Bachelorarbeit

Backtesting von Kreditrisikomodellen

von
Ulf Cormann

Universität Siegen
Fachbereich Mathematik
August 2005

BETREUER UND GUTACHTER:

Priv. Doz. Dr. Paulsen, Universität Siegen
Priv. Doz. Dr. Kaufmann, Universität Siegen

Inhaltsverzeichnis

Spezielle Symbole

$\mathcal{N}_{(\mu,\sigma)}$	(Eindimensionale) Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ
$\mathcal{N}_{(0,1)}$	Standardnormalverteilung
Φ	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
Φ^{-1}	Quantilfunktion der Standardnormalverteilung
$N^d_{(\mu,\Sigma)}$	d-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungsvektor μ und Kovarianz-Matrix Σ
$\Phi_2(\cdot,\cdot,\varrho)$	gemeinsame Verteilungsfunktion zweier $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilter Zufallsvariablen mit Korrelation ϱ
$\mathcal{B}_{(n,p)}$	Binomialverteilung mit Parametern n und p
$\mathcal{N}b\,(r,p)$	Negativbinomialverteilung mit Parametern r und p
Poi_λ	Poissonverteilung mit Mittelwert λ
$\Gamma_{(a,b)}$	Gammaverteilung mit Parametern a und b
χ^2	Chi-Quadrat Verteilung
$\mathcal{L}(X)$	Verteilung von X $(\mathcal{L}(X)(A) := P(X \in A))$
$I\!R$	Menge der reellen Zahlen
$I\!N$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{B}$	Borelsche σ-Algebra
ω^T	Transponierter Vektor
$Q^{*(n)}$	n-fache Faltung einen Wahrscheinlichkeitsmaßes Q

Einleitung

Im Rahmen von Basel II ist vorgesehen Kreditinstituten, die bestimmte Voraussetzungen erfüllen, die Möglichkeit zu eröffnen, die Eigenmittelunterlegung für Kreditrisiken auf Grundlage von internen Kreditrisikomodellen zu berechnen[1]. Aufgrund des Aufwands ergibt der Einsatz interner Verfahren für ein Kreditinstitut nur dann Sinn, wenn es zu einer Reduzierung der Eigenmittelunterlegung im Vergleich zu den Standardverfahren führt. Dies kann erreicht werden, wenn das interne Verfahren besser in der Lage ist die Risiken des betreffenden Institutes abzubilden als die Standardverfahren. Dieser Anspruch, die tatsächlichen Risiken besser quantifizieren zu können (dass heißt in der Regel geringer anzusetzen) als die Standardverfahren, stellt besondere Anforderungen an die Qualität dieser Modelle, insbesondere besteht die Notwendigkeit einer zeitnahen Überprüfung.
Dieser Aspekt ist gerade aus Sicht der Bankenaufsicht interessant, da diese sicherzustellen hat, dass es durch den Einsatz interner Kreditrisikomodelle nicht zu einer Erhöhung des Insolvenzrisikos in Folge einer systematischen Unterschätzung des Kreditrisikos kommt. Es liegt allerdings natürlich auch im Interesse der Bank über die Qualität der von ihr eingesetzten Modelle im Bilde zu sein, da sie auf deren Grundlage ihr Risikomanagement durchführen muss.
Die Akzeptanz interner Kreditrisikomodelle wird also wesentlich davon abhängen, ob es gelingt geeignete Testverfahren zur Prüfung zu entwickeln.
In dieser Arbeit wird in diesem Sinne unter einem Backtestingverfahren also ein statistisches Verfahren verstanden, das aufgrund von beobachteten Daten eines Kreditportfolios ex post eine Aussage über die Qualität des Kreditrisikomodells trifft, auf dessen Grundlage die Risiken des Portfolios quantifiziert wurden. In dieser Arbeit wird hierzu ein „parametrischer“Ansatz verfolgt, dass heißt es wird nicht die „ganze“Modellierung überprüft, sondern lediglich die Input-Parameter. Hier liegt das Augenmerk insbesondere auf der prognostizierten Ausfallwahrscheinlichkeit, da Basel II diesen Parameter im IRB-Ansatz den Kreditinstituten als erstes zu internen Quantifizierung freigegeben hat. In weiteren Schritten sollen auch der Loss-Given-Default (LGD)[2] und der Exposure-at-Default (EAD)[3] intern quantifiziert werden, was Backtestingverfahren auch in diesem Bereich notwendig macht.

[1] Vgl. Basel Committee on Banking Supervision (2001b)
[2] Anteil des im Risiko stehenden Kapitals, das bei Problemen ausfällt
[3] im Risiko stehendes Kapital

In den letzten Jahren wurden eine ganze Reihe von Verfahren entwickelt um Kreditrisiken zu quantifizieren. Die bekanntesten sind hierbei CreditMetrics, CreditRisk+ und das Modell von KMV. Diese Arbeit wird sich im Wesentlichen mit dem Backtesting der Ausfallwahrscheinlichkeit eines vereinfachten CreditMetrics sowie eines Ein-Sektor CreditRisk+ Modells beschäftigen. Die Ergebnisse die hier im Bezug auf das Backtesting von Ausfallwahrscheinlichkeiten gewonnen werden, sind allerdings auch für das nicht vereinfachte CreditMetrics Modell gültig. Dieses Modell bezieht auch Ratingänderungen mit ein, die hier nicht Gegenstand der Untersuchung sind. Im Sinne des oben erwähnten „parametrischen“Ansatzes wird hierbei nicht infrage gestellt, ob das Modell grundsätzlich in der Lage ist Kreditrisiken korrekt wiederzugeben, sondern ob die Bank es adäquat parametrisiert hat. Wie bereits erwähnt liegt der Fokus hierbei aufgrund der oben aufgeführten Gründe auf dem Parameter „Ausfallwahrscheinlichkeit“.
Backtestingverfahren in dem oben beschriebenen Sinne werden bereits seit einigen Jahren im Bereich der Validierung von Marktrisikomodellen eingesetzt. Unter Marktrisiko versteht man hierbei die negative Abweichung des Wertes eines Portfolios aus handelbaren Finanzinstrumenten und Wertpapieren von einem erwarteten Wert. Zwei wesentliche Unterschiede zum Bereich des Kreditrisikos werden hierbei sofort deutlich. Erstens ist die Wertänderung eines Portfolios aus Wertpapieren und handelbaren Finanzinstrumenten sofort an den Marktpreisen ablesbar, während die Wertänderung eines Kredites, zum Beispiel durch Ratingänderungen, nur über ein Modell bestimmt werden kann. Im Falle eines totalen oder teilweisen Kreditausfalls sind die Verluste allerdings auch einfach abzulesen. Der zweite, für das eigentliche Backtesting wesentliche Unterschied besteht in der Verfügbarkeit von Daten. In einem Portfolio von Wertpapieren treten an praktisch jedem Handelstag, also etwa 250 mal pro Jahr, Wertänderungen auf. Man verfügt also bereits nach einem Jahr über eine relativ große und aussagekräftige Datenhistorie, auf die sich das Backtesting stützen kann. Bei einem Kreditportfolio ergibt eine tägliche Neubewertung kaum Sinn, da Ratingänderungen und Kreditausfälle nur in wesentlich größeren Abständen auftreten. Ein sinnvoller Zeitraum ist hierbei eher ein Jahr als ein Tag, da dies auch besser den Zeitraum wiedergibt, innerhalb dessen auf Risiken reagiert werden kann. Der Aufbau einer akzeptablen Datenhistorie wird also einen längeren Zeitraum in Anspruch nehmen, sie steht also für das angestrebte zeitnahe Backtesting noch nicht zur Verfügung. Es müssen also Wege gefunden werden mit dieser schmalen Datenbasis auszukommen. Die Verwendung eines „parametrischen“Ansatzes ist auch in diesen Kontext einzuordnen, da die Annahme, dass die Kreditverluste einer bestimmten Art von Verteilung folgen, es ermöglicht, mit weniger Daten auszukommen.
Ein weiterer wesentlicher Problemkreis ensteht durch die Tatsache, dass das Verhalten von Krediten in einem Portfolio im Allgemeinen nicht unabhängig ist, eine einfach zu behandelnde Modellierung der Kredite mit stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen wird der Realität also nicht gerecht.
Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird das zuerst betrachtete vereinfachte Cre-

ditMetrics vorgestellt und einige wichtige Eigenschaften angesprochen. Daran anschließend wird im zweiten Kapitel die asymptotische Verteilung einer Ausfallquote in diesem Modell hergeleitet und darauf aufbauend im dritten Kapitel einige auf dieser Verteilung beruhende Tests vorgestellt. Anschließend wird im vierten Kapitel auf einen modifizierten Test eingegangen, der zusätzliche Aspekte berücksichtigt. Da die im dritten und vierten Kapitel vorgestellten Tests auf asymptotischen Verteilungen beruhen [4] wird im fünften Kapitel untersucht, wie gut die Verteilung der Ausfallquote eines unendlich grossen Portfolios die Verteilung der Ausfallquote eines endlichen Portolios approximiert. Letztere kann nicht analytisch bestimmt werden, es besteht nur die Möglichkeit einer Approximation durch Simulation.
Im sechsten Kapitel wird schließlich noch auf das Testen eines alternativen Kreditrisikomodells eingegangen, indem die für CreditMetrics hergeleiteten Tests auf das CreditRisk+ Modell übertragen werden.

[4] das bedeutet, das sie für unendlich grosse Portfolios hergeleitet wurden

Kapitel 1

Das vereinfachte CreditMetrics Modell

In diesem Kapitel wird das vereinfachte CreditMetrics Modell vorgestellt und einige wichtige Eigenschaften angesprochen und bewiesen. CreditMetrics ist ein in der Praxis häufig verwendetetes Modell, so dass es Sinn macht, Backtestingverfahren zu entwickeln die auf dieses Modell zugeschnitten sind. Das vereinfachte Modell konzentriert sich ausschließlich auf Kreditausfälle,das komplexere Modell bezieht auch Ratingänderungen mit ein. Da in dieser Arbeit der Blickpunkt jedoch auf dem Backtesting der geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeit liegt sind die Ergebnisse auch auf das komplexere Modell übertragbar. Für die Betrachtung von Ratingänderungen müssen allerdings weiterführende Untersuchungen durchgeführt werden.

1.1 Das Einfaktor-Modell

1.1.1 Das Modell

Betrachtet wird das Kreditportfolio einer Bank. Sei n die Anzahl der Kredite im Portfolio. In einem ersten Schritt wird das Portfolio in k Teilportfolios unterteilt, so dass die Ausfallwahrscheinlichkeit für alle Kredite in einem Teilportfolio gleich ist. Damit kann ein solches Teilportfolio auch als Ratingklasse angesehen werden. n_r bezeichnet die Anzahl der Kredite im r-ten Teilportfolio. Das Verhalten eines Kredites hängt von einer Zufallsvariablen ab, die das finanzielle „Wohlergehen“, die Bonität, des entsprechenden Kreditnehmers beschreibt. Diese Zufallsvariable hat für den i-ten Kredit aus dem r-ten Teilportfolio die Form:

$$B_{ri} = \sqrt{\varrho_r} Z + \sqrt{1 - \varrho_r} U_{ri} \quad r = 1, \dots, k, \; i = 1, \dots, n_r \tag{1.1}$$

Z ist hierbei eine $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallsvariable, die einen makroökonomischen Einfluss beschreibt, der auf alle Kredite im Portfolio wirkt. Auf diese Weise wird

die Abhängigkeit der Kredite modelliert. U_{ri} ist eine ebenfalls $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallsvariable die firmenspezifische Einflüsse beschreibt. Die Stärke der jeweiligen Einflüsse wird durch $\varrho_r \in [0,1]$ bestimmt. Z und alle U_{ri} sind paarweise unabhängig.
Durch obige Skalierung wird erreicht, dass B_{ri} ebenfalls einer $\mathcal{N}_{(0,1)}$-Verteilung folgt.
Ein Kredit fällt aus, wenn die zugehörige Bonitätsvariable unter eine bestimmte Schranke c_r fällt. Da c_r die Ausfallwahrscheinlichkeit eindeutig festlegt, gilt diese Schranke für alle Kredite im r-ten Teilportfolio. Die Kreditausfälle werden also beschrieben durch eine Zufallsvariable der Form:

$$X_{ri} = 1_{\{B_{ri} \leq c_r\}} \tag{1.2}$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit p_r des r-ten Teilportfolios gilt daher, da B_{ri} $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilt ist:

$$\begin{aligned} p_r &= P\left(X_{ri} = 1\right) \\ &= P\left(B_{ri} \leq c_r\right) \\ &= \Phi^{-1}\left(c_r\right) \end{aligned}$$

X_{ri} ist somit offensichtlich $\mathcal{B}_{(1,p_r)}$-verteilt.
Die Ausfallquote $\hat{p}_r$ des r-ten Teilportfolios ist definiert durch:

$$\hat{p}_r := \frac{1}{n_r}\sum_{i=1}^{n_r} X_{ri}$$

Dieses Modell läßt sich leicht erweitern indem statt der Zufallsvariable Z ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor verwendet wird um verschiedene makroökonomische Einflüsse einzubeziehen. Der Gewichtsfaktor ϱ_r muss dann durch einen Gewichtsvektor ersetzt werden.

1.1.2 Wichtige Eigenschaften

im Folgenden werden einige wichtige Eigenschaften dieses Modells vorgestellt.

(i) Die Korrelation zweier Bonitätsvariablen (Assetkorrelation) B_{ri} und B_{sj} mit $r \neq s$ oder $i \neq j$ beträgt

$$\varrho_{rs} := Korr\left(B_{ri}, B_{sj}\right) = \sqrt{\varrho_r \varrho_s}$$

Die Assetkorrelation innerhalb eines Teilportfolios beträgt also:

$$\varrho_{rr} = \sqrt{\varrho_r^2} = \varrho_r$$

Beweis: Da $B_{ri} \sim B_{sj} \sim \mathcal{N}_{(0,1)}$ und somit $Var(B_{ri}) = Var(B_{sj}) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
Korr(B_{ri}, B_{sj}) &= Kov(B_{ri}, B_{sj}) \\
&= E(B_{ri}B_{sj}) - E(B_{ri})E(B_{sj}) \\
&= E(B_{ri}B_{sj}) \\
&= E\left(\left(\sqrt{\varrho_r}Z + \sqrt{1-\varrho_r}U_{ri}\right)\left(\sqrt{\varrho_s}Z + \sqrt{1-\varrho_s}U_{sj}\right)\right) \\
&= E\left(\sqrt{\varrho_r\varrho_s}Z^2\right) + E\left(\sqrt{(1-\varrho_s)(1-\varrho_r)}U_{ri}U_{sj}\right) \\
&+ E\left(\sqrt{\varrho_s(1-\varrho_r)}U_{ri}Z\right) + E\left(\sqrt{\varrho_r(1-\varrho_s)}U_{sj}Z\right) \\
&= \sqrt{\varrho_r\varrho_s}E\left(Z^2\right) \\
&= \sqrt{\varrho_r\varrho_s}
\end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis gilt natürlich auch im Fall $r = s$, also für zwei Bonitätsvariablen aus demselben Teilportfolio. Innerhalb des r-ten Teilportfolios beträgt die Korrelation demzufolge $\sqrt{\varrho_r^2} = \varrho_r$.

Zur Bestimmung der Korrelation zweier Ausfallvariablen wird nun der hierfür benötigte Begriff der bivariaten Normalverteilung definiert.

Definition 1.1.1 (Verteilungsfunktion einer bivariaten Normalverteilung) *Seien X, Y bivariat $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallsvariablen mit $Korr(X,Y) = \varrho$, dann ist die Verteilungsfunktion einer bivariaten Normalverteilung definiert durch:*

$$\Phi_2(x, y, \varrho) := P\{X \leq x, Y \leq y\} = P((X,Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])$$

(ii) Für die Korrelation zwischen zwei Ausfallvariablen (Ausfallkorrelation bzw. default correlation) X_{ri} und X_{sj} gilt:

$$\varrho_{rs}^{def} := Korr(X_{ri}X_{sj}) = \frac{\Phi_2\left(\Phi^{-1}(p_r), \Phi^{-1}(p_s); \varrho_{rs}\right) - p_r p_s}{\sqrt{p_r(1-p_r)p_s(1-p_s)}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Kov\left(X_{ri}, X_{sj}\right) &= E\left(\left(X_{ri}-p_r\right)\left(X_{sj}-p_s\right)\right) \\
&= E\left(X_{ri}X_{sj}-p_rX_{sj}-p_sX_{ri}+p_rp_s\right) \\
&= E\left(X_{ri}X_{sj}\right)-\underbrace{p_rE\left(X_{sj}\right)}_{p_rp_s}-\underbrace{p_sE\left(X_{ri}\right)}_{p_sp_r}+p_rp_s \\
&= E\left(X_{ri}X_{sj}\right)-p_rp_s \\
&= P\left(B_{ri}\le c_r, B_{sj}\le c_s\right)-p_rp_s \\
&= P\Big(\left(B_{ri}, B_{sj}\right)\in\big(-\infty, \Phi^{-1}\left(p_r\right)\big]\times\big(-\infty, \Phi^{-1}\left(p_s\right)\big]\Big)-p_rp_s \\
&= \Phi_2\big(\Phi^{-1}\left(p_r\right), \Phi^{-1}\left(p_s\right); \varrho_{rs}\big)-p_rp_s
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt, da $B_{ri}\sim\mathcal{N}_{(0,1)}$ und $B_{sj}\sim\mathcal{N}_{(0,1)}$, sowie $c_r=\Phi^{-1}\left(p_r\right)$ und $c_s=\Phi^{-1}\left(p_s\right)$
Mit $Var\left(X_{ri}\right)=p_r\left(1-p_r\right)$ und $Var\left(X_{sj}\right)=p_s\left(1-p_s\right)$ (da $X_{ri}\sim B_{(1,p_r)}$ (analog: X_{sj})) folgt die Behauptung, da

$$Korr\left(X_{ri}, X_{sj}\right)=\frac{Kov\left(X_{ri}, X_{sj}\right)}{\sqrt{Var\left(X_{ri}\right)Var\left(X_{sj}\right)}}$$

□

(iii) Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredites gilt:

$$P\left(X_{ri}=1|Z=z\right)=\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(p_r\right)-\sqrt{\varrho_r}z}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{ri}=1\,|Z=z\right) &= P\left(B_{ri}\le c_r\,|Z=z\right) \\
&= P\left(\sqrt{\varrho_r}z+\sqrt{1-\varrho_r}U_{ri}\le\Phi^{-1}\left(p_r\right)\right) \\
&= P\left(U_{ri}\le\frac{\Phi^{-1}\left(p_r\right)-\sqrt{\varrho_r}z}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(p_r\right)-\sqrt{\varrho_r}z}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right)
\end{aligned}$$

□

(iv) Es gilt die Äquivalenz :

$$\varrho_{rs}^{def}=0\Leftrightarrow\varrho_{rs}=0$$

Beweis:
„$\Rightarrow$“
Sei $\varrho_{rs}^{def} = 0$
$\Rightarrow \Phi_2\left(\Phi^{-1}(p_r), \Phi^{-1}(p_s)\right) - p_r p_s = 0$
$\Rightarrow P\left(B_r \leq \Phi^{-1}(p_r), B_s \leq \Phi^{-1}(p_s)\right) = p_r p_s$
$\Rightarrow P\left(B_r \leq \Phi^{-1}(p_r), B_s \leq \Phi^{-1}(p_s)\right) = P\left(B_r \leq \Phi^{-1}(p_r)\right) P\left(B_s \leq \Phi^{-1}(p_s)\right)$

Dies gilt für alle p_s, p_r also sind B_r und B_s unabhängig. Deshalb gilt $\varrho_{rs} = Korr\left(B_s, B_r\right) = 0$.

„$\Leftarrow$“
Sei $\varrho_{rs} = 0$, dann gilt da $\varrho_{rs} = \sqrt{\varrho_s \varrho_r}$:

$$\varrho_s = 0 \; oder \; \varrho_r = 0$$

Sei ohne Einschränkung $\varrho_s = 0$, dann gilt:

$$B_{si} = U_{si}, \; B_{rj} = \sqrt{\varrho_r} Z + \sqrt{1 - \varrho_r} U_{rj}$$

nach Voraussetzung sind Z, U_{si} und U_{rj} unabhängig, also sind auch B_{si} und B_{rj} und damit X_{si} und X_{rj} unabhängig. Hieraus folgt:

$$\varrho_{rs}^{def} = Korr\left(X_{si}, X_{rj}\right) = 0$$

□

Aus dem Beweis von (iv) folgt auch unmittelbar die bedingte Unabhängigkeit der X_{ri} -gegeben $Z = z$. Diese Eigenschaft wird im Folgenden noch eine wichtige Rolle spielen.

1.2 Das Mehrfaktor-Modell

Das in diesem Kapitel vorgestellte vereinfachte CreditMetrics Modell läßt sich wie bereits erwähnt erweitern indem die makroökonomische Zufallsvariable Z durch einen multivariat normalverteilten Zufallsvektor ersetzt wird. Auf diese Weise können unterschiedliche makroökonomische Einflüsse ins Modell miteinbezogen werden. Ansonsten bleibt die Struktur des Einfaktor-Modells erhalten. Somit bildet das Einfaktor-Modell nur einen Spezialfall des Mehrfaktor-Modells und alle für das Mehrfaktor-Modell gültigen Aussagen gelten auch für das Einfaktor-Modell. Eine seperate Betrachtung des Einfaktor-Modells ist aber trotzdem sinnvoll, da die Berechnungen in diesem Modell wesentlich einfacher sind und die hergeleiteten Tests sich vollständig auf das Mehrfaktor-Modell übertragen lassen. Aus diesem Grund werden in diesem und im nächsten Kapitel seperat Tests für beide Modelle hergeleitet und die Analogie aufgezeigt.

1.2.1 Das Modell

Im Mehrfaktor-Modell ist die Bonitätsvariable des i-ten Kreditnehmers im r-ten Teilportfolio eine Zufallsvariable der Form

$$B_{ri} = \omega_r^T Z + \xi_r U_{ri} \tag{1.3}$$

wobei $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$, $Z_j \sim \mathcal{N}_{(0,1)}$ $j = 1 \ldots d$, ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit Varianz-Kovarianz-Matrix Ω ist. Der Einfluss der einzelnen makroökonomischen Grössen wird durch den Gewichtsvektor $\omega_r = (\omega_{r1} \ldots \omega_{rd}) \in I\!R^d$ beschrieben. Der unternehmensspezifische Faktor U_{ri} ist wieder Standardnormalverteilt. Der Einfluss des unternehmensspezifischen Faktors $\xi_r = \sqrt{1 - \omega_r^T \Omega \omega_r}$ ist so skaliert, dass B_{ri} auch hier einer Standardnormalverteilung folgt.
Ein Ausfall des i-ten Kreditnehmers tritt wiederum ein, wenn seine Bonitätvariable B_{ri} unter einen Wert $c_r = \Phi^{-1}(p_r)$ fällt, wobei p_r wieder die Ausfallwahrscheinlichkeit des r-ten Teilportfolios bzw. der r-ten Ratingklasse beschreibt.
Für die Ausfallvariablen X_{ri} und die Ausfallquote $\hat{p}_r$ gelten die gleichen Annahmen und Eigenschaften wie beim Einfaktor-Modell.

1.2.2 Wichtige Eigenschaften

(i) Für die Assetkorrelation zweier Kreditnehmer gilt:

$$\rho_{rs} = Korr(B_{ri}, B_{sj}) = \omega_s^T \Omega \omega_r$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Korr(B_{ri}, B_{sj}) &= Kov(B_{ri}, B_{sj}) \\
&= E(B_{ri}B_{sj}) - E(B_{ri})E(B_{sj}) \\
&= E(B_{ri}B_{sj}) \\
&= E\left(\left(\omega_r^T Z + \xi_r U_{ri}\right)\left(\omega_s^T Z + \xi_s U_{ri}\right)\right) \\
&= E\left(\omega_r^T Z \omega_s^T Z\right) \\
&= E\left(\sum_{t,k=1}^{d} \omega_{r_t}\omega_{s_k} Z_t Z_k\right) \\
&= \sum_{t,k=1}^{d} \omega_{r_t}\omega_{s_k} E(Z_t Z_k) \\
&= \sum_{t,k=1}^{d} \omega_{r_t}\omega_{s_k} Korr(Z_t Z_k) \\
&= \omega_s^T \Omega \omega_r
\end{aligned}$$

□

(ii) Für die Ausfallkorrelation zweier Kredite gilt:

$$\rho_{rs}^{def} := Korr\left(X_{ri}, X_{sj}\right) = \frac{\Phi_2\left(\Phi^{-1}\left(p_r\right), \Phi^{-1}\left(p_s\right); \rho_{rs}\right) - p_r p_s}{\sqrt{p_r\left(1 - p_r\right) p_s\left(1 - p_s\right)}}$$

und für die Ausfallkorrelation innerhalb des r-ten Teilportfolios somit:

$$\rho_{rr} = \omega_r^T \Omega \omega = 1 - \xi_r^2 =: \rho_r$$

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Einfaktor-Modell

□

(iii) Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredites gilt:

$$P\left(X_{ri} = 1 | Z = z\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(p_r\right) - z^T \omega_r}{\xi_r}\right)$$

Beweis: Analog zum Einfaktor-Modell □

(iv) Die Äquivalenz $\rho_{rs}^{def} = 0 \Leftrightarrow \rho_{rs} = 0$ sowie sie bedingte Unabhängigkeit -gegeben Z=z gelten analog zum Einfaktor-Modell

Kapitel 2

Asymptotische Verteilung der Ausfallquote

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Verteilung zu bestimmen, gegen die die Verteilung der Ausfallquote in einem vereinfachten CreditMetrics Modell für größer werdende Portfolios bzw. Teilportfolios konvergiert.
Im ersten Teil wird auf den Begriff der Verteilungskonvergenz eingegangen und einige wichtige Sätze zu diesem Thema vorgestellt. Im zweiten Teil werden die gewonnenen Erkenntnisse zur Berechnung der asymptotischen Verteilung einer Ausfallquote im vereinfachten CreditMetrics Modell verwendet.

2.1 Verteilungskonvergenz

Um den Begriff der schwachen Konvergenz und den daraus abgeleiteten Begriff der Verteilungskonvergenz (oder auch Konvergenz in Verteilung) zu motivieren wird folgender Satz benötigt:

Satz 2.1.1 *Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ist eindeutig bestimmt durch die Werte der Integrale*

$$\int f dQ \quad f \in \mathcal{C}(E)$$

wobei $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ die Menge aller gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Für den Beweis siehe [6] S.127f

Stimmen also für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q_1 und Q_2 die Werte dieser Integrale überein, so tun dies auch die Wahrscheinlichkeitsmaße selbst.

Definition 2.1.2 (schwache Konvergenz) *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* $(\mathbb{R},\mathbb{B})$ konvergiert schwach *gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß* Q *auf* $(\mathbb{R},\mathbb{B})$ *(Bez.:* $Q_n \xrightarrow{w} Q$ *für* $n\to\infty$*) falls*

$$\int f dQ_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f dQ$$

für alle stetigen, beschränkten Funktionen f *auf* $\mathbb{R}$.

Aus dieser Definition wird nun der Begriff der Verteilungskonvergenz einer Folge von Zufallsvariablen abgeleitet.

Definition 2.1.3 (Verteilungskonvergenz) *Eine Folge* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $(\mathbb{R},\mathbb{B})$*-wertigen Zufallsvariablen* konvergiert in Verteilung *gegen eine* $(\mathbb{R},\mathbb{B})$*-wertige Zufallsvariable* X *(Bez.:* $X_n \xrightarrow{V} X \quad n\to\infty$*) falls*

$$\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X)$$

Bemerkung 2.1.4 *Seien* X_n *und* X *Zufallsvariablen definiert auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$.
X_n *konvergiert in Verteilung gegen* X *genau dann, wenn gilt*

$$E(f(X_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(f(X))$$

für alle stetigen, beschränkten Funktionen f.

Beweis: Folgt direkt aus Definition(3.1.3).

□

2.2 Asymptotische Verteilung der Ausfallquote

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, eine geeignete Teststatistik zum Test der Ausfallwahrscheinlichkeit in einem vereinfachten CreditMetrics Modell zu bestimmen. Hierbei ist es naheliegend die Ausfallquote zu verwenden. Im Fall von unabhängigen homogenen Krediten in einem Teilportfolio kann man die Verteilung der Ausfallquote einfach analytisch bestimmen. Weiterhin konvergiert die Ausfallquote in diesem Fall für größer werdende Portfolios gegen die zugrundeliegende Ausfallwahrscheinlichkeit. Im Fall von abhängigen Krediten ist beides nicht der Fall, hier ist es nur möglich eine asymptotische Verteilung der Ausfallquote zu erhalten, aus der eine Teststatistik gewonnen werden kann.

2.2.1 Unabhängige Kredite

Im Fall von unabhängigen Krediten in einem Teilportfolio ist eine Berechnung der Verteilung der Kreditausfälle in diesem Teilportfolio problemlos möglich. Sei A_r die Zufallsvariable, die die Ausfälle des r-ten Teilportfolios beschreibt.

$$A_r = \sum_{i=1}^{n_r} X_{ri}$$

Hierbei sind die X_{ri} unabhängig, identisch $\mathcal{B}_{(1,p_r)}$-verteilt, dass heißt A_r folgt einer $\mathcal{B}_{(n_r,p_r)}$-Verteilung. Die Ausfallquote

$$\hat{p}_r = \frac{1}{n_r} A_r = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} X_{ri}$$

konvergiert nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gegen den Erwartungswert von X_{r1}, also gegen die Ausfallwahrscheinlichkeit p_r. In einem Test ist es also möglich die realisierte Ausfallquote π_r eines Teilportfolios als Schätzer für die tatsächliche Ausfallwahrscheinlichkeit p_r zu verwenden, vorausgesetzt die Zahl der Kredite ist groß genug. Das Backtesting kann also auf Grundlage eines einfachen Binomialtests erfolgen, auf den im folgenden Kapitel noch näher eingegangen wird.

2.2.2 Abhängige Kredite

Im realistischen Fall von abhängigen Krediten in einem Teilportfolio gelten diese einfachen Ergebnisse nicht, da sie alle auf der Prämisse der Unabhängigkeit beruhen. Die Verteilung von A_r läßt sich für eine Korrelation ϱ_r größer als null nicht mehr analytisch berechnen, sondern kann nur noch durch Simulation approximiert werden.
Ebenso konvergiert die Ausfallquote nicht mehr gegen die Ausfallwahrscheinlichkeit. Hier liegt nur noch eine Konvergenz in Verteilung gegen eine Zufallsvariable vor. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Verteilung dieser Zufallsvariable zu bestimmen. Die Tatsache, dass die Ausfallquote nicht gegen einen festen Wert konvergiert, geht daraus hervor, dass die Varianz nicht gegen null konvergiert.
Für die Varianz einer Ausfallquote ergibt sich:

$$Var\left(\hat{p}_r\right) = \frac{p_r\left(1-p_r\right)}{n_r} + \frac{n_r - 1}{n_r} \varrho_{rr}^{def} p_r \left(1-p_r\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Var\left(\hat{p}_r\right) &= Var\left(\frac{1}{n_r}\sum_{i=1}^{n_r} X_{ri}\right) \\
&= \frac{1}{n_r^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n_r} X_{ri}\right) \\
&= \frac{1}{n_r^2}\left(\sum_{i=1}^{n_r} Var\left(X_{ri}\right) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n_r} Kov\left(X_{rj}, X_{rk}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n_r^2}\left(n_r p_r\left(1-p_r\right) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n_r} Kov\left(X_{rj}, X_{rk}\right)\right) \\
&= \frac{p_r\left(1-p_r\right)}{n_r} + \frac{1}{n_r^2}\sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n_r} \varrho_{rr}^{def} p_r\left(1-p_r\right) \\
&= \frac{p_r\left(1-p_r\right)}{n_r} + \frac{1}{n_r^2}\left(n_r^2 - n_r\right)\varrho_{rr}^{def} p_r\left(1-p_r\right) \\
&= \frac{p_r\left(1-p_r\right)}{n_r} + \frac{n_r-1}{n_r}\varrho_{rr}^{def} p_r\left(1-p_r\right)
\end{aligned}$$

□

Als asymptotische Varianz ergibt sich also:

$$\lim_{n_r\to\infty} Var\left(\hat{p}_r\right) = \varrho_{rr}^{def} p_r\left(1-p_r\right)$$

Für $\varrho_r > 0$ ist auch $\varrho_{rr}^{def} > 0$ (siehe 1.1.2 Eigenschaft (iv) beziehungsweise 1.1.2 Eigenschaft (iv)) und damit $\lim_{n_r\to\infty} Var\left(\hat{p}_r\right) > 0$. Hieraus ergibt sich die oben angesprochene Tatsache, dass die Ausfallquote nicht gegen eine Konstante, sondern nur gegen eine nicht-degenerierte Wahrscheinlichkeitsverteilung konvergiert.
Die asymptotische Verteilung einer Ausfallquote ergibt sich folgendermaßen:

Satz 2.2.1 *Die asymptotische Verteilung einer Ausfallquote im Einfaktor-Modell $\hat{p}_r$ ist für $n_r \to \infty$ gegeben durch*

$$\hat{p}_r \xrightarrow{V} g_r\left(Z\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(p_r\right) - \sqrt{\varrho_r}Z}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) \tag{2.1}$$

Beweis: (Setze $X_n \to X$ für $\lim\limits_{n \in I\!N} X_n = X$ mit Wahrscheinlickeit 1 für Zufallsvariable X und $X_1, X_2, X_3 \ldots$)
Definiere $Y_{n_r} := \frac{1}{n_r} \sum\limits_{i=1}^{n_r} X_{ri}$ damit ist

$$Y_{n_r} \xrightarrow{V} g_r(Z) \quad n \to \infty \tag{2.2}$$

äquivalent zu (2.1).
Da die X_{ri} nach Voraussetzung bedingt unabhängig sind -gegeben $Z = z$ gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen:

$$Y_{n_r} \to E\left(X_{ri}|Z = z\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_r) - \sqrt{\varrho_r}z}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) = g_r(z) \quad P_z \;\; f.s. \;\; \text{für alle } z \tag{2.3}$$

wobei:

$$P_z := P(\cdot|Z = z)$$

Um die Behauptung (2.2) nachzuweisen ist nach Bemerkung(A.0.8)

$$E\left(f\left(Y_{n_r}\right)\right) \to E\left(f\left(g_r(Z)\right)\right) \tag{2.4}$$

für alle stetigen, beschränkten Funktionen f zu zeigen.

Da f stetig und beschränkt ist folgt aus (2.3)

$$f\left(Y_{n_r}\right) \to f\left(g_r(z)\right) \quad P_z \;\; f.s. \;\; \text{für alle } z \tag{2.5}$$

Damit gilt nach dem Satz von Lesbesgue (Satz(A.0.7)) :

$$E\left(f\left(Y_{n_r}\right)|Z = z\right) \to E\left(f\left(g_r(Z)\right)|Z = z\right) \quad \text{für alle } z \tag{2.6}$$

Hieraus folgt direkt

$$E\left(f\left(Y_{n_r}\right)|Z\right) \to E\left(f\left(g_r(Z)\right)|Z\right) \tag{2.7}$$

Erneut mit dem Satz von Lesbesgue folgt nun:

$$E\left(E\left(f\left(Y_{n_r}\right)|Z\right)\right) \to E\left(E\left(f\left(g_r(Z)\right)|Z\right)\right) \tag{2.8}$$

Mit den Eigenschaften des Erwartungswertes folgt hieraus:

$$E\left(f\left(Y_{n_r}\right)\right) \to E\left(f\left(g_r(Z)\right)\right) \tag{2.9}$$

Das ist Bedingung (2.4) und somit ist die Behauptung bewiesen.

□

Obige Aussagen lassen sich auch auf das Mehrfaktor-Modell übertragen. Hier gilt für die Varianz einer Ausfallquote:

$$Var\left(\hat{p}_r\right) = \frac{p_r\left(1-p_r\right)}{n_r} + \rho_{rr}^{def} p_r \left(1-p_r\right)$$

Bei einer Assetkorrelation ρ_{rr} innerhalb eines Teilportfolios bzw. einer Ratingklasse größer als null konvergiert die Varianz der Ausfallquote für eine wachsende Anzahl von Krediten auch in diesem Fall nicht gegen null. Die Ausfallquote konvergiert also nicht gegen einen festen Wert, so das sie auch in diesem Fall nicht als Schätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeit verwendet werden kann.

Satz 2.2.2 *Für die Ausfallquote eines Teilportfolios bzw. einer Ratingklasse im Mehrfaktor-Modell gilt:*

$$\hat{p}_r \xrightarrow{V} g_r\left(Z\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(p_r\right) - \omega_r^T Z}{\xi_r}\right)$$

Beweis: Der Beweis gilt analog zum vorherigen Satz auch für einen mehrdimensionalen Zufallsvektor Z

□

Die Bezeichnung $g_r\left(Z\right)$ wird im Folgenden sowohl für das Mehrfaktor- als auch für das Einfaktor-Modell verwendet. Es wird jeweils erwähnt, welcher Fall gerade behandelt wird.
Als Ergebnis der Untersuchungen in diesem Kapitel lässt sich also feststellen, dass die asymptotische Verteilung der Ausfallquote durch eine Funktion der makroökonomischen Variable Z dargestellt werden kann, und sonst nur noch von der Assetkorrelation innerhalb des betreffenden Teilportfolios abhängt.

Kapitel 3

Test einer Ausfallwahrscheinlichkeit

In diesem Kapitel wird ein Test[1] basierend auf der asymptotischen Verteilung der Ausfallquote in einem (vereinfachten) CreditMetrics Modell vorgestellt.
Wie bereits erwähnt ist es nicht möglich die Verteilung der Ausfallquote oder der Verluste eines CreditMetrics Modells analytisch zu bestimmen. Somit steht für einen Test auch keine adäquate Teststatistik zur Verfügung. Eine naheliegende Möglichkeit dieses Problem zu lösen ist, die Verteilung einer geeigneten Teststatistik durch Simulationen zu erhalten. Bei einer grossen Anzahl von Simulationen ist es zumindest theoretisch möglich, die gewünschte Verteilung beliebig genau zu approximieren. Gegen dieses Vorgehen spricht jedoch neben dem enormen Rechenaufwand auch die Tatsache, das eine aus einer Simulation gewonnene Verteilung nur für eine spezifische Wahl der Parameter Assetkorrelation und Ausfallwahrscheinlichkeit Gültigkeit besitzt. Ändern sich die Schätzungen für diese Parameter ist es notwendig, durch eine neue Simulation die entsprechende Verteilung zu erhalten. Eine rechnerische Transformation der „alten"Verteilung ist nicht möglich. Insgesamt ist ein Test basierend auf simulierten Verteilungen in der Praxis also sehr unbefriedigend. Abhilfe schafft hier die im vorhergehenden Kapitel hergeleitete asymptotische Verteilung, hier ist es möglich einen Test zu konstruieren der klare Entscheidungsregeln für jede Wahl der Parameter bietet, ohne auf Simulationen zurückgreifen zu müssen. Im folgenden bezeichne $\hat{p}_r$ die Ausfallquote in der Periode, für die die Prognose aufgrund des zu testenden Kreditrisikomodells erstellt wurde. Die prognostizierte Ausfallwahrscheinlichkeit wird mit π_r bezeichnet, p_r ist die unbekannte, wahre zugrundeliegende Ausfallwahrscheinlichkeit. Desweiteren wird von abhängigen Krediten ausgegangen, es gilt also $\varrho_r > 0$ im Einfaktor-Modell, bzw. $\omega_r \neq 0$, wobei 0 den Nullvektor bezeichnet, im Mehrfaktormodell.

[1] Dieser Test wird von Stefan Huschens in „Backtesting von Ausfallwahrscheinlichkeiten"vorgeschlagen

3.1 Grundlagen der Testtheorie

Die grundsätzliche Aufgabe eines statistischen Tests ist es, zu entscheiden, ob die Verteilung F der vorliegenden Daten einer vorgegebenen Menge von Verteilungen angehört. Für diese Arbeit wird diese Fragestellung insofern eingeschränkt, als das die Form der Verteilung nicht infrage gestellt wird, da die grundsätzliche Form des CreditMetrics Modells akzeptiert wird. Die Aufgabe der hier vorgestellten Tests ist es, zu entscheiden, ob der Parameter Ausfallwahrscheinlichkeit „richtig“gewählt wurde. Der Parameterraum, die Menge aus der der gesuchte bzw. zu testende Parameter prinzipiell stammen kann, wird im Folgenden mit Θ bezeichnet. Da der untersuchte Parameter eine Ausfallwahrscheinlichkeit ist, gilt:

$$\Theta = [0, 1] \tag{3.1}$$

Getestet werden soll nun, ob der getestete Parameter in einer bestimmten Teilmenge $\mathcal{H}_0$ (Nullhypothese) von Θ liegt. Das Komplement von $\mathcal{H}_0$ in Θ wird mit $\mathcal{H}_1$ (Alternativhypothese) bezeichnet, es gilt also:

$$\Theta = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \tag{3.2}$$

Untersucht wird diese Fragestellung anhand einer Teststatistik T deren Verteilung F_θ von dem zu testenden Parameter abhängt und für jedes θ aus Θ bestimmt werden kann. Mit Ξ wird der Bildbereich der Teststatistik bezeichnet. Für den Test auf Basis von $\hat{p}_r$ gilt also:

$$\Xi = [0, 1] \tag{3.3}$$

Im nächsten Schritt wird Ξ disjunkt in einen Akzeptanzbereich A und einen Ablehnbereich (bzw. kritischen Bereich) K zerlegt. Unter diesen Voraussetzungen kann nun ein Test formal definiert werden.

Definition 3.1.1 (nicht randomisierter statistischer Test) *Ein nicht randomisierter statistischer Test mit einer Teststatistik T ist eine Abbildung* $\varphi: \ \Xi \to \{0, 1\}$ *mit*

$$\varphi \ = \ \begin{cases} 1 & falls \quad T \in K \\ 0 & falls \quad T \in A \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $\varphi(x) = 1$ *die Ablehnung der Hypothese* $\theta \in \mathcal{H}_0$*, während* $\varphi(x) = 0$ *zu einer Nicht-Ablehnung führt.*

Im folgenden ist wenn von einem Test die Rede ist, immer ein nicht randomisierter Test gemeint. Liegt die Realisation $T(x)$ der Teststatistik T also in K gilt $\varphi(T(x)) = 1$ und die Hypothese wird abgelehnt. Anschließend an diese Definition wird nun die Gütefunktion eingeführt.

Definition 3.1.2 (Gütefunktion) *Die Gütefunktion eines statistischen Tests ist eine Abbildung* $G: \quad \Theta \to [0,1]$ *mit*

$$G(\theta) = P\left(T \in K|\theta\right) = P\left(\varphi = 1|\theta\right)$$

Die Bezeichnung $P\left(T \in \cdot|\theta\right)$ *bedeutet hierbei, dass* θ *der wahre Parameter aus* Θ *ist, der den untersuchten Daten zugrunde liegt. Im folgenden wird für diesen Sachverhalt auch die Bezeichnung* $P_\theta\left(\cdot\right)$ *verwendet, wenn nur ein Parameter betrachtet wird. Soll der Parameter nicht näher spezifiziert werden, sondern lediglich aus* $\mathcal{H}_0$ *bzw.* $\mathcal{H}_1$ *stammen wird die Bezeichnung* $P\left(\cdot|\mathcal{H}_0\right)$ *bzw.* $P\left(\cdot|\mathcal{H}_1\right)$ *verwendet.*

Die Gütefunktion gibt also an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese $\theta \in \mathcal{H}_0$ abgelehnt wird, wenn θ der wahre den Daten zugrunde liegende Parameter ist. Diese Wahrscheinlichkeit sollte, falls tatsächlich gilt $\theta \in \mathcal{H}_0$ möglichst klein sein. Hierfür werden die Begriffe Umfang und Niveau eines Tests eingeführt.

Definition 3.1.3 (Umfang und Niveau eines Tests) *Ein Test mit einer Gütefunktion* G *einer Nullhypothese* $\mathcal{H}_0$ *gegen eine Alternativhypothese* $\mathcal{H}_1$ *hat das Niveau* α *falls*

$$G\left(\theta\right) \leq \alpha \quad \text{für alle } \theta \in \mathcal{H}_0$$

der Test hat den Umfang α *falls er ein Niveau von* α *hat und ein* $\theta^* \in \mathcal{H}_0$ *existiert, so dass:*

$$G\left(\theta^*\right) = \alpha$$

Umfang und Niveau eines Tests beziehen sich auf den Fehler 1.Art, ein richtiges Modell abzulehnen. Mit dem Begriff der Unverfälschtheit wird nun der Blick auf den Fehler 2.Art, ein nicht adäquates Modell zu akzeptieren, gelenkt.

Definition 3.1.4 (unverfälscht) *Ein Test mit Gütefunktion* G *sowie dem Umfang* α *heißt unverfälscht falls*

$$G\left(\theta\right) \geq \alpha \quad \text{für alle } \theta \in \mathcal{H}_1$$

Ein unverfälschter Test mit dem Niveau α lehnt ein nicht adäquates Modell also mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens α ab. Der Fehler 2.Art ist folglich durch $1-\alpha$ beschränkt. Dies stellt eine Mindestanforderung dar, die ein statistischer Test erfüllen sollte.

3.2 Testen im Einfaktor-Modell

3.2.1 Einseitiger Test

An dieser Stelle wird der Standpunkt der Bankenaufsicht eingenommen. Aus dieser Sicht ist insbesondere sicherzustellen, dass es zu keiner Unterschätzung des Risikos durch das Kreditinstitut kommt. Der Fokus des Testverfahrens liegt also auf einer zu niedrig angesetzten Ausfallwahrscheinlichkeit π_r. Geeignete Hypothesen für diesen Test sind also:

$$\mathcal{H}_0 : \; p_r = \pi_r \quad \textit{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \; p_r > \pi_r \tag{3.4}$$

Der Test sollte aus den oben aufgeführten Gründen nach Möglichkeit nicht auf einer durch Simulation erzeugten Teststatistik beruhen. Als Alternative bietet sich die asymptotische Verteilung der Ausfallquote an, die, wie gezeigt, analytisch berechnet werden kann. Hier stellt sich allerdings die Frage, wie groß ein (Teil)portfolio sein muss, um den Einsatz von asymptotischen Verteilungen zu rechtfertigen. Im fünften Kapitel wird diese Frage eingehend untersucht.
Ein auf dieser Verteilung der Ausfallquote basierender Test stellt die Frage, wie wahrscheinlich das Eintreten der realisierten Ausfallquote bei Gültigkeit von $\mathcal{H}_0$ ist. Um Ablehnbereiche bei gegebenen Signifikanzniveau für den Fehler 1.Art, $\mathcal{H}_0$ abzulehnen obwohl $p_r \leq \pi_r$ gilt, festzulegen, ist eine Berechnung der Verteilungsfunktion F_r von $g_r(Z)$ erforderlich. Es gilt:

$$F_r(x) := P\left(g_r(Z) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_r}\,\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) \tag{3.5}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
F_r(x) &= P\left(g_r(Z) \leq x\right) \\
&= P\left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_r) - \sqrt{\varrho_r}Z}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) \leq x\right) \\
&= P\left(\frac{\Phi^{-1}(p_r) - \sqrt{\varrho_r}Z}{\sqrt{1-\varrho_r}} \leq \Phi^{-1}(x)\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{\Phi^{-1}(p_r) - \Phi^{-1}(x)\sqrt{1-\varrho_r}}{\sqrt{\varrho_r}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{\sqrt{1-\varrho_r}\,\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_r}\,\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{\varrho_r}}\right)
\end{aligned}$$

□

Sei α der vorgegebene Fehler 1.Art, dass heißt die Wahrscheinlichkeit mit der das Modell abgelehnt wird obwohl $\mathcal{H}_0$ gilt. Das Modell wir abgelehnt, wenn die realisierte Ausfallquote in einen kritischen Bereich (Ablehnbereich) K_α fällt. Für diesen Bereich muss gelten:

$$P\left(\hat{p}_r \in K_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \tag{3.6}$$

Da aus bekannten Gründen hier mit asymptotischen Verteilungen gearbeitet wird, muss diese Bedingung geeignet modifiziert werden:

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(\hat{p}_r \in K_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \tag{3.7}$$

Getestet wird, ob die geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit π_r kleiner oder gleich der tatsächlichen Ausfallwahrscheinlichkeit p_r ist. Eine geringe Ausfallquote führt also zur Akzeptanz der Hypothese $\mathcal{H}_0$. Deswegen wird nur eine untere Grenze κ_α für einen Ablehnbereich gesucht, für die gilt:

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(\hat{p}_r > \kappa_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \tag{3.8}$$

Die Berechnung von κ_α erfolgt mit der in (3.5) berechneten Verteilungsfunktion F_r.

$$\begin{aligned}
\lim_{n_r \to \infty} P\left(\hat{p}_r > \kappa_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad F_r\left(\kappa_\alpha\right) = 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_r}\,\Phi^{-1}\left(\kappa_\alpha\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) = 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-\varrho_r}\,\Phi^{-1}\left(\kappa_\alpha\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}} = \Phi^{-1}\left(1 - \alpha\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \kappa_\alpha = \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}\,\Phi^{-1}\left(1-\alpha\right) + \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right)
\end{aligned}$$

Der kritische Bereich

$$K_\alpha := \left(\kappa_\alpha, \infty\right) \tag{3.9}$$

erfüllt offensichtlich Bedingung (3.7).
Die Durchführung dieses Tests macht die Berechnung von κ_α erforderlich. Wünschenswert ist eine Teststatistik die einer Verteilung folgt, für die zum Beispiel Quantiltabellen existieren, um den Rechenaufwand so gering wie möglich zu halten. Aus diesem Grund wird nun ein äquivalenter Test vorgestellt, der auf einer asymptotisch $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilten Teststatistik basiert. Hierfür definiere:

$$W_r := \frac{\sqrt{1-\varrho_r}\,\Phi^{-1}\left(\hat{p}_r\right) - \Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}}$$

Mit dieser Definition gilt:

$$W_r \xrightarrow{V} \mathcal{N}_{(0,1)}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n_r \to \infty} P\left(W_r \leq x\right) &= \lim_{n_r \to \infty} P\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_r}\Phi^{-1}\left(\hat{p}_r\right) - \Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}} \leq x\right) \\
&= \lim_{n_r \to \infty} P\left(\hat{p}_r \leq \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}x + \Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right)\right) \\
&= F_r\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}x + \Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_r}\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}x+\Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right)\right) - \Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_r}\frac{\sqrt{\varrho_r}x+\Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}} - \Phi^{-1}\left(p_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) \\
&= \Phi\left(x\right)
\end{aligned}$$

□

Basierend auf W_r wird nun eine Teststatistik T_r folgendermaßen definiert:

$$T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) := \frac{\sqrt{1-\varrho_r}\Phi^{-1}\left(\hat{p}_r\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}} \tag{3.10}$$

Unter der Hypothese $\mathcal{H}_0$, also $p_r = \pi_r$, gilt $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) = W_r$. Unter $\mathcal{H}_0$ ist $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$ also insbesondere asymptotisch standardnormalverteilt und es gilt:

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) > \Phi^{-1}\left(1-\alpha\right)\right) = \alpha \tag{3.11}$$

Das Kreditrisikomodell wird als nicht adäquat abgelehnt, falls die Prüfgröße $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$ in $\hat{K}_\alpha$ liegt. Aus (3.11) folgt, das die Teststatistik $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$ zusammen mit dem Ablehnbereich

$$\hat{K}_\alpha := \left(\Phi^{-1}\left(1-\alpha\right), \infty\right) \tag{3.12}$$

wieder einen Test mit einem Fehler 1.Art von α definiert.

Der erste, auf der Teststatistik $\hat{p}_r$ beruhende Tests ist intuitiv naheliegend, da das Modell direkt an einer realisierten Größe, nämlich der realisierten Ausfallquote getestet wird. Der zweite Test macht einen Umweg über die Teststatistik $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$, wird hierdurch aber einfacher zu analysieren. Beide Tests sind aber äquivalent, so dass es im Folgenden keine Rolle spielt, welcher Test betrachtet wird. Eigenschaften die für einen nachgewiesen werden gelten analog auch für den jeweils anderen Test. Zwei Tests sind in diesem Zusammenhang äquivalent, wenn der erste Test bei einer realisierten Ausfallquote genau dann das Modell ablehnt (bzw. akzeptiert), wenn der zweite Test bei Vorliegen derselben Ausfallquote das Modell ablehnt (bzw. akzeptiert). Um die Äquivalenz der Tests zu zeigen, ist also zu beweisen:

$$\hat{p}_r \in K_\alpha \Leftrightarrow T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) \in \hat{K}_\alpha \tag{3.13}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) \in \hat{K}_\alpha \quad & \Leftrightarrow \quad T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) > \Phi^{-1}\left(1-\alpha\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-\varrho_r}\Phi^{-1}\left(\hat{p}_r\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}} > \Phi^{-1}\left(1-\alpha\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \Phi^{-1}\left(\hat{p}_r\right) > \frac{\sqrt{\varrho_r}\Phi^{-1}\left(1-\alpha\right) + \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}} \\
& \Leftrightarrow \quad \hat{p}_r > \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}\Phi^{-1}\left(1-\alpha\right) + \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) = \kappa_\alpha \\
& \Leftrightarrow \quad \hat{p}_r \in K_\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Bei der Verwendung der Teststatistik $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$ stellt sich jedoch dass Problem, das sie für eine Ausfallquote von 0 nicht definiert ist, beziehungsweise $-\infty$ wird. Für die Praxis ist dieses Problem jedoch weniger relevant, da bei einer Ausfallquote von 0 sowiso kein Test durchgeführt werden muss, da das Modell von vornherein akzeptiert wird.

3.2.2 Zweiseitiger Test

Die bisher vorgestellten Tests dienten dazu, eine Unterschätzung des Risikos durch eine zu niedrig angesetzte Ausfallwahrscheinlichkeit π_r aufzudecken. Eine Überschätzung des Risikos, also ein zu großes π_r lag nicht im Blickfeld. Für die Zwecke der Bankenaufsicht sind solche Tests ausreichend, da ihre Aufgabe darin besteht, das Risiko im Bankensektor in Grenzen zu halten. Aus der Sicht des einzelnen Kreditinstitutes ist es aber auch wichtig das Risiko nicht zu überschätzen, da aufgrund der Ergebnisse der Bewertung durch das Kreditrisikomodell Eigenmittelrücklagen bestimmt werden. Diese hängen wesentlich vom Risiko des betrachteten Kredites oder Portfolios ab. Setzt das Kreditinstitut also eine zu hohe Ausfallwahrscheinlichkeit an, werden systematisch unnötige Eigenmittelrücklagen gebildet. Diese stehen dann nicht mehr für andere Geschäfte zur Verfügung, der Gewinn wird also geschmälert. Für einen intern von der Bank verwendeten Test gilt also die Anforderung an ein Kreditrisikomodell, sowohl auf Unterschätzung als auch auf Überschätzung des Risikos in den einzelnen Teilportfolios bzw. Ratingklassen zu prüfen. Zu diesem Zweck werden die Hypothesen auf denen der Test beruht wie folgt modifiziert:

$$\mathcal{H}_0:\ p_r = \pi_r \quad \textit{gegen} \quad \mathcal{H}_1:\ p_r \neq \pi_r \tag{3.14}$$

Für einen Test dieser Hypothesen können dieselben Teststatistiken wie für den einseitigen Test verwendet werden, allerdings müssen die Ablehnbereiche geeignet angepasst werden. Ziel ist es, wieder einen Test mit einem Fehler 1.Art kleiner oder gleich einem vorgegebenen Wert α zu konstruieren.
Wird der Ablehnbereich $\hat{K}_\alpha$ für den zweiseitigen Test basierend auf der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ folgendermaßen gewählt, ist asymptotisch ein Fehler 1.Art von α gewährleistet.

$$\hat{K}_\alpha = \left(-\infty, \Phi^{-1}(\alpha/2)\right] \cup \left(\Phi^{-1}(1-\alpha/2,)\,\infty\right) \tag{3.15}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n_r\to\infty} P\left(T_r(\hat{p}_r,\pi_r) \in \hat{K}_\alpha|\mathcal{H}_0\right) &= \lim_{n_r\to\infty} P\left(T_r(\hat{p}_r,\pi_r) \leq \Phi^{-1}(\alpha/2)\,|\mathcal{H}_0\right) \\
&\quad + \lim_{n_r\to\infty} P\left(T_r(\hat{p}_r,\pi_r) > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\,|\mathcal{H}_0\right) \\
&= \lim_{n_r\to\infty} P\left(T_r(\hat{p}_r,\pi_r) \leq \Phi^{-1}(\alpha/2)\,|\mathcal{H}_0\right) \\
&\quad + 1 - \lim_{n_r\to\infty} P\left(T_r(\hat{p}_r,\pi_r) \leq \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\,|\mathcal{H}_0\right) \\
&= \alpha/2 + 1 - (1-\alpha/2) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Wird dieser Test auf Basis der Teststatistik $\hat{p}_r$ durchgeführt erhält man den äquivalenten Ablehnbereich

$$K_\alpha = \left[0, \kappa_{\alpha/2}(\pi_r, \varrho_r)\right] \cup \left(\kappa_{1-\alpha/2}(\pi_r, \varrho_r), 1\right] \tag{3.16}$$

mit der Bezeichnung

$$\kappa_\alpha(\pi_r, \varrho_r) := \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\pi_r) + \sqrt{\varrho_r}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) \tag{3.17}$$

Die Äquivalenz der beiden zweiseitigen Tests mit den Teststatistiken $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ und $\hat{p}_r$ mit den jeweiligen Ablehnbereichen gilt analog zu den einseitigen Tests.
Der zweiseitige Test verursacht jedoch ein Problem, das beim einseitigen Test so nicht auftritt. Die nicht asymptotische Verteilung der Ausfallquote ist eine diskrete Verteilung, die Ausfallquote kann bei einer Teilportfoliogrösse von n_r nur die Werte $0, \frac{1}{n_r}, \frac{2}{n_r} \ldots \frac{n_r}{n_r} = 1$ annehmen, und dabei hat jeder dieser Werte eine Wahrscheinlichkeit größer als null. Die asymptotische Verteilung der Ausfallquote ist jedoch kontinuierlich, das bedeutet insbesondere, dass gilt

$$P(g_r(Z) = 0) = 0$$

für jede Ausfallwahrscheinlichkeit p_r. Der zweiseitige Test basierend auf der asymptotischen Verteilung der Ausfallquote wird also jedes Modell ablehnen, wenn eine

Ausfallquote von null realisiert wurde, also kein Kredit ausgefallen ist. Dies wird jedoch insbesondere in den besseren Ratingklassen häufig der Fall sein. Tritt der Fall ein, dass kein Kredit im Teilportfolio ausgefallen ist, ist es nicht möglich aufgrund des zweiseitigen Tests eine Aussage zu treffen. Für schlechtere Ratingklassen, wo im allgemeinen in jeder Periode Kreditausfälle zu beobachten sind, ist der Test jedoch aussagekräftig.
Dieses Problem beim zweiseitigen Testen tritt jedoch nicht nur beim asymptotischen Test auf. Wird ein Test basierend auf einer diskreten Teststatistik durchgeführt, und ist hierbei die Wahrscheinlichkeit unter $\mathcal{H}_0$ eine Ausfallquote von 0 zu beobachten größer als $\alpha/2$ kann auch in diesem Fall kein aussagekräftiger zweiseitiger Test konstruiert werden. Eine Lösung dieses problems kann darin bestehen, anhand mehrerer in der Vergangenheit realisierter Ausfallquoten zu testen. Hierfür muss jedoch ein völlig neuer Test konstruiert werden.
Die folgende Tabelle, entnommen aus [1] zeigt die Ablehnbereiche in Bezug auf die Teststatistik $\hat{p}_r$ für verschiedene Konstellationen für diesen zweiseitigen Test. Hierbei wird einmal ein Test mit einem Fehler 1.Art von 5% und von 1% betrachtet.

ϱ_r	π_r	ϱ_{rr}^{def}	Akzeptanzbereich $\alpha = 5\%$	Akzeptanzbereich $\alpha = 1\%$
	0.1%	0.01%	$(0.05\%, 0.18\%]$	$(0.04\%, 0.22\%]$
1%	1%	0.07%	$(0.56\%, 1.61\%]$	$(0.47\%, 1.88\%]$
	10%	0.35%	$(6.88\%, 13.76\%]$	$(6.09\%, 15.17\%]$
	0.1%	0.07%	$(0.015\%, 0.33\%]$	$(0.008\%, 0.9\%]$
5%	1%	0.41%	$(0.228\%, 2.64\%]$	$(0.145\%, 3.63\%]$
	10%	1.78%	$(3.88\%, 19.34\%]$	$(2.83\%, 23.45\%]$
	0.1%	0.18%	$(0.005\%, 0.46\%]$	$(0.002\%, 0.82\%]$
10%	1%	0.94%	$(0.095\%, 3.60\%]$	$(0.05\%, 5.55\%]$
	10%	3.71%	$(2.25\%, 24, 27\%]$	$(1.36\%, 31.13\%]$
	0.1%	0.59%	$(0.0005\%, 0.67\%]$	$(0.0001\%, 1.51\%]$
20%	1%	2.41%	$(0.017\%, 5.25\%]$	$(0.005\%, 9.46\%]$
	10%	8.00%	$(0.79\%, 32.53\%]$	$(0.33\%, 44.24\%]$

Tabelle 3.1: Akzeptazbereiche des zweiseitigen Tests

3.3 Testen im Mehrfaktor-Modell

In diesem Abschnitt wird vergleichbar zum Einfaktor-Modell ein einseitiger und ein zweiseitiger Test für das Mehrfaktor-Modell konstruiert. Wegen Satz(2.2.2) können auch in diesem Fall für die Tests asymptotische Verteilungen verwendet werden, so dass auf Simulationen zur Erzeugung der Teststatistiken verzichtet werden kann.

3.3.1 Einseitiger Test

Die Hypothesen die dem Test zu Grunde liegen sind die gleichen wie im Einfaktor-Modell:

$$\mathcal{H}_0 : \ p_r = \pi_r \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 : \ p_r > \pi_r \tag{3.18}$$

Zur Bestimmung der Testzonen ist es wieder notwendig die asymptotische Verteilungsfunktion F_r der Ausfallquote des r-ten Teilportfolios bzw. der r-ten Ratingklasse zu bestimmen. Es gilt:

$$F_r(x) = \Phi\left(\frac{\xi_r \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \tag{3.19}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} F_r(x) &= P\left(g_r(Z) \le x\right) \\ &= P\left(\frac{\Phi^{-1}(p_r) - \omega_r^T Z}{\xi_r} \le x\right) \\ &= P\left(-\omega_r^T Z \le \xi_r \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)\right) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist Z $N^d_{(0,\Omega)}$-verteilt. Nach Satz(A.0.5)[2] gilt also:

$$-\omega_r^T Z \sim \mathcal{N}_{(0,-\omega_r^T\Omega(-\omega_r))} = \mathcal{N}_{(0,\omega_r^T\Omega\omega_r)}$$

mit $\xi_r = \sqrt{1-\omega_r^T\Omega\omega_r}$ folgt:

$$-\omega_r^T Z \sim \mathcal{N}_{(0,1-\xi_r^2)}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} P\left(g_r(Z) \le x\right) &= P\left(-\omega_r^T Z \le \xi_r \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\xi_r \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \end{aligned}$$

$\square$

Auf Basis dieser Verteilungsfunktion kann nun der Ablehnbereich für einen Test zum Niveau α basierend auf $\hat{p}_r$ festgelegt werden. Für den einseitigen Test wird wieder eine untere Grenze κ_α für den Ablehnbereich gesucht, so dass gilt:

$$\lim_{n_r\to\infty} P\left(\hat{p}_r > \kappa_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \tag{3.20}$$

[2] siehe Anhang

Der kritische Wert

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{1-\xi_r^2}+\Phi^{-1}(p_r)}{\xi_r}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\rho_r}+\Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\rho_r}}\right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

erfüllt diese Bedingung.
Beweis:

$$\begin{aligned}\lim_{n_r\to\infty} P(\hat{p}_r > \kappa_\alpha|\mathcal{H}_0) &= 1-\lim_{n_r\to\infty} P(\hat{p}_r \leq \kappa_\alpha|\mathcal{H}_0)\\ &= 1-F_r(\kappa_\alpha)\\ &= 1-(1-\alpha)\\ &= \alpha\end{aligned}$$

□

Mit dem Ablehnbereich

$$K_\alpha = (\kappa_\alpha, \infty) \tag{3.22}$$

erhält man also auch für das Mehrfaktor-Modell einen Test mit einem Fehler 1.Art von α, der auf einer nicht simulierten Verteilung beruht. In der im fünften Kapitel folgenden Simulationsstudie ist allerdings auch hier noch zu untersuchen, wieviele Kredite mindestens im Teilportfolio sein müssen, damit es zu rechtfertigen ist, einen auf einer asymptotischen Verteilung beruhenden Test durchzuführen.
Analog zum Einfaktor-Modell läßt sich auch im Mehrfaktor-Modell eine Teststatistik erzeugen, die asymptotisch $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilt ist. Hierzu definiere:

$$\tilde{W}_r := \frac{\xi_r\Phi^{-1}(\hat{p}_r)-\Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}} \tag{3.23}$$

$\tilde{W}_r$ ist asymptotisch $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilt (Beweis siehe Anhang: Beweis(A.0.9)). Die Teststatistik

$$\tilde{T}_r(\hat{p}_r,\pi_r) := \frac{\xi_r\Phi^{-1}(\hat{p}_r)-\Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}} \tag{3.24}$$

ist somit unter der Hypothese $\mathcal{H}_0: \ p_r = \pi_r$ asymptotisch Standardnormalverteilt und ein Test mit einem Fehler 1.Art von α basierend auf $\tilde{T}_r(\hat{p}_r,\pi_r)$ kann genauso wie im Einfaktor-Modell mit der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r,\pi_r)$ durchgeführt werden. Dieser Test ist im Mehrfaktor-Modell ebenfalls äquivalent zu dem oben beschriebenen Test mit der Teststatistik $\hat{p}_r$.

3.3.2 Zweiseitiger Test

Da es auch im Mehrfaktor-Modell möglich ist, die Ausfallquote $\hat{p}_r$ eines Teilportfolios in eine $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Grösse zu transformieren, wird an dieser Stelle darauf verzichtet einen neuen Test wie im vorhergehenden Abschnitt zu konstruiren. Der zweiseitige Test des Einfaktor-Modells wurde basierend auf der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ durchgeführt. Dieser Test lässt sich vollständig auf die Teststatistik $\tilde{T}_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ übertragen[3] da diese ebenfalls $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilt ist. Dass heißt, eine Ablehnung mit einem Signifikanzniveau für den Fehler 1.Art von α erfolgt falls gilt:

$$\tilde{T}_r(\hat{p}_r, \pi_r) \in \hat{K}_\alpha = \left(-\infty, \Phi^{-1}(\alpha/2)\right] \cup \left(\Phi^{-1}(1-\alpha/2,)\,\infty\right) \tag{3.25}$$

Dieser Test ist äquivalent zu einem Test mit der Testgrösse $\hat{p}_r$ und dem Ablehnbereich

$$K_\alpha = \left[0, \kappa_{\alpha/2}(\pi_r, \varrho_r)\right] \cup \left(\kappa_{1-\alpha/2}(\pi_r, \varrho_r), 1\right] \tag{3.26}$$

Wobei diesmal folgende Bezeichnungen gelten:

$$\kappa_\alpha(\pi_r, \varrho_r) := \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{1-\xi_r^2} + \Phi^{-1}(\pi_r)}{\xi_r}\right) \tag{3.27}$$

Wie zu Beginn bereits erwähnt stellt das Einfaktor-Modell nur einen Spezialfall des Mehrfaktor-Modells dar. Wählt man im Mehrfaktormodell Z eindimensional und $\omega_r = \sqrt{\varrho_r}$ sowie $\xi_r = \sqrt{1-\varrho_r}$ erhält man das Einfaktor-Modell. Mit dieser Parameterwahl sind die Tests aus Abschnitt(3.3) identisch mit den Tests aus Abschnitt(3.2) In die Berechnung des Ablehnbereiches K_α gehen jedoch sowohl beim einseitigen als auch beim zweiseitigen Test nur die Assetkorrelation innerhalb eines Portfolios ϱ_r bzw. ρ_r, die geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit π_r sowie das Testniveau α ein. Die genaue Wahl von ω_r und Z, einschließlich der Dimension von Z, haben keinen direkten Einfluß auf den Ablehnbereich. Für den Test sind also keine genauen Informationen über diese Parameter erforderlich, solange die Assetkorrelation bekannt ist. Dies bedeutet insbesondere, dass für ein Teilportfolio im Mehrfaktor-Modell sowie ein Teilportfolio im Einfaktor-Modell bei gleicher Assetkorrellation für einen Test mit Niveau α auf Basis der Ausfallquote die exakt identischen Ablehnbereiche verwendet werden.
Für einen in der Praxis durchgeführten Test bedeutet dies, dass für den Test Informationen über die exakte Modellierung nicht notwendig sind, solange die oben aufgeführten Parameter bekannt sind. Diese Parameter werden aber im Allgemeinen unabhängig vom jeweiligen Kreditrisikomodell geschätzt. Für praktische Berechnungen kann man sich also weitestgehend auf das einfacher zu handhabende Einfaktor-Modell beschränken, was die in dieser Arbeit vorgenommene seperate Betrachtung rechtfertigt.

[3] wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, gilt dies natürlich auch für den einseitigen Test

3.4 Analyse der vorgestellten Tests

In diesem Abschnitt erfolgt eine testtheoretische Analyse der Tests im Mehrfaktor-Modell. Eine solche Analyse ist natürlich auch für das Einfaktor-Modell möglich, da dieses aber nur ein Spezialfall des Mehrfaktor-Modells ist, gelten alle Aussagen auch in diesem Fall.

3.4.1 Einseitiger Test

An dieser Stelle wird nun zunächst der einseitige Test auf Basis der Teststatistik $\tilde{T}_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ näher untersucht. Als erstes wird formal gezeigt, dass der vorgeschlagene Test auch als ein Test der Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \; p_r \leq \pi_r \quad \textit{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \; p_r > \pi_r \tag{3.28}$$

aufgefasst werden kann, und auch in diesem Fall asymptotisch ein Niveau von α hat. Hierzu werden die oben formulierten Hypothesen formalisiert. Es gilt: $\mathcal{H}_0 = [0, \pi_r]$, $\mathcal{H}_1 = (\pi_r, 1]$. Um die Behauptung zu zeigen, wird als erstes die asymptotische Gütefunktion[4] des Tests bestimmt.

$$\begin{aligned}
G(p_r) &= \lim_{n_r \to \infty} P\left(\tilde{T}_r(\hat{p}_r, \pi_r) \in K_\alpha | p_r\right) \\
&= \lim_{n_r \to \infty} P\left(\frac{\xi_r \Phi^{-1}(\hat{p}_r) - \Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}} > \Phi^{-1}(1-\alpha) | p_r\right) \\
&= \lim_{n_r \to \infty} P\left(\hat{p}_r > \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r)}{\xi_r}\right) | p_r\right) \\
&= \lim_{n_r \to \infty} P(\hat{p}_r > B | p_r) \\
&= \lim_{n_r \to \infty} (1 - P(\hat{p}_r \leq B) | p_r) \\
&= 1 - P(g_r(Z) \leq B | p_r) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\xi_r \Phi^{-1}(B) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Hierbei ist B wie folgt definiert:

$$B := \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r)}{\xi_r}\right) \tag{3.30}$$

[4]Asymptotisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Verteilung der Teststatistik für unendlich viele Kredite im Portfolio bestimmt wird, die asymptotische Gütefunktion ergibt sich aus der asymptotischen Verteilung der Teststatistik

Um nachzuweisen, dass der Test ein asymptotisches Niveau von α hat, ist zu zeigen:

$$G(p_r) \leq \alpha \quad \text{für alle } p_r \leq \pi_r \tag{3.31}$$

Sei $p_r \leq \pi_r$, dann gilt:

$$\begin{aligned} G(p_r) &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\ &\leq 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Der Ungleichung gilt, da $p_r \leq \pi_r$ und Φ^{-1} eine (streng) monoton steigende Funktion ist.
Hieraus folgt ebenfalls

$$G(\pi_r) = \alpha,$$

und somit ein asymptotischer Umfang von α für diesen Test. Bisher konzentrierte sich die Betrachtung und Analyse der Tests auf den Fehler 1.Art, also ein korrektes Modell abzulehnen. Im Folgenden wird das Augenmerk auf den Fehler 2.Art, ein nicht adäquates Modell zu akzeptieren, gerichtet. Ein Test mit einem geringen Umfang oder Niveau bietet eine hohe Sicherheit dafür, das ein Modell, das abgelehnt wird, auch wirklich nicht adäquat ist. Er läßt keinen Schluß darüber zu, ob ein Modell, das nicht abgelehnt wird, auch wirklich die Anforderungen erfüllt. Eine erste Eigenschaft, die mit dem Blick auf den Fehler 2.Art geprüft werden kann, ist die Unverfälschtheit des Tests.
Die hier vorgestellten einseitigen Tests sind asymptotisch unverfälscht, das heißt es gilt:

$$G(p_r) \geq \alpha \quad \text{für alle } p_r > \pi_r \tag{3.32}$$

Beweis: Es gelte die Alternativhyphothese $\mathcal{H}_1$, also $p_r > \pi_r$, dann folgt:

$$G(p_r) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right)$$

Mit $A := \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(p_r)$ gilt: $A < 0$ da die Alternatinhypothese $\mathcal{H}_1$ gilt.

$$\begin{aligned} &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) + A}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\ &> 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\ &= 1 - (1-\alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

□

Aus der asymptotischen Unverfälschtheit erhält man also, wie bereits erwähnt, eine erste obere Schranke für den Fehler 2.Art von $1-\alpha$. Da α als Fehler 1.Art aber in der Regel sehr klein gewählt wird (0,1%; 1% oder 5%) ist diese Grenze für den Fehler 2.Art so groß, dass sich keine sinnvollen Aussagen daraus ableiten lassen. Ein falsches Modell wird von diesem Test unter Umständen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% oder mehr nicht erkannt. Dies ist aus praktischer Sicht, zum Beispiel für die Bankenaufsicht sehr unbefriedigend, da es auf Grundlage dieses Tests kaum möglich ist, Aussagen darüber zu treffen, ob ein Kreditrisikomodell wirklich adäquat ist.
Aus dem Beweis geht allerdings auch hervor, dass der Fehler 2.Art mit größer werdenden Modellfehler[5] kleiner wird, da A mit größerem Modellfehler wächst.Es stellt sich nun also die Frage, inwieweit sich dieser Test modifizieren lässt, um eine Möglichkeit zu bieten, auch den Fehler 2.Art sinnvoll zu begrenzen. Eine Möglichkeit ist, sich auf Modellfehler zu konzentrieren, die einen bestimmten Wert überschreiten.
Im nächsten Kapitel wird ein Test konstruiert, der solche Modellfehler mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit erkennt.

3.4.2 Zweiseitiger Test

Die formalisierten Hypothesen des zweiseitigen Test lauten:

$$\mathcal{H}_0 = \{\pi_r\} \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 = (-\infty, \pi_r) \cup (\pi_r, \infty) \tag{3.33}$$

Die Nullhypothese besteht also nur aus einem Punkt. Analysiert wird nun der Test basierend auf der Teststatistik $\tilde{T}_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ mit den entsprechenden Ablehnbereichen aus Abschnitt(3.3.2). Für die Gütefunktion gilt:

$$\begin{aligned} G(p_r) &= \lim_{n_r\to\infty} P\left(\tilde{T}_r(\hat{p}_r, \pi_r) \in \hat{K}_\alpha | p_r\right) \\ &= 1 + \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)\sqrt{1-\xi_r^2} + \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\ &\quad -\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)\sqrt{1-\xi_r^2} + \Phi^{-1}(\pi_r) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Hieraus folgt:

$$G(\pi_r) = \alpha \tag{3.35}$$

und somit ein asymptotischer Umfang von α, da die Nullhypothese nur aus einem Punkt besteht.

[5]unter dem Modellfehler wird hier die Abweichung der prognostizierten Ausfallwahrscheinlichkeit π_r von der wahren Ausfallwahrscheinlichkeit p_r verstanden

3.5 Simultaner Test mehrerer Ausfallwahrscheinlichkeiten

In den bisher vorgestellten Tests wurde die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Teilportfolios jeweils isoliert getestet. Es ist auch möglich die Ausfallwahrscheinlichkeiten mehrerer Teilportfolios simultan zu testen.
Im Folgenden werden die Ausfallwahrscheinlichkeiten von R Teilportfolios mit jeweils n_r Krediten simultan getestet, die Hypothesen für den einseitigen Test lauten dann:

$$\mathcal{H}_0 : \; p_1 = \pi_1, \ldots, p_R = \pi_R \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 : \; \exists\, r \in \{1, \ldots, R\} \; mit\, p_r > \pi_r \tag{3.36}$$

Der folgende Test[6] für das Einfaktor-Modell basiert auf einer von $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ abgeleiteten Teststatistik. Hierzu definiere die Teststatistik

$$T_r(\hat{p}_r, \pi_r)_{max} = \max_{r=1,\ldots R} T_r(\hat{p}_r, \pi_r) \tag{3.37}$$

Unter der Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ gilt:

$$T_r(\hat{p}_r, \pi_r)_{max} \sim \mathcal{N}_{(0,1)} \text{ für } n_r \to \infty \text{ für alle } r = 1, \ldots, R \tag{3.38}$$

Beweis: Sei $x \in I\!R$ beliebig, $n_r \to \infty$ für alle $r = 1, \ldots, R$.

$$\begin{aligned}
P\left(T_r(\hat{p}_r, \pi_r)_{max} \leq x | \mathcal{H}_0\right) &= P\left(T_1(\hat{p}_1, \pi_1) \leq x, \ldots, T_R(\hat{p}_R, \pi_R) \leq x \,|\mathcal{H}_0\right) \\
&= P\left(g_1(Z) \leq \Phi\left(\frac{x\sqrt{\varrho_1} + \Phi^{-1}(p_1)}{\sqrt{1-\varrho_1}}\right), \ldots, \right. \\
&\qquad \left. g_R(Z) \leq \Phi\left(\frac{x\sqrt{\varrho_R} + \Phi^{-1}(p_R)}{\sqrt{1-\varrho_R}}\right)\right) \\
&= P(-Z \leq x, \ldots, -Z \leq x) \\
&= P(-Z \leq x) \\
&= P(Z \leq x) \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

□

Ein einseitiger Test zum Niveau α kann also analog zum einseitigen Test einer Ausfallwahrscheinlichkeit durchgeführt werden, indem $\mathcal{H}_0$ abgelehnt wird, falls

$$T_r(\hat{p}_r, \pi_r)_{max} > \Phi^{-1}(1-\alpha) \tag{3.39}$$

Ein simultaner zweiseitiger Test, also ein Test der Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \; p_1 = \pi_1, \ldots, p_R = \pi_R \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 : \; \exists\, r \in \{1, \ldots, R\} \; mit\, p_r \neq \pi_r \tag{3.40}$$

[6] Diese Tests werden von Stefan Huschens in [1] vorgeschlagen

durchgeführt werden. Die Teststatistik

$$T = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} T_r^2 \left(\hat{p}_r, \pi_r\right) \tag{3.41}$$

ist unter $\mathcal{H}_0$ und der zusäztlichen Bedingung $n_r \to \infty$ für $r = 1, \ldots, R$ wegen (3.38) asymptotisch χ^2-verteilt mit einem Freiheitsgrad. Ein Test zum Niveau α kann also durchgeführt werden indem $\mathcal{H}_0$ abgelehnt wird falls T größer als das $1 - \alpha$ Quantil einer χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad wird.

3.6 Binomialtest für unabhängige Kredite

Einen Sonderfall für das Backtesting einer Ausfallwahrscheinlichkeit stellt der Fall von unabhängigen homogenen Krediten in einem Teilportfolio dar. Im Bezug auf die mathematische Behandlung ist dies wie bereits im zweiten Kapitel angesprochen der einfachste Fall, er wird jedoch in den meisten Situationen der Realität nicht gerecht.

Im Fall des CreditMetrics Modells bedeuten unabhängige Kredite im r-ten Teilportfolio $\varrho_r = 0$ im Einfaktor-Modell bzw. $\omega_r = 0$ im Mehrfaktor-Modell. Wird von unabhängigen Krediten ausgegangen spielt die spezielle Modellierung durch ein bestimmtes Kreditrisikomodell für das Backtesting keine Rolle, wenn nur der Zustand Ausfall oder Nicht-Ausfall interessiert und Ratingänderungen ausserhalb der Betrachtung liegen. Sei X_{ri} wiederum die Zufallsvariable die Ausfall bzw. Nicht-Ausfall des i-ten Kredites im Teilportfolio beschreibt.

$$X_{ri} = \begin{cases} 1 & \text{bei} \quad \text{Ausfall des i-ten Kredites} \\ 0 & \text{bei} \quad \text{Nicht-Ausfall des i-ten Kredites} \end{cases} \tag{3.42}$$

Weiterhin sei p_r die homogene Ausfallwahrscheinlichkeit aller Kredite im Teilportfolio. Damit folgt, dass gilt:

$$X_{ri} \sim \mathcal{B}_{(1,p_r)} \;\; iid \quad i = 1, \ldots, n_r \tag{3.43}$$

Diese Verteilung der X_{ri} ist unabhängig von der genauen Modellierung, da eine Verteilung auf $\{0, 1\}$ durch die Wahrscheinlichkeit mit der 1 bzw. 0 auftritt eindeutig bestimmt ist. Im Fall von unabhängigen Krediten gehen auch keine modellspezifischen Abhängigkeitsstrukturen die die gemeinsame Verteilung der X_{ri} beeinflussen in die Berechnungen ein.

Für die Anzahl der Ausfälle A_r im r-ten Teilportfolio gilt also:

$$A_r = \sum_{i=1}^{n_r} X_{ri} \sim \mathcal{B}_{(n_r,p_r)} \tag{3.44}$$

A_r bildet somit auch eine geeignete Teststatistik für den Test der geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeit π_r auf Basis der Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 = [0, \pi_r] \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 = (\pi_r, 1] \tag{3.45}$$

In einem ersten Schritt ist nun ein Ablehnbereich für einen Test mit Niveau α zu konstruieren. Mit dem Ablehnbereich

$$K_\alpha = (\kappa_\alpha, n_r] \tag{3.46}$$

Mit

$$\kappa_\alpha = \arg \max_{i=0\ldots n} \left\{ \sum_{j=0}^{i} \mathcal{B}_{(n_r, pi_r)}(i) \leq 1 - \alpha \right\} \tag{3.47}$$

erhält man einen solchen Test.
Einen zweiseitigen Test zum Niveau α erhält man durch den Ablehnbereich

$$K_\alpha = \left[0, \kappa_{\alpha/2}\right] \cup \left(\kappa_{1-\alpha/2}, n_r\right] \tag{3.48}$$

mit $\kappa_{\alpha/2}$ sowie $\kappa_{1-\alpha/2}$ analog zu (3.5).
Dieser Test wird aktuell beim Backtesting von Marktrisikomodellen eingesetzt. Auch in diesem Fall ist die Annahme von unabhängigen Renditen eines Portfolios über die Zeit nicht unumstritten, in der Praxis hat sich dieser Test jedoch bewährt. Im Fall von Kreditrisikomodellen scheint dieser Test jedoch aus den bereits beschriebenen Gründen nicht adäquat, so dass er in diesem Zusammenhang in der Zukunft keine große Rolle spielen dürfte.

Kapitel 4

Zonenansatz für Kreditrisikomodelle

Ziel ist es, einen Test zu konstruieren, der einen Fehler 1.Art von α einhält und gleichzeitig ein Modell mit einem Modellfehler $p_r - \pi_r$ oberhalb einer vorgegebenen Schranke c mit einer Wahrscheinlichkeit größer oder gleich $1 - \beta$ erkennt. Die Schranke c wird als größer null angenommen, so das dieser Test auch einseitig auf eine Unterschätzung des Risikos testet.

4.1 Zonenansatz im Einfaktor-Modell

4.1.1 Konstruktion des Tests

Der nun vorgestellte Test basiert weiterhin auf der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$, der Ablehnbereich K_α wird so modifiziert, das obige Bedingungen eingehalten werden. Falls $p_r - \pi_r \geq c$ gilt, soll die Teststatistik mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \beta$ im Ablehnbereich $K_{\alpha,\beta}$ liegen. Im Grenzfall $p_r - \pi_r = c$ soll die Ablehnwahrscheinlichkeit genau $1 - \beta$ betragen, also

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) > \tau_\beta | p_r - \pi_r = c\right) = 1 - \beta \tag{4.1}$$

wobei τ_β die untere Grenze des Ablehnbereichs bezeichnet. Erfüllt τ_β (5.1) gilt automatisch auch:

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) > \tau_\beta | p_r - \pi_r \geq c\right) \geq 1 - \beta \tag{4.2}$$

Beweis: Folgt direkt aus dem Beweis von (3.32), da A umso größer wird, je größer die Abweichung der wahren Ausfallwahrscheinlichkeit p_r von der prognostizierten Wahrscheinlichkeit π_r wird.

□

Die Bestimmung eines geeigneten τ_β kann also mit Hilfe der Gleichung (5.1) erfolgen. Eine Berechnung der linken Seite von (5.1) ergibt[1] (mit $p_r = \pi_r + c$):

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) > \tau_\beta | p_r - \pi_r = c\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}\tau_\beta + \Phi^{-1}\left(\pi_r\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r + c\right)}{\sqrt{\varrho_r}}\right)$$

Insgesamt kann nun die Berechnung von τ_β erfolgen:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}\tau_\beta + \Phi^{-1}\left(\pi_r\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r + c\right)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) &= 1 - \beta \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}\tau_\beta + \Phi^{-1}\left(\pi_r\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r + c\right)}{\sqrt{\varrho_r}}\right) &= \beta \\ \Leftrightarrow \tau_\beta = \frac{\Phi^{-1}\left(\beta\right)\sqrt{\varrho_r} + \Phi^{-1}\left(\pi_r + c\right) - \Phi^{-1}\left(\pi_r\right)}{\sqrt{\varrho_r}} \end{aligned}$$

Wählt man den Ablehnbereich nun als das Intervall (τ_β, ∞) ist sind die Bedingungen (5.1) und (5.2) offensichtlich erfüllt. Es ist jedoch nicht mehr gewährleistet, dass der Fehler 1.Art durch α begrenzt ist, da τ_β im Allgemeinen nicht mit $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ übereinstimmen wird. Ein Fehler 1.Art von höchstens α war jedoch eine zentrale Anforderung an den Test. Eine Lösung besteht hier in einer Unterteilung des Ablehnbereiches in drei Zonen[2]. Die erste Zone (die grüne Zone) wird durch das Intervall $(0, \tau_\beta]$ bestimmt. Fällt die Teststatistik in diese Zone wird das Modell ohne Einschränkungen akzeptiert. Hierdurch ist gewährleistet, dass ein Modell mit einem Modellfehler größer als c nur mit einer Wahrscheinlichkeit von β akzeptiert wird. Der Fehler 2.Art ist also unter gewissen Umständen, dass heiß bei großen Modellfehlern, kontrolliert. Die dritte Zone wird durch den Ablehnbereich $\left(\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty\right)$ des nicht-modifizierten Tests aus dem vorherigen Kapitel festgelegt. Fällt die Teststatistik in diese Zone wird das Modell abgelehnt. Der Fehler 1.Art ist hierbei offensichtlich durch α beschränkt.
Für die zweite Zone (die gelbe Zone) sind jetzt mehrere Fälle zu unterscheiden.

1. $\Phi^{-1}(1-\alpha) > \tau_\beta$
   Die gelbe Zone ist in diesem Fall das Intervall $[\tau_\beta, \Phi^{-1}(1-\alpha))$. In dieser Zone sind keine Aussagen mit den vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten zu treffen. Das Modell kann also weder auf einer sicheren Basis akzeptiert noch verworfen werden.

2. $\Phi^{-1}(1-\alpha) = \tau_\beta$
   Diese Konstellation stellt den Idealfall für den vorgestellten Test dar. Die grüne und die rote Zone schließen direkt aneinander an, für jede Realisation der Testgröße lässt sich eine abgesicherte Entscheidung treffen.

[1]siehe Beweis zu (3.32)
[2]dieser Ansatz ist an einen von Bühler in [2] vorgeschlagenen Test angelehnt. Hierbei werden allerdings simulierte Verteilungen anstatt einer asymptotischen Verteilung verwendet

3. $\Phi^{-1}(1-\alpha) < \tau_\beta$
   In diesem Fall überschneiden sich die rote und die grüne Zone. Auch hier fällt die gelbe Zone weg, es stellt sich jedoch die Frage, wie in der Schnittmenge der beiden übrigen Zonen verfahren wird. Eine Möglichkeit besteht darin, sie einer der beiden Zonen zuzuschlagen, und so eine ähnliche Situation wie beim zweiten Fall zu erhalten. Allerdings kann man bei so einem Vorgehen nur noch eine der beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten, den Fehler 1.Art oder den Fehler 2.Art, einhalten.

Bei festgelegten Fehlern 1. und 2.Art lässt sich die Gestalt der gelben Zone noch durch die Wahl von c beeinflussen. Hier ist für den Test eine grundsätzliche Frage bezüglich der Bedeutung von c zu treffen. Entweder wird c aus der ökonomischen Überlegungen heraus bestimmt, welcher Modellfehler für das Insolvenzrisiko noch als akzeptabel anzusehen ist, oder es wird gezielt so gewählt, dass man für den Test nach Möglichkeit die zweite Konstellation erhält. Dieser Ansatz verfolgt eher das Ziel den Test zu optimieren, und klare Entscheidungsregeln zu erhalten.
Der hier vorgestellte Test lässt sich aus testtheoretischer Sicht auch als einen Kombination von zwei verschiedenen Test interpretieren. Als erstes wird der einseitige Test basierend auf der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ durchgeführt, also

$$\mathcal{H}_0 : \; p_r = \pi_r \quad \textit{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \; p_r > \pi_r \tag{4.3}$$

zum Niveau α getestet. Anschließend wird ein weiterer Test folgender Hypothesen zum Niveau β durchgeführt:

$$\mathcal{H}_0^* : \; p_r \geq \pi_r + c \quad \textit{gegen} \quad \mathcal{H}_1^* : \; p_r < \pi_r + c \tag{4.4}$$

Wird $\mathcal{H}_0$ akzeptiert und $\mathcal{H}_0^*$ verworfen wird das Modell in die grüne Zone eingestuft. Wird lediglich $\mathcal{H}_0$ akzeptiert, aber $\mathcal{H}_0^*$ kann nicht verworfen werden erfolgt eine Einstufung in die gelbe Zone. Eine Einstufung in die rote Zone wird vorgenommen falls $\mathcal{H}_0$ nicht akzeptiert wird unabhängig vom Ausgang des zweiten Tests.

4.1.2 Testzonen für ausgewählte Situationen

In diesem Abschnitt werden für einige ausgewählte Situationen die sich ergebenden Testzonen errechnet. Tritt der dritte beschriebene Fall ein, also eine Überschneidung der grünen und der roten Zone , wird der Schnitt der roten Zone zugeschlagen. Der Fehler 1.Art ist so also auch in dieser Konstellation durch α beschränkt.
Bei gegebener Korrelation hängt der Wert der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ eindeutig vom Wert der Ausfallquote $\hat{p}_r$ ab. Um einen Eindruck der Testzonen zu erhalten

werden im Folgenden die Zonengrenzen auf Basis der Ausfallquoten angegeben, da der Wert der Teststatistik $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ auf den ersten Blick wenig Aussagekraft hat, da es sich dabei um einen mathematischen Kunstgriff handelt, der die Analyse vereinfacht. Eine ökonomische interpretierbare Größe ist er im Vergleich zur Ausfallquote nicht.
Der Ablehnbereich, die rote Zone, entspricht auch in diesem Test dem Ablehnbereich K_α des einfachen Tests aus dem dritten Kapitel. Im Beweis (3.13) erfolgte hier bereits eine Berechnung der Ausfallquote, oberhalb der das Modell bei einem Test basierend auf $T_r(\hat{p}_r, \pi_r)$ abgelehnt wird. Diese Ausfallquote κ_α ist als Untergrenze der roten Zone zu interpretieren. Es gilt (vgl. (3.13)):

$$\kappa_\alpha = \Phi\left(\frac{\sqrt{\varrho_r}\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) \tag{4.5}$$

Eine Umrechnung der oberen Grenze der grünen Zone ergibt:

$$\begin{aligned} T_r(\hat{p}_r, \pi_r) < \tau_\beta &\Leftrightarrow \tfrac{\sqrt{1-\varrho_r}\Phi^{-1}(\hat{p}_r) - \Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{\varrho_r}} < \tfrac{\Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\varrho_r} + \Phi^{-1}(\pi_r + c) - \Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{\varrho_r}} \\ &\Leftrightarrow \Phi^{-1}(\hat{p}_r) < \tfrac{\Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\varrho_r} + \Phi^{-1}(\pi_r + c)}{\sqrt{1-\varrho_r}} \\ &\Leftrightarrow \hat{p}_r < \Phi\left(\tfrac{\Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\varrho_r} + \Phi^{-1}(\pi_r + c)}{\sqrt{1-\varrho_r}}\right) \end{aligned}$$

Als erstes wird die Berechnung für ein Teilportfolio mit einer internen Korrelation ϱ_r von 0.3 und $\pi_r = 0.01$ sowie verschiedene c durchgeführt. Die Fehler 1. und 2.Art α und β betragen jeweils 1% In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse zusammengefasst.

c	grüne Zone	gelbe Zone	rote Zone
5%	$[0, 0.0361\%)$	$[0.0361\%, 10.4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
4%	$[0, 0.0243\%)$	$[0.0243\%, 10.4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
3%	$[0, 0.0150\%)$	$[0.0150\%, 10.4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$

Tabelle 4.2: Zonen bei Variation von c

Diese Tabelle zeigt, dass für ein Niveau des Fehlers 2.Art β von 1% die grüne Zone schon bei einer relativ großen Wahl von c im Bereich von 5% sehr schmal wird.Ein noch größeres c ist nicht sinnvoll, da der Aussagegehalt des Testes dann nicht mehr signifikant besser wäre als der einfache Test aus Kapitel 4. Auf die rote Zone hat die Wahl von c keinen Einfluß, also wird in dieser Konstellation die gelbe Zone sehr breit, was aus Sicht der Entscheidungsfindung unerwünscht ist. Eine Möglichkeit die gelbe Zone zu verkürzen bestünde in der Absenkung der unteren Grenze der roten Zone κ_α. Dies wäre durch eine Vergrößerung von α möglich. Diese Maßnahme würde jedoch zu einem wesentlich strengeren Test führen, als es zum Beispiel bei der Validiereung von Marktrisikomodellen mit dem

aufsichtsrechtlichen Zonenansatz durchgeführt wird. Da hier ein Niveau von 1% verwendet wird, ist es sicherlich sinnvoll im Rahmen einer einheitlichen Handhabung dies auch auf die Validierung von Kreditrisikomodellen zu übertragen. Ein zu strenger Test, der mit einer größeren Gefahr verbunden ist ein richtiges Modell abzulehen, liegt weder im Interesse der Banken noch der Bankenaufsicht, deren in Basel II formuliertes Ziel es ja gerade ist, den Einsatz von internen Modellen zu fördern. Da eine Einstufung in die rote Zone und die damit verbundene Ablehnung des Modells zu einer Rückkehr zu den Standardverfahren führt, ist ein zu strenger Test also nicht sinnvoll.
Da ϱ_r und π_r für den Test vorgeben sind, bleibt als einziger Parameter der noch angepaßt werden kann β. Das bisher verwendete Niveau für β von 1% ist relativ streng. Die folgende Tabelle zeigt die Zonen bei unterschiedlicher Wahl von β und c und ansonsten unveränderten Parametern im Vergleich zu oben.

c	β	grüne Zone	gelbe Zone	rote Zone
1%	5%	$(0, 0.0207\%]$	$[0.0207\%, 10, 4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
2%	5%	$(0, 0.0442\%]$	$[0.0442\%, 10, 4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
3%	5%	$(0, 0.0764\%]$	$[0.0764\%, 10, 4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
4%	5%	$(0, 0.1172\%]$	$[0.1172\%, 10, 4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
5%	5%	$(0, 0.1667\%]$	$[0.1667\%, 10, 4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$
5%	10%	$(0, 0.3495\%]$	$[0.3495\%, 10, 4275\%)$	$[10.4275\%, 100\%]$

Tabelle 4.4: Zonen bei Variation von c und β

Eine noch großzügerige Wahl von c und β als in der letzten Zeile ist sicherlich nicht mehr sinnvoll. Das Problem der schmalen grünen Zone sowie einer demzufolge breiten gelben Zone lässt sich innerhalb dieses Tests also nicht lösen. Es sind also geeignete Entscheidungsregeln für die gelbe Zone zu definieren. Diese könnten ebenfalls aus dem aufsichtsrechtlichen Zonenansatz zur Validierung von Marktrisikomodellen übernommen werden. So besteht zum Beispiel die Möglichkeit die gelbe Zone weiter zu unterteilen. Bei einer Einstufung in die gelbe Zone könnte dann, je nach Lage innerhalb dieser Zone, ein Zuschlag auf die auf Grundlage des Modells berechnete Eigenmittelhinterlegung erfolgen.
Es bleibt noch die Wirkung der vom Test nicht zu beeinflussenden Größen π_r und ϱ_r auf die Zonen zu untersuchen. Im Folgenden werden c und β jeweils als 5% gewählt. Diese Größenordnung ist intuitiv sinnvoll und hat bei einer in der Realität relevanten Wahl von $\varrho_r = 0.3$ zu relativ guten Ergebnissen geführt. π_r und α bleiben jeweils 1%. Zunächst werden die Zonen für verschiedene ϱ_r bestimmt.

Die Ergebnisse für $\varrho_r = 0.3$ sind Tabelle 5.2 zu entnehmen. Für $\varrho > 0.5$ wird τ_β verschwindent klein, so dass es praktisch keine grüne Zone mehr gibt. Insgesamt lässt sich aber feststellen, das umso bessere Ergebnisse erzielt werden können, je

ϱ_r	grüne Zone	gelbe Zone	rote Zone
0.1	$[0, 1.4365\%)$	$[1.4365\%, 4.6800\%)$	$[4.6800\%, 100\%]$
0.2	$[0, 0.5228\%)$	$[0.5228\%, 7.5251\%)$	$[7.5251\%, 100\%]$

Tabelle 4.6: Zonen bei Variation von ϱ_r

geringer die Abhängigkeit im Teilportfolio ist.
Als letzter Parameter bleibt die geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit π_r zu untersuchen. Bisher wurde diese mit 1% immer relativ niedrig angesetzt, es ist zu hoffen, das für höhere geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeiten die grüne Zone wesentlich breiter wird. Die Testparameter bleiben zunächst unverändert also $\beta = c = 5\%$ und $\alpha = 1\%$. Die folgende Tabelle enthält die Zonen für verschiedene π_r wobei ϱ_r wieder 0.3 beträgt.

π_r	grüne Zone	gelbe Zone	rote Zone
2%	$[0, 0.2251\%)$	$[0.2251\%, 17.5734\%)$	$[17.5734\%, 100\%]$
5%	$[0, 0.4546\%)$	$[0.4546\%, 32.8874\%)$	$[32.8874\%, 100\%]$
7%	$[0, 0.6547\%)$	$[0.6547\%, 40.4795\%)$	$[40.4795\%, 100\%]$
10%	$[0, 1.0290\%)$	$[1.0290\%, 49.6491\%)$	$[49.6491\%, 100\%]$

Tabelle 4.8: Zonen bei Variation von π_r

In dieser Tabelle wird deutlich, dass es bei höheren Ausfallwahrscheinlichkeiten zwar zu einer Verbreiterung der grünen Zone kommt, die untere Grenze der roten Zone erhöht sich jedoch weit überproportional. Ein Test von geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten von mehr als 5% ist höchst problematisch, da noch Ausfallquoten von über 40% akzeptiert werden müssen. Diese Quote wird in der Realität aber in keinem Teilportfolio erreicht werden.
Im Standardansatz der von BaselII vorgeschlagen wird, werden Assetkorrelationen im Bereich kleiner als 0.3 verwendet. Die in der Realität beobachteten Korrelationen liegen ebenfalls in diesem Bereich. Für die Praxis relevant sind also insbesondere diese Konstellationen, so dass es sich lohnt, hier genauere Untersuchungen durchzuführen.
In der folgenden Tabelle werden die Testzonen für Assetkorrelationen 0.01, 0.1 und 0.2 für verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten angegeben. Die wählbaren Parameter α, β und c werden wie folgt gewählt: $\alpha = 1\%$, $\beta = 5\%$ und $c = 1\%$.
In den mit einem Stern gekennzeichneten Zeilen überschneiden sich die grüne und die rote Zone.

ϱ_r	π_r	grüne Zone	gelbe Zone	rote Zone	
0.2	0.01%	$[0, 0.0358\%)$	$[0.0358\%, 1.0958\%)$	$[1.0958\%, 100\%]$	
	1%	$[0, 0.0909\%)$	$[0.0909\%, 7.5251\%)$	$[7.5251\%, 100\%]$	
	10%	$[0, 1.4128\%)$	$[1.4128\%, 39.3717\%)$	$[39.3717\%, 100\%]$	
0.1	0.01%	$[0, 0.1526\%)$	$[0.1526\%, 0.6533\%)$	$[0.6533\%, 100\%]$	
	1%	$[0, 0.3333\%)$	$[0.3333\%, 4.6797\%)$	$[4.6797\%, 100\%]$	
	10%	$[0, 3.2799\%)$	$[3.2799\%, 28.2502\%)$	$[28.2502\%, 100\%]$	
0.01	0.01%	$[0, 0.2039\%)$	–	$[0.2039\%, 100\%]$	*
	1%	$[0, 1.2893\%)$	$[1.2893\%, 1.7678\%)$	$[1.7678\%, 100\%]$	
	10%	$[0, 8.1053\%)$	$[8.1053\%, 14.5895\%)$	$[14.5895\%, 100\%]$	

Tabelle 4.10: Zonen bei geringen Korrelationen

Die Ergebnisse der Untersuchungen in diesem Abschnitt lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

1. Die gelbe Zone wird umso schmaler je geringer die Abhängigkeit im Teilportfolio bei ansonsten unveränderten Parametern ist. Eine breite gelbe Zone, die sich bei höheren Abhängigkeiten ergibt muss aber an sich noch kein Problem sein. Hier kommt es darauf an geeignete Entscheidungsregeln zu finden. Im Fall von geringen Abhängigkeiten sind die Ergebnisse aber für den praktischen Einsatz gut geeignet

2. Die grüne Zone wird in nahezu jeder Konstellation sehr schmal. Die obere Grenze ist nie wesentlich größer als 1%. Hierbei muß allerdings beachtet werden, dass der hier vorgestellte Test auf asymptotischen Verteilungen beruht. Er ist also für sehr große (Teil)-Portfolios geeignet. In diesen Portfolios wird auch in der Realität die Ausfallquote sehr niedrig und über die Zeit betrachtet sehr stabil sein.

4.2 Zonenansatz im Mehrfaktormodell

4.2.1 Konstruktion des Tests

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt wurde, ist es auch im Mehrfaktor-Modell möglich, die Ausfallquote in eine $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Größe zu transformieren und aus dieser eine unter der Nullhypothese $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Teststatistik zu generieren. Für diese Teststatistik $\tilde{T}_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$ lässt sich dann der gleiche Zonenansatz anwenden wie im Einfaktor-Modell für die Teststatistik $T_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right)$, lediglich τ_β muß den Vorraussetzungen des Mehrfaktormodells angepaßt werden, so dass gilt:

$$\lim_{n_r \to \infty} P\left(\tilde{T}_r\left(\hat{p}_r, \pi_r\right) > \tau_\beta | p_r - \pi_r = c\right) = 1 - \beta \tag{4.6}$$

Aus dieser Forderung folgt analog zum Einfaktor-Modell:

$$\tau_\beta = \frac{\Phi^{-1}(\beta)\sqrt{1-\xi^2} + \Phi^{-1}(\pi_r + c) - \Phi^{-1}(\pi_r)}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{4.7}$$

Mit dieser Wahl von τ_β können jetzt die Zonen aus dem Test des Einfaktormodells verwendet werden, und so ein Test mit denselben Eigenschaften erhalten werden.

Eine erneute Bestimmung der Testzonen für das Mehrfaktor-Modell ist auch für den Zonenansatz nicht notwendig, da die Dimension von Z und die genaue Wahl von ω_r für die Testzonen keine Rolle spielen, und wiederum lediglich über die Assetkorrelation eingehen. Für ein Mehrfaktor-Modell gelten dieselben Testzonen wie für das Einfaktor-Modell mit entsprechender Assetkorrelation.

Kapitel 5

Simulationstudie

Da der hier vorgestellte Test auf einer asymptotischen Verteilung beruht, stellt sich die Frage, wie groß ein Teilportfolio gewählt werden muß damit der Test sinnvoll eingesetzt werden kann. Es ist also einer untere Grenze für die Größe eines Teilportfolios zu finden, so dass oberhalb dieser Grenze die Ausfallquote des Portfolios wirklich (näherungsweise) wie die asymptotische Verteilung verteilt ist. Bei Gültigkeit der Nullhypothese $\pi_r = p_r$ ist diese wie gezeigt asymptotisch wie $g_r(Z)$ verteilt. Untersucht wird nun die Frage, wie die Verteilung von $\hat{p}_r$ bei Gültigkeit der Nullhypothese aber endlicher Portfoliogröße aussieht. In diesem Fall ist die Verteilung nicht mehr analytisch berechenbar sondern nur noch durch Simulation zu approximieren.
Die Simulation der Daten eines Teilportfolios im Einfaktor-Modell erfolgt wie folgt:

1. Es wird eine $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallszahl als Realisation von Z gezogen.
2. Es wird für jeden Kredit im Portfolio eine $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallszahl als Realisation von U_{ri} für $i = 1 \ldots n$
3. Aus den simulierten Daten werden Realisation der B_{ri} gewonnen. Aus diesen wird bestimmt, welche Kredite ausfallen und die Ausfallquote berechnet.
4. Das wird so oft wiederholt, wie Daten benötigt werden

Die Simulation im Mehrfaktor-Modell verläuft in den Schritten zwei bis vier analog zum Einfaktor-Modell, im ersten Schritt, der Simulation von Z müssen d (Anzahl der makroökonomischen Faktoren) korrelierte $\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallszahlen generiert werden. Hierzu wird in folgenden Schritten vorgegangen:

1. Es werden $d\,\mathcal{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallszahlen gezogen und diese zu einem Vektor $\tilde{Z}$ zusammengefasst.

2. Dieser Vektor $\tilde{Z}$ wird mit Varianz-Kovarianz-Matrix Σ des Modells multipliziert

3. Die Komponenten des Vektors $\bar{Z} = \Sigma\tilde{Z}$ sind wie gewünscht verteilt

Diese Simulation erfolgt mit Hilfe der Software „R“.
Mit diesen Daten können jetzt die Ausfallquoten berechnet und ihre empirische Verteilungsfunktion bestimmt werden.
An dieser Stelle stellt sich nun die Frage, ob die asymptotische Verteilung in „ausreichendem“Maße mit der simulierten Verteilung übereinstimmt.
Das eigentliche Ziel ist es, einen Test zum Niveau α für die geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit in einem Teilportfolio mit n_r homogenen Krediten zu konstruieren und dabei die Ausfallquote $\hat{p}_r$ als Teststatistik heranzuziehen. Für die Grenze des Ablehnbereiches κ_α soll gelten:

$$P\left(\hat{p}_r > \kappa_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \tag{5.1}$$

Da die Verteilung von $\hat{p}_r$ aber nicht analytisch zu bestimmen ist wird κ_α mit Hilfe der asymptotischen Verteilung bestimmt. Für κ_α gilt also:

$$P\left(g_r\left(Z\right) > \kappa_\alpha | \mathcal{H}_0\right) = \alpha \tag{5.2}$$

aber im allgemeinen nicht (5.1). Eine Ablehnung des Modells erfolgt aber, wenn für die realisierte Ausfallquote gilt:

$$\hat{p}_r > \kappa_\alpha \tag{5.3}$$

Dieser Test hat also, wenn er für ein Portfolio mit endlich vielen Krediten durchgeführt wird, nicht das Niveau α.
Im folgenden wird nun die Frage untersucht, wie weit das tatsächliche Testniveau $\hat{\alpha}$ von α abweicht. Hierbei bezeichnet F_{emp} die empirische Verteilungsfunktion der simulierten Ausfallquoten. Da die „echte“Verteilungsfunktion nicht zu bestimmen ist, ist F_{emp} die beste mögliche Schätzung, die für eine gegen unendlich strebende Anzahl von Simulationen die wahre Verteilung beliebig genau approximiert. Es gilt also

$$F_{emp}\left(x\right) = P\left(\hat{p}_r \leq x\right) \tag{5.4}$$

für eine sehr große Anzahl bzw. unendlich viele Simulationen.
Die folgenden Untersuchungen zielen darauf, festzustellen, ob bei einem Test auf Basis der asymptotischen Verteilung und einem Test auf Basis einer durch Simulationen gewonnen empirischen Verteilungsfunktion signifikante Unterschiede bestehen. Sind die Abweichungen hier zu groß, muß davon ausgegangen werden, dass das betrachtete Portfolio zu klein ist, um den asymptotischen Test zu verwenden. Da hier aber als Referenz eine auf endlich vielen Simulationen beruhende

Verteilung verwendet wird, können nur approximative Aussagen über die genaue, wahre Abweichung von α und $\hat{\alpha}$ getroffen werden. Die folgenden Berechnungen gelten also strenggenommen nur, falls F_{emp} aus unendlich vielen Simulationen gewonnen wurde. Für die hier angestellten praktischen Untersuchungen wird aber davon ausgegangen, dass (5.4) auch schon bei sehr vielen, etwa 100 000, Simulationen gilt. Für praktische Untersuchungen besteht zu diesem Vorgehen auch keine Alternative.
Im Folgenden gelte die Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ sowie (5.2) für κ_α. Desweiteren wähle $j \in \{1, \ldots, n_r\}$ so, dass gilt:

$$\frac{j}{n_r} \leq \kappa_\alpha \leq \frac{j+1}{n_r} \tag{5.5}$$

Dann gilt, da $\hat{p}_r \in \{1/n_r, 2/n_r, \ldots, n_r - 1/n_r, 1\}$:

$$\begin{aligned} P(\hat{p}_r \leq \kappa_\alpha) &= P(\hat{p}_r \in \{1/n_r, \ldots, j/n_r\}) \\ &= P(\hat{p}_r \leq j/n_r) \end{aligned}$$

Für das „echte"Testniveau $\hat{\alpha}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 1 - P(\hat{p}_r \leq \kappa_\alpha) \\ &= 1 - P(\hat{p}_r \leq j/n_r) \\ &= 1 - F_{emp}(j/n_r) \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen kann nun die Abweichung des tatsächlichen Testniveaus $\hat{\alpha}$ vom „gewünschten"Testniveau bestimmt[1] werden:

$$|\alpha - \hat{\alpha}| = |\alpha - (1 - F_{emp}(j/n_r))| \tag{5.6}$$

Als zusätzliche Kennzahl für die Güte der Approximation durch die asymptotische Verteilung kann schließlich noch der „Abstand"der asymptotischen Verteilung von der wahren Verteilung, die hier wie bereits gesagt durch eine empirische Verteilung geschätzt werden muß, bestimmt werden. Hierzu wird nun ein Abstandsbegriff für Verteilungen eingeführt:

Definition 5.0.1 (Kolmogorov-Abstand) *Seien G und F Verteilungsfunktionen. Der Kolmogorov-Abstand von G und F wird definiert durch:*

$$d(F, G) := \sup_{x \in I\!R} |F(x) - G(x)|$$

[1]da F_{emp} nur aus endlich vielen Simulationen bestimmt werden kann, ist dieses Ergebnis natürlich nur als Approximation aufzufassen

Da in dem hier untersuchten Fall jedoch eine diskrete Verteilung mit einer kontinuierlichen verglichen werden soll, und obiger Abstand nicht ohne weiteres zu bestimmen ist, wird hier ein vereinfachter Abstandsbegriff eingeführt.

$$d^* (F_r, F_{emp}) := \max_{1 \leq i \leq n_r} |F_r (i/n_r) - F_{emp} (i/n_r)| \tag{5.7}$$

Dieser Abstandsbegriff deckt jedoch alle relevanten Punkte ab, da die empirische Verteilung der Ausfallquote nur die Werte annehmen kann, über die hier das Maximum gebildet wird.
Im Folgenden werden nun die Ergebnisse der Simulationstudie im Einfaktor-Modell für verschiedene Abhängigkeiten, Ausfallwahrscheinlichkeiten und Portfoliogrössen dargestellt. Die simulierten Verteilungen beruhen jeweils auf 200 000 Simulationen

Anzahl Kredite	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		d^*
	$\hat{\alpha}$	$\|\hat{\alpha} - \alpha\|$	$\hat{\alpha}$	$\|\hat{\alpha} - \alpha\|$	
100	2.8275%	1.8275%	11.7145%	6.7145%	12.660%
500	1.2680%	0.2680%	5.6190%	0.6190%	15.340%
1000	1.1575%	0.1575%	5.5490%	0.5490%	8.662%
6000	1.0035%	0.0035%	5.0880%	0.0880%	1.563%

Tabelle 5.2: Vergleich der Verteilungen mit $\varrho_r = 0.1$ und $\pi_r = 0.01$

Anzahl Kredite	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		d^*
	$\hat{\alpha}$	$\|\hat{\alpha} - \alpha\|$	$\hat{\alpha}$	$\|\hat{\alpha} - \alpha\|$	
100	1.4445%	0.4445%	7.4640%	2.4640%	7.794%
500	1.0930%	0.0930%	5.5285%	0.5285%	11.930%
1000	1.0690%	0.0690%	5.2880%	0.2880%	10.090%
6000	0.9925%	0.0075%	5.0385%	0.0385%	2.930%

Tabelle 5.4: Vergleich der Verteilungen mit $\varrho_r = 0.2$ und $\pi_r = 0.01$

Diese Simulationstudie macht deutlich, dass die Verwendung des asymptotischen Tests ab einer Portfoliogrösse von 500 bis 1000 Krediten gerechtfertigt ist. Die Abweichungen des gewünschten vom tatsächlichen Testniveau sind in allen untersuchten Konstellationen in diesem Bereich so gering, dass sie vernachlässigt werden können. In einem Portfolio mit 100 Krediten sind die Abweichungen zu

Anzahl Kredite	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		d^*
	$\hat{\alpha}$	$\lvert\hat{\alpha} - \alpha\rvert$	$\hat{\alpha}$	$\lvert\hat{\alpha} - \alpha\rvert$	
100	1.1820%	0.1820%	5.6470%	0.6470%	5.4590%
500	1.0185%	0.0185%	5.0765%	0.0765%	8.6700%
1000	1.0270%	0.0270%	4.9905%	0.0095%	8.7100%
6000	0.9475%	0.0525%	4.9815%	0.0185%	4.8400%

Tabelle 5.6: Vergleich der Verteilungen mit $\varrho_r = 0.3$ und $\pi_r = 0.01$

Anzahl Kredite	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		d^*
	$\hat{\alpha}$	$\lvert\hat{\alpha} - \alpha\rvert$	$\hat{\alpha}$	$\lvert\hat{\alpha} - \alpha\rvert$	
100	1.8756%	0.8756%	7.4670%	2.4670%	14.3200%
500	1.1370%	0.1370%	5.5420%	0.5420%	3.2970%
1000	1.0335%	0.0335%	5.2565%	0.2565%	1.5840%
6000	1.0145%	0.0145%	5.0915%	0.0915%	0.2963%

Tabelle 5.8: Vergleich der Verteilungen mit $\varrho_r = 0.1$ und $\pi_r = 0.05$

Anzahl Kredite	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		d^*
	$\hat{\alpha}$	$\lvert\hat{\alpha} - \alpha\rvert$	$\hat{\alpha}$	$\lvert\hat{\alpha} - \alpha\rvert$	
100	1.3380%	0.3380%	5.7250%	0.7250%	13, 7000%
500	1.0595%	0.0595%	5.1455%	0.1455%	3.6840%
1000	1.0045%	0.0045%	5.1475%	0.1475%	2.0030%
6000	1.0250%	0.0250%	5.0840%	0.0840%	0.3320%

Tabelle 5.10: Vergleich der Verteilungen mit $\varrho_r = 0.2$ und $\pi_r = 0.01$

groß, um solche Tests sinnvoll einsetzen zu können.
Es lässt sich feststellen, dass höhere Korrelationen tendenziell zu einer geringeren Abweichung der Testniveaus führen, bei den Verteilungsabständen tritt dies jedoch nicht auf. Auffällig ist jedoch, dass bei höheren Korrelationen der Zusammenhang von mehr Krediten im Portfolio und einer geringeren Abweichung der Testniveaus sowie geringerer Verteilungsabstände nur noch bedingt besteht. Dies ist jedoch darauf zurückzuführen, dass bei großen Portfolios größere simulationsfehler entstehen. Eine hohe Korrelation verstärkt diese noch, da sie den Informationsgehalt der Daten reduziert. Es ist jedoch zu erwarten, das bei größeren Simulationsumfang dieser Zusammenhang wieder zu beobachten ist.
Eine höhere Ausfallwahrscheinlichkeit stabilisiert die beobachteten Ergebnisse erheblich. So sind die Verteilungsabstände und Abweichungen vom Testniveau bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 5% wesentlich geringer als bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 1% bei gleicher Korrelation. Auch die Tendenz, dass bei größer werdenden Portfolios die Annäherung der Testniveaus und Verteilungsabstände besser wird, ist in diesem fall deutlich zu beobachten. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass in diesem Fall mehr Ausfälle auftreten, und somit das Verhältnis Ausfälle zu Nicht-Ausfällen ausgeglichener wird.
Insgesamt zeigen die Ergebnisse, das eine Verwendung dieser Test in der Praxis für genügend grosse Portfolios gerechtfertigt ist.

Kapitel 6

Tests in einem CreditRisk+ Modell

Ziel dieses Kapitels ist es, die Tests die im 4. und 5.Kapitel zum Backtesting von Ausfallwahrscheinlichkeiten in einem CreditMetrics Modell vorgestellt wurden auf ein (Einsektor) CreditRisk+ Modell zu übertragen. Dieser Fall ist insofern einfacher zu behandeln, als das die Verteilung der Ausfallquote hier explizit ausgerechnet werden kann[1]. Es ist also kein „Umweg„über eine asymptotische Verteilung notwendig. Im folgenden Abschnitt erfolgt eine kurze Vorstellung des Modells, im zweiten werden dann die Tests vorgestellt.

6.1 Das Einsektor CreditRisk+ Modell

Betrachtet wird ein Kreditportfolio mit n Kontrakten. Der zufällige Verlust des i-ten Kredites wird durch eine Zufallsvariable

$$X_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i \tag{6.1}$$

Der *exposure at default(EAD_i)* sowie der *loss given default(LGD_i)* jedes Vertrages wird als eine nicht zufällige Größe betrachtet, deshalb definiere $c_i := EAD_i \cdot LGD_i \in \mathbb{R}$. Der Zufall „steckt“also nur in der $\{0, 1\}$-Variablen L_i, die Ausfall[2] ($L_i = 1$) oder Nicht-Ausfall ($L_i = 0$) des i-ten Kredites beschreibt. Hierbei gilt: $p_i = P(L_i = 1) = 1 - P(L_i = 0)$
Für den Gesamtverlust des Portfolios L_{Pf} gilt also:

$$L_{Pf} = \sum_{i=1}^{n} c_i L_i \tag{6.2}$$

Es wird nun davon ausgegangen, dass viele der c_i übereinstimmen und vielfache einer *exposure unit* E sind. Es gilt also:

$$\{c_1 \dots c_n\} = \{E, 2E, \dots, kE\} \tag{6.3}$$

[1]Dieses Modell greift nur auf eine Poissonapproximation zurück

[2]der Ausfall eines Kredites muß hierbei nicht den Totalausfall, das heißt einem Verlust der gesamten Kreditsumme bedeuten

wobei k deutlich kleiner als n ist. Nun werden die Kredite in k Gruppen aufgeteilt, der i-te Kredit wird der j-ten Gruppe G_j zugeordnet falls gilt:

$$c_i = jE \tag{6.4}$$

Somit kann der Portfolioverlust folgendermaßen beschrieben werden:

$$L_{Pf} = E \sum_{j=1}^{k} jY_j \tag{6.5}$$

Hierbei bezeichnet

$$Y_j = \sum_{i \in G_j} L_i \tag{6.6}$$

die zufällige Anzahl an Kreditausfällen in der j-ten Gruppe.
Da die L_i einer $\mathcal{B}_{(1,p_i)}$-Verteilung folgen sind die Y_j binomialverteilt. Approximiert man L_i durch eine poissonverteilte Zufallsvariable $\hat{L}_i$ mit gleichem Mittelwert p_i (also $\hat{L}_i \sim Poi_{p_i}$ für $i = 1 \ldots n$) so wird Y_j, unter der Vorraussetzung der Unabhängigkeit der L_i, approximiert durch eine Zufallsvariable N_j mit:

$$N_j \sim Poi_{\mu_j}, \quad \mu_j = \sum_{i \in G_j} p_i. \tag{6.7}$$

Dann kann der Portfolioverlust approximiert werden durch

$$S = E \sum_{j=1}^{k} jN_j \tag{6.8}$$

Es kann gezeigt werden, dass S nach einer Poissonschen Summenverteilung verteilt ist (siehe hierzu [4]). Hierzu definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$Q\,(jE) := \frac{\mu_j}{\mu} \quad j = 1 \ldots k \tag{6.9}$$

mit $\mu := \sum\limits_{j=1}^{k} \mu_j$, dann gilt:

$$S \sim PSV_{(\mu,Q)} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{*(k)} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \tag{6.10}$$

Dies ist auch die Verteilung einer zufälligen Summe Q-verteilter Zufallsvariablen H_1, $H_2, \ldots$. S ist also verteilt wie

$$\sum_{k=1}^{N} H_k \tag{6.11}$$

mit $N \sim Poi_{\mu}$.
N kann hierbei als die zufällige Anzahl von Ausfällen interpretiert werden, H_k beschreibt die (zufällige) Höhe des Schadens durch den k-ten Ausfall. Die Schadenshöhe ist zufällig, da a-priori nicht bekannt ist, aus welcher der Gruppen der k-te Ausfall stammen wird.

Im Einsektor Modell wird nun davon ausgegangen, das die Ausfallvariablen L_i und damit die $\hat{L}_i$ nicht unabhängig sind, sondern simultan von einem makroökonomischen Faktor abhängen. Dieser makroökonomische Faktor wird durch eine $\Gamma_{(a,b)}$-verteilte Zufallsvariable Λ beschrieben. Die Verteilungen der $\hat{L}_i$ hängen von der Realisation dieser Zufallsvariablen ab. Gegeben $\Lambda = \lambda$ sind sie bedingt unabhängig. Es gilt:

$$P\left(\hat{L}_i \in \cdot | \Lambda = \lambda\right) = Poi_{p_i \frac{\lambda}{E(\Lambda)}}, \quad \lambda > 0 \tag{6.12}$$

Für die bedingte approximierte Portfolioverlustverteilung erhält man hierdurch:

$$P\left(S \in \cdot | \Lambda = \lambda\right) = PSV_{\left(\mu \frac{\lambda}{E(\Lambda)}, Q\right)} \tag{6.13}$$

Durch mischen bezüglich des Parameters λ erhält man die unbedingte Portfolioverlustverteilung als eine Summenverteilung der Form

$$P\left(S \in \cdot\right) = SV_{(R,Q)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{*(n)} R\left(n\right) \tag{6.14}$$

mit Q definiert wie in (6.9) und

$$R = \mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\mu}\right) \tag{6.15}$$

Die Negativ-Binomialverteilung $\mathcal{N}b\left(r,p\right)$ ist hierbei folgendermaßen definiert:

Definition 6.1.1 (Negativ-Binomialverteilung) *Die Negativ-Binomialverteilung $\mathcal{N}b\left(r,p\right)$ wird für $r \in I\!N$ und $p \in [0,1]$ definiert durch die Zähldichte*

$$f\left(k\right) = \binom{k+r-1}{k} p^r \left(1-p\right)^k$$

Falls der Parameter r nicht aus den natürlichen Zahlen stammt, kommt folgende Definition zum tragen:

Definition 6.1.2 (Negativ-Binomialverteilung, erweiterte Form) *Die Negativ-Binomialverteilung $\mathcal{N}b\,(r,a)$ wird für $r \in I\!R$ und $a \geq 0$ definiert durch die Zähldichte*

$$f\,(k) = \frac{\Gamma\,(k + a^{-1})}{\Gamma\,(a^{-1})\,k!} \left(\frac{r}{a^{-1} + r}\right)^k \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} + r}\right)^{a^{-1}}$$

Im Fall $r \in I\!N$ stimmen beide Darstellungen der Negativ-Binomialverteilung überein.

6.2 Zonenansatz

Ziel des hier konstruierten Tests ist es, einen Zonenansatz zur Validierung der Ausfallwahrscheinlichkeit in einem Einsektor CreditRisk+ Modell anzubieten. Für die Ausfallwahrscheinlichkeit ist die Höhe eines eingetretenen Schadens unerheblich, es kommt lediglich darauf an, ob ein Ausfall stattgefunden hat oder nicht. Falls jeder Kreditausfall zu einem Schaden von 1 führt stimmen die Verteilung der Anzahl der Ausfälle und des Schadens überein. Die Verteilung der Ausfälle kann also aus der Schadensverteilung gewonnen werden, indem für die Schadenshöhen-Verteilung das Dirac-Maß auf 1, ε_1 verwendet wird. Die Verteilung der Anzahl der Kreditausfälle A ergibt sich dann durch:

$$\begin{aligned} P\,(A = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_1^{*(i)}\,(j)\,\mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\mu}\right)(i) \qquad j = 1 \ldots n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\,(j)\,\mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\mu}\right)(i) \\ &= \mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\mu}\right)(j) \end{aligned} \tag{6.16}$$

Getestet wird nun die geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit π anhand der Hypothesen

$$\mathcal{H}_0: \;\; p_i \leq \pi_i \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1: \;\; p_i > \pi_i \tag{6.17}$$

Der Test wird nun für ein (Teil-)Portfolio bestehend aus n homogenen Krediten durchgeführt, dass heißt, alle Kredite haben dieselbe geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit $\pi = \pi_i, \quad i = 1 \ldots n$. Für den Test wird also davon ausgegangen, dass auch die für die Tatsächlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten $p_i = p \;\; i = 1 \ldots n$ gilt. Als natürliche Testgröße bietet sich auch in diesem Fall die Ausfallquote $\hat{p} = \frac{1}{n}A$ des Portfolios an. Die Verteilung der Ausfallquote kann leicht aus der

Verteilung von A bestimmt werden, es gilt:

$$P(\hat{p} = k) = P(A = nk) = \mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\mu}\right)(nk) \tag{6.18}$$

Gilt die Hypothese $\mathcal{H}_0$, also $p = \pi$, ist die Zahl der Ausfälle verteilt nach einer $\mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\hat{\mu}}\right)$-Verteilung, mit $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \pi = n\pi$ Mit diesen Voraussetzungen können nun analog zum Test im CreditMetrics Modell die Grenzen der roten, gelben und grünen Zone bestimmt werden. Für die Untergrenze der roten Zone bei einem Test zum Niveau α, κ_α muß gelten:

$$P(\hat{p} > \kappa_\alpha) = \alpha \tag{6.19}$$

Eine Berechnung von κ_α führt auf:

$$\begin{aligned} P(\hat{p} > \kappa_\alpha) = \alpha \quad &\Leftrightarrow \quad P(A > n\kappa_\alpha) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad P(A \leq n\kappa_\alpha) = 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad F_{\mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\hat{\mu}}\right)}(n\kappa_\alpha) = 1 - \alpha \end{aligned} \tag{6.20}$$

Hierbei bezeichnet $F_{\mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\hat{\mu}}\right)}$ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+\hat{\mu}}\right)$-Verteilung. Da es sich hier um eine diskrete Verteilung handelt, entspricht die Quantilfunktion nicht der Inversen der Verteilungsfunktion, (6.20) lässt sich also nicht ohne weiteres nach κ_α auflösen, um eine allgemein gültige geschlossene Formel für κ_α zu erhalten. Wenn aber im konkreten Fall die Parameter mit konkreten Werten besetzt sind, kann hieraus eine Bestimmung von κ_α zum Beispiel mit einer geeigneten Statistik Software erfolgen.
Formal ergibt sich κ_α als

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{n} \arg \max_{i=0 \ldots n} \left\{ \sum_{j=0}^{i} \mathcal{N}b_{\left(a, \frac{a}{a+\hat{\mu}}\right)}(i) \leq 1 - \alpha \right\} \tag{6.21}$$

Die obere Grenze der grünen Zone τ_β wird wieder aus derselben Überlegung heraus wie beim Test im CreditMetrics Modell. Ein Modellfehler, also die Abweichung der geschätzten von der tatsächlichen Ausfallwahrscheinlichkeit, soll wenn er eine bestimmte Schranke c erreicht, mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit β erkannt werden.
Zur Berechnung von τ_β ist es notwendig die Verteilung der Ausfallquote zu bestimmen, unter der Hypothese, dass gilt:

$$p = \pi + c \tag{6.22}$$

Dies führt dazu, dass für die bedingte Verteilung der $\hat{L}_i$ gilt:

$$P\left(\hat{L}_i \in \cdot | \Lambda = \lambda\right) = Poi_{\left((\pi+c)\frac{\lambda}{E(\Lambda)}\right)}(\cdot) \tag{6.23}$$

Für die bedingte Verteilung von A führt dies auf:

$$P(A \in \cdot | \Lambda = \lambda) = PSV_{\left(\bar{\mu}\frac{\lambda}{E(\Lambda)}, \varepsilon_1\right)} \tag{6.24}$$

mit

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \pi + c = n\pi + nc$$

Schließlich erhält man die unbedingte Verteilung von A aus der sich die Verteilung der benötigten Teststatistik $\hat{p}$ bestimmen lässt durch:

$$P(A = k) = \mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a + \bar{\mu}}\right)(k) \tag{6.25}$$

Unter diesen Voraussetzungen kann nun die Bestimmung von τ_β erfolgen:

$$\begin{aligned} P(\hat{p} > \tau_\beta | p = \pi + c) = 1 - \beta &\Leftrightarrow P(A > n\tau_\beta | p = \pi + c) = 1 - \beta \\ &\Leftrightarrow P(A \leq n\tau_\beta | p = \pi + c) = \beta \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n\tau_\beta} \mathcal{N}b_{\left(a, \frac{a}{a+\bar{\mu}}\right)}(i) = \beta \end{aligned}$$

Formal erhält man:

$$\tau_\beta = \frac{1}{n} \arg \max_{i=0\ldots n} \left\{ \sum_{j=0}^{i} \mathcal{N}b_{\left(a, \frac{a}{a+\bar{\mu}}\right)}(i) \leq \beta \right\} \tag{6.26}$$

Mit den so bestimmten Werten für κ_α und τ_β kann nun der Test anhand der realisierten Ausfallquote analog zum Zonenansatz im CreditMetrics Modell durchgeführt werden.

6.3 Einfacher Test

Analog zum Test eines CreditMetrics Modells lassen sich auch für ein Einsektor-CrediRisk+ Modell ein einfacher einseitiger bzw. zweiseitiger Test konstruieren. Der einseitige Test zum Niveau α, also der Test der Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 = [0, \pi] \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 = (\pi, 1] \tag{6.27}$$

kann mit der für den Zonenansatz bestimmten kritischen Wert κ_α zur Festlegung des Ablehnbereiches durchgeführt werden:

$$K_\alpha = (\kappa_\alpha, 1] \tag{6.28}$$

Somit erhält man formal den Test:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & falls \quad \hat{p} \in K_\alpha = (\kappa_\alpha, 1] \\ 0 & falls \quad \hat{p} \in [0, \kappa_\alpha] \end{cases} \tag{6.29}$$

Wenn die Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ auf $\{\pi\}$ eingeschränkt wird, hat dieser Test offensichtlich das Niveau α. Für die Gütefunktion des Tests gilt:

$$\begin{aligned} G(p) &= 1 - P(\hat{p} > \kappa_\alpha | p) \\ &= 1 - P(A \leq n\kappa_\alpha | p) \end{aligned}$$

Für die folgenden Untersuchungen wird der Spezialfall $a \in I\!N$ betrachtet. Dann gilt für $p \leq \pi$:

$$\frac{a}{a + np} \geq \frac{a}{a + n\pi} \tag{6.30}$$

Da die Verteilungsfunktion der Negativ-Binomialverteilung monoton steigend im zweiten Parameter ist (falls der erste aus den natürlichen Zahlen stammt) gilt:

$$1 - P(A \leq \kappa_\alpha | p) \leq 1 - P(A \leq \kappa_\alpha | \pi) \tag{6.31}$$

Hieraus folgt:

$$G(p) \leq G(\pi) \text{ für alle } p \leq \pi \tag{6.32}$$

Der einseitige Test ist also in diesem Fall ein Test zum Niveau α der Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \ p \leq \pi \text{ gegen } \mathcal{H}_1 : \ p > \pi \tag{6.33}$$

Analog folgt auch die Unverfälschtheit des Tests.
Im Spezialfall, dass der Parameter a der Verteilung des makroökonomischen Einflusses Λ aus den natürlichen Zahlen stammt, kann für diesen Test sogar ein optimalitäts Kriterium.

Definition 6.3.1 (Gleichmäßig optimaler (UMP)-Test) *Ein Test φ zum Niveau α einer Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ gegen eine Alternativhypothese $\mathcal{H}_1$ heißt gleichmäßig bester Test zum Niveau α (uniformly most powerful test) falls für seine Gütefunktion G_φ gilt:*

$$G_\varphi(\theta) \geq G_\psi(\theta) \text{ für alle } \theta \in \mathcal{H}_1$$

für die Gütefunktion G_ψ jedes beliebigen Tests ψ zum Niveau α.

Ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für ein Testproblem $\mathcal{H}_0$ gegen $\mathcal{H}_1$ minimiert also den Fehler 2.Art unter allen Tests zum Niveau α für dieses Testproblem. Der folgenden Satz liefert ein Kriterium zur Konstruktion eines gleichmäßig besten Tests, zuerst wird jedoch noch eine Definition benötigt.

Definition 6.3.2 (Verteilungen mit monotonem Likelihood-Quotienten) *Eine Familie von Verteilungen P_θ, $\theta \in \Theta \subseteq I\!R$ mit Dichten bzw. Zähldichten f_θ hat einen monotonen Likelihood-Quotienten in $T(x)$ falls eine Funktion $T(x)$ existiert, so dass für alle $\theta < \theta^*$ aus Θ die Verteilungen P_θ und P_{θ^*} unterschiedlich sind und der Quotient*

$$\frac{f_\theta(x)}{f_{\theta^*}(x)}$$

eine monotone Funktion von $T(x)$

Satz 6.3.3 (UMP-Test für ein einseitiges Testproblem) *Sei $\Theta \subseteq I\!R$ ein Parameterraum und $\theta \in \Theta$. Die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_θ habe einen monotonen Likelihood-Quotienten in einer Funktion $T(x)$. X sei eine Zufallsvariable deren Verteilung P_{θ^*} aus dieser Familie stammt.*
Ein Test φ der Hypothesen $\theta^* \leq \theta_0$ gegen $\theta^* > \theta_0$ für ein $\theta \in \Theta$ ist ein UMP-Test zum Niveau α, falls er die folgende Form hat:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & falls \quad T(X) > C \\ 0 & falls \quad T(X) \leq C \end{cases}$$

wobei C so gewählt ist, dass der Test ein Niveau von α hat.

Der Beweis kann in [8] nachgelesen werden.

Bemerkung 6.3.4 *Solange man sich auf nicht randomisierte Tests beschränkt muss ein solcher Test nicht für jedes einseitige Testproblem dieser Form existieren. Die Existenz kann gesichert werden, wenn auch randomisierte Tests zugelassen werden.*

Mit diesen Vorarbeiten kann jetzt gezeigt werden, dass der hier vorgestellte einseitige Test ein UMP-Test für das Testproblem (6.33) ist.
Beweis: Die Teststatistik $T(x)$ ist in Fall dieses Tests die Ausfallqoute $\hat{p} = \frac{A}{n}$, wobei $A \sim \mathcal{N}b\left(a, \frac{a}{a+np}\right)$ mit $p \in [0,1]$, damit ist $T(x) = \frac{x}{n}$. Sei $p < \pi$ und definiere $p_0 = \frac{a}{a+n\pi}$ sowie $p' = \frac{a}{a+np}$. Mit diesen Bezeichnungen wird nun nachgewiesen, dass

$$\frac{\mathcal{N}b(a, p')\{T(x)\}}{\mathcal{N}b(a, p_0)\{T(x)\}}$$

eine monotone Funktion in $T(x)$ ist. Es gilt (mit $y := T(x)$):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{N}b\left(a,p'\right)\{y\}}{\mathcal{N}b\left(a,p_0\right)\{y\}} &= \frac{\binom{y+a-1}{y} p'^a \left(1-p'\right)^y}{\binom{y+a-1}{y} p_0^a \left(1-p_0\right)^a} \\
&= \frac{p'^a \left(1-p'\right)^y}{p_0^a \left(1-p_0\right)^y} \\
&= \frac{p'^a exp\left(ln\left(1-p'\right)y\right)}{p_0^a exp\left(ln\left(1-p_0\right)y\right)} \\
&= \frac{p'^a}{p_0^a} exp\left(y\left(ln\left(1-p'\right) - ln\left(1-p_0\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Das ist eine monoton steigende Funktion in $y = T(x)$, somit ist die Behauptung bewiesen. □

Ein zweiseitiger Test kann ebenfalls analog zum CreditMetrics Modell konstruiert werden. Auch hier werden die Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 = \{\pi\} \quad gegen \quad \mathcal{H}_1 = [0,\pi) \cup (\pi, 1] \tag{6.34}$$

getestet. Mit dem Ablehnbereich

$$K_\alpha = [0, \kappa_\alpha] \cup (\kappa_{1-\alpha}, 1] \tag{6.35}$$

wird offensichtlich ein Test zum Niveau α definiert (für κ_α gilt auch hier (6.21)) .

Fazit und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, Backtestingverfahren zum testen von Ausfallwahrscheinlichkeiten eines Kreditrisikomodells zu konstruieren. Der Blickpunkt liegt hierbei auf den Modellen CreditMetrics und CreditRisk+. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die für diese speziellen Modelle entwickelte Verfahren sich auch für das Testen einer geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeit eines beliebigen Kreditrisikomodells einsetzten lassen. Aus Sicht der Bankenaufsicht ist dieser Aspekt besonders interessant, da sie eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle zu bewerten hat. Der Parameter „Ausfallwahrscheinlichkeit“wird für jede Ratingklasse in der Praxis unabhängig vom speziellen Modell geschätzt. Aufgabe eines Kreditrisikomodells ist es dann, die Abhängigkeitsstruktur der Kredite adäquat zu modellieren. Diese Abhängigkeitsstruktur hat jedoch starken Einfluß auf die prognostizierte Anzahl der Ausfälle. Um ein Testverfahren zu erhalten, dass in der Lage ist, unterschiedliche Kreditrisikomodelle zu evaluieren ist es also notwendig, ein einheitliches Maß für die Abhängigkeit von Krediten zu verwenden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Korrelation zu benutzen. Diese wird kann auch unabhängig vom speziellen Kreditrisikomodell geschätzt werden. In die hier vorgestellten asymptotischen Tests gehen bei der Bestimmung der Ablehnbereiche eben nur die Ausfallwahrscheinlichkeit und die Korrelation der Kredite ein, so dass es aus dieser Sicht gerechtfertigt ist, die Tests modellübergreifend einzusetzten. Ein Problem tritt hierbei jedoch durch die Tatsache auf, dass die Korrelation als Maß für Abhängigkeit nur bedingt geeignet ist, und die Möglichkeit besteht, das sie in der Zukunft durch andere Maße, zum Beispiel Kendall´τ ersetzt wird. Hier sind Untersuchungen notwendig, inwieweit ein Zusammenhang dieser Abhängigkeitsmaße und den Tests besteht.

Im 5. Kapitel konnte durch Simulationstudien gezeigt werden, dass die Verwendung eines asymptotischer Tests in einem CreditMetrics Modell für die Praxis kein Problem darstellt. Die Abweichung der asymptotischen Verteilung von den durch Simulation erzeugten Verteilungen ist im Bereich der für den einseitigen Test interessanten niedrigen Quantile schon bei Portfolios mit 500 Krediten bis 1000 Krediten sehr gering. In sehr großen Portfolios mit 6000 Krediten sind die unterschiede nur noch marginal. Ein asymptotischer Test zum Niveau α kann also auch als ein Test zum Niveau α bei endlicher Portfoliogrösse angesehen werden.

Beim Testen eines CreditRisk+ Modells traten diese Probleme nicht auf, da die Verteilung in diesem Fall analytisch bestimmt werden kann. Hier ist es sogar

möglich einen gleichmäßig besten Test zu konstruieren. Die Untersuchungen für dieses Modell beschränken sich in dieser Arbeit jedoch nur auf einige Spezialfälle. Bei der Konstruktion der Tests sollte die Tatsache berücksichtigt werden, dass in der Praxis für einen Test nur wenige Daten zur Verfügung stehen. Die hier vorgestellten Tests können alle auf Basis einer einzelnen beobachteten Ausfallquote durchgeführt werden, so dass sie dieser Anforderung genügen. Dies stößt jedoch wie erwähnt bei zweiseitigen Tests in guten Ratingklassen an seine Grenzen. Auf Basis einer einzelnen Ausfallquote ist es bei einer niedrigen geschätzten Ausfallquote nicht möglich, eine Aussage darüber zu treffen, ob diese Ausfallquote zu groß geschätzt wurde. Hier ist es unerlässlich auf eine größere Anzahl von in der Vergangenheit aufgetretenen Ausfallquoten zurückzugreifen, was zu all den in der Einleitung beschriebenen Problemen führt. Hierfür müssen jedoch andere Tests konstruiert werden, die auch Abhängigkeiten über die Zeit mit einbeziehen.
Diese Arbeit bietet also Tests an, die mit einem geringen Menge von Daten auskommen. Hierfür müssen allerdings die beschrieben Einschränkungen in Kauf genommen werden, die nur durch eine breitere Datenbasis umgangen werden können. Die Frage, ob der asymptotische Test auch für andere Kreditrisikomodelle eingesetzt werden kann muss noch näher untersucht werden. Solange als Input-Parameter jedoch nur Ausfallwahrscheinlichkeit und Korrelation verwendet werden, kann diese Frage positiv beantwortet werden.

Anhang A

Sätze, Definitionen und Beweise

Satz A.0.5 (Lineartransformation Normalverteilter Zufallsvektoren) *Sei $Y \sim N^n_{(\mu,\Sigma)}$ ein n-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungsvektor $\mu \in I\!R^n$ und mit positiv definiter Kovarianz-Matrix Σ.*
Sei $m \leq n$ und A eine beliebige $m \times n$ Matrix mit vollem Rang und $c \in I\!R^m$ ein beliebiger m-dimensionaler Vektor.
Dann ist

$$X = AY + c$$

ein normalverteilter Zufallsvektor mit:

$$X \sim N^m_{(A\mu+c,A\Sigma A^T)}$$

Satz A.0.6 (starkes Gesetz der großen Zahlen) *Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $|X_i| \leq c < \infty$ und $E\left(X_i^2\right) > 0$. Dann gilt:*

$$\lim_{n \in I\!N} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = E\left(X_1\right)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

Satz A.0.7 (Lesbesgue,dominierte Konvergenz) *Sei $(E, \mathcal{E})$ meßbarer Raum,μ Maß, f_i: $(E, \mathcal{E}) \rightarrow (I\!R, \mathbb{B})$, $i \in I\!N$, meßbare Funktionen mit $|f_i| \leq g$ wobei g eine beschränkte Funktion ist mit $\int g d\mu < \infty$. $\lim\limits_{i \in I\!N} f_i$ existiere. Dann:*

$$\lim_{i \in I\!N} \int f_i d\mu = \int \lim_{i \in I\!N} f_i d\mu$$

Bemerkung A.0.8 *Aus Satz(A.0.7) folgt insbesondere, dass für eine Folge $(X_i)_{i \in I\!N}$ mit den Eigenschaften aus Satz(A.0.7) und $\lim\limits_{i \in I\!N} X_i = X$ gilt:*

$$\lim_{i \in I\!N} E\left(X_i\right) = E\left(X\right)$$

Beweis A.0.9 (Beweis von (3.23)) *Zu zeigen ist:*

$$\tilde{W}_r := \frac{\xi_r \Phi^{-1}(\hat{p}_r) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}} \sim \mathcal{N}_{(0,1)}$$

unter der Hypothese $\mathcal{H}_0: \ \pi_r = p_r$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n_r \to \infty} P\left(\tilde{W}_r \leq x\right) &= \lim_{n_r \to \infty} P\left(\hat{p}_r \leq \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}x + \Phi^{-1}(p_r)}{\xi_r}\right)\right) \\
&= F_r\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}x + \Phi^{-1}(p_r)}{\xi_r}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\xi_r\left(\frac{\sqrt{1-\xi_r^2}x+\Phi^{-1}(p_r)}{\xi_r}\right) - \Phi^{-1}(p_r)}{\sqrt{1-\xi_r^2}}\right) \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Anhang B

Ergänzungen zur Simulationsstudie

Im Folgenden werden nun die Programme vorgestellt, mit deren Hilfe mittels der Software "R" die Simulationen aus dem fünften Kapitel durchgeführt wurden. Die Simulationen der Ausfallquote in einem Teilportfolio mit endlicher Anzahl von Krediten erfolgte mit folgendem Programm:

```
Simulation <- function(rho,q,grport,andaten)
{anzahl<-0
 j<-1
 ausf<-0
 while(j < andaten+1)
  { z<-rnorm(1)
    x<-rnorm(grport)
    b<-sqrt(rho)*z +sqrt(1-rho)*x
    for(i in 1:grport)
      if(b[i]< q) anzahl<-anzahl+1
    if(j<2) ausf<-anzahl else ausf<-c(ausf,anzahl)
    anzahl<-0
    j<-j+1}
 ausf <- ausf/grport
 return(ausf)
}
```

Hierbei gelten folgende Bezeichnungen:

1. $rho = \varrho_r$
2. $q = \Phi^{-1}(c_r)$
3. „grport“bezeichnet die Anzahl der Kredite im (Teil)-Portfolio
4. „andaten“bezeichnet die Anzahl der generierten Daten

Literaturverzeichnis

[1] Huschens, S.: Backtesting von Ausfallwahrscheinlichkeiten , *Dresdener Beiträge zu Quantitativen Verfahren Nr.40/04.*

[2] Bühler, W.; Engel, C.; Korn, O.; Stahl, G.: Backtesting von Kreditrisikomodellen. In: Oehler, A.(Hrsg.): *Kreditrisikomanagement - Kernbereiche, Aufsicht und Entwicklungstendenzen*

[3] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, *3. neubearbeitete Auflage, Berlin, New York: de Gruyter 1978.*

[4] Hipp, C.; Michel, R.: Risikotheorie: Stochastische Modelle und Statistische Methoden , *Schriftreihe angewandte Versicherungsmathematik, Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft EV 1990*

[5] Gnedenko, B.W.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, *Berlin: Akad.-Verlag 1991*

[6] Höpfner R.: Vorlesungen Stochastik I und II *http:// www.mathematik.uni-mainz.de/deutsch/institute/arbeitgr/stochastik/staff/hoefpner/stochastik1+2/04-03-17-b-fertiges-skript.pdf*

[7] Anderson, O; Popp, W; Schaffranek, M; Steinmetz, D; Stenger, H.: Schätzen und Testen *2.Auflage, Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag 1997*

[8] Buch von Lehmann