0, \infty)^d$ und r der Zinssatz per Anno auf dem betrachteten Kapitalmarktes, dann ist

$$p(\mathbf{x}, T) = E_x e^{-rT} (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_T)^+$$

¹Beispiel stammt aus www.wissen.boerse.de

der faire Preis einer Europäischen Putoption mit Vertragslaufzeit T der exakt ermittelbar ist (vgl. [Lamberton and Lapeyre 1993]).

Im Fall eines amerikanischen Put mit Laufzeit T ist eine Ausübung für jede Stopzeit $\tau \leq T$ möglich. Der faire Preis ist gegeben durch

$$v_a(\mathbf{x}, T) = \sup_{\tau \leq T} E_x e^{-r\tau} (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_\tau)^+$$

(siehe [Karatzas and Shreve 1998]). Die Bestimmung einer optimalen Ausübungsstrategie benutzt die Theorie des optimalen Stoppens. Im Allgemeinen, ist es nicht möglich eine geschlossene Formel für eine amerikanische Option mit endlicher Laufzeit zu bestimmen [Paulsen 2001].

Henry Wan fasst zu Anfang seines Artikels *Pricing American-style Basket Options By Implied Binomial Tree* [Wan 2000] die Probleme bei der Bewertung amerikanischer Put-Basketoptionen zusammen :

However, American-style basket options continue to be challenging in terms of both algorithm complexity and computational burden. [...] In very few special cases, such as exchange options, closed form solutions can be found. More often, numerical methods such as numerical integration, finite-difference methods and Monte Carlo simulations are necessary for low or medium size problems. When dimension is higher, it is relatively cheaper to use Monte Carlo simulations since its computational cost does not increase exponentially as other methods. The ease exists only for European-style options. It is however known that the most difficult problems of pricing and hedging multi-asset basket options are those with both high dimensionality, for which we would like to use Monte Carlo simulation, and with early exercise, for which we would like to use either binomial tree or finite difference methods. "There is currently no numerical method that copes well with such a problem" (Wilmott, 1998²).

There have been many articles published on topics of multi-dimensional American-style options. They can be categorized by either lattice-based or simulation-based approaches. Lattice-based approaches, such as binomial trees, trinomial trees and finite difference methods, are widely used for options on a single asset. When dimension is higher, usually up to four, extensions of binomial and trinomial trees from the univariate binomial tree (Cox, Ross and Rubinstein 1979³) can be applied. [...] Although these lattice-based approaches are generally easy to deal with early exercise by a backward algorithm, their memory and computation requirements explode exponentially as the dimension of problem

²S. 151-161

³S. 229-263.

increases.

Um dieses Problem zu umgehen kann man auf die Monte-Carlo Methode zurückgreifen, doch auch hier trifft dieses Verfahren auf seine Grenzen:

„On the other hand, without exponentially growing computation effort as most lattice-based methods do for higher dimension options, Monte Carlo simulation enjoys high flexibility and modest computational cost independent of dimensions of a problem. The embedded forward simulation algorithm, however, underlies its difficulty in pricing options with early exercise features, such as American options. These options generally require a backward algorithm to determine the optimal exercise policy. Since the claim written by Hull (1997)⁴ that ”A limitation of the Monte Carlo simulation approach is that it can be used only for European-style derivatives”, many papers have devoted to overcome this challenge.”

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Forward Improvement Algorithmus zur Bestimmung der Stop- bzw. Fortsetzungsmenge für eine amerikanische Basket-Put Option auf 2 Basisgüter mit endlicher Laufzeit angewandt. In Beispiel 5.2.2 wird der Forward Algorithmus mit Simulation benutzt. Diese Variante erlaubt es das Stopgebiet B_S besser zu veranschaulichen. Die Struktur von B_S kommt der aus [Paulsen 2001] nahe. In Abschnitt 5.2.3 wird der Versuch unternommen die Methode der Linearen Gleichung auf einen Basket zu übertragen.

5.2 Das Modell

Sie \mathcal{T} die Menge aller Stopzeiten und der Wert des Stopproblems

$$v_a(x) = \sup_{\tau \leq T} E_x e^{-r\tau} (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_\tau)^+ \text{ für alle } \mathbf{x} \in (0, \infty)^d$$

der gleichzeitig der faire Wert des amerikanischen Perpetual Put mit Anfangspreisvektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ ist. Die Stopmenge ist definiert durch

$$\mathcal{E}_a = \{\mathbf{x} \in (0, \infty)^d : v_a(\mathbf{x}) = (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^+\},$$

ihr Komplement, die Fortsetzungsmenge durch

$$\mathcal{C}_a = \{\mathbf{x} \in (0, \infty)^d : v_a(\mathbf{x}) > (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^+\}$$

Folglich liegt ein Anfangspreisvektor \mathbf{x} in \mathcal{E}_a genau dann, wenn sein Preis mit der Auszahlung bei sofortiger Ausübung der Option übereinstimmt [Paulsen 2001].

⁴S. 361-364.

Mit Hilfe des Forward-Algorithmus soll die zwei-dimensionale Stopmenge für eine Basketoption mit zwei risikobehafteten Finanzgütern näherungsweise ermittelt werden. Unterstellt wird eine binomiale Preisentwicklung gemäß dem CRR-Modell. Erreicht man in der n -ten Periode den Preiszustand z , so ist zu entscheiden, ob dieser Punkt zur Stopmenge gehört oder nicht. Die Stopmenge wird also von der Periode in dem sich der Preisprozess befindet abhängen.

5.2.1 Der Forward-Algorithmus auf einen Index mit 2 Basisgütern

Sei (Ω, \mathcal{G}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, versehen mit der Filtration $(\mathcal{G}_n)_{n=0, \dots, N}$ wobei $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{G}_N = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ angenommen sei. Die \mathcal{G}_n -messbaren Zufallsvariablen

$$\mathbf{Z}_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Z}_n := (Z_n^0, Z_n^1, \dots, Z_n^d)$$

bezeichnen die Vektoren der zufälligen Preise Z_n^i der Finanzgüter $i = 0, 1, \dots, d$ zur Zeit $n = \{0, 1, \dots, N\}$. Das Finanzgut 0 ist eine risikolose Anlageform mit konstanter Verzinsung, z.B. ein Bankkonto.

Man betrachte zwei Basisgüter dessen Preisentwicklung sich durch ein Cox-Ross-Rubinstein Modell mit N Perioden darstellen lassen. Demnach ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}^N$ mit σ -Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ und Filtration $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{G}_n = \sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Im zu untersuchenden Kontext ist $d = 2$, Z_n^i für $i = 1, 2$ die Preisentwicklung des i -ten Finanzguts mit Aufwärtsbewegung u_i , Abwärtsbewegung d_i . Mit $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in (0, \infty)$ und $I_a(n) = \sum_{i=1}^d a_i S_n^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_n$ ergibt sich die Payoff Funktion zur Zeit n als:

$$\begin{aligned} f(S_n^1, S_n^2, n) &= (K - I_a(n))^+ \\ &= (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_n)^+ \\ &= (K - (a_1 S_n^1 + a_2 S_n^2))^+. \end{aligned}$$

Um im Fall mehrerer Finanzgüter die Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Binomialmodells gegen die multivariate Lognormalverteilung zu gefährleiten sind die Parameter der *Up*- bzw. *Downbewegung* und insbesondere die der Übergangswahrscheinlichkeiten geeignet zu wählen. Zur Erläuterung

bieten sich folgende Notationen an:

- r = die kontinuierliche Zinsrate
- σ_i = die Volatilität des Preises des i -ten Basisguts
- u_i = der Aufwärtsfaktor des Preises des i -ten Basisguts
- d_i = der Abwärtsfaktor des Preises des i -ten Basisguts
- T = die Vertragslaufzeit der Option
- N = die Anzahl der Perioden
- $b = T/N$; die Länge einer Zeiteinheit
- ρ_{ij} = die Korrelation zwischen Asset i und j
- $\mu_i = r - 0.5 \cdot \sigma_i^2$ = der Drift der stetigen Lognormalverteilung
- $\rho = \rho_{ij}$ im Fall von $d = 2$ Finanzgütern.

Nach einer Zeiteinheit besitzen die riskanten Assets mit Anfangspreisen (Z_i^1, Z_i^2) vier mögliche Preiszustände (Z_{i+1}^1, Z_{i+1}^2) , $i = 0, \dots, N-1$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} p_{uu} &:= P(u_1 Z_i^1, u_2 Z_i^2 | Z_i^1, Z_i^2) \\ p_{ud} &:= P(u_1 Z_i^1, d_2 Z_i^2 | Z_i^1, Z_i^2) \\ p_{du} &:= P(d_1 Z_i^1, u_2 Z_i^2 | Z_i^1, Z_i^2) \\ p_{dd} &:= P(d_1 Z_i^1, d_2 Z_i^2 | Z_i^1, Z_i^2). \end{aligned}$$

Wie im Artikel [Boyle et al. 1989, Abschnitt 2] gezeigt wird, sichert die Wahl von

$$u_i d_i = 1 \quad i = 1, 2$$

wobei

$$u_i = e^{\sigma_i \sqrt{b}} \quad i = 1, 2$$

und

$$p_{uu} = \frac{1}{4} \left(1 + \rho + \sqrt{b} \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (5.2)$$

$$p_{ud} = \frac{1}{4} \left(1 - \rho + \sqrt{b} \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (5.3)$$

$$p_{du} = \frac{1}{4} \left(1 - \rho + \sqrt{b} \left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (5.4)$$

$$p_{dd} = \frac{1}{4} \left(1 + \rho + \sqrt{b} \left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (5.5)$$

die gewünschte Konvergenz gegen eine Log-Normalverteilung.

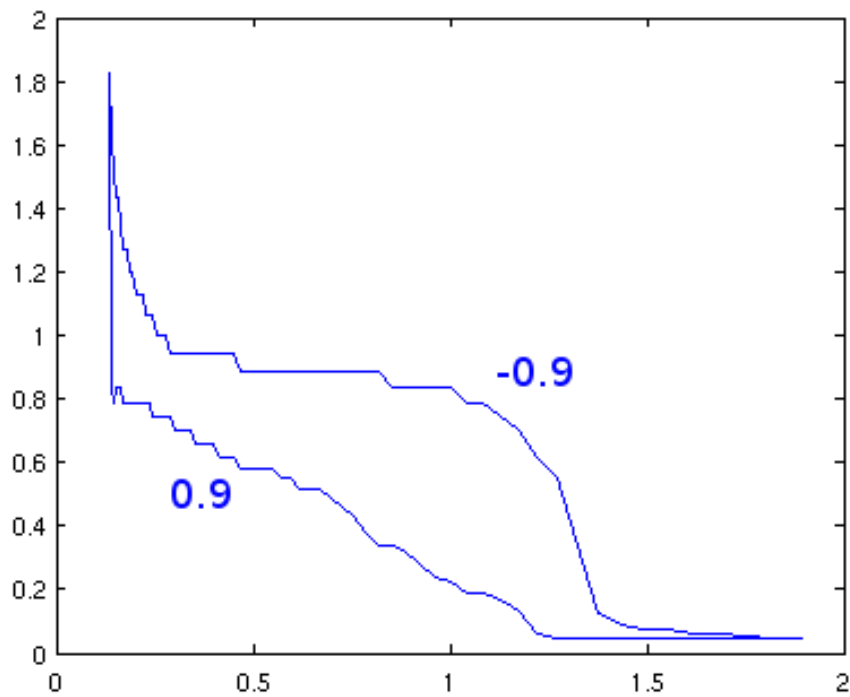
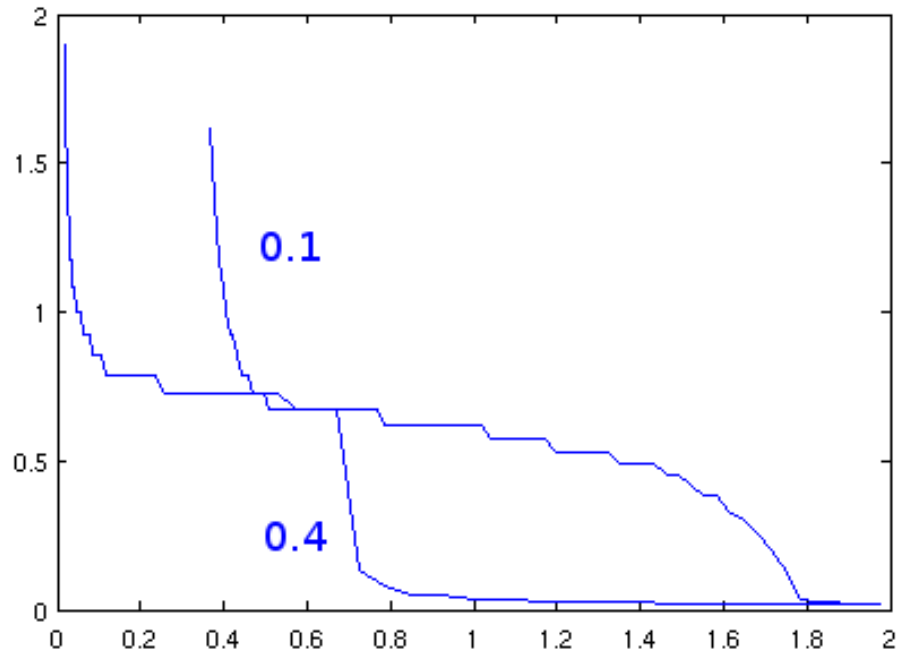
5.2.2 Numerisches Beispiel mit Simulation

Für das anschließende Beispiel betrachte ein Basket aus zwei Finanzgütern mit jeweils einjähriger Laufzeit ($T = 1$), $S_1 = S_2 = 1$, $K = 2$ $\mathbf{a} = (1, 1)$, $r = 0.04$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ mit Korrelation $\rho_{12} = 0.8$ und $N = 10$. Für festes n , hier $n = 10$ liefert Abbildung 5.2 eine Klassifizierung des Zustandsraums. Die Zustände mit dem Label \bullet sind die Zustände die zur Zeit n erreichbar sind, die Zustände \blacksquare sind jene Elemente zur Zeit n die in der Stopmenge enthalten sind. Die Punkte \circ die zum Zeitpunkt n nicht erreichbaren Zustände. Die Wahl der Achsenbeschriftungen soll die Berechnung der Werte in den jeweiligen Zuständen erlauben. So läßt sich der Wert des Zustands im Ursprung bestimmen als $S_1 \cdot u_1^{-10} + S_2 \cdot u_2^{-10}$, der Wert des Zustands aus der Stopmenge der dem Ursprung auf der Diagonale am nächsten ist als $S_1 \cdot u_1^{-9} + S_2 \cdot u_2^{-9}$. Um zu sehen was mit dem Zustandsraum passiert wenn der Zeitpunkt n erhöht wird, man dem Laufzeitende näher kommt, sind in Abbildungen 5.3(a) und 5.3(b) der Ausschnitt der Zustandsmenge mit den Elementen der Stopmenge abgedruckt. Das Programm für dieses Beispiel befindet sich auf der CD im Ordner *Basket_Sim* mit Namen *Basket_Sim.m*.

N	20	50	80	100	150
Foward Algorithmus	1.82 s	15.35 s	48.18 s	92.85 s	268.03
Iterationsschritte	11	18	23	29	38

Tabelle 5.1: Die Rechenzeit des Forward Algorithmus für eine Put-Basketoption auf zwei Basisgütern. Es wurden 10000 Pfade simuliert, die Rechenzeit ist in Sekunden angegeben. Zur Berechnung diente ein Intel Core2Duo @ 3.00GHz und Matlab R2008b.

5.2.1 Bemerkung (B_S in Abhängigkeit von σ und ρ , vgl. Paulsen [2001]). Eine geringfügige Änderung einer der beiden Parameter σ bzw. ρ kann eine drastische Veränderung des Stopgebietes zur Folge haben. Beispielsweise würde die Wahl von $\rho = 0.9$ zum schrumpfen, $\rho = -0.9$ zum vergrößern der Stopmenge und damit zu mehr bzw. weniger Iterationsschritten bis zum Abbruch führen. Andersherum trägt die Wahl einer kleineren Volatilität σ_1 bei festem σ_2 zur Vergrößerung der Stopmenge bei. Zusammenfassend kann man über die Struktur des Stopgebietes sagen: Das Stopgebiet B_S einer Basket-Put Option ist konvex dessen Gestalt von den Parametern ρ und σ abhängt.

(a) $\rho = 0.9$ und $\rho = -0.9$ (b) $\sigma_1 = 0.1$ und $\sigma_1 = 0.4$ **Abbildung 5.1:** Das Stopgebiet für unterschiedliche Werte von ρ bzw. σ_1 .

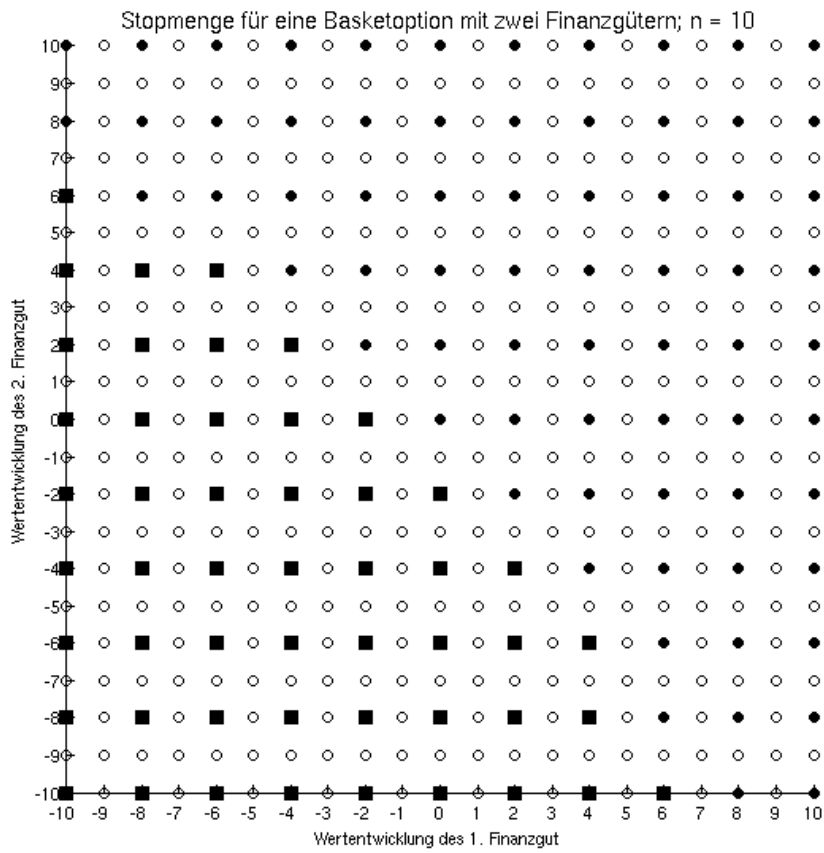


Abbildung 5.2: Die Stopmenge für die Basketoption zur Zeit $n = 10$. Die Zustände \bullet sind die zur Zeit n erreichbaren Zustände, \blacksquare die Elemente der Stopmenge zur Zeit n . Hier gilt $\alpha = e^{-rb}$; 10000 Simulationen; Rechenzeit: 0.466; Abbruch nach 5 Iterationen.

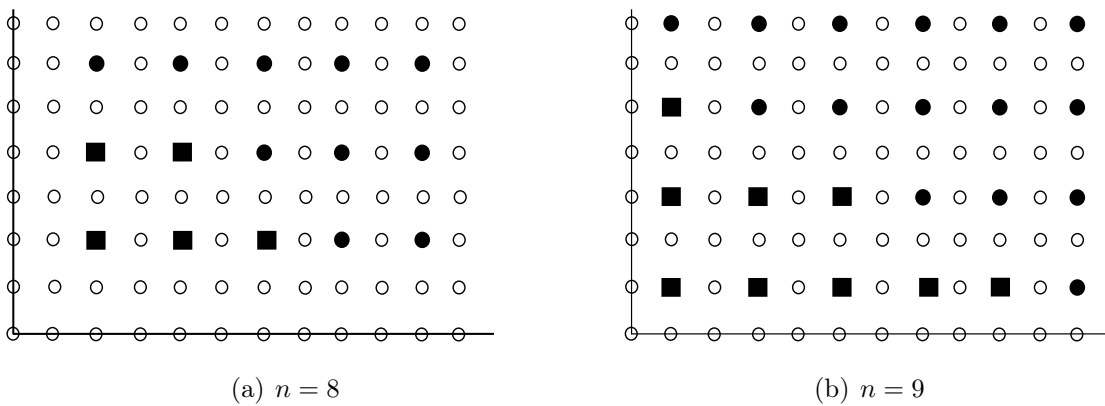


Abbildung 5.3: Die Zustände der Stopmenge zwei Zeitpunkte ($n = 8$) und einen Zeitpunkt vor ($n = 9$) Ende der Laufzeit ($n = 10$)

5.2.3 Numerisches Beispiel mit Linear Equation

In diesem Fall ist es nicht einfach möglich sich die Stopmenge anschaulich vorzustellen wie es in Beispiel 5.2.2 der Fall war. Information über einen Zustand bekommt man durch die Eingabe eines Tripel $(n1, n2, k)$, wobei $n1, n2$ die Anzahl der Up-Bewegungen des ersten bzw. zweiten Finanzguts und k die Periode in der man sich befindet, darstellen. Bevor der Algorithmus mit dem Befehl `twoassets_new.m` aufgerufen wird lässt sich über die Eingabe `initial_step_vector(n1, n2, k)` ein Vektor der nachfolgenden Gestalt erzeugen: `[n1 n2 k 'Label' 'Payoff Wert' 'bedingter Erwartungswert']`. Die ersten drei Einträge wiederholen die Eingabe, das *Label* ist entweder 0 oder 1, abhängig davon ob dieser Zustand bei dem Initialisierungsschritt zur Fortsetzungs- bzw. Stopmenge gehört, der *Payoff Wert* wird durch $(K - I_a(k))^+$ und der *bedingte Erwartungswert* gemäß Abschnitt 4.1 Punkt 2 berechnet. Nach dem Programmaufruf `twoassets_new.m` lässt sich durch den Aufruf `Ansicht(n1, n2, k)` ein Vektor wie oben erzeugen, wobei der letzte Eintrag durch einen neuen berechneten *mittleren Wert* ersetzt wird.

Für das Beispiel wurde wie in Beispiel 5.2.2 folgende Parameter vorausgesetzt: $T = 1$, $S_1 = S_2 = 1$, $K = 2$, $\mathbf{a} = (1, 1)$, $r = 0.04$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$ mit Korrelation $\rho_{12} = 0.8$ und $N = 10$. Der Algorithmus terminiert nach ca. 0.32 sec und 5 Iterationsschritten. Der erste Eintrittszeitpunkt in die Stopmenge F geschieht in der dritten Periode, wobei beide Assets bis dahin nur *Down*-Bewegungen unternahmen.

5.2.4 Die Implementierung des Algorithmus

Das Programm `twoassets_new.m` ist wie folgt aufgebaut: Erzeuge Cell Arrays in denen die Werte der Payoff Funktion, des bedingten Erwartungswertes im 1. Schritt und der neu berechneten Werte gemäß Korollar 4.2 abgespeichert werden. Um eine Klassifizierung der Zustände zu ermöglichen wird ein weiteres Array erzeugt welche die jeweiligen Label '0' und '1' trägt. Die Größe einer Zelle eines solchen Arrays ist abhängig von der Periode die betrachtet wird. So besteht das Array die für $k = 0$ nur aus einer Zelle mit einem Skalar. Für $k = 1$ vergrößert sich das Array auf zwei Zellen, wobei die erste Zelle selbigen Skalar enthält wie im Fall $k = 0$ und die zweite Zelle eine 2x2 Matrix mit möglichen Werten des Aktienverlaufs zur Zeit $k = 1$ beinhaltet. Das sich so vergrößern- de Cell Array besteht folglich aus Zellen die Matrizen tragen. Zur Berechnung der Payoff Funktion wird die Funktion `Aktienkurs(n1, n2, k)` aufgerufen. Diese berechnet den Wert der möglichen Aktienkurse beider Assets bei $n1$ Up-Bewegungen im ersten und $n2$ im zweiten Gut in der k -ten Periode. In der `while` Schleife wird die Funktion `f_rep1` aufgerufen. Diese berechnet die nach Korollar 4.2 benötigten "mittleren Wert" für diejenigen Zustände die im Initialisierungsschritt zur Fortsetzungsmenge gehört. Aufgrund ihrer rekursiven Definition geht hier die meiste Rechenzeit ein. Der anschließende Funktionsaufruf `backward_new` berechnet die nach Korollar 4.2 benötigten "mittleren Werte"

für diejenigen Zustände die zunächst als Elemente der Stopmenge klassifiziert wurden und mindestens einer dessen Nachfolger ein Element der Fortsetzungsmenge ist. Die Implementierung verlief wie im Programm `twoassets_new.m` im Ordner `Basket_LG` geschildert. Die Funktion `Ansicht.m` liefert Informationen über die erreichbaren Zuständen. Eine Beschreibung befindet sich in der Datei.

N	10	20	50	80	100
FII mit lin. Gl.	0.33 s	2.16 s	58.61 s	321.45 s	708.3 s
Iterationsschritte	5	10	25	40	50

Tabelle 5.2: Rechenzeiten mit Linearen Gleichungen für eine Basket Putoption. Die Durchführung fand auf einem Intel Core2Duo @ 3.00GHz und Matlab R2008b statt.

Fazit

Der Forward-Algorithmus bietet eine zugängliche Alternative zu der verbreiteten Rückwärtsinduktion und Monte-Carlo Methode. Die erste Variante mit Simulation ist wenig vielversprechend. Zu hohe Rechenzeiten und die Ungenauigkeit aufgrund von *Pseudo*-Wahrscheinlichkeiten machen diese Herangehensweise unattraktiv. Interessanter ist hingegen die zweite Variante. Der Forward-Algorithmus mit Linearen Gleichungen hat einen gewissen Vorteil gegenüber der Rückwärtsinduktion. Beim "rückwärtsberechnen" werden nur die Zustände aus der Fortsetzungsmenge und gewisse Elemente aus der Stopmenge berücksichtigt und die entsprechenden Rechnungen vollzogen. Bei der Backward Induction wird bei den Zuständen nicht unterschieden. Um der Rekursion in Korollar 4.2 zu folgen, muss sich der Algorithmus jedoch die *Struktur* der Fortsetzungs- bzw. Stopmenge merken. Auf Beispiel 4.2.6 bezogen bedeutet dies, dass die Struktur der binären Matrix **one** für den Algorithmus von Bedeutung ist. Daher nimmt die Rechenzeit bei dieser Methode zu je mehr man dem Laufzeitanfang näher rückt. Insgesamt bietet die Forward Improvement Iteration eine neue Möglichkeit zur Behandlung und Bewertung amerikanischer Optionen die mit der Rückwärtsinduktion mithalten kann.

Literaturverzeichnis

- Alsmeyer, G. (2000). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Inst. für Mathematische Statistik.
- Alsmeyer, G. (2002). Stochastische Prozesse Teil 1. *Skripten zur Mathematischen Statistik 33*, 2.
- Axler, S., P. Bourdon, and W. Ramey (2001). *Harmonic function theory*. Springer.
- Bloss, M., D. Ernst, and J. Häcker (2008). *Derivatives*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Boyle, P., J. Evnine, and S. Gibbs (1989). Numerical evaluation of multivariate contingent claims. *Review of Financial Studies*, 241–250.
- Brandimarte, P. (2006). *Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction*. Wiley-Interscience.
- Bremaud, P. (1999). *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation and queues*. Springer.
- Chow, Y., H. Robbins, and D. Siegmund (1971). Great expectations: The theory of optimal stopping. *Boston 4*, 933–937.
- Clewlow, L. and C. Strickland (1998). *Implementing derivatives models*. Wiley New York.
- Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein (2002). Option pricing: a simplified approach'. *INTERNATIONAL LIBRARY OF CRITICAL WRITINGS IN ECONOMICS 143*, 461–495.
- Cramer, D. and D. Howitt (2004). *The SAGE dictionary of statistics*. Sage Publications.
- Dynkin, E. and A. Juschkevitsch (1969). Satze und Aufgabenuber Markoffsche Prozesse.
- Feller, W. (1957). An introduction to probability theory and its applications. vol. 1.

- Ferguson, T. Optimal stopping and applications. *preprint, Mathematics Department, UCLA*, <http://www.math.ucla.edu/tom/Stopping/Contents.html>.
- Geyer, C. and V. Uttner (2007). *Praxishandbuch Börsentermingeschäfte: Erfolgreich mit Optionen, Optionsscheinen und Futures*. Gabler, Betriebswirt.-Vlg.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer.
- Günther, M. and A. Jüngel (2003). *Finanzderivate mit MATLAB®*. Vieweg.
- Hengartner, W. and R. Theodorescu (1978). *Einführung in die Monte-carlo-methode*. Hanser.
- Hull, J. (1997). Futures, options and other derivatives. *Prentice-Hall, New York 1*.
- Hull, J. C. (2006). *Optionen - Futures und andere Derivate* (6 ed.). PEARSON Studium.
- Irle, A. (1980). On the best choice problem with random population size. *Zeitschrift fuer Operations Research 24*, 177–190.
- Irle, A. (1990). *Sequentialanalyse: optimale sequentielle Tests*. BG Teubner.
- Irle, A. (2003). *Finanzmathematik - Die Bewertung von Derivaten*. B.G. Teubner Verlag.
- Irle, A. (2006). A forward algorithm for solving optimal stopping problems. *Journal of Applied Probability 43*, 102–113.
- Karatzas, I. and S. Shreve (1998). *Methods of mathematical finance*. Springer Verlag.
- Klenke, A. (2008). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer.
- Korn, R. and E. Korn (1999). *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: Moderne Methoden der Finanzmathematik*. Vieweg.
- Kwok, Y. (1998). *Mathematical models of financial derivatives*. Springer.
- Lamberton, D. and B. Lapeyre (1993). Hedging Index Options With Few Assets 1. *Mathematical Finance 3*(1), 25–41.
- Meintrup, D. and S. Schäffler (2004). *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Springer.
- Paulsen, V. (2001). Bounds for the american perpetual put on a stock index. *Journal of Applied Probability 38*, 55–66.

- Pliska, S. (1997). *Introduction to mathematical finance: discrete time models*. Blackwell Publishers.
- Saleri, A. Q. (2006). *Wissenschaftliches Rechnen mit Matlab*. Springer Verlag.
- Sandmann, K. (1999). *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte : mit 19 Tabellen*. Springer.
- Shiryayev, A. N. (1978). *Optimal stopping rules*. Springer-Verlag, New York :.
- Shreve, S. (2004). *Stochastic calculus for finance I: the binomial asset pricing model*. Springer Verlag.
- Smithson, C. (1998). *Managing financial risk: a guide to derivative products, financial engineering, and value maximization*. McGraw-Hill.
- Sturm, T. Einführung in das L^AT_EX-Textsatzsystem.
- Wan, H. (2000). Pricing American-style basket options by implied binomial tree. *Manuscript, University of Carlifornia at Berkely*.
- Wilkins, S. (2000). *Zur Eignung numerischer Verfahren für die Optionsbewertung*. VVW Karlsruhe.
- Wilmott, P. et al. (1998). *Derivatives: The theory and practice of financial engineering*. J. Wiley.
- Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995). *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press.
- Zhang, P. (1995). An introduction to exotic options. *European Financial Management* 1(1), 87–95.
- Zhang, P. (1998). *Exotic options*. World Scientific River Edge, NJ.

Quellcodes

Listing 1: Forwardalgorithmus für ein Asset mit linearen Gleichungen.

```

%% FII angewandt auf das Cox–Ross–Rubinstein Binomialmodell %%%
clc; % clear screen. 2
clear all % Loesche alle gespeicherten Variablen aus dem Workspace. 3
%% Verfahrensparameter 4
S0 = 100; % Anfangspreis der Aktie 5
K = 100; % Strikepreis 6
r = 0.04; % risikolose Zinssatz 7
T = 1; % Vertragslaufzeit 8
sigma = 0.2; % Volatilitaet 9
N = 20; % Zeitpunkte an denen das Gut gehandelt wird 10
deltaT = T/N; % Zeitschritt 11
u=exp((r-0.5*sigma^2)*deltaT+sigma*sqrt(deltaT)); % Up Trend 12
d=exp((r-0.5*sigma^2)*deltaT-sigma*sqrt(deltaT)); % Down Trend 13
p=0.5; % Wahrscheinlichkeit fuer ein Up 14
discount = exp(-r*deltaT); % Diskontierungsfaktor 15
p_u = discount*p; p_d = discount*(1-p); 16
17
%% Berechnung der Marktpreise und Auszahlungsfunktion 18
Z=zeros(N+1,N+1,2); % pre-allocation 19
%% Berechnung der moeglichen Marktpreise zur Zeit i. 20
%% Diese Schleife erzeugt eine N+1xN+1 Matrix. Z(j,i) beschreibt den 21
%% Eintrag in der i-ten Spalte, j-ten Zeile der Matrix Z. 22
for i=1:N+1 23
    for j=1:i 24
        Z(j,i,1)=S0*(d^(j-1)*u^(i-j)); 25
    end 26
end 27
null = ~(~Z(:, :, 1)); % Alle Zustaeude aus obiger Matrix die ungleich 0 sind 28
% werden als '1', sonst als '0' codiert. 29
%% Auszahlungsfunktion 30
f = null.*max(K-Z(:, :, 1),0); 31
%% Die Erwartungswertmatrix im 1. Schritt 32
E = zeros(N+1); % pre-allocation 33
for i = 1:N+1 34
    for j = i:N 35
        E(i,j) = p_u*f(i,j+1)+p_d*f(i+1,j+1); % Diskontfacotr bereits in 36
% p_u und p_d enthalten 37
    end 38
end 39
EW = E; 39
%% Vergleich der Payoff Funktion und dem Erwartungswert im ersten Schritt 40

```



```

one = (f>=EW); % liefert logische Matrix mit '1' falls f>=EW und '0' sonst. 41
%% Vorbereitung fuer den Forwardalgorithmus 42
one2 = zeros(N+1); % Diese Matrix wird nachfolgend fuer die 43
                    % Abbruchbedingung benoetigt. 44
mat = one; % Uebergebe zunaechst one an mat. Diese Matrix wird es 45
          % spaeter erlauben die Matrix one mit one2 zu vergleichen. 46
welches = 0; % Variable fuer die folgende while-Schleife. 47
m=0; % liefert hinterher die Anzahl der Iterationen. 48
tic 49
while(isequal(one,one2)==0) % Abbruchbedingung: Solange Matrix one und 50
                            % one2 nicht gleich sind 51
    m=m+1; 52
    EW=forward_algorithmus(N,mat,f,EW,discount,p); 53
        % ruft die Funktion forward_algorithmus auf. 54
    if(welches==0) 55
        one2 = (f >= EW); 56
        welches = 1; % Diese if-Bedingung sorgt fuer das "Umswitchen" 57
        mat = one2; % der Matrizen 'one' und 'one2', welche abwechselnd 58
                    % als Input der Funktion forward_algorithmus dienen. 59
    else 60
        one = (f >= EW); 61
        welches = 0; 62
        mat = one; 63
    end 64
end 65
toc 66
%% Die binaere Stopmenge. 67
%% one2(i,j)='1' ==> Z(i,j) Element der Stopmenge. 68
%% one2(i,j)='0' ==> Z(i,j) Element der Fortsetzungsmenge. 69
one2 = mat; 70
for j = 1:N+1 71
    for i = 1:j % Fuege die Zustaende welche einen Payoff von 72
                % Null haben zur Fortsetzungsmenge hinzu. 73
        if f(i,j)==0 74
            one2(i,j)=0; 75
        end 76
    end 77
end 78
vergleich = one2; % Vergleichsvariable, kann ignoriert werden. 79
%% Ausgabe der Ergebnisse 80
Zdim1 = Z(:, :, 1); % Z(:, :, 1) entspricht enthaelt die Matrix mit den 81
                    % Marktpreisen des gehandelten Gutes. 82
Stop = one2.*Zdim1; % Zustaende der Stopmenge 83
Stopbin = ~(~Stop); % 0-1 Codierung der Stopmenge; '1' Zustand der 84
                    % Stopmenge ungleich Null, '0' sonst. 85
Zdim2 = ~~Stop; % 0-1 Codierung der Fortsetzungsmenge; '1' Zustand ist 86
               % ein Element der Fortsetzungsmenge, '0' sonst. 87
Z(:, :, 2) = Zdim2; % Uebergebe Zdim2 an Z(:, :, 2) 88
%% Grafische Ausgabe des rekombinierenden Binomialbaum falls N <= 100 89
if N <= 100 90
    plot_region(N,Zdim1,Zdim2,Z(:, :, 1)); 91
end 92
end 93

```

Die Funktion forward_algorithmus

Listing 2: forward_algorithmus.

```
function matr4 = forward_algorithmus(N,matr1,matr2,EW,alpha,p) 1
% % % % % matr1 entspricht der Matrix one 2
% % % % % matr2 entspricht f 3
% % % % % matr3 entspricht f_1 und enthaelt die "neuen" Werte 4
% % % % % matr4 entspricht E_neu und enthaelt den geaenderten Erwartungswert 5
matr3 = matr2; 6
matr4 = EW; 7
for j = N:-1:2 % Durchlauf die Matrix rueckwaerts 8
    if sum(matr1(1:j,~j)~=j) % existiert in einer Spalte mindestens eine 0, 9
        null_index=find(matr1(:,j)==0); % finde dessen Indizes. 10
        for k = 1:length(null_index) % durchlaufe den "Null" Index. 11
            if (matr1(null_index(k),j+1)==1) % ist der rechte Nachbar 1
                % (entspricht einer Up-Bewegung im Gut), 12
                wert_u = alpha*(p*matr2(null_index(k),j+1)); 13
                % ziehe den urspruenglichen Wert aus f heran, 14
            else 15
                wert_u = alpha*(p*matr3(null_index(k),j+1)); 16
                % andernfalls den neuen Wert. 17
            end 18
            if (matr1(null_index(k)+1,j+1)==1) % ist der Nachbar rechts und 19
                % eine Zeile tiefer (entspricht einer Down-Bewegung im 20
                % Gut) eine 1, 21
                wert_d = alpha*((1-p)*matr2(null_index(k)+1,j+1)); 22
                % ziehe den urspruenglichen Wert aus f heran, 23
            else 24
                wert_d = alpha*((1-p)*matr3(null_index(k)+1,j+1)); 25
                % andernfalls den neuen. 26
            end 27
            matr3(null_index(k),j)=wert_u+wert_d; % aendere dessen Wert 28
            % Payoff-Wert an dieser Stelle. 29
        end 30
        for k = 1:length(null_index) % durchlaufe den "Null" Index erneut 31
            if ( null_index(k)<j && matr1(null_index(k),j-1) == 1) 32
                % ist ein linker Nachbar der 0 eine 1 und diese 1 befindet 33
                % sich nicht in der unteren Dreiecksmatrix, so ordne ihm 34
                % diesen Wert zu: 35
                matr4(null_index(k),j-1) = alpha*(p*matr3(null_index(k),j)... 36
                +(1-p)*matr3(null_index(k)+1,j)); 37
                % Anschliessend folgt die Klassifikation des Zustandes durch 38
                % den Vergleich des Payoff und des bedingten Erwartungswertes. 39
                matr1(null_index(k),j-1) = (matr3(null_index(k),j-1) >= ... 40
                matr4(null_index(k),j-1)); 41
            end 42
            if ( (null_index(k)<=j+1 && null_index(k)>1) && ... 43
                matr1(null_index(k)-1,j-1) == 1) 44
                % ist der Nachbar links und eine Zeile hoeher von der 0 45
            end 46
        end 47
    end 48
end 49
% ist der Nachbar links und eine Zeile hoeher von der 0 50
```

```
    % eine 1, so ordne ihm diesen Wert zu: 51
    matr4(null_index(k)-1,j-1) = alpha*(p*matr3(null_index(k)-1,j)... 52
        +(1-p)*matr3(null_index(k),j)); 53
    % Anschliessend folgt die Klassifikation des Zustandes durch 54
    % den Vergleich des Payoff und des bedingten 55
    % Erwartungswertes. 56
    matr1(null_index(k)-1,j-1) = (matr3(null_index(k)-1,j-1) >= ... 57
        matr4(null_index(k)-1,j-1)); 58
    end 59
end 60
end 61
end 62
end 63
```

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegenden Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner an-

deren Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Münster, 1. August 2009

Unterschrift