

Über short-rate Modelle zur Beschreibung von Rentenmärkten

Diplomarbeit

vorgelegt von
Laura Maria Boven

Betreuer: Privatdozent Dr. Volkert Paulsen
Mathematisches Institut für Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Einleitung

Der Rentenmarkt stellt den Teilbereich des Kapitalmarkts dar, auf dem festverzinsliche Wertpapiere gehandelt werden. Die grundlegendsten Finanzgüter sind die Nullkuponanleihen (Zero-Coupon-Bonds), die eine sichere Zahlung in ihrem Fälligkeitszeitpunkt versprechen. Um die zukünftigen, unsicheren Preise der Zero-Coupon-Bonds zu bestimmen, werden Zinsstrukturmodelle aufgestellt, welche die mögliche zukünftige Entwicklung der gesamten Zinsstruktur beschreiben. Außerdem möchte man mit diesen Modellen Zinsderivate wie zum Beispiel Caps, Floors oder Swaptions bewerten. Betrachtet wird dabei ein stetiges Finanzmarktmodell mit endlichem Zeithorizont und es existiert ein Zero-Coupon-Bond für jede beliebige Fälligkeit. Außerdem werden Arbitragemöglichkeiten ausgeschlossen.

Zinsstrukturmodelle lassen sich für verschiedene zugrunde liegende Variablen aufstellen. In short-rate Modellen ist die short-rate die erklärende Variable. Dabei stellt die short-rate den augenblicklichen Zinssatz für einen infinitesimal kurzen Zeitraum dar und wird durch eine stochastische Differentialgleichung modelliert. Auf diese Weise wird ein Punkt der Zinsstruktur modelliert. Durch eine stochastische Differentialgleichung für die Forwardrate wird in Heath-Jarrow-Morton-Modellen die Zinsstruktur modelliert. Dabei wird die gesamte Zinsstruktur dargestellt. Die Forwardrate bezeichnet den augenblicklichen Terminzins für einen infinitesimalen Zeitraum und ist wie die short-rate kein am Markt beobachtbarer Zinssatz. Deshalb kann man zur Modellierung der Zinsstruktur auch Markt-Modelle betrachten, die direkt am Markt beobachtbare Zinssätze wie LIBOR- oder Swap-Zinssätze verwenden.

In dieser Arbeit werden short-rate Modelle benutzt, um die Zinsstruktur zu modellieren. Die zukünftige Entwicklung der short-rate wird durch einen Itô-Prozess dargestellt,

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\tilde{W}(t),$$

wobei $\tilde{W}(t)$ einen Wiener-Prozess unter einem risikoneutralen Maß darstellt. Die einzel-

nen Komponenten dieser stochastischen Differentialgleichung werden im zweiten Kapitel erläutert. Ausgehend von dieser Dynamik sollen Zero-Coupon-Bond-Preise und Preise von Bondoptionen und weiteren Zinsderivaten bestimmt werden.

In **Kapitel 1** dieser Diplomarbeit werden grundlegende Finanzprodukte und Zinsarten auf Rentenmärkten eingeführt, die im späteren Teil der Arbeit benutzt werden.

Kapitel 2 dient einer allgemeinen Einführung in short-rate Modelle. Die short-rate wird zunächst durch eine stochastische Differentialgleichung unter dem objektiven Maß $\mathbb{P}$ beschrieben, wobei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T^*}, \mathbb{P})$ der zugrunde liegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum ist. Es wird angenommen, dass ein risikoloses Geldmarktkonto existiert, in das man einen Geldbetrag einzahlen oder abheben kann. Der Preisprozess des Geldmarktkontos dient als stochastischer Diskontfaktor. Essentiell ist die Annahme, dass ein äquivalentes Martingalmaß existiert, unter dem die abdiskontierten Zero-Coupon-Bond-Preise Martingale sind. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird zu einem risikoneutralen Maß übergegangen und die Dynamik der short-rate wird direkt unter diesem Maß angegeben. Es kann gezeigt werden, dass die Preise der Zero-Coupon-Bonds entweder als Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der Term Structure Equation, oder mit der risikoneutralen Bewertungsgleichung als abdiskontierten bedingten Erwartungswert berechnet werden können.

In **Kapitel 3** wird das T -Forwardmartingalmaß eingeführt. Dieses liefert zum einen den Zusammenhang zwischen dem arbitragefreien Preis eines Claims und dem Forwardpreis und zum anderen eine Bewertungsformel für Optionen.

Die affinen short-rate Modelle stellen eine spezielle Klasse von short-rate Modellen dar und werden in **Kapitel 4** vorgestellt. In diesen Modellen ist es möglich, den Zero-Coupon-Bond-Preis durch das Lösen von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen explizit zu bestimmen.

Schließlich werden in **Kapitel 5** drei spezielle short-rate Modelle vorgestellt. Das Vasiček-Modell wurde 1977 in [Vas77] vorgestellt. Dabei wird die short-rate durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit konstanten Koeffizienten modelliert. Da die short-rate normalverteilt ist, erhält man leicht geschlossene Formeln für Zero-Coupon-Bond-Preise sowie Bewertungsformeln für Bondoptionen und Caps bzw. Floors sowie Swaptions.

Das Cox-Ingersoll-Ross-Modell wurde 1985 in [CIR85] veröffentlicht. Es besitzt die gleiche Drift wie das Vasiček-Modell, doch der Volatilitätsterm ist proportional zur Wurzel der short-rate. Es lassen sich zwar auch explizite Bewertungsformeln aufstellen, jedoch sind diese schwieriger zu berechnen. Allerdings kann garantiert werden, dass die short-rate positiv ist.

Das Extended Vasiček-Modell wurde 1990 in [HW90] eingeführt. Die Dynamik der short-rate besitzt die gleiche Gestalt wie im Vasiček-Modell, nur mit dem Unterschied, dass ein oder mehrere Parameter zeitabhängig gewählt werden, damit dieses Modell an beobachtbare Marktpreise kalibriert werden kann.

Zum Abschluss des Kapitels werden die drei Modelle miteinander verglichen.

An dieser Stelle möchte ich Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung des interessanten Themas und für die gute Betreuung bei der Erstellung meiner Diplomarbeit danken. Weiter danke ich meinen Eltern, die mich während meines Studiums stets unterstützt haben.

Gemäß §21 Absatz (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den 30.03.2010

Laura Maria Boven

Inhaltsverzeichnis

1	Eine Einführung in Rentenmärkte	1
1.1	Die Nullkuponanleihe	1
1.2	Zinsarten	2
1.3	Kupontragende Anleihen	6
1.3.1	Die festverzinsliche Anleihe	7
1.3.2	Die variabel verzinsliche Anleihe	8
1.4	Zinsderivate	10
1.4.1	Swaps	10
1.4.2	Caps und Floors	13
1.4.3	Die Cap-Floor-Swap-Parität	16
1.4.4	Swaptions	17
2	Allgemeine short-rate Modelle	20
2.1	Einführung in short-rate Modelle	20
2.2	Die Dynamik der Bondpreise	24
2.3	Der Marktpreis des Risikos	25
2.4	Die Term Structure Equation	27
2.5	Die Dynamik der short-rate unter einem EMM	31
2.6	Vollständigkeit	35
2.7	Martingale Modelling	37
2.8	Die wichtigsten short-rate Modelle	41
3	Forwardmartingalmaße	43
3.1	Das T -Forwardmartingalmaß	43
3.2	Die Beziehung zwischen arbitragefreien Preisen und Forwardpreisen . .	46
3.3	Bewertung von Optionen	47
3.4	Bewertung von Optionen auf Bond-Portfolios	50
4	Affine short-rate Modelle	54

4.1	Charakterisierung der affinen short-rate Modelle	54
4.1.1	Beispiele	58
4.2	Bewertung von Optionen in affinen Modellen	59
5	Spezielle short-rate Modelle	64
5.1	Das Vasiček-Modell	64
5.1.1	Das Verhalten der short-rate im Vasiček-Modell	64
5.1.2	Bewertungsgleichung für Zero-Coupon-Bonds	69
5.1.3	Bewertung von Optionen	71
5.1.4	Bewertung von Caps und Swaptions	77
5.2	Das Cox-Ingersoll-Ross-Modell	79
5.2.1	Das Verhalten der short-rate im CIR-Modell	79
5.2.2	Bondpreise im CIR-Modell	83
5.2.3	Optionsbewertung im CIR-Modell	83
5.2.4	Positivität der short-rate	90
5.3	Das Hull-White-Modell	99
5.3.1	Einführung in das Extended Vasiček-Modell	100
5.3.2	Bestimmung der Zinsstruktur	101
5.3.3	Kalibrierung des Extended Vasiček-Modells	103
5.4	Vergleich der short-rate Modelle	107
A	Anhang	109
A.1	Beweis von Satz 5.15	109
A.2	Berechnung der Bondpreise im CIR-Modell	113
	Literaturverzeichnis	116

1 Eine Einführung in Rentenmärkte

Auf dem Rentenmarkt werden festverzinsliche Wertpapiere und insbesondere Nullkuponanleihen gehandelt. In diesem Kapitel werden Anleihen und einige verschiedene Zinsarten vorgestellt. Außerdem werden einige Zinsderivate und die Bewertung dieser Zinsderivate untersucht. Wichtig ist, dass Arbitragemöglichkeiten von Beginn an ausgeschlossen werden.

Dabei orientiert sich dieses erste Kapitel der Arbeit, sofern keine andere Literaturquelle angegeben ist, an [Fil02], [Sch04] und [Bjö04].

Um eine mathematische Modellierung des Rentenmarktes zu erhalten, wird als Erstes ein endlicher Zeithorizont $T^* < \infty$ fixiert. Weiter ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der in diesem Kapitel zugrunde liegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T^*}$, welche den Informationsverlauf darstellt.

1.1 Die Nullkuponanleihe

Nullkuponanleihen bzw. Zero-Coupon-Bonds stellen einen Vertrag dar, der seinem Halter am Ende der Laufzeit eine sichere Zahlung in Höhe des Nennwerts verspricht, während der Laufzeit aber keine Zinserträge liefert.

Definition 1.1: (Vergleiche [Sch04], Def. 1.1.1.)

Eine Nullkuponanleihe bzw. ein Zero-Coupon-Bond ist ein Finanzgut, welches zu einem fest vereinbartem Zeitpunkt, dem Fälligkeitszeitpunkt oder Maturity, $T > 0$, den Nennwert $N = 1$ zahlt. Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq T \leq T^*$, wird mit $B(t, T)$ bezeichnet.

Offensichtlich gilt $B(T, T) = 1$. Weiter werde angenommen, dass der Preisprozess $(B(t, T))_{t \in [0, T]}$ adaptiert und strikt positiv sei. Für ein festes $t \in [0, T]$ sei $B(t, T)$ stetig

differenzierbar in T . Schließlich sei angenommen, dass ein Markt für Zero-Coupon-Bonds mit jeder beliebigen Fälligkeit T , $0 < T \leq T^*$, existiere. Die Abbildung des Zero-Coupon-Bond-Preisprozesses mit Fälligkeit T lautet

$$\begin{aligned} B(\cdot, T) : [0, T] \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (t, \omega) &\mapsto B(t, T)(\omega). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2: 1. Ein Zero-Coupon-Bond mit Fälligkeit T wird kurz T -Bond genannt oder einfach nur Bond, wenn die Fälligkeit eindeutig ist.

2. Da der Bond seinem Halter eine Zahlung von 1 im Fälligkeitszeitpunkt zusichert, wäre der Wert des Bonds zum Zeitpunkt t gleich $e^{-r(T-t)}$, wenn ein konstanter Zinssatz r für den gesamten Zeitraum vorliegen würde und es stetig verzinst werden würde. In dieser Arbeit werden allerdings stochastische Zinsraten betrachtet. Mit variierenden Zinsraten nehmen aber auch die Bondpreise zufällige Werte an. Der Preis, den man für einen Zero-Coupon-Bond in einem zukünftigen Zeitpunkt zahlen muss, ist also unsicher.

3. Der Zero-Coupon-Bond dient als stochastischer Diskontfaktor.

1.2 Zinsarten

Es werden nun einige Zinsarten vorgestellt, die aus den Preisprozessen der Zero-Coupon-Bonds in Rentenmärkten abgeleitet werden können. Häufig kann man zur Herleitung ein sogenanntes „Forward Rate Agreement“ anwenden. Die verschiedenen Zinsarten sind zum einen in diskrete, stetige und augenblickliche Zinsen und zum anderen in Spotrates und Forwardrates zu unterscheiden¹.

Sei $0 \leq t \leq T \leq S \leq T^*$.

Diskrete Zinsen

Die diskrete Forwardrate $F(t; T, S)$ bezeichne den Zins, der in t für eine Anlage von T bis S vereinbart wird, wenn eine lineare Verzinsung unterstellt wird. Zur Bestimmung der diskreten Forwardrate wird ein Forward Rate Agreement² durchgeführt.

¹Die Definitionen der einzelnen Zinsarten sind in [Fil02], Seite 11f. nachzulesen.

²Vergleiche [Sch04] und [Fil02].

- An t : Verkaufe einen T -Bond und kaufe $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ S -Bonds. Somit liegen zum Zeitpunkt t weder Kosten noch Zahlungseingänge vor.
- An T : Zahle 1 für den verkauften T -Bond.
- An S : Erhalte $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ als Rückzahlung aus den S -Bonds.

Das Forward Rate Agreement verpflichtet den Käufer also zur Zahlung von 1 in T und sichert ihm eine Einnahme von $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ in S zu. Dies lässt sich so interpretieren, dass die Geldeinheit 1 von T bis S mit dem bereits in t fixierten Zins $F(t; T, S)$ linear verzinst wird. Bei Arbitragefreiheit muss die Auszahlung in S mit der Zahlung von $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ in S übereinstimmen. Folglich gilt

$$1 + (S - T)F(t; T, S) = \frac{B(t, T)}{B(t, S)}$$

und es kann im Anschluss folgende Definition formuliert werden:

Definition 1.3: Die diskrete Forwardrate für den Zeitraum $[T, S]$ zur Zeit t ist definiert durch

$$F(t; T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1 \right). \quad (1.1)$$

Die Spotrate in t für einen Zeitraum der Länge $T - t$ ist der Zins, der für eine Anlage von t bis T bezahlt wird. Da $B(t, t) = 1$ gilt, ergibt sich die diskrete Spotrate direkt aus der Definition der diskreten Forwardrate.

Definition 1.4: Die diskrete Spotrate $F(t, T)$ für $[t, T]$ zur Zeit t ist

$$F(t, T) := F(t; t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{B(t, T)} - 1 \right). \quad (1.2)$$

Beispiel 1.5: Der LIBOR (London Interbank Offered Rate) ist der Zinssatz aus dem Interbankenhandel, der am häufigsten verwendet wird. Man bestimmt den LIBOR $L(t; T, S)$ als diskrete Forwardrate, das heißt, es gilt

$$L(t; T, S) := \frac{1}{S - T} \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1 \right).$$

Stetige Zinsen

Auch zur Herleitung der stetigen Forwardrate lässt sich ein Forward Rate Agreement³ anwenden, indem gleichzeitig zwei Strategien verfolgt werden.

1. Strategie:

- In t : Kaufe $\frac{1}{B(t,S)}$ S -Bonds zum Preis von $B(t,S)$. Damit investiert man eine Geldeinheit.
- In S : Erhalte $\frac{1}{B(t,S)}$.

2. Strategie:

- In t : Kaufe $\frac{1}{B(t,T)}$ T -Bonds zum Preis von $B(t,T)$. Damit investiert man wieder eine Geldeinheit.
- In T : Erhalte $\frac{1}{B(t,T)}$ aus dem T -Bond. Lege diesen Betrag von T bis S bei stetiger Verzinsung zur Forwardrate $R(t,T,S)$ an.
- In S : Erhalte $\frac{1}{B(t,T)} e^{R(t,T,S)(S-T)}$.

Beide Strategien haben gemeinsam, dass man in t eine Geldeinheit investiert und in S eine Zahlung erhält. Diese Zahlungen sind sicher und in t bekannt, da auch die stetige Forwardrate $R(t,T,S)$ bereits in t vorliegt. Aufgrund des No-Arbitrage-Prinzips stimmen dann beide Zahlungen in S überein.

Es gilt

$$\frac{1}{B(t,S)} = \frac{1}{B(t,T)} e^{R(t,T,S)(S-T)}.$$

Damit folgt die Definition der stetigen Forwardrate.

Definition 1.6: Die stetige Forwardrate für den Zeitraum $[T, S]$ zur Zeit t ist

$$R(t; T, S) = -\frac{\log B(t, S) - \log B(t, T)}{S - T}. \quad (1.3)$$

Aus dieser Definition folgt die Definition der stetigen Spotrate, indem benutzt wird, dass $\log B(t, t) = \log 1 = 0$ gilt.

³Vergleiche [BS04], Seite 9.

Definition 1.7: Die stetige Spotrate für das Zeitintervall $[t, T]$ zur Zeit t ist

$$R(t, T) := R(t; t, T) = \frac{-\log B(t, T)}{T - t}. \quad (1.4)$$

Augenblickliche Zinsen

Lässt man die Intervalllänge gegen Null gehen, erhält man

Definition 1.8: Die augenblickliche Forwardrate mit Fälligkeit T an t ist definiert durch

$$f(t, T) := \lim_{S \downarrow T} R(t; T, S) = -\frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T}. \quad (1.5)$$

Im Folgenden sei mit der Bezeichnung Forwardrate stets die augenblickliche Forwardrate gemeint. Zu beachten ist, dass an dieser Stelle die Differenzierbarkeit des Bondpreises nach T benötigt wird.

Ebenso kann man nun die short-rate definieren.

Definition 1.9: Die short-rate zum Zeitpunkt t ist der Zinssatz für eine infinitesimal kurze Periode und ist definiert durch

$$r(t) := f(t, t) = \lim_{T \downarrow t} R(t, T). \quad (1.6)$$

Bemerkung 1.10: 1. Ausgehend von $r(t)$ und $f(t, T)$ werden viele Modelle zur Beschreibung von Schwankungen der Zinskurve im Zeitablauf, also der Zinsstruktur, entwickelt. In dieser Arbeit wird im zweiten Kapitel ein Modell auf Basis der short-rate vorgestellt, das die zukünftige Entwicklung der short-rate darstellt.

2. Ausgehend von der short-rate lässt sich das Geldmarktkonto einführen. Dieses stellt den Preisprozess einer risikolosen Anlage zur short-rate dar. Im Geldmarktkonto kann zu jedem Zeitpunkt t ein Geldbetrag zur short-rate angelegt oder abgehoben werden.

Der Zusammenhang zwischen Bonds und Forwardrates

Der Bondpreis folgt aus der Forwardrate und umgekehrt⁴:

Satz 1.11: *Es gilt*

$$B(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right). \quad (1.7)$$

Beweis: Für die Forwardrate gilt $f(t, T) = -\frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T}$. Durch Integration ergibt sich der Preis eines Zero-Coupon-Bonds in Form von Formel (1.7). $\square$

Die Zero-Coupon-Bond-Zinskurve

Definition 1.12: Die Yield-to-Maturity ist der konstante Zinssatz über die Periode $[t, T]$, $0 \leq t \leq T$, der den Marktwert des Bonds erzeugt.

Für einen Bond ist die Yield-to-maturity gerade die stetige Spotrate, denn es gilt

$$B(t, T) = \exp(-R(t, T)(T - t)) \quad \text{bzw.} \quad R(t, T) = \frac{-\log B(t, T)}{T - t}. \quad (1.8)$$

Definition 1.13: (Vergleiche [Fil02], Seite 20 oder [Bjö04], Def. 20.8.)

Die Funktion $t \mapsto R(t, T)$ heißt die Zero-Coupon-Bond-Zinskurve oder auch (Zero-Coupon-)Yield-Kurve.

1.3 Kupontragende Anleihen

Neben den Zero-Coupon-Bonds lassen sich kupontragende Anleihen betrachten, welche während der Laufzeit Zinszahlungen leisten. Hierbei unterscheidet man zwischen festverzinslichen Anleihen und variabel verzinslichen Anleihen. Wie im Folgenden gezeigt wird, lassen sich beide Arten von Anleihen mit Kuponzahlungen durch Zero-Coupon-Bonds beschreiben.

Als Literaturquelle dient für diesen Abschnitt insbesondere [Fil02], Seite 16f.

⁴Vergleiche [Bjö04], Lemma 20.4.

1.3.1 Die festverzinsliche Anleihe

Definition 1.14: Eine festverzinsliche Anleihe (Fixed Coupon Bond) ist ein Finanzgut, das während der Laufzeit Zinszahlungen leistet und einen Vertrag beinhaltet, der durch den Nennwert N , den Fälligkeitszeitpunkt T , den Zahlungszeitpunkten $T_1 < T_2 < \dots < T_n = T$, $T_1 > 0$, an denen Kuponzahlungen geleistet werden, und den festen (deterministischen) Kuponzahlungen $C_{T_1}, \dots, C_{T_n}$ bestimmt ist.

Dabei wird hier angenommen, dass sich die Kuponzahlungen in allen Zahlungszeitpunkten aus einer konstanten Kuponrate K ergeben und die Kuponanleihe endfällig ist. Der Nennwert wird demzufolge bei Fälligkeit ausgezahlt. Dann gilt für die Kuponzahlungen $C_{T_i} = KN(T_{i+1} - T_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Satz 1.15: Für eine festverzinsliche Anleihe mit Nennwert N und mit äquidistanten Kuponzahlungen, d.h. $T_{i+1} - T_i \equiv \delta$ für alle $i = 1, \dots, n$, beträgt der Preis in $t \leq T_1$:

$$p(t) = \left(K\delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i) + B(t, T_n) \right) N.$$

Beweis: Der Halter dieser Anleihe erhält also Zahlungen von C_{T_i} in den Zeitpunkten T_i , $i = 1, \dots, n$, und eine Zahlung von N am Fälligkeitszeitpunkt $T = T_n$.

Betrachtet man ein Portfolio aus C_{T_i} Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeiten T_i , $i = 1, \dots, n-1$, und $N + C_{T_n}$ T_n -Bonds, so besitzt dieses Portfolio den gleichen Entnahmeprozess wie die kupontragende Anleihe. Somit wird die Anleihe durch das Portfolio dupliziert. Der Wert des Portfolios in t ist gerade

$$p(t) = \sum_{i=1}^n B(t, T_i) C_{T_i} + B(t, T_n) N.$$

Aufgrund der Arbitragefreiheit und dem Present Value Prinzip ist der Preis der Anleihe also gleich dem Preis des Portfolios und somit durch die Summe der abdiskontierten Cashflows gegeben, wobei gerade der Preis des T_i -Bonds als Diskontfaktor von C_{T_i} dient, $i = 1, \dots, n$.

Gilt $T_{i+1} - T_i \equiv \delta$ für alle $i = 1, \dots, n$ und sind die Kuponzahlungen ein fixer Anteil des Nennwerts, d.h. $C_{T_i} = K\delta N$ für eine fixe Zinsrate K , so ergibt sich der Preis der

Anleihe zur Zeit $t \leq T_1$ als

$$p(t) = \left(K\delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i) + B(t, T_n) \right) N.$$

□

Eine festverzinsliche kupontragende Anleihe entspricht also einem Portfolio aus Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeiten $T_1, \dots, T_n$.

1.3.2 Die variabel verzinsliche Anleihe

Definition 1.16: Eine variabel verzinsliche Anleihe (Floating Rate Note) leistet während der Laufzeit Zinszahlungen, deren Höhen unsicher sind und die sich jeweils aus dem aktuellen Marktzins ergeben. Eine solche Anleihe beinhaltet einen Vertrag, der durch den Nennwert N , den Fälligkeitstermin T und den Kuponzahlungszeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$ festgelegt ist. Die Kuponzahlungen sind

$$C_{T_i} = (T_i - T_{i-1})F(T_{i-1}, T_i)N, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $F(T_{i-1}, T_i)$ die diskrete Spotrate für die Periode $[T_{i-1}, T_i]$ ist.

Bemerkung 1.17: $F(T_{i-1}, T_i)$ wird schon in T_{i-1} bestimmt, aber der Cash Flow C_{T_i} findet erst zur Zeit T_i statt. Damit ist C_{T_i} $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$ -messbar.

Satz 1.18: Der Wert einer variabel verzinslichen Anleihe mit Nennwert N in $t \leq T_0$ ist

$$p(t) = NB(t, T_0).$$

Beweis: Der Wert der variabel verzinslichen Anleihe ergibt sich als Summe der abdiskontierten Cashflows, denn ebenso wie bei einer festverzinslichen Anleihe lässt sich die variabel verzinsliche Anleihe durch ein Portfolio aus Zero-Coupon-Bonds duplizieren und der Wert der Anleihe in t ist nach dem Present Value Prinzip gleich dem Wert des Portfolios in t :

$$p(t) = \sum_{i=1}^n B(t, T_i)C_{T_i} + B(t, T_n)N.$$

Für die Kuponzahlungen C_{T_i} , $i = 1, \dots, n$, gilt

$$\begin{aligned}
C_{T_i} &= (T_i - T_{i-1})F(T_{i-1}, T_i)N \\
&\stackrel{(1.2)}{=} (T_i - T_{i-1})\frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1\right)N \\
&= N\left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1\right).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Zahlung -1 in T_i hat in t den Wert $-B(t, T_i)$ und der Wert der Auszahlung von $\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)}$ in T_i zur Zeit t beträgt $B(t, T_{i-1})$. Dazu führt man folgendes Forward Rate Agreement⁵ durch:

- An t : Kaufe einen T_{i-1} -Bond. Dafür bezahlt man $B(t, T_{i-1})$.
- An T_{i-1} : Erhalte nun eine Zahlung von 1 aus dem T_{i-1} -Bond. Kaufe $\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)}$ T_i -Bonds und zahle dafür $\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)}B(T_{i-1}, T_1) = 1$.
- An T_i : Erhalte $\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)}$ aus dem T_i -Bond.

Daraus ergibt sich nun wegen der Arbitragefreiheit

$$\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{i=1}^n B(t, T_i)C_{T_i} + B(t, T_n)N \\
&\stackrel{(1.9)}{=} \sum_{i=1}^n B(t, T_i)N\left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1\right) + B(t, T_n)N \\
&= N\left(\sum_{i=1}^n (B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)) + B(t, T_n)\right) \\
&= NB(t, T_0).
\end{aligned}$$

□

Der Wert einer variabel verzinslichen Anleihe in $t \leq T_0$ wird also nur durch den Nennwert und den Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T_0 in t bestimmt.

⁵Vergleiche [Fil02], Seite 17.

1.4 Zinsderivate

Ein Zinsderivat stellt ein Derivat dar, dessen Underlying ein Zins ist. Ein einfaches Beispiel dafür ist eine Calloption auf einen Zero-Coupon-Bond. In dieser Arbeit werden Swaps, Caps bzw. Floors und Swaptions als einfache Beispiele für Zinsderivate eingeführt und es wird gezeigt, wie die Bewertung dieser Finanzgüter auf die Bewertung von Bonds reduziert wird.

Zusätzlich zu den anfangs angegebenen Literaturquellen orientiert sich dieser Abschnitt an [BS04] und [Shr04].

1.4.1 Swaps

Ein typisches Zinsderivat ist ein (Plain Vanilla) Swap. Dieser stellt ein Tauschgeschäft dar, bei dem ein fixer Zinssatz auf einen bestimmten Nominalbetrag gegen einen variablen Zinssatz auf den gleichen Betrag getauscht wird oder umgekehrt.

Ein Swap dient der Absicherung gegen Zinsänderungsrisiken. Zu bestimmen sind der Wert des Swaps und der faire fixe Zinssatz, die Swap Rate. Dabei können zwei verschiedene Arten von Swaps betrachtet werden, Payer Swaps und Receiver Swaps.

Definition 1.19: (Siehe [Fil02], Seite 17f.)

Der Halter eines Payer Swaps (bzw. Receiver Swaps) zahlt einen fixen (bzw. variablen) Zinssatz und erhält dafür einen variablen (bzw. fixen) Zinssatz. Beide Arten von Swaps werden festgelegt durch den fixen Zinssatz K , den Nennwert N , den zukünftigen Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n$, wobei $T_1, \dots, T_n$ die Zahlungszeitpunkte sind und T_n zugleich die Fälligkeit des Swaps ist.

Im Folgenden seien die Zeitpunkte äquidistant, es gelte also $T_i - T_{i-1} \equiv \delta, i = 1, \dots, n$. Hier wird nun angenommen, dass die variable Zinszahlung aus der diskreten Spotrate folgt, das heißt, die variable Zinszahlung in $T_i, i = 1, \dots, n$, entspricht $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$. Die fixe Zinszahlung ist $K\delta N$.

Der Preis dieses Zinsderivats lässt sich mit Bondpreisen berechnen, wobei die Fälligkeiten der Bonds gerade die Zahlungszeitpunkte des Swaps sind.

Satz 1.20: (Vergleiche [BS04], Seite 24.)

Der Wert des Payer Swaps $S_P(t)$ zur Zeit $t \leq T_0$ ist

$$S_P(t) = N(B(t, T_0) - B(t, T_n) - \delta K \sum_{i=1}^n B(t, T_i)). \quad (1.10)$$

Analog gilt für den Wert des Receiver Swaps

$$S_R(t) = N(B(t, T_n) - B(t, T_0) + \delta K \sum_{i=1}^n B(t, T_i)) = -S_P(t). \quad (1.11)$$

Also stimmen die Zahlungen eines Payer Swaps mit den Zahlungen eines Portfolios überein, das aus einer fest verzinslichen Kuponanleihe short und einer variabel verzinslichen Anleihe long besteht. Analog entspricht ein Receiver Swap einem Portfolio mit einer long position in einer fest verzinslichen Anleihe und mit einer short position in einer variablen Anleihe. Ein Swap kann als eine Vereinbarung angesehen werden, eine festverzinsliche Anleihe gegen eine variabel verzinsliche Anleihe zu tauschen.

Beweis: An T_i zahlt der Inhaber des Payer Swaps $K\delta N$ und erhält $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$. Der Cashflow an T_i ist $(F(T_{i-1}, T_i) - K)\delta N$. Mit einem Duplikationsargument lässt sich der Wert des Payer Swaps $S_P(t)$ zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ als Summe der abdiskontierten Cashflows berechnen, wobei man die Preise des T_i -Bonds als Diskontfaktor für den Cashflow in T_i verwendet. Es wird somit ein Portfolio gebildet, das den gleichen Entnahmeprozess wie der Swap besitzt. Der Wert des Portfolios in t ist

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=1}^n B(t, T_i) N \delta (F(T_{i-1}, T_i) - K) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \sum_{i=1}^n B(t, T_i) N \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - \sum_{i=1}^n B(t, T_i) N K \delta \\ &\stackrel{\frac{B(t, T_i)}{B(T_{i-1}, T_i)} = B(t, T_{i-1})}{=} N \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{B(t, T_i)}{B(T_{i-1}, T_i)} - B(t, T_i) \right) - \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \delta K \right) \\ &= N(B(t, T_0) - B(t, T_n) - \delta K \sum_{i=1}^n B(t, T_i)). \end{aligned}$$

Aufgrund der Arbitragefreiheit ist der Wert des Swaps gleich dem Wert des Portfolios

$$S_P(t) = N(B(t, T_0) - B(t, T_n) - \delta K \sum_{i=1}^n B(t, T_i)).$$

Im Fall eines Receiver Swaps beträgt der Cashflow in T_i gerade $(K - F(t; T_{i-1}, T_i))\delta N$. Der Beweis verläuft bis auf die Vorzeichen völlig identisch. $\square$

Die Höhe der fairen festen Zinszahlung wird durch die Swap Rate⁶ R_{Swap} bestimmt.

Definition 1.21: Als fixe Zinszahlung vereinbart man den fixen Parameter K , für den der jeweilige Swap in $t \leq T_0$ den Wert 0 hat. Der Parameter K heißt Swap Rate und wird mit $R_{Swap}(t)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.22: Wegen der Beziehung $S_R(t) = -S_P(t)$ haben Payer Swaps und Receiver Swaps mit gleichen Zahlungszeitpunkten und gleichem Nennwert auch die gleiche Swap Rate.

Satz 1.23: (Vergleiche [Sch04], Bem. 1.1.3.)

Die Swap Rate ist das gewichtete Mittel der diskreten Forwardrates mit den Gewichten

$$\omega_i = \frac{B(t, T_i)}{\sum_{j=1}^n B(t, T_j)}, i = 1, \dots, n.$$

Für die Swap Rate gilt

$$R_{Swap}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i F(t; T_{i-1}, T_i) = \sum_{i=1}^n \frac{B(t, T_i)}{\sum_{j=1}^n B(t, T_j)} F(t; T_{i-1}, T_i).$$

Die Swap Rate ergibt sich aus den Preisen der in $T_i, i = 1, \dots, n$, fälligen Zero-Coupon-Bonds.

Beweis: Aus der Definition der Swap Rate ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= S_P(t) \\ \Leftrightarrow B(t, T_0) - B(t, T_n) &= \delta K \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \\ \Leftrightarrow K &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)}{\sum_{j=1}^n B(t, T_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{B(t, T_i)}{\sum_{j=1}^n B(t, T_j)} \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right) \end{aligned}$$

⁶Vergleiche [Sch04], Seite 9.

$$\Leftrightarrow R_{Swap}(t) = K = \sum_{i=1}^n \frac{B(t, T_i)}{\underbrace{\sum_{j=1}^n B(t, T_j)}_{:=\omega_i}} F(t; T_{i-1}, T_i).$$

□

1.4.2 Caps und Floors

Typische Beispiele von Optionen auf Zinsgrößen sind Caps und Floors.

Ist man zu Zinszahlungen, die sich an einem variablen Zinssatz orientieren, verpflichtet, so kann man sich mit Caps vor steigenden Zinsen schützen. Umgekehrt kann man sich mit Floors vor fallenden Zinsen absichern.

Definition 1.24: Ein Cap schützt den Halter vor steigenden Zinsen, indem der Cap garantiert, dass die Zinszahlungen bei einer variabel verzinslichen Anleihe eine obere Grenze K nicht überschreiten.

Ein Cap ist ein Portfolio aus Caplets und besteht aus einer Cap-Rate K und einer Anzahl an zukünftigen Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n$, wobei $T_1, \dots, T_n$ die Zahlungszeitpunkte darstellen und T_n ist der Fälligkeitszeitpunkt des Caps.

O.B.d.A. gelte $T_i - T_{i-1} \equiv \delta > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Ein Caplet mit Startzeitpunkt T und Ausübungstag $T + \delta$ zahlt dem Halter die Differenz zwischen der diskreten Spotrate $F(T, T + \delta)$ und dem Strikezins K .

Somit ist ein Caplet vergleichbar mit einer Calloption auf die diskrete Spotrate. Kauft sich der Emittent einer variabel verzinslichen Anleihe einen Cap, dessen zugrunde liegender Zins und dessen Zahlungszeitpunkte mit denen der Anleihe übereinstimmen, so verringert sich die Zahlung, die er in T_i leisten muss um die Differenz zwischen dem variablen Zins und der Cap Rate, solange der variable Zins höher als die Cap Rate K ist. Folglich zahlt er höchstens den festen Zinssatz K .

$Cpl(i; t)$ bezeichne den Preis des i -ten Caplets mit Startzeitpunkt T_{i-1} und Ausübungszeitpunkt T_i zur Zeit t , $0 \leq t \leq T_0$. Dann folgt für den Preis des Caps $Cp(t)$ in t :

$$Cp(t) = \sum_{i=1}^n Cpl(i; t).$$

Für den Wert eines Caplets folgt

Satz 1.25: (Vergleiche [BS04], Seite 27.)

Für den Wert des i -ten Caplets in T_{i-1} gilt

$$Cpl(i; T_{i-1}) = (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + \delta K} - B(T_{i-1}, T_i) \right)^+, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Die Auszahlung eines Caps an T_i , also der Cashflow des i -ten Caplets an T_i , ist äquivalent zu dem $(1 + \delta K)$ -fachen Cashflow an T_{i-1} einer Putoption auf einen T_i -Bond mit Strike-Preis $\frac{1}{1 + \delta K}$.

Beweis: Der Cashflow des i -ten Caplets, den der Halter in T_i erhält, beträgt

$$\delta(F(T_{i-1}, T_i) - K)^+.$$

Dieser lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \delta(F(T_{i-1}, T_i) - K)^+ &\stackrel{(1.2)}{=} \delta \left(\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - K \right)^+ \\ &= \delta \left(\frac{1 - (1 + K\delta)B(T_{i-1}, T_i)}{\delta B(T_{i-1}, T_i)} \right)^+ \\ &= \frac{1 + K\delta}{B(T_{i-1}, T_i)} \left(\frac{1}{1 + \delta K} - B(T_{i-1}, T_i) \right)^+. \end{aligned}$$

Dann gilt für den Wert des i -ten Caplets zur Zeit T_{i-1}

$$Cpl(i; T_{i-1}) = B(T_{i-1}, T_i) \delta(F(T_{i-1}, T_i) - K)^+ = (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + \delta K} - B(T_{i-1}, T_i) \right)^+.$$

□

Der Wert des Caplets folgt also aus dem Wert des Puts. Also ist der Cap als ein Portfolio aus Putoptionen zu bewerten.

Ein ähnliches Ergebnis erhält man, wenn man das Gegenstück zum Cap, den Floor betrachtet. Dieses Derivat ist dann interessant, wenn man variable Zinszahlungen erhält. Wenn sich der Inhaber einer variabel verzinslichen Anleihe einen Floor, dessen zugrunde liegender variabler Zins und dessen Zahlungszeitpunkte mit denen der variablen Anleihe übereinstimmen, kauft, so erhält dieser mindestens einen festen Zinssatz in Höhe von K .

Definition 1.26: Ein Floor ist ein Portfolio aus Floorlets und schützt den Halter vor fallenden Zinsen, indem garantiert wird, dass eine untere Grenze K nicht unterschritten wird. Spezifiziert wird dieses Zinsderivat durch die Floor Rate K und einer Anzahl an zukünftigen Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ wie beim Cap.

Ein Floorlet mit Startzeitpunkt T und Ausübungszeitpunkt $T + \delta$ zahlt dem Halter die Differenz zwischen der diskreten Spotrate $F(T, T + \delta)$ und dem Strikezins K . Der Cashflow zur Zeit $T + \delta$ beträgt

$$\delta(K - F(T, T + \delta))^+.$$

Also ist ein Floorlet vergleichbar mit einer Putoption auf einen Zins und ein Floor ist somit ein Portfolio aus Putoptionen.

Ähnlich wie im Fall von Caplets gibt es eine Äquivalenz zwischen Calloptionen und Floorlets.

Satz 1.27: (Vergleiche z.B. [BS04], Seite 28.)

Der Wert des i -ten Floorlets in T_{i-1} beträgt

$$Fl(i; T_{i-1}) = (1 + K\delta) \left(B(T_{i-1}, T_i) - \frac{1}{1 + K\delta} \right)^+, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Die Auszahlung eines Floors an T_i , also der Cashflow des i -ten Floorlets an T_i , ist äquivalent zu dem $(1 + \delta K)$ -fachen Cashflow an T_{i-1} von einer Calloption auf einen T_i -Bond mit Strike-Preis $\frac{1}{1 + \delta K}$. Damit folgt der Wert des Floorlets aus dem Wert des Calls auf eine Nullkuponanleihe und der Floor ist somit als ein Portfolio aus Calloptionen bewertbar. Für den Wert gilt

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^n Fl(i; t).$$

Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet, da dieser analog zu dem Beweis im Fall von Caps abläuft.

1.4.3 Die Cap-Floor-Swap-Parität

Die Cap-Floor-Swap-Parität⁷ stellt eine Beziehung zwischen dem Wert eines Caps, dem Wert eines Floors und dem Wert eines Swaps dar, wobei die Cap Rate, die Floor Rate sowie die Swap Rate und die Zahlungszeitpunkte in allen drei Kontrakten übereinstimmen.

Satz 1.28 (Cap-Floor-Swap-Parität): *Gegeben seien ein Cap, ein Floor und ein Payer Swap mit gemeinsamen zukünftigen Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ und Zahlungszeitpunkten $T_1, \dots, T_n$. Es gelte $\text{Cap Rate} = \text{Floor Rate} = \text{Swap Rate} = K$. Dann gilt zwischen den Verträgen die Beziehung*

$$Cp(t) - Fl(t) = S_P(t).$$

Beweis: O.B.d.A. $N = 1$.

Dazu geht man eine long position in den Cap und eine short position in den Floor ein.

Dazu betrachte man zunächst das i -te Caplet bzw. das i -te Floorlet.

Nach Satz 1.12 bzw. Satz 1.27 und mit der Put-Call-Parität⁸ folgt

$$\begin{aligned} Cpl(i, t) - Fll(i, t) &= (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + K\delta} B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i) \right) \\ &= B(t, T_{i-1}) - (1 + K\delta) B(t, T_i). \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren erhält man für den Preis dieser Strategie in t

$$\begin{aligned} Cp(t) - Fl(t) &= \sum_{i=1}^n (Cpl(i, t) - Fll(i, t)) \\ &= \sum_{i=1}^n (B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)) - K\delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \\ &= B(t, T_0) - B(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \stackrel{(1.10)}{=} S_P(t), \end{aligned}$$

das heißt, der Payer Swap wird durch diese Strategie dupliziert. □

⁷Vergleiche [Fil02], Seite 27.

⁸Vergleiche [Pau09], Finanzmathematik 1, Abschnitt 1.9.

Bemerkung 1.29: Betrachtet man statt eines Payer Swaps einen Receiver Swap, so folgt wegen der Beziehung $S_P(t) = -S_R(t)$ als Cap-Floor-Swap-Parität

$$Fl(t) - Cp(t) = S_R(t).$$

1.4.4 Swaptions

Auch ein Swap kann das Underlying einer Option sein. Ein solches Zinsderivat wird als Swaption bezeichnet. Der Halter einer Swaption besitzt das Recht, bei Fälligkeit in einen Swap einzutreten, er muss dieses Recht aber nicht ausüben. Da es zwei typische Swaps gibt, den Payer Swap und den Receiver Swap, gibt es auch zwei typische Swaptions, die Payer Swaption und die Receiver Swaption. Diese werden nun zunächst definiert.

Definition 1.30: Eine (europäische) Payer Swaption bzw. eine (europäische) Receiver Swaption mit Strike Rate K ist eine Option, die dem Inhaber das Recht gibt, in einen Payer Swap bzw. Receiver Swap mit fixem Zinssatz K zu einem zukünftigen Zeitpunkt, der Fälligkeit der Swaption, einzutreten.

Der der Swaption zugrunde liegende Swap wird durch die Swap Rate K , also den fairen festen Zins, beschrieben. K übernimmt damit die Rolle des Basispreises der Option. Da in den meisten Fällen die Fälligkeit der Swaption mit dem ersten zukünftigen Zeitpunkt des unterliegenden Swaps, also dem Reset Date, T_0 übereinstimmt, wird auch hier angenommen, dass T_0 der Fälligkeit der Swaption entspricht. Für den Inhaber bedeutet dies, dass er an T_0 entscheiden muss, ob er in den Swap eintritt oder nicht. Die zugehörige Swaplänge $T_n - T_0$ heißt Tenor des Swaps. Das folgende Beispiel⁹ erläutert die Verwendung von Swaptions.

Beispiel 1.31: Betrachtet wird ein Unternehmen, das in sechs Monaten ein Darlehen mit variabler Verzinsung und einer Laufzeit von fünf Jahren abschließt, jedoch die variable Verzinsung gegen feste Zinszahlungen tauschen möchte. Dazu kann das Unternehmen in einem halben Jahr in einen Payer Swap eintreten. Da das Unternehmen aber zusätzlich sicherstellen möchte, dass der Festzins, den es dann zu zahlen hat, einen gewissen Prozentsatz nicht übersteigt, kauft das Unternehmen eine Swaption, die

⁹Siehe [Hul06], Abschnitt 26.4.

einem das Recht gibt, in einen Payer Swap einzutreten. Wenn der Festzins für einen regulären Swap im Fälligkeitstermin der Swaption über dem in der Swaption vereinbarten Festzins liegt, übt das Unternehmen die Swaption aus, anderenfalls tritt es in einen regulären Swap ein.

Payer Swaptions bieten Marktteilnehmern eine Garantie, dass der feste Zins, den sie zukünftig für einen Kredit zahlen, eine bestimmte Höhe nicht überschreitet.

Der Vorteil einer Swaption liegt darin, dass man einerseits von günstigen zukünftigen Zinsbewegungen profitieren kann und andererseits vor nachteiligen Zinsbewegungen geschützt ist.

Sei $0 \leq t \leq T_0$. Betrachtet werde nun eine Payer Swaption. Die Zahlungszeitpunkte der Payer Swaption mit Fälligkeit T_0 und des zugrunde liegenden Payer Swaps seien $T_1 < \dots < T_n$, wobei $T_1 > T_0$ gilt. Die Zahlungszeitpunkte seien äquidistant, das heißt, es gilt $T_i - T_{i-1} \equiv \delta$.

Für den Wert des Swaps in T_0 gilt nach (1.10)

$$S_P(T_0) = N(1 - B(T_0, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^n B(T_0, T_i)).$$

Somit folgt für den Cash Flow der Swaption¹⁰ in T_0

$$\left(N - N \left(K\delta \sum_{i=1}^n B(T_0, T_i) - B(T_0, T_n) \right) \right)^+. \quad (1.14)$$

Wie man sieht, ist dies gerade die Zahlung einer in T_0 fälligen Putoption mit Basispreis N auf eine festverzinsliche Anleihe mit fixem Zinssatz K und Nennwert N . Damit lässt sich die Bewertung der Swaption auf die Bewertung eines Puts auf eine festverzinsliche Anleihe zurückführen.

Genauso kann man auch zeigen, dass die Bewertung einer Receiver Swaption auf die Bewertung einer Calloption auf eine festverzinsliche Anleihe zurückgeführt werden kann.

Bemerkung 1.32: Hier wurde nun ein elementarer Unterschied zwischen Caps bzw. Floors und Swaptions aufgezeigt. Der Cash Flow eines Caps bzw. Floors zerfällt in elementare Prozesse, der Cashflow einer Swaption nicht.

¹⁰Vergleiche [BS04], Seite 26.

Der Wert einer Swaption in $t \leq T_0$ lässt sich mit der Formel von Black für Swaptions berechnen. Diese Formel ist nachzulesen in [Fil02], Seite 30.

In Abschnitt 5.1.4 dieser Arbeit wird eine Methode zur Bewertung einer Payer Swaption im Vasiček-Modell vorgestellt.

2 Allgemeine short-rate Modelle

In short-rate Modellen wird die short-rate als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung modelliert. Es wird angenommen, dass Zero-Coupon-Bonds jeder beliebigen Fälligkeit in einem endlichen Zeithorizont vorliegen und sich die Preise der Bonds als Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit und dem Wert der short-rate in diesem Zeitpunkt darstellen lassen. Wichtig ist außerdem die Annahme, dass ein äquivalentes Martingalmaß existiert, da daraus die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells folgt. Ausgehend von der short-rate erhält man den Preisprozess eines Geldmarktkontos. In diesem Kapitel wird nun gezeigt, wie arbitragefreie Bondpreise in short-rate Modellen berechnet werden können.

Zu Beginn startet man mit einer short-rate-Dynamik unter dem realen Maß $\mathbb{P}$ und erhält den Bondpreis als Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der sog. Term Structure Equation. Mit dem Ansatz des „Martingale Modelling“ wird die short-rate direkt unter dem risikoneutralen Maß modelliert. Unter diesem Maß lässt sich der Bondpreis als abdiskontierter bedingter Erwartungswert berechnen.

Dieses Kapitel orientiert sich dabei größtenteils an [Bjö04] und [Fil09], des Weiteren aber auch an [LL96] und [Sch04].

In dem nun folgenden ersten Abschnitt wird der mathematische Rahmen für short-rate Modelle geschaffen. Die folgenden Annahmen sollen für die gesamte Arbeit gelten.

2.1 Einführung in short-rate Modelle

Es werde ein endlicher Handelszeitpunkt $T^* < \infty$ fixiert.

Weiter sei $0 \leq t \leq T \leq T^*$ und $T > 0$.

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ und $\mathbb{P}$ sei das objektive Wahrscheinlichkeitsmaß.

$(W(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ sei ein Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum. Die Filtration

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ werde von $W(t)$ erzeugt und erfülle die „usual conditions“, das heißt, die Filtration sei rechtsseitig stetig und für jedes $t \in [0, T^*]$ enthalte $\mathcal{F}_t$ alle $\mathbb{P}$ -Nullmengen. Außerdem gelte $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T^*}$.

Die Filtration stellt in diesem Zusammenhang den Informationsverlauf dar, das heißt, $\mathcal{F}_t$ liefert den Informationsstand zum Zeitpunkt t . Außerdem nimmt die verfügbare Information im Zeitablauf zu, denn es gilt $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$.

Die short-rate ist ein stochastischer Prozess und soll folgenden Anforderungen genügen:

- $(r(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ hat stetige Pfade.
- $r(t)$ ist ein Markov-Prozess.

Damit macht $r(t)$ keine plötzlichen Sprünge und wegen der Markov-Eigenschaft ist die zukünftige Entwicklung der short-rate nur von dem heutigen Wert abhängig und hängt nicht von der bisherigen Entwicklung ab.

In einem (Ein-Faktor-) short-rate Modell lassen sich ausgehend von einer stochastischen Differentialgleichung für die short-rate arbitragefreie Zero-Coupon-Bond-Preise bestimmen. Dafür sind zunächst einige Annahmen zu treffen:

Annahme 1:

Die short-rate $r(t)$ folgt einem Itô-Prozess, das heißt, unter dem realen Maß $\mathbb{P}$ besitzt die short-rate die Gestalt

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \mu(u, r(u)) du + \int_0^t \sigma(u, r(u)) dW(u)$$

mit adaptierten und bezüglich beiden Variablen messbaren Funktionen

$$\mu : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, r(t)) \mapsto \mu(t, r(t)),$$

$$\sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, r(t)) \mapsto \sigma(t, r(t)),$$

derart dass eine starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung existiert.

In Differentialschreibweise bedeutet dies:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t). \quad (2.1)$$

Damit eine eindeutige starke Lösung von (2.1) existiert, erfüllt der Driftterm $\mu(t, x)$ die Lipschitz-Bedingung in x , das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0, T^*]$ existiert

eine Konstante c , so dass

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq c |x - y|$$

gilt, sowie eine „growth condition“ in x , das heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0, T^*]$ existiert eine Konstante C , so dass gilt

$$|\mu(t, x)|^2 \leq C(1 + x^2).$$

Ebenso erfüllt der Diffusionsterm $\sigma(t, x)$ eine „growth condition“ in x , es existiert also eine Konstante K mit

$$|\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + x^2)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0, T^*]$ sowie eine abgeschwächte Lipschitzbedingung

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq h(|x - y|)$$

für alle $0 \leq t \leq T^*$ und $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $h(0) = 0$ und $\int_{(0, \epsilon)} h^{-2}(u) du = \infty$ für alle $\epsilon > 0$ darstellt¹.

Als starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.1) besitzt der short-rate-Prozess $(r(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ stetige Pfade, ist adaptiert und Markovsch². Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\mu(s, r(s))| ds < \infty \\ \text{und} \quad & \int_0^t \sigma(s, r(s))^2 ds < \infty \quad \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

Da in short-rate-Modellen zu Beginn nur die Dynamik der short-rate gegeben ist, ist das einzige vorliegende Finanzgut, dessen Preisprozess bekannt ist, das Geldmarktkonto.

Definition 2.1: Die Entwicklung des Geldmarktkontos wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt, \quad \beta(0) = 1. \tag{2.2}$$

¹Vergleiche [KS97], Theorem 2.9, Seite 289, sowie Proposition 2.13, Seite 291, und [Duf92], Seite 240f.

²Vergleiche [LL96], Theorem 3.5.7 und [KS97], Def. 2.1, Seite 285.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\beta(t) = \exp \left(\int_0^t r(u) du \right). \quad (2.3)$$

$\beta(t)$ ist ein an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$ adaptierter Prozess. Außerdem ist $\beta(t)$ integrierbar.

Das Geldmarktkonto $\beta(t)$ definiert somit den Preisprozess einer risikolosen Anlage zur short-rate $r(t)$. Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ kann man einen Geldbetrag zur short-rate $r(t)$ anlegen oder abheben. $\beta(t)$ repräsentiert den Geldbetrag, der sich bis zur Zeit t ergibt, wenn man zu Beginn eine Geldeinheit im Geldmarktkonto anlegt und diese stetig mit der short-rate verzinst wird.

Des Weiteren dient $\beta(t)$ als stochastischer Diskontfaktor.

Annahme 2:

Es wird angenommen, dass ein Markt für Zero-Coupon-Bonds mit jeder beliebigen Fälligkeit $T \in (0, T^*]$ existiert.

Annahme 3:

Zu dem realen Maß $\mathbb{P}$ existiert ein äquivalentes Martingalmaß³ Q , so dass der abdiskontierte Bondpreis $\left(\frac{B(t, T)}{\beta(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ für jede Fälligkeit $T > 0$ ein Martingal unter Q ist.

Damit wird Arbitrage zwischen einer Auswahl von endlich vielen Bonds ausgeschlossen⁴.

Annahme 4:

Die arbitragefreien Preise der T -Bonds sind Funktionen in Abhängigkeit von t , T und $r(t)$ und lassen sich schreiben als

$$B(t, T) = F^T(t, r(t)) \quad (2.4)$$

mit $F^T \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$.

Aus Annahme 3 folgt direkt eine risikoneutrale Bewertungsgleichung⁵ für Bonds:

³Abkürzung: EMM

⁴Möchte man Strategien mit unendlich vielen Bonds betrachten, wird wie in [Fil09] verwiesen auf [BKR97] oder [CT06].

⁵Vergleiche [LL96], Seite 123.

Korollar 2.2 (Risikoneutrale Bewertungsgleichung): *Ist Q ein äquivalentes Martingalmaß, dann gilt für den Preis eines T -Bonds in t*

$$B(t, T) = \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.5)$$

Beweis: Aus der Martingaleigenschaft der abdiskontierten Bondpreise unter Q folgt für $0 \leq t \leq T$

$$\frac{B(t, T)}{\beta(t)} = \mathbb{E}_Q \left[\frac{B(T, T)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \stackrel{B(T, T)=1}{=} \mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(u) du} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Mit der Adaptiertheit des Geldmarktkontos ergibt sich nun die Behauptung. $\square$

Ist die unter $\mathcal{F}_t$ -bedingte Verteilung von $\int_t^T r(u) du$ unter dem äquivalenten Martingalmaß Q bekannt, so lassen sich die arbitragefreien Bondpreise mit dieser Bewertungsgleichung berechnen.

Im Folgenden wird untersucht, welche Gestalt die Dynamik der Bondpreis ausgehend von der Dynamik der short-rate besitzt. Daran anschließend wird der Marktpreis des Risikos hergeleitet und es ergibt sich eine partielle Differentialgleichung, deren Lösung gerade der arbitragefreie Bondpreis ist.

2.2 Die Dynamik der Bondpreise

Mit Hilfe der Itô-Formel lässt sich die Dynamik des T -Bondpreises bestimmen.

Satz 2.3: *Sei $0 \leq t \leq T \leq T^*$, $T > 0$.*

Die Dynamik eines T -Bonds unter dem objektiven Maß $\mathbb{P}$ ist

$$dF^T(t, r(t)) = F^T(t, r(t)) [m(t, T)dt + \bar{\sigma}(t, T)dW(t)] \quad (2.6)$$

mit

$$m(t, T) = \frac{1}{F^T(t, r(t))} \left[\frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial t} + \mu(t, r(t)) \frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial r} + \frac{\sigma^2(t, r(t))}{2} \frac{\partial^2 F^T(t, r(t))}{\partial r^2} \right] \quad (2.7)$$

und

$$\bar{\sigma}(t, T) = \frac{\sigma(t, r(t))}{F^T(t, r(t))} \frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial r}. \quad (2.8)$$

Beweis: Aufgrund von Annahme 3 kann die Itô-Formel auf die Funktion F^T angewandt werden.

$$\begin{aligned}
 dF^T(t, r(t)) &\stackrel{\text{Itô-Formel}}{=} \frac{\partial F^T}{\partial t} dt + \frac{\partial F^T}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} d\langle r \rangle(t) \\
 &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{\partial F^T}{\partial t} dt + \frac{\partial F^T}{\partial r} (\mu dt + \sigma dW(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \sigma^2 dt \\
 &= \left[\frac{\partial F^T}{\partial t} + \mu \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \sigma^2 \right] dt + \sigma(t) \frac{\partial F^T}{\partial r} dW(t) \\
 &= F^T \left[m(t, T) dt + \bar{\sigma}(t, T) dW(t) \right]
 \end{aligned}$$

mit

$$m(t, T) = \frac{1}{F^T} \left[\frac{\partial F^T}{\partial t} + \mu \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \sigma^2 \right]$$

und

$$\bar{\sigma}(t, T) = \frac{1}{F^T} \sigma \frac{\partial F^T}{\partial r}.$$

Zur besseren Lesbarkeit wurde an einigen Stellen auf die Variablen verzichtet. □

2.3 Der Marktpreis des Risikos

Nun wird der Marktpreis des Risikos hergeleitet. Vorab wird der folgende Satz⁶ angeführt:

Satz 2.4: *Angenommen, es existiert ein selbstfinanzierendes Portfolio h , so dass der Wertprozess die Dynamik $dV^h(t) = k(t)V^h(t)dt$ besitzt, wobei k ein adaptierter Prozess ist. Dann gilt: $k(t) = r(t)$ für alle $t \geq 0$, wobei $r(t)$ die short-rate bezeichne, oder es existiert eine Arbitragemöglichkeit.*

Für die Herleitung des Marktpreises⁷ des Risikos wird ein risikoloses Hedge-Portfolio konstruiert, welches das Geldmarktkonto dupliziert.

Das Hedge-Portfolio setzt sich dabei aus zwei Zero-Coupon-Bonds mit unterschiedlichen Fälligkeiten T_1 und T_2 zusammen, $0 \leq t \leq T_1 < T_2 \leq T^*$.

Zur Zeit t halte man $V_1(t)$ -Anteile an dem T_1 -Bond und $V_2(t)$ -Anteile an dem T_2 -Bond.

⁶Siehe [Bjö04], Prop.7.6.

⁷Siehe [Bjö04], Seite 320.

Insgesamt besitzt man ein Portfolio mit dem totalen Wert

$$V(t) = V_2(t)B(t, T_2) + V_1(t)B(t, T_1).$$

Aus der Dynamik der Bonds und der Itô-Formel folgt für die Portfolio-Dynamik

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t) \left(V_1(t) \frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} + V_2(t) \frac{dB(t, T_2)}{B(t, T_2)} \right) \\ &= V(t) (V_2(t)m(t, T_2) + V_1(t)m(t, T_1)) dt + (V_2(t)\bar{\sigma}(t, T_2) + V_1(t)\bar{\sigma}(t, T_1)) dW(t). \end{aligned}$$

Dabei werden $V_1(t)$ und $V_2(t)$ so gewählt, dass

$$\begin{aligned} (I) \quad & V_1(t) + V_2(t) = 1 \\ (II) \quad & V_1(t)\bar{\sigma}(t, T_1) + V_2(t)\bar{\sigma}(t, T_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Durch Bedingung (I) wird das Portfolio selbstfinanzierend und durch Bedingung (II) risikolos. Dadurch ergibt sich die Dynamik des Portfolio-Wertes als

$$dV(t) = V(t) (V_2(t)m(t, T_2) + V_1(t)m(t, T_1)) dt.$$

Da das Portfolio selbstfinanzierend ist und ein arbitragefreier Finanzmarkt vorliegt, folgt mit Satz 2.4

$$V_2(t)m(t, T_2) + V_1(t)m(t, T_1) = r(t), \tag{2.10}$$

das heißt, die Portfoliorendite entspricht der risikolosen short-rate $r(t)$. Durch Lösen des linearen Gleichungssystems (2.9) erhält man für $V_1(t)$ und $V_2(t)$

$$V_1(t) = \frac{\bar{\sigma}(t, T_2)}{\bar{\sigma}(t, T_1) - \bar{\sigma}(t, T_2)} \quad \text{und} \quad V_2(t) = \frac{-\bar{\sigma}(t, T_1)}{\bar{\sigma}(t, T_1) - \bar{\sigma}(t, T_2)}.$$

Nach Einsetzen in (2.10) ergibt sich

$$\frac{m(t, T_1) - r(t)}{\bar{\sigma}(t, T_1)} = \frac{m(t, T_2) - r(t)}{\bar{\sigma}(t, T_2)}.$$

Diese Beziehung gilt für jede beliebige Fälligkeit.

Man erhält nun folgendes Resultat⁸, welches bereits in dem Artikel [Vas77] von Oldrich Vasiček veröffentlicht wurde, und hat gleichzeitig den Marktpreis des Risikos hergeleitet.

⁸Vergleiche [Bjö04], Prop. 21.1.

Satz 2.5: *Der Markt sei arbitragefrei. Dann existiert ein Prozess $\lambda : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die Beziehung*

$$\lambda(t, r(t)) = \frac{m(t, T) - r(t)}{\bar{\sigma}(t, T)} \quad (2.11)$$

für jede Wahl der Fälligkeit T und für alle $t < T$ gilt.

Definition 2.6: Der Prozess $\lambda(t, r(t)) = \frac{m(t, T) - r(t)}{\bar{\sigma}(t, T)}$ heißt der Marktpreis des Risikos.

Auf einem arbitragefreien Markt haben also alle Bonds unabhängig von ihrer Fälligkeit den gleichen Marktpreis des Risikos.

Bemerkung 2.7: Der Zähler des Marktpreises des Risikos gibt gerade die Risikoprämie eines Bonds an, also die zusätzliche erwartete Rendite gegenüber einer Investition in das Geldmarktkonto. Da der Nenner von (2.11) gerade die Volatilität eines Bonds darstellt, kann der Quotient als zusätzliche erwartete Rendite pro zusätzlicher Einheit an Risiko interpretiert werden.

2.4 Die Term Structure Equation

In diesem Abschnitt wird die Term Structure Equation eingeführt, welche als partielle Differentialgleichung, die alle Derivate auf die Zinsstruktur unter Arbitragefreiheit erfüllen müssen, ein Analogon zur Black-Scholes-Differentialgleichung darstellt.

Theorem 2.8: *(Term Structure Equation⁹)*

Auf einem arbitragefreien Finanzmarkt erfüllt der arbitragefreie Bondpreis $F^T(t, r(t))$ die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial t} + (\mu(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))) \frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial r} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T(t, r(t))}{\partial r^2} \sigma^2(t, r(t)) - r(t)F^T(t, r(t)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

mit der Endbedingung $F^T(T, r(T)) = 1$.

Gleichung (2.12) stellt die sogenannte Term Structure Equation dar.

⁹Siehe [Bjö04], Proposition 21.2.

Beweis: Aus (2.11) folgt $m(t, T) = r(t) + \lambda(t, r(t))\bar{\sigma}(t, T)$.

Dies wird nun mit (2.7) gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} r(t) + \lambda\bar{\sigma} &= \frac{1}{F^T} \left[\frac{\partial F^T}{\partial t} + \mu \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{F^T} \left[\frac{\partial F^T}{\partial t} + \mu \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - r(t)F^T - \lambda\sigma \frac{\partial F^T}{\partial r} \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial F^T}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - r(t)F^T. \end{aligned}$$

Zur Übersichtlichkeit wurde hier $F = F(t, r(t))$, $\lambda = \lambda(t, r(t))$, $\mu = \mu(t, r(t))$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t, T)$ und $\sigma = \sigma(t, r(t))$ gesetzt. Die Endbedingung ergibt sich aus der Bedingung $F^T(T, r(T)) = 1$ für Zero-Coupon-Bonds. $\square$

(2.12) ist die grundlegende Gleichung zur Bewertung von Bonds in einem Markt, in dem die Annahmen **1** bis **4** erfüllt sind. Zusammen mit der Endbedingung $F^T(T, r(T)) = 1$ erhält man durch Lösen dieser partiellen Differentialgleichung den arbitragefreien Preis des T -Bonds.

Die Bondpreise lassen sich somit bestimmen, nachdem man $\mu(t, r(t))$, $\sigma(t, r(t))$ und $\lambda(t, r(t))$ bestimmt hat.

- Bemerkung 2.9:**
1. Gleichung (2.12) hat große Ähnlichkeit mit der Black-Scholes-Differentialgleichung, die jedoch auf Aktienderivate anzuwenden ist, während die Term Structure Equation für Zero-Coupon-Bonds aufgestellt wird.
 2. Zu beachten ist auch, dass, wenn man die Preise von Bonds mit verschiedenen Fälligkeiten bestimmen möchte, die Term Structure Equation für jeden Bond einzeln gelöst werden muss.

Im vierten Kapitel werden affine short-rate Modelle betrachtet. Aufgrund der speziellen Gestalt der Bondpreise in diesen Modellen zerfällt die Term Structure Equation in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die im Allgemeinen mit wesentlich geringerem Aufwand numerisch zu lösen sind, aber in einigen speziellen Modellen, die im Folgenden vorgestellt werden, auch analytisch gelöst werden können. Hierbei genügt es, das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen einmal zu lösen, um die Preise von Bonds verschiedener Fälligkeiten berechnen zu können.

Wird ein Claim mit Claimauszahlung $\Phi(r(T))$ zum Zeitpunkt T betrachtet, wobei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so lässt sich wie im Fall von Zero-Coupon-Bonds annehmen, dass der Preis des Claims zum Zeitpunkt $t \leq T$ als Funktion $G^T(t, r(t))$ in Abhängigkeit von der short-rate und der Zeit dargestellt werden kann. Dabei wird angenommen, dass G^T ausreichend oft stetig differenzierbar ist, so dass sich die Itô-Formel anwenden lässt, das heißt, $G^T \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$. Mit der gleichen Argumentation, mit der die Term Structure Equation eingeführt wurde, erhält man eine allgemeine Term Structure Equation für Zinsderivate¹⁰. Durch das Lösen dieser partiellen Differentialgleichung erhält man den arbitragefreien Preis des Claims.

Satz 2.10 (Allgemeine Term Structure Equation): *Sei $\mathcal{X}$ ein Contingent Claim der Form $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$, $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist der Preis des Claims $\Pi(t)$ zum Zeitpunkt t als reellwertige Funktion*

$$\Pi(t) = G^T(t, r(t)),$$

darstellbar mit $G^T \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, so erfüllt G^T die Allgemeine Term Structure Equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^T(t, r(t))}{\partial t} + (\mu(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))) \frac{\partial G^T(t, r(t))}{\partial r} \\ + \frac{1}{2}\sigma(t, r(t))^2 \frac{\partial^2 G^T(t, r(t))}{\partial r^2} - r(t)G^T(t, r(t)) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit der Endbedingung $G^T(T, r(T)) = \Phi(r(T))$.

Damit lassen sich die arbitragefreien Preise von Zinsderivaten als Lösung der Term Structure Equation bestimmen. Der Unterschied zwischen der Allgemeinen und der Term Structure Equation für Bonds liegt in der Endbedingung.

Beweis: Als Erstes wird die Itô-Formel benutzt, um die Dynamik des Zinsderivats zu berechnen:

$$\begin{aligned} dG^T(t, r(t)) &\stackrel{\text{Itô-Formel}}{=} \frac{\partial G^T}{\partial t} dt + \frac{\partial G^T}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^T}{\partial r^2} d\langle r \rangle(t) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \left[\frac{\partial G^T}{\partial t} + \mu(t, r(t)) \frac{\partial G^T}{\partial r} + \sigma(t, r(t))^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^T}{\partial r^2} \right] dt + \sigma(t, r(t)) \frac{\partial G^T}{\partial r} dW(t) \\ &= G^T(m_\Phi(t, T)dt + \bar{\sigma}_\Phi(t, T)dW(t)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

¹⁰Vergleiche [Bjö04], Proposition 21.4.

mit

$$m_\Phi(t, T) = \frac{1}{G^T} \left(\frac{\partial G^T}{\partial t} + \mu(t, r(t)) \frac{\partial G^T}{\partial r} + \sigma(t, r(t))^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^T}{\partial r^2} \right) \quad (2.15)$$

und

$$\bar{\sigma}_\Phi(t, T) = \frac{1}{G^T} \sigma(t, r(t)) \frac{\partial G^T}{\partial r}, \quad (2.16)$$

wobei $G^T(t, r(t))$ durch G^T abgekürzt wurde.

Im Folgenden wird ein relatives Portfolio aus einem T -Bond und dem Zinsderivat gebildet, welches zusätzlich risikolos sein soll. Dabei halte man zum Zeitpunkt t $V_B(t)$ Einheiten des T -Bonds und $V_\Phi(t)$ Einheiten des Zinsderivats. Der totale Wert des Portfolios in t ist

$$V(t) = V_B(t)B(t, T) + V_\Phi(t)G^T(t, r(t))$$

und für die Portfolio-Dynamik ergibt sich

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t) \left[V_B(t) \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} + V_\Phi(t) \frac{dG^T(t, r(t))}{G^T(t, r(t))} \right] \\ &\stackrel{(2.6), (2.14)}{=} V(t) [(V_B(t)m(t, T) + V_\Phi(t)m_\Phi(t, T)) dt + (V_B(t)\bar{\sigma}(t, T) + V_\Phi(t)\bar{\sigma}_\Phi(t, T)) dW(t)]. \end{aligned}$$

Außerdem erfüllt das relative Portfolio das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (I) \quad & V_B(t) + V_\Phi(t) = 1 \\ (II) \quad & V_B(t)\bar{\sigma}(t, T) + V_\Phi(t)\bar{\sigma}_\Phi(t, T) = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Gleichung (I) ist die Bedingung für das relative Portfolio und aufgrund von Gleichung (II) ist das Portfolio gerade risikolos. Somit ergibt sich für die Portfolio-Dynamik:

$$dV(t) = V(t) (V_B(t)m(t, T) + V_\Phi(t)m_\Phi(t, T)) dt.$$

Mit Satz 2.4 folgt

$$V_B(t)m(t, T) + V_\Phi(t)m_\Phi(t, T) = r(t). \quad (2.18)$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (2.17) ist gerade

$$V_\Phi(t) = \frac{\bar{\sigma}(t, T)}{\bar{\sigma}(t, T) - \bar{\sigma}_\Phi(t, T)} \quad \text{und} \quad V_B(t) = \frac{-\bar{\sigma}_\Phi(t, T)}{\bar{\sigma}(t, T) - \bar{\sigma}_\Phi(t, T)}.$$

Durch Einsetzen dieser Lösungen in (2.18) und mit einigen Umformungen folgt die Beziehung

$$\frac{m_\Phi(t, T) - r(t)}{\bar{\sigma}_\Phi(t, T)} = \frac{m(t, T) - r(t)}{\bar{\sigma}(t, T)} \stackrel{(2.11)}{=} \lambda(t, r(t)). \quad (2.19)$$

Daraus ergibt sich die Beziehung $m_\Phi(t, T) = r(t) + \lambda(t, r(t))\bar{\sigma}_\Phi(t, T)$ und durch Gleich-

setzen mit (2.15) ergibt sich

$$\frac{\partial G^T}{\partial t} + (\mu(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))) \frac{\partial G^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(t, r(t))^2 \frac{\partial^2 G^T}{\partial r^2} - r(t)G^T = 0.$$

Die Endbedingung folgt aus der Tatsache, dass $G^T(t, r(t)) = \Phi(r(T))$ gilt. □

2.5 Die Dynamik der short-rate unter einem EMM

Nun wird untersucht, wie sich die Dynamiken der short-rate und des Bondpreises nach einem Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß $Q = \mathbb{P}^\gamma$ verändern. Aus dem Theorem von Girsanov¹¹ ist bereits bekannt, dass, wenn $\mathbb{P}^\gamma$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist, ein preversibler reellwertiger Prozess $(\gamma(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ existiert, derart dass gilt:

$$\frac{d\mathbb{P}^\gamma}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \gamma(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(u)^2 du \right) =: \eta(t).$$

Der folgende Satz¹² liefert die Dynamiken unter einem risikoneutralen Maß.

Satz 2.11: Sei $0 \leq t \leq T \leq T^*$, $T > 0$.

Die short-rate $r(t)$ folge einem Itô-Prozess unter dem objektiven Maß $\mathbb{P}$ mit Dynamik (2.1). Dann gilt unter jedem zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaß $Q = \mathbb{P}^\gamma$:

(i) Der Prozess $r(t)$ genügt unter $\mathbb{P}^\gamma$ der Dynamik

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) + \sigma(t, r(t))\gamma(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^\gamma(t), \quad (2.20)$$

wobei $W^\gamma(t)$ eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{P}^\gamma$ bezeichne.

(ii) Es existiert ein reellwertiger adaptierter Prozess $\sigma^\gamma(t, T)$, derart dass

$$dB(t, T) = B(t, T) (r(t)dt + \sigma^\gamma(t, T)dW^\gamma(t)). \quad (2.21)$$

Beweis: Der erste Teil des Satzes ergibt sich aus der Tatsache, dass

$$W^\gamma(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(u)du$$

nach dem Theorem von Girsanov ein Wiener Prozess unter $\mathbb{P}^\gamma$ ist. Für die Dynamik

¹¹Siehe [Pau09], Finanzmathematik 2, Abschnitt 3.7.

¹²Siehe [MR97], Proposition 12.2.1.

der short-rate folgt

$$\begin{aligned}
 dr(t) &\stackrel{(2.1)}{=} \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \\
 &= \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))(dW^\gamma(t) + \gamma(t)dt) \\
 &= (\mu(t, r(t)) + \sigma(t, r(t))\gamma(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^\gamma(t).
 \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil des Beweises setze $Z^*(t, T) = \frac{B(t, T)}{\beta(t)}$ und $M(t) = Z^*(t, T)\eta(t)$. Da $Z^*(t, T)$ ein $\mathbb{P}^\gamma$ -Martingal ist, erhält man durch Anwenden der Formel von Bayes¹³

$$\begin{aligned}
 M(t) &= Z^*(t, T)\eta(t) = \eta(t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\gamma} [Z^*(T, T) \mid \mathcal{F}_t] \\
 &\stackrel{\text{Bayes}}{=} \mathbb{E} [Z^*(T, T)\eta(T) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E} [M(T) \mid \mathcal{F}_t].
 \end{aligned}$$

Damit ist $M(t)$ also ein $\mathbb{P}$ -Martingal. Mit dem Martingal-Darstellungssatz¹⁴ folgt, dass ein $\Psi \in \mathcal{L}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned}
 M(t) &= M(0) + \int_0^t \Psi(s)dW(s) \\
 &\stackrel{\eta(0)=1}{=} Z^*(0, T) + \int_0^t \Psi(s)dW(s).
 \end{aligned}$$

$M(t)$ besitzt also die Dynamik

$$dM(t) = \Psi(t)dW(t).$$

Da $\eta(t)$ das Doléans-Exponential darstellt, ist die Dynamik von $\eta(t)$ gerade

$$d\eta(t) = \eta(t)\gamma(t)dW(t).$$

Durch Anwenden der Itô-Formel erhält man für die Dynamik von $\frac{1}{\eta(t)}$

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{1}{\eta(t)}\right) &\stackrel{\text{Itô-Formel}}{=} -\frac{1}{\eta(t)^2}d\eta(t) + \frac{1}{\eta(t)}d\langle \eta \rangle(t) \\
 &= \frac{1}{\eta(t)}\gamma(t)^2dt - \frac{1}{\eta(t)}\gamma(t)dW(t).
 \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich mit der partiellen Integrationsformel¹⁵ und $dW^\gamma(t) = dW(t) - \gamma(t)dt$,

¹³Vergleiche [Bjö04], Proposition B.41.

¹⁴Vergleiche [Fil09], Theorem 4.8.

¹⁵Siehe [Pau09], Kapitel 3.3

dass

$$\begin{aligned}
 & dZ^*(t, T) \\
 = & d(Z^*(t, T)\eta(t)\frac{1}{\eta(t)}) = d(M(t)\frac{1}{\eta(t)}) \\
 \stackrel{\text{part. Int.}}{=} & M(t)d\left(\frac{1}{\eta(t)}\right) + \frac{1}{\eta(t)}dM(t) + d\langle M, \eta \rangle(t) \\
 = & \left(Z^*(t, T)\gamma^2(t) - \frac{1}{\eta(t)}\Psi(t)\gamma(t)\right)dt + \left(\frac{1}{\eta(t)}\Psi(t) - Z^*(t, T)\gamma(t)\right)dW(t) \\
 = & \left(\frac{1}{\eta(t)}\Psi(t) - Z^*(t, T)\gamma(t)\right)dW^\gamma(t)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 dB(t, T) &= d(Z^*(t, T)\beta(t)) \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} Z^*(t, T)d\beta(t) + \beta(t)dZ^*(t, T) + d\langle Z^*, \beta \rangle(t) \\
 &= B(t, T) \left(r(t)dt + \underbrace{\left[\frac{\beta(t)}{\eta(t)}\Psi(t)\frac{1}{B(t, T)} - \gamma(t)\right]}_{=:\sigma^\gamma(t, T)}dW^\gamma(t) \right).
 \end{aligned}$$

□

Damit ändert der Maßwechsel nur die Drift der short-rate, die Volatilität bleibt unverändert. Außerdem entspricht die erwartete Rendite unter dem risikoneutralen Maß auf jeden Bond dem risikolosen Zins, also der short-rate.

Der Prozess $(\gamma(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ kann allerdings noch genauer bestimmt werden:

Nach Satz 2.3 gilt für die Dynamik des T -Bonds

$$dB(t, T) = B(t, T) (m(t, T)dt + \bar{\sigma}(t, T)dW(t)).$$

Ein Maßwechsel zum äquivalenten Martingalmaß Q liefert nun

$$dB(t, T) \stackrel{dW(t)=d\tilde{W}(t)+\gamma(t)dt}{=} B(t, T) \left([m(t, T) + \bar{\sigma}(t, T)\gamma(t)]dt + \bar{\sigma}(t, T)d\tilde{W}(t) \right). \quad (2.22)$$

Man erhält unter Verwendung von (2.21) also die Beziehung

$$m(t, T) + \bar{\sigma}(t, T)\gamma(t) = r(t).$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\gamma(t) = -\frac{m(t, T) - r(t)}{\bar{\sigma}(t, T)} = -\lambda(t, r(t)).$$

Erfüllt der Marktpreis des Risikos die Novikov-Bedingung¹⁶, so ist der Dichtequotientenprozess von Q nach $\mathbb{P}$ also durch das Doléans-Exponential

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \big|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t((- \lambda) * W) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(u, r(u)) dW(u) - \int_0^t \lambda(u, r(u))^2 du \right)$$

gegeben. Dann gilt für die Dynamik der short-rate unter Q

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) - \sigma(t, r(t))\lambda(t, r(t))) dt + \sigma(t, r(t)) d\tilde{W}(t). \quad (2.23)$$

Für verschiedene Spezifikationen des Marktpreises des Risikos erhält man also verschiedene äquivalente Martingalmaße.

Für den Diffusionsterm des Bonds folgt außerdem, dass gilt

$$\sigma^\gamma(t, T) = \bar{\sigma}(t, T).$$

Diese Beziehung folgt auch aus (2.22) und (2.21), ist aber intuitiv klar, da ein Maßwechsel lediglich die Drift ändert, die Volatilität aber unverändert bleibt.

Des Weiteren lässt sich die Dynamik eines T -Claims unter Q bestimmen:

Korollar 2.12: *Sei $\mathcal{X}$ ein Contingent T -Claim der Form $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$, $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Preis des Claims $\Pi(t)$ sei zum Zeitpunkt t als reellwertige Funktion darstellbar, $\Pi(t) = G^T(t, r(t))$ mit $G^T \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$.*

Dann besitzt der Preis des Claims bezüglich Q die Dynamik

$$dG^T(t, r(t)) = G^T(t, r(t)) \left[r(t)dt + \sigma_\Phi(t, T)d\tilde{W}(t) \right].$$

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 2.10 ist bereits die Dynamik von $G^T(t, r(t))$ unter $\mathbb{P}$ bekannt:

$$dG^T(t, r(t)) = G^T(t, r(t)) (m_\Phi(t, T)dt + \bar{\sigma}_\Phi(t, T)dW(t))$$

mit m_Φ und $\bar{\sigma}_\Phi$ definiert wie in (2.15) und (2.16). Da $\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(u)du$ ein

¹⁶Siehe [Pau09], Finanzmathematik 2, Abschnitt 3.4.

Wiener-Prozess bezüglich Q ist, folgt

$$\begin{aligned} dG^T(t, r(t)) &= G^T(t, r(t)) \left((m_\Phi(t, T) - \bar{\sigma}_\Phi(t, T)\lambda(t, r(t)))dt + \bar{\sigma}_\Phi(t, T)d\tilde{W}(t) \right) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} G^T(t, r(t)) \left(r(t)dt + \bar{\sigma}_\Phi(t, T)d\tilde{W}(t) \right), \end{aligned}$$

da nach Formel (2.19) die Beziehung $\frac{m_\Phi(t, T) - r(t)}{\bar{\sigma}_\Phi(t, T)} = \lambda(t, r(t))$ gilt. $\square$

Bemerkung 2.13: Mit Hilfe der Girsanov-Transformation erhält man eine weitere Darstellung der Dynamik des T -Bonds unter dem realen Maß $\mathbb{P}^{17}$:

$$dB(t, T) = B(t, T) [(r(t) - \bar{\sigma}(t, T)\lambda(t, r(t))) dt + \bar{\sigma}(t, T)dW(t)].$$

Beweis: Betrachtet wird zunächst die Dynamik des T -Bonds unter Q . Mit der Beziehung $d\tilde{W}(t) = dW(t) - \lambda(t, r(t))dt$ erfolgt der Wechsel zurück zum realen Maß $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} dB(t, T) &\stackrel{(2.21)}{=} B(t, T) \left[r(t)dt + \bar{\sigma}(t, T)d\tilde{W}(t) \right] \\ &= B(t, T) [r(t)dt + \bar{\sigma}(t, T)(dW(t) - \lambda(t, r(t))dt)] \\ &= B(t, T) [(r(t) - \bar{\sigma}(t, T)\lambda(t, r(t))) dt + \bar{\sigma}(t, T)dW(t)]. \end{aligned}$$

$\square$

An (2.13) wird die Bedeutung des Marktpreises des Risikos als Risikoprämie deutlich. Vergleicht man die Dynamik des Bonds mit der Dynamik des Geldmarktkontos $d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt$, so ist die Differenz zwischen der Drift des Bonds und der Drift des Geldmarktkontos gerade der Term $\bar{\sigma}(t, T)\lambda(t, r(t))$. Dieser Term stellt die Risikoprämie dar, die man erhält, wenn man in einen Bond statt in das Geldmarktkonto investiert.

2.6 Vollständigkeit

Bisher ist der Finanzmarkt, der im Rahmen von short-rate Modellen eingeführt wurde, nicht vollständig und das äquivalente Martingalmaß ist nicht eindeutig¹⁸. Der Grund dafür ist, dass nur der Preisprozess des risikolosen Geldmarktkontos bekannt ist. Aufgrund dieser Tatsache kann der Marktpreis des Risikos nicht im Rahmen des Modells bestimmt werden, sondern muss wie der Drift- und der Diffusionsterm der short-rate

¹⁷Vergleiche [LL96], Proposition 6.1.3.

¹⁸Vergleiche [Bjö04], Seite 323.

von Anfang an vorgegeben werden¹⁹. Damit lassen sich dann arbitragefreie Bondpreise mit der Term Structure Equation berechnen.

Durch Hinzunahme der Annahme, dass der Preisprozess eines Bonds, etwa der des T^* -Bonds, bekannt ist, erhält man die Vollständigkeit. Dies liefert einen eindeutig bestimmten Marktpreis des Risikos und damit ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß²⁰.

Annahme:

Der Preisprozess des T^* -Bonds ist gegeben durch

$$dF^{T^*}(t, r(t)) = F^{T^*}(t, r(t)) [m(t, T^*)dt + \bar{\sigma}(t, T^*)dW(t)] \quad (2.24)$$

mit adaptierten und bezüglich beider Variablen messbaren Funktionen

$$m, \bar{\sigma} : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

derart dass (2.24) eine starke Lösung besitzt.

Nach (2.11) gilt

$$\lambda(t, r(t)) = \frac{m(t, T^*) - r(t)}{\sigma(t, T^*)},$$

der Marktpreis des Risikos ist nun eindeutig bestimmt.

Erfüllt $\lambda(t, r(t))$ die Novikov-Bedingung, so kann man nach dem Satz von Girsanov mit dem Dichtequotientenprozess

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(- \int_0^t \lambda(u, r(u))dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda(u, r(u))^2 du \right)$$

zu einem zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Maß Q wechseln und $\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(u, r(u))du$ ist ein Wiener-Prozess bezüglich Q .

Damit ist das äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt und das Finanzmarktmodell ist nach dem Zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie²¹ vollständig.

¹⁹Vergleiche [BK04], Bemerkung 8.2.1(ii), [Bj04], Seite 322.

²⁰Vergleiche [Bj04], Seite 323.

²¹Siehe [Bj04], Theorem 10.17.

2.7 Martingale Modelling

Bisher wurde gezeigt, dass die Zinsstruktur, das heißt, eine arbitragefreie Familie von Bondpreisen, vollständig durch die Term Structure Equation bestimmt ist. Vor dem Lösen dieser partiellen Differentialgleichung sind jedoch die folgenden drei Komponenten zu bestimmen²²:

- $\mu = \mu(t, r(t))$, der Driftterm der short-rate,
- $\sigma = \sigma(t, r(t))$, der Diffusionsterm der short-rate, sowie
- $\lambda = \lambda(t, r(t))$, der Marktpreis des Risikos.

Der Bondpreis $F^T(t, r(t))$ hängt somit von diesen drei Komponenten ab. Betrachtet man die Term Structure Equation (2.12), so wird deutlich, dass man zum Lösen dieser partiellen Differentialgleichung lediglich die Funktion σ und den Term $(\mu - \sigma\lambda)$ benötigt. Die Bestandteile des Terms müssen im Einzelnen nicht bekannt sein. Da dieser Term nach Formel (2.23) gerade die Drift der short-rate unter dem äquivalenten Martingalmaß Q darstellt, wird dieses Martingalmaß fixiert und die Dynamik der short-rate direkt unter Q spezifiziert. Dieser Vorgang wird als „Martingale Modelling“ bezeichnet. Es gelte:

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\tilde{W}(t), \quad (2.25)$$

mit adaptierten und bezüglich beider Variablen messbaren Funktionen

$$\alpha, \sigma : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass eine starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.25) existiert²³.

Mit der Modellierung der short-rate unter dem risikoneutralen Maß wird also implizit der Marktpreis des Risikos bestimmt, denn die Drift der short-rate unter Q , ausgehend von der Dynamik unter $\mathbb{P}$, ist gerade

$$\alpha(t, r(t)) = \mu(t, r(t)) - \sigma(t, r(t))\lambda(t, r(t)).$$

²²Vergleiche [Bjö04], Seite 326.

²³Vergleiche Abschnitt 2.1.

Nach Korollar 2.5 gilt für den Preis eines T -Bonds zum Zeitpunkt t unter dem äquivalenten Martingalmaß

$$B(t, T) = \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Durch den Vorgang des Martingale Modelling ist die Annahme, dass sich die Bondpreise als Funktion in Abhängigkeit von t und $r(t)$ darstellen lassen, nicht erforderlich. Diese Tatsache folgt direkt aus der Markov-Eigenschaft der short-rate:

Korollar 2.14: *Der Preis des T -Bonds in t ist eine reellwertige Funktion in Abhängigkeit von t und $r(t)$, das heißt, $B(t, T) = F^T(t, r(t))$ mit $F^T : [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid r(t) = r \right] \\ &= F^T(t, r) \end{aligned}$$

mit $F^T(t, r) = \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid r(t) = r \right]$. □

Nimmt man zusätzlich an, dass die Funktion ausreichend oft in beiden Variablen stetig differenzierbar ist, das heißt, $F \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T^*] \times \mathbb{R})$, so lässt sich die Itô-Formel anwenden und schließlich die Term Structure Equation unter dem risikoneutralen Maß einführen.

Theorem 2.15: *(Term Structure Equation)*

Ist in einem arbitragefreien Bondmarkt die Dynamik der short-rate unter dem äquivalenten Martingalmaß in Form von (2.25) gegeben, so erfüllt der Preis eines Bonds mit jeder beliebigen Fälligkeit $T > 0$ die Term Structure Equation, das heißt, der Preis des T -Bonds ist die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial F^T(t, r(t))}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T(t, r(t))}{\partial r^2} \sigma^2(t, r(t)) - F^T(t, r(t)) r(t) = 0 \quad (2.26)$$

mit der Endbedingung $F^T(T, r(T)) = 1$.

Beweis: Unter Q berechnet sich die Dynamik der Bondpreise genauso wie unter dem realen Maß $\mathbb{P}$ mit der Itô-Formel und der Dynamik der short-rate. Man erhält also

$$\begin{aligned} dF^T(t, r(t)) &= F^T \left[n(t, T) dt + \bar{\sigma}(t, T) d\tilde{W}(t) \right] \\ \text{mit } n(t, T) &= \frac{1}{F^T} \left[\frac{\partial F^T}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \sigma^2(t, r(t)) \right] \\ \text{und } \bar{\sigma}(t, T) &= \frac{1}{F^T} \sigma(t, r(t)) \frac{\partial F^T}{\partial r}. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.11 ist die Drift des T -Bonds unter dem risikoneutralen Maß Q gleich $F^T(t, r(t))r(t)dt$. Durch Gleichsetzen mit $n(t, T)$ erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial F^T}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \sigma^2(t, r(t)) - F^T r(t) = 0.$$

Dabei wurde an vielen Stellen $F^T(t, r(t))$ durch F^T abgekürzt. Die Endbedingung folgt aus der Bedingung $F^T(T, r(T)) = 1$ des T -Bonds. $\square$

Nach Spezifikation der zwei Komponenten $\alpha(t, r(t))$ und $\sigma(t, r(t))$ lässt sich der Bondpreis als Lösung der Term Structure Equation unter dem äquivalenten Martingalmaß bestimmen.

Bemerkung 2.16: Auch unter Q erhält man eine Allgemeine Term Structure Equation, die Zinsderivate unter Arbitragefreiheit erfüllen müssen:

Sei $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$ ein Contingent T -Claim mit $\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\Phi(r(T))|}{\beta(T)} \right] < \infty$, $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist der arbitragefreie Preis des Claims zum Zeitpunkt t als Funktion in Abhängigkeit von t und $r(t)$ darstellbar, denn wegen der Markov-Eigenschaft der short-rate gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q \left[e^{\int_t^T r(u) du} \Phi(r(T)) \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_Q \left[e^{\int_t^T r(u) du} \Phi(r(T)) \mid r(t) = r \right] \\ &= G^T(t, r(t)). \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $G^T \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, erhält man die Allgemeine Term Structure Equation:

$$\frac{\partial G^T(t, r(t))}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial G^T(t, r(t))}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(t, r(t))^2 \frac{\partial^2 G^T(t, r(t))}{\partial r^2} - r(t) G^T(t, r(t)) = 0$$

mit der Endbedingung $G^T(T, r(T)) = \Phi(r(T))$.

Dazu verwendet man die gleiche Argumentation wie für Theorem 2.15, indem man die Dynamik von G^T unter Q mit der Itô-Formel berechnet und die Tatsache benutzt, dass

die Dynamik des Zinsderivats bereits in Korollar 2.12 berechnet wurde. Gleichsetzen der Driftterme liefert die partielle Differentialgleichung.

Umgekehrt wird nun gezeigt, dass eine Funktion, die das unten stehende Endwertproblem löst, gerade den arbitragefreien Preis eines Claims darstellt.

Satz 2.17: (Vergleiche [Fil09], Lemma 5.1 und [Sch04], Lemma 1.2.4.)

Sei $T > 0$ und $\mathcal{X} = \Phi(r(T))$, $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ein $\mathcal{F}_T$ -messbarer Claim mit $\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\Phi(r(T))|}{\beta(T)} \right] < \infty$. Weiter sei angenommen, dass $G = G(t, r(t)) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ eine Lösung des folgenden Endwertproblems auf $[0, T] \times \mathbb{R}$ ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t, r(t))}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial G(t, r(t))}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(t, r(t))^2 \frac{\partial^2 G(t, r(t))}{\partial r^2} - r(t) G(t, r(t)) &= 0 \\ G(T, r(T)) &= \Phi(r(T)). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dann gilt für den arbitragefreien Preis des Claims

$$\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \Phi(r(T)) \mid \mathcal{F}_t \right] = G(t, r(t)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Beweis: Sei

$$M(t) = G(t, r(t)) e^{-\int_0^t r(u) du}, \quad t \leq T.$$

$M(t)$ ist somit ausreichend oft stetig partiell nach $r(t)$ und t differenzierbar, so dass man die Itô-Formel anwenden kann. Damit folgt, wobei $G(t, r(t))$ durch G angekürzt wird, (

$$\begin{aligned} dM(t) &= \left(-r(t) e^{-\int_0^t r(u) du} G + e^{-\int_0^t r(u) du} \frac{\partial G}{\partial t} \right) dt \\ &\quad + e^{-\int_0^t r(u) du} \frac{\partial G}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \sigma(t, r(t))^2 e^{-\int_0^t r(u) du} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(t, r(t))^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - r(t) G \right) e^{-\int_0^t r(u) du} dt \\ &\quad + e^{-\int_0^t r(u) du} \frac{\partial G}{\partial r} \sigma(t, r(t)) d\tilde{W}(t) \\ &\stackrel{(2.27)}{=} e^{-\int_0^t r(u) du} \frac{\partial G}{\partial r} \sigma(t, r(t)) d\tilde{W}(t), \end{aligned}$$

und $M(t)$ ist somit ein Martingal. Es gilt

$$M(T) = G(T, r(T))e^{-\int_0^T r(u)du} = \Phi(r(T))e^{-\int_0^T r(u)du}.$$

Wegen der Martingaleigenschaft von $M(t)$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q \left[\Phi(r(T))e^{-\int_0^T r(u)du} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_Q [M(T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= M(t) \\ &= G(t, r(t))e^{-\int_0^t r(u)du}\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}G(t, r(t)) &= e^{\int_0^t r(u)du} \mathbb{E}_Q \left[\Phi(r(T))e^{-\int_0^T r(u)du} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[\Phi(r(T))e^{-\int_t^T r(u)du} \mid \mathcal{F}_t \right].\end{aligned}$$

□

Die partielle Differentialgleichung entspricht der Term Structure Equation, es liegt jedoch ein Unterschied in der Endbedingung vor. Zusammengefasst wurde in dem Satz gezeigt, dass der arbitragefreie Preis in t des Claims

$$\Phi(r(T)) = \mathbb{E}_Q \left[\Phi(r(T))e^{-\int_t^T r(u)du} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

dem Wert der Funktion in t , also $G(t, r(t))$ entspricht, wenn eine ausreichend glatte Funktion $G(t, r(t))$ (2.27) erfüllt.

2.8 Die wichtigsten short-rate Modelle

Wie in [Fil02] oder [Sch04] folgt an dieser Stelle nun eine Liste der wichtigsten short-rate Modelle, in denen die short-rate-Dynamik unter dem risikoneutralen Maß Q angegeben wird:

1. Vasiček (1977):

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

2. Cox-Ingersoll-Ross (1985):

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}(t)$$

3. Dothan (1978):

$$dr(t) = r(t)(\theta dt + \sigma d\tilde{W}(t))$$

4. Black-Derman-Toy (1991):

$$r(t) = \exp(Y(t)) \quad \text{mit} \quad dY(t) = \left(a(t) + \frac{1}{\sigma(t)} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} Y(t) \right) dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

5. Black-Karasinsky (1991):

$$r(t) = \exp(Y(t)) \quad \text{mit} \quad dY(t) = \left(a(t) + b(t)Y(t) \right) dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

6. Hull-White (Extended Vasiček) (1990):

$$dr(t) = (a(t) - b(t)r(t))dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

7. Hull-White (Extended CIR) (1990):

$$dr(t) = (a(t) - b(t)r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}(t)$$

Dabei sind $\sigma(t)$, $a(t)$ und $b(t)$ deterministische Funktionen und $\kappa, \sigma, \theta > 0$.

Wie in [Sch04] kann man sogar eine allgemeine Form angeben, die alle hier aufgelisteten Modelle erfüllen:

$$dr(t) = \left[K_0(t) + K_1(t)r(t) + K_2(t)r(t) \log(r(t)) \right] dt + \left[H_0(t) + H_1(t)r(t) \right]^\nu d\tilde{W}(t),$$

wobei K_0, K_1, K_2, H_0 und H_1 deterministische Funktionen sind und $\nu \in \{0.5, 1, 1.5\}$.

Im fünften Kapitel werden das Vasiček-Modell, das Cox-Ingersoll-Ross-Modell und das Hull-White-Modell noch näher vorgestellt.

3 Forwardmartingalme

In diesem Kapitel wird ein neues Ma, das Forwardmartingalma, eingeführt, welches einen Bond als Numéraire besitzt. Im Anschluss daran wird der Zusammenhang zwischen dem Forwardpreis und dem arbitragefreien Preis aufgezeigt. Das Ziel ist es, eine Formel zur Bewertung von Optionen unter Verwendung von Forwardmartingalmen zu beweisen. Zum Abschluss des Kapitels wird ein Portfolio aus Bondoptionen bewertet.

3.1 Das T -Forwardmartingalma

Sei $0 < T \leq T^*$.

Satz 3.1: (Vergleiche [Fil09], Seite 105.)

Durch den Dichtequotientenprozess

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{1}{B(0, T)\beta(T)}$$

wird auf $\mathcal{F}_T$ ein zu Q äquivalentes Martingalma Q^T definiert.

Für $0 \leq t \leq T$ gilt

$$\frac{dQ^T}{dQ} \big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T)}{B(0, T)\beta(t)} =: L^T(t).$$

Das wesentliche Hilfsmittel für den Beweis ist die Formel von Bayes. Außerdem wird benutzt, dass der Prozess $\left(\frac{B(t, T)}{\beta(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal unter Q ist.

Beweis: Es gilt $B(0, T)\beta(t) > 0$. Da der abdiskontierte Bondpreis ein Martingal ist, folgt

$$\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(T)} \right] \stackrel{B(T, T)=1}{=} \mathbb{E}_Q \left[\frac{B(T, T)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_0 \right] = \frac{B(0, T)}{\beta(0)} \stackrel{\beta(0)=1}{=} B(0, T)$$

und damit

$$\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{B(0, T)\beta(T)} \right] = 1.$$

Also lässt sich auf $\mathcal{F}_T$ durch $\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{1}{B(0, T)\beta(T)}$ ein zu Q äquivalentes Maß Q^T definieren. Da $(\frac{B(t, T)}{\beta(t)})_{0 \leq t \leq T}$ ein Q -Martingal darstellt, gilt für $t \leq T$

$$\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{B(0, T)\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \stackrel{B(T, T)=1}{=} \frac{1}{B(0, T)} \mathbb{E}_Q \left[\frac{B(T, T)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{B(t, T)}{B(0, T)\beta(t)}$$

und damit erhält man für den Dichtequotientenprozess

$$\frac{dQ^T}{dQ} \mid_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T)}{B(0, T)\beta(t)}.$$

Für $0 \leq t \leq T \leq S \leq T^*$ gilt mit der Formel von Bayes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^T} \left[\frac{B(T, S)}{B(T, T)} \mid \mathcal{F}_t \right] &\stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{E}_Q \left[\frac{B(T, S)}{B(0, T)\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{B(0, T)\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]} \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, T)} \frac{\mathbb{E}_Q \left[\frac{B(T, S)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E}_Q \left[\frac{B(T, T)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]} = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}. \end{aligned}$$

Die mit dem T -Bond abdiskontierten Bondpreise sind also Q^T -Martingale. Damit ist Q^T ein äquivalentes Martingalmaß. $\square$

Definition 3.2: Das zu Q äquivalente Martingalmaß Q^T heißt T -Forwardmartingalmaß¹.

Zur Erinnerung wird an dieser Stelle die Dynamik des T -Bonds unter Q angeführt:

$$dB(t, T) = B(t, T) \left(r(t)dt + \bar{\sigma}(t, T)d\tilde{W}(t) \right). \quad (3.1)$$

Da Q^T ein zu Q äquivalentes Martingalmaß darstellt, folgt mit dem Satz von Girsanov,

¹Das T -Forwardmartingalmaß wird auch als terminrisikoangepasstes Maß bezeichnet.

dass ein preversibler reellwertiger Prozess $(\gamma(t))_{0 \leq t \leq T}$ existiert, so dass gilt

$$\frac{dQ^T}{dQ} \big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \gamma(u) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(u)^2 du \right).$$

Außerdem ist $W^T(t) = \tilde{W}(t) - \int_0^t \gamma(u) du$ ein Wiener-Prozess bezüglich Q^T . Mit dem folgenden Satz wird gezeigt, dass dieser Prozess $\gamma(t)$ bereits bekannt ist und gerade den Diffusionsterm $\bar{\sigma}(t, T)$ der Dynamik des T -Bonds unter Q darstellt.

Satz 3.3: (Vergleiche [Bjö04], Proposition 24.7.)

Der Dichtequotientenprozess $L^T(t)$ besitzt bezüglich Q die Dynamik

$$dL^T(t) = L^T(t) \bar{\sigma}(t, T) d\tilde{W}(t).$$

Beweis: Da der Bondpreis als Funktion F^T in Abhängigkeit von t und $r(t)$ dargestellt werden kann, folgt für den Dichtequotientenprozess

$$L^T(t) = \frac{B(t, T)}{\beta(t)B(0, T)} = \frac{F^T(t, r(t))}{\beta(t)F^T(0, r(0))}.$$

Mit der partiellen Integrationsformel folgt für die Dynamik von L^T

$$\begin{aligned} dL^T(t) &= \frac{1}{\beta(t)F^T(0, r(0))} dF^T(t, r(t)) + \frac{F^T(t, r(t))}{F^T(0, r(0))} \underbrace{d \frac{1}{\beta(t)}}_{= -\frac{1}{\beta(t)} r(t) dt} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} L^T(t) \left(r(t) dt + \bar{\sigma}(t, T) d\tilde{W}(t) \right) - L^T(t) r(t) dt \\ &= L^T(t) \bar{\sigma}(t, T) d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

□

Nach dem Satz von Girsanov gilt also

$$L^T(t) = \frac{dQ^T}{dQ} \big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \bar{\sigma}(u, T) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \bar{\sigma}(u, T)^2 du \right)$$

und $W^T(t) = \tilde{W}(t) - \int_0^t \bar{\sigma}(u, T) du$ ist ein Wiener-Prozess bezüglich Q^T .

3.2 Die Beziehung zwischen arbitragefreien Preisen und Forwardpreisen

Sei $\mathcal{X}$ ein T -Claim, derart dass $\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\mathcal{X}|}{\beta(T)} \right] < \infty$.

Der arbitragefreie Preis zum Zeitpunkt $t \leq T$ ist gegeben durch

$$\Pi(t) = \beta(t) \mathbb{E}_Q \left[\frac{\mathcal{X}}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Für die Berechnung dieses Preises benötigt man die gemeinsame Verteilung von $\frac{1}{\beta(T)}$ und $\mathcal{X}$. Durch den Übergang zum T -Forwardmartingalmaß vereinfacht sich dieser Bewertungsprozess. Der folgende Satz liefert eine Beziehung zwischen dem arbitragefreien Preis und dem Forwardpreis².

Satz 3.4: Sei $\mathcal{X}$ ein T -Claim mit $\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\mathcal{X}|}{\beta(T)} \right] < \infty$.

Dann gilt $\mathbb{E}_{Q^T} [|\mathcal{X}|] < \infty$ und

$$\Pi(t) = B(t, T) \mathbb{E}_{Q^T} [\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t]. \quad (3.2)$$

$\mathbb{E}_{Q^T} [\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t]$ bezeichnet den T -Forwardpreis des Claims.

Beweis: Da $\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\mathcal{X}|}{\beta(T)} \right] < \infty$, folgt mit der Formel von Bayes

$$\mathbb{E}_{Q^T} [|\mathcal{X}|] \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\mathcal{X}|}{B(0, T) \beta(T)} \right]}{\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{B(0, T) \beta(T)} \right]} = \frac{\mathbb{E}_Q \left[\frac{|\mathcal{X}|}{\beta(T)} \right]}{\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(T)} \right]} < \infty.$$

Des Weiteren folgt mit der Formel von Bayes für den Forwardpreis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^T} [\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t] &\stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{E}_Q \left[\frac{\mathcal{X}}{\beta(T) B(0, T)} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(T) B(0, T)} \mid \mathcal{F}_t \right]} = \frac{\mathbb{E}_Q \left[\frac{\mathcal{X}}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]} \\ &= \frac{\beta(t) \mathbb{E}_Q \left[\frac{\mathcal{X}}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]}{B(t, T)} = \frac{\Pi(t)}{B(t, T)}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun $\Pi(t) = B(t, T) \mathbb{E}_{Q^T} [\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t]$. □

²Siehe [Fil09], Proposition 7.1.

Zur Berechnung des Forwardpreises des Claims benötigt man nur die Verteilung des Claims und kann dann mit Formel (3.2) zum arbitragefreien Preis übergehen.

3.3 Bewertung von Optionen

Sei $0 \leq t \leq T < S \leq T^*$. In diesem Abschnitt sei eine (europäische) Calloption auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike-Preis K betrachtet. Das Ziel wird es sein, den Preis dieser Calloption zum Zeitpunkt t zu berechnen.

Für die Bewertung eines Calls auf einen Bond ist es notwendig, einen Maßwechsel zum T -Forwardmaß durchzuführen.

Theorem 3.5 (Call-Bewertungsformel³): *Für den Preis eines Calls in t auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike-Preis K gilt*

$$C(t, T, S, K) = B(t, S)Q^S(B(T, S) > K \mid \mathcal{F}_t) - KB(t, T)Q^T(B(T, S) > K \mid \mathcal{F}_t), \quad (3.3)$$

wobei Q^T und Q^S das T - bzw. S -Forwardmartingalmaß bezeichnen.

Beweis: Man betrachte einen Call auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike-Preis K . Mit der risikoneutralen Bewertungsgleichung (2.5), der Formel von Bayes und der Tatsache, dass die abdiskontierten Bondpreise unter Q Martingale darstellen, ergibt sich für den Preis in t :

$$\begin{aligned} & C(t, T, S, K) \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} (B(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} B(T, S) \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] - K \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_T^S r(u)du} \mid \mathcal{F}_T \right] \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - K \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u)du} \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] - K \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[\frac{\beta(t)}{\beta(S)} \frac{B(0, S)}{B(0, S)} \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] - K \mathbb{E}_Q \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \frac{B(0, T)}{B(0, T)} \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

³Vergleiche [Bjö04], Proposition 24.11.

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{Bayes}}{=} \mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(S)B(0, S)} \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}_{Q^S} [\beta(t)B(0, S) \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
 & \quad - K \mathbb{E}_Q \left[\frac{1}{\beta(T)B(0, T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}_{Q^T} [\beta(t)B(0, T) \mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
 & \stackrel{\text{Martingal}}{=} \frac{B(t, S)}{B(0, S)\beta(t)} \beta(t)B(0, S) \mathbb{E}_{Q^S} [\mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
 & \quad - K \frac{B(t, T)}{B(0, T)\beta(t)} \beta(t)B(0, T) \mathbb{E}_{Q^T} [\mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
 & = B(t, S) \mathbb{E}_{Q^S} [\mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t] - KB(t, T) \mathbb{E}_{Q^T} [\mathbf{1}_{\{B(T, S) > K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
 & = B(t, S) Q^S(B(T, S) > K \mid \mathcal{F}_t) - KB(t, T) Q^T(B(T, S) > K \mid \mathcal{F}_t).
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.6: Ein analoges Resultat erhält man für (europäische) Put-Optionen. Da der Payoff des Put gerade $(K - B(T, S))^+$ ist, erhält man für den Preis in t

$$P(t, T, S, K) = KB(t, T)Q^T(B(T, S) < K \mid \mathcal{F}_t) - B(t, S)Q^S(B(T, S) < K \mid \mathcal{F}_t). \quad (3.4)$$

Als Anwendung kann man mit dieser Formel Caps und Floors bewerten.

Betrachtet sei ein Cap bzw. Floor, definiert wie in Abschnitt 1.4.2.

Korollar 3.7: Für den Preis des i -ten Caplets und des i -ten Floorlets zum Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq T_0$, gilt

$$\begin{aligned}
 Cpl(i, t) &= B(t, T_{i-1})Q^{T_{i-1}} \left(B(T_{i-1}, T_i) < \frac{1}{1 + K\delta} \right) \\
 & \quad - (1 + K\delta)B(t, T_i)Q^{T_i} \left(B(T_{i-1}, T_i) < \frac{1}{1 + K\delta} \right) \\
 \text{und} & \\
 Fll(i, t) &= (1 + K\delta)B(t, T_i)Q^{T_i} \left(B(T_{i-1}, T_i) > \frac{1}{1 + K\delta} \right) \\
 & \quad - B(t, T_{i-1})Q^{T_{i-1}} \left(B(T_{i-1}, T_i) > \frac{1}{1 + K\delta} \right).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Beweis: Für den Preis des i -ten Caplets in T_{i-1} gilt nach (1.12)

$$Cpl(i, T_{i-1}) = (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + \delta K} - B(T_{i-1}, T_i) \right)^+$$

und er entspricht somit dem $(1 + K\delta)$ -fachen Preis eines Puts auf einen T_i -Bond mit Ausübungszeitpunkt T_i und Strike-Preis $\frac{1}{1+K\delta}$. Damit kann man den Preis des i -ten Caplets in t mit (3.4) berechnen:

$$\begin{aligned} Cpl(i, t) &= (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + K\delta} B(t, T_{i-1}) Q^{T_{i-1}} \left(B(T_{i-1}, T_i) < \frac{1}{1 + K\delta} \right) \right. \\ &\quad \left. - B(t, T_i) Q^{T_i} \left(B(T_{i-1}, T_i) < \frac{1}{1 + K\delta} \right) \right) \\ &= B(t, T_{i-1}) Q^{T_{i-1}} \left(B(T_{i-1}, T_i) < \frac{1}{1 + K\delta} \right) \\ &\quad - (1 + K\delta) B(t, T_i) Q^{T_i} \left(B(T_{i-1}, T_i) < \frac{1}{1 + K\delta} \right). \end{aligned}$$

Ebenso gilt nach (1.13) für den Wert des i -ten Floorlets in T_{i-1}

$$Fll(i, T_{i-1}) = (1 + K\delta) \left(B(T_{i-1}, T_i) - \frac{1}{1 + K\delta} \right)^+.$$

Mit der Call-Bewertungsformel erhält man also

$$\begin{aligned} Fll(i, t) &= (1 + K\delta) \left(B(t, T_i) Q^{T_i} \left(B(T_{i-1}, T_i) > \frac{1}{1 + K\delta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 + K\delta} B(t, T_{i-1}) Q^{T_{i-1}} \left(B(T_{i-1}, T_i) > \frac{1}{1 + K\delta} \right) \right) \\ &= (1 + K\delta) B(t, T_i) Q^{T_i} \left(B(T_{i-1}, T_i) > \frac{1}{1 + K\delta} \right) \\ &\quad - B(t, T_{i-1}) Q^{T_{i-1}} \left(B(T_{i-1}, T_i) > \frac{1}{1 + K\delta} \right). \end{aligned}$$

□

Wie in Abschnitt 1.4.2 bereits dargestellt wurde, berechnet sich der Preis des Caps bzw. des Floors zum Zeitpunkt t mit der Formel

$$Cp(t) = \sum_{i=1}^n Cpl(i, t) \quad \text{bzw.} \quad Fl(t) = \sum_{i=1}^n Fll(i, t).$$

3.4 Bewertung von Optionen auf Bond-Portfolios

Betrachtet werde nun eine festverzinsliche kupontragende Anleihe mit Kuponzahlungen $C_{T_1}, \dots, C_{T_n}$ in den zukünftigen Zahlungszeitpunkten $T_1, \dots, T_n$. Der Nennwert der Anleihe sei bereits in den Kuponzahlungen enthalten. Aus Kapitel 1 ist bekannt, dass der Wert der Kuponanleihe in t einem Portfolio aus n Zero-Coupon-Bonds entspricht, deren Fälligkeiten gerade die Zahlungszeitpunkte der Anleihe sind, also

$$\sum_{i=1}^n C_{T_i} B(t, T_i).$$

Weiter werde eine Putoption auf die festverzinsliche Anleihe betrachtet mit Strike-Preis K und Ausübungszeitpunkt T , $0 \leq t \leq T < T_1$. $P_{Pf}(t)$ bezeichne den Preis der Putoption zum Zeitpunkt t . Der Payoff der Option in T ist

$$\left(K - \sum_{i=1}^n C_{T_i} B(T, T_i) \right)^+.$$

Im Folgenden werde der Preis eines T -Bonds zum Zeitpunkt t durch eine Funktion F^T in Abhängigkeit von t und der short-rate $r(t)$ dargestellt, also $B(t, T) = F^T(t, r(t))$.

Satz 3.8: (In Anlehnung an [Jam89], Proposition (c).)

Für den Preis eines Puts mit Ausübungszeitpunkt T und Strike-Preis K zum Zeitpunkt t gilt

$$P_{Pf}(t) = \sum_{i=1}^n C_{T_i} P(t, T, T_i, K_i), \quad (3.6)$$

wobei $K_i = F^{T_i}(T, r^*)$ der T_i -Bondpreis in T zur short-rate r^* ist und r^* die Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r^*) = K$ ist, also gerade den Wert der short-rate darstellt, für den der Wert des Portfolios aus Zero-Coupon-Bonds dem Strike-Preis K entspricht.

Der Wert des Puts auf eine kupontragende Anleihe entspricht somit dem Preis eines Portfolios aus Putoptionen mit passend gewählten Strike-Preisen. Für den Beweis benutzt man die Tatsache, dass der Bondpreis eine in der short-rate fallende Funktion ist.

Beweis: Im Wesentlichen ist für den Beweis zu zeigen:

$$\left(K - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \right)^+ = \sum_{i=1}^n C_{T_i} (K_i - F^{T_i}(T, r(T)))^+. \quad (3.7)$$

Nach der risikoneutralen Bewertungsgleichung (2.5) und der Markov-Eigenschaft der short-rate gilt für den Preis des T_i -Bonds in T

$$F^{T_i}(T, r(T)) = \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_T^{T_i} r(u) du \right) \mid r(T) = r \right].$$

Der Bondpreis kann somit als eine in der short-rate fallende Funktion aufgefasst werden. Aus der Definition von r^* folgt

$$\sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \begin{cases} > K, & r(T) < r^* \\ = K, & r(T) = r^* \\ < K, & r(T) > r^* \end{cases}.$$

Für $r(T) < r^*$ und $r(T) = r^*$ verschwinden beide Seiten der zu zeigenden Gleichung (3.7). Für $r(T) > r^*$ sind beide Seite positiv. Für diesen Fall bleibt die Gleichheit noch nachzuweisen.

Dazu wird die Definition der Strike-Preise K_i benutzt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n C_{T_i} (K_i - F^{T_i}(T, r(T)))^+ \\ &= \sum_{i=1}^n C_{T_i} (K_i - F^{T_i}(T, r(T))) \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} \\ &= \sum_{i=1}^n C_{T_i} K_i \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} \\ &= \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r^*) \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} \\ &= K \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} \\ &= \left(K - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \right) \mathbf{1}_{\{r(T) > r^*\}} \\ &= \left(K - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \right)^+. \end{aligned}$$

Für den Wert des Puts auf das Portfolio folgt

$$\begin{aligned}
 P_{Pf}(t) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \left(K - \sum_{i=1}^n C_{T_i} F^{T_i}(T, r(T)) \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &\stackrel{(3.7)}{=} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \left(\sum_{i=1}^n C_{T_i} (K_i - F^{T_i}(T, r(T)))^+ \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n C_{T_i} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} ((K_i - F^{T_i}(T, r(T)))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n C_{T_i} P(t, T, T_i, K_i).
 \end{aligned}$$

□

Zur expliziten Berechnung kann man die Formel zur Bewertung von Putoptionen aus Bemerkung 3.6 anwenden.

Bemerkung 3.9: Analog erhält man für einen Call auf ein Portfolio von Bondoptionen, dass diese als ein Portfolio aus Calloptionen auf Bonds mit passenden Strike-Preisen bewertet werden kann, es gilt also

$$C_{Pf} = \sum_{i=1}^n C_{T_i} C(t, T, T_i, K_i).$$

Bemerkung 3.10: Für die konkrete Berechnung sind allerdings folgende Schritte notwendig:

- Der kritische Wert r^* der short-rate, für den der Preis der kupontragenden festverzinslichen Anleihe gleich dem Strike-Preis K des Puts ist, ist zu berechnen.
- Ausgehend von r^* werden dann die Preise der Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeiten $T_1, \dots, T_n$ zum Zeitpunkt T berechnet. Diese stellen die Strike-Preise der Putoptionen dar.
- Schließlich können die Preise der Putoptionen auf die T_i -Bonds mit Strike-Preis K_i berechnet werden. Dazu wird Formel (3.4) benutzt.

Aus Kapitel 1 ist bekannt, dass eine Swaption als Option auf ein Portfolio aus Zero-Coupon-Bonds betrachtet werden kann. Somit lässt sich (3.6) zur Bewertung einer Swaption anwenden.

Betrachtet werde eine Payer Swaption, definiert wie in Abschnitt 1.4.4. Sei T_0 die Fälligkeit der Swaption mit äquidistanten Zahlungszeitpunkten $T_1, \dots, T_n$, $T_i - T_{i-1} \equiv \delta$, $i = 1, \dots, n$. Der Nennwert des zugrunde liegenden Swaps sei N . Der fixe Zins bzw. die Swap Rate sei K .

Korollar 3.11: Für den Wert der Swaption $Sw(t)$ in $t \leq T_0$ gilt

$$Sw(t) = NK\delta \sum_{i=1}^{n-1} P(t, T_0, T_i, N_i) + N(K\delta + 1)P(t, T_0, T_n, N_n)$$

mit $N_i = F^{T_i}(T_0, r^*)$, $i = 1, \dots, n$, und r^* so, dass

$$N \left(K\delta \sum_{i=1}^n F^{T_i}(T_0, r^*) + F^{T_n}(T_0, r^*) \right) = N.$$

Beweis: Da eine Swaption als Option auf ein Portfolio aus Zero-Coupon-Bonds betrachtet werden kann, folgt für den Wert der Swaption zum Zeitpunkt t ,

$$\begin{aligned} Sw(t) & \stackrel{(1.14)}{=} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r(u) du} \left(N - N \left(K\delta \sum_{i=1}^n F^{T_i}(T_0, r(T_0)) + F^{T_n}(T_0, r(T_0)) \right) \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ & \stackrel{(3.6)}{=} NK\delta \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r(u) du} (N_i - F^{T_i}(T_0, r(T_0)))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ & \quad + N(K\delta + 1) \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r(u) du} (N_n - F^{T_n}(T_0, r(T_0)))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ & = NK\delta \sum_{i=1}^{n-1} P(t, T_0, T_i, N_i) + N(K\delta + 1)P(t, T_0, T_n, N_n) \end{aligned}$$

mit $N_i = F^{T_i}(T_0, r^*)$, $i = 1, \dots, n$, und r^* so, dass

$$N \left(K\delta \sum_{i=1}^n F^{T_i}(T_0, r^*) + F^{T_n}(T_0, r^*) \right) = N.$$

□

Mit dem in Bemerkung 3.10 beschriebenen Verfahren lässt sich der Wert der Swaption explizit ausrechnen.

In Abschnitt 5.1 wird das Vasiček-Modell untersucht. Für dieses Modell werden konkrete Bewertungsformeln für Calls, Puts und Swaptions ausgerechnet. Auch im Cox-Ingersoll-Ross-Modell, das in Abschnitt 5.2 betrachtet wird, erhält man eine konkrete Bewertungsformel für Call-Optionen.

4 Affine short-rate Modelle

Im Allgemeinen muss zur Bewertung eines Bonds in den short-rate Modellen eine partielle Differentialgleichung gelöst werden. In diesem Kapitel werden nun zunächst affine Modelle definiert. Diese werden durch die Dynamik der short-rate charakterisiert. Anschließend werden Beispiele für affine Modelle durch schon bekannte short-rate Modelle gegeben. Abschließend wird im zweiten Abschnitt ein allgemeiner Ansatz zur Bewertung von Optionen in affinen Modellen vorgestellt.

Als wichtigste Literaturquellen dieses Kapitels lassen sich [Fil02], [Sch04] und [Bjö04] angeben.

4.1 Charakterisierung der affinen short-rate Modelle

In diesem Kapitel ist die Dynamik der short-rate unter dem risikoneutralen Maß Q gegeben durch

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\tilde{W}(t).$$

$\tilde{W}(t)$ ist dabei eine Brownsche Bewegung unter Q und $(\alpha(t, r(t)))_{0 \leq t \leq T^*}$ und $(\sigma(t, r(t)))_{0 \leq t \leq T^*}$ sind adaptierte stochastische Prozesse, die den Drift- und Diffusionsterm der short-rate unter Q darstellen. Es gelten die Annahmen aus dem zweiten Kapitel, so dass der short-rate-Prozess einen wohldefinierten Itô-Prozess darstellt.

Definition 4.1: Ein short-rate Modell ist affin, wenn sich der Preis eines Zero-Coupon-Bonds $B(t, T)$ mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq T$, darstellen lässt als

$$B(t, T) = F^T(t, r(t)) = \exp(-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)) \quad (4.1)$$

mit deterministischen, stetig differenzierbaren Funktionen $\mathcal{A}, \mathcal{B}(\cdot, T) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Aus der Definition folgt sofort

Korollar 4.2: Für alle Fälligkeiten T , $0 < T \leq T^*$, gilt

$$\mathcal{A}(T, T) = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{B}(T, T) = 0.$$

Beweis: Nach Definition eines T -Bonds gilt $F^T(T, r(T)) = 1$ für jede Fälligkeit T . Somit ergibt sich im Falle eines affinen short-rate Modells

$$\exp(-\mathcal{A}(T, T) - \mathcal{B}(T, T)r(T)) = 1.$$

Da die Exponentialfunktion stetig und streng monoton wachsend ist, ergibt sich

$$-\mathcal{A}(T, T) - \mathcal{B}(T, T)r(T) = 0 \quad \text{für alle } T \text{ und } r(T).$$

Daraus folgt $\mathcal{A}(T, T) = \mathcal{B}(T, T) = 0$. □

Korollar 4.3: Der Yield des Bonds ist eine affine Funktion der short-rate $r(t)$, das heißt, es gilt

$$R(t, T) = \frac{\mathcal{A}(t, T)}{T - t} + \frac{\mathcal{B}(t, T)}{T - t}r(t).$$

Beweis: Für den Yield des T -Bonds gilt

$$R(t, T) \stackrel{(1.8)}{=} -\frac{\log(B(t, T))}{T - t} \stackrel{(4.1)}{=} \frac{\mathcal{A}(t, T)}{T - t} + \frac{\mathcal{B}(t, T)}{T - t}r(t).$$

□

Als Hauptergebnis des Kapitels erhält man, dass sich affine Modelle durch die short-rate-Dynamik vollständig charakterisieren lassen¹.

In dem folgenden Theorem wird gezeigt, dass ein short-rate Modell genau dann affin ist, wenn der Drift- und der Diffusionsterm affine Funktionen darstellen.

¹Vergleiche [Fil09], Proposition 5.2, [Bjö04], Proposition 22.2 oder [Sch04], Satz 1.2.6.

Theorem 4.4 (Charakterisierung affiner Modelle): *Gegeben sei ein short-rate Modell mit Dynamik*

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\tilde{W}(t).$$

Das short-rate Modell ist affin, das heißt, der Preis des T -Bonds besitzt die Gestalt $B(t, T) = \exp(-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t))$ mit deterministischen, stetig differenzierbaren Funktionen $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$ genau dann, wenn der Drift- und der Diffusionsterm die affine Gestalt

$$\alpha(t, r(t)) = a_1(t) + a_2(t)r(t)$$

$$\sigma^2(t, r(t)) = b_1(t) + b_2(t)r(t)$$

besitzen mit stetigen, deterministischen Funktionen $a_1, a_2, b_1, b_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann lösen die Funktionen $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$ das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \frac{\partial_t \mathcal{A}(t, T)}{\partial t} = -a_1(t)\mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2}b_1(t)\mathcal{B}^2(t, T), & \mathcal{A}(T, T) = 0 \\ (II) \quad & \frac{\partial_t \mathcal{B}(t, T)}{\partial t} = -a_2(t)\mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2}b_2(t)\mathcal{B}^2(t, T) - 1, & \mathcal{B}(T, T) = 0. \end{aligned}$$

Durch das Lösen dieser beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält man also eine geschlossene Formel für den Bondpreis in t , welche sich in t explizit ausrechnen lässt.

Die Gleichung (II) stellt eine Riccatische Differentialgleichung² dar und muss im Allgemeinen numerisch gelöst werden. Die Lösung von Gleichung (I) erhält man durch Einsetzen der Lösung von Gleichung (II) und anschließendem Integrieren.

Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass ein affines Modell einen affinen Driftterm und einen affinen Diffusionsterm besitzt.

Sei $F^T(t, r(t)) = \exp(-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t))$. Da der Bondpreis die Term Structure Equation erfüllt, kann man in diese die partiellen Ableitungen von F^T einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{(2.26)}{=} \frac{\partial F^T}{\partial t} + \alpha(t, r(t))\frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}\sigma^2(t, r(t)) - F^T r(t) \\ & = \left(-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}r(t)\right)F^T + \alpha(t, r(t)) - \mathcal{B}F^T + \frac{1}{2}\mathcal{B}^2 F^T \sigma^2(t, r(t)) - F^T(t, r(t))r(t) \\ & = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}r(t) - \mathcal{B}\alpha(t, r(t)) + \frac{1}{2}\mathcal{B}^2 \sigma^2(t, r(t)) - r(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

²Siehe z.B. [Oks00].

Zweifache partielle Ableitung nach r liefert

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathcal{B}(t, T) \frac{\partial^2 \alpha(t, r(t))}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \mathcal{B}^2(t, T) \frac{\partial^2 \sigma^2(t, r(t))}{\partial r^2} \\ &= -\frac{\partial^2 \alpha(t, r(t))}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \mathcal{B}(t, T) \frac{\partial^2 \sigma^2(t, r(t))}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}(t, T)$ eine Funktion in Abhängigkeit von t und T ist, ergibt sich

$$-\frac{\partial^2 \alpha(t, r(t))}{\partial r^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2(t, r(t))}{\partial r^2} = 0.$$

Damit stellen $\alpha(t, r(t))$ und $\sigma^2(t, r(t))$ affine Funktionen dar.

Im zweiten Teil des Beweises zeigt man, dass in einem affinen Zinsmodell das System von Differentialgleichungen erfüllt ist.

Mit (4.2) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} r(t) - \mathcal{B} \alpha(t, r(t)) + \frac{1}{2} \mathcal{B}^2 \sigma^2(t, r(t)) - r(t) \\ &\stackrel{(4.4), (4.4)}{=} -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} r(t) - (a_1(t) + a_2(t)r(t))\mathcal{B} + \frac{1}{2} (b_1(t) + b_2(t)r(t))\mathcal{B}^2 - r(t) \\ &= \left[-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - a_1(t)\mathcal{B} + \frac{1}{2} b_1(t)\mathcal{B}^2 \right] + \left[-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} - a_2(t)\mathcal{B} + \frac{1}{2} b_2(t)\mathcal{B}^2 - 1 \right] r(t). \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle t , T und $r(t)$, folglich müssen beide Koeffizienten verschwinden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}(t, T)}{\partial t} &= -a_1(t)\mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2} b_1(t, T)\mathcal{B}^2(t, T) \\ \frac{\partial \mathcal{B}(t, T)}{\partial t} &= -a_2(t)\mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2} b_2(t)\mathcal{B}^2(t, T) - 1 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen $\mathcal{B}(T, T) = 0$ und $\mathcal{A}(T, T) = 0$.

Diese Randbedingungen folgen aus der Randbedingung der Term Structure Equation, also aus $B(T, T) = 1$ und Korollar 4.2.

Nun wird die Rückrichtung gezeigt.

$\alpha(t, r(t))$ und $\sigma^2(t, r(t))$ besitzen eine affine Gestalt. Die Funktionen $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$ stellen die Lösung des Systems von Differentialgleichungen dar. Es wird nun gezeigt, dass der Bondpreis von exponential-affiner Gestalt ist.

Die Funktionen $\alpha(t, r(t))$ und $\sigma^2(t, r(t))$ werden in die Term Structure Equation für

$F^T(t, r(t))$ unter dem risikoneutralen Maß Q eingesetzt. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F^T}{\partial t} + (a_1(t) + a_2(t)r(t)) \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} (b_1(t) + b_2(t)r(t)) \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - r(t)F^T \\ &= \left[\frac{\partial F^T}{\partial t} + a_1(t) \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} b_1(t) \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} \right] + \left[a_2(t) \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} b_2(t) \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - F^T \right] r(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Betrachte nun

$$e^{-\mathcal{A}(t,T) - \mathcal{B}(t,T)r(t)}, \quad (4.4)$$

wobei $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$ gerade die Lösungen des gegebenen Systems von Differentialgleichungen bezeichnen. Man berechnet nun die partiellen Ableitungen von (4.4) und setzt diese in (4.3) ein. Damit reduziert sich Gleichung (4.3) gerade auf das gegebene System von Differentialgleichungen für $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$ und somit ist (4.4) eine Lösung der Term Structure Equation für $B(t, T)$. Da die Lösung eindeutig ist, folgt also

$$B(t, T) = e^{-\mathcal{A}(t,T) - \mathcal{B}(t,T)r(t)}$$

und das short-rate Modell ist somit affin.

Zu beachten ist, dass in diesem Beweis häufig $F^T(t, r(t))$ durch F^T , $\mathcal{A}(t, T)$ durch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}(t, T)$ durch $\mathcal{B}$ abgekürzt wurde. $\square$

Bemerkung 4.5: Die Funktionen $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$ sind Funktionen in Abhängigkeit T und t . Durch das Lösen des Systems von Differentialgleichungen ergibt sich der Bondpreis für jede beliebige Fälligkeit. Im Gegensatz dazu ist die Term Structure Equation für jede Fälligkeit einzeln zu lösen.

4.1.1 Beispiele

Betrachtet man die Liste der wichtigsten short-rate Modelle in Abschnitt 2.8, so folgt aufgrund der Dynamik der short-rate in den speziellen short-rate Modellen, dass insbesondere das Vasiček-Modell, das Cox-Ingersoll-Ross-Modell und die Hull-White-Modelle affine short-rate Modelle darstellen. Im folgenden Kapitel werden das Vasiček-Modell, das Cox-Ingersoll-Ross-Modell und das Extended Vasiček-Modell näher erläutert und der Bondpreis wird in exponential-affiner Gestalt berechnet.

4.2 Bewertung von Optionen in affinen Modellen

Sei $0 \leq t \leq T < S \leq T^*$. Gegeben sei ein affines short-rate Modell. Betrachtet sei ein Call auf einen S -Bond mit Fälligkeit T und Strike-Preis K . Das Ziel dieses Abschnitts ist die Bewertung des Calls, wobei ausgenutzt werden soll, dass ein affines short-rate-Modell vorliegt. Dabei orientiert sich die Vorgehensweise an [Fil02] und an [Sch04]. Nach Theorem 3.5 gilt für den Preis des Calls in t

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= B(t, S)Q^S(B(T, S) > K \mid \mathcal{F}_t) - KB(t, T)Q^T(B(T, S) > K \mid \mathcal{F}_t) \\ &= B(t, S)Q^S(r(T) < r^* \mid \mathcal{F}_t) - KB(t, T)Q^T(r(T) < r^* \mid \mathcal{F}_t),\end{aligned}$$

wobei Q^T bzw. Q^S das T - bzw. S -Forwardmartingalmaß bezeichnet. Für die letzte Gleichheit wird der Payoff durch Ausnutzung der affinen Gestalt des Bondpreises umformuliert:

$$\begin{aligned}& B(T, S) > K \\ \Leftrightarrow & \exp(-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r(T)) > K \\ \Leftrightarrow & -\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r(T) > \log K \\ \Leftrightarrow & r(T) < \frac{-\log K - \mathcal{A}(T, S)}{\mathcal{B}(T, S)} =: r^*(T, S) =: r^*.\end{aligned}$$

Der Preis des Calls lässt sich mit der Formel (3.3) ausrechnen, wenn die bedingte Verteilung von $r(T)$ unter Q^T bzw. Q^S bekannt ist. Dazu berechnet man die momenterzeugende Funktion von $r(T)$ unter Q^T und Q^S , denn nach dem Eindeutigkeitssatz³ ist ein endliches Maß durch seine momenterzeugende Funktion eindeutig bestimmt.

Die unter $\mathcal{F}_t$ -bedingte momenterzeugende Funktion von $r(T)$ unter Q^T ist definiert als

$$\mathbb{E}_{Q^T} [e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Beziehung zwischen dem arbitragefreien Preis und dem Forwardpreis eines Claims gilt für die momenterzeugende Funktion unter Q^T :

$$\mathbb{E}_{Q^T} [e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t] \stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{B(t, T)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du + \lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.5)$$

³Siehe [Als05], Satz 40.6.

Ebenso gilt unter Q^S

$$\mathbb{E}_{Q^S}[e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t] \stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{B(t, S)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u) du + \lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.6)$$

Es genügt also, die Erwartungswerte auf der rechten Seite zu bestimmen und daher sei folgender Satz formuliert:

Satz 4.6: *Es gilt*

$$\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du + \lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-\Phi(t, T, \lambda) - \Psi(t, T, \lambda) r(t)} \quad (4.7)$$

mit deterministischen, stetig differenzierbaren Funktionen

$$\Phi(\cdot, T, \lambda), \Psi(\cdot, T, \lambda) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

die das folgende System von Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \frac{\partial \Phi(t, T, \lambda)}{\partial t} = \frac{1}{2} b_1(t) \Psi^2(t, T, \lambda) - a_1(t) \Psi(t, T, \lambda), & \Phi(T, T, \lambda) &= 0 \\ (II) \quad & \frac{\partial \Psi(t, T, \lambda)}{\partial t} = \frac{1}{2} b_2(t) \Psi^2(t, T, \lambda) - a_2(t) \Psi(t, T, \lambda) - 1, & \Psi(T, T, \lambda) &= -\lambda. \end{aligned}$$

Beweis: Definiere die Funktion $G^T(t, r(t)) = e^{-\Phi(t, T, \lambda) - \Psi(t, T, \lambda) r(t)}$, $0 \leq t \leq T$, mit stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi(\cdot, T, \lambda), \Psi(\cdot, T, \lambda) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und es gelte $G^T(T, r(T)) = e^{\lambda r(T)}$. Dann ist $G^T \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$.

Definiere die stetige Funktion $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\Phi}(r(t)) = e^{\lambda r(t)}$. Die Funktion G^T erfüllt als stetige Funktion eines Zinsderivats die allgemeine Term Structure Equation. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^T(t, r(t))}{\partial t} + \alpha(t, r(t)) \frac{\partial G^T(t, r(t))}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r(t)) \frac{\partial^2 G^T(t, r(t))}{\partial r^2} - r(t) G^T(t, r(t)) &= 0, \\ G(T, T, r(T)) &= \tilde{\Phi}(r(T)). \end{aligned}$$

Dann folgt mit Satz 2.17:

$$G^T(t, r(t)) = \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \tilde{\Phi}(r(T)) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Setzt man nun die partiellen Ableitungen von G in die Term Structure Equation ein und nutzt aus, dass der Drift- und der Diffusionsterm in einem affinen Modell eine

affine Gestalt besitzen, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\Psi}{\partial t} r(t) \right) G^T - \alpha \Psi G^T + \frac{1}{2} \sigma^2 \Psi^2 G^T - r(t) G^T \\ &= \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} - a_1 \Psi + \frac{1}{2} b_1(t) \Psi^2 \right) + \left(-\frac{\Psi}{\partial t} r(t) - a_2(t) \Psi + \frac{1}{2} b_2(t) \Psi^2 - 1 \right) r(t). \end{aligned}$$

Damit zerfällt die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, T, \lambda)}{\partial t} &= \frac{1}{2} b_1(t) \Psi^2(t, T, \lambda) - a_1(t) \Psi(t, T, \lambda), \\ \frac{\partial \Psi(t, T, \lambda)}{\partial t} &= \frac{1}{2} b_2(t) \Psi^2(t, T, \lambda) - a_2(t) \Psi(t, T, \lambda) - 1. \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung $G^T(T, r(T)) = \tilde{\Phi}(r(T)) = e^{\lambda r(T)}$ sowie der Stetigkeit und der Monotonie der Exponentialfunktion folgen die Randbedingungen des Systems von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} &e^{-\Phi(T, T, r(T)) - \Psi(T, T, r(T))r(T)} = e^{\lambda r(T)} \\ \Leftrightarrow &\Phi(T, T, r(T)) + \Psi(T, T, r(T))r(T) = -\lambda r(T) \text{ für alle } T \text{ und } r(T) \\ \Leftrightarrow &\Phi(T, T, r(T)) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi(T, T, r(T)) = -\lambda. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.7: Es gilt

$$\mathcal{A}(t, T) = \Phi(t, T, 0) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}(t, T) = \Psi(t, T, 0).$$

Beweis: Aus Satz 4.6 folgt mit $\lambda = 0$

$$\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-\Phi(t, T, 0) - \Psi(t, T, 0)r(t)}.$$

Da bereits bekannt ist, dass

$$\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \mid \mathcal{F}_t \right] \stackrel{(2.5)}{=} B(t, T) \stackrel{(4.1)}{=} e^{\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)},$$

ergibt sich

$$e^{-\Phi(t, T, 0) - \Psi(t, T, 0)r(t)} = e^{\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)} \text{ für alle } t, T \text{ und } r(t).$$

Da die Exponentialfunktion stetig und streng monoton wachsend ist, gilt somit für alle t, T und $r(t)$

$$\mathcal{A}(t, T) = \Phi(t, T, 0) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}(t, T) = \Psi(t, T, 0).$$

□

Nachdem man die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen berechnet hat, lassen sich mit Satz 4.6 die momenterzeugenden Funktionen unter Q^T bzw. Q^S berechnen. Für $0 \leq t \leq T < S \leq T^*$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^T} [e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t] &\stackrel{(4.5)}{=} \frac{1}{B(t, T)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du + \lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \frac{1}{B(t, T)} e^{-\Phi(t, T, \lambda) - \Psi(t, T, \lambda) r(t)} \\ &\stackrel{(4.1)}{=} e^{\mathcal{A}(t, T) - \Phi(t, T, \lambda) + (\mathcal{B}(t, T) - \Psi(t, T, \lambda)) r(t)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u) du} e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u) du - \int_t^T r(u) du} e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T}{=} \mathbb{E}_Q \left[\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u) du - \int_t^T r(u) du} e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u) du} \mid \mathcal{F}_T \right] e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} B(T, S) e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} e^{-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S) r(T)} e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} e^{-\mathcal{A}(T, S)} e^{(\lambda - \mathcal{B}(T, S)) r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\mathcal{A}(T, S)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} e^{(\lambda - \mathcal{B}(T, S)) r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(4.7)}{=} e^{-\mathcal{A}(T, S)} e^{-\Phi(t, T, \lambda - \mathcal{B}(T, S)) - \Psi(t, T, \lambda - \mathcal{B}(T, S)) r(t)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit folgt für die momenterzeugende Funktion unter Q^S :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^S} [e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t] &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{1}{B(t, S)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(u) du + \lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(4.9)}{=} \frac{1}{B(t, S)} e^{-\mathcal{A}(T, S) - \Phi(t, T, \lambda - \mathcal{B}(T, S)) - \Psi(t, T, \lambda - \mathcal{B}(T, S)) r(t)} \\ &\stackrel{(4.1)}{=} e^{\mathcal{A}(t, S) - \mathcal{A}(T, S) - \Phi(t, T, \lambda - \mathcal{B}(T, S)) + (\mathcal{B}(t, S) - \Psi(t, T, \lambda - \mathcal{B}(T, S))) r(t)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die momenterzeugenden Funktionen lassen sich somit einfach berechnen, wenn man das

System von Differentialgleichungen für Φ und Ψ gelöst hat. Nach der obigen Bemerkung erhält man die Funktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, indem man in Φ und Ψ den Wert $\lambda = 0$ setzt. In t ist schließlich auch $r(t)$ bekannt. Durch Inversion der momenterzeugenden Funktion erhält man nun die Verteilung von $r(T)$ unter Q^T bzw. Q^S . Es gibt Modelle, wie das Vasiček-Modell oder das Cox-Ingersoll-Ross-Modell, in denen die Verteilung schon bekannt ist. Ansonsten muss diese numerisch bestimmt werden.

5 Spezielle short-rate Modelle

Bisher wurden in dieser Arbeit allgemeine und insbesondere affine short-rate Modelle eingeführt. In diesem Kapitel werden nun drei affine short-rate Modelle vorgestellt, das Vasiček-Modell, das Cox-Ingersoll-Ross-Modell und das Hull-White (Extended Vasiček)-Modell. Die Eigenschaften dieser Modelle werden untersucht und miteinander verglichen.

5.1 Das Vasiček-Modell

1977 veröffentlichte O. Vasiček in seinem Artikel „An Equilibrium Characterization of the Term Structure“ das erste short-rate Modell, in dem die short-rate durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert wird und dadurch die Mean-Reversion-Eigenschaft besitzt. Dieser Abschnitt orientiert sich dabei größtenteils an [BS04], [Cai04] und [Vas77].

Im Vasiček-Modell ist der short-rate-Prozess als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\tilde{W}(t), \quad r(0) = r_0, \quad (5.1)$$

definiert. Dabei sei $\tilde{W}(t)$ eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß Q und r_0 , κ , θ und σ seien strikt positive Konstanten¹.

5.1.1 Das Verhalten der short-rate im Vasiček-Modell

In diesem Unterabschnitt wird das Verhalten der short-rate im Vasiček-Modell untersucht. Gesucht wird zunächst eine geschlossene Formel für die short-rate. Anschließend

¹Vergleiche [BS04], Seite 168.

werden der Erwartungswert und die Varianz berechnet und ihr Konvergenzverhalten untersucht sowie die Verteilung der short-rate unter Q bestimmt.

Als Erstes lässt sich feststellen, dass die short-rate unter Q einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit konstanten Koeffizienten folgt.

Satz 5.1: *Die short-rate folgt unter Q einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit konstanten Koeffizienten.*

Beweis: Setze $X(t) = r(t) - \theta$, es gilt

$$\begin{aligned} dX(t) &= d(r(t) - \theta) \\ &= dr(t) \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\tilde{W}(t) \\ &= -\kappa X(t)dt + \sigma d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

$X(t)$ erfüllt also die Langevin-Gleichung. □

Modelliert durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess besitzt der short-rate-Prozess die Mean-Reversion-Eigenschaft. Dabei ist der Koeffizient κ aus (5.1) die Mean-Reversion-Geschwindigkeit und θ stellt das Mean-Reversion-Level dar, also das langfristige Mittel, zu dem die short-rate zurückgezogen wird. Falls der aktuelle Wert der short-rate $r(t)$ größer ist als θ , so ist der Driftterm negativ und der short-rate-Prozess wird somit zu θ zurückgezogen. Ist umgekehrt die aktuelle short-rate kleiner als θ , so ist der Driftterm positiv und auch in diesem Fall wird der short-rate-Prozess wieder zum Mean-Reversion-Level zurückgezogen. Die Mean-Reversion-Geschwindigkeit κ drückt aus, wie stark die Drift auf Abweichungen der aktuellen short-rate vom Mean-Reversion-Level reagiert und wie schnell die short-rate zum Mean-Reversion-Level zurückkehrt. Das heißt, je größer κ ist, desto stärker reagiert die Drift auf Abweichungen und desto schneller kehrt die short-rate zum Mean-Reversion-Level zurück.

Da die short-rate durch die stochastische Differentialgleichung (5.1) dargestellt wird, ist das nächste Ziel nun, die Lösung dieses Anfangswertproblems zu bestimmen. Für den folgenden Satz siehe [BS04], Seite 169.

Satz 5.2: *Für die short-rate gilt*

$$r(t) = e^{-\kappa t}r(0) + (1 - e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u). \quad (5.2)$$

Beweis: Im ersten Schritt betrachte man die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{\kappa t}. \end{aligned}$$

f erfüllt die gewöhnliche homogene Differentialgleichung $f' = \kappa f$.

Sei nun der Prozess $(r(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.1). Nun wende man auf $(e^{\kappa t}r(t))_{0 \leq t \leq T^*}$ die partielle Integrationsformel an:

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t}r(t)) &= e^{\kappa t}r(t)\kappa dt + e^{\kappa t}dr(t) \\ &\stackrel{(5.1)}{=} e^{\kappa t}r(t)\kappa dt + e^{\kappa t}(\kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\tilde{W}(t)) \\ &= \kappa\theta e^{\kappa t}dt + \sigma e^{\kappa t}d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

In der Integralform hat dieser Ausdruck die Gestalt

$$\begin{aligned} e^{\kappa t}r(t) &= r(0) + \int_0^t e^{\kappa u}\kappa\theta du + \int_0^t e^{\kappa u}\sigma d\tilde{W}(u) \\ &= r(0) + (e^{\kappa t} - 1)\theta + \sigma \int_0^t e^{\kappa u}d\tilde{W}(u). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun nach $r(t)$ auflösen. Damit erhält man für die short-rate die gewünschte Formel (5.2). $\square$

Es ist also möglich, eine geschlossene Formel für die short-rate aufzustellen.

Als nächstes werden der Erwartungswert und die Varianz der short-rate untersucht². Dabei benutzt man die Tatsache, dass ein Itô-Integral über eine deterministische Funktion normalverteilt ist und der Erwartungswert dieses Integrals verschwindet. Diese Tatsache wird nun als Satz in Anlehnung an [Shr04], Theorem 4.4.9, formuliert. Dort ist auch der Beweis nachzulesen.

²Vergleiche [BS04], Seite 169.

Satz 5.3 (Itô-Integral eines deterministischen Integranden): Sei $W(s)$, $s \geq 0$, ein Wiener-Prozess und sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion der Zeit mit $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Definiere

$$I(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Für jedes $t \geq 0$ ist die Zufallsvariable $I(t)$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^t f(s)^2 ds$.

Satz 5.4: Es gilt

$$\mathbb{E}_Q[r(t)] = e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_Q[r(t)] = \theta.$$

Beweis: Da $e^{-\kappa(t-u)}$ deterministisch und auf $(0, t]$ integrierbar ist, folgt mit Satz 5.3

$$\mathbb{E}_Q \left[\int_0^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u) \right] = 0.$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[r(t)] &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u) \right] \\ &= e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta. \end{aligned}$$

Eine Betrachtung des Grenzwertes liefert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_Q[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta) = \theta.$$

□

Der Erwartungswert der short-rate ist der gewichtete Mittelwert aus $r(0)$ und θ , der Grenzwert ist gerade das Mean-Reversion-Level θ .

Weiter folgt für die Varianz:

Satz 5.5: Es gilt

$$\text{Var}_Q[r(t)] = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_Q[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

Beweis: Für den Beweis wird erneut die Tatsache benutzt, dass ein Itô-Integral über eine deterministische Funktion betrachtet wird.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_Q[r(t)] &= \text{Var}_Q \left[e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u) \right] \\
 &\stackrel{\text{Satz 5.3}}{=} \sigma^2 \text{Var}_Q \left[\int_0^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u) \right] \\
 &\stackrel{\text{Satz 5.3}}{=} \sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-u)} du = \sigma^2 \left[\frac{e^{-2\kappa(t-u)}}{2\kappa} \right]_0^t = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right).
 \end{aligned}$$

Für den Grenzwert der Varianz ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_Q[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) \right) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

□

Damit sind sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz der short-rate unter dem risikoneutralen Maß Q beschränkt, denn aufgrund der Mean-Reversion-Eigenschaft der short-rate wird diese stets zum Mean-Reversion-Level zurückgezogen und kann für große t nicht beliebig stark schwanken. Es gibt eine Obergrenze für die Unsicherheit der short-rate.

Als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist die short-rate normalverteilt. Diese Tatsache wird in folgendem Satz ausgeführt.

Satz 5.6: *Unter dem risikoneutralen Maß Q ist die short-rate $r(t)$ normalverteilt. Es gilt*

$$r(t) \sim \mathcal{N} \left(e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta, \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) \right).$$

Beweis: Nach Satz 5.3 ist $\int_0^t e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}(u)$ als Itô-Integral über eine deterministische Funktion normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^t e^{-2\kappa(t-u)} du$. Da die restlichen Terme aus der geschlossenen Formel (5.2) für $r(t)$ deterministisch sind, ist $r(t)$ normalverteilt mit Erwartungswert $e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta$ und Varianz $\sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right)$. □

Nun lässt sich die Verteilung von $r(t)$ für $t \rightarrow \infty$ betrachten. Für den Beweis benötigt man die Fourier-Transformierte einer normalverteilten Zufallsgröße³.

³Die Fourier-Transformierte einer normalverteilten Zufallsgröße findet man u.a. in [Als05], Seite 282.

Bemerkung 5.7: Es gilt: Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so besitzt die Fourier-Transformierte von X die Gestalt

$$\mathbb{E} [e^{i\lambda X}] = \exp \left(i\lambda \mathbb{E}[X] - \frac{1}{2} \lambda^2 \text{Var}[X] \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Satz 5.8: Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Verteilung der short-rate gegen eine Normalverteilung mit Erwartungswert θ und Varianz $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$.

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, dass die Fourier-Transformierte von $r(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die Fourier-Transformierte der $\mathcal{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$ -Verteilung konvergiert. Für die Fourier-Transformierte ϕ_t von $r(t)$ gilt mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und Bemerkung 5.7

$$\begin{aligned} \phi_t(\lambda) &= \exp \left(i\lambda \left(e^{-\kappa t} r(0) - (1 - e^{-\kappa t}) \theta \right) + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp \left(i\lambda \theta - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right). \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Fourier-Transformierte einer normalverteilten Zufallsgröße mit Erwartungswert θ und Varianz $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$. Nach dem Stetigkeitssatz von Lévy⁴ konvergiert die Verteilung von $r(t)$ schwach gegen die $\mathcal{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$ -Verteilung. Damit konvergiert $r(t)$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$ -verteilte Zufallsgröße. $\square$

Mit der Normalverteiltetheit der short-rate wird zugleich auch der größte Nachteil des Vasiček-Modells deutlich: Da die short-rate unter Q normalverteilt ist, ist die short-rate mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ.

5.1.2 Bewertungsgleichung für Zero-Coupon-Bonds

Wie in den Kapiteln 2 und 4 gezeigt wurde, liegen zur Berechnung der Zero-Coupon-Bond-Preise nun zwei verschiedene Möglichkeiten vor. Sehr leicht kann man in diesem Modell das System von Differentialgleichungen aus Satz 4.4 lösen. Das Vasiček-Modell ist aber so einfach, dass man die Bondpreise mit der risikoneutralen Bewertungsgleichung direkt berechnen kann⁵.

Dabei wird folgendes Resultat über normalverteilte Zufallsgrößen⁶ benutzt:

⁴Siehe [Als05], Theorem 45.2.

⁵Vergleiche [BS04], Satz 6.11.

⁶Siehe [Als05], Satz 32.10.

Lemma 5.9: Für eine normalverteilte Zufallsgröße X gilt:

$$\mathbb{E}[\exp(X)] = \exp\left(\mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}\text{Var}[X]\right).$$

Satz 5.10 (Bewertungsgleichung für Zero-Coupon-Bonds im Vasiček-Modell): Die short-rate $r(t)$ folge dem Prozess (5.1). Dann ist der Preis in t eines Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T , $0 \leq t \leq T$ gegeben durch

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp(-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)) \\ \text{mit } \mathcal{B}(t, T) &= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \\ \text{und } \mathcal{A}(t, T) &= \left((T-t) - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) + \left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)^2 \frac{\sigma^2}{4\kappa}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Beweis: Sei nun $s \geq t$. Für die short-rate in s gilt ausgehend von $r(t)$

$$r(s) = e^{-\kappa(s-t)}r(t) + \left(1 - e^{-\kappa(s-t)}\right)\theta + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)}d\tilde{W}(u).$$

Nun wird von t bis T über die short-rate integriert. Dabei wendet man den Satz von Fubini für stochastische Integrale⁷ an.

$$\begin{aligned} \int_t^T r(s)ds &= \int_t^T \left(e^{-\kappa(s-t)}r(t) + \left(1 - e^{-\kappa(s-t)}\right)\theta + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)}d\tilde{W}(u)\right)ds \\ &= \int_t^T e^{-\kappa(s-t)}r(t)ds + \int_t^T \left(1 - e^{-\kappa(s-t)}\right)\theta ds + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-\kappa(s-u)}d\tilde{W}(u) ds \\ &= \int_t^T e^{-\kappa(s-t)}r(t)ds + \int_t^T \left(1 - e^{-\kappa(s-t)}\right)\theta ds + \sigma \int_t^T \int_u^T e^{-\kappa(s-u)}ds d\tilde{W}(u) \\ &= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}r(t) + \left(T - t - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)\theta + \sigma \underbrace{\int_t^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}d\tilde{W}(u)}_{:=I(T-t)} \end{aligned}$$

Nach Satz 5.3 ist

$$I(T-t) = \int_0^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}d\tilde{W}(u) - \int_0^t \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}d\tilde{W}(u)$$

normalverteilt und $\int_t^T r(s)ds$ ist folglich normalverteilt. Damit ist $\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)$ lognormalverteilt. Aufgrund von Lemma 5.9 folgt für den bedingten Erwartungswert

⁷Siehe [Fil09], Theorem 6.2.

des Integrals über die short-rate

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q \left[\int_t^T r(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right] &= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} r(t) + \left(T - t - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \theta \\ &\quad + \sigma \mathbb{E}_Q \left[\int_t^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\tilde{W}(u) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{Satz 5.3}}{=} \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} r(t) + \left(T - t - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \theta\end{aligned}$$

und die Varianz berechnet sich als

$$\begin{aligned}\text{Var}_Q \left[\int_t^T r(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right] &= \sigma^2 \text{Var}_Q \left[\int_t^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} d\tilde{W}(u) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{Satz 5.3}}{=} \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \int_t^T (1 - e^{-\kappa(T-u)})^2 du \\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left(T - t - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right).\end{aligned}$$

Nun setzt man in die risikoneutrale Bewertungsgleichung (2.5) ein:

$$\begin{aligned}B(t, T) &= \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.9}}{=} \exp \left(- \mathbb{E}_Q \left[\int_t^T r(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right] + \frac{1}{2} \text{Var}_Q \left[\int_t^T r(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= \exp \left(- \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} r(t) - \left(T - t - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left(T - t - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(- \mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T) r(t) \right) \\ \text{mit } \mathcal{A}(t, T) &= \left((T - t) - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) + \left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right)^2 \frac{\sigma^2}{4\kappa} \\ \text{und } \mathcal{B}(t, T) &= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}.\end{aligned}$$

□

5.1.3 Bewertung von Optionen

Da das vorliegende short-rate Modell affin ist, lassen sich Satz 3.5 und Satz 4.7 anwenden, um den Preis eines Calls auf einen S -Bond mit Fälligkeit S , $0 \leq t \leq T < S \leq T^*$,

zu berechnen⁸.

Der folgende Satz⁹ liefert eine Formel zur Berechnung von Callpreisen im Vasiček-Modell.

Theorem 5.11: *Für den Preis eines Calls in t auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike-Preis K gilt*

$$C(t, T, S, K) = B(t, S)\Phi(d_1) - KB(t, T)\Phi(d_2) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad d_1 &= \frac{1}{\sigma_p} \log \left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)} \right) + \frac{\sigma_p}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_p \\ \text{und} \quad \sigma_p &= \frac{\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(S-T)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}}. \end{aligned}$$

Φ bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

Beweis: Nach Satz 3.5 gilt für den Preis des Calls in t

$$C(t, T, S, K) = B(t, S)Q^S(r(T) < r^* \mid \mathcal{F}_t) - KB(t, T)Q^T(r(T) < r^* \mid \mathcal{F}_t)$$

mit $r^* = \frac{-\log K - \mathcal{A}(T, S)}{\mathcal{B}(T, S)}$. Um die Verteilung von $r(T)$ unter dem T - bzw. S -Forwardmartingalmaß zu bestimmen, berechnet man zunächst die momenterzeugende Funktion unter dem T -Forwardmartingalmaß. Dazu ist nach Satz 4.6 das folgende System von Differentialgleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} (I) \quad \frac{\partial \Phi(t, T, \lambda)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sigma^2\Psi^2(t, T, \lambda) - \kappa\theta\Psi(t, T, \lambda), \quad \Phi(T, T, \lambda) = 0 \\ (II) \quad \frac{\partial \Psi(t, T, \lambda)}{\partial t} &= \kappa\Psi(t, T, \lambda) - 1, \quad \Psi(T, T, \lambda) = -\lambda. \end{aligned}$$

Gleichung (II) stellt eine nicht-homogene lineare Differentialgleichung dar und ist somit einfach zu lösen. Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} \Psi(t, T, \lambda) &= -\lambda e^{-\kappa(T-t)} + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \\ &= \mathcal{B}_1(t, T) - \lambda \mathcal{B}_2(t, T) \end{aligned} \quad (5.5)$$

⁸Alternativ könnte man zum Beweis der Call-Bewertungsformel die Dynamik der short-rate unter dem T - bzw. S -Forwardmartingalmaß betrachten und feststellen, dass auch unter diesen Maßen die bedingte Verteilung eine Normalverteilung ist, da die short-rate-Dynamik unter Q^T bzw. Q^S die Gestalt der short-rate-Dynamik im Vasiček-Modell besitzt.

⁹Vergleiche [Jam89], Proposition (b), [Bj004], Proposition 22.9, oder [Cai04], Seite 250.

mit

$$\mathcal{B}_1(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2(t, T) = e^{-\kappa(T-t)}.$$

Durch Integration von $\Psi(t, T, \lambda)$ erhält man die Lösung der Gleichung (I):

$$\begin{aligned} \Phi(t, T, \lambda) &= - \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \int_t^T \Psi^2(u, T, \lambda) du - \kappa \theta \int_t^T \Psi(u, T, \lambda) du \right) \\ &= - \left(-\theta \left((T-t) - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) + \lambda \theta (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{2\kappa^3} (-e^{-2\kappa(T-t)} - 3 - 4e^{-\kappa(T-t)} + 2\kappa(T-t)) \\ &\quad \left. - \lambda \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right) \\ &= \mathcal{A}_1(t, T) - \lambda \mathcal{A}_2(t, T) - \frac{1}{2} C_{11}(t, T) + \lambda C_{12}(t, T) - \frac{1}{2} \lambda^2 C_{22}(t, T) \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(t, T) &= \theta \left((T-t) - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right), \\ \mathcal{A}_2(t, T) &= \theta (1 - e^{-\kappa(T-t)}), \\ C_{11}(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2\kappa^3} [2\kappa(T-t) - 3 - 4e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)}], \\ C_{12}(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \\ \text{und } C_{22}(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}). \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4.7 gilt für den Preis des T -Bonds in t

$$\begin{aligned} B(t, T) &= e^{-\Phi(t, T, 0) - \Psi(t, T, 0)r(t)} \\ &= e^{\mathcal{A}_1(t, T) - \frac{1}{2} C_{11}(t, T) - \mathcal{B}_1(t, T)r(t)}. \end{aligned}$$

Für die momenterzeugende Funktion von $r(T)$ unter dem T -Forwardmartingalmaß gilt mit (4.8), (5.5) und (5.6):

$$\begin{aligned} \varphi_{Q^T}(t) &= \mathbb{E}_{Q^T} [e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{B(t, T)} e^{-\Phi(t, T, \lambda) - \Psi(t, T, \lambda)r(t)} \\ &= \exp \left(\lambda \mathcal{A}_2(t, T) - \lambda C_{12}(t, T) + \frac{1}{2} \lambda^2 C_{22}(t, T) + \lambda \mathcal{B}_2(t, T)r(t) \right). \end{aligned}$$

Das ist gerade die unter $\mathcal{F}_t$ -bedingte momenterzeugende Funktion einer unter Q^T normalverteilten Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathcal{A}_2(t, T) - C_{12}(t, T) + \mathcal{B}_2(t, T)r(t)$ und Varianz $C_{22}(t, T)$. Also ist auch $r(T)$ - gegeben $\mathcal{F}_t$ - unter Q^T normalverteilt mit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q^T} [r(T) \mid \mathcal{F}_t] &= \mathcal{A}_2(t, T) - C_{12}(t, T) + \mathcal{B}_2(t, T)r(t) \\ &= \theta \left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)^2 + e^{-\kappa(T-t)}r(t) \\ &= \theta + (r(t) - \theta) e^{-\kappa(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right)^2 \\ &=: r_2\end{aligned}$$

und

$$Var_{Q^T} [r(T) \mid \mathcal{F}_t] = C_{22}(t, T) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right).$$

Damit folgt

$$Q^T(r(T) < r^* \mid \mathcal{F}_t) = \Phi(d_2) \quad \text{mit} \quad d_2 = \frac{r^* - r_2}{\sqrt{C_{22}(t, T)}}.$$

Da $r(T)$ normalverteilt unter Q^T ist, gilt außerdem

$$\begin{aligned}B(t, S) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T}{=} \mathbb{E}_Q \left[\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds - \int_T^S r(s)ds} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_T^S r(s)ds} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} B(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{Bayes}}{=} B(t, T) \mathbb{E}_{Q^T} [B(T, S) \mid \mathcal{F}_t] \\ &\stackrel{(4.1)}{=} B(t, T) \mathbb{E}_{Q^T} \left[e^{-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.9}}{=} B(t, T) \exp \left(\mathbb{E}_{Q^T} [-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r(T) \mid \mathcal{F}_t] \right) \\ &\quad * \exp \left(\frac{1}{2} Var_{Q^T} [-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r(T) \mid \mathcal{F}_t] \right) \\ &= B(t, T) \exp \left(-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r_2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}(T, S)^2 C_{22}(t, T) \right).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\log \left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)} \right) &= \log \left(\frac{B(t, T) \exp \left(-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r_2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}(T, S)^2 C_{22}(t, T) \right)}{KB(t, T)} \right) \\ &= -\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r_2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}(T, S)^2 C_{22}(t, T) - \log K\end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{r^* - r_2}{\sqrt{C_{22}(t, T)}} = \frac{-\mathcal{A}(T, S) - \mathcal{B}(T, S)r_2 - \log K}{\mathcal{B}(T, S)\sqrt{C_{22}(t, T)}} \\
 &= \frac{\log\left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(T, S)^2 C_{22}(t, T)}{\mathcal{B}(T, S)\sqrt{C_{22}(t, T)}} \\
 &= \frac{1}{\sigma_p} \log\left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)}\right) - \frac{\sigma_p}{2}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \sigma_p &= \mathcal{B}(T, S)\sqrt{C_{22}(t, T)} \\
 &= \frac{\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(S-T)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}}.
 \end{aligned}$$

Nun fehlt noch die Verteilung von $r(T)$ unter dem S -Forwardmartingalmaß. Nach (4.10) gilt für die momenterzeugende Funktion von $r(T)$ unter Q^S , wobei $\lambda_2 = \lambda - \mathcal{B}_1(T, S)$ definiert wird,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{Q^S} [e^{\lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t] &= \frac{1}{B(t, S)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_t^S r(s) ds + \lambda r(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{\mathcal{A}(t, S) - \mathcal{A}(T, S) - \Phi(t, T, \lambda_2) + (\mathcal{B}(t, S) - \Psi(t, T, \lambda_2))r(t)} \\
 &= e^{\mathcal{A}_1(t, S) - \frac{1}{2}C_{11}(t, S) - \mathcal{A}_1(T, S) + \frac{1}{2}C_{11}(T, S) - \mathcal{A}_1(t, T) + \lambda_2 \mathcal{A}_2(t, T)} \\
 &\quad * e^{\frac{1}{2}C_{11}(t, T) - \lambda_2 C_{12}(t, T) + \frac{1}{2}\lambda_2^2 C_{22}(t, T) + (\mathcal{B}_1(t, S) - \mathcal{B}_1(t, T) + \lambda_2 \mathcal{B}_2(t, T))r(t)} \\
 &= e^{\mathcal{A}_1(t, S) - \frac{1}{2}C_{11}(t, S) - \mathcal{A}_1(T, S) + \frac{1}{2}C_{11}(T, S) - \mathcal{A}_1(t, T) + \lambda \mathcal{A}_2(t, T) - \mathcal{B}_1(T, S) \mathcal{A}_2(t, T)} \\
 &\quad * e^{\frac{1}{2}C_{11}(t, T) - \lambda C_{12}(t, T) + \mathcal{B}_1(T, S) C_{12}(t, T) + \frac{1}{2}\lambda^2 C_{22}(t, T) - \lambda \mathcal{B}_1(T, S) C_{22}(t, T) + \mathcal{B}_1^2(T, S) C_{22}(t, T)} \\
 &\quad * e^{(\mathcal{B}_1(t, S) - \mathcal{B}_1(t, T) + \lambda \mathcal{B}_2(t, T) - \mathcal{B}_1(T, S) C_{22}(t, T))r(t)} \\
 &= e^{\lambda \mathcal{A}_2(t, T) - \lambda C_{12}(t, T) - \lambda \mathcal{B}_1(T, S) C_{22}(t, T) + \frac{1}{2}\lambda^2 C_{22}(t, T) + \lambda \mathcal{B}_2(t, T) r(t)}.
 \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus der Tatsache, dass

$$\mathcal{B}_1(t, S) - \mathcal{B}_1(t, T) - \mathcal{B}_1(T, S) \mathcal{B}_2(t, T) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{A}_1(t, S) - \frac{1}{2}C_{11}(t, S) - \mathcal{A}_1(T, S) + \frac{1}{2}C_{11}(T, S) - \mathcal{A}_1(t, T) \\
 &- \mathcal{B}_1(T, S) \mathcal{A}_2(t, T) - \frac{1}{2}C_{11}(t, T) + \mathcal{B}_1(T, S) C_{12}(t, T) + \mathcal{B}_1^2(T, S) C_{22}(t, T) = 0
 \end{aligned}$$

gilt. Das ist gerade die momenterzeugende Funktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit

Erwartungswert $\mathcal{A}_2(t, T) - C_{12}(t, T) - \mathcal{B}_1(T, S)C_{22}(t, T) + \mathcal{B}_2(t, T)r(t)$ und Varianz $C_{22}(t, T)$.

Damit ist auch $r(T)$ unter Q^S - gegeben $\mathcal{F}_t$ - normalverteilt und besitzt den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz.

Für den Erwartungswert folgt weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q^S} [r(T) \mid \mathcal{F}_t] &= \mathcal{A}_2(t, T) - C_{12}(t, T) - \mathcal{B}_1(T, S)C_{22}(t, T) + \mathcal{B}_2(t, T)r(t) \\ &= r_2 - \mathcal{B}_1(T, S)C_{22}(t, T) =: r_1.\end{aligned}$$

Da $r(T)$ unter Q^S normalverteilt ist, folgt

$$Q^S(r(T) < r^*) = \Phi(d_1),$$

wobei

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{r^* - r_1}{\sqrt{C_{22}(t, T)}} \\ &= \frac{r^* - r_2}{\sqrt{C_{22}(t, T)}} + \frac{\mathcal{B}(T, S)C_{22}(t, T)}{\sqrt{C_{22}(t, T)}} \\ &= d_2 + \sigma_p.\end{aligned}$$

□

Eine analoge Bewertungsformel gilt auch für Putoptionen.

Korollar 5.12: *Der Preis eines Puts in t auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt $T < S$ und Strike-Preis K ist gegeben durch*

$$P(t, T, S, K) = KB(t, T)\Phi(-d_2) - B(t, S)\Phi(-d_1). \quad (5.7)$$

Beweis: Nach Bemerkung 3.6 gilt für den Preis des Puts

$$\begin{aligned}P(t, T, S, K) &= KB(t, T)Q^T(B(T, S) < K \mid \mathcal{F}_t) - B(t, S)Q^S(B(T, S) < K \mid \mathcal{F}_t) \\ &= KB(t, T)Q^T(r(T) > r^* \mid \mathcal{F}_t) - B(t, S)Q^S(r(T) > r^* \mid \mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

In dem Beweis von Theorem 5.11 ist bereits gezeigt worden, dass $r(T)$ unter dem T - bzw. S -Forwardmartingalmaß normalverteilt ist mit Erwartungswert r_2 bzw. r_1 und Varianz $C_{22}(t, T)$. Weiter gilt

$$Q^T(r(T) > r^*) = 1 - Q^T(r(T) \leq r^*) = 1 - \Phi(d_2) = \Phi(-d_2)$$

und

$$Q^S(r(T) > r^*) = 1 - Q^S(r(T) \leq r^*) = 1 - \Phi(d_1) = \Phi(-d_1).$$

□

5.1.4 Bewertung von Caps und Swaptions

Als eine Anwendung von Theorem 5.11 wird nun eine Formel zur Berechnung von Cap-Preisen hergeleitet. Dazu betrachte man einen Cap mit Cap-Rate K und zukünftigen Zahlungszeitpunkten $t \leq T_0 < T_1 < \dots < T_n$, $T_i - T_{i-1} = \delta$, $i = 1, \dots, n$.

Korollar 5.13: Für den Preis des Caps im Zeitpunkt t gilt $Cp(t) = \sum_{i=1}^n Cpl(i, t)$ mit

$$\begin{aligned} Cpl(i, t) &= B(t, T_{i-1})\Phi(-d_2) - (1 + K\delta)B(t, T_i)\Phi(-d_1) \\ \text{und es gilt } d_1 &= \frac{1}{\sigma_p} \log \left(\frac{B(t, T_i)}{\frac{1}{1+K\delta}B(t, T_{i-1})} \right) + \frac{\sigma_p}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_p \\ \text{und } \sigma_p &= \frac{\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T_i - T_{i-1})}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T_{i-1} - t)}}{2\kappa}}. \end{aligned}$$

Beweis: Für den Preis des i -ten Caplets in T_{i-1} gilt

$$Cpl(i, T_{i-1}) = (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + \delta K} - B(T_{i-1}, T_i) \right)^+$$

und er entspricht somit dem $(1 + K\delta)$ -fachen Preis eines Puts auf einen T_i -Bond mit Ausübungszeitpunkt T_i und Strike-Preis $\frac{1}{1+K\delta}$. Damit kann man den Preis des i -ten Caplets in t mit (5.7) berechnen:

$$\begin{aligned} Cpl(i, t) &= (1 + K\delta) \left(\frac{1}{1 + K\delta} B(t, T_{i-1})\Phi(-d_2) - B(t, T_i)\Phi(-d_1) \right) \\ &= B(t, T_{i-1})\Phi(-d_2) - (1 + K\delta)B(t, T_i)\Phi(-d_1) \\ \text{mit } d_1 &= \frac{1}{\sigma_p} \log \left(\frac{B(t, T_i)}{\frac{1}{1+K\delta}B(t, T_{i-1})} \right) + \frac{\sigma_p}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_p \end{aligned}$$

$$\text{und } \sigma_p = \frac{\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T_i - T_{i-1})}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T_{i-1} - t)}}{2\kappa}}.$$

□

Des Weiteren lässt sich eine Formel zur Berechnung von Swaptions angeben. Betrachtet wird eine Payer Swaption mit Fälligkeit T_0 und äquidistanten Zahlungszeitpunkten $T_1, \dots, T_n$, $T_i - T_{i-1} \equiv \delta$, $i = 1, \dots, n$. Der Nennwert des zugrunde liegenden Swaps sei N . Die Swap Rate sei K . Das folgende Korollar liefert eine Bewertungsformel für Swaptions im Vasiček-Modell.

Korollar 5.14: Für den Wert der Swaption im Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq T_0$, gilt

$$\begin{aligned} Sw(t) &= NK\delta \sum_{i=1}^{n-1} (N_i B(t, T_0) \Phi(-d_{i2}) - B(t, T_i) \Phi(-d_{i1})) \\ &\quad + N(K\delta + 1)(N_n B(t, T_0) \Phi(-d_{n2}) - B(t, T_n) \Phi(-d_{n1})) \\ \text{mit } d_{i1} &= \frac{1}{\sigma_i} \log \left(\frac{B(t, T_i)}{N_i B(t, T_0)} \right) + \frac{\sigma_i}{2}, \quad d_{i2} = d_{i1} - \sigma_i \\ \text{und } \sigma_i &= \frac{\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T_i - T_0)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T_0 - t)}}{2\kappa}} \quad \text{sowie } N_i = F^{T_i}(T_0, r^*) \\ \text{und } r^* \text{ so, dass } &N \left(K\delta \sum_{i=1}^n F^{T_i}(T_0, r^*) + F^{T_n}(T_0, r^*) \right) = N. \end{aligned}$$

Beweis: Nach Korollar 3.11 gilt für den Wert der Swaption in t mit $N_i = F^{T_i}(T_0, r^*)$ und r^* so, dass die Gleichung $N (K\delta \sum_{i=1}^n F^{T_i}(T_0, r^*) + F^{T_n}(T_0, r^*)) = N$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} Sw(t) &= NK\delta \sum_{i=1}^{n-1} P(t, T_0, T_i, N_i) + N(K\delta + 1)P(t, T_0, T_n, N_n) \\ &\stackrel{(5.7)}{=} NK\delta \sum_{i=1}^{n-1} (N_i B(t, T_0) \Phi(-d_{i2}) - B(t, T_i) \Phi(-d_{i1})) \\ &\quad + N(K\delta + 1)(N_n B(t, T_0) \Phi(-d_{n2}) - B(t, T_n) \Phi(-d_{n1})) \\ \text{mit } d_{i1} &= \frac{1}{\sigma_i} \log \left(\frac{B(t, T_i)}{N_i B(t, T_0)} \right) + \frac{\sigma_i}{2}, \quad d_{i2} = d_{i1} - \sigma_i \\ \text{und } \sigma_i &= \frac{\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T_i - T_0)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T_0 - t)}}{2\kappa}}. \end{aligned}$$

□

5.2 Das Cox-Ingersoll-Ross-Modell

In diesem Abschnitt wird das Cox-Ingersoll-Ross-Modell (kurz CIR-Modell) eingeführt. Eine wichtige Eigenschaft dieses Modells ist, dass garantiert werden kann, dass die short-rate positiv ist.

Dabei richtet sich dieser Abschnitt, sofern keine andere Literaturquelle angegeben ist, nach [BS04] und [LL96], sowie ferner nach [CIR85], [Cai04] und [Fil09].

Die stochastische Differentialgleichung für die short-rate unter dem risikoneutralen Maß Q ist gegeben durch

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}(t), \quad r(0) = r_0, \quad (5.8)$$

wobei $r_0, \kappa, \theta, \sigma > 0$ und $\tilde{W}(t)$ eine Standard-Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß darstellt¹⁰.

Die short-rate wird durch einen Wurzel-Diffusions-Prozess modelliert, das heißt, die Volatilität der short-rate ist im Gegensatz zur konstanten Volatilität im Vasiček-Modell proportional zur Wurzel der short-rate.

Zusätzlich stellt man an die Koeffizienten die Bedingung

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2. \quad (5.9)$$

Mit der Bedingung (5.9) wird gesichert, dass die short-rate stets positiv ist. Der Beweis dafür folgt in Abschnitt 5.2.5.

5.2.1 Das Verhalten der short-rate im CIR-Modell

Anders als im Vasiček-Modell ist es im Cox-Ingersoll-Ross-Modell nicht möglich, eine geschlossene Formel für die short-rate zu finden. Aber durch die Modellierung als Wurzel-Diffusions-Prozess besitzt der short-rate-Prozess auch in diesem Fall die Mean-Reversion-Eigenschaft mit Mean-Reversion-Level θ und Mean-Reversion-Geschwindigkeit κ . Außerdem kann man den Erwartungswert und die Varianz sowie deren Grenzwerte, wenn t gegen ∞ strebt, berechnen¹¹.

¹⁰Vergleiche [BS04], Seite 178.

¹¹Dazu siehe [DJ07], Theorem 5.6.1. oder [BS04], Seite 179.

Satz 5.15: *Für die short-rate gilt*

$$\mathbb{E}_Q[r(t)] = e^{-\kappa t} r(0) + (1 - e^{-\kappa t}) \theta \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_Q[r(t)] = \theta$$

sowie

$$\text{Var}_Q[r(t)] = \frac{\sigma^2}{\kappa} r(0) (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\sigma^2 \theta}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa t})^2 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_Q[r(t)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2\kappa}.$$

An dem Satz wird wieder die Mean-Reversion-Eigenschaft deutlich. Dabei entspricht der Erwartungswert dem Erwartungswert im Vasiček-Modell und ist das gewichtete Mittel aus dem Wert der short-rate in 0 und θ .

Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Die Rechnungen sind im Anhang nachzulesen.

Schließlich fehlt nun noch die Verteilung von $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q . Dazu wird zunächst das folgende allgemeine Resultat bewiesen:

Satz 5.16: *(Vergleiche [Cai04], Theorem 4.8.a))*

Es seien $\lambda, \mu \geq 0$.

Es gilt

$$\mathbb{E}_Q \left[\exp \left(-\mu \int_t^T r(u) du - \lambda r(T) \right) \mid \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(-\Phi(t, T, \lambda, \mu) - \Psi(t, T, \lambda, \mu) r(t) \right)$$

$$\text{mit} \quad \Phi(t, T, \lambda, \mu) = -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \log \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})(T-t)}}{(\sigma^2\lambda + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma} \right),$$

$$\Psi(t, T, \lambda, \mu) = \frac{\lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1)) + 2\mu(e^{2\gamma(T-t)} - 1)}{(\sigma^2\lambda + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma}$$

$$\text{und} \quad \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2\mu}.$$

Mit diesem Satz lässt sich zum einen leicht die Laplace-Transformierte¹² und damit die Verteilung der short-rate unter Q bestimmen, zum anderen erhält man eine Bewertungsformel für Zero-Coupon-Bonds.

¹²Da die short-rate im CIR-Modell stets positiv ist, werden hier zur Bestimmung der Verteilung Laplace-Transformierte anstelle von momenterzeugenden Funktionen verwendet.

Beweis: Wegen der Markov-Eigenschaft der short-rate kann

$$\mathbb{E}_Q \left[\exp \left(-\mu \int_t^T r(u) du - \lambda r(T) \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

als Funktion in Abhängigkeit von der short-rate und der Zeit betrachtet werden:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(-\mu \int_t^T r(u) du - \lambda r(T) \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ & \stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(-\mu \int_t^T r(u) du - \lambda r(T) \right) \mid r(t) = r \right] \\ & = : H(t, r). \end{aligned}$$

Nach dem Theorem über die Formel von Feynman-Kac¹³ stellt die Funktion H die Lösung des folgenden Randwertproblems dar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(t, r)}{\partial t} + \kappa(\theta - r(t)) \frac{\partial H(t, r)}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 r(t) \frac{\partial^2 H(t, r)}{\partial r^2} - \mu r(t) H(t, r) &= 0 \\ H(T, r) &= e^{-\lambda r(T)}. \end{aligned}$$

Da ein affines short-rate Modell betrachtet wird, kann man annehmen, dass die Funktion die affine Gestalt $H(t, r) = e^{-\Phi(t, T, \lambda, \mu) - \Psi(t, T, \lambda, \mu)r(t)}$ besitzt. Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen zerfällt die partielle Differentialgleichung in ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(t, T, \lambda, \mu) &= -\kappa\theta\Phi(t, T, \lambda, \mu) & \Phi(T, T, \lambda, \mu) &= 0 \\ \partial_t \Psi(t, T, \lambda, \mu) &= \kappa\Psi(t, T, \lambda, \mu) + \frac{1}{2}\sigma^2\Psi^2(t, T, \lambda, \mu) - \mu, & \Psi(T, T, \lambda, \mu) &= \lambda. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Systems von Differentialgleichungen sind gerade

$$\begin{aligned} \Phi(t, T, \lambda, \mu) &= -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \log \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})(T-t)}}{(\sigma^2\lambda + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma} \right), \\ \text{mit } \Psi(t, T, \lambda, \mu) &= \frac{\lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1)) + 2\mu(e^{2\gamma(T-t)} - 1)}{(\sigma^2\lambda + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma} \\ \text{mit } \gamma &= \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2\mu}. \end{aligned}$$

□

¹³Siehe [Oks00], Theorem 8.2.1.

Bemerkung 5.17: Auf die Lösung des Systems von Differentialgleichungen wird in dem obigen Beweis verzichtet. Im Anhang wird ein solches Systems von Differentialgleichungen mit $\mu = 1$ und $\lambda = 0$ gelöst, um den Preis eines Bonds zu berechnen.

Satz 5.18: *Angenommen, der short-rate-Prozess wird dargestellt durch die stochastische Differentialgleichung (5.8). Dann ist $\frac{r(T)}{L}$ unter Q nicht-zentral- χ^2 -verteilt mit $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$ Freiheitsgraden und Nicht-Zentralitätsparameter ζ , wobei*

$$\zeta = \frac{4\alpha r(0)}{\sigma^2(e^{\kappa T} - 1)} \quad \text{und} \quad L = \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-\kappa T}).$$

Beweis: Für den Beweis berechnet man die Laplacetransformierte von $\frac{r(T)}{L}$ und zeigt, dass diese der Laplace-Transformierten der nicht-zentralen χ^2 -Verteilung mit d Freiheitsgraden und Nicht-Zentralitätsparameter ζ entspricht.

Unter Verwendung von Satz 5.16 mit $\mu = 0$ und $t = 0$ erhält man die Laplace-Transformierte von $r(T)$ unter Q :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\lambda r(T)} \right] &= \exp(-\Phi(0, T, \lambda, 0) - \Psi(0, T, \lambda, 0)r_0) \\ &\stackrel{\gamma=\frac{1}{2}\kappa}{=} \left(\frac{2\kappa e^{\kappa T}}{(\sigma^2\lambda + 2\kappa)(e^{\kappa T} - 1) + 2\kappa} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left(-r_0 \frac{2\lambda\kappa}{(\sigma^2\lambda + 2\kappa)(e^{\kappa T} - 1) + 2\kappa} \right) \\ &= \left(\frac{\kappa}{\frac{\sigma^2}{2}\lambda(1 - e^{-\kappa T}) + \kappa} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left(-r_0 \frac{\lambda\kappa e^{-\kappa T}}{\frac{\sigma^2}{2}\lambda(1 - e^{-\kappa T}) + \kappa} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda L + 1} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left(-r(0) \frac{\lambda L \zeta}{2\lambda L + 1} \right). \end{aligned}$$

Dann folgt für die Laplace-Transformierte von $\frac{r(T)}{L}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\lambda \frac{r(T)}{L}} \right] &= \left(\frac{1}{2\lambda + 1} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left(-r_0 \frac{\lambda \zeta}{2\lambda + 1} \right) \\ &= \frac{1}{(2\lambda + 1)^{\frac{d}{2}}} \exp \left(-r_0 \frac{\lambda \zeta}{2\lambda + 1} \right) \end{aligned}$$

mit $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$.

Dies ist gerade die Laplace-Transformierte einer nicht-zentralen χ^2 -Verteilung mit d Freiheitsgraden und Nicht-Zentralitätsparameter ζ ¹⁴. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte¹⁵ ist $\frac{r(T)}{L}$ unter Q ebenso nicht-zentral χ^2 -verteilt. $\square$

¹⁴Siehe [LL96], Seite 131.

¹⁵Siehe [Als05], Satz 40.6.

5.2.2 Bondpreise im CIR-Modell

Auch zur Berechnung der Bondpreise lässt sich Satz 5.16 anwenden.

Satz 5.19: *Im CIR-Modell berechnet sich der Preis eines T -Bonds in t als*

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= e^{-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)} \\
 \text{mit} \quad \mathcal{A}(t, T) &= -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \log \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})(T-t)}}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma} \right) \\
 \text{und} \quad \mathcal{B}(t, T) &= \frac{2(e^{2\gamma(T-t)} - 1)}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma}, \\
 \text{wobei} \quad \gamma &= \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Beweis: Aufgrund der risikoneutralen Bewertungsformel (2.5) gilt für den Preis des T -Bonds zum Zeitpunkt t

$$B(t, T) = \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

An dieser Stelle lässt sich nun Satz 5.16 mit $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ anwenden und für den Bondpreis ergibt sich

$$B(t, T) = \exp(-\Phi(t, T, 0, 1) - \Psi(t, T, 0, 1)r(t))$$

mit $\mathcal{A}(t, T) := \Phi(t, T, 0, 1)$ und $\mathcal{B}(t, T) := \Psi(t, T, 0, 1)$. □

Bemerkung 5.20: Im Anhang wird am Beispiel des T -Bondpreises ausführlich dargestellt, wie man den Bondpreis durch das Lösen des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen im Rahmen von affinen Modellen erhält.

5.2.3 Optionsbewertung im CIR-Modell

Sei $0 < T < S \leq T^*$.

In diesem Abschnitt wird ein Call auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt T und Strike-Preis K betrachtet. Der folgende Satz¹⁶ liefert den Preis des Calls zum Zeitpunkt 0.

¹⁶Vergleiche [Cai04], Theorem 4.8(e).

Theorem 5.21: Für den Preis eines Calls in 0 auf einen S -Bond mit Ausübungszeitpunkt T und Strike-Preis K gilt, gegeben $r(0) = r_0$,

$$C(0, T, S, K) = B(0, S)\chi^2(d, \zeta_1, y_1) - KB(0, T)\chi^2(d, \zeta_2, y_2), \quad (5.11)$$

wobei $\chi^2(d, \zeta, y)$ die Verteilungsfunktion der nicht-zentralen χ^2 -Verteilung mit d Freiheitsgraden und Nicht-Zentralitätsparameter ζ bezeichnet.

Die noch benötigten Parameter lassen sich dabei folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} d &= \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}, & \gamma &= \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}, \\ \zeta_1 &= \frac{32\gamma^2 e^{2\gamma T} r}{\sigma^2 (e^{2\gamma T} - 1) (4\gamma + (2\gamma + \kappa + \sigma^2 \Psi(T, S)) (e^{2\gamma T} - 1))}, \\ \zeta_2 &= \frac{32\gamma^2 e^{2\gamma T} r}{\sigma^2 (e^{2\gamma T} - 1) (4\gamma + (2\gamma + \kappa) (e^{2\gamma T} - 1))}, \\ L_1 &= \frac{\sigma^2 (e^{2\gamma T} - 1)}{2 (4\gamma + (2\gamma + \kappa + \sigma^2 \Psi(T, S)) (e^{2\gamma T} - 1))}, \\ L_2 &= \frac{\sigma^2 (e^{2\gamma T} - 1)}{2 (4\gamma + (2\gamma + \kappa) (e^{2\gamma T} - 1))}, \\ r^* &= \frac{-\mathcal{A}(T, S) - \log(K)}{\mathcal{B}(T, S)}, & \Psi(T, S) &= \Psi(T, S, 0, 1) \\ y_1 &= \frac{r^*}{L_1} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{r^*}{L_2}. \end{aligned}$$

Beweis: Nach Satz 3.5 gilt für den Preis des Calls in 0

$$C(0, T, S, K) = B(0, S)Q^S(r(T) < r^*) - KB(0, T)Q^T(r(T) < r^*)$$

mit $r^* = \frac{-\log K - \mathcal{A}(T, S)}{\mathcal{B}(T, S)}$ und Q^T bzw. Q^S bezeichne das T - bzw. S -Forwardmartingalmaß. Gesucht ist nun die Verteilung von $r(T)$ unter diesen Forwardmartingalmaßen.

Verteilung unter dem T -Forwardmartingalmaß:

Das Ziel ist es die Laplace-Transformierte zu bestimmen, da diese die Verteilung von $r(T)$ unter dem T -Forwardmartingalmaß liefert. Aufgrund der Beziehung zwischen Forwardpreisen und arbitragefreien Preisen aus Satz 3.4 gilt für die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{Q^T} [e^{-\lambda r(T)}] \\ &= \frac{1}{B(0, T)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(u) du - \lambda r(T)} \right] \\ &\stackrel{\text{Satz 5.16}}{=} \exp(-(\Phi(0, T, \lambda, 1) - \Phi(0, T, 0, 1)) - (\Psi(0, T, \lambda, 1) - \Psi(0, T, 0, 1)) r_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma}{\underbrace{(\sigma^2\gamma + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma}_{(**)}} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\
 &\quad * \exp \left(- \frac{\lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{\underbrace{(\sigma^2\lambda + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma}_{(*)}} r_0 \right) \\
 &\quad * \exp \left(\frac{2(e^{2\gamma T} - 1)}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} r_0 \right).
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite muss noch stark umgeformt werden. Dazu werden nun die Terme betrachtet, die ein „ λ “ enthalten.

Definiere nun

$$L_2 = \frac{\sigma^2 (e^{2\gamma T} - 1)}{2(4\gamma + (2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))}.$$

Dann folgt für (**)

$$\begin{aligned}
 (**) &= \frac{\frac{2((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}}{\frac{2(\sigma^2\gamma(e^{2\gamma T} - 1) + (2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}} \\
 &= \frac{1}{2\lambda L_2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Für (*) folgt

$$(*) = \frac{\lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_2\lambda)} r_0,$$

da

$$((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma) \cdot 2L_2\lambda = \sigma^2\lambda(e^{2\gamma T} - 1).$$

Definiere weiter

$$g_2 = \frac{r_0}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)} (16\gamma^2 e^{2\gamma T} + 2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2)$$

$$\text{und} \quad h_2 = 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 - g_2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & g_2(1 + 2L_2\lambda) + h_2 \\
 &= 2g_2L_2\lambda + 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 \\
 &= \lambda \frac{16\gamma^2 e^{2\gamma T} + 2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} r_0 + 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 \\
 &= \lambda \frac{(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))(4\gamma + (2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} r_0 + 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 \\
 &= \lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))r_0 + 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0.
 \end{aligned}$$

Damit folgt weiter für (*)

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{\lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_2\lambda)} r_0 \\
 &= \frac{g_2(1 + 2L_2\lambda) + h_2}{((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_2\lambda)} r_0 \\
 &= \frac{2L_2\lambda(16\gamma^2 e^{2\gamma T} + 2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2) + 2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_2\lambda)} r_0 \\
 &= \frac{L_2\lambda \cdot 32r_0\gamma^2 e^{2\gamma T}}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_2\lambda)} \\
 &\quad + \frac{2L_2\lambda(2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2) + 2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_2\lambda)} r_0 \\
 &= \frac{L_2\lambda\zeta_2}{1 + 2L_2\lambda} + \frac{2(e^{2\gamma T} - 1)}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} r_0.
 \end{aligned}$$

Dann folgt für die Laplace-Transformierte

$$\mathbb{E}_{Q^T} [e^{-\lambda r(T)}] = \left(\frac{1}{2\lambda L_2 + 1} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left(-\frac{L_2\lambda\zeta_2}{1 + 2L_2\lambda} \right),$$

es gilt also

$$\mathbb{E}_{Q^T} \left[e^{-(\lambda L_2) \frac{r(T)}{L_2}} \right] = \left(\frac{1}{2\lambda L_2 + 1} \right)^{\frac{d}{2}} \exp \left(-\frac{L_2\lambda\zeta_2}{1 + 2L_2\lambda} \right)$$

mit $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$. Also ist $\frac{r(T)}{L_2}$ unter dem T -Forwardmartingalmaß nicht-zentral χ^2 -verteilt mit d Freiheitsgraden und Nicht-Zentralitätsparameter ζ_2 .

Des Weiteren folgt

$$Q^T(r(T) < r^*) = Q^T \left(\frac{r(T)}{L_2} < \frac{r^*}{L_2} \right) = \chi^2(d, \zeta_2, y_2)$$

mit $y_2 = \frac{r^*}{L_2}$.

Verteilung unter dem S -Forwardmartingalmaß:

Um die Verteilung unter Q^S zu berechnen, wird auch hier die Laplace-Transformierte bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^S} [e^{-\lambda r(T)}] &= \frac{1}{B(0, S)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^S r(u) du - \lambda r(T)} \right] \\ &\stackrel{\text{Satz 5.16, (4.10)}}{=} \underbrace{e^{\Phi(0, S, 0, 1) - \Phi(T, S, 0, 1) - \Phi(0, T, \lambda_1, 1)}}_{= (**)} * \underbrace{e^{-(\Psi(0, T, \lambda_1, 1) - \Psi(0, S, 0, 1)) r_0}}_{(*)} \end{aligned}$$

mit $\lambda_1 = \lambda + \Psi(T, S)$, $\Psi(T, S) := \Psi(T, S, 0, 1)$.

Zuerst werden die Terme betrachtet, die ein „ λ_1 “ enthalten.

Definiert man

$$L_1 = \frac{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}{2((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)},$$

so folgt

$$\begin{aligned} \exp(-\Phi(0, T, \lambda_1, 1)) &= \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})T}}{(\sigma^2\lambda_1 + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})T}}{(\sigma^2\lambda + \sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{1 + 2L_1\lambda} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})T}}{(\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Damit folgt nun für (*), indem man die Definition von $\Psi(T, S)$ einsetzt und ausnutzt, dass $2\sigma^2 = (2\gamma - \kappa)(2\gamma + \kappa)$:

$$\begin{aligned} &(*) \\ &= \left(\frac{4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})(S-T)}((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma S} - 1) + 4\gamma)4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})T}}{((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma(S-T)} - 1) + 4\gamma)4\gamma e^{(\gamma + \frac{\kappa}{2})S}((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &\quad * \left(\frac{1}{1 + 2L_1\lambda} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{4\gamma((2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma S} - 1) + 4\gamma)}{4\gamma((2\gamma + \kappa)((e^{2\gamma T} - 1)(e^{2\gamma(S-T)} - 1) + (e^{2\gamma T} - 1) + (e^{2\gamma(S-T)} - 1)) + 4\gamma)} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &\quad * \left(\frac{1}{1 + 2L_1\lambda} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma S} - 1) + 4\gamma}{(2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma S} - 1) + 4\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} * \left(\frac{1}{1 + 2L_1\lambda} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{1 + 2L_1\lambda} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Für $\Psi(0, T, \lambda_1, 1)r_0$ folgt außerdem

$$\begin{aligned}\Psi(0, T, \lambda_1, 1)r &= \frac{\lambda_1(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{(\sigma^2\lambda_1 + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma}r_0 \\ &= \frac{(\lambda + \Psi(T, S))(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{(\sigma^2(\lambda + \Psi(T, S)) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma}r_0 \\ &= \frac{(\lambda + \Psi(T, S))(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)}r_0,\end{aligned}$$

da $2L_1\lambda((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma) = \sigma^2\lambda(e^{2\gamma T} - 1)$. Des Weiteren definiert man an dieser Stelle

$$g_1 = \frac{(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))(4\gamma + (2\gamma + \kappa + \sigma^2\Psi(T, S))(e^{2\gamma T} - 1))}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}r_0$$

$$\text{und} \quad h_1 = 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 + \Psi(T, S)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))r_0 - g_1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}&g_1(1 + 2L_1\lambda) + h_1 \\ &= \frac{2\lambda(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))(4\gamma + (2\gamma + \kappa + \sigma^2\Psi(T, S))(e^{2\gamma T} - 1))r_0\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}{2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)} \\ &\quad + 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 + \Psi(T, S)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))r_0 \\ &= 2(e^{2\gamma T} - 1)r_0 + (\lambda + \Psi(T, S))(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))r_0.\end{aligned}$$

Schließlich wird

$$\zeta_1 = \frac{32r_0\gamma^2e^{2\gamma T}}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((2\gamma + \sigma^2\Psi(T, S) + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)}$$

gesetzt.

Damit ergibt sich für $\Psi(0, T, \lambda_1, 1)r_0$

$$\begin{aligned}\Psi(0, T, \lambda_1, 1)r_0 &= \frac{(\lambda + \Psi(T, S))(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)) + 2(e^{2\gamma T} - 1)}{((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)}r_0 \\ &= \frac{g_1(1 + 2L_1\lambda) + h_1}{((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)}r_0 \\ &= 2L_1\lambda r_0 \frac{(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))(4\gamma + (2\gamma + \kappa + \sigma^2\Psi(T, S))(e^{2\gamma T} - 1))}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + r_0 \frac{(2(e^{2\gamma T} - 1) + \Psi(T, S)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)))\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)} \\
 & = 2L_1\lambda r_0 \frac{16\gamma^2 + 16\gamma^2(e^{2\gamma T} - 1) + 2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)} \\
 & \quad + 2L_1\lambda r_0 \frac{\sigma^2\Psi(T, S)(e^{2\gamma T} - 1)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)} \\
 & \quad + r_0\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1) \frac{(2(e^{2\gamma T} - 1) + \Psi(T, S)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1)))}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)} \\
 & = \frac{32r_0\gamma^2 e^{2\gamma T} \lambda L_1}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)} \\
 & \quad + r_0 \frac{(2L_1\lambda + 1)(2\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)^2 + \sigma^2\Psi(T, S)(e^{2\gamma T} - 1))(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))}{\sigma^2(e^{2\gamma T} - 1)((\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma)(1 + 2L_1\lambda)} \\
 & = \frac{\lambda L_1 \zeta_1}{1 + 2\lambda L_1} + r_0 \underbrace{\frac{2(e^{2\gamma T} - 1) + \Psi(T, S)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))}{(\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma}}_{(***)}.
 \end{aligned}$$

Für den restlichen Term $(***)$ folgt nach Einsetzen von $\Psi(T, S)$ und Ausnutzen der Beziehung $2\sigma^2 = (2\gamma + \kappa)(2\gamma - \kappa)$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(e^{2\gamma T} - 1) + \Psi(T, S)(4\gamma + (2\gamma - \kappa)(e^{2\gamma T} - 1))}{(\sigma^2\Psi(T, S) + 2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma T} - 1) + 4\gamma} \\
 & = \frac{2(e^{2\gamma S} - 1)}{4\gamma + (2\gamma + \kappa)(e^{2\gamma S} - 1)} \\
 & = \Psi(0, S, 0, 1).
 \end{aligned}$$

Zusammen folgt nun für die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{Q^S} \left[e^{-(\lambda L_1) \frac{r(T)}{L_1}} \right] & = \mathbb{E}_{Q^S} \left[e^{-\lambda r(T)} \right] \\
 & = \left(\frac{1}{1 + 2\lambda L_1} \right)^{\frac{d}{2}} \cdot \exp \left(-\frac{\lambda L_1 \zeta_1}{1 + 2\lambda L_1} \right).
 \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Laplace-Transformierte einer nicht-zentralen χ^2 -verteilten Zufallsgröße mit $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$ Freiheitsgraden und Nicht-Zentralitätsparameter ζ_1 . Damit ist $\frac{r(T)}{L_1}$ nicht-zentral χ^2 -verteilt. Ferner gilt

$$Q^S(r(T) < r^*) = Q^S \left(\frac{r(T)}{L_1} < \frac{r^*}{L_1} \right) = \chi^2(d, \zeta_1, y_1)$$

mit $y_1 = \frac{r^*}{L_1}$. □

5.2.4 Positivität der short-rate

Aus der Mean-Reversion-Eigenschaft wird bereits deutlich, dass die short-rate positiv bleibt. Konvergiert $r(t)$ gegen 0, so konvergiert auch der Diffusionsterm in (5.8) gegen 0. Die positive Drift zieht den Prozess wieder noch oben.

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen die short-rate im CIR-Modell den Wert 0 überhaupt erreicht.

Dazu wird zunächst allgemein die Explosion eines Diffusionsprozesses untersucht.

Test auf Explosion eines Diffusionsprozesses

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum. $(W(t))_{t \geq 0}$ sei eine Brownsche Bewegung, welche die Filtration erzeugt.

Sei $I = (l, r)$ der Zustandsraum eines Diffusionsprozesses $X = (X(t))_{t \geq 0}$ mit Erzeuger $A = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2 + \mu(x)\partial_x$. Dann löst X die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad X(0) = x,$$

für $0 \leq t \leq S$ mit

$$S = \inf \{t \geq 0 : X(t) \notin I\}.$$

S ist die sog. Explosionszeit des Diffusionsprozesses.

Das Ziel ist es zu zeigen, wann die Explosionszeit S endlich ist.

Ein wichtiges Hilfsmittel, das man hierfür verwendet, ist die Skalenfunktion:

Definition 5.22: (Vergleiche [KS97], Seite 339.)

Unter der Annahme, dass

- $\sigma^2(x) > 0$ für alle $x \in I$ und
- für jedes $x \in I$ ein $\epsilon > 0$ existiert, derart dass $\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{|\mu(y)|}{\sigma^2(y)} dy < \infty$,

ist die Skalenfunktion für $c \in I$ und $x \in I$ definiert als

$$s(x) = \int_c^x \exp \left(-2 \int_c^y \frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)} du \right) dy. \quad (5.12)$$

Für die ersten beiden Ableitungen der Skalenfunktion gilt

$$s'(x) = \exp\left(-2 \int_c^x \frac{\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\right)$$

und

$$s''(x) = -2 \frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} s'(x).$$

Es gilt $s'(x) > 0$ für alle $x \in I$, die Skalenfunktion ist also eine streng monoton wachsende Funktion.

Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik von $s(X(t))$:

$$\begin{aligned} ds(X(t)) &\stackrel{\text{Itô}}{=} s'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}s''(X(t))d\langle X \rangle(t) \\ &= \mu(X(t))s'(X(t))dt + \sigma(X(t))s'(X(t))dW(t) + \frac{1}{2}s''(X(t))\sigma^2(X(t))dt \\ &= \sigma(X(t))s'(X(t))dW(t). \end{aligned}$$

Damit ist $(s(X(t)))_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal. Ebenso erhält man daraus, dass $s(X(t \wedge S))_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal ist mit

$$s(X(t \wedge S)) = s(x) + \int_0^{t \wedge S} \sigma(X(u))s'(X(u))dW(u).$$

Zu $a < x < b$, $a, b \in I$ werden die Stoppzeiten

$$\begin{aligned} \tau_a &= \inf \{0 \leq t < S : X(t) = a\} \\ \text{und} \quad \tau_b &= \inf \{0 \leq t < S : X(t) = b\} \end{aligned}$$

sowie $\tau_{a,b} := \tau_a \wedge \tau_b$ definiert.

Mit Hilfe der Skalenfunktion kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\tau_a < \tau_b\}$ berechnet werden.

Lemma 5.23: Für $a < x < b$, $a, b \in I$, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) &= \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)} \\ \text{und} \quad \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) &= \frac{s(a) - s(x)}{s(a) - s(b)}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Beweis: Da bereits mit der Itô-Formel gezeigt wurde, dass $s(X(t \wedge S))_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal ist, folgt mit dieser Rechnung auch, dass $(s(X(\tau_a, b \wedge t)))_{t \geq 0}$ ein beschränktes lokales Martingal und somit ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Das Optional-Sampling-Theorem¹⁷ liefert

$$\mathbb{E}[s(X(\tau_{a,b}))] = s(x).$$

Andererseits gilt für diesen Erwartungswert auch

$$\mathbb{E}[s(X(\tau_{a,b}))] = s(a)\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + s(b)\mathbb{P}(\tau_b < \tau_a)$$

und $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) = 1 - \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b)$.

Zusammen folgt nun

$$\begin{aligned} s(x) &= s(a)\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + s(b)\mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) \\ &= s(a)\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + s(b)(1 - \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b)) \\ &= (s(a) - s(b))\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + s(b). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}$$

und mit analoger Rechnung folgt

$$\mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) = \frac{s(a) - s(x)}{s(a) - s(b)}.$$

□

Aufgrund der Skalenfunktion kann man folgendes hinreichendes Kriterium für nicht-explodierende Diffusionsprozesse formulieren:

Satz 5.24: (Vergleiche [KS97], Proposition 5.5.22 a.)

Gilt $s(l+) = -\infty$ und $s(r-) = \infty$, so ist $\mathbb{P}(S = \infty) = 1$.

Unter diesen Voraussetzungen verbleibt ein Pfad des Diffusionsprozesses also unendlich lange im Intervall $I = (l, r)$.

¹⁷Siehe [Pau09], Finanzmathematik 2.

Beweis: Für $l < a < x < b < r$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t < S} X(t) \geq b\right) &\geq \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 5.23}}{=} \frac{s(a) - s(x)}{s(a) - s(b)} = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)} \\
 &= \frac{\frac{s(x)}{s(a)} - 1}{\frac{s(b)}{s(a)} - 1} \xrightarrow{a \searrow l} 1.
 \end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < S} X(t) \geq b) = 1$ für alle $b > x$.

Damit folgt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t < S} X(t) = r\right) = \lim_{b \nearrow r} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t < S} X(t) \geq b\right) = 1.$$

Ebenso gilt nun

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq t < S} X(t) \leq a\right) &\geq \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 5.23}}{=} \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)} \\
 &= \frac{1 - \frac{s(x)}{s(b)}}{1 - \frac{s(a)}{s(b)}} \xrightarrow{b \nearrow r} 1
 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq t < S} X(t) = l\right) = \lim_{a \searrow l} \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq t < S} X(t) \leq a\right) = 1.$$

Insgesamt ergibt sich $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < S} X(t) = r, \inf_{0 \leq t < S} X(t) = l) = 1$.

Für das Ereignis $\{S < \infty\}$ gilt

$$\{S < \infty\} \subseteq \left\{\sup_{0 \leq t < S} X(t) = r\right\}^c \cup \left\{\inf_{0 \leq t < S} X(t) = l\right\}^c.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{P}(S < \infty) \leq \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{0 \leq t < S} X(t) = r\right\}^c\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\inf_{0 \leq t < S} X(t) = l\right\}^c\right) = 0.$$

Somit folgt $\mathbb{P}(S = \infty) = 1$. □

Lässt sich die Skalenfunktion in einem der beiden Randpunkte fortsetzen, so ist eine andere Argumentation vorzunehmen.

Betrachte dazu für $x \in I$ und $c \in I$ die Funktion¹⁸

$$v(x) = \int_c^x s'(y) \int_c^y \frac{2}{s'(z)\sigma^2(z)} dz dy. \quad (5.14)$$

Die ersten beiden Ableitungen können berechnet werden als

$$\begin{aligned} v'(x) &= s'(x) \int_c^x \frac{2}{s'(z)\sigma^2(z)} dz \\ \text{und} \quad v''(x) &= s''(x) \int_c^x \frac{2}{s'(z)\sigma^2(z)} dz + \frac{2}{\sigma^2(x)}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + \mu(x)v'(x) = 1.$$

Mit der Itô-Formel folgt für $v(X(t))$

$$\begin{aligned} dv(X(t)) &= v'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}v''(X(t))d\langle X \rangle(t) \\ &= (\mu(X(t))v'(X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t))v''(X(t)))dt + \sigma(X(t))v'(X(t))dW(t) \\ &= 1dt + \sigma(X(t))v'(X(t))dW(t). \end{aligned}$$

Also ist $M(t) := (v(X(t)) - t)_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal. Außerdem ist dann auch $(v(X(t \wedge S)) - (t \wedge S))_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal und es gilt

$$v(X(t \wedge S)) = v(x) + (t \wedge S) + \int_0^{t \wedge S} \sigma(X(u))v'(X(u))dW(u).$$

Des Weiteren ist $(M(t \wedge \tau_{a,b} \wedge n))_{t \geq 0}$ ein beschränktes lokales Martingal und somit auch ein gleichgradig integrierbares Martingal. Dann folgt mit dem Optional Sampling Theorem

$$\mathbb{E}[M(\tau_{a,b} \wedge n)] = \mathbb{E}[M(0)] = v(x).$$

Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M(\tau_{a,b} \wedge n)] &= \mathbb{E}[v(X(\tau_{a,b} \wedge n)) - \tau_{a,b} \wedge n] \\ &= \mathbb{E}[v(X(\tau_{a,b} \wedge n))] - \mathbb{E}[\tau_{a,b} \wedge n]. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}[\tau_{a,b} \wedge n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\tau_{a,b}].$$

¹⁸Vergleiche [KS97], Seite 347.

Weiter ist

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} [v(X(\tau_{a,b} \wedge n))] \\
 &= \mathbb{E} \left[v(X(n)) \mathbf{1}_{\{\tau_{a,b} > n\}} \right] + \mathbb{E} \left[v(X(\tau_{a,b})) \mathbf{1}_{\{\tau_{a,b} \leq n\}} \right] \\
 &= \underbrace{\mathbb{E} \left[v(X(n)) \mathbf{1}_{\{\tau_{a,b} > n\}} \right]}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + v(a) \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b, \tau_{a,b} \leq n) + v(b) \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a, \tau_{a,b} \leq n)
 \end{aligned}$$

da $\mathbb{P}(\tau_{a,b} < \infty) = 1$ und v auf $[a, b]$ beschränkt ist.

Zusammen folgt

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \mathbb{E} [M(\tau_{a,b} \wedge n)] = \mathbb{E} [v(X(\tau_{a,b} \wedge n))] - \mathbb{E} [\tau_{a,b} \wedge n] \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} v(a) \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + v(b) \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) - \mathbb{E} [\tau_{a,b}],
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\tau_{a,b}] &= v(a) \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + v(b) \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) - v(x) \\
 &= (v(a) - v(x)) \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + (v(b) - v(x)) \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a).
 \end{aligned}$$

Damit wurde nun folgendes Lemma gezeigt:

Lemma 5.25: Für $a < x < b$ gilt

$$\mathbb{E} [\tau_{a,b}] = (v(a) - v(x)) \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + (v(b) - v(x)) \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a).$$

Dieses Lemma wird nun zur Untersuchung der Explosionszeit benutzt.

Satz 5.26: Ist $s(l+) > -\infty$ und $s(r-) = \infty$, so gilt

$$\mathbb{P}(\lim_{t \nearrow S} X(t) = l) = \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < S} X(t) < r) = 1.$$

Mit Wahrscheinlichkeit 1 strebt der Diffusionsprozess gegen den linken Randpunkt, jedoch kann anhand der Skalenfunktion nicht entschieden werden, ob dies in endlicher Zeit passiert.

Beweis: Es gilt für alle $a < x < b$

$$\mathbb{P}(X(\tau_{a,b}) = b) = \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) \stackrel{\text{Lemma 5.23}}{=} \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_b < S) &= \mathbb{P}(X(t) = b \text{ für ein } t < S) \\ &= \lim_{a \searrow l} \mathbb{P}(\tau_b < \tau_a) \\ &= \frac{s(x) - s(l+)}{s(b) - s(l+)}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t < S} X(t) = r\right) = \lim_{b \nearrow r} \mathbb{P}(X(t) = b \text{ für ein } t < S) = \lim_{b \nearrow r} \frac{s(x) - s(l+)}{s(b) - s(l+)} = 0.$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq t < S} X(t) = l\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t < S} X(t) < r\right) = 1.$$

Nun ist noch zu zeigen, dass $\lim_{t \nearrow S} X(t)$ $\mathbb{P}$ -f.s. existiert.

Da $(s(X(t \wedge S)) - s(l+))_{t \geq 0}$ ein nichtnegatives lokales Martingal und damit ein nichtnegatives Supermartingal ist, das $\mathbb{P}$ -f.s. konvergiert, konvergiert $s(X(t \wedge S))$ für $t \rightarrow \infty$. Damit konvergiert auch $X(t \wedge S)$ für $t \rightarrow \infty$, da die Skalenfunktion s eine stetige, streng monoton wachsende Funktion ist. $\square$

Der folgende Satz¹⁹ liefert nun ein Kriterium, wann der Diffusionsprozess in endlicher Zeit gegen den linken Randpunkt $\mathbb{P}$ -f.s. konvergiert.

Satz 5.27: *Gilt $v(l+) < \infty$ und $s(r-) = \infty$, so ist $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$.*

Beweis: Aus der Bedingung $v(l+) < \infty$ folgt $s(l+) > -\infty$.

Mit Satz 5.26 folgt also $X(t) \rightarrow l$ für $t \nearrow S$ $\mathbb{P}$ -f.s. Außerdem gilt $\tau_a \wedge \tau_b \nearrow S \wedge \tau_b$ und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S \wedge \tau_b] &= \lim_{a \searrow l} \mathbb{E}[\tau_a \wedge \tau_b] = \lim_{a \searrow l} \mathbb{E}[\tau_{a,b}] \\ &\stackrel{\text{Lemma 5.25}}{=} \lim_{a \searrow l} [(v(a) - v(x))\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + (v(b) - v(x))\mathbb{P}(\tau_b < \tau_a)] \end{aligned}$$

¹⁹Siehe [KS97], Proposition 5.5.32 (iii).

$$\begin{aligned}
 &= (v(l+) - v(x))\mathbb{P}(S < \tau_b) + (v(b) - v(x))\mathbb{P}(\tau_b < S) \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}(S = \tau_b = \infty) = 0$.

Außerdem gilt $\bigcup_{b>x} \{\tau_b = S, S < \infty\} = \{S < \infty\}$.

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S < \infty) &= \lim_{b \nearrow r} \mathbb{P}(\tau_b = S, S < \infty) \\
 &= \lim_{b \nearrow r} \mathbb{P}(\tau_b = S, S < \infty) + \mathbb{P}(S = \tau_b = \infty) \\
 &= \lim_{b \nearrow r} \mathbb{P}(\tau_b = S) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Test auf Explosion im CIR-Modell

Um den Abschnitt über das CIR-Modell abzuschließen, wird nun gezeigt, dass die short-rate stets strikt positiv bleibt, wenn zusätzlich an die Koeffizienten gefordert wird, dass die Bedingung $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ gilt.

Satz 5.28: (Vergleiche [Cai04], Theorem 4.8.(d))

Sei $r(0) = r > 0$ gegeben und definiere die Explosionszeit $S = \inf \{t \geq 0 : r(t) \leq 0\}$, wobei $\inf \emptyset = \infty$. Dann gilt:

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad Q(S = \infty) = 1$$

und

$$2\kappa\theta < \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad Q(S < \infty) = 1.$$

Für den Beweis werden die im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Kriterien für die Explosion eines Diffusionsprozessen auf das CIR-Modell angewendet.

Beweis: Der Zustandsraum im CIR-Modell ist gerade $I = (0, \infty)$. Die Skalenfunktion im CIR-Modell besitzt die Gestalt²⁰

$$s(r) = \int_1^r \exp\left(\frac{2\kappa\nu}{\sigma^2}\right) \nu^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} d\nu.$$

Betrachtet wird nun der erste Fall: $2\kappa\theta \geq \sigma^2$. Sei $0 < \epsilon < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -s(\epsilon) &= \int_\epsilon^1 e^{\frac{2\kappa\nu}{\sigma^2}} \nu^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} d\nu \stackrel{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \geq 1}{\geq} \int_\epsilon^1 e^{\frac{2\kappa\nu}{\sigma^2}} \frac{1}{\nu} d\nu \geq \int_\epsilon^1 \frac{1}{\nu} d\nu \\ &= \log(1) - \log(\epsilon) = -\log(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty. \end{aligned}$$

Es gilt also $s(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\infty$.

Da $e^{\frac{2\kappa\nu}{\sigma^2}} \nu^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \infty$, folgt $s(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.

Mit Satz 5.24 folgt somit

$$Q(S = \infty) = 1.$$

Nun ist noch der zweite Fall zu betrachten: $2\kappa\theta < \sigma^2$.

Wie in der allgemeinen Betrachtung der Explosion von Diffusionsprozessen wird nun für $x \in I$ die folgende Funktion definiert:

$$v(x) = \int_1^x s'(y) \int_1^y \frac{2}{s'(z)\sigma^2 z} dz dy.$$

Sei $0 < \epsilon < 1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} v(\epsilon) &= \int_1^\epsilon s'(y) \int_1^y \frac{2}{s'(z)\sigma^2 z} dz dy \\ &= \int_\epsilon^1 s'(y) \int_y^1 \frac{2}{s'(z)\sigma^2 z} dz dy \\ &= \int_\epsilon^1 \exp\left(\frac{2\kappa y}{\sigma^2}\right) y^{-\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \frac{2}{\sigma^2} \int_y^1 \exp\left(-\frac{2\kappa z}{\sigma^2}\right) z^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}-1} dz dy \\ &\stackrel{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} < 1}{\leq} \int_\epsilon^1 \exp\left(\frac{2\kappa y}{\sigma^2}\right) y^{-\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \frac{2}{\sigma^2} \int_y^1 \exp\left(-\frac{2\kappa z}{\sigma^2}\right) z^{-1} dz dy \end{aligned}$$

²⁰Vergleiche [Cai04], Beweis von Theorem 4.8 d) oder [Fil09], Aufgabe 10.12.

$$\begin{aligned}
&< \int_{\epsilon}^1 \exp\left(\frac{2\kappa y}{\sigma^2}\right) y^{-\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \frac{2}{\sigma^2} \int_y^1 z^{-1} dz dy \\
&= \int_{\epsilon}^1 \exp\left(\frac{2\kappa y}{\sigma^2}\right) y^{-\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \frac{2}{\sigma^2} [\log(z)]_y^1 dy \\
&= -\frac{2}{\sigma^2} \int_{\epsilon}^1 \exp\left(\frac{2\kappa y}{\sigma^2}\right) y^{-\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \log(y) dy \\
&\stackrel{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} < 1}{\leq} -\frac{2}{\sigma^2} \int_{\epsilon}^1 \exp\left(\frac{2\kappa y}{\sigma^2}\right) \log(y) dy \\
&< -\frac{2}{\sigma^2} \int_{\epsilon}^1 \log(y) dy \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.
\end{aligned}$$

Da bereits gezeigt wurde, dass $s(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, folgt mit Satz 5.27, dass

$$\mathbb{Q}(S < \infty) = 1.$$

□

5.3 Das Hull-White-Modell

In diesem Abschnitt wird als drittes short-rate Modell das Hull-White-Modell vorgestellt. Für Literaturquellen sei dabei auf [HW90], [BS04], [Sch04] und [Bjö04] verwiesen. Der Nachteil der bisher untersuchten short-rate Modelle ist, dass sie sich nicht an eine exogen gegebene Zinsstruktur anpassen lassen, also nicht zinsstrukturkonform sind. Wäre z.B. das Vasiček-Modell zinsstrukturkonform, so könnte man die Forwardrates $f(0, t)$ an eine beliebige gegebene Zinsstruktur $f^{ex}(0, t)$ anpassen, das heißt, für alle $0 \leq t \leq T^*$ würde gelten: $f^{ex}(0, t) = f(0, t)$. Dies sind allerdings unendlich viele Bedingungen, die erfüllt sein müssen. Das Vasiček-Modell wird durch die stochastische Differentialgleichung $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$ definiert, man hat also nur drei freie Parameter, κ , θ und σ , die zudem konstant sind.

Das Hull-White-Modell soll nun zinsstrukturkonform modelliert werden. Dazu werden ein oder mehrere Parameter zeitabhängig gewählt, so dass man das Modell an eine beliebige Zinsstruktur anpassen kann. Hull und White haben zwei short-rate Modelle entwickelt, das Extended Vasiček-Modell und das Extended Cox-Ingersoll-Ross-Modell. Beide Modelle sind konsistent mit der anfänglichen Zinsstruktur. Im Extended Vasiček-Modell können die Parameter analytisch bestimmt werden, im Extended CIR-Modell numerisch.

Im Vasiček- und im CIR-Modell folgt die short-rate einem Prozess der Form

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r^\beta(t)d\tilde{W}(t).$$

Der Prozess besitzt die Mean-Reversion-Eigenschaft, κ , θ und σ sind positive Konstanten. $\beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$ und $\tilde{W}(t)$ ist eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß Q . Diese Modelle werden nun erweitert, indem das Mean-Reversion-Level θ , die Mean-Reversion-Geschwindigkeit κ und der Volatilitätsfaktor σ zeitabhängig gewählt werden.

Man erhält also

$$dr(t) = \kappa(t)(\theta(t) - r(t))dt + \sigma(t)r^\beta(t)d\tilde{W}(t)$$

mit einer Konstanten $\beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$, einer eindimensionalen Brownschen Bewegung $\tilde{W}(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q und deterministischen Funktionen

$$\kappa, \theta, \sigma : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Für $\beta = 0$ erhält man das Extended Vasiček-Modell, für $\beta = \frac{1}{2}$ das Extended CIR-Modell.

In dieser Arbeit wird nur das Extended Vasiček-Modell aufgrund seiner analytischen Eigenschaften näher untersucht. Dabei wird von einem vereinfachten Modell ausgegangen, in dem nur die Funktion $\theta(t)$ zeitabhängig gewählt wird.

5.3.1 Einführung in das Extended Vasiček-Modell

Im Extended Vasiček-Modell wird der Prozess der short-rate unter dem risikoneutralen Maß Q durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = \kappa(\theta(t) - r(t))dt + \sigma d\tilde{W}(t), \quad r(0) = r_0 \tag{5.15}$$

gegeben. Dabei ist das Mean-Reversion-Level $\theta : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion der Zeit, $r_0, \kappa, \sigma > 0$ und $\tilde{W}(t)$ stellt eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß Q dar²¹.

Um das Verhalten der short-rate zu untersuchen, beginnt man damit eine geschlossene Formel für die short-rate aufzustellen. Außerdem bestimmt man den Erwartungswert und die Varianz. Da die Rechnungen so wie im Vasiček-Modell ablaufen, werden an dieser Stelle nur die Resultate aufgelistet.

²¹Vergleiche [BS04], Seite 173.

- Indem man zunächst die stochastische Differentialgleichung für $e^{\kappa t}r(t)$ bestimmt und löst, erhält man als geschlossene Formel für die short-rate:

$$r(t) = e^{-\kappa t}r(0) + \int_0^t \kappa e^{-\kappa(t-u)}\theta(u)du + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-u)}d\tilde{W}(u). \quad (5.16)$$

- Für den Erwartungswert gilt

$$\mathbb{E}_Q[r(t)] = e^{-\kappa t}r(0) + \int_0^t \kappa e^{-\kappa(t-u)}\theta(u)du.$$

- Die Varianz der short-rate ist

$$\text{Var}_Q[r(t)] = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}$$

und für den Grenzwert gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_Q[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

Damit ist die Varianz identisch mit der Varianz der short-rate im Vasiček-Modell.

Aus Formel (5.16) folgt, dass die short-rate eine Normalverteilung besitzt. Zur Begründung werde das stochastische Integral $\int_0^t e^{-\kappa(t-u)}d\tilde{W}(u)$ betrachtet. Da $e^{-\kappa(t-u)}$ eine deterministische Funktion darstellt, ist das Integral nach Satz 5.3 normalverteilt. Da die übrigen Terme aus (5.16) deterministisch sind, erhält man für die Verteilung von $r(t)$:

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(e^{-\kappa t}r(0) + \int_0^t \kappa e^{-\kappa(t-u)}\theta(u)du, \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}\right).$$

Damit wird allerdings auch ein Nachteil dieses Modells deutlich: Da auch hier die short-rate normalverteilt ist, kann diese mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ werden.

5.3.2 Bestimmung der Zinsstruktur

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, eine geschlossene Formel für die Bondpreise aufzustellen. Aufgrund der affinen Gestalt der Drift und der Volatilität in der Dynamik der short-rate ist das Extended Vasiček-Modell ein affines short-rate Modell. Man erhält den Bondpreis in der Gestalt $B(t, T) = \exp(-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t))$ durch das Lösen des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (I) \quad \partial_t \mathcal{A}(t, T) &= -\kappa \theta(t) \mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}^2(t, T), & \mathcal{A}(T, T) &= 0 \\ (II) \quad \partial_t \mathcal{B}(t, T) &= -\kappa \mathcal{B}(t, T) - 1, & \mathcal{B}(T, T) &= 0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (II) ist identisch mit der entsprechenden Differentialgleichung für das Vasiček-Modell und besitzt die Lösung

$$\mathcal{B}(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}.$$

Die Lösung der Gleichung (I) erhält man durch Integration der Funktion $\mathcal{B}(t, T)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, T) &= - \int_t^T -\kappa \theta(u) + \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}(t, T)^2 du \\ &= \int_t^T (1 - e^{-\kappa(T-u)}) \theta(u) du - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left((T-t) - \left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \left(\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right)^2 \\ &= \kappa \int_t^T \mathcal{B}(u, T) \theta(u) du - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} ((T-t) - \mathcal{B}(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}(t, T)^2. \end{aligned}$$

Für den Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t lässt sich nun der folgende Satz formulieren:

Satz 5.29: *Die short-rate folge dem Prozess (5.15). Dann ist der Preis eines in T fälligen Zero-Coupon-Bonds zum Zeitpunkt t gegeben durch*

$$B(t, T) = e^{-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)} \quad (5.17)$$

mit

$$\mathcal{B}(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \quad (5.18)$$

und

$$\mathcal{A}(t, T) = \kappa \int_t^T \mathcal{B}(u, T) \theta(u) du - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} ((T-t) - \mathcal{B}(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}(t, T)^2. \quad (5.19)$$

Es gilt die gleiche Formel zur Bewertung von Optionen auf Bonds wie im Vasiček-Modell²². Damit lassen sich problemlos Zinsderivate wie Caps, Floors oder Swaptions bewerten.

5.3.3 Kalibrierung des Extended Vasiček-Modells

In diesem Abschnitt sollen die in Satz 5.29 theoretisch berechneten Bondpreise an am Markt beobachtbare Preise angepasst werden. Aufgrund der Beziehung zwischen dem Bondpreis und der Forwardrate, die in Satz 1.11 dargestellt wurde, verwendet man für die Kalibrierung die Forwardrates. Unter Verwendung der affinen Gestalt des Bondpreises werden diese in einem ersten Schritt bestimmt.

Satz 5.30: *Die short-rate sei gegeben durch die Dynamik (5.15). Dann ist die Forwardrate mit Fälligkeit T in t gegeben durch*

$$f(t, T) = e^{-\kappa(T-t)}r(t) + \int_t^T \kappa e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du - (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (5.20)$$

Beweis: Aus der Definition der Forwardrate folgt

$$\begin{aligned} f(t, T) &\stackrel{(1.5)}{=} -\frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T} \\ &\stackrel{\text{affin}}{=} -\frac{\partial \log(e^{-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)})}{\partial T} \\ &= \frac{\partial \mathcal{A}(t, T)}{\partial T} + \frac{\partial \mathcal{B}(t, T)}{\partial T}r(t) \\ &\stackrel{(5.18), (5.19)}{=} e^{-\kappa(T-t)}r(t) + \int_t^T \kappa e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du - (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \end{aligned}$$

□

Die modellendogene Zinsstruktur zur Zeit $t = 0$ ist bereits durch die Forwardrate

$$f(0, T) = e^{-\kappa T}r(0) + \int_0^T \kappa e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du - (1 - e^{-\kappa T})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$$

gegeben. Die theoretische Forwardratekurve $\{f(0, T) \mid 0 < T \leq T^*\}$ ist nun an die beobachtete Forwardratekurve $\{f^{ex}(0, T) \mid 0 < T \leq T^*\}$ anzupassen, wobei $f^{ex}(0, T)$ mit

²²Siehe [Bjö04], Proposition 22.9.

Formel (1.5) aus den am Markt beobachteten Bondpreisen $B^{ex}(0, T)$ berechnet wird. Gesucht ist nun eine Funktion $\theta(T)$, die die Gleichung $f(0, T) = f^{ex}(0, T)$ für alle $T > 0$ löst. Es gilt²³

Satz 5.31: *Die short-rate sei gegeben durch die Dynamik (5.15). Dann kann das Modell durch die Wahl von*

$$\theta(T) = f^{ex}(0, T) + (1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f^{ex}(0, T)}{\partial T} \quad (5.21)$$

an die exogen vorgegebene Forwardrate-Kurve $\{f^{ex}(0, T) \mid 0 < T \leq T^\}$ angepasst werden.*

Beweis: Für die Bedingung $f(0, T) = f^{ex}(0, T)$ ergibt sich unter Verwendung von (5.20)

$$\begin{aligned} e^{-\kappa T} r(0) + \int_0^T \kappa e^{-\kappa(T-u)} \theta(u) du - (1 - e^{-\kappa T})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} &= f^{ex}(0, T), \\ \text{also} \quad r(0) + \int_0^T \kappa e^{\kappa u} \theta(u) du - (e^{\kappa T} - 2 + e^{-\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} &= e^{\kappa T} f^{ex}(0, T). \end{aligned}$$

Differenzieren nach T liefert

$$\kappa e^{\kappa T} \theta(T) - (\kappa e^{\kappa T} - \kappa e^{-\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} = \kappa e^{\kappa T} f^{ex}(0, T) + e^{\kappa T} \frac{\partial f^{ex}(0, T)}{\partial T}$$

und es folgt

$$\theta(T) = f^{ex}(0, T) + (1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f^{ex}(0, T)}{\partial T}.$$

□

Die nun erhaltene Funktion $\theta(t)$ kann man nun in die short-rate-Dynamik (5.15) einsetzen. Man erhält

$$dr(t) = \kappa \left(f^{ex}(0, t) + (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f^{ex}(0, t)}{\partial t} \right) - r(t) dt + \sigma d\tilde{W}(t). \quad (5.22)$$

Mit der angepassten Funktion $\theta(t)$ und dem vorliegenden short-rate Modell lassen sich die Forwardrates $f(t, T)$ im Zeitpunkt $t \geq 0$ berechnen.

²³Vergleiche [BS04], Satz 6.16.

Korollar 5.32: Für die Forwardrates gilt

$$f(t, T) = f^{ex}(0, T) - e^{-\kappa(T-t)} f^{ex}(0, t) + e^{-\kappa(T-t)} r(t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) (e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa(T+t)}). \quad (5.23)$$

Beweis: Mit (5.20), (5.21) und partieller Integration folgt für die Forwardrates

$$\begin{aligned} & f(t, T) \\ \stackrel{(5.20)}{=} & e^{-\kappa(T-t)} r(t) + \int_t^T \kappa e^{-\kappa(T-u)} \theta(u) du - (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \\ \stackrel{(5.21)}{=} & e^{-\kappa(T-t)} r(t) + \int_t^T \kappa e^{-\kappa(T-u)} \left[f^{ex}(0, u) + (1 - e^{-2\kappa u}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f^{ex}(0, u)}{\partial u} \right] du \\ & - (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \\ \stackrel{\text{part. Int.}}{=} & e^{-\kappa(T-t)} r(t) + [e^{-\kappa(T-u)} f^{ex}(0, u)]_t^T + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} [e^{-\kappa(T-u)} + e^{-\kappa(T+u)}]_t^T \\ & - (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \\ = & e^{-\kappa(T-t)} r(t) + f^{ex}(0, T) - e^{-\kappa(T-t)} f^{ex}(0, t) \\ & + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) (e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\kappa(T+t)}). \end{aligned}$$

□

Sind die Konstanten κ und σ aus der short-rate-Dynamik fest gewählt und wird die Funktion $\theta(T)$ wie in Satz 5.31 modelliert, so ist das äquivalente Martingalmaß spezifiziert. Ausgehend davon lassen sich die theoretischen Bondpreise unter diesem risikoneutralen Maß berechnen.

Satz 5.33: (In Anlehnung an [Bjö04], Proposition 22.8.)

Gegeben sei ein Extended Vasicek-Modell mit short-rate-Dynamik (5.15) mit fest gewählten Konstanten $\kappa, \sigma > 0$ sowie der Funktion $\theta(T)$, modelliert gemäß (5.21). Dann gilt für die Bondpreise

$$B(t, T) = \frac{B^{ex}(0, T)}{B^{ex}(0, t)} \exp \left(\mathcal{B}(t, T) f^{ex}(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}^2(t, T) (1 - e^{-2\kappa t}) - \mathcal{B}(t, T) r(t) \right). \quad (5.24)$$

Beweis: Die affine Gestalt der Bondpreise spielt in dem Beweis eine zentrale Rolle. Der Bondpreis besitzt die Gestalt $B(t, T) = e^{-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)}$. Für die Funktion $\mathcal{A}(t, T)$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{A}(t, T) \\
 & \stackrel{(5.19)}{=} \kappa \int_t^T \mathcal{B}(u, T) \theta(u) du - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} ((T - t) - \mathcal{B}(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}(t, T)^2 \\
 & \stackrel{(5.21)}{=} \kappa \int_t^T \mathcal{B}(u, T) \left[f^{ex}(0, u) + (1 - e^{-2\kappa u}) \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f^{ex}(0, u)}{\partial u} \right] du \\
 & \quad - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} ((T - t) - \mathcal{B}(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}(t, T)^2 \\
 & = \kappa \int_t^T \mathcal{B}(u, T) f^{ex}(0, u) du + \underbrace{\kappa \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \int_t^T \mathcal{B}(u, T) (1 - e^{-2\kappa u}) du}_{(*)} \\
 & \quad + \kappa \int_t^T \mathcal{B}(u, T) \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f^{ex}(0, u)}{\partial u} du - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} ((T - t) - \mathcal{B}(t, T)) + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}(t, T)^2 \\
 & \stackrel{\mathcal{B}(T, T)=0}{=} \int_0^T f^{ex}(0, u) du - \int_0^t f^{ex}(0, u) du - \mathcal{B}(t, T) f^{ex}(0, t) \\
 & \quad + \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}^2(t, T) (1 - e^{-2\kappa t}),
 \end{aligned}$$

wobei $(*)$ berechnet wurde als

$$(*) = \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} ((T - t) - \mathcal{B}(t, T)) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} e^{-2\kappa t} \mathcal{B}(t, T)^2.$$

Einsetzen in die exponential-affine Gestalt des Bondpreises liefert

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= \exp \left(- \int_0^T f^{ex}(0, u) du + \int_0^t f^{ex}(0, u) du + \mathcal{B}(t, T) f^{ex}(0, t) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}^2(t, T) (1 - e^{-2\kappa t}) - \mathcal{B}(t, T) r(t) \right) \\
 &= \frac{\exp \left(- \int_0^T f^{ex}(0, u) du \right)}{\exp \left(- \int_0^t f^{ex}(0, u) du \right)} \\
 & \quad * \exp \left(\mathcal{B}(t, T) f^{ex}(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}^2(t, T) (1 - e^{-2\kappa t}) - \mathcal{B}(t, T) r(t) \right) \\
 & \stackrel{(1.7)}{=} \frac{B^{ex}(0, T)}{B^{ex}(0, t)} \exp \left(\mathcal{B}(t, T) f^{ex}(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} \mathcal{B}^2(t, T) (1 - e^{-2\kappa t}) - \mathcal{B}(t, T) r(t) \right).
 \end{aligned}$$

□

5.4 Vergleich der short-rate Modelle

Zum Abschluss werden in diesem Abschnitt die drei in dieser Arbeit vorgestellten short-rate Modelle miteinander verglichen. Zunächst einmal werden die gemeinsamen Eigenschaften aufgezeigt.

Das Vasiček-Modell, das Cox-Ingersoll-Ross und das Extended Vasiček-Modell stellen affine short-rate Modelle dar. Von daher lässt sich der Bondpreis aus der short-rate-Dynamik explizit berechnen. Aus dieser Tatsache folgt ebenfalls, dass sich die Preise von Bond-Optionen explizit berechnen lassen. Dafür lassen sich in allen drei Modellen Berechnungsformeln aufstellen, anhand derer Zinsderivate wie Caps, Floors oder Swaptions bewertet werden können. Außerdem besitzen alle drei Modelle die „Mean-Reversion“-Eigenschaft, das heißt, die short-rate wird stets zu einem Mean-Reversion-Level zurückgezogen.

Im Vasiček-Modell wird die short-rate durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit konstanten, zeitunabhängigen Koeffizienten beschrieben. Dadurch lässt sich die short-rate sogar in einer geschlossenen Formel angeben und ist als normalverteilter Prozess analytisch gut handhabbar. Das bedeutet, dass sich die Bond- und Optionspreise leicht berechnen lassen. Langfristig besitzt die short-rate gerade das Mean-Reversion-Level als Erwartungswert und weicht aufgrund der endlichen Varianz nicht beliebig stark von diesem Wert ab. Mit der Normalverteiltetheit wird ein großer Nachteil dieses Modells deutlich: Mit positiver Wahrscheinlichkeit wird die short-rate negative Werte annehmen. Ein weiterer Nachteil des Modells ist, dass bei der Anpassung an beobachtbare Marktdaten Kalibrierungsfehler auftreten können. Da die Parameter in der stochastischen Differentialgleichung für die short-rate konstant sind, liegen nur drei freie Parameter vor, die an die beobachtbaren Anfangspreise von unendlich vielen Bonds angepasst werden sollen.

Das CIR-Modell ist zwar auch ein affines short-rate Modell, in dem analytische Lösungen für Bond- und Optionspreise möglich sind, jedoch sind diese viel schwieriger zu berechnen. Da der Diffusionsterm in der Dynamik der short-rate in Abhängigkeit von der short-rate modelliert wird, kann die short-rate zwar die 0 erreichen, aber keine negativen Werte annehmen, da die short-rate wegen der Mean-Reversion-Eigenschaft stets zum positiven Mean-Reversion-Level zurückgezogen wird. Unter einer zusätzlichen Bedingung an die Koeffizienten in der stochastischen Differentialgleichung kann garantiert werden, dass die short-rate stets positiv ist. Aufgrund der konstanten Koeffizienten in der short-rate Dynamik treten im CIR-Modell allerdings wie im Vasiček-Modell Kalibrierungsfehler auf.

In dieser Arbeit wurde das (vereinfachte) Extended Vasiček-Modell vorgestellt. Dieses

wird durch die gleiche stochastische Differentialgleichung modelliert wie das Vasiček-Modell, nur mit dem Unterschied, dass das Mean-Reversion-Level zeitabhängig gewählt wird. Diese deterministische Funktion kann an die beobachtbaren Marktdaten angepasst werden. Somit ist die Kalibrierung in diesem Modell möglich und man erhält eine perfekte Anpassung der theoretischen Bondpreiskurve an die beobachtbaren Bondpreise. Da die Volatilität weiterhin konstant ist, ist die short-rate auch in diesem Fall normalverteilt. Damit sind in diesem Modell einerseits die Bond- und Optionspreise analytisch leicht berechenbar, andererseits besitzt das Modell damit wie das Vasiček-Modell den Nachteil, dass die short-rate negative Werte annehmen kann.

A Anhang

A.1 Beweis von Satz 5.15

Beweis: Die short-rate $r(t)$ erfülle die Dynamik (5.8). Damit gilt also in Integral-Schreibweise:

$$r(t) = r(0) + \kappa \int_0^t (\theta - r(u)) du + \sigma \int_0^t \sqrt{r(u)} d\tilde{W}(u).$$

Berechnung des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[r(t)] &= \mathbb{E} \left[r(0) + \kappa \int_0^t (\theta - r(u)) du + \sigma \int_0^t \sqrt{r(u)} d\tilde{W}(u) \right] \\ &\stackrel{\text{Satz 5.3}}{=} r(0) + \kappa \left(\mathbb{E}_Q \left[\int_0^t \theta du \right] - \mathbb{E}_Q \left[\int_0^t r(u) du \right] \right) \\ &\stackrel{\text{stoch. Fubini}}{=} r(0) + \kappa \left(\int_0^t \theta du - \int_0^t \mathbb{E}[r(u)] du \right) \\ &= r(0) + \kappa \int_0^t (\theta - \mathbb{E}_Q[r(u)]) du. \end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung des Erwartungswertes nach t gilt

$$\frac{\partial \mathbb{E}[r(t)]}{\partial t} = \kappa (\theta - \mathbb{E}_Q[r(t)]).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\exp(\kappa t) \mathbb{E}_Q[r(t)]] &= \mathbb{E}_Q[r(t)] \frac{\partial}{\partial t} \exp(\kappa t) + \exp(\kappa t) \frac{\partial \mathbb{E}_Q[r(t)]}{\partial t} \\ &= \mathbb{E}_Q[r(t)] \kappa \exp(\kappa t) + \exp(\kappa t) \kappa (\theta - \mathbb{E}_Q[r(t)]) \\ &= \kappa \theta \exp(\kappa t). \end{aligned}$$

Durch Integration erhält man

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial u} [\exp(\kappa u) \mathbb{E}_Q[r(u)]] du = \int_0^t \kappa \theta \exp(\kappa u) du.$$

Einerseits gilt nun

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} [\exp(\kappa u) \mathbb{E}_Q[r(u)]] du &= [\exp(\kappa u) \mathbb{E}_Q[r(u)]]_0^t \\ &= \exp(\kappa t) \mathbb{E}_Q[r(t)] - \mathbb{E}_Q[r(0)] \\ &= \exp(\kappa t) \mathbb{E}_Q[r(t)] - r(0), \end{aligned}$$

aber andererseits folgt auch

$$\begin{aligned} \int_0^t \kappa \theta \exp(\kappa u) du &= \theta [\exp(\kappa u)]_0^t \\ &= \theta (\exp(\kappa t) - 1). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}_Q[r(t)] = \theta + \exp(-\kappa t) (r(0) - \theta).$$

Schließlich folgt für den Grenzwert des Erwartungswertes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_Q[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta + \exp(-\kappa t) (r(0) - \theta)) = \theta.$$

Berechnung der Varianz:

Als Erstes wird die Dynamik von $r^2(t)$ berechnet. Mit der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} dr^2(t) &= 2r(t)dr(t) + d\langle r \rangle(t) \\ &\stackrel{(5.8)}{=} (2\kappa\theta + \sigma^2)r(t)dt - 2\kappa r^2(t)dt + 2\sigma(r(t))^{\frac{3}{2}}d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

und in Integralform besitzt $r^2(t)$ die Gestalt

$$r^2(t) = r^2(0) + (2\kappa\theta + \sigma^2) \int_0^t r(u)du - 2\kappa \int_0^t r^2(u)du + 2\sigma \int_0^t (r(u))^{\frac{3}{2}}d\tilde{W}(u).$$

Nun wird der Erwartungswert von $r^2(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_Q[r^2(t)] \\
&= \mathbb{E}_Q\left[r^2(0) + (2\kappa\theta + \sigma^2) \int_0^t r(u)du - 2\kappa \int_0^t r^2(u)du + 2\sigma \int_0^t (r(u))^{\frac{3}{2}} d\tilde{W}(u)\right] \\
&\stackrel{\text{Satz 5.3}}{=} r^2(0) + (2\kappa\theta + \sigma^2) \mathbb{E}_Q\left[\int_0^t r(u)du\right] - 2\kappa \mathbb{E}_Q\left[\int_0^t r^2(u)du\right] \\
&\stackrel{\text{stoch. Fubini}}{=} r^2(0) + (2\kappa\theta + \sigma^2) \int_0^t \mathbb{E}_Q[r(u)]du - 2\kappa \int_0^t \mathbb{E}_Q[r^2(u)]du.
\end{aligned}$$

Ableiten nach t liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_Q[r^2(t)] = (2\kappa\theta + \sigma^2) \mathbb{E}_Q[r(t)] - 2\kappa \mathbb{E}_Q[r^2(t)].$$

Weiter betrachtet man

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp(2\kappa t) \mathbb{E}_Q[r^2(t)] \right] \\
&= \mathbb{E}_Q[r^2(t)] \frac{\partial}{\partial t} \exp(2\kappa t) + \exp(2\kappa t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_Q[r^2(t)] \\
&= \mathbb{E}_Q[r^2(t)] 2\kappa \exp(2\kappa t) + \exp(2\kappa t) \left((2\kappa\theta + \sigma^2) \mathbb{E}_Q[r(t)] - 2\kappa \mathbb{E}_Q[r^2(t)] \right) \\
&= \exp(2\kappa t) \left(2\kappa \mathbb{E}_Q[r^2(t)] + (2\kappa\theta + \sigma^2) \mathbb{E}_Q[r(t)] - 2\kappa \mathbb{E}_Q[r^2(t)] \right) \\
&= \exp(2\kappa t) ((2\kappa\theta + \sigma^2) \mathbb{E}_Q[r(t)]) \\
&= \exp(2\kappa t) ((2\kappa\theta + \sigma^2) [\theta + \exp(-\kappa t) (r(0) - \theta)]) \\
&= \exp(2\kappa t) \theta (2\kappa\theta + \sigma^2) + \exp(\kappa t) (2\kappa\theta + \sigma^2) (r(0) - \theta).
\end{aligned}$$

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} \left[\exp(2\kappa u) \mathbb{E}_Q[r^2(u)] \right] du \\
&= \theta ((2\kappa\theta + \sigma^2) \int_0^t \exp(2\kappa u) du + ((2\kappa\theta + \sigma^2) (r(0) - \theta)) \int_0^t \exp(\kappa u) du).
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich

$$\exp(2\kappa t) \mathbb{E}_Q[r^2(t)] - r^2(0),$$

während für die rechte Seite folgt

$$\begin{aligned}(A.1) &= \left(\theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}\right)(\exp(2\kappa t) - 1) + \left(2\theta + \frac{\sigma^2}{\kappa}\right)(r(0) - \theta)(\exp(\kappa t) - 1) \\ &= \left(\theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}\right)(\exp(\kappa t) - 1)^2 + \left(2\theta + \frac{\sigma^2}{\kappa}\right)r(0)(\exp(\kappa t) - 1).\end{aligned}$$

Für $\mathbb{E}_Q[r^2(t)]$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q[r^2(t)] &= \exp(-2\kappa t) \left[r(0) + \left(\theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}\right)(\exp(\kappa t) - 1)^2 + \left(2\theta + \frac{\sigma^2}{\kappa}\right)r(0)(\exp(\kappa t) - 1) \right].\end{aligned}$$

Damit lässt sich nun die Varianz berechnen:

$$\begin{aligned}\text{Var}_Q[r(t)] &= \mathbb{E}_Q[r^2(t)] - (\mathbb{E}_Q[r(t)])^2 \\ &= \exp(-2\kappa t) \left[r(0) + \left(\theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}\right)(\exp(\kappa t) - 1)^2 + \left(2\theta + \frac{\sigma^2}{\kappa}\right)r(0)(\exp(\kappa t) - 1) \right] \\ &\quad - \exp(-2\kappa t) [(r(0) + \theta(\exp(\kappa t) - 1))^2] \\ &= \exp(-2\kappa t) \left[\frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}(\exp(\kappa t) - 1)^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa}r(0)(\exp(\kappa t) - 1) \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa}r(0)(e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa t})^2.\end{aligned}$$

Schließlich folgt für den Grenzwert der Varianz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_Q[r(t)] = \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}.$$

□

A.2 Berechnung der Bondpreise im CIR-Modell

Beweis: Aus der Dynamik der short-rate für das CIR-Modell folgt mit Satz (4.4), dass das CIR-Modell ein affines short-rate Modell ist und der Bondpreis besitzt die affine Gestalt

$$B(t, T) = e^{-\mathcal{A}(t, T) - \mathcal{B}(t, T)r(t)}$$

mit deterministischen Funktionen $\mathcal{A}(t, T)$ und $\mathcal{B}(t, T)$. Zur Bestimmung dieser Funktionen ist nach Satz 4.4 folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} (I) \quad \partial_t \mathcal{A}(t, T) &= -\kappa \theta \mathcal{B}(t, T), & \mathcal{A}(T, T) &= 0 \\ (II) \quad \partial_t \mathcal{B}(t, T) &= \kappa \mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}^2(t, T) - 1, & \mathcal{B}(T, T) &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die zweite Gleichung, die Riccatische Gleichung, analytisch lösbar. Dazu sind mehrere Rechenschritte notwendig¹.

1. Definiere als Erstes die Funktion

$$\phi(t) = \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \int_t^T \mathcal{B}(u, T) du \right).$$

Nun werden die ersten beiden Ableitungen von $\phi(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -\frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}(t, T) \phi(t) \\ \text{und} \quad \phi''(t) &= -\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial \mathcal{B}(t, T)}{\partial t} \phi(t) + \frac{1}{4} \sigma^4 \mathcal{B}^2(t, T) \phi(t). \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Funktion $\mathcal{B}(t, T)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t, T) &= -\frac{2\phi'(t)}{\sigma^2 \phi(t)} \\ \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{B}(t, T)}{\partial t} &= -\frac{2\phi''(t)}{\sigma^2 \phi(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}^2(t, T). \end{aligned}$$

¹Vergleiche [Shr04], Seite 285, Aufgabe 6.4.

2. Setzt man dies in die Differentialgleichung (II) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathcal{B}(t, T) &= \kappa \mathcal{B}(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}^2(t, T) - 1 \\
 \Leftrightarrow 0 &= \frac{2\phi''(t)}{\sigma^2 \phi(t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}^2(t, T) - \kappa \frac{2\phi'(t)}{\sigma^2 \phi(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \mathcal{B}^2(t, T) - 1 \quad (\text{A.2}) \\
 \Leftrightarrow 0 &= \phi''(t) - \kappa \phi'(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 \phi(t).
 \end{aligned}$$

Die Riccatische Differentialgleichung lässt sich folglich in eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten transformieren.

3. Um die Differentialgleichung (A.2) zu lösen, beginnt man mit dem Eulerschen Ansatz²:

Setze $\phi(t) = e^{\lambda t}$ mit einer beliebigen Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es gilt also $\phi'(t) = \lambda \phi(t)$ und $\phi''(t) = \lambda^2 \phi(t)$. Damit folgt für (A.2)

$$0 = \left(\lambda^2 - \kappa \lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) e^{\lambda t}.$$

Damit ist die Funktion $e^{\lambda t}$ eine Lösung, wenn λ eine reelle Nullstelle der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \kappa \lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 = 0$ ist.

Als Nullstellen der charakteristischen Gleichung erhält man

$$\lambda_{1,2} = \frac{\kappa}{2} \pm \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.$$

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen, da die Koeffizienten im CIR-Modell gerade positive reelle Konstanten sind. Damit sind nach dem Superpositionsprinzip alle Funktionen

$$\phi(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit beliebigen reellen Konstanten a_1 und a_2 Lösungen der Differentialgleichung (A.2).

4. Aus der Endbedingung $\mathcal{B}(T, T) = 0$ ergeben sich für die Funktion ϕ die Endbedingungen

$$\phi(T) = 1 \quad \text{und} \quad \phi'(T) = 0.$$

²Siehe [Heu04], Seite 154.

5. Eine Lösung dieses Endwertproblems erhält man, wenn man die Konstanten a_1 und a_2 so wählen kann, dass

$$\begin{aligned}\phi(T) &= a_1 e^{\lambda_1 T} + a_2 e^{\lambda_2 T} = 1 \\ \text{und } \phi'(T) &= \lambda_1 a_1 e^{\lambda_1 T} + \lambda_2 a_2 e^{\lambda_2 T} = 0\end{aligned}$$

gilt. Dazu ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Als Lösung erhält man:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{c}{\frac{\kappa}{2} + \gamma} e^{-\left(\frac{\kappa}{2} + \gamma\right)T} \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{c}{\frac{\kappa}{2} - \gamma} e^{-\left(\frac{\kappa}{2} - \gamma\right)T} \\ \text{mit einer Konstanten } c &= -\frac{\frac{\kappa}{4} - \gamma^2}{2\gamma}.\end{aligned}$$

Damit folgt für die Funktion ϕ

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{c}{\frac{\kappa}{2} + \gamma} e^{-\left(\frac{\kappa}{2} + \gamma\right)(T-t)} - \frac{c}{\frac{\kappa}{2} - \gamma} e^{-\left(\frac{\kappa}{2} - \gamma\right)(T-t)} \\ &= c e^{-\frac{\kappa}{2}(T-t)} \left[\frac{\frac{\kappa}{2} - \gamma}{\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2} e^{-\gamma(T-t)} - \frac{\frac{\kappa}{2} + \gamma}{\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2} e^{\gamma(T-t)} \right].\end{aligned}$$

Außerdem folgt für $\phi'(t)$

$$\phi'(t) = c e^{-\left(\frac{\kappa}{2} + \gamma\right)(T-t)} - c e^{-\left(\frac{\kappa}{2} - \gamma\right)(T-t)}.$$

6. Nun kann man die gesuchte Funktion $\mathcal{B}(t, T)$ berechnen.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t, T) &= -\frac{2\phi'(t)}{\sigma^2 \phi(t)} \\ &= -\frac{2(e^{-\gamma(T-t)} - e^{\gamma(T-t)}) \left(\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2\right)}{\sigma^2 \left[\left(\frac{\kappa}{2} - \gamma\right)e^{-\gamma(T-t)} - \left(\frac{\kappa}{2} + \gamma\right)e^{\gamma(T-t)}\right]} \\ &\stackrel{\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2 = -\frac{\sigma^2}{2}}{=} \frac{2e^{2\gamma(T-t)}}{(\kappa + 2\gamma)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma}.\end{aligned}$$

7. Da $\partial_t \mathcal{A}(t, T) = -\kappa \theta \mathcal{B}(t, T)$, erhält man $\mathcal{A}(t, T)$ durch Integration von $\mathcal{B}(t, T)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t, T) &= \int_t^T \kappa \theta \mathcal{B}(s, T) ds = -\frac{2\kappa \theta}{\sigma^2} \int_t^T \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} ds \\ &= -\frac{2\kappa \theta}{\sigma^2} [\log(\phi(s))]_t^T = -\frac{2\kappa \theta}{\sigma^2} (\log(\phi(T)) - \log(\phi(t)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \left(\log \left(\frac{-2\gamma}{\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2} c \right) \right. \\
 &\quad \left. - \log \left(ce^{-\frac{\kappa}{2}(T-t)} \left[\frac{\frac{\kappa}{2} - \gamma}{\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2} e^{-\gamma(T-t)} - \frac{\frac{\kappa}{2} + \gamma}{\frac{\kappa^2}{4} - \gamma^2} e^{\gamma(T-t)} \right] \right) \right) \\
 &= -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \log \left(\frac{4\gamma e^{(\frac{\kappa}{2} + \gamma)(T-t)}}{(\kappa + 2\gamma)(e^{2\gamma(T-t)} - 1) + 4\gamma} \right).
 \end{aligned}$$

□

•

Literaturverzeichnis

- [Als05] G. Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Skripten zur Mathematischen Statistik, 2005.
- [Bjö04] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004.
- [BK04] N. H. Bingham and R. Kiesel. *Risk-Neutral Valuation*. Springer, 2004.
- [BKR97] T. Björk, Y. Kabanov, and W. Runggaldier. Bond market structure in the presence of marked point processes. *Math. Finance*, 7(2):211–239, 1997.
- [BS94] R.H. Brown and S.M. Schaefer. Interest rate volatility and the shape of the term structure. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 347:563–576, 1994.
- [BS04] N. Branger and C. Schlag. *Zinsderivate*. Springer, 2004.
- [Cai04] A.G. Cairns. *Interest Rate Models*. Princeton University Press, 2004.
- [CIR85] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–408, 1985.
- [CT06] R.A. Carmona and M.R. Tehranchi. *Interest Rate Models: An Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective*. Springer Finance, 2006.
- [DJ07] R.-A. Dana and M. Jeanblanc. *Financial Markets in Continuous Time*. Springer, 2007.
- [Duf92] D. Duffie. *Dynamic Asset Pricing*. Princeton University Press, 1992.
- [Fil02] D. Filipovic. Fixed income models. Vorlesungsskript Princeton University, 2002.
- [Fil09] D. Filipovic. *Term-Structure Models*. Springer, 2009.
- [Heu04] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, 2004.

- [Hul06] J. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, München, 2006.
- [HW90] J. Hull and A. White. Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- [Irl03] A. Irle. *Finanzmathematik*. Teubner, 2003.
- [IW81] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland Mathematical Library, 1981.
- [Jam89] F. Jamshidian. An exact bond option formula. *Mathematical Finance*, 44(1):205–209, 1989.
- [KS97] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1997.
- [LL96] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Stochastic Calculus Applied To Finance*. Chapman & Hall, 1996.
- [MR97] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 1997.
- [Oks00] B. Oksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 2000.
- [Pau09] V. Paulsen. Finanzmathematik 1 und 2. Handschriftliches Vorlesungsskript, Universität Münster, SS2008 und WS2008/09.
- [Reb98] R. Rebonato. *Interest Rate Option Models*. John Wiley & Sons, 1998.
- [Sch04] T. Schmidt. Zinsstrukturmodelle. Vorlesungsskript Universität Leipzig, 2004.
- [Shr97] S. E. Shreve. Stochastic calculus and finance. Entwurf, 1997.
- [Shr04] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance , Continuous Time Models*. Springer, Science + Business Media, Inc, 2004.
- [Vas77] O. Vasiček. An equilibrium characterization of the term structure. *J.Financial Econ.*, 5(2):177–188, 1977.
- [Zag02] R. Zagst. *Interest Rate Management*. Springer, 2002.