



WESTFÄLISCHE  
WILHELMUS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

---

# Ein dynamisches Modell zur Bewertung von Collateralized Debt Obligations

## Diplomarbeit

vorgelegt von  
**Felix Brinkmann**

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen  
Institut für Mathematische Statistik  
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik  
Westfälische-Wilhelms-Universität Münster

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Einführung in synthetische CDO's</b>	<b>13</b>
1.1 Verbriefung und Tranchierung . . . . .	13
1.2 Credit Default Swaps . . . . .	16
1.3 Collateralized Debt Obligations . . . . .	18
1.3.1 Cash-CDO's . . . . .	18
1.3.2 synthetische CDO's . . . . .	19
1.4 Indizes und der iTraxx Europe . . . . .	22
1.4.1 Upfront-Gebühr und Running Spread . . . . .	23
1.5 Bewertung . . . . .	24
1.5.1 Definition grundlegender Variablen . . . . .	24
1.5.2 Die Bewertungsformel . . . . .	25
<b>2 Modellierung der Portfolioverlustfunktion</b>	<b>29</b>
2.1 Modellierung . . . . .	29
2.2 Eigenschaften . . . . .	34
2.3 Die Kolmogorovschen Differentialgleichungen . . . . .	38
<b>3 Bewertung von synthetischen CDO's</b>	<b>43</b>
3.1 Resultate für allgemeine Portfolien . . . . .	44
3.2 Das Mean-Field-Modell . . . . .	50
3.3 Das Mean-Field-Modell für ein homogenes Portfolio . . . . .	58
<b>4 Anwendungen für homogene Portfolien</b>	<b>67</b>
4.1 Ein Beispiel mit makroökonomischen Einfluss . . . . .	67
4.2 Bewertung des iTraxx Europe . . . . .	72
4.2.1 Vorbereitungen . . . . .	73
4.2.2 Berechnungen und Marktdaten . . . . .	74

<b>5 Kritische Würdigung und Ausblick</b>	<b>81</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>83</b>
<b>A Diskontierungsfaktoren</b>	<b>85</b>
<b>B Daten CD</b>	<b>88</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Struktur einer Verbriefung durch ein SPV . . . . .	14
1.2	Beispiele für Zahlungsströme von Credit Default Swaps . . . . .	17
1.3	Zahlungsstrom eines synthetischen CDO . . . . .	19
1.4	Gegenüberstellung von Tranchenverlust und Anzahl der Ausfälle anhand von Beispiel 1.5 . . . . .	21
1.5	Beispiel für einen Zahlungsstrom der Tranche k . . . . .	25
4.1	Beispiele für den Verlauf des Makroökonomieprozesses anhand von 2 Pfaden eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses mit Gleichgewichtsniveau 1, Steifigkeit 0,4 und Diffusion 0,2 . . . . .	70
4.2	Zahlungsstrom zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $p$ für eine Laufzeit von 5 Jahren . . . . .	73
4.3	verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Zeit .	76
4.4	Gegenüberstellung konvexer und konkaver Ausfallintensitäten . . . . .	79
A.1	$B(0, t)$ abgeleitet aus den Zinssätzen von Nullkuponanleihen verschiedener Laufzeiten . . . . .	86
A.2	$r(t)$ bestimmt aus den Diskontierungsfaktoren aus Abbildung A.1 .	87



# Einleitung

Gründung von Zweckgesellschaften, Verbriefung von Hypothekendarlehen, Handel mit strukturierten Produkten: dies alles sind Beispiele für die rasante Entwicklung moderner Finanzwirtschaft. Die Modellierung dieser komplexen Finanzmarktprodukte stellt eine große Herausforderung für die aktuelle Finanzmathematik dar.

Dass die Risiken aus diesen Produkten nicht vollständig erkannt wurden, zeigen die Ereignisse aus der sogenannten "Subprime Krise", dessen bisheriger Höhepunkt die Insolvenz der Investmentbank Lehman Brother Inc. im September 2008 war. Im Zuge dieser Krise rückten insbesondere Collateralized Debt Obligations und Credit Default Swaps in den Fokus der Öffentlichkeit.

Credit Default Swaps, kurz CDS, sind Kreditversicherungen, die typischerweise den Ausfall einer Anleihe versichern. Der Markt für Credit Default Swaps, die von Warren Buffet als Massenvernichtungswaffen des Finanzmarktes bezeichnet wurden, ist extrem undurchsichtig und steht infolge der Finanzmarktkrise vor einer Regulierung.

Collateralized Debt Obligations, kurz CDO's, können als Verbriefungsmechanismus verstanden werden. Dabei wird ein Portfolio aus Forderungen aufgekauft, neu strukturiert und wieder am Kapitalmarkt verkauft. Ein CDO ist daher für Finanzinstitute ein wichtiges Refinanzierungsmittel. Als Standardbeispiel dienen die US-Hypothekendarlehen, die mittels dieses Mechanismus weltweit verkauft wurden.

Collateralized Debt Obligations lassen sich anhand des zu verbriefenden Portfolios weiter in Cash-CDO's und synthetische CDO's differenzieren. Bei einem Cash-CDO wird mit einem sogenannten "True-Sale" ein Portfolio zusammengekauft, zum Beispiel die amerikanischen Hypothekendarlehen. Ein synthetisches CDO hingegen verbrieft den Zahlungsstrom aus aggregierten Kreditversicherungen.

Seit 2004 sind durch das Unternehmen "Markit" Kreditindizes definiert worden. Ein Index ist ein standardisiertes synthetisches CDO. Bekannte Vertreter sind der

CDX Dow Jones oder der iTraxx Europe. Beim iTraxx Europe werden zum Beispiel 125 Kreditversicherungen von Anleihen repräsentativer europäischer Unternehmen verbrieft. Indizes gehören zu den liquidesten Derivaten am Finanzmarkt, denn ihre Konstruktion ermöglicht es sich insbesondere gegen Marktrisiken abzusichern.

Aufgrund der Wirtschaftskrise und der Stützung des Finanzsektors sind die Staatsverschuldungen vieler Länder drastisch gestiegen. Die Nachfrage nach Absicherungsmethoden gegen die Zahlungsunfähigkeit einzelner Länder, zum Beispiel durch CDS's auf Staatsanleihen, erhöhte sich stark. Um der Nachfrage dieser Produkte gerecht zu werden, wird "Markit" ab September 2009 weitere Kreditindizes definieren. Geplant sind weitere vier Indizes, welche hauptsächlich CDS's auf ost- und westeuropäische Staatsanleihen verbrieften. Diese neuen Produkte erlauben es, Risiken in einer Region besser abzusichern.

Aufgabe dieser Arbeit wird es sein Collateralized Debt Obligations, insbesondere synthetische, zu modellieren und anschließend eine Bewertung dieser Produkte zu geben. Als Grundlage für die Modellierung dient der Artikel "Portfolio Credit Risk Models with Interacting Default Intensities: a Markovian Approach" von Rüdiger Frey und Jochen Backhaus [8].

In der Praxis ist es üblich, synthetische CDO's mit Hilfe von Copula-Modellen<sup>1</sup> zu bewerten. Frey und Backhaus hingegen benutzen einen alternativen Ansatz. Sie bemühen für die Modellierung die Theorie der Markov-Prozesse. Um schließlich eine Bewertung vorzunehmen, nutzen Sie insbesondere die aus der Theorie bekannten Kolmogorovschen Differentialgleichungen.

Das erste Kapitel dieser Arbeit befasst sich ausführlich mit der Struktur und dem Aufbau von synthetischen CDO's. Zunächst wird ein Einblick in die Funktionsweise von Verbriefungen mit Hilfe einer Zweckgesellschaft gegeben. Des Weiteren werden Credit Default Swaps und Collateralized Debt Obligations detailliert beschrieben.

Der Einführung von Kreditindizes und die Vorstellung des iTraxx Europe, als Beispiel für einen synthetischen CDO, ist ein eigener Abschnitt gewidmet. Das Kapitel schließt mit der Modellierung und Bewertung von synthetischen CDO's.

Hierzu werden die Zahlungsströme des synthetischen CDO's aufgezeigt und bewertet. Sie zerfallen in das Default-Leg und das Premium-Leg, wobei im Default-Leg alle Leistungen des CDO's sowie im Premium-Leg alle Zahlungen an das CDO zusammengefasst werden. Mit einem aktuariellen Ansatz

---

<sup>1</sup>siehe hierzu z.B. [17]

$$\text{Premium-Leg} = \text{Default-Leg}$$

kann nach den gesuchten Größen, zum Beispiel der Verzinsung, aufgelöst werden.

Für eine Bewertung wird als unbekannte Größe insbesondere die Portfolioverlustfunktion benötigt. Sie gibt an, wie hoch zu einem bestimmten Zeitpunkt der Verlust des verbrieften Portfolios ist. Die Modellierung dieser Funktion wird im zweiten Kapitel vorgestellt.

Das Modell berücksichtigt für die Entwicklung des Portfolios 2 Faktoren. Auf der einen Seite den aktuellen Zustand des Portfolios, sowie auf der anderen den Einfluss durch makroökonomische Faktoren, welche die allgemeine Entwicklung der Ökonomie beschreiben sollen.

In Kapitel 3 werden nun mit Hilfe des in Kapitel 2 hergeleiteten Modells aufgezeigt, wie das Default- und Premium-Leg im Speziellen berechnet werden. Hierbei wird angenommen, dass der Diskontierungsfaktor deterministisch ist.

Für Anwendungen stößt dieses Modell schnell an seine Grenzen, da der Rechenaufwand für Anwendungen enorm ist. Zum Beispiel besitzt für den Fall des iTraxx Europe die Matrix der Ausfallintensitäten die Dimension  $|\{0, 1\}|^{125} \times |\{0, 1\}|^{125} = 2^{125} \times 2^{125}$ .

Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems wird durch das Mean-Field-Modell gegeben. Dabei ist die grundlegende Idee das Portfolio in Gruppen ähnlichem Risikoprofils einzuteilen. Diese Gruppierung kann zum Beispiel in Industriesektoren oder Kreditwürdigkeit (Rating) geschehen, dabei sollen Mitglieder derselben Gruppe auch dieselbe Ausfallwahrscheinlichkeit/Ausfallintensität haben. Das Kapitel schließt mit dem für Anwendungen wichtigen Fall einer homogenen Gruppe.

Im vierten Kapitel werden für die Situation eines homogenen Portfolios Anwendungen gegeben. Zunächst wird ein Beispiel vorgestellt, indem insbesondere der Einfluss von makroökonomischen Faktoren untersucht werden soll. Hierzu wird ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess zur Simulation der Entwicklung der Ökonomie bemüht.

Im zweiten Abschnitt wird anhand von verschiedenen Ausfallintensitäten versucht Marktwerte des iTraxx Europe, in diesem Fall für eine Laufzeit von 5 Jahren, zu approximieren. Es werden lineare, konvexe und konkave sowie zeitabhängige Modelle getestet und mit den am Markt beobachteten Werten verglichen. Für die Approximation sind sukzessive verschiedene Grade von Abhängigkeit unter den Unternehmen untersucht worden.

Die Ergebnisse, insbesondere für lineare und konvexe Modelle, zeigen, dass durch die vorgestellte Methode eine zufriedenstellende Approximation erreicht werden kann. Hierbei sollte aber beachtet werden, dass nur für einen Handelstag die Ergebnisse mit den Marktdaten verglichen wurden. In [9] ist jedoch aufgezeigt worden, dass für konvexe Intensitäten die Ergebnisse auch über einen längeren Zeitraum stabil sind.

Eine Stärke der Modellierung liegt darin, dass falls der makroökonomische Einfluss vernachlässigt oder deterministisch ist, auf jegliche Simulation von Zufallsgrößen verzichtet werden kann. Preise können daher ausschließlich mit numerischen Verfahren berechnet werden. Dies ermöglicht eine sekundenschnelle Ermittlung der gewünschten Größen.

Die Arbeit schließt mit Kapitel 5 einer kritischen Würdigung der Ergebnisse. Vor allem wird die Modellierung aus Kapitel 2 kritisch hinterfragt und deren praktische Tauglichkeit diskutiert.

Als Erweiterung des Modells ist sicherlich denkbar, auf deterministische Diskontierungsfaktoren zu verzichten und stochastische Prozesse zu bemühen. Dennoch wird man mit Verwendung von Zinsstrukturmodellen auf Monte-Carlo Simulationen zurückgreifen müssen.

Des Weiteren lässt sich die Ein-Gruppenstruktur für die Berechnung der Preise des iTraxx Europe durch eine differenzierte Struktur des Portfolios ersetzen. Durch das Mean-Field-Modell aus Kapitel 3 ist hierfür eine Modellierung gegeben, insbesondere sind für diesen Fall die Kolmogorovschen Differentialgleichungen für Berechnungen formuliert.

Die Arbeit konzentriert sich ausschließlich auf die Bewertung von synthetischen CDO's. Die angegebene Modellierung kann aber auch für Cash-CDO's genutzt werden. Für eine Bewertung muss in diesem Fall der Zahlungsstrom aus den CDS's durch den Zahlungsstrom aus den verbrieften Forderungen ersetzt werden.

Die Modellierung der Portfolioverlustfunktion aus Kapitel 2 kann auch für verschiedene andere Problemstellungen genutzt werden. Zum Beispiel wird sie in [8] bemüht, um n-th-to-Default-Swaps zu bewerten. Auch ist es denkbar, die Modellierung für allgemeinere Portfolios zu nutzen, um zum Beispiel erwartete Portfolioverluste, insbesondere in Abhängigkeit von makroökonomischen Faktoren, zu bestimmen.

Ich möchte mich ganz herzlich bei Privatdozent Dr. Volkert Paulsen für die Betreuung dieser Arbeit bedanken, sowie für Durchsicht und Anmerkungen bei Martin Düllmann und Boris Lütke Schelhowe. Für die Unterstützung mit MatLab ein Dank

an Michael Möller und Sebastian Westerheide.

Gemäß § 21 (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den 19. November 2009

Felix Brinkmann



# Kapitel 1

## Einführung in synthetische CDO's

In diesem Kapitel wird zunächst eine Einleitung in die Struktur von Verbriefungen mit Hilfe einer Zweckgesellschaft gegeben, wobei als spezifisches Beispiel Collateralized Debt Obligations, kurz CDO's, dienen. Des Weiteren werden Credit Default Swaps und detailliert synthetische CDO's diskutiert. Als Beispiel für einen synthetischen CDO wird der iTraxx Europe, ein sogenannter Index, vorgestellt.

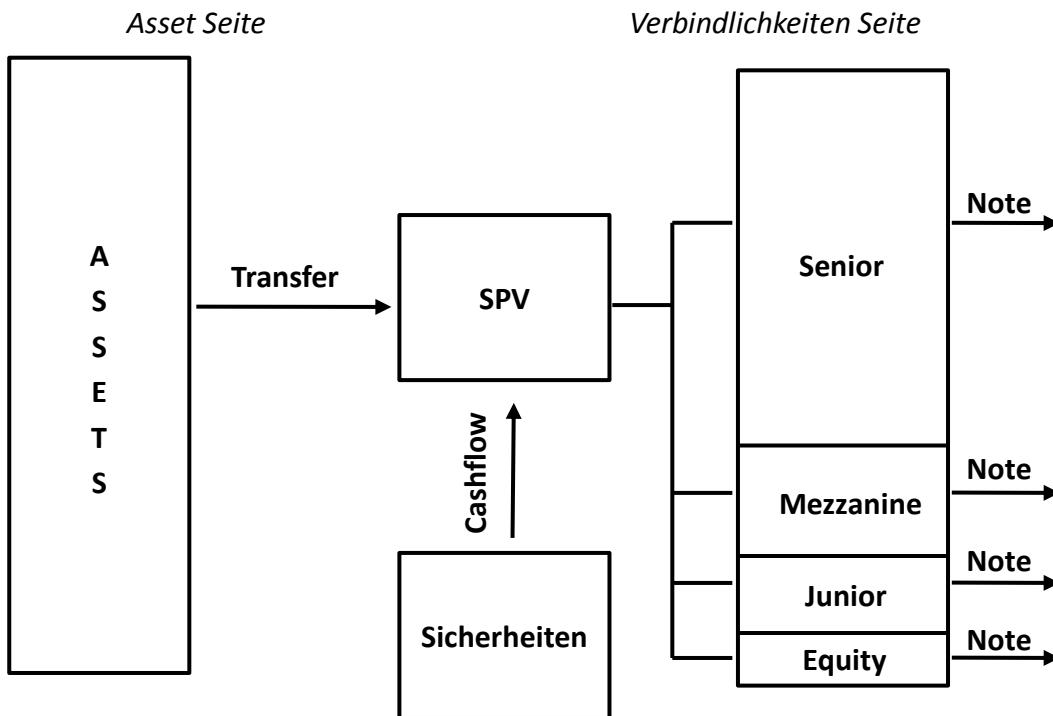
Das Kapitel schließt mit der Diskussion über die Bewertung von synthetischen CDO's und führt für den gesamten Verlauf der Arbeit grundlegende Variablen ein.

Aufbau und Struktur des Kapitels ist in Anlehnung an [17] formuliert. Die Bezeichnungen der Variablen sind aus [8] übernommen.

### 1.1 Verbriefung und Tranchierung

Nicht handelbare Produkte am Kapitalmarkt zu verkaufen stellt eine große Herausforderung an die moderne Finanzwirtschaft dar. Der Mechanismus der Verbriefung ermöglicht illiquide Assets - also am Kapitalmarkt nicht handelbare Produkte, wie zum Beispiel individuelle Kredite - in handelbare Produkte zu transformieren und diese am Kapitalmarkt zu verkaufen bzw. zu refinanzieren.

Eine Möglichkeit der Verbriefung ist durch die Konstruktion einer Zweckgesellschaft, englisch SPV (Special Purpose Vehicle), gegeben. Die Struktur ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Sie zerfällt in zwei eigenständige Teile, die Asset Seite, also den Transfer der Assets in das SPV, und die Seite der Verbindlichkeiten, in welcher die Refinanzierung des SPV's organisiert ist.



**Abbildung 1.1:** Struktur einer Verbriefung durch ein SPV

### Seite der Assets

Ausgangslage für die Konstruktion eines SPV's ist ein Portfolio von illiquiden Assets. Indem das SPV diese (typischerweise von einer Bank) aufkauft, werden die Assets physisch in das SPV transferiert. Sie werden nach dem Transfer auch als zugrunde liegendes Sicherheiten-Portfolio bezeichnet.

Das SPV selber verfügt dabei über kein Eigenkapital und muss sich daher, um die Assets überhaupt kaufen zu können, direkt am Kapitalmarkt refinanzieren. Dies geschieht üblicherweise durch die Ausgabe von Notes<sup>1</sup>, wobei die Assets als Sicherheit für die ausgegebenen Notes dienen.

Aus der Sicht des Verkäufers, dem ursprünglichen Besitzer des Portfolios, sind nicht handelbare Produkte am Kapitalmarkt emittiert worden oder anders gesagt, die unsicheren zukünftigen Cashflows gegen eine direkte Zahlung getauscht.

### Beispiel 1.1

Ein Autohersteller finanziert oder least Neuwagen über seine Hausbank. Da er als Autohersteller nicht an den Zinserträgen aus der Finanzierung interessiert ist, will er

<sup>1</sup>ein Note ist ein besicherter Kredit von kurzer Laufzeit

seine Leasing- und Finanzierungsverträge am Kapitalmarkt verkaufen. Dazu gründet ein Finanzdienstleister im Auftrag des Autoherstellers eine Zweckgesellschaft, welche die Verträge aufkauft.

Für den Autohersteller ist der Prozess nun beendet, denn durch den Transfer der Verträge in das SPV, konnte er diese am Kapitalmarkt verkaufen. Das Management des SPV's obliegt dem Finanzdienstleister.

Dabei sollte beachtet werden, dass das SPV eigenständig ist, das heißt, dass Ausfälle im Portfolio keinen Einfluss auf den ursprünglichen Verkäufer haben. Auf die Assets selbst hat der Transfer in den SPV auch keinen direkten Effekt, da zum Beispiel die Leasingverträge immer noch durch den Käufer des Autos bedient werden müssen.

Allerdings hat nun ein Ausfall einen entscheidenden Einfluss auf das SPV, da durch Wegfall von zukünftigen Cashflows, das SPV möglicherweise selbst seine Verbindlichkeiten aus der Ausgabe der Notes nicht mehr bedienen kann.

### Seite der Verbindlichkeiten

Das Portfolio erzeugt ein regelmäßiges Einkommen. Mit diesem Einkommen kann nun wiederum eine Finanzierung (typischerweise durch Ausgabe von Notes) aufgenommen werden. Dabei wird der zukünftige Cashflow als Sicherheit für die Finanzierung genutzt.

Der nächste Schritt im Prozess der Verbriefung ist nun die Sicherstellung der Refinanzierung des SPV's. Anstatt einzelne Cashflows aus nur einem Asset zu verkaufen, wird der aggregierte Cashflow aller in einzelne Teile, sogenannten *Tranchen*, aufgeteilt und durch Ausgabe von Notes weiterverkauft.

Die Tranchen werden nachrangig aus den Cashflows bedient. Dabei gilt, je höher die Rangfolge der Tranche, desto niedriger die Verzinsung (auch *Spread*).

Für die Reihenfolge haben sich folgende Bezeichnungen durchgesetzt. Für die Tranche, die zuerst vollständig bedient wird, Senior Tranche. Es folgen die Mezzanine, Junior und zuletzt die Equity Tranche. Dabei gilt, falls eines der zugrunde liegenden Assets ausfällt, ist zuerst die Equity Tranche betroffen. Und falls die Verbindlichkeiten für die Senior Tranche nicht mehr vollständig geleistet werden können, wird auch keine andere (nachrangige) Tranche bedient. Man kann also sagen, Gewinne werden von oben nach unten und Verluste von unten nach oben verteilt. Dies wird allgemein auch als "Wasserfall-Prinzip" bezeichnet.

**Bemerkung 1.2** (i) In der Praxis ist es meist nicht möglich, in kurzer Zeit das gesamte Portfolio zusammenzustellen. Üblicherweise wird das Portfolio nicht ad hoc, sondern Stück für Stück zusammengekauft, da gleichzeitig für jedes gekaufte Asset auch die Refinanzierung sichergestellt werden muss. Man bezeichnet diese Periode als "Ramp-Up".

- (ii) Die oben beschriebene Struktur beschreibt das Grundgerüst einer Verbriefung durch eine Zweckgesellschaft. Man kann weiter zwischen statischen und nicht statischen Portfolien unterscheiden, wobei beim Letzteren ein aktives Management der Sicherheiten von Nöten ist. Des Weiteren können, auch bei statischen Portfolien, Zinsswaps zum Hedgen von Zinsschwankungen sowie Liquiditätslinien zur Absicherung von Liquiditätsengpässen bei der Refinanzierung weiter betrachtet werden.
- (iii) Die Absicherung von Liquiditätsengpässen spielt im Falle eines aktiven Managements der Verbindlichkeitenseite eine entscheidende Rolle. Dabei kann zum Beispiel durch Fristentransformation, das heißt die langfristigen Assets werden durch Ausgabe kurzfristiger Notes refinanziert, ein zusätzlicher Spread erwirtschaftet werden. Hierbei kann es vorkommen, dass die Refinanzierung nicht immer gesichert ist, also bei Ablauf eines Notes kein neuer Investor gefunden ist. Um diesen Refinanzierungsengpass zu überbrücken, kann das SPV dann auf die Liquiditätsreserven zurückgreifen.

Das Ausnutzen von Fristentransformationen ist in der Praxis durchaus üblich. Es wird dadurch motiviert, dass der zusätzlich erzielte Ertrag meistens anteilig an die Portfoliomanager als Bonus ausgezahlt wird. Das Risiko hieraus ist aber erst durch die Ereignisse der Finanzmarktkrise vollständig erkannt worden. Da im Falle eines illiquiden Marktes eine Refinanzierung auch von Notes von hoher Qualität nicht möglich ist, genügen die Liquiditätsreserven nicht dem Kapitalbedarf des SPV's und das SPV wird zahlungsunfähig.

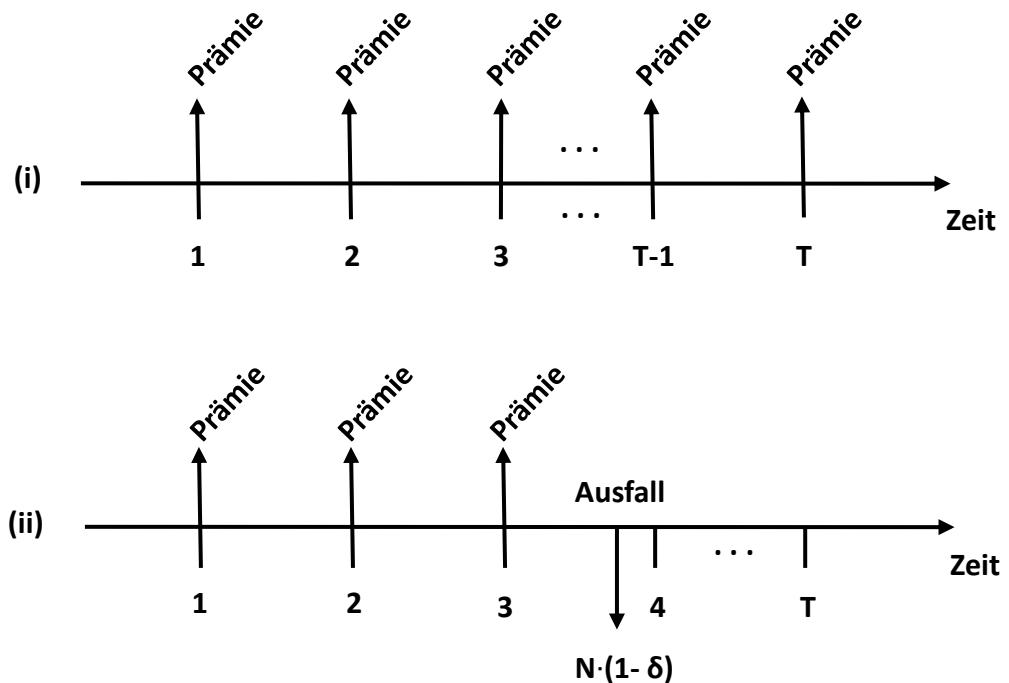
## 1.2 Credit Default Swaps

Ein Credit Default Swap (kurz CDS) stellt die einfachste Form des Transfers von Kreditrisiko dar und kann als Kreditversicherung verstanden werden.

Ein CDS umfasst drei Teilnehmer: Den Versicherungsnehmer, den Versicherungsgeber und den Referenztitel. Der Versicherungsnehmer versichert bei dem Versiche-

rungsggeber den Verlust aus dem Ausfall des Referenztitels für eine festgelegte Zeitperiode  $T$ , abgesichert wird ein Nominalbetrag  $N$ . Für die Übernahme des Risikos erhält der Versicherungsgeber regelmäßige Zahlungen durch den Versicherungsnehmer.

Diese Zahlungen werden solange geleistet bis entweder der Kontrakt ausläuft oder der Referenztitel ausfällt. In diesem Fall gleicht der Versicherer mit einer Einmalzahlung alle Verluste, die aus dem Ausfall des Referenztitels angefallen sind, beim Versicherungsnehmer aus. Der Restwert eines ausgefallenen Referenztitels wird als prozentualer Anteil des ursprünglichen Nominalbetrags angegeben. Er wird als Recovery Rate  $\delta$  bezeichnet. In Abbildung 1.2 sind zwei Beispiele aus der Sicht des



**Abbildung 1.2:** Beispiele für Zahlungsströme von Credit Default Swaps

Versicherungsnehmers für Zahlungsströme von CDS's abgebildet. Im ersten Fall wird bis zum Ende der Laufzeit  $T$  die Prämie an den Versicherungsgeber gezahlt, also ist insbesondere der Referenztitel während der Laufzeit nicht ausgefallen. Im zweiten Beispiel fällt der Referenztitel zwischen der dritten und vierten Periode aus. Der Versicherungsgeber gleicht mit einer Einmalzahlung die entstandenen Verluste des Versicherungsnehmers von  $N \cdot (1 - \delta)$  aus. Ab der vierten Periode werden dann durch den Versicherungsnehmer auch keine Prämien mehr geleistet.

Die Versicherungsprämie, die von dem Versicherungsnehmer an den Versicherungsgeber zu leisten ist, wird vom Kapitalmarkt gegeben. Sie entspricht einer Bewertung des Ausfallrisikos des zugrunde liegenden Referenztitels durch den Kapitalmarkt. Die Versicherungsprämie kann als Marktpreis des Ausfallrisikos interpretiert werden.

### Beispiel 1.3

Der Versicherungsnehmer besitzt eine Anleihe eines Industrieunternehmens. Um sich gegen einen Ausfall abzusichern, kauft dieser einen CDS bei einem Kreditversicherer mit der entsprechenden Anleihe als Referenztitel, sowie mit der entsprechenden Laufzeit und dem entsprechenden Nominalbetrag. Er hat sich somit gegen den Ausfall der Anleihe abgesichert.

## 1.3 Collateralized Debt Obligations

Ein CDO ist ein spezifisches Beispiel für eine Verbriefung von Assets durch einen SPV-Mechanismus. Ein CDO wird maßgeblich durch die Zusammenstellung des zugrunde liegenden Portfolios, der Tranchierung und der Laufzeit charakterisiert. Man unterscheidet Cash-CDO's von synthetischen CDO's.

### 1.3.1 Cash-CDO's

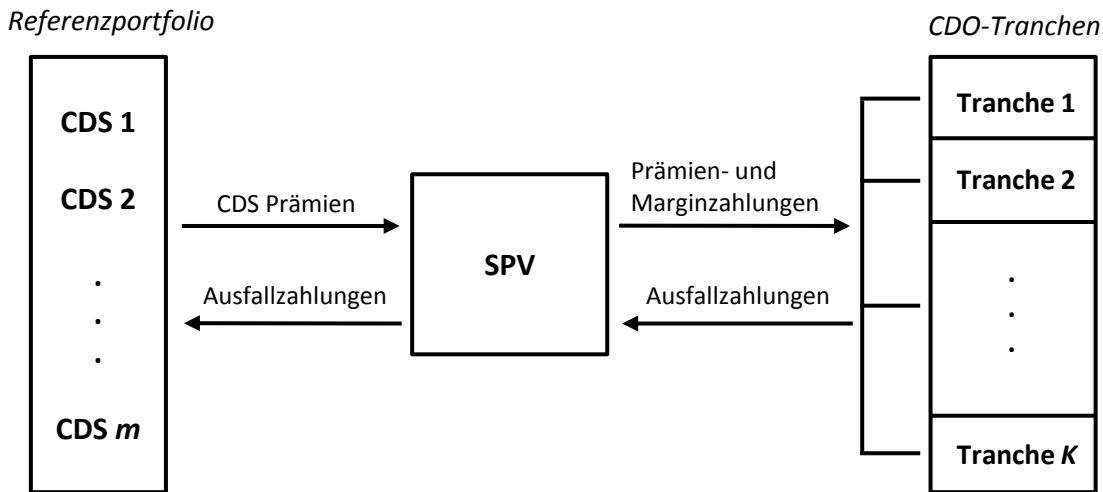
Bei Cash-CDO's wird das Portfolio durch einen "True-Sale"<sup>2</sup> generiert, das heißt die zugrunde liegenden Sicherheiten wurden durch das SPV physisch aufgekauft und dann durch die Ausgabe von Notes refinanziert. Hierbei ist die Komposition des Portfolios von entscheidender Rolle, denn die Performance des CDO's hängt vor allem von der Qualität der zugrunde liegenden Assets ab. In der Praxis ist es üblich, um unter anderem die Qualität der Sicherheiten zu unterstreichen, dass der ursprüngliche Verkäufer der Assets die Equity-Tranche selbst kauft und somit die ersten Ausfälle im Portfolio trägt.

---

<sup>2</sup>vgl. Kapitel 1 in [10]

### 1.3.2 synthetische CDO's

Im Falle von synthetischen CDO's besteht das zugrunde liegende Sicherheiten-Portfolio ausschließlich aus CDS-Kontrakten mit individuellen Referenztiteln. Die Laufzeit des CDO's ist abgestimmt mit der Laufzeit der CDS-Kontrakte.



**Abbildung 1.3:** Zahlungsstrom eines synthetischen CDO

Hierbei ist das SPV der Versicherungsgeber der CDS-Kontrakte. Im Falle eines Ausfalls eines Referenztitels muss das SPV - als Versicherungsgeber - die Verluste des Versicherungsnehmers ausgleichen. Für die Übernahme des Risikos erhält das SPV regelmäßige (siehe CDS) Zahlungen durch den Versicherungsnehmer. Die Sicherheiten des SPV's, also das Portfolio aus den CDS-Kontrakten, wird auch als *Referenzportfolio* verstanden.

Die regelmäßigen Einnahmen durch die Versicherungsnehmer erzeugen einen Cashflow. Der aggregierte Cashflow aus allen CDS-Kontrakten wird nun tranchiert und am Kapitalmarkt verkauft. Dabei werden die einzelnen Tranchen anhand der aggregierten Nominalbeträge aller CDS-Kontrakte definiert.

Die Höhe der Zahlungen, die sogenannten *Prämienzahlungen*, an die Investoren durch das SPV ist gekoppelt an den Nominalbetrag der entsprechenden Tranche.

Im Falle des ersten Ausfalls im Referenzportfolio reduziert sich zuerst der Nominalbetrag der Equity Tranche. Da nach dem Ausfall des ersten Referenztitels keine Leistungen des Versicherungsnehmers an das SPV mehr getätigten werden (vgl. Beispiel (ii) in Abbildung 1.2), verringert sich auch die zukünftige Leistung des SPV's

an die Investoren der Equity Tranche. Die Tranchen werden somit bei weiteren Ausfällen nach und nach "aufgebraucht", beginnend mit der Equity Tranche. Die Prämien an die Investoren werden zu festen Terminen, den Prämienzahlterminen, üblicherweise vierteljährlich, vom SPV geleistet. Die Höhe ist dabei an den "verbleibenden" Nominalbetrag der Tranche gekoppelt.

Eine Besonderheit sind die sogenannten Marginzahlungen. Im Falle eines Ausfalls erhält der Investor, falls der Ausfall seine Tranche befällt, eine zusätzliche Leistung durch das SPV. Die Höhe der Leistung setzt sich aus der Differenz des letzten Prämienzahltermins und der Ausfallzeit, sowie der Verzinsung der entsprechenden Tranche zusammen. Anschaulich kann die Marginzahlung als zusätzliche Versicherungsprämie verstanden werden, in der das SPV noch die Leistung von der letzten Prämienzahlung bis zum tatsächlichen Ausfall eines CDS-Kontraktes nachbezahlt.

#### Bemerkung 1.4

In diskreten Bewertungsmodellen wird auf diese Zahlung meist verzichtet, da diese eine stetige Zeitbetrachtung verlangt. In diesem Fall wird angenommen, dass alle Zahlungen zu den Prämienzahlterminen vollzogen werden.

In einem dynamischen Modell hingegen ist es nun möglich, die Marginzahlung zu betrachten und in eine Bewertungsformel für synthetische CDO's einfließen zu lassen.

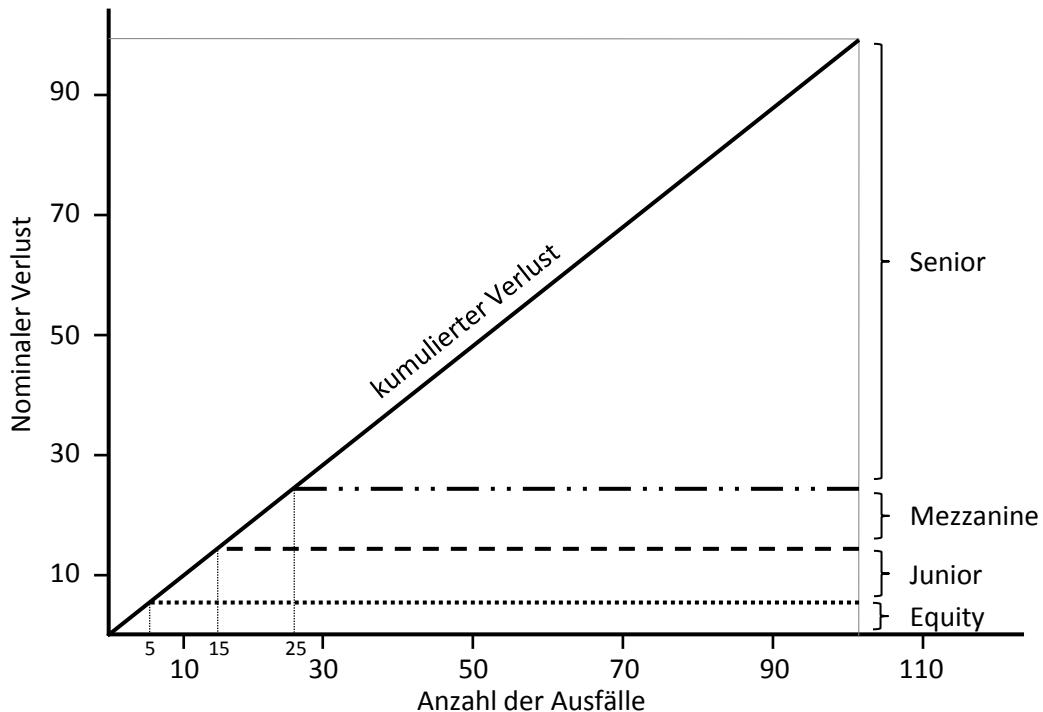
#### Beispiel 1.5

Man betrachte 100 Unternehmensanleihen mit identischen Nominalbetrag von 1. Die Summe aller Nominalwerte ergibt sich somit zu 100. Nun sei ein synthetischer CDO mit entsprechendem Referenzportfolio, also aus den durch CDS's versicherten Unternehmensanleihen, gegeben. Die Recovery Rate sei 0. Die Tranchierung sei gegeben durch

Tranche	untere Grenze	obere Grenze
Equity	0 %	5 %
Junior	5 %	15 %
Mezzanine	15 %	25 %
Senior	25 %	100 %

Die Laufzeit sei identisch mit den Laufzeiten der Anleihen gewählt. Als Investor, zum Beispiel der Mezzanine Tranche, ist es nun von Interesse, ab dem wievielten Ausfall im Referenzportfolio Verluste im Referenzportfolio die Mezzanine Tranche

befallen. In der obigen Situation versichert die Mezzanine Tranche ab dem 15. bis zum 25. Ausfall die Verluste der Versicherungsnehmer und trägt also das maximale Risiko von einem Nominalbetrag von 10 (siehe Abbildung 1.4).



**Abbildung 1.4:** Gegenüberstellung von Tranchenverlust und Anzahl der Ausfälle anhand von Beispiel 1.5

Da zum Aufbau des Portfolios keine Zahlungen nötig sind, kann nun unter zwei Alternativen unterschieden werden. Als erste Möglichkeit können die Investoren, die zum Beispiel in die Junior Tranche investieren wollen, zum Startpunkt des CDO's an das SPV den Nominalbetrag der Tranche einzuzahlen. Das SPV legt diesen Betrag risikolos an und im Falle eines Ausfalls, in der die Junior Tranche "befallen" ist, wird der Betrag genutzt, um den Versicherungsnehmer zu bedienen.

Andernfalls zahlen die Investoren nicht zum Startpunkt des CDO's den Nominalbetrag ein, zahlen aber, im Falle eines Ausfalls, welche die Junior Tranche betrifft, den ausstehenden Betrag von  $(1 - \text{Recovery Rate}) \times \text{Nominalbetrag}$  an das SPV bzw. direkt an den Versicherungsnehmer. Die Leistung des SPV's an den Versicherungsnehmer bezeichnet man als *Tranchen-Ausfallzahlung*.

## 1.4 Indizes und der iTraxx Europe

Kreditindizes sind standardisierte synthetische CDO's. Sie bestehen aus festgelegten Referenztiteln und Laufzeiten, sowie aus fest definierten Tranchen. Alle CDS-Kontrakte besichern denselben Nominalbetrag. Jeder Kontrakte besitzt somit das-selbe Portfoliogewicht. Die Referenztitel sind üblicherweise Unternehmensanleihen.

Indizes haben den Charakter eines multi-name CDS. Dies bedeutet, dass anstelle eines einzelnen Titels in diesem Fall eine Menge von Titeln abgesichert wird. Dies wird genutzt, um sich zum Beispiel gegen Marktrisiken abzusichern.

Seit 2004 sind Kreditindizes definiert. Als wichtige Vertreter gelten der CDX Dow Jones und der iTraxx Europe.

Beispielhaft wird hier der iTraxx Europe vorgestellt. Die Komposition des Portfolios wird in regelmäßigen Abständen von "Markit" in den sogenannten Serien herausgegeben. Die Referenztitel in einer Serie sind nach Bekanntgabe fest.

Eine Serie des iTraxx Europe besteht aus 125 europäischen Unternehmen. Die Diversifikation des Portfolios ist konstant, sie setzt sich aus 10 Firmen aus dem Automobilsektor, 30 aus dem Bereich Konsumgüter, 20 Energieversorgern, 20 Industrieunternehmen, 20 aus dem Sektor Telekommunikation, Medien und Technologie, sowie 25 Finanzdienstleistern zusammen. Jedes dieser Unternehmen muss "Investment Grade"<sup>3</sup> geratet sein und Liquiditäts- und Handelsbestimmungen erfüllen.

Die Zusammenstellung wird vierteljährig geprüft und gegebenenfalls angepasst. Die Laufzeit beträgt 3, 5, 7 oder 10 Jahre. Die Tranchen sind wie folgt definiert

Tranche	untere Grenze	obere Grenze
Equity	0 %	3 %
Junior	3 %	6 %
Mezzanine Junior	6 %	9 %
Mezzanine Senior	9 %	12 %
Senior	12 %	22 %
Super Senior	22 %	100 %

Bei Indizes ist es nicht nötig ein SPV zu gründen, insbesondere sind die CDS-Kontrakte fiktiv. In diesem Fall übernimmt der Versicherungsnehmer die Rolle des

<sup>3</sup>Ein Rating heißt bei den Ratingagenturen Standard & Poor's, Fitch und Moody's Investment Grade, wenn es besser oder gleich BBB bzw. Baa ist.

SPV's und zahlt direkt die Prämienzahlungen an den Investor (Versicherungsgeber). Der Investor wiederum tätigt im Falle eines Ausfalls, der seine Tranche betrifft, entsprechende Ausfallzahlungen.

Während der gesamten Transaktion bleibt die Laufzeit, die Verzinsung und insbesondere die Serie einer Tranche zwischen den Handelspartnern fest, auch wenn sich die Zusammenstellung des Portfolios in einer zukünftigen Serie ändern sollte.

- Bemerkung 1.6** (i) Anschaulich kann man den Verzicht des SPV's wie folgt verstehen. Der Versicherungsnehmer leistet die Prämien aus den CDS-Kontrakten an sich selbst, verbrieft diese und verkauft die Tranchen am Kapitalmarkt. Insbesondere ist er so in der Lage, einzelne Tranchen zu handeln. Daher ist ein Index ein wichtiges Beispiel für einen *Single-Tranche CDO*.
- (ii) Durch die Zusammenstellung von repräsentativen Unternehmen des europäischen Wirtschaftsraumes kann sich der Versicherungsnehmer über den iTraxx Europe gegen breite Ausfälle im europäischen Wirtschaftsraum absichern.
- (iii) Bei standardisierten synthetischen CDO's, also insbesondere im Falle von Indizes, ist als einzige Unbekannte die Verzinsung der Tranchen zu bestimmen bzw. auszuhandeln.

#### 1.4.1 Upfront-Gebühr und Running Spread

Für manche Tranchen, insbesondere für die Equity Tranche, ist es üblich, nicht die Verzinsung sondern eine Einmalzahlung zu Beginn der Transaktion zu handeln. Dieser Betrag wird dann vom Versicherungsnehmer an den Versicherungsgeber geleistet und wird als *Upfront-Gebühr* bezeichnet. Für die restliche Laufzeit der Transaktion wird eine feste Verzinsung durch den Versicherungsnehmer festgelegt. Diese Verzinsung wird als *Running Spread* bezeichnet und beträgt üblicherweise 5 %.

Die Upfront-Gebühr wird als Prozentsatz des Nominalbetrages der Tranche angegeben. Die Höhe der Einmalzahlung ergibt sich dann aus dem Produkt dieser Größen.

Am Kapitalmarkt werden nun für Indizes täglich Upfront-Gebühren bei einem festen Running Spread und die Verzinsungen für die übrigen Tranchen gehandelt. Dabei verständigen sich Versicherungsgeber und -nehmer auf eine Serie und Restlaufzeit und handeln eine Verzinsung bzw. Upfront-Gebühr aus.

## 1.5 Bewertung

Zur Bewertung von synthetischen CDO's ist nun die faire Verzinsung oder die Upfront-Gebühr zu bestimmen.

Es wird angenommen, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum existiert und somit Erwartungswerte gebildet werden können.

### 1.5.1 Definition grundlegender Variablen

Die Anzahl der CDS's Kontrakte im Sicherheiten-Portfolio sei gegeben durch  $m \in \mathbb{N}$ . Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  bezeichne  $N_i$  den Nominalwert des  $i$ -ten CDS's, sowie  $\delta_i$  dessen Recovery Rate.

Die Tranchierung sei definiert durch  $K$  Tranchen mit den unteren, bzw. oberen Grenzen,  $l_k$  und  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , dabei sei  $l_K$  die untere Grenze der Equity Tranche. Es gilt  $0 = l_K < u_K = l_{K-1} < \dots < u_2 = l_1 < u_1 = \sum_{i=1}^m N_i$ . Der maximale Verlust der Tranche  $k$  ist somit  $u_k - l_k$ .

$s^{(k)}$  sei die Verzinsung von Tranche  $k$ .

Die Laufzeit des synthetischen CDO's sei  $T > 0$ .

Weiter sei der Loss Given Default des  $i$ -ten CDS's definiert durch

$$LGD_i := N_i(1 - \delta_i),$$

also die Höhe der vom Versicherungsgeber zu leistenden Ausfallzahlung. Der totale Verlust des Portfolios zum Zeitpunkt  $t \in (0, T]$  ist damit durch die Zufallsvariable

$$L_t = \sum_{i=1}^m LGD_i \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

gegeben, wobei durch  $\tau_i \in (0, \infty)$  die Ausfallzeit des  $i$ -ten CDS Kontraktes,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , gegeben sei.  $L_t$  wird auch als *Portfolioverlustfunktion* bezeichnet.

Um den Verlust in der Tranche  $k$  für  $k \in \{1, \dots, K\}$  zu bestimmen, wird eine Hilfsfunktion  $v_k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definiert durch

$$v_k(x) = (x - l_k) \mathbb{1}_{\{x \in [l_k, u_k]\}} + (l_k - u_k) \mathbb{1}_{\{x > u_k\}}.$$

Damit ist der Verlust in Tranche  $k$  zur Zeit  $t$  durch  $v_k(L_t)$  erklärt.

Die Prämienzahltermine seien  $t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ .

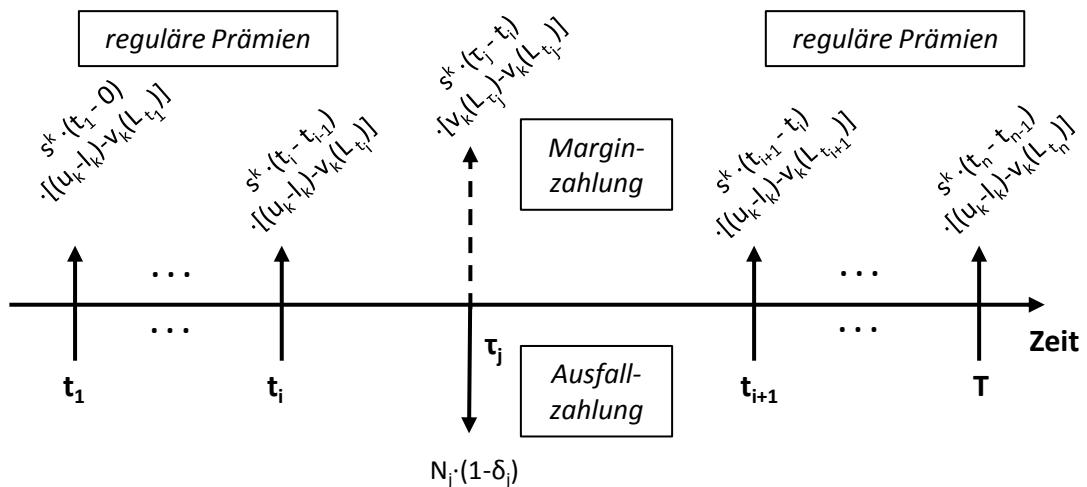
Durch den reellwertigen stochastischen Prozess  $(r(s))_{s \in [0, T]}$  der Zinsraten sei mit  $E(\exp(-\int_0^t r(s)ds))$  der Wert einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit  $t > 0$  und Nominalbetrag 1 zum Zeitpunkt 0 gegeben. Des Weiteren sei für alle  $s \in [0, T]$  und  $i \in \{1, \dots, m\}$  die Zinsrate  $r(s)$  stochastisch unabhängig von den Ausfallzeiten  $\tau_i$ , und damit insbesondere von der Portfolioverlustfunktion  $(L_t)_{t \in [0, T]}$ .

Als Diskontfaktor zum Zeitpunkt  $t > 0$  wird  $B(0, t) := E(\exp(-\int_0^t r(s)ds))$  bezeichnet.

### 1.5.2 Die Bewertungsformel

Um eine explizite Formel für die Bewertung von synthetischen CDO's zu bestimmen, werden zunächst die einzelnen Zahlungsströme des CDO's aufgezeigt. Dabei werden das *Default*- und das *Premium-Leg* unterschieden. Hierbei fasst das *Default-Leg*  $V^{def}$  die erwarteten Ausfallzahlungen des Versicherungsgebers zusammen, das *Premium-Leg*  $V^{prem}$  die Leistungen des Versicherungsnehmers.

Mit einem aktuariellen Argument<sup>4</sup>  $V^{def} = V^{prem}$  kann schließlich für die Verzinsung  $s^{(k)}$  bzw. für die Upfront-Gebühr eine Bewertung bestimmt werden.



**Abbildung 1.5:** Beispiel für einen Zahlungsstrom der Tranche  $k$

<sup>4</sup>vgl. Abschnitt 2.1 in [9]

### Default-Leg

Das Default-Leg für eine Tranche  $k$  ist der erwartete Barwert des Verlustes der Tranche  $k$ , also der erwartete Barwert aller zu leisteten Ausfallzahlungen. Es gilt

$$V^{def} = E \left( \int_0^T e^{-\int_0^t r(s) ds} dv_k(L_t) \right).$$

### Premium-Leg

Das Premium-Leg setzt sich aus den regulären Prämienzahlungen und den Marginzahlungen zusammen. Die reguläre Prämienzahlung zu einem festen Prämienzahltermin  $t_n$  der Tranche  $k$  ist durch

$$s^{(k)} \cdot \underbrace{(t_n - t_{n-1})}_{\text{Zeitspanne zw. den Zahlterminen}} \cdot \underbrace{(u_k - l_k - v_k(L_{t_n}))}_{\text{verbliebender Nominalbetrag}}$$

gegeben. Der erwartete Barwert aller Prämienzahlungen ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N E \left( s^{(k)} \cdot e^{-\int_0^{t_n} r(s) ds} (t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - (v_k(L_{t_n}))) \right) \\ & \stackrel{\text{st.u.}}{=} \sum_{n=1}^N s^{(k)} \cdot (t_n - t_{n-1}) E \left( \exp \left( - \int_0^{t_n} r(s) ds \right) (u_k - l_k - (v_k(L_{t_n}))) \right) \\ & = s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N B(0, t_n) (t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - E(v_k(L_{t_n}))). \end{aligned}$$

Fällt das Unternehmen  $j \in \{1, \dots, m\}$  zur Zeit  $\tau_j \in (t_{n-1}, t_n]$  aus, so wird eine zusätzliche Marginzahlung von

$$s^{(k)} \cdot \underbrace{(\tau_j - t_{n-1})}_{\text{Zeitspanne zum letzten Zahltermin}} \cdot \underbrace{(v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-}))}_{\text{zusätzlicher Verlust durch den Ausfall}}$$

durch den Versicherungsnehmer fällig. Dabei ist  $L_{\tau_j-}$  definiert als der linksseitige Limes von  $L_{\tau_j}$  und kann als der Verlust der Tranche  $k$  kurz vor dem Ausfall des Unternehmens  $j$  verstanden werden.

Der erwartete Barwert der Marginzahlungen ist somit gegeben durch

$$s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E\left(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}\right).$$

Zusammen hat das Premium-Leg den Barwert

$$\begin{aligned} & V^{prem} \\ = & s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N B(0, t_n) (t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - E(v_k(L_{t_n}))) \\ + & s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E\left(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}\right). \end{aligned}$$

Die Bewertungsformel für  $s^{(k)}$

Nun gilt mit dem aktuariellen Argument  $V^{def} = V^{prem}$

$$\begin{aligned} & E\left(\int_0^T e^{-\int_0^t r(s) ds} dv_k(L_t)\right) \\ = & s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N B(0, t_n) (t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - E(v_k(L_{t_n}))) \\ + & s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E\left(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}\right) \end{aligned}$$

und damit wird die Bewertungsformel für  $s^{(k)}$  gegeben durch

$$\frac{E\left(\int_0^T e^{-\int_0^t r(s) ds} dv_k(L_t)\right)}{\left( \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N B(0, t_n) (t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - E(v_k(L_{t_n}))) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E\left(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}\right) \end{aligned} \right)} \quad (1.1)$$

### Die Bewertungsformel für die Upfront-Gebühr

Das Premium-Leg fasst die Leistungen des Versicherungsnehmers zusammen. Zusätzlich muss nun die Upfront-Gebühr betrachtet werden. Es folgt für die Tranche  $k$ , dass

$$\begin{aligned}
 & V^{prem} \\
 = & r^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N B(0, t_n)(t_n - t_{n-1}) \left( u_k - l_k - E(v_k(L_{t_n})) \right) \\
 + & r^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E \left( e^{- \int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbf{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}} \right) \\
 + & \text{Upfront-Gebühr der Tranche } k,
 \end{aligned}$$

gilt, wobei  $r^{(k)}$  den Running Spread der Tranche  $k$  bezeichnet.

Zusammen mit dem aktuariellen Argument  $V^{def} = V^{prem}$  ist die Upfront-Gebühr der Tranche  $k$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & E \left( \int_0^T e^{- \int_0^t r(s) ds} dv_k(L_t) \right) \\
 = & r^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N B(0, t_n)(t_n - t_{n-1}) \left( u_k - l_k - E(v_k(L_{t_n})) \right) \\
 = & r^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E \left( e^{- \int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbf{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}} \right). \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Damit sind nun Formeln für eine Bewertung für  $s^{(k)}$  und für die Upfront-Gebühr gegeben. Um nun explizite Preise zu berechnen, ist insbesondere die Portfolioverlustfunktion  $L_t$  zu bestimmen. Das nächste Kapitel ist der Modellierung dieser Funktion gewidmet.

# Kapitel 2

## Modellierung der Portfoliooverlustfunktion

Für eine Bewertung von synthetischen CDO's ist es entscheidend, die Entwicklung der Ausfälle im Portfolio zu prognostizieren. Dazu wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels ein Modell hergeleitet, welches die Entwicklung des Portfolios innerhalb einer Ökonomie versucht zu beschreiben.

Darauf aufbauend lässt sich in einem zweiten Schritt der Portfolioverlust zu einem beliebigen Zeitpunkt bestimmen.

### 2.1 Modellierung

Für einen Zeitraum  $[0, T]$  sei die Entwicklung des Portfolios innerhalb einer Ökonomie beschrieben durch den stochastischen Prozess

$$\Gamma = (\Psi_t, Y_t)_{t \in [0, T]}.$$

Dabei sei die Ökonomie repräsentiert durch den Prozess  $\Psi$  sowie der Zustand des Portfolios durch  $Y$ .

$\Psi$  soll Werte in  $\mathbb{R}^d$  annehmen. Die Realisation von  $\Psi$  können als makroökonomische Faktoren interpretiert werden, welche den Zustand der Ökonomie charakterisieren.

Der Prozess  $Y$  nimmt Werte in  $S = \{0, 1\}^{m-1}$  an. Dabei bedeutet für  $y \in S$ :

$$y(i) = 1 \Leftrightarrow \text{ } i\text{-tes Unternehmen ist ausgefallen, } \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Der Portfolioverlust zu einem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  ist dann gegeben durch

$$\sum_{i=1}^m N_i(1 - \delta_i)Y_t(i).$$

Für einen Zustand  $y \in S$  sei weiter der *geflippte Zustand*  $y^i \in S$  für ein Unternehmen  $i \in \{1, \dots, m\}$  definiert durch

$$y^i(i) := 1 - y(i) \quad \text{und} \quad y^i(j) := y(j), \quad i \neq j.$$

Er beschreibt zu einem Zustand  $y \in S$  die umgekehrte (geflippte) Situation für das Unternehmen  $i$ . Der geflippte Zustand wird insbesondere für spätere Definitionen und Rechnungen benötigt.

Für die Verteilung von  $\Gamma$  wird ein kanonisches Modell bemüht. Hierzu wird angenommen, dass  $\Psi$  und  $Y$  càdlàg-Pfade besitzen. Es sei

$$\Omega_1 := D([0, \infty), \mathbb{R}^d), \quad \Omega_2 := D([0, \infty), S).$$

$\Psi$  und  $Y$  werden für alle  $t \geq 0$  definiert durch

$$\Psi_t(\omega_1) := \omega_1(t), \quad Y_t(\omega_2) := \omega_2(t),$$

das heißt  $\Psi$  und  $Y$  sind jeweils die Identitäten auf  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Beide Ergebnisräume seien ausgestattet mit den jeweiligen Borelschen  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_1$  bzw.  $\mathcal{F}_2$ . Auf dem Produktraum

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

wird nun für alle  $t \geq 0$  der stochastische Prozess

$$\Gamma = (\Psi_t, Y_t)_{t \geq 0}$$

definiert durch  $\Gamma_t(\omega_1, \omega_2) = (\Psi_t(\omega_1), Y_t(\omega_2))$ . Der Zustandsraum des Prozesses  $\Gamma$  ist dann gegeben durch  $\overline{S} := \mathbb{R}^d \times S$ .

Für theoretische Zwecke werden die Prozesse  $Y$  und  $\Psi$  auch auf dem Produktraum

---

<sup>1</sup> $m$  ist die Anzahl der CDS-Kontrakte im Portfolio

$\Omega$  für alle  $t \geq 0$  definiert und zwar durch

$$\widehat{\Psi}_t(\omega_1, \omega_2) := \Psi_t(\omega_1), \quad \text{sowie} \quad \widehat{Y}_t(\omega_1, \omega_2) := Y_t(\omega_2).$$

In Abhängigkeit von einem Anfangszustand  $\gamma = (\psi, y) \in \overline{S}$  sei  $\mu_\psi$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  und  $K_y : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \rightarrow [0, 1]$  ein Übergangskern, also insbesondere ein Maß auf  $\Omega_2$ .

Dann kann auf  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  durch

$$P_{(\psi, y)}(C) = \int K_y(\omega_1, C_{\omega_1}) \mu_\psi(d\omega_1) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{F}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  definiert werden, wobei  $C_{\omega_1}$  für  $C \in \mathcal{F}$  die Menge  $\{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in C\}$  bezeichne.

Damit hat  $\widehat{\Psi} = (\widehat{\Psi}_t)_{t \geq 0}$  bzgl.  $P_{(\psi, y)}$  die Verteilung  $\mu_\psi$  und die bedingte Verteilung von  $\widehat{Y}$  gegeben  $\widehat{\Psi} = \omega_1$  ist durch  $K_y(\omega_1, \cdot)$  gegeben, denn

$$P_\gamma(\widehat{Y} \in B | \widehat{\Psi} = \omega_1) = K_y(\omega_1, B)$$

für  $\mu_\psi$  fast alle  $\omega_1$  und alle  $B \in \mathcal{F}_2$ .

Zusammenfassend wird also zur Spezifizierung der Verteilung von  $\Gamma = (\Psi, Y)$  die Verteilung des makroökonomischen Faktors  $\widehat{\Psi}$  durch  $\mu_\psi$  angenommen und die bedingte Verteilung der Entwicklung des Portfolios  $\widehat{Y}$  gegeben  $\widehat{\Psi} = \omega_1$  durch einen Übergangskern  $K_y(\omega_1, \cdot)$  modelliert.

Schließlich werden folgende Filtrationen auf  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$  definiert:

$$\mathcal{F}_t^1 := \sigma(\Psi_s : s \leq t), \quad \mathcal{F}_t^2 := \sigma(Y_s : s \leq t),$$

sowie auf  $\Omega$

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^1 \otimes \mathcal{F}_t^2, \quad \mathcal{G}_t := \mathcal{F}_\infty^1 \otimes \mathcal{F}_t^2.$$

### Bemerkung 2.1

Die Filtrationen können, wie üblich, als Informationsverlauf interpretiert werden. Es wird angenommen, dass Investoren Zugang zu der Filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$  haben. Es stehen ihnen also alle Informationen über die Vergangenheit und Zustand der Ökonomie sowie des Portfolios bis zum Zeitpunkt  $t$  zur Verfügung.

Die größere Filtration  $\{\mathcal{G}_t\}$  hingegen, in welcher der gesamte Verlauf der Ökonomie

bereits bekannt und nur die Entwicklung des Portfolios unbekannt, dient hauptsächlich theoretischen Zwecken.

Nun werden die zentralen Annahmen bzgl. der Prozesse  $\Psi$  und  $Y$  aufgeführt.

**Annahme 2.2** (i) Unter  $P_{(\psi,y)}$  ist der Prozess  $\widehat{\Psi}$  ein  $\{\mathcal{F}_t\}$ -Markovprozess mit Anfangswert  $\psi$ .

(ii) Für stetige Funktionen<sup>2</sup>  $\lambda_i : \overline{S} \longrightarrow (0, \infty)$  und  $\psi \in \mathbb{R}^d$  definiere auf dem Raum aller Funktionen von  $S$  nach  $\mathbb{R}^d$  einen Operator  $G_{[\psi]}$  durch:

$$G_{[\psi]}f(x) := \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\psi, x) (f(x^i) - f(x)), \quad x \in S.$$

Definiere ferner in Abhängigkeit von  $\omega_1 \in \Omega_1$  für alle  $t \geq 0$  ein Familie von Operatoren  $(A_{\omega_1}(t))_{t \geq 0}$  durch

$$A_{\omega_1}(t) = G_{[\Psi_t(\omega_1)]} = G_{[\omega_1(t)]}.$$

Nun sei für alle  $y_0 \in S$  der Prozess  $Y$  unter  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$  ein  $\{\mathcal{F}_t^2\}$ -Markovprozess mit Startpunkt  $y_0 \in S$ . Die entsprechende Halbgruppe  $T_{(s,t|\omega_1)}$  des Prozesses sei dabei erzeugt durch  $(A_{\omega_1}(t))_{t \geq 0}$ .

Bezeichne für  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,  $0 \leq t \leq s < \infty$ ,  $x, y \in S$  mit

$$p(t, s, x, y | \omega_1) := K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_s = y | Y_t = x)$$

die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten von  $Y$  unter  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$ . Dann folgt aus Annahme 2.2, dass für  $0 \leq t \leq s < \infty$  die Familie

$$(p(t, s, x, y | \omega_1))_{x, y \in S}$$

mit der Anfangsbedingung  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_0 = y_0) = 1$  erzeugt wird durch  $(A_{\omega_1}(t))_{t \geq 0}$ .

### Bemerkung 2.3

Für  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,  $t, h \geq 0$ ,  $x \in S$  und  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $x(i) = 0$  definiere durch

$$\eta_{x, x^i}(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{p(t, t + h, x, x^i | \omega_1)}{h}$$

---

<sup>2</sup>für fest gehaltenes  $x \in S$  soll insbesondere  $\lambda_i(\cdot, x)$  stetig in der ersten Komponente sein

die Übergangsintensitäten von  $x$  nach  $x^i$ . Sie können als *Ausfallintensität* der  $i$ -ten Firma zum Zeitpunkt  $t$  und Zustand  $x$  interpretiert werden. Es gilt

$$\begin{aligned} p(t, t+h, x, x^i | \omega_1) &= K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\delta_{x^i} Y_{t+h} | Y_t = x) \\ &= T_{(t, t+h | \omega_1)} \delta_{x^i}(x) \\ &= A_{\omega_1}(t) \delta_{x^i}(x) \cdot h + o(h) \\ &= G_{[\Psi_t(\omega_1)]} \delta_{x^i}(x) \cdot h + o(h). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} G_{[\Psi_t(\omega_1)]} \delta_{x^i}(x) &= \sum_{k=1}^m (1 - x(k)) \lambda_k(\psi, x) (\delta_{x^i}(x^k) - \delta_{x^i}(x)) \\ &= \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich schließlich

$$p(t, t+h, x, x^i | \omega_1) = \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) \cdot h + o(h),$$

sowie für die Intensität

$$\eta_{x, x^i}(t) = \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x).$$

Gegeben  $\Psi = \omega_1$  ist  $\lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x)$  also die Ausfallintensität der  $i$ -ten Firma zum Zeitpunkt  $t$  und Zustand  $x$ .

Hiermit lässt sich nun die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass gegeben  $Y_t = x$  genau die überlebende Firma  $i \in \{1, \dots, m\}$  im Zeitintervall  $(t, t+h]$  für kleines  $h > 0$  ausfällt. Es gilt

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t+h} = x^i | Y_t = x) = \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) \cdot h + o(h). \quad (2.1)$$

Weiter lässt sich unmittelbar aus der Form des Generators  $G_{[\psi]}$  des Prozesses  $Y$  beobachten, dass

- (i) simultane Ausfälle ausgeschlossen werden, denn die Übergangsrate von einem Zustand  $x \in S$  nach  $y \in S$  ist nur dann echt größer 0, wenn ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  existiert mit  $y = x^i$ . Also in dem Fall, dass nur ein Unternehmen ausfällt.
- (ii) 1 ein absorbierender Zustand ist, denn, falls  $x(i) = 1$  für ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt, dann ist  $(1 - x(i)) = 0$  und damit auch die Übergangsrate gleich Null.

## 2.2 Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden Implikationen aus Annahme 2.2 diskutiert. Es wird insbesondere gezeigt, dass auch der Gesamtzustandsprozess  $\Gamma$  unter  $P_\gamma$  bzgl.  $\{\mathcal{F}_t\}$  der Markov-Eigenschaft genügt.

Für diesen Abschnitt - falls nicht anders angemerkt - werden die Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu_\psi, K_y(\omega_1, \cdot)$  und  $P_\gamma$  bzgl. der Startpunkte  $\psi_0 \in \mathbb{R}^d, y_0 \in S$  und  $\gamma_0 = (\psi_0, y_0)$  betrachtet.

Für  $t \in [0, \infty)$  und für einen beliebigen Polnischen Raum  $E$  definiere den Shiftoperator  $\theta_t : D([0, \infty), E) \longrightarrow D([0, \infty), E)$  durch  $\theta_t \omega(s) := \omega(t + s)$ .

### Bemerkung 2.4

Da für festes  $t \geq 0$

$$(A_{\omega_1}(t + h))_{h \geq 0} = (A_{\theta_t \omega_1}(h))_{h \geq 0}$$

gilt, ergibt sich folgende Beziehung für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(t, t + h, x, y | \omega_1) = p(0, h, x, y | \theta_t \omega_1)$$

und damit für alle  $A \in \mathcal{P}(S)$  und fast alle  $\omega_2 \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2) &= p(t, t + h, Y_t(\omega_2), A | \omega_1) \\ &= p(0, h, Y_t(\omega_2), A | \theta_t \omega_1) \\ &= K_{Y_t(\omega_2)}(\theta_t \omega_1, \cdot)(Y_h \in A). \end{aligned}$$

Mit einem Funktionserweiterungsargument<sup>3</sup> erhält man für jede messbare, beschränkte Funktion  $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(f(Y \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2) = E^{K_{Y_t(\omega_2)}(\theta_t \omega_1, \cdot)}(f(Y)). \quad (2.2)$$

### Lemma 2.5

Für jede beschränkte und messbare Funktion  $F(\Psi, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$E_{\gamma_0}(F(\Psi, Y) | \mathcal{G}_t)(\omega_1, \omega_2) = E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y) | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2)$$

---

<sup>3</sup>siehe z.B. Satz 9.4 in [2]

für fast alle  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ .

**Beweis:** Für die Behauptung genügt es die definierenden Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes zu prüfen.

Die Messbarkeit bzgl.  $\mathcal{G}_t$  ist auf natürliche Weise gegeben, da  $E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y) | \mathcal{F}_t^2)$  für alle  $\omega_1 \in \Omega_1$  eine  $\mathcal{F}_t^2$ -messbare Abbildung ist, folgt auch die Messbarkeit bzgl. der größeren  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}_t$ .

Es verbleibt für alle  $C \in \mathcal{G}_t$  zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \int_C F(\Psi(\omega_1), Y(\omega_2)) P_{\gamma_0}(d\omega_1, d\omega_2) \\ &= \int_C E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y) | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2) P_{\gamma_0}(d\omega_1, d\omega_2) \end{aligned}$$

gilt.

Da  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_\infty^1 \otimes \mathcal{F}_t^2$  von den  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_\infty^1$  und  $\mathcal{F}_t^2$  erzeugt wird, genügt es die Behauptung für  $C = A \times B$  mit  $A \in \mathcal{F}_\infty^1$  und  $B \in \mathcal{F}_t^2$  zu zeigen. Nun ist

$$\begin{aligned} & \int_{A \times B} F(\Psi(\omega_1), Y(\omega_2)) P_{\gamma_0}(d\omega_1, d\omega_2) \\ &= \int_A \int_B F(\Psi(\omega_1), Y(\omega_2)) K_{y_0}(\omega_1, d\omega_2) \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \\ &\stackrel{\text{Eig. bed. Erw.}}{=} \int_A \int_B E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y) | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2) K_{y_0}(\omega_1, d\omega_2) \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \\ &= \int_{A \times B} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y) | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2) P_{\gamma_0}(d\omega_1, d\omega_2), \end{aligned}$$

womit die zweite definierende Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes folgt. Die Behauptung ergibt sich aus der fast sicheren Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes.

□

### Satz 2.6

Der Prozess  $\Gamma = (\Psi_t, Y_t)_{t \in [0, T]}$  genügt unter  $P_{\gamma_0}$  bzgl.  $\{\mathcal{F}_t\}$  der Markov-Eigenschaft.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass für jede messbare und beschränkte Funktion

$$F(\Psi, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$E_{\gamma_0}(F(\Psi \circ \theta_t, Y \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t)(\omega) = E_{\Gamma_t(\omega)}(F(\Psi, Y))$$

für fast alle  $\omega \in \Omega$  gilt<sup>4</sup>.

Zunächst ist mit Lemma 2.5 und (2.2) für fast alle  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$

$$\begin{aligned} & E_{\gamma_0}(F(\Psi, Y \circ \theta_t) | \mathcal{G}_t)(\omega_1, \omega_2) \\ \stackrel{\text{Lemma 2.5}}{=} & E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t^2)(\omega_2) \\ \stackrel{(2.2)}{=} & E^{K_{Y_t(\omega_2)}(\theta_t \omega_1, \cdot)}(F(\Psi(\omega_1), Y)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nun wird der bedingte Erwartungswert bzgl. der kleineren Filtration  $\mathcal{F}_t$  betrachtet. Mit den Rechenregeln des bedingten Erwartungswertes ergibt sich

$$\begin{aligned} & E_{\gamma_0}(F(\Psi \circ \theta_t, Y \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t)(\omega_1, \omega_2) \\ \stackrel{\text{Satz 51.6 in [2]}}{=} & E_{\gamma_0}\left(E_{\gamma_0}(F(\Psi \circ \theta_t, Y \circ \theta_t) | \mathcal{G}_t) | \mathcal{F}_t\right)(\omega_1, \omega_2) \quad f.s. \end{aligned}$$

Für den inneren bedingten Erwartungswert definiere eine Hilfsfunktion  $H(\omega_1, x)$  durch

$$H(\omega_1, x) := E^{K_x(\omega_1, \cdot)} F(\Psi(\omega_1), Y).$$

Dann gilt zusammen mit (2.3) und dem auf  $\Omega$  definierten Shiftoperator  $\widehat{\theta}_t \omega(s) = (\omega_1(t+s), \omega_2(t+s))$

$$\begin{aligned} & E_{\gamma_0}(F(\Psi \circ \theta_t, Y \circ \theta_t) | \mathcal{G}_t)(\omega_1, \omega_2) \\ \stackrel{(2.3)}{=} & H(\Psi \circ \theta_t(\omega_1), Y_t(\omega_2)) \\ = & H(\widehat{\Psi} \circ \widehat{\theta}_t(\omega_1, \omega_2), \widehat{Y}_t(\omega_1, \omega_2)) \\ = & \sum_{x \in S} H(\widehat{\Psi} \circ \widehat{\theta}_t(\omega_1, \omega_2), x) \cdot \mathbb{1}_{\{\widehat{Y}_t=x\}}(\omega_1, \omega_2) \quad f.s. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} & E_{\gamma_0}\left(\sum_{x \in S} H(\widehat{\Psi} \circ \widehat{\theta}_t, x) \underbrace{\mathbb{1}_{\{\widehat{Y}_t=x\}}}_{\mathcal{F}_t\text{-messbar}} | \mathcal{F}_t\right)(\omega_1, \omega_2) \\ = & \sum_{x \in S} \mathbb{1}_{\{\widehat{Y}_t=x\}}(\omega_1, \omega_2) E_{\gamma_0}(H(\widehat{\Psi} \circ \widehat{\theta}_t, x) | \mathcal{F}_t)(\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>vgl. Bemerkung nach (14.7) in [6]

$$\widehat{\Psi} \text{ ist MK bzgl. } \mathcal{F}_t \quad \sum_{x \in S} \mathbb{1}_{\{\widehat{Y}_t=x\}}(\omega_1, \omega_2) E^{\mu_{\widehat{\Psi}_t(\omega_1, \omega_2)}} H(\widehat{\Psi}, x) \quad f.s.$$

Weiter ist für  $\psi \in \mathbb{R}^d$  und unter Anwendung der Definition von  $H$

$$\begin{aligned} E^{\mu_\psi} H(\Psi, x) &= E^{\mu_\psi} E^{K_x(\omega_1, \cdot)} F(\Psi(\omega_1), Y) \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(\Psi(\omega_1), Y(\omega_2)) K_x(\omega_1, d\omega_2) \mu_\psi(d\omega_1) \\ &= E_{(\psi, x)} F(\Psi, Y). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$\begin{aligned} E_{\gamma_0}(F(\Psi \circ \theta_t, Y \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t)(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{x \in S} \mathbb{1}_{\{\widehat{Y}_t=x\}}(\omega_1, \omega_2) E^{\mu_{\widehat{\Psi}_t(\omega_1, \omega_2)}} H(\widehat{\Psi}, x) \\ &= E_{(\widehat{\Psi}_t(\omega_1, \omega_2), \widehat{Y}_t(\omega_1, \omega_2))} F(\Psi, Y) \\ &= E_{\Gamma_t(\omega_1, \omega_2)}(F(\Psi, Y)) \quad f.s. \end{aligned}$$

□

Die Aussage von Satz 2.6 ist nicht nur aus theoretischer Sicht interessant. Da nun gezeigt ist, dass auch  $\Gamma$  der Markov-Eigenschaft genügt, ist es möglich bedingte Erwartungswerte der Form  $E_{\gamma_0}(h(\Psi_T, Y_T) | \mathcal{F}_t)$  für eine beliebige Funktion  $h : \overline{S} \rightarrow \mathbb{R}$  leicht zu berechnen. Denn  $E_{\gamma_0}(h(\Psi_T, Y_T) | \mathcal{F}_t)$  lässt sich nun durch eine Funktion  $H(t, \Psi_t, Y_t)$  mit  $H : [0, 1] \times \overline{S} \rightarrow \mathbb{R}$  ausdrücken.  $H$  wiederum kann durch numerische Verfahren oder Simulation bestimmt werden.

### Bemerkung 2.7

Des Weiteren lässt sich zusammen mit Bemerkung 2.3 für  $\omega_1 \in \Omega_1$  und  $t \geq 0$  die Matrix der Ausfallintensitäten definieren durch

$$\Lambda_{\omega_1}(t) = \left( \lambda_x(\Psi_t(\omega_1), y) \right)_{x, y \in S},$$

wobei  $\lambda_x(\cdot, y)$  gesetzt ist als

$$\lambda_x(\cdot, y) = \begin{cases} (1 - y(i)) \lambda_i(\cdot, y) & \text{falls ein } i \text{ mit } x = y^i \text{ existiert} \\ - \sum_{i=1}^m (1 - y(i)) \lambda_i(\cdot, y) & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie besitzt eine natürliche Korrespondenz zum infinitesimalen Generator  $G_{[\Psi_t(\omega_1)]}$ , denn indem man das "mapping"<sup>5</sup> auf eine beliebige Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  anwendet, erhält man

$$\Lambda_{\omega_1}(t)f(x) := \sum_{y \in S} \lambda_y(\Psi_t(\omega_1), x)f(y) = G_{[\Psi_t(\omega_1)]}f(x).$$

## 2.3 Die Kolmogorovschen Differentialgleichungen

Um explizite Übergangswahrscheinlichkeiten der Form  $p(t, s, x, y|\omega_1)$  zu berechnen, kann nun die Theorie stetiger Markovprozesse bemüht werden. Ein wichtiges Hilfsmittel sind die Kolmogorovschen Differentialgleichungen<sup>6</sup>. Dazu wird allgemein folgende Familie von bedingten Wahrscheinlichkeiten formuliert. Für  $\omega_1 \in \Omega_1$  und  $0 \leq t \leq s < \infty$  sei

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(t, s) = \left( p(t, s, x, y|\omega_1) \right)_{x, y \in S}.$$

Zusammen mit der Familie der Ausfallintensitäten

$$\Lambda_{\omega_1}(t) = \left( \lambda_x(\Psi_t(\omega_1), y) \right)_{x, y \in S}$$

aus dem vorherigen Abschnitt erfüllen diese Familien die folgenden Differentialgleichungen:

### Die Vorwärts-Gleichung

$$\frac{d\mathcal{P}_{\omega_1}(t, s)}{ds} = \mathcal{P}_{\omega_1}(t, s) \cdot \Lambda_{\omega_1}(s)$$

mit der Anfangsbedingung  $\mathcal{P}(t, t) = \text{id}$

### und die Rückwärts-Gleichung

$$\frac{d\mathcal{P}_{\omega_1}(t, s)}{dt} = -\Lambda_{\omega_1}(t) \cdot \mathcal{P}_{\omega_1}(t, s)$$

mit der Anfangsbedingung  $\mathcal{P}(s, s) = \text{id}$

---

<sup>5</sup>vgl. Bemerkung vor Proposition 11.2.2 in [3]

<sup>6</sup>siehe z.B. Kapitel 11.2 in [3] oder 1.1.19 in [1]

**Folgerung 2.8**

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p(t, s, x, y|\omega_1)$  ergeben sich die Vorwärts- und Rückwärts-Gleichung nun zu folgenden Differentialgleichungen

(i) aus der Vorwärts-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} p(t, s, x, y|\omega_1) &= \sum_{i=1}^m y(i) \lambda_i(\Psi_s(\omega_1), y^i) p(t, s, x, y^i|\omega_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (1 - y(i)) \lambda_i(\Psi_s(\omega_1), y) p(t, s, x, y|\omega_1) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung  $p(s, s, x, y|\omega_1) = \mathbb{1}_{\{y\}}(x)$

(ii) aus der Rückwärts-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(t, s, x, y|\omega_1) &= \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) (p(t, s, x^i, y|\omega_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) p(t, s, x, y|\omega_1)) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung  $p(t, t, x, y|\omega_1) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y)$

**Beweis:** Mit der Definition der Matrixmultiplikation und der allgemeinen Vorwärts-Gleichung gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} p(t, s, x, y|\omega_1) &= \sum_{z \in S} p(t, s, x, z|\omega_1) \lambda_z(\Psi_s(\omega_1), z) \\ &= \sum_{i=1}^m (1 - y^i(i)) \lambda_i(\Psi_s(\omega_1), y^i) p(t, s, x, y^i|\omega_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (1 - y(i)) \lambda_i(\Psi_s(\omega_1), y) p(t, s, x, y|\omega_1) \\ &\stackrel{1-y^i(i)=y(i)}{=} \sum_{i=1}^m y(i) \lambda_i(\Psi_s(\omega_1), y^i) p(t, s, x, y^i|\omega_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (1 - y(i)) \lambda_i(\Psi_s(\omega_1), y) p(t, s, x, y|\omega_1). \end{aligned}$$

Für die Rückwärts-Gleichung ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} p(t, s, x, y | \omega_1) &= - \sum_{z \in S} \lambda_z(\Psi_t(\omega_1), x) p(t, s, z, y | \omega_1) \\
 &= - \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) p(t, s, x^i, y | \omega_1) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) p(t, s, x, y | \omega_1) \\
 &= \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) p(t, s, x^i, y | \omega_1) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), x) p(t, s, x, y | \omega_1).
 \end{aligned}$$

□

Das folgende Beispiel dient der Verdeutlichung der Ergebnisse.

### Beispiel 2.9

Das Portfolio sei durch  $m = 2$  CDS-Kontrakte gegeben. Der Zustandsraum hat somit die Dimension  $|S| = \{0, 1\}^2 = 2^2 = 4$ . Damit ist

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(t, s) = \begin{pmatrix} p(t, s, (0, 0), (0, 0) | \omega_1) & \dots & p(t, s, (0, 0), (1, 0) | \omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(t, s, (1, 0), (0, 0) | \omega_1) & \dots & p(t, s, (1, 0), (1, 0) | \omega_1) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\omega_1}(t) &= \begin{pmatrix} \lambda_{(0, 0)}(\Psi_t(\omega_1), (0, 0)) & \dots & \lambda_{(1, 0)}(\Psi_t(\omega_1), (0, 0)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{(0, 0)}(\Psi_t(\omega_1), (1, 0)) & \dots & \lambda_{(1, 0)}(\Psi_t(\omega_1), (1, 0)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i(\Psi_t(\omega_1), (0, 0)) & \lambda_1(\Psi_t(\omega_1), (1, 0)) & \lambda_2(\Psi_t(\omega_1), (0, 1)) & 0 \\ 0 & -\lambda_2(\Psi_t(\omega_1), (1, 0)) & 0 & \lambda_2(\Psi_t(\omega_1), (0, 1)) \\ 0 & 0 & -\lambda_1(\Psi_t(\omega_1), (1, 0)) & \lambda_1(\Psi_t(\omega_1), (0, 1)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nun gilt, unter Verwendung der Matrixmultiplikation für die Vorwärts-Gleichung,

beispielhaft für  $x = (0)$  und  $y = (1)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} p(t, s, (0), (1) | \omega_1) &= p(t, s, (0), (0) | \omega_1) \cdot 0 \\
 &\quad + p(t, s, (0), (1) | \omega_1) \cdot \lambda_2(\Psi_t(\omega_1), (1)) \\
 &\quad + p(t, s, (0), (1) | \omega_1) \cdot \lambda_1(\Psi_t(\omega_1), (0)) \\
 &\quad + p(t, s, (0), (1) | \omega_1) \cdot 0 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i((1)^i, \Psi_t(\omega_1)) \cdot p(t, s, (0), (1)^i | \omega_1).
 \end{aligned}$$

Die Kolmogorovschen Differentialgleichungen lassen sich auch mit Hilfe des infinitesimalen Generators<sup>7</sup> formulieren.

**Korollar 2.10**

Es gilt

(i) für die Vorwärts-Gleichung

$$\frac{d}{ds} p(t, s, x, y | \omega_1) = G_{[\Psi_s(\omega_1)]}^* p(t, s, x, y | \omega_1)$$

mit der Anfangsbedingung  $p(s, s, x, y | \omega_1) = \mathbb{1}_{\{y\}}(x)$

(ii) für die Rückwärts-Gleichung

$$\frac{d}{dt} p(t, s, x, y | \omega_1) = -G_{[\Psi_t(\omega_1)]} p(t, s, x, y | \omega_1)$$

mit der Anfangsbedingung  $p(t, t, x, y | \omega_1) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y)$ ,

wobei für  $\psi \in \mathbb{R}^d$   $G_{[\psi]}^*$  als der adjungierte Operator von  $G_{[\psi]}$  definiert ist. Dabei gilt, dass  $G_{[\psi]}^*$  - in gleicher Weise wie  $G_{[\psi]}$  zu  $\Lambda_t(\omega_1)$  - zu der transponierten Matrix der Ausfallintensitäten  $\Lambda_{\omega_1}(t)^{tr}$  korrespondiert.

---

<sup>7</sup>siehe z.B. 14.11 in [6]



# Kapitel 3

## Bewertung von synthetischen CDO's

In Kapitel 2 ist mit Hilfe der Theorie der stetigen Markovprozesse eine Modellierung für die Portfolioverlustfunktion beschrieben worden. Es ist nun möglich synthetische CDO's zu bewerten, also für die einzelnen Tranchen Verzinsung und Upfront-Gebühr zu berechnen.

Dazu wird in diesem Kapitel gezeigt, wie Premium- und Default-Leg aus Kapitel 1 berechnet werden. Zunächst werden die in Abschnitt 1.5 eingeführten Integrale genauer betrachtet und vereinfacht. Danach wird das Mean-Field-Modell eingeführt, welches dazu dient, das Portfolio in homogene Gruppen zu strukturieren. Dies ist von Vorteil, um den Rechenaufwand in Anwendungen zu reduzieren.

Das Kapitel schließt mit der Betrachtung des Spezialfalls einer homogenen Gruppe. Hierfür werden explizit Bewertungsformeln für Verzinsung und Upfront-Gebühr bestimmt.

Für den restlichen Verlauf der Arbeit sei der stochastische Prozess  $(r(s))_{s \in [0, T]}$  der Zinsraten deterministisch. Hiermit ergibt sich der Diskontierungsprozess zu  $B(0, t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ .

Des Weiteren sei jeder Pfad des Makroökonomieprozesses  $\omega_1 \in \Omega_1$  stetig in  $t$ , das heißt die Abbildung  $t \mapsto (\Psi_t(\omega_1))$  sei stetig.

### 3.1 Resultate für allgemeine Portfolien

In diesem Abschnitt wird nun für beliebige Portfolien eine Bewertung mit Hilfe der Modellierung aus Kapitel 2 gegeben. Der Wahrscheinlichkeitsraum und die entsprechenden Filtrationen seien wie im vorherigen Kapitel gewählt. Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  war gemäß Kapitel 2 durch  $P_{\gamma_0}(d\omega_1, d\omega_2) = K_{\gamma_0}(\omega_1, d\omega_2) \times \mu_{\psi_0}(d\omega_1)$  gegeben.

Die Ausfallzeiten  $\tau_i$  für Unternehmen  $i \in \{1, \dots, m\}$  werden modelliert durch die Stoppzeit  $\tau_i : \Omega_2 \longrightarrow (0, \infty)$ , wobei  $\tau_i$  definiert ist durch  $\tau_i = \inf\{t \geq 0 : Y_t(i) = 1\}$ . Die Portfolioverlustfunktion  $L_t$  ist somit eine Abbildung auf  $\Omega_2$ .

Erneut werden das Default- und das Premium-Leg betrachtet.

#### Zum Default-Leg

Aus Kapitel 1 ist die Gestalt des Default-Legs bekannt. Unter dem Maß  $P_{\gamma_0}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} V^{def} &= E_{\gamma_0} \left( \int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dv_k(L_t) \right) \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dv_k(L_t(\omega_2)) K_{\gamma_0}(\omega_1, d\omega_2) \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1} E^{K_{\gamma_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dv_k(L_t) \right) \mu_{\psi_0}(d\omega_1). \end{aligned}$$

Zunächst sei ein Pfad  $\omega_1 \in \Omega_1$  des Makroökonomieprozesses  $\Psi$  fest vorgegeben und in einem ersten Schritt vorerst der innere Erwartungswert betrachtet.

Das Integral  $\int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dv_k(L_t)$ <sup>1</sup> mit dem monoton steigenden Prozess  $v_k(L_t)$  kann mittels partieller Integration für Riemann-Stieltje-Integrale berechnet werden. Mit

$$\frac{d}{dt} \exp \left( - \int_0^t r(s)ds \right) = -r(t) \exp \left( - \int_0^t r(s)ds \right)$$

gilt nun unter der Annahme, dass zu Beginn der Laufzeit der Verlust in der Tranche

---

<sup>1</sup>vgl. Abschnitt 5.3 in [15]

$k$  gleich null ist:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dv_k(L_t) &\stackrel{(1.1.2) \text{ in [14]}}{=} \left[ e^{-\int_0^t r(s)ds} v_k(L_t) \right]_0^T - \int_0^T v_k(L_t) d(e^{-\int_0^t r(s)ds}) \\ &= e^{-\int_0^T r(s)ds} v_k(L_T) + \int_0^T r(t) e^{-\int_0^t r(s)ds} v_k(L_t) dt. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Damit kann  $V^{def}$  umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} V^{def} &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dv_k(L_t) \right) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( e^{-\int_0^T r(s)ds} v_k(L_T) + \int_0^T r(t) e^{-\int_0^t r(s)ds} v_k(L_t) dt \right) \\ &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( e^{-\int_0^T r(s)ds} v_k(L_T) \right) + E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \int_0^T r(t) e^{-\int_0^t r(s)ds} v_k(L_t) dt \right) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( e^{-\int_0^T r(s)ds} v_k(L_T) \right) + \int_0^T E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( r(t) e^{-\int_0^t r(s)ds} v_k(L_t) \right) dt \\ &\stackrel{r \text{ det.}}{=} B(0, T) E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( v_k(L_T) \right) + \int_0^T r(t) B(0, t) E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( v_k(L_t) \right) dt. \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte  $E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t))$  mit  $t \geq 0$  können nun zum Beispiel mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation leicht berechnet werden. Aber auch durch Lösen der Kolmogorovschen Differentialgleichungen kann der Erwartungswert bestimmt werden. Aus  $L_t = \sum_{i=1}^m N_i(1 - \delta_i)Y_t(i)$  folgt nämlich, dass für eine beliebige Tranche  $k$  der Erwartungswert  $E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t))$  geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t)) &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i(1 - \delta_i)Y_t(i) \right) \\ &= \sum_{y \in S} v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i(1 - \delta_i)y(i) \right) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y), \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt worden ist, dass  $v_k(L_t) = \sum_{y \in S} v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i(1 - \delta_i)y(i) \right) \mathbb{1}_{\{Y_t=y\}}$  gilt. Für die Wahrscheinlichkeiten  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) = K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | Y_0 = y_0)$  können

dann die Kolmogorovschen Differentialgleichungen bemüht werden.

Das innere Integral kann nun vollständig bestimmt werden. Das Default-Leg ergibt sich schließlich durch Integration bzgl. des Maßes  $\mu_{\psi_0}$ . Dies geschieht typischerweise mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation.

### Zum Premium-Leg

Das Premium-Leg setzt sich aus 2 Termen zusammen. Zu einem aus den abdiskontierten regulären Prämienzahlungen

$$s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N B(0, t_n)(t_n - t_{n-1}) \left( u_k - l_k - E_{\gamma_0} \left( v_k(L_{t_n}) \right) \right)$$

sowie aus den abdiskontierten Marginzahlungen

$$s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m E_{\gamma_0} \left( e^{- \int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}} \right).$$

Zur Bestimmung des Barwerts der regulären Prämienzahlungen fließt als zufällige Größe der Erwartungswert

$$E_{\gamma_0} \left( v_k(L_{t_n}) \right) = \int_{\Omega_1} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( v_k(L_{t_n}) \right) \mu_{\psi_0}(d\omega_1)$$

ein, wobei  $t_n$  den Prämienzahltermin angibt. Diese Erwartungswerte können wie im vorherigen Abschnitt schrittweise berechnet werden.

Für den Barwert der Marginzahlungen lässt sich der Erwartungswert innerhalb der Summe weiter vereinfachen. Sei zunächst wieder ein Pfad  $\omega_1 \in \Omega_1$  des Makroökonomieprozesses  $\Psi$  fest gegeben und es werde nur der Erwartungswert bzgl.  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$  betrachtet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( e^{- \int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}} \right) \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \underbrace{e^{- \int_0^s r(s) ds}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(s - t_{n-1}) (v_k(L_s) - v_k(L_{s-}))}_{\in \mathbb{R}} \Big| \tau_j = s \right) f_{\tau_j}(s) ds \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} B(0, s) (s - t_{n-1}) E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( v_k(L_s) - v_k(L_{s-}) \Big| \tau_j = s \right) f_{\tau_j}(s) ds, \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei  $f_{\tau_j}(t)$  die Dichte der Stoppzeit  $\tau_j$  bzgl. des Maßes  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$  bezeichnet.

Wie sich ein bedingter Erwartungswert der Form  $E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_s) - v_k(L_{s-}) | \tau_j = s)$  bzw. die Dichte  $f_{\tau_j}(t)$  berechnen lassen, zeigt der nachstehende Satz.

### Satz 3.1

Für  $i_0 \in \{1, \dots, m\}$  ist die Dichte der Stoppzeit  $\tau_{i_0}$  gegeben durch

$$f_{\tau_{i_0}}(t) = \sum_{y \in S: y(i_0)=0} \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y)$$

und für beliebiges  $y \in S$  ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben  $\{\tau_{i_0} = t\}$  als

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_{i_0} = t) = y(i_0) f_{\tau_{i_0}}(t)^{-1} \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y^{i_0}) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y^{i_0}).$$

**Beweis:** Um die Dichte der Stoppzeit  $f_{\tau_{i_0}}(t)$  zu bestimmen, muss zunächst

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \text{ bzw. } K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t - \epsilon)$$

berechnet werden.  $f_{\tau_{i_0}}(t)$  ergibt sich dann als Limes von  $\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t)$  bzw.  $\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon)$  für  $\epsilon \downarrow 0$ .

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ = & \sum_{y \in S} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y, t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ = & \sum_{y \in S: y(i_0)=0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y, t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ = & \sum_{y \in S: y(i_0)=0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t | Y_{t-\epsilon} = y) \\ \stackrel{\text{MK}}{=} & \sum_{y \in S: y(i_0)=0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) K_y(\theta_{t-\epsilon}\omega_1, \cdot)(\tau_{i_0} \leq \epsilon) \\ \stackrel{(2.1)}{=} & \sum_{y \in S: y(i_0)=0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) \lambda_{i_0}(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), y) \cdot \epsilon + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Für den Limes  $\epsilon \downarrow 0$  gilt nun, dass  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) \rightarrow K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y)$  für alle  $t > 0$ <sup>2</sup> sowie  $\lambda_{i_0}(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), y) \rightarrow \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y)$ , da nach Annahme der Pfad von  $\omega_1$

<sup>2</sup>folgt aus der Stetigkeit von  $h \mapsto T_{(t, t+h | \omega_1)}$

und die Funktion  $\lambda_i(\cdot, x)$  stetig sind. Zusammen folgt

$$\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \sum_{y \in S: y(i_0) = 0} \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y).$$

Für  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon)$  ergibt sich analog

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \\ = & \sum_{y \in S} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y, t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \\ = & \sum_{y \in S: y(i_0) = 0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y, t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \\ = & \sum_{y \in S: y(i_0) = 0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon | Y_t = y) \\ \stackrel{\text{MK}}{=} & \sum_{y \in S: y(i_0) = 0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) K_y(\theta_t \omega_1, \cdot)(\tau_{i_0} \leq \epsilon) \\ \stackrel{(2.1)}{=} & \sum_{y \in S: y(i_0) = 0} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

und damit für den Limes  $\epsilon \downarrow 0$  die erste Behauptung, denn

$$\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \sum_{y \in S: y(i_0) = 0} \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y).$$

Im Beweis für die erste Behauptung wurde mit Hilfe der Markoveigenschaft von  $Y$  und (2.1) gezeigt, dass für ein  $y \in S$  mit  $y(i_0) = 0$

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y, t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ = & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) \lambda_{i_0}(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), y) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

gilt. Für  $y \in S$  mit  $y(i_0) = 1$  ist die Wahrscheinlichkeit trivialerweise gleich 0.

Für  $\epsilon \downarrow 0$  kann der Grenzwert von

$$\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y, t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t)$$

als gemeinsame Dichte von  $\tau_{i_0}$  und  $Y_{t-}$  interpretiert werden. Sie ist gegeben durch

$$(1 - y(i_0)) \cdot K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) \cdot \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y).$$

Um nun die zweite Behauptung zu erhalten, fasse man

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_{i_0} = t) = K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-} = y^{i_0} | \tau_{i_0} = t)$$

als bedingte Dichte von  $Y_{t-}$  in  $y^{i_0}$  gegeben  $\tau_{i_0} = t$  auf. Mit der zuvor ermittelten gemeinsamen Dichte erhält man<sup>3</sup> die Randdichte von  $Y_{t-}$  gegeben  $\tau_{i_0} = t$  durch Division der Dichte von  $\tau_{i_0}$ . Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_{i_0} = t) \\ = & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-} = y^{i_0} | \tau_{i_0} = t) \\ = & \frac{\text{gemeinsame Dichte von } \tau_{i_0}, Y_{t-} \text{ in } (t, y^{i_0})}{\text{Dichte von } \tau_{i_0} \text{ in } (t)} \\ \stackrel{1-y^{i_0}(i_0)=y(i_0)}{=} & \frac{y(i_0) \lambda_{i_0}(\Psi_t(\omega_1), y^{i_0}) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y^{i_0})}{f_{\tau_{i_0}}(t)} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Die bedingten Erwartungswerte  $E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t) | \tau_j = t)$  für eine beliebige Tranche  $k$  ergeben sich nun zu

$$E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t) | \tau_j = t) = \sum_{y \in S} v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i (1 - \delta_i) y(i) \right) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_j = t)$$

sowie

$$E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_{t-}) | \tau_j = t) = \sum_{y \in S} v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i (1 - \delta_i) y^j(i) \right) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_j = t).$$

Zusammen erhält man

$$\begin{aligned} & E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t) - v_k(L_{t-}) | \tau_j = t) \\ = & \sum_{y \in S} \left( v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i (1 - \delta_i) y(i) \right) - v_k \left( \sum_{i=1}^m N_i (1 - \delta_i) y^j(i) \right) \right) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_j = t). \end{aligned}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = t | \tau_j = t)$  und damit auch das Integral in (3.2) können nun mit Hilfe von Satz 3.1 bestimmt werden.

---

<sup>3</sup>vgl. Satz 53.11 in [2]

Schließlich werden die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} & E_{\gamma_0} \left( e^{-\int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}} \right) \\ &= \int_{\Omega_1} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( e^{-\int_0^{\tau_j} r(s) ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}} \right) \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \end{aligned}$$

vollständig durch Integration bzgl. des Maßes  $\mu_{\psi_0}$  bestimmt.

Für allgemeine Portfolien sind das Premium- wie auch das Default-Leg berechnet worden und die entsprechende Verzinsung einer Tranche  $k$  bzw. die Upfront-Gebühr ist gefunden.

Für Anwendungen stößt dieses Modell leider schnell an seine Grenzen, da selbst für kleines  $m$  die Dimension des Systems  $2^m$  sehr groß wird. Der Rechenaufwand ist daher enorm. Im nächsten Abschnitt wird eine Möglichkeit präsentiert die Dimension zu reduzieren.

## 3.2 Das Mean-Field-Modell

Die grundlegende Idee des Mean-Field-Modells ist, dass das Portfolio in Gruppen mit ähnlichen Risikoprofilen eingeteilt wird. Diese Gruppierung kann zum Beispiel anhand von Industriesektoren oder Kreditwürdigkeit (Rating) geschehen, dabei muss aber beachtet werden, dass Mitglieder derselben Gruppe auch dieselbe Ausfallwahrscheinlichkeit haben.

Mathematisch formuliert sich diese Annahme wie folgt. Das Portfolio sei in  $k$  homogene Gruppen unterteilbar (typisch  $k \ll m$ ). Innerhalb einer Gruppe haben die zugehörigen Mitglieder die gleiche Ausfallintensität und für den Gesamtprozess ist nur der Anteil der ausgefallenen Firmen in einer Gruppe entscheidend.

Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  gebe  $\kappa(i) \in \{1, \dots, k\}$  die Mitgliedschaft von Unternehmen  $i$  zur Gruppe  $\kappa(i)$  an.  $m_\kappa = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{\kappa(i)=\kappa\}}$  sei die Anzahl der Firmen in Gruppe  $\kappa$ .

Für ein  $y \in S$  sei  $\rho_\kappa(y, \cdot) = \frac{1}{m_\kappa} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{\kappa(i)=\kappa\}} \delta_{y(i)}(\cdot)$  die empirische Verteilung der Firmen in Gruppe  $\kappa$ . Definiere für  $\kappa \in \{1, \dots, k\}$

$$\overline{M}_\kappa(y) := \rho_\kappa(y, \{1\}) \text{ und setze } \overline{M}(y) = (\overline{M}_1(y), \dots, \overline{M}_k(y)).$$

Schließlich sei der Prozess  $\overline{M}$  definiert durch

$$\overline{M}_t = \overline{M}(Y_t).$$

$\overline{M}_{t,\kappa}$  gibt den Anteil von ausgefallenen Firmen bis zur Zeit  $t$  in Gruppe  $\kappa$  an. Der Zustandsraum von  $\overline{M}$  ist gegeben durch

$$S^{\overline{M}} := \{\bar{l} = (\frac{l_1}{m_1}, \dots, \frac{l_k}{m_k}) : l_\kappa \in \{0, \dots, m_\kappa\}, 1 \leq \kappa \leq k\}.$$

**Bemerkung 3.2**

Der Prozess  $\overline{M}$  ist wie  $Y$  definiert auf  $\Omega_2$ , analog wie in Kapitel 2 wird der Prozess auch auf  $\Omega$  erklärt und zwar durch  $\overline{M}_t := \overline{M}(\widehat{Y}_t)$ . In diesem Fall wird auf eine differenzierte Angabe der Bezeichnungen verzichtet und gegebenenfalls an nicht eindeutigen Stellen darauf hingewiesen auf welchen Raum der Prozess betrachtet wird.

**Annahme 3.3** (Mean-Field-Modell mit homogenen Gruppen)

Für Unternehmen  $i \in \{1, \dots, m\}$  der Gruppe  $\kappa \in \{1, \dots, k\}$  ist die Ausfallintensität  $\lambda_i(\psi, y)$  gegeben durch eine stetige Funktion  $h_\kappa : \mathbb{R}^d \times S^{\overline{M}} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $1 \leq \kappa \leq k$  mit  $\lambda_i(\psi, y) = h_{\kappa(i)}(\psi, \overline{M}(y))$ .

Zunächst werden einige Konsequenzen und Bemerkungen aus Annahme 3.3 formuliert.

**Bemerkung 3.4** (i) Annahme 3.3 impliziert, dass für alle  $\kappa$  die Indikatorprozesse  $\{Y_T(i) : 1 \leq i \leq m, \kappa(i) = \kappa\}$  für Unternehmen der gleichen Gruppe austauschbar sind. Die Ausfallintensitäten hängen nur vom Anteil der ausgefallen Unternehmen ab und nicht davon, welche Unternehmen ausgefallen sind.

- (ii) Das Mean-Field-Modell ist das natürliche Risiko-Modell für ein Portfolio, welches eine homogene Gruppenstruktur besitzt. Denn sei umgekehrt zur Annahme 3.3 ein beliebiges Portfolio aus  $m$  Unternehmen gegeben. Der induzierte Indikatorprozess erfülle Annahme 2.2 und das Portfolio sei in  $k < m$  homogene Gruppen unterteilbar. Aus der Homogenität folgt nun, dass
- die Ausfallintensitäten invariant unter Permutationen, welche die Gruppenstruktur berücksichtigen, sind. Es gilt also  $\lambda_i(\psi, y) = \lambda_i(\psi, \pi(y))$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  und alle Permutationen  $\pi$  auf  $\{1, \dots, m\}$  mit  $\kappa(\pi(j)) = \kappa(j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

- b) die Ausfallintensitäten von verschiedenen Unternehmen der gleichen Gruppe identisch sind.

Aus a) folgt nun direkt, dass für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\lambda_i(\psi, y) = h_{\kappa(i)}(\psi, \bar{M}(y))$  für eine Funktion  $h_{\kappa(i)} : \mathbb{R}^d \times \bar{S}^{\bar{M}} \rightarrow (0, \infty)$  gilt und zusammen mit b) erfüllen die Ausfallintensitäten die Annahme 3.3.

- (iii) Der Zustandsraum hat nun die Mächtigkeit  $|\bar{S}^{\bar{M}}| = (m_1 + 1) \cdot \dots \cdot (m_k + 1)$  und somit ist für  $k \ll m$  die Dimension des Systems deutlich reduziert.

**Lemma 3.5**

Im Falle, dass die Ausfallintensitäten Annahme 3.3 erfüllen, folgt der Prozess  $\bar{M}$  unter  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$  einem  $\{\mathcal{F}_t^2\}$ -Markovprozess mit Zustandsraum  $\bar{S}^{\bar{M}}$ .

Der infinitesimale Generator  $G_{[\Psi_t(\omega_1)]}^{\bar{M}}$  des Prozesses ist gegeben durch den Operator  $G_{[\psi]}^{\bar{M}}$  definiert auf dem Raum aller Funktion von  $\bar{S}^{\bar{M}}$  nach  $\mathbb{R}$  durch

$$G_{[\psi]}^{\bar{M}} f(\bar{l}) := \sum_{\kappa=1}^k m_{\kappa} (1 - \bar{l}_{\kappa}) h_{\kappa}(\psi, \bar{l}) \left( f(\bar{l} + \frac{1}{m_{\kappa}} e_{\kappa}) - f(\bar{l}) \right),$$

wobei  $\bar{l} = (\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k) \in \bar{S}^{\bar{M}}$  und  $e_{\kappa} \in (R)^k$  der  $\kappa$ -te Einheitsvektor ist.

**Beweis:** Die Markoveigenschaft von  $\bar{M}$  unter dem Maß  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$  bzgl. der Filtration  $\{\mathcal{F}_t^2\}$  wird von dem Markovprozess  $Y$  vererbt.

Um den Generator zu bestimmen, sei zunächst  $\bar{M}_t = (\frac{l_1}{m_1}, \dots, \frac{l_k}{m_k})$  für  $t \geq 0$  gegeben. Da simultane Ausfälle ausgeschlossen sind, können die Komponenten von  $\bar{M}_{t,\kappa}$  nur um  $\frac{1}{m_{\kappa}}$  springen. Der Träger der Verteilung ist somit durch

$$\{\bar{M}_t\} \cup \{\bar{M}_t + \frac{1}{m_{\kappa}} e_{\kappa} : 1 \leq \kappa \leq k\}$$

gegeben.

Für die Übergangsrate von  $\bar{M}_t$  nach  $\bar{M}_t + \frac{1}{m_{\kappa}} e_{\kappa}$  folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{\kappa(i)=\kappa\}} (1 - Y_t(i)) \lambda_i(\Psi_t, Y_t) \\ &= h_{\kappa}(\Psi_t, \bar{M}_t) \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{\kappa(i)=\kappa\}} (1 - Y_t(i)) \\ &= h_{\kappa}(\Psi_t, \bar{M}_t) m_{\kappa} (1 - \bar{M}_{t,\kappa}). \end{aligned}$$

Der Generator von  $\overline{M}_t$  lässt sich hiermit aus dem Generator von  $Y$  ableiten. Denn sei  $f : S^{\overline{M}} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und sei  $\tilde{f} : S \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\tilde{f} = f \circ \overline{M}$ , dann gilt für  $(\psi, x) \in \overline{S}$  und  $\bar{l} := \overline{M}(x)$

$$\begin{aligned}
G_{[\psi]} \tilde{f}(x) &= \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\psi, x) (\tilde{f}(x^i) - \tilde{f}(x)) \\
&= \sum_{i=1}^m (1 - x(i)) \lambda_i(\psi, x) (f \circ \overline{M}(x^i) - f \circ \overline{M}(x)) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{\kappa(i)=\kappa\}} (1 - x(i)) \lambda_i(\psi, x) (f(\bar{l} + \frac{1}{m_\kappa} e_\kappa) - f(\bar{l})) \\
&= \sum_{\kappa=1}^k m_\kappa (1 - \bar{l}_\kappa) h_\kappa(\psi, \bar{l}) (f(\bar{l} + \frac{1}{m_\kappa} e_\kappa) - f(\bar{l})) \\
&= G_{[\psi]}^{\overline{M}} f(\bar{l}).
\end{aligned}$$

□

Nach Lemma 3.5 genügt  $\overline{M}$  unter  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)$  bzgl.  $\{\mathcal{F}_t^2\}$  der Markov-Eigenschaft. Es lassen sich nun analog zu Kapitel 2.3 die Kolmogorovschen Differentialgleichungen formulieren.

Hierzu werden die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\bar{p}(t, s, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1) = K_{y_0}(\omega_1, \cdot) (\overline{M}_s = \bar{m} | \overline{M}_t = \bar{l})$$

mit  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,  $0 \leq t \leq s < \infty$ ,  $\bar{l}, \bar{m} \in S^{\overline{M}}$  definiert.

### Lemma 3.6

In der obigen Situation lesen sich die Kolmogorovschen Differentialgleichungen als

(i) die **Vorwärts-Gleichung**

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds} \bar{p}(t, s, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1) \\
&= \sum_{\kappa=1}^k \mathbb{1}_{\{\bar{l}_\kappa > 0\}} (1 + m_\kappa (1 - \bar{m}_\kappa)) h_\kappa(\Psi_s(\omega_1), \bar{m} - \frac{1}{m_\kappa} e_\kappa) \bar{p}(t, s, \bar{l}, \bar{m} - \frac{1}{m_\kappa} e_\kappa | \omega_1) \\
&\quad - \sum_{\kappa=1}^k m_\kappa (1 - \bar{m}_\kappa) h_\kappa(\Psi_s(\omega_1), \bar{m}) \bar{p}(t, s, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1)
\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung  $\bar{p}(t, t, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1) = \mathbb{1}_{\{\bar{l}\}}(\bar{m})$

(ii) die Rückwärts-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{p}(t, s, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1) &= - \sum_{\kappa=1}^k m_\kappa (1 - \bar{l}_\kappa) h_\kappa(\Psi_t(\omega_1), \bar{l}) \bar{p}(t, s, \bar{l} + \frac{1}{m_\kappa} e_\kappa, \bar{m} | \omega_1) \\ &+ \sum_{\kappa=1}^k m_\kappa (1 - \bar{l}_\kappa) h_\kappa(\Psi_t(\omega_1), \bar{l}) \bar{p}(t, s, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung  $\bar{p}(s, s, \bar{l}, \bar{m} | \omega_1) = \mathbb{1}_{\{\bar{m}\}}(\bar{l})$ .

**Beweis:** Zunächst werden für  $\bar{l}, \bar{m} \in S^{\bar{M}}$  die Ausfallintensitäten:  $\lambda_{\bar{l}}(\cdot, \bar{m})$  definiert

$$\lambda_{\bar{l}}(\cdot, \bar{m}) = \begin{cases} (1 - m_\kappa) h_\kappa(\cdot, \bar{m}) & \text{falls ein } \kappa \text{ mit } \bar{l} = \bar{m} + \frac{1}{m_\kappa} e_\kappa \text{ existiert} \\ - \sum_{\kappa=1}^k (1 - \bar{m}_\kappa) h_\kappa(\cdot, \bar{m}) & \text{falls } \bar{l} = \bar{m} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Rechnungen können nun analog zu Folgerung 2.8 durchgeführt werden.

□

**Folgerung 3.7** (Implikationen aus der Austauschbarkeit)

In Bemerkung 3.4 (i) wurde festgestellt, dass für alle  $\kappa \in \{1, \dots, k\}$  die Indikatorprozesse  $\{Y_T(i) : 1 \leq i \leq m, \kappa(i) = \kappa\}$  für Unternehmen der gleichen Gruppe austauschbar sind.

Für die Wahrscheinlichkeiten  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\bar{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa})$ ,  $l \in \{0, \dots, m_\kappa\}$  ergibt sich nun:

O.B.d.A. sei  $\kappa(1) = \kappa(2) = \dots = \kappa(m_\kappa) = \kappa$ , also die ersten  $m_\kappa$  Unternehmen seien die Unternehmen der Gruppe  $\kappa$ . Dann ist für alle  $l \in \{0, \dots, m_\kappa\}$

$$\begin{aligned} &K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\bar{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa}) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_l \subset \{1, \dots, m_\kappa\}: \\ \kappa(i_j) = \kappa, j \in \{1, \dots, l\}}} K_{y_0}(\omega_1, \cdot) \left( \{Y_T(i_1) = 1, \dots, Y_T(i_l) = 1\} \right. \\ &\quad \left. \dots \cap \{Y_T(j) = 0 : j \in \{1, \dots, m_\kappa\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}\} \right) \\ &\stackrel{\text{Austauschbarkeit}}{=} \binom{m_\kappa}{l} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(1) = 1, \dots, Y_T(l) = 1, Y_T(l+1) = 0, \dots, Y_T(m_\kappa) = 0). \end{aligned}$$

Weiter sei für  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $l \in \{0, \dots, m_{\kappa(i)}\}$  o.B.d.A.  $i = 1$  und  $\kappa(2) = \kappa(3) = \dots = \kappa(m_{\kappa}) = \kappa(i)$

$$\begin{aligned}
 & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, \overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}}) \\
 = & \sum_{\substack{i_2, \dots, i_l \subset \{2, \dots, m_{\kappa(i)}\}: \\ \kappa(i_j) = \kappa(i), j \in \{2, \dots, l\}}} K_{y_0}(\omega_1, \cdot) \left( \{Y_T(1) = 1, Y_T(i_2) = 1, \dots, Y_T(i_l) = 1\} \right. \\
 & \left. \dots \cap \{Y_T(j) = 0 : j \in \{1, \dots, m_{\kappa}\} \setminus \{i_2, \dots, i_l\}\} \right) \\
 \stackrel{\text{Austauschbarkeit}}{=} & \binom{m_{\kappa(i)} - 1}{l - 1} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(1) = 1, \dots, Y_T(l) = 1, Y_T(l + 1) = 0, \\
 & \dots, Y_T(m_{\kappa(i)}) = 0)
 \end{aligned}$$

Zusammen gilt für  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $l \in \{0, \dots, m_{\kappa(i)}\}$

$$\begin{aligned}
 & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}}) \\
 = & \frac{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, \overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}})}{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}})} \\
 = & \frac{\binom{m_{\kappa(i)} - 1}{l - 1} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(1) = 1, \dots, Y_T(l) = 1, Y_T(l + 1) = 0, \dots, Y_T(m_{\kappa(i)}) = 0)}{\binom{m_{\kappa(i)}}{l} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(1) = 1, \dots, Y_T(l) = 1, Y_T(l + 1) = 0, \dots, Y_T(m_{\kappa(i)}) = 0)} \\
 = & \frac{\frac{(m_{\kappa(i)} - 1)!}{(m_{\kappa(i)} - 1 - (l - 1))!(l - 1)!}}{\frac{(m_{\kappa(i)})!}{(m_{\kappa(i)} - l)!l!}} \\
 = & \frac{l}{m_{\kappa(i)}}.
 \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit kann auch intuitiv bestimmt werden. Verteilt man nämlich  $l$ -Einsen auf  $m_{\kappa(i)}$  Plätze, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Eins ins erste Fach gelegt wird, durch

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{1}{m_{\kappa(i)}}}_{\text{1.Kugel ins 1.Fach}} + \underbrace{\frac{m_{\kappa(i)} - 1}{m_{\kappa(i)}} \cdot \frac{1}{m_{\kappa(i)} - 1}}_{\text{2.Kugel ins 1.Fach}} \\
 & + \dots + \underbrace{\frac{m_{\kappa(i)} - 1}{m_{\kappa(i)}} \dots \frac{m_{\kappa(i)} - l}{m_{\kappa(i)} - (l - 1)} \cdot \frac{1}{m_{\kappa(i)} - l}}_{\text{l.Kugel ins 1.Fach}} \\
 = & \frac{1}{m_{\kappa(i)}} + \dots + \frac{1}{m_{\kappa(i)}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{l}{m_{\kappa(i)}}.$$

gegeben. Hiermit gilt nun

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa(i)}) \\ &= \sum_{l=0}^{m_{\kappa(i)}} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}}) \mathbb{1}_{\{\overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}}\}} \\ &= \sum_{l=0}^{m_{\kappa(i)}} \frac{l}{m_{\kappa(i)}} \mathbb{1}_{\{\overline{M}_{T,\kappa(i)} = \frac{l}{m_{\kappa(i)}}\}} \end{aligned}$$

und somit ergibt sich für fast alle  $\omega_2 \in \Omega_2$

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa(i)})(\omega_2) = \overline{M}_{T,\kappa(i)}(\omega_2).$$

Mit den Rechenregeln des bedingten Erwartungswertes ist schließlich

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1) \\ &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa(i)})) \\ &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(\overline{M}_{T,\kappa(i)}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Des Weiteren kann für  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$  mit  $\kappa(i) = \kappa(j)$  und  $m_{\kappa(i)} \geq 2$ , als auch für  $\kappa(i) \neq \kappa(j)$  die Wahrscheinlichkeit  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1)$  bestimmt werden.

Im Fall von  $\kappa(i) = \kappa(j) = \kappa$  gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_{\kappa}}) = \frac{\binom{m_{\kappa}-2}{l-2}}{\binom{m_{\kappa}}{l}},$$

wobei  $l \in \{2, \dots, m_{\kappa}\}$ . Für  $l = 0$  und  $l = 1$  ist die bedingte Wahrscheinlichkeit trivialer Weise gleich null.

Damit gilt für alle  $l \in \{2, \dots, m_{\kappa}\}$ , dass

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1, \overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_{\kappa}}) \\ &= K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_{\kappa}}) \cdot K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_{\kappa}}) \\ &= \frac{\binom{m_{\kappa}-2}{l-2}}{\binom{m_{\kappa}}{l}} \cdot K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_{\kappa}}) \end{aligned}$$

$$= \frac{l(l-1)}{m_\kappa(m_\kappa-1)} \cdot K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa})$$

und schließlich ist nun

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1) \\ &= \sum_{l=2}^{m_\kappa} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1, \overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa}) \\ &= \sum_{l=2}^{m_\kappa} \frac{l(l-1)}{m_\kappa(m_\kappa-1)} \cdot K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa}) \\ &= \frac{m_\kappa}{m_\kappa-1} \sum_{l=2}^{m_\kappa} \left( \frac{l}{m_\kappa} \right)^2 K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa}) \\ &\quad - \frac{1}{m_\kappa-1} \sum_{l=2}^{m_\kappa} \frac{l}{m_\kappa} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(\overline{M}_{T,\kappa} = \frac{l}{m_\kappa}) \\ &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \frac{m_\kappa}{m_\kappa-1} \overline{M}_{T,\kappa}^2 \right) - E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \frac{1}{m_\kappa-1} \overline{M}_{T,\kappa} \right) \\ &= E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)} \left( \overline{M}_{T,\kappa} \frac{m_\kappa \overline{M}_{T,\kappa} - 1}{m_\kappa - 1} \right). \end{aligned}$$

Für Unternehmen unterschiedlicher Gruppen kann nun analog zur ersten Folgerung gezeigt werden, dass für fast alle  $\omega_2 \in \Omega_2$

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1 | \overline{M}_{T,\kappa(i)} \overline{M}_{T,\kappa(j)})(\omega_2) = \overline{M}_{T,\kappa(j)}(\omega) \overline{M}_{T,\kappa(i)}(\omega_2)$$

gilt, und damit ist wiederum mit den Rechenregeln des bedingten Erwartungswertes

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1) = E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(\overline{M}_{T,\kappa(i)} \overline{M}_{T,\kappa(j)}).$$

### Bemerkung 3.8

Mit Folgerung 3.7 können nun Korrelationen für die Bernoulli-Variablen  $\{Y_T(i)\}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , berechnet werden. Aus

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1) = E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(\overline{M}_{T,\kappa(i)}) = 1 - K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 0)$$

folgt, dass

$$E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(Y_T(i)) = E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(\overline{M}_{T,\kappa(i)}),$$

gilt sowie

$$Var(Y_T(i)) = E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(\overline{M}_{T,\kappa(i)}) (1 - E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(\overline{M}_{T,\kappa(i)}))$$

ist.

Die Korrelationen  $\rho_{(Y_T(i), Y_T(j))}$  von  $Y_T(i)$  und  $Y_T(j)$ ,  $i \neq j$ , ergeben sich somit zu

$$\frac{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_T(i) = 1, Y_T(j) = 1) - E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(Y_T(i))E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(Y_T(j))}{\sqrt{Var(Y_T(i))}\sqrt{Var(Y_T(j))}}.$$

### 3.3 Das Mean-Field-Modell für ein homogenes Portfolio

Zur Bewertung von synthetischen CDO's und im Speziellen zur Bewertung des iTraxx Europe eignet sich die Situation eines Mean-Field-Modells bestehend aus nur einer Gruppe. In diesem Abschnitt wird dieser Spezialfall detailliert dargestellt und Bewertungsformeln explizit bestimmt.

Nach Annahme 3.3 sind nun die Ausfallintensitäten aller Firmen im Portfolio gleich. Sie seien gegeben durch  $h(\Psi_t(\omega_1), l)$  für  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,  $t \geq 0$  und  $l \in \{0, \dots, m\}$ . Mit  $l \in \{0, \dots, m\}$  sei die Anzahl der ausgefallenen Firmen angegeben.

Es wird weiter angenommen, dass alle CDS-Kontrakte im Portfolio denselben Nominalbetrag  $N = N_1 = \dots = N_m$  sowie identische Recovery Rates  $\delta = \delta_1 = \dots = \delta_m$  haben. Die Annahme identischer Nominalbeträge ist vor allem für Indizes erfüllt, also insbesondere im Falle des iTraxx Europe.

Definiere schließlich einen Prozess  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  durch  $M_t := \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} = \sum_{i=1}^m Y_t(i)$  bzw. durch  $M_t = m \cdot \bar{M}_t$ . Dieser hat Werte in  $\{0, \dots, m\}$  und gibt zu einem Zeitpunkt  $t \geq 0$  die Anzahl der ausgefallenen Unternehmen an.

Aus dem ersten Abschnitt 3.1 ist bekannt, dass nun für das Default-Leg und die regulären Prämienzahlungen der erwartete Verlust einer Tranche  $k$  zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  bestimmt werden muss.

Unter der Berücksichtigung identischer Nominalbeträge und Recovery Rates ist die Portfolioverlustfunktion gegeben durch

$$L_t = N(1 - \delta) \underbrace{\sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}}_{=M_t} = N(1 - \delta)M_t$$

und damit gilt auch

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(L_t = x) = K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = \frac{x}{N(1-\delta)})$$

für  $x \in \{i \cdot N(1-\delta) : i = 0, 1, \dots, m\}$ . Es folgt für den erwarteten Verlust zum Zeitpunkt  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t)) &= \sum_{x \in \{i \cdot N(1-\delta) : i = 0, \dots, m\}} v_k(x) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(L_t = x) \\ &= \sum_{i=0}^m v_k(i \cdot N(1-\delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(L_t = i \cdot N(1-\delta)) \\ &= \sum_{i=0}^m v_k(i \cdot N(1-\delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i)$  können nun durch eine Monte-Carlo-Simulation bestimmt werden, wobei in diesem Fall die Erwartungswerte  $E_{y_0}(v_k(L_t))$  auch direkt simuliert werden können. Eine andere Möglichkeit wäre die Wahrscheinlichkeiten durch Lösen der Kolmogorovschen Differentialgleichungen zu bestimmen. Hierzu wird insbesondere die Vorwärts-Gleichung aus Lemma 3.6 genutzt.

In der in diesem Abschnitt gegebenen Situation schreibt sich die Differentialgleichung als

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_s = i) \\ &= \mathbb{1}_{\{i>0\}}(m - (i-1)) h(\Psi_s(\omega_1), i-1) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_s = i-1) \\ &\quad - (m - i) h(\Psi_s(\omega_1), i) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_s = i). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Als Anfangsbedingung dient  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_0 = y_0) = 1$ . Numerisch kann diese Differentialgleichung zum Beispiel durch ein Euler-Verfahren gelöst werden.

Schließlich wird - analog zu Abschnitt 3.1 - durch Integration bzgl. des Maßes  $\mu_{\psi_0}$  das Default-Leg und die abdiskontierten regulären Prämienzahlungen vollständig bestimmt.

Für die abdiskontierten Marginzahlungen sind wieder bedingte Erwartungswerte der Form  $E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_s) | \tau_j = s)$  sowie die Dichte der Stopzeit  $\tau_i$  zu bestimmen. Dazu wird folgendes Korollar in Analogie zu Satz 3.1 formuliert.

**Korollar 3.9**

In dem Spezialfall eines homogenen Portfolios mit nur einer Gruppe und Ausfallintensitäten der Form  $h(\Psi_t(\omega_1), l)$  ergeben sich die Aussagen von Satz 3.1 für  $l, i_0 \in \{1, \dots, m\}$  zu

$$f_{\tau_{i_0}}(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)h(\Psi_t(\omega_1), k) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = k)$$

sowie

$$K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l | \tau_{i_0} = t) = \frac{(m-l+1)h(\Psi_t(\omega_1), l-1)K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l-1)}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k)h(\Psi_t(\omega_1), k) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = k)}.$$

**Beweis:**

Für den Beweis sei zunächst die Menge  $A_0(l, j) := \{y : M(y) = l, y(j) = 0\}$  eingeführt. Hiermit ist

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_{t-\epsilon} = l, t-\epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ &= \sum_{y \in S : M(y) = l} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y, t-\epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ &= \sum_{y \in A_0(l, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y, t-\epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ &\stackrel{\text{MK}+}{=} \sum_{y \in A_0(l, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) h(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l, t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \\ &= \sum_{y \in S : M(y) = l} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y, t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \\ &= \sum_{y \in A_0(l, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y, t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \\ &\stackrel{\text{MK}+}{=} \sum_{y \in A_0(l, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) h(\Psi_t(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Da in dem betrachteten Spezialfall das Portfolio nur aus einer homogenen Gruppe besteht, also insbesondere alle Firmen die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit haben, hängt die Wahrscheinlichkeit  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y)$  nur von der Anzahl der bis zum Zeitpunkt  $t$  ausgefallenen Firmen ab und nicht davon, welche Unternehmen ausge-

fallen sind. Mit

$$|A_0(l, i_0)| = \binom{m-1}{l} \text{ und } |\{y \in S : M(y) = l\}| = \binom{m}{l}$$

und

$$\frac{\binom{m-1}{l}}{\binom{m}{l}} = \frac{\frac{(m-1)!}{l!(m-1-l)!}}{\frac{(m)!}{l!(m-l)!}} = \frac{(m-1)!}{m!} \cdot \frac{(m-l)!}{(m-1-l)!} \cdot \frac{l!}{l!} = \frac{m-l}{m}$$

vereinfachen sich die Rechnungen nun zu

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in A_0(l, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) h(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \\ &= \frac{m-l}{m} \sum_{y: M(y)=l} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_{t-\epsilon} = y) h(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \\ &= \frac{m-l}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_{t-\epsilon} = l) h(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon), \end{aligned} \quad (3.5)$$

bzw. zu

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in A_0(l, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) h(\Psi_t(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \\ &= \frac{m-l}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l) h(\Psi_t(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} & K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ &= \sum_{l=0}^m K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_{t-\epsilon} = l, t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m-l}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_{t-\epsilon} = l) h(\Psi_{t-\epsilon}(\omega_1), l) \cdot \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

und damit für den Limes  $\epsilon \downarrow 0$

$$\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t - \epsilon < \tau_{i_0} \leq t) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m-l}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l) h(\Psi_t(\omega_1), l)$$

sowie analog mit (3.6)

$$\frac{1}{\epsilon} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(t \leq \tau_{i_0} < t + \epsilon) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m-l}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l) h(\Psi_t(\omega_1), l),$$

womit die Behauptung für  $f_{i_0}(t)$  folgt.

Für die zweite Aussage sei zunächst bemerkt, dass mit einer analogen Argumentation wie in (3.5)

$$\begin{aligned}
 \frac{m - (l - 1)}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l - 1) &= \sum_{y \in S: M(y) = l - 1} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) \\
 &= \sum_{y \in A_0(l-1, i_0)} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y) \\
 &= \sum_{y \in S: M(y) = l} y(i_0) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y^{i_0}) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

folgt. Nun ist zusammen mit der Aussage von Satz 3.1 und unter Berücksichtigung, dass  $M(y^{i_0}) = l - 1$  für alle  $y \in S$  mit  $M(y) = l$  und  $y(i_0) = 1$  gilt,

$$\begin{aligned}
 &K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l | \tau_{i_0} = t) \\
 &= \sum_{y \in S: M(y) = l} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y | \tau_{i_0} = t) \\
 &\stackrel{(3.1)}{=} \sum_{y \in S: M(y) = l} y(i_0) h(\Psi_t(\omega_1), l - 1) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y^{i_0}) f_{\tau_{i_0}}^{-1}(t) \\
 &= \sum_{y \in S: M(y) = l} y(i_0) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(Y_t = y^{i_0}) h(\Psi_t(\omega_1), l - 1) f_{\tau_{i_0}}^{-1}(t) \\
 &\stackrel{(3.7)}{=} \frac{m - (l - 1)}{m} K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l - 1) h(\Psi_t(\omega_1), l - 1) f_{\tau_{i_0}}^{-1}(t) \\
 &= \frac{m - (l - 1)}{m} h(\Psi_t(\omega_1), l - 1) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = l - 1) f_{\tau_{i_0}}^{-1}(t)
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung durch Einsetzen von  $f_{\tau_{i_0}}(t)$ .

□

Unter Berücksichtigung von  $K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = 0 | \tau_j = t) = 0$  erhält man schließlich

$$E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t) | \tau_j = t) = \sum_{i=1}^m v_k(i \cdot N(1 - \delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i | \tau_j = t),$$

sowie mit  $v_k(0) = 0$

$$E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_{t-}) | \tau_j = t) = \sum_{i=1}^{m-1} v_k(i \cdot N(1 - \delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i + 1 | \tau_j = t). \quad (3.8)$$

Zur Angabe einer expliziten Bewertungsformel definiere eine Hilfsvariable durch

$$E_{t,k}^{\omega_1}(j) := m \cdot f_{\tau_j}(t) E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t) - v_k(L_{t-}) \mid \tau_j = t). \quad (3.9)$$

Durch Einsetzen von (3.8) und (3.9) sowie durch Anwendung von Korollar 3.9 vereinfacht sich  $E_{t,k}^{\omega_1}(j)$  zu

$$\begin{aligned} & E_{t,k}^{\omega_1}(j) \\ = & m \cdot f_{\tau_j}(t) E_{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_t) - v_k(L_{t-}) \mid \tau_j = t) \\ & m \cdot f_{\tau_j}(t) \sum_{i=1}^m v_k(i \cdot N(1 - \delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i \mid \tau_j = t) \\ & - m \cdot f_{\tau_j}(t) \sum_{i=1}^{m-1} v_k(i \cdot N(1 - \delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i + 1 \mid \tau_j = t) \\ = & m \cdot f_{\tau_j}(t) \sum_{i=1}^m v_k(i \cdot N(1 - \delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i \mid \tau_j = t) \\ & - m \cdot f_{\tau_j}(t) \sum_{i=1}^{m-1} v_k(i \cdot N(1 - \delta)) K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i + 1 \mid \tau_j = t) \\ = & m \cdot f_{\tau_j}(t) \sum_{i=1}^m v_k(i \cdot N(1 - \delta)) \frac{(m - i + 1)h(\Psi_t(\omega_1), i - 1)K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i - 1)}{m \cdot f_{\tau_j}(t)} \\ & - m \cdot f_{\tau_j}(t) \sum_{i=1}^{m-1} v_k(i \cdot N(1 - \delta)) \frac{(m - i)h(\Psi_t(\omega_1), i)K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i)}{m \cdot f_{\tau_j}(t)} \\ = & \sum_{i=1}^m v_k(i \cdot N(1 - \delta))(m - i + 1)h(\Psi_t(\omega_1), i - 1)K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i - 1) \\ & - m \cdot \sum_{i=1}^{m-1} v_k(i \cdot N(1 - \delta))(m - i)h(\Psi_t(\omega_1), i)K_{y_0}(\omega_1, \cdot)(M_t = i). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt, dass  $E_{t,k}^{\omega_1}(j)$  unabhängig von  $j$  ist.

Zur vollständigen Bestimmung der abdiskontierten Marginzahlungen muss der innere Erwartungswert bzgl. des Maßes  $\mu_{\psi_0}$  integriert werden:

$$\begin{aligned} & E_{\gamma_0}(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s)ds} (\tau_j - t_{n-1})(v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}) \\ = & \int_{\Omega_1} E_{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s)ds} (\tau_j - t_{n-1})(v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}) \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \end{aligned}$$

Mit der Definition von  $E_{t,k}^{\omega_1}(j)$  und dessen Unabhängigkeit von  $j$  folgt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m E_{\gamma_0}(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s)ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}) \\
 &= \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_1} E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(e^{-\int_0^{\tau_j} r(s)ds} (\tau_j - t_{n-1}) (v_k(L_{\tau_j}) - v_k(L_{\tau_j-})) \mathbb{1}_{\{t_{n-1} < \tau_j \leq t_n\}}) \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \\
 &= \int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} B(0, s)(s - t_{n-1}) E^{K_{y_0}(\omega_1, \cdot)}(v_k(L_s) - v_k(L_s) | \tau_j = s) f_{\tau_j}(s) ds \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \\
 &= \int_{\Omega_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} B(0, t)(t - t_{n-1}) E_{t,k}^{\omega_1}(1) dt \mu_{\psi_0}(d\omega_1)
 \end{aligned}$$

und der erwartete Wert aller abdiskontierten Marginzahlungen ist gegeben durch

$$s^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} B(0, t)(t - t_{n-1}) E_{t,k}^{\omega_1}(1) dt \mu_{\psi_0}(d\omega_1).$$

Default- als auch das Premium-Leg sind nun vollständig bestimmt. Die fairen Verzinsungen und die Upfront-Gebühr für eine Tranche  $k$  können nun mit Hilfe der Bewertungsformeln (1.1) und (1.2) angegeben werden.

Für die Verzinsungen  $s^{(k)}$  erhält man

$$\frac{B(0, T) E_{\gamma_0}(v_k(L_T)) + \int_0^T r(t) B(0, t) E_{\gamma_0}(v_k(L_t)) dt}{\left( \sum_{n=1}^N \left( B(0, t_n)(t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - E_{\gamma_0}(v_k(L_{t_n}))) \right) + \int_{\Omega_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} B(0, t)(t - t_{n-1}) E_{t,k}^{\omega_1}(1) dt \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \right)}$$

bzw. für die Upfront-Gebühr der Tranche  $k$

$$\begin{aligned}
 & B(0, T) E_{\gamma_0}(v_k(L_T)) + \int_0^T r(t) B(0, t) E_{\gamma_0}(v_k(L_t)) dt \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \\
 & - r^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^N \left( B(0, t_n)(t_n - t_{n-1}) (u_k - l_k - E_{\gamma_0}(v_k(L_{t_n}))) \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} B(0, t)(t - t_{n-1}) E_{t,k}^{\omega_1}(1) dt \mu_{\psi_0}(d\omega_1) \Big).$$



# Kapitel 4

## Anwendungen für homogene Portfolios

In Abschnitt 3.3 wurden für den Fall eines homogenen Portfolios explizite Bewertungsformeln für die Verzinsung  $s^{(k)}$  und die Uprfont-Gebühr bestimmt. Hierbei wurde insbesondere die Modellierung der Portfolioverlustfunktion aus Kapitel 2 genutzt.

In diesem Kapitel sollen Anwendungen für diesen Spezialfall gegeben werden. Zunächst wird das Beispiel 1.5 aus Kapitel 1 erneut betrachtet. Für die Simulation des Makroökonomieprozesses wird ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess bemüht. Es wird untersucht, inwiefern verschiedene Parameterkonstellationen des Prozesses die Bewertung des synthetischen CDO's beeinflussen.

Das Kapitel schließt mit der Bewertung des iTraxx Europe. Für verschiedene Ausfallintensitäten werden explizit Preise für die einzelnen Tranchen bestimmt. Anschließend werden diese mit den Marktwerten verglichen.

### 4.1 Ein Beispiel mit makroökonomischen Einfluss

Im Folgenden werde erneut das Beispiel 1.5 aus Kapitel 1 für einen synthetischen CDO betrachtet. Das Referenzportfolio war gegeben durch 100 CDS's, die jeweils Unternehmensanleihen von Betrag 1 absicherten. Die Recovery Rate war gegeben durch 0 und die Laufzeit des CDO's war 5 Jahre. Die Tranchierung war bestimmt durch die Werte der folgenden Tabelle:

Tranche	untere Grenze	obere Grenze
Equity	0 %	5 %
Junior	5 %	15 %
Mezzanine	15 %	25 %
Senior	25 %	100 %

Es sei zusätzlich angenommen, dass für die Equity-Tranche bei einem Running Spread von 5% eine Upfront-Gebühr sowie für die restlichen Tranchen die Verzinsung  $s^{(k)}$  gehandelt werden. Die Bewertung sei zu Beginn der Laufzeit vorgenommen. Der Anfangszustand des Portfolios sei gegeben durch 0, das heißt alle Unternehmen seien zu Beginn der Laufzeit nicht ausgefallen. Die Prämienzahltermine seien vierjährig.

Um nun eine Bewertung für diesen synthetischen CDO zu geben, muss zuerst das Modell vollständig charakterisiert werden.

Als zugrunde liegendes Modell wird ein Mean-Field-Modell mit einer Gruppe gewählt. Es wird also davon ausgegangen, dass das Portfolio aus einer homogenen Gruppe besteht und damit insbesondere alle Unternehmen dieselbe Ausfallintensität besitzen.

Die Modellierung der Ausfallintensitäten sei in Anlehnung an lineare Intensitäten<sup>1</sup> vorgenommen. Sie seien gegeben durch

$$\begin{aligned} h(\Psi_t(\omega_1), l) &= \max \left\{ a_0 (1 - (\Psi_t(\omega_1) - 1)) + l \cdot a_1 (1 - (\Psi_t(\omega_1) - 1)), c \right\} \\ &= \max \left\{ a_0 (2 - \Psi_t(\omega_1)) + l \cdot a_1 (2 - \Psi_t(\omega_1)), c \right\} \end{aligned}$$

mit den Parametern  $a_0 > 0$  und  $a_1, c \geq 0$ .

Die Intensitäten haben folgende Interpretation<sup>2</sup>: Jedes Unternehmen hat dieselbe Grundausfallintensität  $a_0$  und im Falle eines Ausfalls erhöht sich die Ausfallintensität der überlebenden Firmen jeweils um  $a_1$ . Der Parameter  $c$  dient als untere Schranke zur Gewährleistung von nicht negativen Intensitäten.

Der makroökonomische Faktor  $(\Psi_t(\omega_1))_{t \in [0,5]}$  soll einen verstärkenden bzw. einen abschwächenden Effekt auf die Intensitäten haben. Für den Fall einer Hoch-Phase der Ökonomie soll sowohl die Grundausfallintensität, als auch die Erhöhung durch den Ausfall anderer Unternehmen im Portfolio sinken. Umgekehrt sollen in einer

---

<sup>1</sup>vgl. das lineare Kontrahentenrisikomodell in [9]

<sup>2</sup>vgl. 4.2.2

Rezession die Grundausfallintensität und die Erhöhung durch den Ausfall anderer steigen. Als Normalniveau sei 1 gewählt.

Die Parameter  $a_0$  und  $a_1$  seien historische Erfahrungswerte. Sie seien so gewählt, dass zu Beginn der Laufzeit des synthetischen CDO's der Startpunkt des Makroökonomieprozesses gerade das Normalniveau ist. Es sei also  $\psi_0$  gegeben durch 1.

Für die Modellierung der Makroökonomie wird unter anderem in [13] vorgeschlagen einen Diffusionsprozess zu verwenden. Für dieses Beispiel sei dieser gegeben durch die Dynamik

$$d\Psi_t = -\alpha \cdot (\Psi_t - 1)dt + \sigma dW_t$$

mit  $\alpha, \sigma > 0$ . Diese stochastische Differentialgleichung beschreibt einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit Gleichgewichtsniveau 1, Steifigkeit  $\alpha$  und Diffusion  $\sigma$ . Die Parameter können wie folgt interpretiert werden:

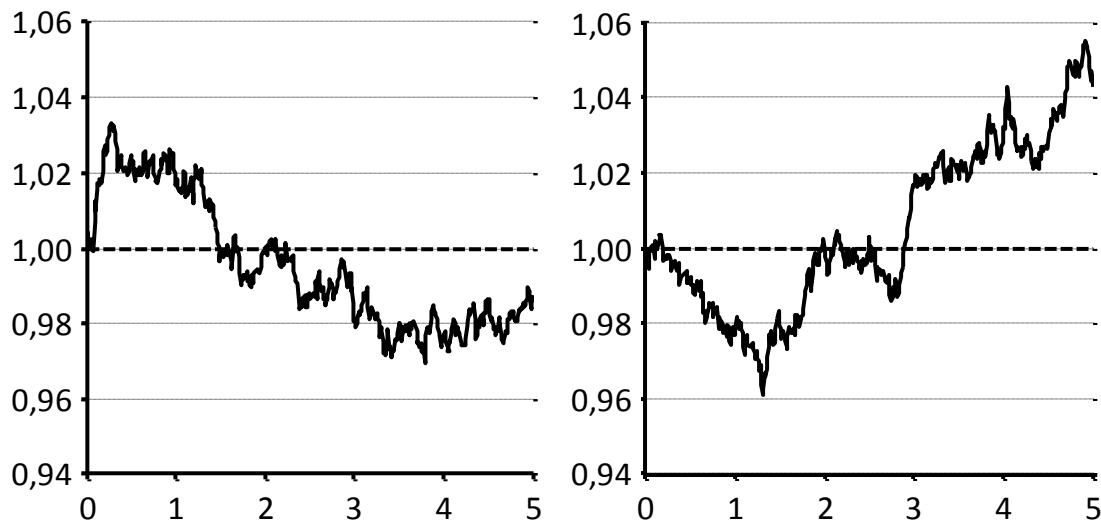
- (i) 1 ist das gleichgewichtige Niveau des Prozesses. Liegt der Prozess über diesem Wert, so ist der Driftterm  $-(\Psi_t - 1)$  negativ und der Drift wird den Prozess tendenziell nach unten "ziehen". Ist  $\Psi_t$  kleiner, so ist der Drift positiv und der Prozess wird in Erwartung nach oben gezogen.
- (ii)  $\alpha$  gibt an, wie stark die oben beschriebene "Anziehungskraft" von 1 ist. Für kleine Werte von  $\alpha$  verschwindet dieser Effekt, für große Werte wird sich  $\Psi$  sehr steif um 1 entwickeln.
- (iii)  $\sigma$  ist der Störfaktor. Er gibt an, wie stark der Einfluss der Brownschen Bewegung auf den Prozess ist. Für  $\sigma = 0$  konvergiert  $\Psi$  exponentiell gegen 1, bei starker Diffusion hingegen wird die Konvergenz zufällig gestört.

In Abbildung 4.1 sind 2 Pfade des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses abgebildet. Im linken Beispiel befindet sich der Prozess bis zum Jahr 2 oberhalb des Normalniveaus. Dieser Zeitraum wird als Hoch-Phase der Ökonomie interpretiert. Ab dem Jahr 2 bis zum Ende Laufzeit ist der Pfad unterhalb des Normalniveaus. Die Ökonomie befindet sich in einer Rezession.

Der Einfluss auf die Bewertung des synthetischen CDO's ist nun wie folgt: Während einer Hoch-Phase fallen tendenziell weniger Unternehmen aus als im Vergleich zum konstanten Normalniveau. Die einzelnen Tranchen werden dementsprechend weniger belastet. Ab dem 2. Jahr hingegen befindet sich die Ökonomie in einer Rezession. Die Ausfallintensitäten steigen und die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall<sup>3</sup> eines

---

<sup>3</sup>z.B. für einen Horizont von einem Jahr



**Abbildung 4.1:** Beispiele für den Verlauf des Makroökonomieprozesses anhand von 2 Pfaden eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses mit Gleichgewichtsniveau 1, Steifigkeit 0,4 und Diffusion 0,2

überlebenden Unternehmens erhöht sich. In diesem Zeitraum fallen nun tendenziell mehr Unternehmen aus und die nachrangigen Tranchen werden daher stärker belastet.

Für das rechte Beispiel ist die Argumentation nun analog. Bis zum Jahr 3 befindet sich der Pfad unterhalb des Normalniveaus und die Tranchen werden tendenziell langsamer aufgebraucht. Ab dem 3. Jahr ist die Ökonomie in einer Hoch-Phase. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Unternehmen sinken und die Tranchen werden eher weniger belastet.

Um den Einfluss des Prozesses auf die Bewertung des synthetischen CDO's zu untersuchen werden verschiedene Parameterwerte getestet. Es soll auf der einen Seite die Störung  $\sigma$  als auch die Steifigkeit  $\alpha$  variiert werden. Die übrigen Parameter sind wie folgt gewählt worden:

Grundausfallintensität	$a_0$	0,006
Erhöhung	$a_1$	0,0045
Untere Schranke	$c$	0,001

Die Berechnungen wurden mit Hilfe der Software MatLab<sup>4</sup> durchgeführt. Dazu wurde zuerst ein Pfad des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses simuliert, um dann für diesen

<sup>4</sup>für die Programmierung siehe Anhang B

Pfad die Kolmogorovschen Differentialgleichungen (3.4) zu lösen. Schließlich wurde mit einer Monte-Carlo-Simulation mit 1500 Durchläufen die Integration bzgl. des Maßes  $\mu_{\psi_0}$  berechnet. Als Diskontierungsprozess wurden Nullkuponanleihen gemäß Anhang A gewählt.

Bei Variation des Störfaktors  $\sigma$  und bei konstanter Steifigkeit von  $\alpha = 0,4$  ergeben sich folgende Werte:

Tranche		$\Psi \equiv 1$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,4$	$\sigma = 0,8$
Equity	0% - 5%	74,71%	74,70%	74,66%	74,47%
Junior	5% - 15%	40,56%	40,57%	40,63%	40,95%
Mezzanine	15% - 25%	8,35%	8,35%	8,38%	8,53%
Senior	25% - 100%	2,05%	2,06%	2,10%	2,25%

Bei zunehmender Störung des Prozesses (Erhöhung des Parameters  $\sigma$ ) sinkt die Höhe der Upfront-Gebühr der Equity Tranche. Die Verzinsungen der übrigen Tranchen steigen.

Dies hat folgende Erklärung: Falls im Mittel der Prozess sich oberhalb des Normalniveaus befindet, fallen eher weniger Unternehmen aus als im Vergleich zum konstanten Normalniveau. Insbesondere die Equity-Tranche wird langsamer aufgebraucht. Die Höhe der Upfront-Gebühr sinkt. Falls hingegen der Prozess im Mittel unterhalb des Normalniveaus ist, werden die übrigen Tranchen tendenziell stärker belastet und somit steigen die Verzinsungen.

Bei Variation der Steifigkeit  $\alpha$  und bei konstanter Störung von  $\sigma = 0,4$  ergibt sich:

Tranche		$\Psi \equiv 1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,8$
Equity	0% - 5%	74,71%	74,63%	74,66%	74,65%
Junior	5% - 15%	40,52%	40,85%	40,63%	40,52%
Mezzanine	15% - 25%	8,35%	8,47%	8,41%	8,34%
Senior	25% - 100%	2,05%	2,16%	2,10%	2,06%

Mit dem Parameter  $\alpha$  wird die "Anziehungskraft" des Prozesses gesteuert. Durch eine Erhöhung von  $\alpha$  wird sich der Prozess immer stärker um das Normalniveau entwickeln. Für die Bewertung des synthetischen CDO's bedeutet dies, dass sich durch Erhöhung der Steifigkeit die Preise der einzelnen Tranchen der Bewertung des konstanten Normalniveaus annähern.

Hingegen ist für einen kleinen  $\alpha$ -Wert auch die Rückkehrgeschwindigkeit zum Normalniveau gering. Dies hat 2 Auswirkungen auf die Bewertung. Zum einen sind Werte mit großem Abstand zum Normalniveau wahrscheinlicher und die Wiederkehr zum Normalniveau wird tendenziell länger dauern. Anschaulich bedeutet dies, dass Hoch-Phasen bzw. Rezessionen länger und intensiver ausfallen.

Bei der Bewertung des synthetischen CDO's beobachtet man nun dieselben Effekte wie im Falle variierender Störung. Mit fallenden  $\alpha$ -Werten sinkt der Preis der Equity-Tranche, die Verzinsungen der übrigen Tranchen steigt. Die Effekte können nun analog erklärt werden. In diesem Fall werden jedoch für kleine  $\alpha$ -Werte die Effekte deutlicher.

Die Störung als auch die Steifigkeit haben somit einen erkennbaren Einfluss auf die Bewertung des synthetischen CDO's. Die ermittelten Effekte bei der Bewertung können aus der Interpretation der Parameter des Orntsein-Uhlenbeck Prozesses erklärt werden. Der zusätzliche Auf- bzw. Abschlag auf die Preise der einzelnen Tranchen können daher als Bewertung der Unsicherheit über die Entwicklung der Ökonomie verstanden werden.

## 4.2 Bewertung des iTraxx Europe

In diesem Abschnitt werden nun für die Tranchen des iTraxx Europe mit einer Laufzeit von 5 Jahren die Verzinsungen  $s^{(k)}$  und die Upfront-Gebühr für eine Tranche  $k$  bestimmt.

Als zugrunde liegendes Modell sei ein Mean-Field-Modell mit einer homogenen Gruppe wie in Abschnitt 3.3 gewählt. Des Weiteren sei der Makroökonomieprozess vernachlässigt. Die betrachteten Ausfallintensitäten seien nur durch den Zeitpunkt und der Anzahl der ausgefallenen Unternehmen beeinflusst. Dies ist von Vorteil, da nun eine Bewertung ausschließlich durch numerische Verfahren erreicht werden kann.

Die Intensitäten sind somit von der Form  $h(t, l)$ . Indem man als Makroökonomieprozess den Pfad  $\omega_1(t) = t$  für alle  $t \geq 0$  wählt, kann die Modellierung aus Abschnitt 3.3 vollständig übernommen werden.

Für diesen Spezialfall ist die Integration bzgl. des Maßes  $P_{\gamma_0}(d\omega_1, d\omega_2)$  gleichbedeutend mit der Integration bzgl. des Maßes  $K_{y_0}(\omega_1, d\omega_2)$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise wird das Maß mit  $P_{y_0}$  bezeichnet.

Die Bewertung sei in diesem Abschnitt zu Beginn der Laufzeit vorgenommen. Per Definition des iTraxx Europe ist zu diesem Zeitpunkt kein Unternehmen ausgefallen. Also ist der Startpunkt des Portfolios gegeben durch  $y_0 = 0$ .

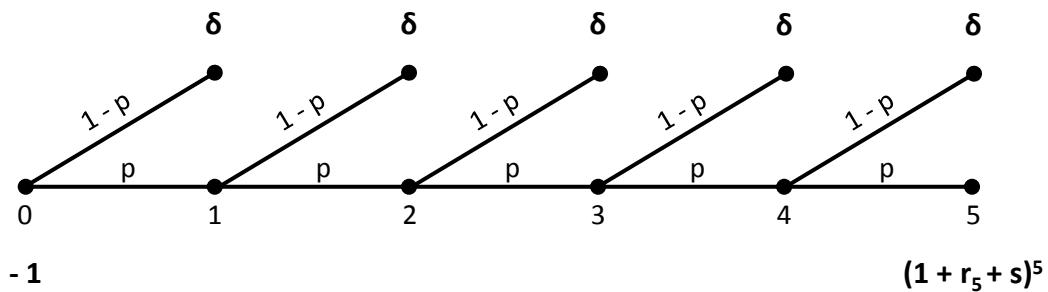
### 4.2.1 Vorbereitungen

Um eine Bewertung vorzunehmen, muss zuerst eine 5-Jahr-Ausfallwahrscheinlichkeit für ein beliebiges Unternehmen bestimmt werden. Es wird also die Wahrscheinlichkeit  $P_0(Y_5(1) = 1)$  gesucht. Dies ist von Nöten, um spätere freie Parameter zu kalibrieren, und somit verschiedene Parameterkonstellationen miteinander vergleichen zu können.

Diese Wahrscheinlichkeit kann man sich nun willkürlich aus Erfahrungswerten vorgeben. Ein anderer Ansatz wird in [7] gegeben. Dort wird vorgeschlagen, die Überlebenswahrscheinlichkeit aus einem Spread von 60bps auf die risikolose Anlage und aus einer Recovery Rate von 40% zu berechnen.

Um aktuelle Marktereignisse - insbesondere die aus der Insolvenz der Lehman Brothers Inc. entstandenen Marktturbulenzen zu berücksichtigen - wird in dieser Arbeit ein Spread von 160bps verwendet. Die Recovery Rate bleibt unverändert bei 40%.

Um aus einem Spread  $s$  auf eine Nullkuponanleihe und einer Recovery Rate  $\delta$  die 1-Jahr Überlebenswahrscheinlichkeit  $p$  zu berechnen, muss der Zahlungsstrom aus Abbildung 4.2 bewertet werden.



**Abbildung 4.2:** Zahlungsstrom zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $p$  für eine Laufzeit von 5 Jahren

Hieraus ergibt sich nun folgende Gleichung

$$0 = -1 + B(0, 1)(1 - p) \cdot \delta + B(0, 2)p(1 - p) \cdot \delta$$

$$\dots + B(0, 5)(p^5 \cdot (1 + r_5 + s)^5 + p^4(1 - p) \cdot \delta),$$

wobei  $B(0, t)$  gemäß Anhang A gewählt wird. Mit Hilfe einer Zielwertsuche ergibt sich

$$p = P_0(Y_1(1) = 0) = 97,60\%,$$

sowie eine 5-Jahr-Ausfallwahrscheinlichkeit

$$P_0(Y_5(1) = 1) = 1 - p^5 = 11,44\%. \quad (4.1)$$

### 4.2.2 Berechnungen und Marktdaten

Mit der Wahrscheinlichkeit aus (4.1) und den im Anhang A ermittelten Diskontierungsfaktoren kann schließlich für verschiedene Ausfallintensitäten eine Bewertung des iTraxx Europe vorgenommen werden.

Hierzu werden zunächst die Kolmogorovschen Differentialgleichungen (3.4) für die Wahrscheinlichkeiten  $P_0(M_s = l)$ ,  $s \in [0, 5]$ ,  $l \in \{0, \dots, 125\}$  gelöst. Mit Hilfe von (3.3) können nun die freien Parameter so kalibriert werden, dass die Wahrscheinlichkeit  $P_0(Y_5(1) = 1) = 11,44\%$  gewährleistet ist. Schließlich wird dann für diese Parameterkonstellation eine Bewertung gemäß Abschnitt 3.3 bestimmt<sup>5</sup>.

Sowohl die Marktpreise für die Tranchen des iTraxx Europe, als auch die Werte zur Bestimmung des Diskontierungsprozesses<sup>6</sup> wurden am *27. März. 2009* am Kapitalmarkt<sup>7</sup> beobachtet. An diesem Tag wurden für die Equity und Junior Tranche des iTraxx Europe 5 Year Upfront-Gebühren mit einem Runnig Spread von 5%, sowie für die übrigen Tranchen<sup>8</sup> die Spreads  $s^{(k)}$  gehandelt.

#### Lineare Ausfallintensitäten

Ein natürlicher Ansatz für die Modellierung der Ausfallintensitäten wird in [12] gegeben. Es wird vorgeschlagen, mit Intensitäten der Form

$$h(l) = a_0 + a_1 \cdot l$$

---

<sup>5</sup>alle Berechnungen sind mit der Software MatLab durchgeführt worden. Für die Programmierung siehe Anhang B

<sup>6</sup>vgl. Anhang A

<sup>7</sup>Quelle: Bloomberg

<sup>8</sup>die Super Senior Tranche des iTraxx Europe wird am Kapitalmarkt grundsätzlich nicht gehandelt

zu arbeiten, wobei  $a_0 > 0$  als Grundausfallintensität interpretiert werden kann. Mit  $a_1 \geq 0$  soll die Abhängigkeit unter den Unternehmen modelliert werden. Dabei gilt: Je mehr Unternehmen ausfallen, desto höher wird auch die Ausfallintensität der überlebenden Unternehmen. Genauer wird ein linearer Zusammenhang unterstellt, das heißt für jedes weitere Unternehmen, welches ausfällt, erhöht sich die Ausfallintensität der Überlebenden um  $a_1$ .

Bei der Simulation wurde nun sukzessive der Parameter  $a_1$  verändert. Der freie Parameter  $a_0$  wurde anschließend durch die Kalibrierung der 5-Jahr-Ausfallwahrscheinlichkeit aus (4.1) determiniert. Es ergeben sich folgende Werte:

$a_0$	$a_1$	0%-3%	3%-6%	6%-9%	9%-12%	12%-22%	Korrelation
Markt		65,29	29,27	10,10	3,91	1,43	
0,024670	0	90,63	67,83	7,81	0,74	0	0
0,012720	0,002	85,24	52,96	8,08	2,54	0,2	0,018
0,006020	0,004	70,89	36,90	7,92	4,32	1,16	0,065
0,002835	0,006	48,08	22,61	7,11	5,04	2,50	0,169
0,005160	0,0044	66,74	33,84	7,81	4,56	1,43	0,073

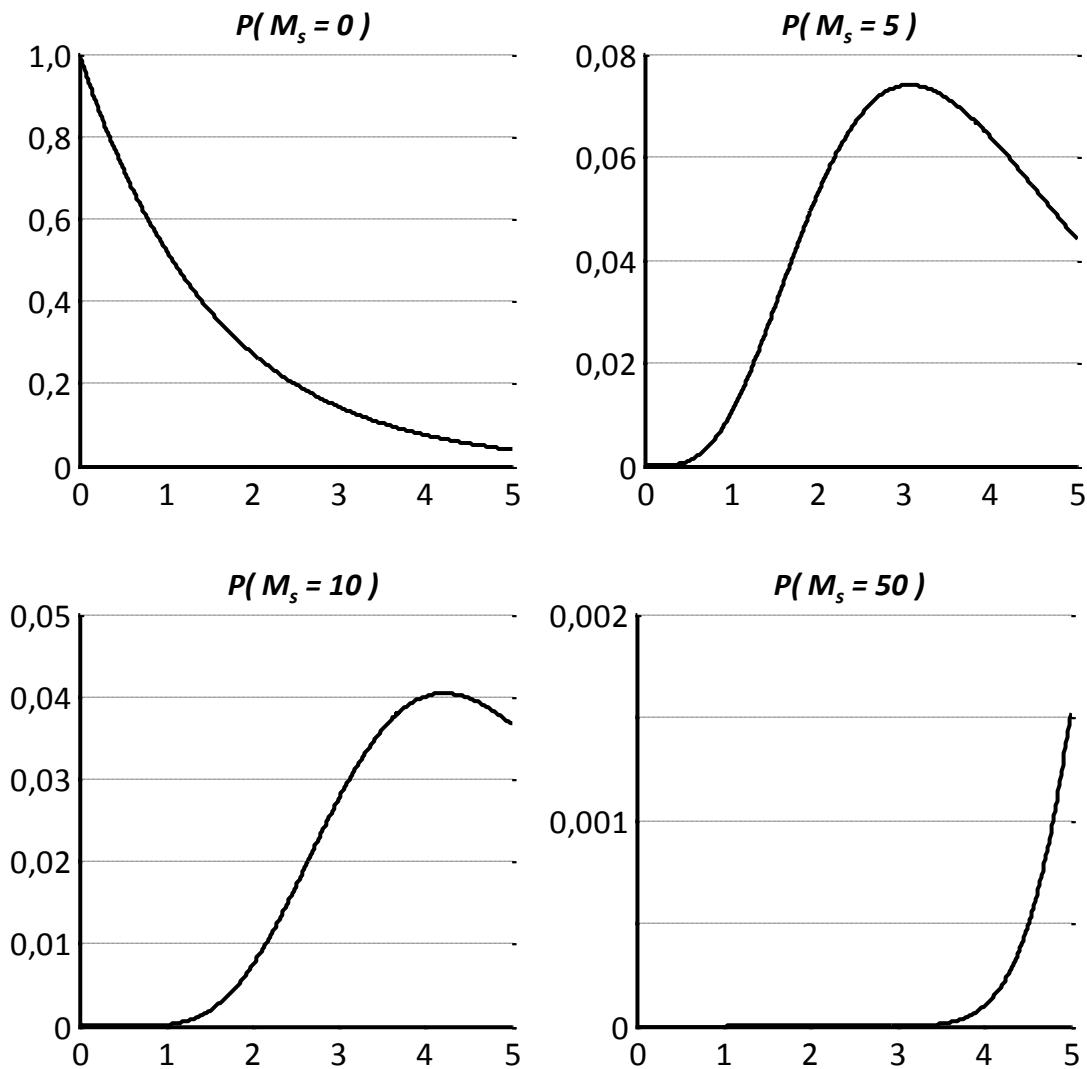
Mit steigendem  $a_1$  fallen die Preise der Equity, Junior und Mezzanine Junior Tranche, wobei die Verzinsungen in der Mezzanine Senior und Senior Tranche steigen. Dies erklärt sich daraus, dass bei steigenden  $a_1$  die Grundausfallintensität fällt, und damit die Wartezeit bis zu den ersten Ausfällen sinkt. Zudem steigt durch Erhöhen der Abhängigkeit auch die Korrelation zwischen den Marktteilnehmern an.

Der beste Parameter, in diesem Fall Minimierung des relativen Fehlers, ist bei  $a_1 = 0,0044$  gefunden. Die relativen Fehler sind bis auf die Mezzanine Junior Tranche echt kleiner als 17%.

Tranche	0%-3%	3%-6%	6%-9%	9%-12%	12%-22%
relativer Fehler	2,2%	15,5%	22,7%	16,7%	0,2%

Für  $a_1 = 0$  hängt die Ausfallintensität nur von der Grundausfallintensität  $a_0$  ab. In diesem Fall wird davon ausgegangen, dass die Unternehmen sich nicht gegenseitig beeinflussen, also paarweise unkorreliert sind. Die Ergebnisse liefern, auch bei Variation von  $a_0$ , eine schlechte Näherung der Marktdaten. Man kann schließen, dass Unternehmen des gleichen Wirtschaftsraumes eine echt positive Korrelation der Ausfallwahrscheinlichkeiten haben.

Obwohl die Ausfallintensitäten von sehr einfacher Struktur sind, kann hiermit schon eine befriedigende Approximation der Marktdaten erreicht werden.



**Abbildung 4.3:** verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Zeit

Die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P_0(M_s = l)$  (siehe Abbildung 4.3) waren für die Modellierung so gewählt, dass sich für den Erwartungswert

$$E_0 M_5 = 11,44\% \cdot 125 = 14,3$$

ergibt. Nun lassen sich die Wahrscheinlichkeiten  $P_0(M_s = l)$  für festes  $l \in \{0, \dots, 125\}$  in Abhängigkeit der Zeit betrachten

$$s \longmapsto P_0(M_s = l), \quad l \in \{0, \dots, 125\}.$$

Für diese Funktionen lässt sich beobachten, dass für  $l \leq 14$  das Maximum

$$\arg \max_{s \in [0,5]} \{P_0(M_s = l)\}$$

vor dem Jahr 5 liegt. Für Werte über 14 sind die Wahrscheinlichkeiten auf dem Intervall  $[0, 5]$  monoton steigend. In dem Spezialfall  $P_0(M_s = 0)$  ist die Funktion monoton fallend. Die Grenze für das Maximum bildet also die erwartete Anzahl von ausgefallenen Firmen.

Allgemein kann formuliert werden, dass

$$\arg \max_{s \in [0, \infty]} \{P_0(M_s = l)\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{für } l = 0 \\ < T & \text{für } l \in \{1, \dots, \lceil EM_T \rceil - 1\} \\ \geq T & \text{für } l \in \{\lceil EM_T \rceil, \dots, m\} \end{array} \right.$$

gilt.

## Erweiterungen

Das lineare Modell lässt sich nun leicht erweitern. Man stelle sich vor, dass Unternehmen erste Ausfälle im Wirtschaftsraum durchaus verkraften können, sich jedoch die eigene Ausfallintensität bei steigender Anzahl der Ausfälle stärker erhöht. Es soll ein konvexer Zusammenhang bestehen. Dazu werden Intensitäten der Form<sup>9</sup>

$$h(l) = a_0 + \frac{a_1}{a_2}(e^{a_2 \cdot l} - 1),$$

für  $a_0, a_2 > 0$  und  $a_1 \geq 0$ , betrachtet. Sie stellen eine natürliche Erweiterung des linearen Modells dar, denn es gilt:

$$a_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 \frac{e^{a_2 \cdot l} - e^0}{a_2} \quad \longrightarrow \quad a_0 + a_1 \cdot l.$$

In diesem Fall werden für die Modellierung drei Parameter benötigt, wobei  $a_0$  und  $a_1$  wie im linearen Fall interpretiert werden können. Mit  $a_2$  hingegen kann nun die Konvexität des Modells kontrolliert werden.

Bei der Anwendung ist nun sukzessive der Konvexitätsparameter  $a_2$  erhöht worden. Die freien Parameter  $a_0$  und  $a_1$  sind so gewählt worden, dass nicht nur die 5-Jahr-

---

<sup>9</sup>vgl. das konvexe Kontrahentenrisikomodell in [9]

Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_0(Y_5(1) = 1) = 11,44\%$  gewährleistet ist, sondern auch die Upfront-Gebühr der Equity-Tranche mit den Marktdaten übereinstimmt.

Es ergeben sich folgende Werte:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	0%-3%	3%-6%	6%-9%	9%-12%	12%-22%	Korrelation
Markt			65,29	29,27	10,10	3,91	1,43	
0,024670	0	XXX	90,63	67,83	7,81	0,74	0	0
0,005045	0,004230	0,01	65,29	31,61	7,44	4,46	1,58	0,094
0,005184	0,003931	0,02	65,29	30,33	7,12	4,27	1,62	0,106
0,005344	0,003624	0,03	65,29	28,85	6,73	4,02	1,62	0,126

Auch ist es denkbar, dass die Ausfallintensitäten exakt umgekehrt reagieren, also dass gerade die ersten Ausfälle im Portfolio einen überproportionalen Einfluss auf die Intensitäten der überlebenden Firmen haben. Es werden konkave Ausfallintensitäten der Form

$$h(l) = a_0 + \frac{a_1}{a_2} \log(a_2 \cdot l + 1),$$

für  $a_0, a_2 > 0$  und  $a_1 \geq 0$ , untersucht. Wiederum stellen diese Intensitäten eine Erweiterung des linearen Modells dar, denn es gilt:

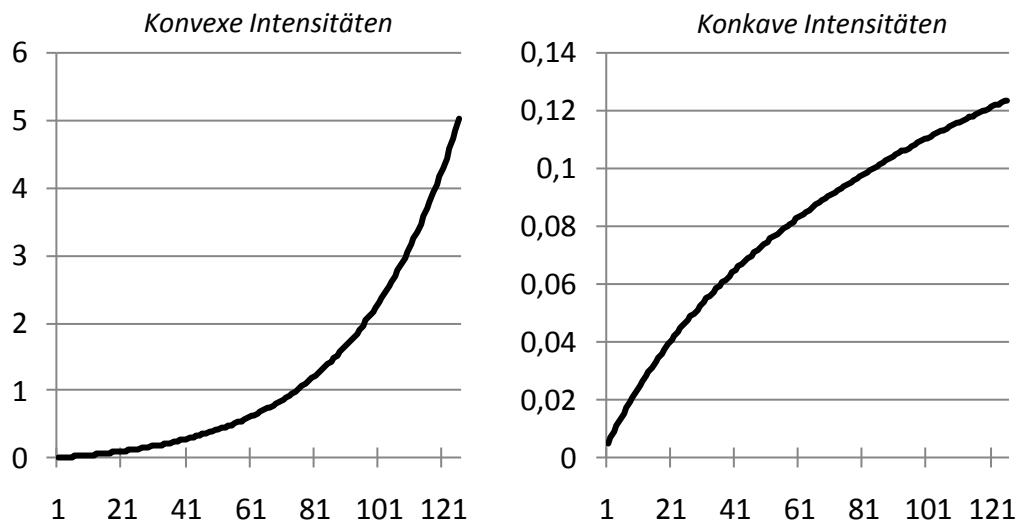
$$a_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 \frac{\log(a_2 \cdot l + 1) - \log(1)}{a_2} \quad \longrightarrow \quad a_0 + a_1 \cdot l.$$

In diesem Fall kann mittels des Parameters  $a_2$  die Konkavität des Modells kontrolliert werden. Es ergeben sich folgende Werte:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	0%-3%	3%-6%	6%-9%	9%-12%	12%-22%	Korrelation
Markt			65,29	29,27	10,10	3,91	1,43	
0,024670	0	XXX	90,63	67,83	7,81	0,74	0	0
0,004819	0,004797	0,01	65,29	33,63	7,93	4,69	1,44	0,081
0,004732	0,005050	0,02	65,29	34,36	8,10	4,76	1,38	0,077
0,004659	0,005284	0,03	65,29	34,95	8,23	4,80	1,32	0,075

Konkave Ausfallintensitäten sind motiviert aus den Ereignissen des Septembers 2008. Aufgrund der Insolvenz der Lehman Brothers Inc. stiegen sprunghaft sämtliche CDS-Spreads von Finanzdienstleistern an. Die Unsicherheit im Markt nahm drastisch zu und die Ausfallwahrscheinlichkeiten erhöhten sich dramatisch.

Für die Modellierung der Tranchen des iTraxx Europe lässt sich ein gegenläufiger Effekt der Erweiterungen feststellen. Konvexe Intensitäten leisten - ähnlich wie das lineare Modell - eine gute Modellierung aller Tranchen bis auf die Mezzanine Junior



**Abbildung 4.4:** Gegenüberstellung konvexer und konkaver Ausfallintensitäten

Tranche. Beim Erhöhen des Parameters  $a_2$  bei konkaven Intensitäten hingegen nähert sich gerade diese Tranche den Marktdaten an, wobei sich die anderen Tranchen entgegengesetzt zum Markt bewegen.

Dieser Effekt lässt sich aus der Modellierung erklären, denn im konkaven Fall werden erste Ausfälle überproportional bewertet. Sobald das erste Unternehmen ausfällt, steigt die Ausfallintensität der Überlebenden stärker an, als wenn schon mehrere Ausfälle zu verkraften waren. Die erwartete Wartezeit zwischen Ausfällen verlängert sich in der Anzahl der ausgefallenen Firmen.

Daher steigen bei Erhöhung des Konkavitätsparameters  $a_2$  die Preise der Junior, Mezzanine Junior sowie der Mezzanine Senior Tranche, wobei hingegen die Verzinsung der Senior Tranche fällt.

Bei konvexen Intensitäten kann nun analog argumentiert werden, wobei hier die Effekte genau umgekehrt wirken. Bei Erhöhung des Konvexitätsparameters verkürzen sich die Wartezeiten zwischen den Ausfällen und damit erhält man sinkende Preise für die Junior, Mezzanine Junior & Senior Tranche und eine steigende Verzinsung der Senior Tranche.

### Zeitabhängige Ausfallintensitäten

Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung von Ausfallintensitäten wird in [8] diskutiert. Es werden zeitabhängige Intensitäten der Form

$$h(t, l) = \max \left\{ a_0 \left( 1 + a_1 \left( \frac{l}{m} - (1 - e^{\bar{\lambda}t}) \right) \right), \frac{a_0}{2} \right\},$$

für  $a_0 > 0$  und  $a_1 \geq 0$ , untersucht.  $\bar{\lambda}$  wird so gewählt, dass

$$P_0(Y_1(1) = 1) = 1 - e^{\bar{\lambda}} = 2,40\%$$

gilt, also mit der aus (4.1) bestimmten 1-Jahr-Ausfallwahrscheinlichkeit übereinstimmt.

Die Maximumsfunktion gewährleistet in diesem Fall, dass für jede Wahl von  $a_0$  und  $a_1$  die Intensität wie in Beispiel 4.1 nicht negativ wird. Dies ist von Nöten, da für kleine  $l$ ,  $t$  und  $a_1 > 1$ ,  $\left( 1 + a_1 \left( \frac{l}{m} - (1 - e^{\bar{\lambda}t}) \right) \right) < 0$  gilt. In diesem Fall dient  $\frac{a_0}{2}$  als untere Schranke für das Modell und kann als Anfangs-Grundausfallintensität interpretiert werden.

Es ergeben sich folgende Werte:

$a_0$	$a_1$	0%-3%	3%-6%	6%-9%	9%-12%	12%-22%	Korrelation
Markt		65,29	29,27	10,10	3,91	1,43	
0,024670	0	90,63	67,83	7,81	0,74	0	0
0,008810	20	69,68	53,77	10,15	3,21	0,19	0,034
0,005750	40	59,56	47,76	10,92	4,62	0,44	0,054
0,004334	60	53,8	43,97	11,16	5,47	0,68	0,069

Obwohl für  $a_1 = 20$  die Equity Tranche, als auch die Mezzanine Junior Tranche gut getroffen werden, sind für die übrigen Tranchen die Werte weit entfernt vom Markt. Dies gilt insbesondere für die Junior als auch für die Senior Tranche. Es ergeben sich relative Fehler von über 80%. Beim weiteren Erhöhen des Parameters  $a_1$  nähern sich die Preise zwar für diese beiden Tranchen den Marktdaten an, die Werte der übrigen Tranchen bewegen sich jedoch entgegen den Marktdaten.

Insgesamt lässt sich sagen, dass insbesondere im Vergleich zu dem linearen Modell und dessen Erweiterungen die Ergebnisse dieses Modells nicht zufriedenstellend sind.

# Kapitel 5

## Kritische Würdigung und Ausblick

Kreditindizes, wie der iTraxx Europe oder CDX Dow Jones, gehören zu den liquidesten Derivaten am Kapitalmarkt. Ihre Eigenschaft als Hedge gegen Marktrisiken wird vor allem von institutionellen Unternehmen genutzt. Ein adäquates Modell zur Bewertung dieses Instruments ist daher von großer Bedeutung für die aktuelle Finanzindustrie.

In Kapitel 2 dieser Arbeit wurde ein Modell vorgestellt, welches insbesondere den Einfluss durch makroökonomische Faktoren auf ein Kreditportfolio berücksichtigen kann. Wirtschaftszyklen sind für die Performance eines Portfolios von entscheidender Bedeutung. Zum Beispiel fällt während einer Rezessionen Umsatz, Gewinn und Auftragseingang in der Wirtschaft. Die Unternehmen reagieren mit Restrukturierungsmaßnahmen oder müssen in Folge dieser Krise sogar die Insolvenz anmelden.

Die Interaktion und Verzahnung innerhalb eines Wirtschaftsraumes bewirkt, dass der Ausfall eines Unternehmens - also die Insolvenz bzw. Zahlungsunfähigkeit - einen direkten Einfluss auf Mitbewerber und Geschäftspartner hat. Weitere Ausfälle im Portfolio werden daher wahrscheinlicher und der Portfolioverlust wird tendenziell steigen.

Das hier vorgestellte Modell berücksichtigt die Einflüsse aus Wirtschaft und Zustand des Portfolios anhand der Ausfallintensitäten. Diese steigen bzw. sinken je nach Lage und beschreiben somit die spezifische Situation eines Unternehmens. Die Höhe der Intensität kann auch als Risiko des Unternehmens für einen Ausfall interpretiert werden, wobei ein hoher Wert auch ein hohes Risiko impliziert.

Für Anwendungen - insbesondere um für größere Portfolios Berechnungen durchzuführen - ist das Mean-Field-Modell aus Kapitel 3 eingeführt worden. Es liefert für

das Modell die zugehörige Mathematik für Portfolien mit einer Gruppenstruktur.

Bei den Anwendungen in Kapitel 4 ist zu einer homogenen Gruppenstruktur übergegangen worden. Diese Annahme spiegelt nicht die wirtschaftliche Situation wieder. Sie ist dennoch teilweise vertretbar, denn ein Übergang zu individuellen Ausfallintensitäten erhöht die Komplexität des Modells erheblich. Auch die Bestimmung unternehmensspezifischer Intensitäten - bzw. geeigneter Parameter bei einer fest gewählten Intensität - werden vom Markt nicht gegeben. Man kann sich dennoch vorstellen, vorhandene Ratings als Gruppenstruktur - insbesondere für Kreditindizes - zu nutzen.

In Beispiel 4.1 wurde für die Modellierung von Wirtschaftszyklen ein stochastischer Prozess gewählt, der sich um ein Gleichgewichtsniveau entwickelt. Man denke zum Beispiel an den IFO-Index<sup>1</sup>, der anhand einer Zahl - ausgehend von einem Niveau von 100 Punkten - den Zustand der Wirtschaft charakterisiert. Auch ist es denkbar mehrere Indikatoren in die Bewertung einfließen zu lassen, wie zum Beispiel Leitzins, Handelsbilanzen, Öl-Preis, etc. .

In Abschnitt 4.2 ist der Einfluss der Wirtschaft nicht durch einen stochastischen Prozess berücksichtigt, sondern steckt in der Wahl der 5-Jahr-Ausfallwahrscheinlichkeit. Die Ermittlung dieser Größe stellt ein Problem für die Bewertung dar, denn sie wird nicht vom Markt gegeben, sondern kann nur aus Erfahrungswerten geschätzt werden.

Das Kapitel 4 zeigt, dass selbst bei Annahme eines homogenen Portfolios Marktdaten des iTraxx Europe durch das Modell aus Kapitel 2 angenähert werden können. Wie weit dieses Modell für praktische Zwecke Anwendung findet, ist fraglich. Die Wahl der Ausfallintensitäten als auch die Wahl eines geeigneten Makroökonomieprozesses müsste ausgiebig getestet werden.

---

<sup>1</sup>Um den IFO-Index explizit als Grundlage für den makroökonomischen Prozess zu wählen, müsste zu einem diskreten Modell übergegangen werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] Alsmeyer, G. (1991) *Erneuerungstheorie: Analyse stochastischer Regenerationsschemata*. Teubner, Stuttgart
- [2] Alsmeyer, G. (2003) *Wahrscheinlichkeitstheorie, Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30*. 3. Auflage, Münster
- [3] Bielecki, T. & Rutkowski, M. (2002) *Credit Risk: Modelling, Valuation, and Hedging*. Springer, Berlin
- [4] Branger, N. (2008) *Vorlesungsskript: Zinsderivate*. Westfälische Wilhelms Universität, Münster
- [5] Chung, K. L. (1982) *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. Springer, New York
- [6] Davis, M. (1993) *Markov Models and Optimization*. Chapman & Hall, London
- [7] Felsenheimer, J., Gisdakis, P. & Zaiser, M. (2005) *Kreditderivate Spezial*. Research Paper, Bayerische Hypo- und Vereinsbank AG, HVB Corporates & Markets, Global Markets Research, München
- [8] Frey, R. & Backhaus, J. (2006) *Portfolio Credit Risk Models with Interacting Default Intensities: a Markovian Approach*. Preprint, Universität Leipzig
- [9] Eberlein, E., Frey, R., & Hammerstein, E. (2007) *Advanced Credit Portfolio Modeling and CDO pricing*. Preprint, Universität Leipzig & Universität Freiburg
- [10] Heidorn, T. & König, L. (2003) *Investitionen in Collateralized Debt Obligations*. Working Paper, Hochschule für Bankwirtschaft Frankfurt am Main
- [11] Jacobson, M. (2006) *Point Process Theory and Applications* Marked Point and Piecewise Deterministic Processes. Birkhäuser Boston, New York

- [12] Jarrow, J. & Yu, F. (2001) *Counterparty Risk and the pricing of defaultable securities*. Journal of Finance 53, 2225-2243
- [13] Karlin, S. & Taylor, H. (1981) *A second Course in Stochastic Processes*. Academic Press Inc., New York
- [14] Kuo, H. (2006) *Introduction to Stochastic Integration*. Springer, New York
- [15] Laurent, J. & Gregory, J. (2003) *Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas*. Working Paper, Universität Lyon & BNP Paribas
- [16] Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point processes on the real line: The Dynamic Apporach*. Springer, New York
- [17] Mounfield, C. (2009) *Synthetic CDOs: Modelling, Valuation, and Risk Management*. Cambridge University Press, New York

# Anhang A

## Diskontierungsfaktoren

Für die Berechnungen in Kapitel 3 ist für alle  $t \in [0, T]$  der Diskontierungsfaktor  $B(0, t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)$  bzw. insbesondere die Zinsrate  $r(s)_{s \in [0, T]}$  zu bestimmen. Hierfür werden die Zinssätze von Nullkuponanleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten herangezogen. Die Daten werden in regelmäßigen Abständen von der Bundesbank geschätzt. Am *27. März 2009*<sup>1</sup> wurde folgende Zinsstruktur ermittelt:

Laufzeit (in Jahren)	1	2	3	4	5
Zinssatz (in Prozent)	0,98	1,38	1,74	2,08	2,39

Laufzeit (in Jahren)	6	7	8	9	10
Zinssatz (in Prozent)	2,67	2,93	3,15	3,36	3,53

Hieraus ergibt sich der Diskontierungsfaktor  $B(0, n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  als

$$B(0, n) = \frac{1}{\text{Zinssatz}(n)^n}.$$

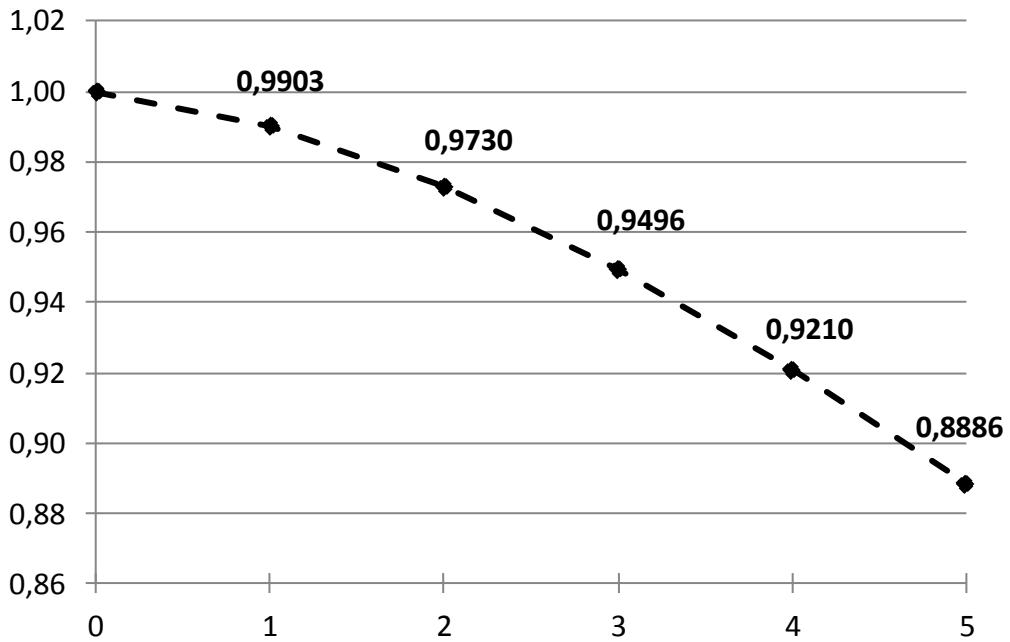
Um nun eine stetige Verzinsung zu erhalten, werden die Diskontierungsfaktoren  $B(0, n)$  linear miteinander verbunden, wobei  $B(0, 0) = 1$  gesetzt wird. Damit erhält man für einen Zeithorizont von 5 Jahren folgenden Verlauf von  $B(0, t)$ .

Hieraus kann nun die Zinsrate  $r(s)_{s \in [0, T]}$  approximiert werden. Dafür wird das Integral durch

$$\int_0^T r(s)ds \approx 0,01 \cdot \sum_{k=1}^{100 \cdot T} r(0, 01 \cdot k)$$

---

<sup>1</sup>Quelle: <http://www.bundesbank.de>

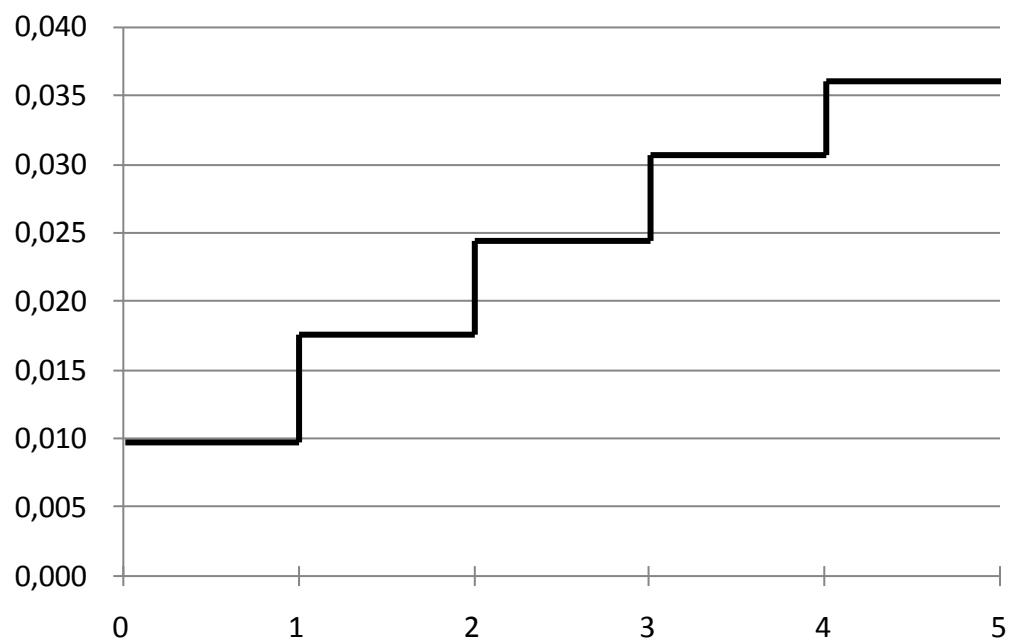


**Abbildung A.1:**  $B(0,t)$  abgeleitet aus den Zinssätzen von Nullkuponanleihen verschiedener Laufzeiten

auf dem Raster  $[0,01 \ 0,02 \dots T-0,01 \ T]$  angenähert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 B(0,t) &= \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) \\
 \Rightarrow B(0,t) &\approx \exp\left(-0,01 \cdot \sum_{k=1}^{100 \cdot t} r(0,01 \cdot k)\right) \\
 \Leftrightarrow \log B(0,t) &\approx -0,01 \cdot \sum_{k=1}^{100 \cdot t} r(0,01 \cdot k) \\
 \Leftrightarrow r(t) &\approx -\frac{\log B(0,t) + 0,01 \cdot \sum_{k=1}^{100 \cdot t - 1} r(0,01 \cdot k)}{0,01}
 \end{aligned}$$

Hieraus kann nun  $r(t)$  rekursiv bestimmt werden und für die Diskontierungsfaktoren aus Abbildung A.1 ergibt sich folgender Verlauf von  $r(t)$ .



**Abbildung A.2:**  $r(t)$  bestimmt aus den Diskontierungsfaktoren aus Abbildung A.1

**Bemerkung A.1**

Die Funktion  $r(t)$  aus Abbildung A.2 ist keine Treppenfunktion, aber in dieser Situation auf den Teilintervallen fast konstant.

## **Anhang B**

## **Daten CD**

Die Berechnungen in Kapitel 4 sind mit Hilfe der Software MatLab durchgeführt worden. Auf der beiliegenden CD sind die entsprechenden Programmiercodes zu finden.