



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

---

# Das Markov-Functional Model zur Modellierung der Zinsstruktur

---

## Diplomarbeit

im Studiengang Mathematik im Bereich der Finanzmathematik  
angefertigt am Institut für Mathematische Statistik

vorgelegt von

Deniz Atuğ

Das Thema dieser Arbeit wurde gestellt von

PD Dr. Volkert Paulsen

Münster, November 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Zinsen und deren Besonderheiten . . . . .	2
1.2 Zielsetzung und Aufbau . . . . .	4
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
<b>3 Standard-Zinsderivate</b>	<b>15</b>
3.1 Foward Rate Agreement . . . . .	15
3.2 Cap / Caplets . . . . .	18
3.3 Digitale Caplets . . . . .	24
3.4 Zinsswap . . . . .	25
3.5 Zinsswaption . . . . .	29
3.6 Digitaler BfZ-Zinsswaption . . . . .	32
3.7 Implizite Volatilität . . . . .	33
<b>4 Exotische Derivate</b>	<b>36</b>
4.1 Arten von Derivaten . . . . .	36
4.2 Beispiele . . . . .	37
4.2.1 Limit-Cap . . . . .	37
4.2.2 Chooser-Caps . . . . .	38
4.2.3 Bermuda Swaption . . . . .	39
<b>5 Markov-Functional Model</b>	<b>40</b>
5.1 Einleitung . . . . .	40
5.2 Das Modell . . . . .	41
5.3 Libor-Markov-Functional Model . . . . .	46
5.4 Swap-Markov-Functional Model . . . . .	54
<b>6 Libor-Markt Modell</b>	<b>60</b>

<b>7 Zusammenfassung</b>	<b>65</b>
<b>8 Anhang</b>	<b>66</b>
<b>Literatur</b>	<b>69</b>
<b>Eidesstattliche Erklärung</b>	<b>71</b>

# 1 Einleitung

Bei der Betrachtung des aktuellen Kapitalmarktes fällt auf, dass ein großer Teil gehandelter Produkte Zinsderivate sind. Zinsen spielen in der heutigen Zeit eine immer größer werdende Rolle, gerade für Finanzinstitute ist die korrekte Bewertung von Zinsderivaten von großer Wichtigkeit. Ursprung der Zinsderivate liegt vor allem im Risikomanagement der Unternehmen, dort werden diese in den unterschiedlichsten Formen zur Absicherung verwendet. Natürlich werden auch immer mehr Spekulationsgeschäfte über Zinsderivate vollzogen. Zinsderivate oder speziell Zinsen im allgemeinen sind auch für Privatpersonen im Alltag geläufig, sei es beispielsweise bei der Kreditaufnahme für den Kauf eines Hauses oder durch die unschöne Nachricht des “Libor-Skandals”<sup>1</sup>, welcher 2012 durch die Medien ging.

Um eine bessere Vorstellung zu bekommen, welche Summen bei Zinsgeschäften erzielt werden, sollen die folgenden zwei Beispiele genannt werden: Allein im Libor-Skandal hat die Deutsche Bank 500 Millionen Euro durch Absicherungsgeschäfte verdient<sup>2</sup>; im Over the Counter Handel wurde von Juni 2011 bis Juni 2012 ein Volumen von 362 Billionen Dollar mit Zinsderivaten erreicht<sup>3</sup>. Diese Beispiele zeigen die immensen Beträge, die im Zinshandel vorliegen. Fügt man alle Börsen bzw. alle weiteren Zinsderivategeschäfte hinzu, steigt dieser Wert dementsprechend. Aufgrund des hohen Handelsvolumens ist es somit unumgänglich genaue Prognosen bzw. Bewertungen zu erstellen. Gerade im Bereich des Risikomanagements werden immer mehr an die Bedürfnisse des Unternehmens entsprechende Zinsderivate erstellt, welche aufgrund der komplizierten Auszahlungsstruktur recht schwer zu bewerten sind und somit eine komplexe mathematische Theorie benötigen.

---

<sup>1</sup>sueddeutsche.de/thema/Libor-Skandal

<sup>2</sup> wallstreetjournal.de; Artikel: Das Milliardenspiel der Deutschen Bank mit dem Libor

<sup>3</sup>http://www.isda.org; Market Analysis 060612.pdf

## 1.1 Zinsen und deren Besonderheiten

Wie bereits angedeutet haben Zinsen vor allem im Risikomanagement von Unternehmen eine große Bedeutung.<sup>4</sup> Daher bieten sich zur Erläuterung von Zinsderivaten einige Firmenbeispiele an. Viele Unternehmen sind zu Teilen fremdfinanziert, so dass die Kosten bei steigenden Zinsen zu starken Verlusten bis im Extremfall zur Existenzgefährdung führen können. Aber auch die Geldanlage hat einen Einfluss auf das Ergebnis eines Unternehmens. Legt das Unternehmen das Geld zu einem variablen Zinssatz an, so kann bei fallenden Zinsen weniger Ertrag als geplant erwirtschaftet werden. Die alternative Wahl hingegen zu einer zum Beispiel festverzinslichen Anleihe führt bei steigenden Zinsen zu Wertverlust der Anleihe. Eine weitere häufig auftretende Situation ist die Geldanlage bzw. Finanzierung für in der Zukunft geplante Einnahmen bzw. Projekte. Ein typisches Szenario ist die geplante Kreditaufnahme zu einem späteren Zeitpunkt, so ist es teilweise für die Planung notwendig, den aktuellen Zinssatz zu sichern um nicht in Gefahr zu laufen aufgrund des eventuellen höheren Zinssatzes zum späteren Zeitpunkt in Liquiditätsprobleme zu geraten. Wie in jedem Fachbereich wurden durch die Entwicklung der Theorie und der Optimierung immer neuer und besser werdende Strategien zur Absicherung herangezogen. Dadurch haben in den letzten Jahrzehnten die eben beschriebenen “Standardabsicherungen“ immer komplexere und speziellere Formen angenommen, die für Laien teilweise sehr abstrakt und oft intuitiv nicht verständlich wirken.

Im direkten Vergleich zu Aktien fallen einige Unterschiede bezüglich der Struktur von Zinsen auf. Diese Besonderheiten sollen in diesem Abschnitt kurz angesprochen werden, um zu verdeutlichen, weshalb es nicht möglich ist, Aktienmodelle, beispielsweise das Black Schloles Modell, eins zu eins übernehmen zu können. Die Aussage: “Der Zins beträgt 10%“, verdeutlicht bei genauer Betrachtung einige Besonderheiten, mit denen man sich bei Zinsstrukturmodellen beschäftigen

---

<sup>4</sup>siehe [4]

muss. Man erkennt direkt, dass ohne weitere Angaben wie der Anlagenperiode und ob der Zinssatz für eine sofortige oder zukünftige Anlage ist, die gerade genannte Aussage wenig Sinn macht. Eine Eigenschaft von Zinsen ist, dass die Anlagenperiode Einfluss auf den Zinssatz hat. Nimmt man sich zum Beispiel heute einen Kredit für ein Jahr, so wird dies ein anderer Zinssatz sein als für einen Kredit über 3 Monate. Mathematisch betrachtet gibt es somit unendliche viele Anlageperioden bzw. unendlich viele Zinssätze, wobei diese unumgänglicherweise untereinander eine gewisse Abhängigkeit haben. Um noch einmal auf Aktienmodelle einzugehen, dort genügt es bei der Bewertung von Aktienderivaten in der Regel die Aktie an sich zu modellieren, bei Zinsen hingegen muss man sich erst einmal überlegen was genau modelliert werden soll. Durch die unterschiedlichen Laufzeiten muss somit ein Modell erstellt werden, dass alle Zinsen umfasst. Das heißt, zu jedem Anlagezeitpunkt und jeder Anlageperiode wird ein Zinssatz modelliert. Bezeichnet wird ein solches Modell als **Zinsstrukturmodell**. Eine Möglichkeit die Zinsstruktur zu beschreiben ist über Zero-Coupon Bonds. Dies sind Derivate, die zu einem festgelegten Zeitpunkt  $S$  einen sicheren Betrag  $N$  auszahlen. Mit Blick auf deren Kursverlauf wird deutlich, dass sie sich grundlegend von Aktien unterscheiden. Während Aktienpreise im Laufe der Zeit immer unsicherer werden, ist dies für Zero-Coupon Bonds nicht der Fall. Die Zero-Coupon Bonds, sofern wir davon ausgehen, dass kein Ausfallrisiko vorliegt, zahlen zum Laufzeitende einen sicheren Betrag aus und müssen somit gegen Ende ihrer Laufzeit ihren Auszahlungswert als Preis einnehmen. Modellansätze, in denen der Kurs um einen konstanten Faktor steigt und fällt, beispielsweise im CRR-Modell sind somit nicht mehr möglich.

## 1.2 Zielsetzung und Aufbau

Ziel dieser Diplomarbeit ist die Beschreibung und Erläuterung der Zinsstruktur mittels des Markov-Functional Models, das primär dazu geeignet ist sogenannte exotische Zinsderivate zu bewerten.

Dazu wurde die Arbeit in 7 Kapitel unterteilt. Im vorangegangen Unterkapitel wurde bereits eine kurze Einführung über Zinsen gegeben, wieso es überhaupt notwendig ist diese zu modellieren und deren Besonderheiten im Vergleich zu Aktien geschildert. Darauf folgend werden im nächsten Kapitel die Grundlagen der Zinsstrukturmodelle betrachtet, speziell die Darstellung der Zinsstruktur über Zero-Coupon Bonds. Des Weiteren werden einige Sätze, die wir im weiteren Verlauf benötigen, bewiesen. In Kapitel 3 handelt es sich um die Einführung und Bewertung von Standardzinsderivaten, die speziell für das Markov-Functional Model zur Kalibrierung benötigt werden. Anschließend werden exotische Derivate betrachtet und deren Probleme geschildert. In Kapitel 5 wird aufbauend auf die vorangegangen Erörterungen das Markov-Functional Model definiert und im speziellen das Libor- und Swap-Markov-Functional Model beschrieben. In Kapitel 6 wird das Markov-Functional Model in Bezug zum Libor-Markt Modell gebracht. Die Zusammenfassung im letzten Kapitel schließt die Arbeit ab.

## 2 Grundlagen

Für den weiteren Verlauf betrachten wir den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ . Zudem erfüllt die Filtration die “usual conditions”, d.h.

- i) Die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ist rechtsseitig stetig.
- ii)  $\mathcal{F}_0$  enthält alle P-Nullmengen und alle Teilmengen von P-Nullmengen.

Wie in der Einleitung angedeutet gibt es mehrere Möglichkeiten, die Zinsstruktur zu modellieren. Eine davon ist die Modellierung über Zero-Coupon Bonds. Daher werden wir als nächstes Zero-Coupon Bonds formal einführen und deren Zusammenhang mit Zinsen erläutern.

**Definition 2.1** (Zero-Coupon Bond)

*Ein Zero-Coupon Bond zahlt dem Inhaber zu einem vereinbarten Zeitpunkt  $S$  den Nominalbetrag  $N$  aus, den wir im weiteren Verlauf mit  $N = 1$  setzen werden. Zur grafischen Darstellung der Zahlungsstruktur siehe Abbildung 1. Den Preis eines Zero-Coupon Bonds bezeichnen wir zum Zeitpunkt  $0 \leq t \leq S$  mit*

$$D_{ts}.$$

*Die Wertentwicklung des Zero-Coupon Bonds beschreibt somit der stochastische Prozess  $(D_{ts})_{0 \leq t \leq S}$ . Die Besonderheit, speziell im Vergleich zu Aktien, ist, dass die Unsicherheit mit der Zeit nachlässt bzw. zum Laufzeitende dem Auszahlungswert entspricht. Gehen wir davon aus, dass kein Ausfallrisiko besteht, so ist der Wert des Zero-Coupon Bonds  $D_S$  zum Zeitpunkt  $S$  gegeben durch*

$$D_{SS} = 1. \tag{2.1}$$

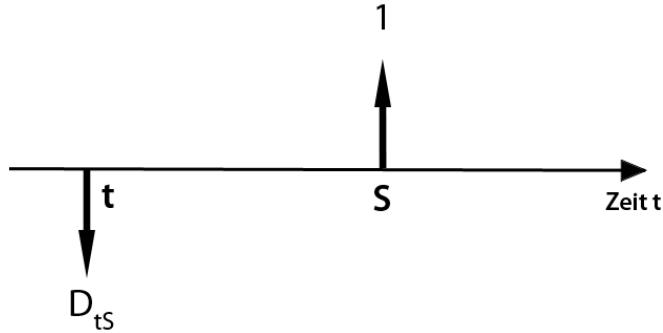


Abbildung 1: Cashflow-Zero-Coupon Bond

**Definition 2.2** (Forward-Rate)

Eine weitere Möglichkeit, die Zinsstruktur darzustellen, ist diese direkt über Zinsen zu beschreiben. Die Forward-Rate ist der Zins, der zum Zeitpunkt  $t$  vereinbart wird für die Anlage über den Zeitraum von  $T$  bis  $S$ , wobei  $t \leq T < S$  gilt. Die Forward-Rate bezeichnen wir mit

$$F_t(T, S).$$

Den Zinssatz  $F_t(t, S)$ , d.h. der Beginn der Anlage stimmt mit dem heutigen Zeitpunkt  $t$  überein, bezeichnen wir als Spot-Rate.

Um den Zusammenhang zwischen Zero-Coupon Bonds und die Forward-Raten zu bestimmen, betrachten wir nachfolgende Anlagestrategie. Zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  verkaufen wir den Zero-Coupon Bond  $D_{tT}$  und kaufen  $\frac{D_{tT}}{D_{tS}}$  Anteile des Zero-Coupon Bonds  $D_{tS}$ . Da sich diese beiden Zahlungen aufheben, entstehen zum Zeitpunkt  $t$  keine Kosten bzw.

$$D_{tT} - \frac{D_{tT}}{D_{tS}} D_{tS} = 0.$$

Zum Zeitpunkt  $T$  ist aus dem verkauften Zero-Coupon die Zahlung 1 fällig und

zum Zeitpunkt  $S$  erhalten wir aus dem gekauften Zero-Coupon Bond die Zahlung  $\frac{D_{tT}}{D_{tS}}$ . Der diskrete Zins bzw. die Forward-Rate ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned} 1 + (S - T)F_t(T, S) &= \frac{D_{tT}}{D_{tS}} \\ &\Leftrightarrow \\ F_t(T, S) &= \frac{1}{S - T} \left( \frac{D_{tT}}{D_{tS}} - 1 \right) \\ &= \frac{D_{tT} - D_{tS}}{\alpha D_{tS}} \end{aligned}$$

wobei  $\alpha := T - S$  die Periodenlänge bezeichnet. Die für uns relevante Forward-Rate ist die (Forward-) Libor-Rate, die wir nun einführen.

### Definition 2.3 (Libor-Rate)

*Die Libor-Rate (London Interbank Offered Rate) entspricht dem Referenzzinssatz im internationalen Interbankengeschäft. Täglich um 11 Uhr Londoner Zeit legen ausgewählte internationale Geschäftsbanken ihren Zinssatz fest, zu dem sie sich von anderen Banken Geld leihen können. Die Libor-Rate ergibt sich als arithmetisches Mittel aus diesen Zinssätzen. Für den weiteren Verlauf bezeichnen wir die Libor-Rate mit*

$$\begin{aligned} L_t[T, S] &:= F_t(T, S) \\ &= \frac{D_{tT} - D_{tS}}{\alpha D_{tS}}. \end{aligned}$$

Analog zur Forward-Rate und Spot-Rate wird der Forward-Libor und Spot-Libor definiert.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>für weitere Zusammenhänge sei auf 2.2 in [5] verwiesen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir einige Sätze beweisen, die später benötigt werden. Das folgende Lemma wird in Kapitel 3 für das Black Modell verwendet.

#### **Lemma 2.4**

Gegeben sei ein Wiener Prozess  $W$  und eine deterministische Funktion  $\sigma_t$ . Dann ist  $\int_0^t \sigma_u dW_u$  für  $t > 0$  normalverteilt und es gilt

$$\begin{aligned} i) \quad & \mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma_u dW_u \right) = 0; \\ ii) \quad & \mathbb{V} \left( \int_0^t \sigma_u dW_u \right) = \int_0^t \sigma_u^2 du \end{aligned}$$

*Beweis.*

Die Idee ist, den Grenzprozess zu betrachten, indem wir das Ito-Integral  $\int_0^t \sigma_u dW_u$  durch

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{u_i} (W_{u_{i+1}} - W_{u_i})$$

für Zerlegungen  $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n = t$  annähern.

Der Punkt *i*) ergibt sich dann durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma_u dW_u \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{u_i} (W_{u_{i+1}} - W_{u_i}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{u_i} \underbrace{\mathbb{E}(W_{u_{i+1}} - W_{u_i})}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und der Punkt *ii)* folgt aus

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V} \left( \int_0^t \sigma_u dW_u \right) &= \mathbb{V} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{u_i} (W_{u_{i+1}} - W_{u_i}) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{u_i}^2 \underbrace{\mathbb{V} (W_{u_{i+1}} - W_{u_i})}_{=u_{i+1}-u_i} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{u_i}^2 (u_{i+1} - u_i) \\
 &\rightarrow \int_0^t \sigma_u^2 du.
 \end{aligned}$$

Den Limes, den wir im letzten Schritt verwendet haben, bezieht sich darauf, dass wir die Feinheit der Zerlegung gegen 0 laufen lassen.

Um zu zeigen, dass  $\int_0^t \sigma_u dW_u$  normalverteilt ist, benutzen wir die Momentenerzeugende Funktion bzw. zu zeigen ist:

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda \int_0^t \sigma_u dW_u \right) \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t \sigma_u^2 du \right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Dazu betrachten wir das Doleans Martingal

$$\begin{aligned}
 L_t &= \exp \left( \lambda \int_0^t \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \left[ \lambda \int_0^t \sigma_u dW_u \right]_t \right) \\
 &= \exp \left( \lambda \int_0^t \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t \sigma_u^2 du \right).
 \end{aligned}$$

Die Martingaleigenschaft ist durch das Novikov-Kriterium<sup>6</sup> erfüllt und somit gilt

<sup>6</sup>siehe Satz 7.12 in [10]

für das Doleans Martingal<sup>7</sup>

$$\mathbb{E}(L_t) = 1, \quad \forall t \geq 0$$

bzw.

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda \int_0^t \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t \sigma_u^2 du \right) \right) = 1$$

und daraus folgt

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda \int_0^t \sigma_u dW_u \right) \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t \sigma^2 du \right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

**Definition 2.5** (Markov-Prozess)

Ein adaptierter stochastischer Prozess  $(X_t)_{0 \leq t \leq S}$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq S}$  mit Werten in  $(E, \mathcal{E})$  heißt **Markov Prozess**, falls der Prozess die Eigenschaft

$$P(X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \in A | X_t)$$

$P$ -fast sicher, für alle  $s, t \in [0, S]$  und für alle  $A \in \mathcal{E}$  erfüllt.

Bemerkung :

Der Markov Prozess besitzt somit eine Art Gedächtnislosigkeit. Zu interpretieren ist diese ‘‘Gedächtnislosigkeit’’ in der Art, als das der weitere Verlauf des Prozesses nicht von den vorigen Zuständen abhängt, sondern nur vom aktuellen Zustand.

**Lemma 2.6**

Seien  $(M_1, \mathcal{M}_1)$  und  $(M_1, \mathcal{M}_1)$  messbare Räume,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathcal{G}$  eine Unter-Sigma Algebra von  $\mathcal{F}$ . Des Weiteren betrachten wir

---

<sup>7</sup>siehe Satz 6.15 in [15]

*die messbaren Abbildungen*

$$X_1 : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_1, \mathcal{M}_1), \quad X_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_2, \mathcal{M}_2),$$

*sowie*

$$h : (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

*Sind folgende Eigenschaften*

- i)  $X_1$  ist unabhängig von  $\mathcal{G}$
- ii)  $X_2$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{G}$
- iii) Der Erwartungswert  $\mathbb{E}(h(X_1, X_2))$  existiert

*erfüllt, dann gilt:*

$$\mathbb{E}(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_2) \quad P-f.s.$$

*Beweis.*

Beweisen lässt sich die Aussage durch das Funktions-Erweiterungsargument<sup>8</sup>, d.h.  
wir betrachten zuerst primitive Funktionen der Form

$$h = \mathbf{1}_{\{A \times B\}}$$

für  $A \in \mathcal{M}_1$  und  $B \in \mathcal{M}_2$ . Durch die Eigenschaften i) und ii) folgt  $\mathbf{1}_{\{X_1 \in A\}}$  ist unabhängig von  $\mathcal{G}$  und  $\mathbf{1}_{\{X_2 \in B\}}$  ist  $\mathcal{G}$ -messbar. Somit gilt aufgrund der Eigenschaften

---

<sup>8</sup>siehe Seite 32 in [1]

des bedingten Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 \in A\}} \mathbb{1}_{\{X_2 \in B\}}|\mathcal{G}) \\
 &= \mathbb{1}_{\{X_2 \in B\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 \in A\}}|\mathcal{G}) \\
 &= \mathbb{1}_{\{X_2 \in B\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 \in A\}}) \\
 &= \mathbb{1}_{\{X_2 \in B\}} P(X_1 \in A)
 \end{aligned}$$

Mit der gleichen Berechnung folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_2) &= \mathbb{1}_{\{X_2 \in B\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 \in A\}}|X_2) \\
 &= \mathbb{1}_{\{X_2 \in B\}} P(X_1 \in A)
 \end{aligned}$$

Somit gilt P-fast sicher

$$\mathbb{E}(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_2).$$

Für den Fall  $h = \mathbb{1}_{\{D\}}$  mit  $D \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$  folgt die Behauptung mit dem Dynkin-System Argument<sup>9</sup>. Das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 | h = \mathbb{1}_{\{D\}} \text{ erfüllt die Behauptung}\}$$

bildet ein Dynkin System. Durch den ersten Teil des Beweises erhalten wir als durchschnittsstabilen Erzeuger

$$\epsilon := \{A \times B | A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}.$$

<sup>9</sup>siehe Seite 10 in [1]

Somit folgt:

$$\mathcal{D} = \sigma(\epsilon) = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2.$$

Durch Linearität folgt es für positive primitive Funktionen und durch Limesbildung für positive messbare Funktionen. Die endgültige Behauptung folgt dann durch Aufspaltung in Positiv- und Negativteil.  $\square$

Bemerkung :

Sind die Eigenschaften des Satzes erfüllt, gilt insbesondere

$$P(X_1 + X_2 \in D | \mathcal{G}) = P(X_1 + X_2 \in D | X_2) \quad P-f.s.$$

### Satz 2.7

Gegeben sei ein Wiener Prozess  $W$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq S}$  und eine deterministische Funktion  $\sigma_t$ . Der adaptierte stochastische Prozess  $X$  mit der Darstellung

$$X_t = \int_0^t \sigma_u dW_u$$

ist ein Markov Prozess.

*Beweis.*

Zu zeigen ist die Markov Eigenschaft

$$P(X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \in A | X_t)$$

für alle  $A \in B(\mathbb{R})$ .

Dazu betrachten wir die Zerlegung von  $X_{t+s}$  in

$$\begin{aligned} X_{t+s} &= \int_0^{t+s} \sigma_u dW_u \\ &= \int_0^t \sigma_u dW_u + \int_t^{t+s} \sigma_u dW_u \\ &= X_t + \int_t^{t+s} \sigma_u dW_u. \end{aligned}$$

Um Lemma 2.6 anwenden zu können, muss  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar sein und  $\int_t^{t+s} \sigma_u dW_u$  unabhängig von  $\mathcal{F}_t$ . Das  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist folgt per Definition, für die Unabhängigkeit betrachten wir das Ito-Integral als Grenzprozess von

$$I_n = \sum_{i=1}^n \sigma_{t+(i-1)\Delta t} \cdot (W_{t+i\Delta t} - W_{t+(i-1)\Delta t}), \quad \Delta t = \frac{s}{n}.$$

Die in der Summe auftretenden Summanden  $(W_{t+i\Delta t} - W_{t+(i-1)\Delta t})$  sind für  $i = 1, \dots, n$  durch die Eigenschaften des Wiener Prozesses unabhängig von  $\mathcal{F}_t$ . Da  $\sigma_t$  eine deterministische Funktion ist, folgt die Unabhängigkeit von  $I_n$  und  $\mathcal{F}_t$ . Durch die  $L_2$  Konvergenz (insbesondere liegt damit die Konvergenz in Verteilung vor) überträgt sich die Unabhängigkeit auf das Ito-Integral  $\int_t^{t+s} \sigma_u dW_u$ .

Somit gilt nach Lemma 2.6 :

$$\begin{aligned} P(X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_t) &= P(X_t + \int_t^{t+s} \sigma_u dW_u \in A | \mathcal{F}_t) \\ &= P(X_t + \int_t^{t+s} \sigma_u dW_u \in A | X_t) \\ &= P(X_{t+s} \in A | X_t) \end{aligned}$$

□

## 3 Standard-Zinsderivate

In diesem Abschnitt geht es um die Einführung und Bewertung einiger Standard-Zinsderivate, die indirekt im Zusammenhang zum Markov-Functional Model stehen. Daher ist es notwendig mit diesen Produkten bzw. mit der Bewertung dieser Produkte vertraut zu sein.

### 3.1 Foward Rate Agreement

Ein Forward Rate Agreement, nachfolgend FRA genannt, ist ein außerbörsliches Zinstermingeschäft bzw. eine Zinsausgleichsvereinbarung. Das FRA dient zur Absicherung eines Zinses bei zukünftiger Mittelaufnahme oder -anlage für den Zeitraum  $T$  bis  $S$ . Die Absicherung wird dadurch gegeben, dass zwei Vertragspartner zum aktuellen Zeitpunkt  $t \leq T$  vereinbaren, an einem in der Zukunft liegenden Termin  $S$  einen variablen Zinssatz gegen einen festen Zinssatz  $K$  bzgl. eines Nominalbetrags  $N$  zu tauschen. Als variabler Zinssatz kommt der Euribor oder Libor in Betracht. Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit dem Libor bzw. der Libor-Rate  $L_t[T, S]$  beschäftigen.

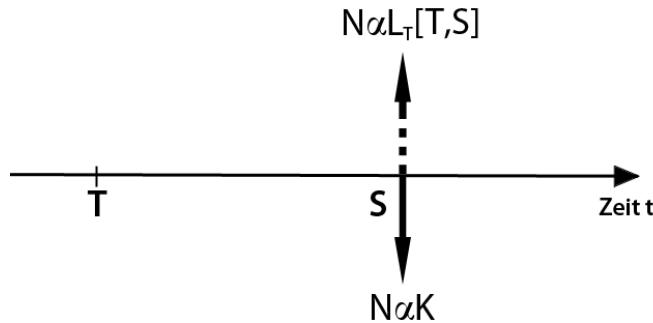


Abbildung 2: Cashflow-Diagramm FRA

Anschaulich wird der FRA im Cashflow-Diagramm (Abbildung 2) gezeigt. Der gestrichelte Pfeil in Cashflow-Diagrammen soll grundsätzlich dazu verwendet werden, den variablen Betrag darzustellen, d.h. den Betrag der zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  nicht sicher gegeben ist.

Der Käufer des FRAs, der die sogenannte Long-Position einnimmt, verpflichtet sich somit den festen Betrag  $N\alpha K$  an die Short-Position, dem Verkäufer des FRA, zu bezahlen. Im Gegenzug erhält er den variablen Betrag  $N\alpha L_T[T, S]$  vom Verkäufer des FRAs. Mit  $\alpha := S - T$  wird wieder die Länge der Anlageperiode bezeichnet. In der Praxis werden die Beträge  $N\alpha L_T[T, S]$  und  $N\alpha K$  allerdings nicht getauscht, sondern es wird lediglich die Differenz erhalten oder, im Falle eines negativen Wertes, ausgeglichen. Das Nominal werden wir aus Gründen der Vereinfachung mit eins festlegen, da es für die weitere Berechnung keine spezielle Rolle besitzt. Somit ergibt sich aus der Sicht der Long-Position zum Zeitpunkt  $S$  eine (positive oder negative) Zahlung von

$$\alpha(L_T[T, S] - K). \quad (3.1)$$

Multipliziert man dies mit  $-1$ , so erhält man die entsprechende Zahlung der Short-Position. Eine weitere Eigenschaft des FRAs ist, dass zum Zeitpunkt  $t \leq T$  der Ausübung für beide Parteien keine Kosten entstehen. Dies erreicht man, in dem ein angemessener Wert für  $K$  gewählt wird. Als fairer Wert wird die forward Libor-Rate gewählt, d. h. zum Ausübungszeitpunkt  $t$  gilt

$$K = L_t[T, S]. \quad (3.2)$$

Weshalb  $K = L_t[T, S]$  gilt, wird bei der Berechnung des Preises für den FRA deutlich. Eine Möglichkeit den FRA zu bewerten, wäre der klassische Weg über den Erwartungswert bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes. In diesem Fall lässt sich zudem auch recht leicht eine geeignete Duplikationsstrategie bilden, daher werden wir diesen Weg wählen. Die Duplikationsstrategie sieht folgendermaßen aus:

Zum Zeitpunkt  $t$  wird der Zero-Coupon Bond  $D_{tT}$  erworben und  $(1 + \alpha K)$  Zero-

Coupon Bonds  $D_{tS}$  werden verkauft. Der Wert zum Zeitpunkt  $t$  entspricht somit

$$V_t = D_{tT} - (1 + \alpha K)D_{tS}.$$

Zum Zeitpunkt  $T$  erhalten wir aus dem gekauften Zero-Coupon Bond  $D_{TT} = 1$  und legen diese zur aktuellen Libor-Rate  $L_T[T, S]$  bis zum Zeitpunkt  $S$  an. Am Laufzeitende  $S$  erhalten wir somit  $1 + \alpha L_T[T, S]$  und aus dem verkauften Zero-Coupon Bond  $(1 + \alpha K)D_{tS}$  entstehen Kosten von  $(1 + \alpha K)$ . Das heißt, die Auszahlung zum Zeitpunkt  $S$  beträgt

$$(1 + \alpha L_T[T, S]) - (1 + \alpha K) = \alpha(L_T[T, S] - K).$$

Diese Auszahlung entspricht genau der Auszahlung (3.1) des FRAs, somit folgt aus Arbitragegründen, dass der Wert des FRAs und der Anlagestrategie identisch sein muss. Somit ist der Preis des FRA

$$V_t = D_{tT} - (1 + \alpha K)D_{tS}. \quad (3.3)$$

Setzen wir  $V_t = 0$ , es entstehen also keine Kosten zum Ausübungszeitpunkt, so folgt durch Umformung

$$\begin{aligned} V_t &= 0 \\ \Leftrightarrow D_{tT} - (1 + \alpha K)D_{tS} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha K &= \frac{D_{tT} - D_{tS}}{D_{tS}} \\ \Leftrightarrow K &= L_t[T, S] \end{aligned}$$

und wir erhalten die Gleichung (3.2). Der Wert des FRAs ist nur zum Zeitpunkt der Ausübung 0, in der Regel unterliegt er im Laufe der Zeit gewissen Kurs-

schwankungen und ist somit ungleich 0.

### 3.2 Cap / Caplets

Ein Cap ist eine Absicherung oder auch Spekulation auf steigende Zinsen, in unserem Fall der Libor-Rate. Bestandteil des Caps ist eine Summe von Call-Optionen auf die Libor-Rate, wobei die einzelnen Call-Optionen als Caplets bezeichnet werden. Relevanter für das Markov-Functional Model sind Caplets, daher werden wir uns primär damit beschäftigen. Für die Bewertung von Caps sei erwähnt, dass die Bewertung von Caplets genügt, da Caps nur eine Summe von Caplets darstellen. Der Unterschied zu den vorigen Derivaten wird also durch den Optionscharakter erzeugt. Der Inhaber des Caplets besitzt das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem Zeitpunkt  $S$  den vorher festgelegten Zinssatz  $K$  zu erhalten. Genauer gesprochen besteht ein Caplet bzgl. der Libor-Rate aus einem Startzeitpunkt  $T$ , einem Laufzeitende  $S$  und einem Strike  $K$ . Der Preis des Caplets zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $V_t$  bezeichnet. Die Auszahlung zum Zeitpunkt  $S$  ist die optionale Differenz zwischen der Libor-Rate  $L_T[T, S]$  und Strike  $K$ , formal lässt es sich beschreiben mit

$$V_S = \alpha (L_T[T, S] - K) \mathbf{1}_{\{L_T[T, S] \geq K\}}. \quad (3.4)$$

Der Wert  $V_t$  des Caplets zum Zeitpunkt  $t \leq S$  lässt sich diesmal nicht über eine Duplikationsstrategie bestimmen. Daher wird ein arbitragefreies Zinsstrukturmodell aufgestellt, um den Preis des Caplets zu bestimmen.

In diesem Modell wählen wir als Basisfinanzgüter die Zero-Coupon Bonds  $(D_{ts})_{0 \leq t \leq s}$  für  $0 < s \leq S$ . Durch die Annahme, dass unser Modell arbitragefrei ist, existiert ein äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{N}$ , so dass die Numeraire normierten Zero-Coupon Bonds Martingale sind. Abkürzend bezeichnen wir dies als Numeraire Paar  $(N, \mathbb{N})$  wobei  $N$  das Numeraire darstellt.

Für die Bewertung des Caplets werden wir als Numeraire  $D_{tS}$  wählen und das zugehörige Martingalmaß, auch Forwardmartingalmaß genannt, bezeichnen wir mit  $Q$ . Um die Notation etwas übersichtlicher zu halten, bezeichnen wir für die folgenden Rechnungen

$$L_t := L_t[T, S].$$

Betrachten wir die Libor-Rate, die wir durch Zero-Coupon Bonds ausdrücken können,

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{D_{tT} - D_{tS}}{D_{tS}} \\ &= \frac{D_{tT}}{N_t} - \frac{D_{tS}}{N_t}, \end{aligned}$$

so wird deutlich, dass die Libor-Rate auch ein Martingal darstellt. Um ein arbitragefreies Modell zu gestalten, muss also die Libor-Rate  $L_t$  ein Martingal bzgl. des Maßes  $Q$  sein. Dies erreichen wir unter der Annahme, dass die Libor-Rate folgende stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dL_t &= L_t \sigma_t dW_t \\ &= L_t dM_t \end{aligned}$$

mit  $M_t = \int_0^t \sigma_u dW_u$  erfüllt und die Volatilität durch eine deterministische Funktion  $\sigma_t$  gegeben ist. Mit  $W$  ist der Wiener Prozess bzgl. des Maßes  $Q$  gemeint. Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung ist nach [15] Satz 6.12

somit das Doleans-Martingal

$$\begin{aligned} L_t &= L_0 \exp \left( M_t - \frac{1}{2} [M]_t \right) \\ &= L_0 \exp \left( \int_0^t \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du \right). \end{aligned}$$

Mit diesen Modelleigenschaften ist die Verteilung der Libor-Rate bekannt und der Preis des Caplets ergibt sich durch

$$\begin{aligned} V_t &= N_t \mathbb{E}^N \left[ \alpha(L_T - K) \mathbb{1}_{\{L_T \geq K\}} N_S^{-1} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= D_{tS} \mathbb{E}^Q \left[ \alpha(L_T - K) \mathbb{1}_{\{L_T \geq K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

**Satz 3.1** (Black Formel für Caplets)

*Mit den eben erklärten Eigenschaften entspricht der Preis des Caplets zum aktuellen Zeitpunkt  $t = 0$  der Formel von Black*

$$V_0 = D_{0S} \alpha (L_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2))$$

wobei  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung entspricht,  $\alpha = S - T$ , und

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}; \\ d_2 &:= \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}. \end{aligned}$$

*Beweis.*

In der Berechnung von  $V_0 = D_{tS} \mathbb{E}^Q \left[ \alpha(L_T - K) \mathbb{1}_{\{L_T \geq K\}} \mid \mathcal{F}_0 \right]$  wird Lemma 2.4

benutzt, zur Erinnerung, dessen Aussage war

$$\int_0^T \sigma_u dW_u \sim \mathcal{N} \left( 0, \int_0^T \sigma_u^2 du \right).$$

Um die nachfolgende Berechnung übersichtlicher zu gestalten, werden wir den Erwartungswert in zwei Teile zerlegen und diese einzeln berechnen. Die Zerlegung entspricht

$$\begin{aligned} V_0 &= D_{tS} \mathbb{E}^Q \left[ \alpha(L_T - K) \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] \\ &= D_{tS} \mathbb{E}^Q \left[ \alpha L_T \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] - D_{tS} \mathbb{E}^Q \left[ \alpha K \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] \\ &= D_{tS} \alpha \left( \underbrace{\mathbb{E}^Q \left[ L_T \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right]}_{(i)} - \underbrace{\mathbb{E}^Q \left[ K \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right]}_{(ii)} \right). \end{aligned}$$

Zuerst berechnen wir den Teil (ii) wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[ K \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] &= K \mathbb{E}^Q \left[ \mathbf{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] \\ &= K Q(L_T \geq K) \\ &= K Q \left[ L_0 \exp \left( \int_0^T \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right) \geq K \right] \\ &= K Q \left[ \int_0^T \sigma_u dW_u \geq \log(K) - \log(L_0) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right] \\ &= K Q \left[ \frac{\int_0^T \sigma_u dW_u}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \geq \frac{\log(K) - \log(L_0) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right] \\ &= K \left( 1 - \Phi \left( \frac{\log(K) - \log(L_0) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K \Phi \left( -\frac{\log(K) - \log(L_0) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right) \\
&= K \Phi \left( \frac{\log(\frac{L_0}{K}) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right).
\end{aligned}$$

Um Teil (i) zu berechnen, definieren wir  $Z$  mit  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und somit gilt

$$\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \cdot Z \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T \sigma_u^2 du\right).$$

Mit  $\varphi(x)$  bezeichnen wir die Dichte der Standardnormalverteilung, d. h.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Teil (i) ergibt sich dann durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q [L_T \mathbb{1}_{\{L_T \geq K\}}] &= \mathbb{E}^Q \left[ L_0 \exp \left( \int_0^T \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right) \mathbb{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] \\
&= \mathbb{E}^Q \left[ L_0 \exp \left( \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \cdot Z - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right) \mathbb{1}_{\{L_T \geq K\}} \right] \\
&\stackrel{(1)}{=} \int_A^\infty L_0 \exp \left( \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \cdot z - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right) \varphi(z) dz \\
&= \frac{L_0}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \exp \left( \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \cdot z - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du - \frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
&= \frac{L_0}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \exp \left( \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \cdot z - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du - \frac{1}{2} z^2 \right) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L_0}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \exp \left( -\frac{1}{2} \left( z^2 - 2\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \cdot z + \int_0^T \sigma_u^2 du \right) \right) dz \\
&= \frac{L_0}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \exp \left( -\frac{1}{2} \left( z - \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} \right)^2 \right) dz \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{L_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{A}}^\infty \exp \left( -\frac{1}{2} \tilde{z}^2 \right) d\tilde{z} \\
&= L_0(1 - \Phi(\tilde{A})) \\
&= L_0\Phi(-\tilde{A}).
\end{aligned}$$

Beim Gleichheitszeichen (1) ergibt sich die Integrationsgrenze  $A$  durch Umformung von  $\{L_T \geq K\}$  bzw.

$$\begin{aligned}
\{L_T \geq K\} &\Leftrightarrow \left\{ L_0 \exp \left( \int_0^T \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right) \geq K \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ Z \geq \frac{\log \left( \frac{K}{L_0} \right) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right\}
\end{aligned}$$

und somit ist

$$A := \frac{\log \left( \frac{K}{L_0} \right) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}.$$

Gleichheitszeichen (2) erfolgt durch die Substitution

$$\tilde{z} := z - \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}$$

und die neue Integrationsgrenze  $\tilde{A}$  entspricht

$$\tilde{A} := A - \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du} = \frac{\log\left(\frac{K}{L_0}\right) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}.$$

Setzt man nun die Ergebnisse von (i) und (ii) in die Ausgangsgleichung ein, so folgt

$$V_0 = D_{0S}\alpha \left[ L_0 \Phi \left( \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right) - K \Phi \left( \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right) \right],$$

was zu zeigen war.  $\square$

### 3.3 Digitale Caplets

Ein digitaler Caplet unterscheidet sich zum Caplet darin, dass die Höhe der Auszahlung fixiert wird. Tritt der Fall  $L_T[T, S] > K$  ein, so wird der vereinbarte Betrag  $D$  ausgezahlt. Wir werden für weitere Rechnungen  $D = 1$  setzen. Die Auszahlung entspricht zum Laufzeitende  $S$  somit

$$\mathbb{1}_{\{L_T > K\}}.$$

**Satz 3.2** (Black Formel für digitale Caplets)

*Der Preis des digitalen Caplets mit Startzeitpunkt  $T$  und Laufzeitende  $S$  bezüglich der Libor-Rate  $L_T[T, S]$  ergibt sich zum aktuellen Zeitpunkt  $t = 0$  durch*

$$V_0 = D_{0S}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_2 := \frac{\log(\frac{L_0}{K}) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}.$$

*Beweis.*

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.1,

$$\begin{aligned} V_0 &= D_{0S} \mathbb{E}^Q (\mathbb{1}_{\{L_T > K\}}) \\ &= D_{0S} Q \left( L_0 \exp \left( \int_0^T \sigma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right) > K \right) \\ &= D_{0S} \Phi \left( \frac{\log(\frac{L_0}{K}) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right). \end{aligned}$$

□

### 3.4 Zinsswap

Von der Grundidee ähnelt ein Zinsswap einem FRA, nur das im Zinsswap mehrere Zahlungen stattfinden. Es wird dort zwischen zwei Vertragspartnern ein Startzeitpunkt  $T$  festgelegt und zusätzlich werden zu den Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_n$  ein Tauschgeschäft zwischen der variablen Libor-Rate  $L_{T_i}[T_i, T_{i+1}]$  und einem festen Zinssatz  $K$  vereinbart. Unterschieden wird zwischen dem Payer-Zinsswap und dem Receiver-Zinsswap. Der Inhaber des Payer-Zinsswap erhält die variable Libor-Rate und bezahlt den festen Betrag  $K$ . Die entsprechende Gegenpartei ist der Inhaber des Receiver-Zinsswap, dieser erhält den festen Betrag  $K$  und bezahlt die variable Libor-Rate. Die Länge der einzelnen Anlagenperioden entspricht  $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$  für  $i = 1, \dots, n$ , wobei wir  $T_0 = T$  setzen. Der genaue Zahlungsstrom bzgl. des Payer-Swap wird im Cashflow-Diagramm (Abbildung 3)

verdeutlicht.

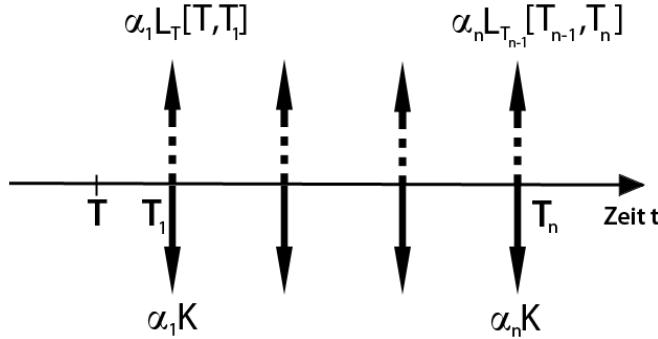


Abbildung 3: Cashflow-Diagramm Payer-Swap

Generell muss die variable und die feste Zahlung nicht zum selben Zeitpunkt stattfinden, wir werden dies für unseren weiteren Verlauf jedoch voraussetzen. Der Zinsswap besitzt keine Kosten zum Ausübungszeitpunkt  $t \leq T$ , so dass wie beim FRA hier ebenfalls ein fairer Wert für  $K$  bestimmt werden muss. Um  $K$  zu bestimmen, folgt man der gleichen Idee wie beim FRA, d.h. wir bewerten zunächst den Zinsswap. Da der Zinsswap im Endeffekt eine Folge von FRAs darstellt, könnte man den Wert des Zinsswaps direkt über die Summe der zugehörigen FRA Preise herleiten. Im nachfolgenden soll die Herleitung allerdings ausführlicher ausfallen, um mit diversen Notationen, die später im Swap-Markov-Functional Model benötigen werden, vertraut zu werden. Um den Wert des Zinsswap zu ermitteln, betrachten wir erst den Wert der festen Zahlungen  $\alpha_i K$  und anschließend den Wert der variablen Zahlungen  $\alpha L_{T_i}[T_i, T_{i+1}]$ .

Den Wert der festen Zahlungen zum Zeitpunkt  $t$ , welchen wir mit  $V_t^{FST}$  bezeichnen, erhalten wir durch Diskontierung mittels Zero-Coupon Bond. Somit gilt

$$\begin{aligned} V_t^{FST} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i K D_{tT_i} \\ &= K \sum_{i=1}^n \alpha_i D_{tT_i} \\ &= K P_t[T, \vec{S}] \end{aligned}$$

wobei  $\vec{S} = (T_1, \dots, T_n)$  und

$$P_t[T, \vec{S}] := \sum_{i=1}^n \alpha_i D_{tT_i}.$$

Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit den Betrag  $P_t[T, \vec{S}]$  als **Barwert der festen Zinsswapzahlung** (BfZ) bezeichnen.

Der Wert  $V_t^{VAR}$  der variablen Zahlungen lässt sich über eine Duplikationsstrategie bestimmen. Dazu wird zum Zeitpunkt  $t$  der Zero-Coupon Bond  $D_{tT}$  gekauft und der Zero-Coupon Bond  $D_{tT_n}$  verkauft. Die Kosten, die entstehen sind somit

$$V_t^{VAR} = D_{tT} - D_{tT_n}.$$

Zum Zeitpunkt  $T$  erhalten wir aus dem gekauften Zero-Coupon Bond  $D_{TT} = 1$  und legen diesen zur aktuellen Libor-Rate  $L_T[T, T_1]$  an. Daraus erhalten wir zum Zeitpunkt  $T_1$  eine Auszahlung von  $1 + \alpha_1 L_T[T, T_1]$ . Der Betrag  $\alpha_1 L_T[T, T_1]$  entspricht genau der Swap Zahlung und die 1 kann erneut zur Libor-Rate  $L_{T_1}[T_1, T_2]$  angelegt werden. Das heißt zum Zeitpunkt  $T_2$  erhält man  $1 + \alpha_2 L_{T_1}[T_1, T_2]$ . Analog zur vorigen Auszahlung können wir damit wieder den Swap decken und den Rest anlegen. Das wird bis zum Zeitpunkt  $T_n$  wiederholt und man erhält den Betrag  $1 - L_{T_{n-1}}[T_{n-1}, T_n]$ . Der Betrag  $L_{T_{n-1}}[T_{n-1}, T_n]$  entspricht wieder der Zinsswap Zahlung und mit dem Betrag 1 können wir den in  $t$  verkauften Zero-Coupon Bond  $D_{tT_n}$ , der nun den Wert  $D_{T_n T_n} = 1$  besitzt, decken. Aus Arbitragegründen ist der Wert der variablen Zahlungen somit

$$V_t^{VAR} = D_{tT} - D_{tT_n}$$

und die Bewertungsformel des Payer-Swaps entspricht

$$\begin{aligned} V_t &= V_t^{VAR} - V_t^{FST} \\ &= D_{tT} - D_{tT_n} - KP_t[T, \vec{S}]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass die Zeitpunkte der variablen Zahlung keine Rolle für die Bewertung spielen. Setzen wir nun  $V_t = 0$ , so erhalten wir den angemessenen Wert für K. Dieser Wert wird **Forward-Swap Rate** genannt und mit  $y_t[T, \vec{S}]$  bezeichnet. Formal bedeutet dies

$$\begin{aligned} V_t &= 0 \\ \Leftrightarrow y_t[T, \vec{S}] &= \frac{D_{tT} - D_{tT_n}}{P_t[T, \vec{S}]} \end{aligned}$$

Zusammenfassend wird dies im folgenden Satz wiedergegeben.

**Satz 3.3** (Preis des Zinsswaps)

*Der Preis eines Payer-Zinsswaps mit Startzeitpunkt T und Auszahlungen zu den Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_n$  bzgl. der Libor-Rate  $L_{T_i}[T_i, T_{i+1}]$  und Strike K ergibt sich durch*

$$V_t = P_t[T, \vec{S}] (y_t[T, \vec{S}] - K)$$

wobei

$$y_t[T, \vec{S}] = \frac{D_{tT} - D_{tT_n}}{P_t[T, \vec{S}]};$$

$$P_t[T, \vec{S}] = \sum_{i=1}^n \alpha_j D_{tT_i}$$

mit  $\vec{S} = (T_1, \dots, T_n)$ . Den Preis des Receiver-Zinsswaps erhält man durch Multiplikation mit -1.

*Beweis.*

Durch umformen und einsetzen von  $y_t[T, \vec{S}]$  in die Bewertungsformel des Payer-Zinsswap (3.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} V_t &= D_{tT} - D_{tT_n} - K P_t[T, \vec{S}] \\ &= P_t[T, \vec{S}] y_t[T, S] - K P_t[T, \vec{S}] \\ &= P_t[T, \vec{S}] (y_t[T, \vec{S}] - K). \end{aligned}$$

□

### 3.5 Zinsswaption

Ein Zinsswaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Betrachtet wird der Zinsswap, mit Startzeitpunkt  $T$  und Auszahlungen  $T_1, \dots, T_n$  bzgl. der Libor-Rate  $L_{T_i}[T_i, T_{i+1}]$  und Strike  $K$ . Äquivalent zum Zinsswap gibt es beim Zinsswaption einen Payer- und einen Receiver-Zinsswaption. Der Payer-Zinsswaption besitzt die Option zum Ausübungszeitpunkt  $T$ , welcher der Startzeitpunkt des Zinsswaps ist, in den Payer-Zinsswap einzutreten. Analog bietet der Receiver-Zinsswaption die Option in den Receiver-Zinsswap einzutreten. Eine Ausübung findet nur statt, wenn der entsprechende Zinsswap Preis einen positiven Wert besitzt. In der Praxis tritt man allerdings nicht in den Swap ein, um alle Auszahlungen des Zinsswaps zu erhalten, sondern der Wert des Zinsswaps zum Zeitpunkt  $T$  wird ausgezahlt. Bezeichnen wir mit  $V_t^{PS}$  den Preis des Payer-Zinsswaps und mit  $V_t^{RS}$  den Preis des Receiver-Zinsswaps, so ergeben sich folgende Auszahlungen für den Zinsswaption:

Der Inhaber der Payer-Zinsswaption erhält zum Zeitpunkt  $T$  die Auszahlung

$$V_T^{PS} \mathbb{1}_{\{V_T^{PS} > 0\}}.$$

Das Gegenstück, der Receiver-Zinsswaption, besitzt zum Zeitpunkt  $T$  die Auszahlung

$$V_T^{RS} \mathbb{1}_{\{V_T^{RS} > 0\}}.$$

Um den Wert dieser Optionen zu bestimmen, ziehen wir die gleichen Ideen, die zur Bewertung eines Caplets zugrunde liegen, heran. Im folgenden werden wir uns auf die Bewertung des Payer-Zinsswaption beschränken.

Unsere Basisfinanzgüter stellen in diesem Modell somit wieder die Zero-Coupon Bonds dar und der Wert des Payer-Zinsswaptions lässt sich mit der bekannten Bewertungsformel bestimmen bzw. mit

$$\begin{aligned} V_t &= N_t \mathbb{E}^N(V_T^{PS} \mathbb{1}_{\{V_T^{PS} > 0\}} N_T^{-1} \mid \mathcal{F}_t) \\ &= N_t \mathbb{E}^N(P_T[T, \vec{S}] (y_T[T, \vec{S}] - K) \mathbb{1}_{\{P_T[T, \vec{S}] (y_T[T, \vec{S}] - K) > 0\}} N_T^{-1} \mid \mathcal{F}_t) \\ &= N_t \mathbb{E}^N(P_T(y_T - K) \mathbb{1}_{\{P_T(y_T - K) > 0\}} N_T^{-1} \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

für ein Numeraire Paar  $(N, \mathbb{N})$ .

Im weiteren Verlauf werden wir  $P_t[T, \vec{S}]$  mit  $P_t$  und  $y_t[T, \vec{S}]$  mit  $y_t$  bezeichnen, sofern bekannt ist, auf welches Zeitintervall sich der BfZ und die Swap-Rate bezieht.

Zur Berechnung des Erwartungswertes gehen wir ähnlich wie bei der Bewertung des Caplets vor. Als Numeraire bietet sich hier der Barwert der festen Zinsswapzahlung  $P_t$  an. Das entsprechende Martingalmaß wird als **Swaptionmaß** bezeichnet und mit  $\mathbb{S}$  definiert. Somit ist unser Numeraire Paar  $(P_t, \mathbb{S})$ . Betrachten wir

$$y_t = \frac{D_{tT} - D_{tT_n}}{P_t}$$

so liegt hier die gleiche Situation wie bei der Bewertung des Caplets vor. Damit  $y_t$  die Martingaleigenschaft unter  $\mathbb{S}$  erfüllt, modellieren wir ihn analog zum Caplet-Fall mit

$$dy_t = y_t \sigma_t dW_t$$

für eine deterministische beschränkte Funktion  $\sigma_t$  und einem Wiener Prozess  $W$  bzgl. des Swaptionmaß  $\mathbb{S}$ . Fügen wir diese Annahmen in Gleichung (3.6) ein, so lässt sich der Wert des Payer-Zinsswaptions durch

$$V_t = P_t \mathbb{E}^{\mathbb{S}}((y_T - K) \mathbf{1}_{\{y_T - K > 0\}} \mid \mathcal{F}_t)$$

bestimmen.

**Satz 3.4** (Black Formel für Swaptions)

Der Preis zum aktuellen Zeitpunkt  $t = 0$  eines Payer-Zinsswaptions mit Ausübungzeitpunkt  $T$  bezüglich des Zinsswaps beträgt

$$V_0 = P_0(y_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2))$$

mit

$$d_1 := \frac{\log\left(\frac{y_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}};$$

$$d_2 := \frac{\log\left(\frac{y_0}{K}\right) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}.$$

Der zugrunde liegende Zinsswap enthält als Parameter den Startzeitpunkt  $T$  und Auszahlungen  $T_1, \dots, T_n$  bzgl. der Libor-Rate  $L_{T_i}[T_i, T_{i+1}]$  und Strike  $K$ .

*Beweis.*

Die Vorgehensweise entspricht der des Beweises von Satz 3.1.  $\square$

### 3.6 Digitaler BfZ-Zinsswaption

Ein digitaler BfZ-Zinsswaption ist von der Grundidee äquivalent zum digitalen Caplet. Der einzige Unterschied besteht darin, dass das zugrunde liegende Underlying der Swaption ist. Wie beim digitalen Caplet ist beim digitalen BfZ-Zinsswaption die Auszahlungshöhe ebenfalls fixiert. Der BfZ, der Barwert der festen Zinsswapzahlung  $P_t$ , bezieht sich in der Namensgebung des digitalen BfZ-Zinsswaption auf die Auszahlungshöhe. Die Auszahlung erfolgt zum Zeitpunkt  $T$ , also der Startzeitpunkt des entsprechenden Zinsswaps bzw. der Ausübungszeitpunkt des entsprechenden Zinsswaptions. Auch hier wird wieder zwischen dem digitalen Payer- und dem Receiver-BfZ-Zinsswaption unterschieden, den wir nachfolgend als digitalen Payer-Swaption und digitalen Receiver-Swaption bezeichnen. Zu beachten ist, dass im allgemeinen Fall bei dieser Bezeichnung die Auszahlungshöhe beliebig wählbar ist. Wir werden jedoch stets den Barwert der festen Zinsswapzahlung  $P_t$  als Auszahlung betrachten, da nur dieser Fall für den weiteren Verlauf benötigt wird. Somit ist die Auszahlung zum Zeitpunkt  $T$  des digitalen Payer-Swaptions

$$P_T \mathbf{1}_{\{y_T - K > 0\}} = P_T \mathbf{1}_{\{y_T > K\}}.$$

Die Auszahlung des digitalen Receiver-Swaptions beträgt

$$P_T \mathbf{1}_{\{y_T < K\}}.$$

**Satz 3.5** (Black Formel für digitale Swaptions)

*Der Preis zum Zeitpunkt  $t = 0$  eines digitalen Payer-Swaptions mit den vorher*

eingeführten Eigenschaften ergibt sich durch

$$V_0 = P_0 \Phi(d_2)$$

mit

$$d_2 := \frac{\log(\frac{y_0}{K}) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}}.$$

*Beweis.*

Die Vorgehensweise erfolgt analog zu der im Swaption Fall, d. h. wir arbeiten mit dem Numeraire Paar  $(P_t, \mathbb{S})$  und die Swap-Rate  $y_t$  wird lognormalverteilt angenommen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} V_0 &= P_0 \mathbb{E}^{\mathbb{S}} (P_T \mathbb{1}_{\{y_T > K\}} P_T^{-1}) \\ &= P_0 \mathbb{E}^{\mathbb{S}} (\mathbb{1}_{\{y_T > K\}}) \\ &= P_0 \mathbb{S}(y_T > K). \end{aligned}$$

□

### 3.7 Implizite Volatilität

Betrachten wir die Black Formel für Caplets, digitale Caplets, Swaptions und digitale Swaptions, so haben wir dort eine deterministische Volatilitätsfunktion  $\sigma_t$  unterstellt. Diese Volatilitätsfunktion wird durch historische Daten erzeugt. Die implizite Volatilität hingegen lässt sich anhand der Marktpreise bestimmen und ist somit direkt am Markt beobachtbar. Zur Bestimmung der impliziten Volatilität wird im Black Modell eine konstante Volatilität  $\sigma$  angenommen. Wir zeigen dies am Beispiel der Black Formel für Caplets, für die anderen Derivate ist die Vorgehensweise analog.

Gehen wir von einer konstanten Volatilität  $\sigma$  aus und setzen diese in die Black Formel für Caplets (Satz 3.1) ein, so erhalten wir als Preis:

$$V_0(\sigma) = D_{0S}\alpha(L_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}; \\ d_2 &= \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Der Wert  $\tilde{\sigma}$ , für den  $V_0(\tilde{\sigma})$  dem aktuellen Marktpreis entspricht, wird die **implizite Volatilität** genannt.

### Satz 3.6

*Unter der Annahme, dass die Marktpreise mit der Black Formel bewertet wurden, ergibt sich im Fall für digitale Caplets mit impliziter Volatilität  $\tilde{\sigma}_1$  der Preis durch*

$$V_0 = D_{0S}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_2 := \frac{\log\left(\frac{L_0}{K}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_1^2 T}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}.$$

*Im Fall des digitalen Swaptions ergibt sich mit impliziter Volatilität  $\tilde{\sigma}_2$  der Preis durch*

$$V_0 = P_0\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_2 := \frac{\log(\frac{y_0}{K}) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_2^2 T}{\tilde{\sigma}_2 \sqrt{T}}.$$

*Beweis.*

Ergibt sich direkt aus den vorigen Kapiteln.  $\square$

## 4 Exotische Derivate

Ziel des Markov-Functional Models ist es, exotische Zinsderivate zu bewerten. Daher ist für das Verständnis des Modells von Vorteil, einen Einblick in die Eigenschaften exotischer Derivate zu erhalten. Dazu soll zunächst dargestellt werden, was man unter exotischen Derivaten versteht bzw. welche Eigenschaften sie kennzeichnen. Darauf wird in diesem Kapitel näher eingegangen und anhand von Beispielen veranschaulicht.

### 4.1 Arten von Derivaten

In der vorangegangen Betrachtung der Standard-Zinsderivate ist deutlich geworden, dass die Auszahlung von nur einem bestimmten Zeitpunkt abhängt. Das heißt, um diese Standard-Derivate zu bewerten, ist es ausreichend ein Modell für diesen einen Zeitpunkt zu modellieren, was die Berechnungen im speziellen Fall oft vereinfacht. Optionen, dessen Auszahlung nur von einem Zeitpunkt  $T$  abhängen, werden als **Europäische Optionen** bezeichnet. Der Inhaber einer Europäischen Option erwirbt also das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem Zeitpunkt  $T$  die Option auszuüben. Bei der **Amerikanischen Option** erhält der Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht, während der gesamten Laufzeit die Option auszuüben. Eine weitere Form von Optionen ist die sogenannte **Bermuda Option**, diese gibt das Recht, aber nicht die Pflicht, zu vorher festgelegten Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_n$  die Option auszuüben. Bei Amerikanischen und Bermuda Optionen hängt die Auszahlung also nicht mehr von nur einem Zeitpunkt ab, folglich ist die Bewertung solcher Optionen komplizierter. Im Falle von Zinsoptionen wird somit ein Modell benötigt, welches die komplette bzw. alle relevanten Zeitpunkte der Zinsstruktur modelliert. Optionen oder allgemeiner Derivate, dessen Auszahlung von mehreren Zeitpunkten abhängen, werden wir als **multitemporale Derivate** oder **pfadabhängige Derivate** bezeichnen. Eine weitere Unterscheidung, die oft in der Literatur anzutreffen ist, ist die zwischen Vanilla

Derivaten und exotischen Derivaten. Für die Trennung oder Einteilung solcher Derivate in diese beiden Gruppen gibt es keine einheitliche Definition, so dass sich in der Literatur teilweise unterschiedliche Aussagen dazu finden lassen. In der Regel werden mit **Vanilla Derivate** Standard Derivate bezeichnet. **Exotische Derivate** sind demnach eher außergewöhnliche und nicht gängige Derivate. Meistens gehören sie in die Kategorie der multitemporalen Derivate und zeichnen sich oft durch eine komplizierte Auszahlungsstruktur aus.

Um dies zu verdeutlichen, werden im nächsten Abschnitt einige Beispiele Exotischer Zinsderivate aufgezeigt.

## 4.2 Beispiele

Wie bereits erwähnt verfolgt das Markov-Functional Model das Ziel, exotische Zinsderivate zu bewerten. Im Hauptteil dieser Arbeit wird das Libor- und das Swap-Markov-Functional Model erörtert. Um vorab einen kurzen Einblick in die Anwendungen dieser beiden Modelle zu erhalten, betrachten wir entsprechende Beispiele für diese Modelle. Das Libor-Markov-Functional Model eignet sich zum Beispiel für die Bewertung von Limit-Caps und Chooser-Caps, für das Swap-Markov-Functional Model betrachten wir als Beispiel ein Bermuda-Swaption.

### 4.2.1 Limit-Cap

Ein Limit Cap ähnelt sehr dem Standard Cap, mit dem Unterschied, dass ein weiterer Parameter, der sogenannte Limitwert  $m$ , eingeführt wird. Wie bereits im vorigen Kapitel beschrieben, besteht ein Cap aus einer Abfolge von Caplets. Konkret besteht ein Cap aus dem Startzeitpunkt  $T = T_0$ , den Auszahlungszeitpunkten  $T_i$ , der Periodenlänge  $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$  und Strikes  $K_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Der Preis dieser Option zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $V_t$  bezeichnet und die Auszahlungen

zu den Zeitpunkten  $T_i$  entsprechen somit

$$\alpha_i(L_{T_i}[T_i, T_{i+1}] - K_i) \mathbb{1}_{\{L_{T_i}[T_i, T_{i+1}] > K_i\}}.$$

für  $i = 0, \dots, n-1$ . Verdeutlicht wird dies wieder im Cashflow Diagramm, wobei wir die Schreibweise  $(L_{T_i}[T_i, T_{i+1}] - K_i)^+ := \max(L_{T_i}[T_i, T_{i+1}] - K_i, 0)$  benutzen.

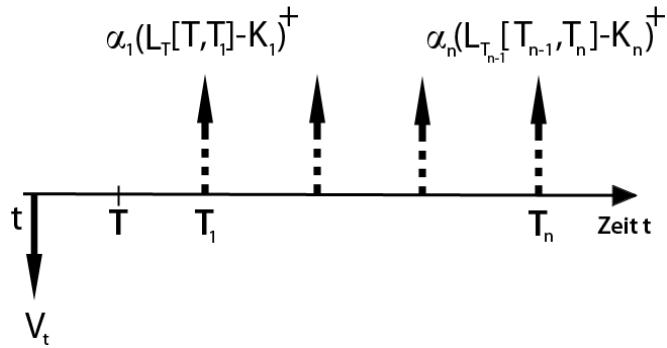


Abbildung 4: Cashflow-Diagramm Cap

Die Erweiterung im Limit-Cap ist der vorher festgelegte Limitwert  $m$ , der besagt, dass nur die ersten  $m$  Caplets, die im Geld sind, ausgezahlt werden. Sobald die ersten  $m$  Auszahlungen stattgefunden haben, verfallen die restlichen Auszahlungen, unabhängig davon, ob die späteren Caplets ebenfalls im Geld sind. Für die Wahl  $m = d$  erhalten wir wieder den normalen Cap und die Bewertung des Limit-Caps ist somit bekannt. Wird  $m < d$  gewählt, wird die Bewertung komplizierter, da wir es nicht mehr nur über die Summation von Capletspreisen bestimmen können.

#### 4.2.2 Chooser-Caps

Ein Chooser-Cap ist von der Grundausstattung identisch zu dem Limit-Cap, allerdings ergibt sich beim Chooser-Cap ein weiterer Vorteil für den Inhaber. Wie im Limit-Cap wird ein Limitwert  $m$  vorher festgelegt, um die Auszahlungen von  $m$  Caplets die im Geld sind, zu erhalten. Der zusätzliche Vorteil, der beim Chooser-Cap gegeben wird, ist die Entscheidung, Auszahlungen ablehnen zu können. Be-

trachtet man den Fall vom Limit-Cap heißt das, der Inhaber ist gezwungen, die ersten  $m$  Auszahlungen, bei denen die Caplets im Geld sind, auszuüben. Im Falle vom Chooser-Cap besteht allerdings die Möglichkeit, auf eine bessere Auszahlung zu warten. Welche Auszahlungen gewählt werden, spielt somit keine Rolle, es darf aber maximal die festgelegten  $m$  Auszahlungen nicht überschreiten. Des Weiteren ist wichtig zu erwähnen, dass falls eine Auszahlung abgelehnt wird, besteht im Nachhinein keine Möglichkeit mehr, unabhängig davon, ob der Inhaber noch nicht die vollen  $m$  Auszahlungen ausgenutzt hat, diese zu erhalten. Der Chooser-Cap bietet somit mehr Flexibilität im Vergleich zum Limit-Cap. Wählt der Inhaber die Strategie, die ersten  $m$  Auszahlungen zu wählen, so ist die Auszahlung identisch zum Limit-Cap. Daher muss der Preis des Chooser-Caps mindestens dem Preis des Limit-Caps entsprechen.

#### 4.2.3 Bermuda Swaption

Eines der bekanntesten Exotischen Zinsderivate im Markt, die auf den Swap basieren, ist das Bermuda-Swaption. Betrachten wir einen Payer-Swap mit Startzeitpunkt  $T$ , Zahlungen zu den Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_n$  und Strike  $K$ , so verpflichtet sich der Inhaber des Swaps alle Zahlungen, auch wenn sie zum Nachteil sind, auszugleichen. Der **Bermuda-Payer-Swaption** zeichnet sich dadurch aus, dass es dem Inhaber das Recht gibt, zu einem späteren Zeitpunkt  $T_1, \dots, T_n$  in den Swap einzutreten. Das Gegenstück ist der Cancellable-Swap, dieser gibt das Recht, zu den Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_n$  aus dem Swap auszutreten.

## 5 Markov-Functional Model

### 5.1 Einleitung

Mit dem in den vorangegangen Kapiteln eingeführten Vorwissen lässt sich nun das Markov-Functional Model beschreiben. Viele Zinsstrukturmodelle beschreiben ihre Zinskurve mittels infinitesimalen Zinsen, die so am Markt nicht beobachtbar sind. Das daraus folgende Problem ist die Kalibrierung am Markt. Das Markov-Functional Model besitzt wie das Libor-Markt Modell die Fähigkeit, die am Markt tatsächlich beobachtbaren (Libor, Swap) Sätze zu modellieren. Möchte man zum Beispiel einen Bermudian Swaption bewerten, der das Recht gibt aus einem 10-Jahres Swap, welches vierteljährliche Ausschüttungen liefert, auszutreten, so entspricht im Libor-Markt Modell die Dimension des Prozesses der Anzahl der modellierten Libors, also in diesem Fall 39.<sup>10</sup> Es liegt auf der Hand, dass dies die Implementierung bzw. Berechnung in der Praxis erschwert. Diese Dimensionsproblematik ist eine der Hauptmotivationen des Markov-Functional Models. Der entscheidende Vorteil und auch die Kernidee des Markov-Functional Models ist, dass die Zero-Coupon Bonds über eine Funktion eines Markov Prozesses  $X$  beschrieben werden. Damit aber eine effiziente und anwendungsfreundliche Implementierung ermöglicht wird, muss der Markov Prozess von niedriger Dimension sein. In der Regel ist  $X$  ein- oder höchstens zweidimensional. Durch diese niedrige Dimension lässt sich die Bewertung eines Derivates ähnlich effizient wie beispielsweise im Vasicek-Hull-White Modell berechnen. In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf den Fall, dass der Markov Prozess  $X$  eindimensional ist. Die Informationen, die für dieses Modell benötigt werden, sind die Marktpreise und Bewertungsformeln von Caplets und Swaps, für einen geeigneten Bereich von Strikes  $K$  und Laufzeiten  $T$ . Mittels dieser Daten als Input, lässt sich die funktionale Form der Forward-Libor und der Forward-Swap Raten als Output erzeugen.

---

<sup>10</sup>Seite 338 in [8]

Im Markov-Functional Model berechnet man allerdings nicht den Libor oder die Swap Raten direkt, sondern Zero Coupon Bonds. Allerdings lassen sich die Libor bzw. Swap Raten dann aus den entsprechenden Zero Coupon Bonds herleiten, wie in vorigen Kapiteln gezeigt wurde.

## 5.2 Das Modell

Damit ein Zinsstruktur Modell hinsichtlich der Umsetzung in der Praxis sinnvoll bleibt, wird das Markov-Functional Model so aufgebaut, dass es folgende vier Kriterien erfüllt:

- a) Es soll arbitragefrei sein;
- b) Es soll gut kalibrierbar sein bzgl. der Marktpreise relevanter Standardprodukte;
- c) Es soll realistisch und transparent in seinen Eigenschaften sein;
- d) Eine effiziente Implementierung soll möglich sein.

Betrachtet man mal andere Zinsmodelle mit Hinblick auf die vier Kriterien a)-d) wird deutlich, dass mindestens eines der Kriterien nicht erfüllt wird. Durch die Markov-Functional Eigenschaften werden wir in der Lage sein, Modelle zu entwickeln, welche alle vier Kriterien erfüllen und die zudem vor allem verwendet werden können, um multi-temporale Produkte zu bewerten. Um Kriterium d) zu erfüllen, also dass das Markov-Functional Model in der Praxis effizient implementierbar gestaltbar bleibt, muss der Markov Prozess von Dimension eins oder höchstens zwei sein. Da das Ziel darin besteht, multi-temporale Produkte zu bewerten, stellt dies eine starke Restriktion dar.

Unser Zinsstrukturmodell, dass wir beschreiben werden, besteht aus einer endli-

chen Menge von Zero-Coupon Bonds

$$\{D_{tT} \mid t \leq T; T \in \mathbb{T}\},$$

wobei  $\mathbb{T} := \{T_1, \dots, T_{n+1}\}$  entspricht. Die Sigma-Algebra, welche unsere verfügbaren Informationen zum Zeitpunkt  $t$  darstellt, entspricht

$$\mathcal{F}_t := \sigma(D_{uT} \mid u \leq t; T \in \mathbb{T}).$$

Eine Eigenschaft des Markov-Functional Models ist es, die Zero-Coupon Bonds über eine Funktion eines Markov Prozesses  $X$  zu beschreiben. Um zwischen dem stochastischen Prozess  $(D_{tS})_{0 \leq t \leq S}$  und der funktionalen Form des Zero-Coupon Bonds zu unterscheiden, bezeichnen wir die funktionale Form des Zero-Coupon Bonds mit

$$B_{tS} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_t \mapsto B_{tS}(X_t)$$

für  $0 \leq t \leq S$  und  $S \in \mathbb{T}$ .

Die Erfinder des Markov-Functional Models, Hunt und Kennedy, haben das Modell folgendermaßen definiert:

**Definition 5.1** (Markov-Functional Model)

Ein Zinstrukturmodell heißt **Markov-Functional Model**, falls ein Numeraire Paar  $(N, \mathbb{N})$ , d.h. die Zero-Coupon Bond Preise ausgedrückt in Numeraire Einheiten sind Martingale, existiert und ein Prozess  $X$ , so dass folgendes gilt

**(P1)** Der Prozess  $X$  ist ein Markov Prozess unter dem Maß  $\mathbb{N}$ ;

**(P2)** Die Zero-Coupon Bonds sind als Funktion eines Markov Prozesses  $X$  dar-

stellbar, d.h.

$$D_{tS} = B_{tS}(X_t), \quad 0 \leq t \leq S,$$

für  $S \in \mathbb{T}$ ;

**(P3)** Die Zero-Coupon Bonds sind strikt monoton fallende Funktionen in  $X$ ;

**(P4)** Der Numeraire  $N$ , selbst ein Preisprozess, lässt sich als funktionale Form darstellen, d.h.

$$N_t = N_t(X_t), \quad 0 \leq t \leq \partial^*,$$

wobei  $\partial^*$  die maximale Fälligkeit des Numeraires entspricht.

Wirft man einen Blick auf die Definition des Markov-Functional Models, so wird deutlich, dass der Hauptbestandteil der Markov Prozess  $X$  darstellt. Wir gehen damit von der Annahme aus, dass der Markt zum Zeitpunkt  $t$  durch  $X_t$  beschrieben werden kann. Eine weitere wichtige Annahme des Modells ist, dass die Zero-Coupon Bonds strikt monotone Funktionen in  $X$  sind, d.h. der Wert eines Zero-Coupon Bond zum Zeitpunkt  $t$  vollständig durch den Prozess  $X_t$  bestimmt ist.

Bevor wir das Libor- und Swap-Markov Functional Model ausführlich beschreiben, werfen wir noch einen Blick auf die Definition 5.1. Wählen wir als Numeraire den Zero-Coupon Bond mit der maximalen Fälligkeit, also  $B_{T_{n+1}}$ , so genügt es nur die funktionale Form des Numeraires zu bestimmen. Das heißt, bezogen auf die Definition des Markov-Functional Models, dass sich die Punkte

**(P2)** Die Zero-Coupon Bonds sind als Funktion eines Markov Prozesses  $X$  darstellbar, d.h.

$$D_{tS} = B_{tS}(X_t), \quad 0 \leq t \leq S,$$

für  $S \in \mathbb{T}$ ;

und

**(P4)** Der Numeraire  $N$ , selbst ein Preisprozess, lässt sich als funktionale Form darstellen, d.h.

$$N_t = N_t(X_t), \quad 0 \leq t \leq \partial^*,$$

wobei  $\partial^*$  die maximale Fälligkeit des Numeraires entspricht;

deutlich vereinfachen lassen. Um dies zu zeigen, definieren wir zuerst unseren Markov Prozess  $X$ . Eine übliche Wahl in der Praxis für einen eindimensionalen Markov Prozess  $X$  ist

$$dX_t = \sigma_t dW_t, \quad x_0 = 0, \tag{5.1}$$

wobei  $\sigma_t$  eine deterministische Funktion ist und  $W$  ein Wiener-Prozess. In Anwendungen wird oft die deterministische Funktion  $\sigma_t = \sigma \exp(at)$  für ein  $\sigma > 0$  und einen mean reversions<sup>11</sup> Parameter  $a$  benutzt. Der Vorteil dieser Wahl von  $X$  liegt darin, dass die Verteilung von  $X$  analytisch bekannt ist. Die bedingte Verteilung von  $X_s$  bedingt unter  $X_t$  für  $t \leq s$  entspricht der Normalverteilung mit Erwartungswert  $X_t$  und Varianz  $\int_t^s \sigma_u^2 du$ . Die bedingte Dichte bezeichnen wir

---

<sup>11</sup>nähere Informationen dazu in [16] 9.5.1 und in [6] 22.3.

mit

$$\phi_{X_s|X_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\tilde{\sigma}^2}\right),$$

wobei  $\tilde{\sigma}^2$  die Varianz und  $\mu$  den Erwartungswert von  $X_s$  bedingt unter  $X_t$  bezeichnet. Der Prozess  $X$  ist nach Satz 2.7 ein Markov Prozess und erfüllt somit den ersten Punkt (P1) der Definition des Markov-Functional Models.

Durch die Annahme eines Numeraire Paares  $(N, \mathbb{N})$  ergibt sich für die Zero-Coupon Bonds  $B_{tS}(X_t)$  für  $0 \leq t \leq S$  und  $S \in \mathbb{T}$

$$B_{tS}(X_t) = N_t(X_t) E \left[ \frac{B_{SS}(X_S)}{N_S(X_S)} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Als Numeraire wählen wir, wie oben angedeutet, den Zero-Coupon Bond  $B_{T_{n+1}}$  und bezeichnen das entsprechende Martingalmaß mit  $Q^{n+1}$ . Dann ergibt sich durch die Eigenschaft des Markov Prozesses  $X$  aus der vorigen Gleichung:

$$\begin{aligned} B_{tS}(X_t) &= B_{tT_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{B_{SS}}{B_{ST_{n+1}}(X_S)} \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} B_{tT_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{1}{B_{ST_{n+1}}(X_S)} \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} B_{tT_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{1}{B_{ST_{n+1}}(X_S)} \mid X_t \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} B_{tT_{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B_{ST_{n+1}}(z)} \phi_{X_S|X_t}(z) dz. \end{aligned}$$

Für Punkt (1) wurde die Eigenschaft (2.1) des Zero-Coupon Bonds, bzw. das

$$B_{SS} \equiv 1$$

gilt, benutzt. Für (2) wurde die Eigenschaft des Markov Prozesses  $X$  verwendet

und im Punkt (3), dass  $X_S$  bedingt unter  $X_t$  normalverteilt ist.

Aus dieser Gleichung wird also deutlich, dass sich die funktionale Form aller weiteren Zero-Coupon Bonds mittels des Numeraires bestimmen lassen. Die Hauptaufgabe des Markov-Functional Model besteht folglich daraus, die funktionale Form des Numeraires

$$B_{tT_{n+1}}(X_t)$$

für  $t \leq T_{n+1}$  zu bestimmen.

### 5.3 Libor-Markov-Functional Model

Zu Beginn wird geklärt, welche Daten als Input für unser Modell vorhanden sind. Zum Zeitpunkt 0 liegen uns Zero-Coupon Bonds  $D_{0T_i}$  und Marktpreise  $V_0^{ref}(T_i, K_i)$  von Standardderivaten (z.B. Caplets oder Swaps) für unterschiedliche Laufzeiten  $T_i$  sowie verschiedener Strikes  $K_i$  vor. Welche Marktpreise  $V_t^{ref}(T_i, K_i)$  gewählt werden, hängt vom Derivat ab, welches es zu bewerten gilt.

Im Libor-Markov-Functional Model sind unsere zugrunde liegenden Marktpreise die Preise von Caplets. Als Bewertungsformel für Caplets verwenden wir die Formel von Black. Es ist zwar möglich, ein anderes Bewertungsverfahren zu unterstellen, allerdings wird im Libor- und Swap-Markov-Functional Model in der Regel das Modell von Black verwendet und kommt somit auch in dieser Arbeit zum Tragen. Wie in Kapitel 4 gezeigt wurde, hängen die Preise der exotischen Derivate oft indirekt von einer Menge von Libor-Raten bzw. Zero-Coupon Bonds ab. Ist es möglich, diese Zero-Coupon Bonds zu modellieren, so können auch die Preise dieser Derivate bestimmt werden. Wir gehen dementsprechend von der Annahme aus, dass unser multi-temporales Derivat, welches bewertet werden soll, von den Zero-Coupon Bonds  $B_{T_i T_j}$  für  $1 \leq i < j \leq n + 1$  abhängt.

In der Praxis stellt diese Annahme einen typischen Fall dar und ist insofern sinnvoll gewählt. Somit genügt es, die Zero-Coupon Bonds  $B_{T_i T_j}$  für  $1 \leq i < j \leq n + 1$

zu modellieren. Das Libor-Markov-Functional Model löst diese Aufgabenstellung, indem es eine funktionale Form der Libor-Raten bzw. Zero-Coupon Bonds herleitet. Die Idee dabei ist, die funktionale Form der Zero-Coupon Bonds durch entsprechenden (digitalen) Capletpreisen zu erzeugen.

Wir nehmen an, dass die Marktpreise der Caplets mit der Black Formel mit impliziter Volatilität  $\tilde{\sigma}_i$  gegeben sind. Als Numeraire wählen wir  $B_{T_{n+1}}$  und das entsprechende Martingalmaß bezeichnen wir mit  $Q^{n+1}$ . Um im Einklang mit der Black Formel für Caplets zu bleiben, wählen wir die Libor-Raten ebenfalls lognormalverteilt. Daraus folgt, dass sich die Dynamik der Libor-Rate  $L_t^n$  darstellen lässt durch

$$dL_t^n = \sigma_t^n L_t^n dW_t,$$

wobei  $W_t$  ein Wiener Prozess bzgl.  $Q^{n+1}$  und  $\sigma_t^n$  eine deterministische Funktion ist. Im nächsten Schritt folgt die Bestimmung des Markov Prozesses  $X$ . Wie in der Gleichung (5.1) beschrieben, bestimmten wir den Markov Prozess  $X$  mit der Dynamik

$$dX_t = \sigma_t^n dW_t, \quad X_0 = 0$$

bzw. in der Integraldarstellung

$$X_t = \int_0^t \sigma_u^n dW_u. \quad (5.2)$$

Somit ist (P1) der Definition 5.1 erfüllt. Die Punkte (P2) und (P4) bedeuten bezüglich des betrachtenden Falls, dass nun die Zero-Coupon Bonds und das Numeraire  $B_{T_i T_{n+1}}$  für  $i = 1, \dots, n+1$  zu bestimmen ist. Wie im vorigen Kapitel

beschrieben, genügt es im Libor-Markov-Functional Model nur das Numeraire

$$B_{T_i T_{n+1}}$$

für  $i = 1, \dots, n+1$  zu bestimmen. Ist nämlich die funktionale Form des Numeraires  $B_{T_i T_{n+1}}$  gegeben, so lassen sich die restlichen Zero-Coupon Bonds daraus herleiten.

#### Berechnung des Numeraires:

Zur Bestimmung der Numeraires wird entgegengesetzt zur chronologischen Reihenfolge vorgegangen. Das bedeutet  $B_{T_{n+1}}$  wird bestimmt, in dem man sich von  $T_{n+1}$  bis  $T_1$  vorarbeitet. Der erste Schritt besteht darin, folglich die funktionale Form von  $B_{T_{n+1} T_{n+1}}(X_{T_{n+1}})$  zu bestimmen.

Dieser Wert ist per Definition des Zero-Coupon Bonds gegeben und es gilt

$$B_{T_{n+1} T_{n+1}}(X_{T_{n+1}}) \equiv 1.$$

Im zweiten Schritt wird die funktionale Form von  $B_{T_n T_{n+1}}(X_{T_n})$  bestimmt. In Kapitel 2 haben wir den Zusammenhang zwischen der Libor-Rate und den Zero-Coupon Bonds erläutert. Das heißt, wir können den Zero-Coupon Bond  $B_{T_n T_{n+1}}$  bzw. unser Numeraire darstellen durch

$$B_{T_n T_{n+1}} = \frac{1}{1 + \alpha_n L_{T_n}^n} = \frac{1}{1 + \alpha_n L_{T_n}[T_n, T_{n+1}]} \quad (5.3)$$

Die Libor-Rate  $L_t^n$  wurde als lognormalverteilt angenommen bzw. es gilt

$$dL_t^n = \sigma_t^n L_t^n dW_t.$$

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist

$$L_t^n = L_0^n \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_u^n)^2 du + \int_0^t \sigma_u^n dW_u \right)$$

bzw. zum Zeitpunkt  $T_n$  entspricht sie

$$L_{T_n}^n = L_0^n \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^{T_n} (\sigma_u^n)^2 du + \int_0^{T_n} \sigma_u^n dW_u \right).$$

Setzen wir in diese Gleichung die für  $X_{T_n}$  definierte Darstellung (5.2) ein, so erhalten wir

$$L_{T_n}^n = L_0^n \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^{T_n} (\sigma_u^n)^2 du + X_{T_n} \right).$$

Damit ergibt sich die funktionale Form von  $B_{T_n T_{n+1}}$  durch Einsetzen von  $L_{T_n}$  in die Gleichung (5.3) durch

$$B_{T_n T_{n+1}}(X_{T_n}) = \frac{1}{1 + \alpha_n L_0^n \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^{T_n} (\sigma_u^n)^2 du + X_{T_n} \right)}.$$

Die funktionale Form von  $B_{T_{n+1} T_{n+1}}$  und  $B_{T_n T_{n+1}}$  ist damit bestimmt. Die weiteren Zero-Coupon Bonds  $B_{T_i T_{n+1}}$  für  $i = 1, \dots, n-1$  werden nun unter Zuhilfenahme der Caplet- bzw. digitalen Capletpreisen erzeugt. Anstatt nun rückwärts der Reihenfolge entlangzugehen und  $B_{T_{n-1} T_{n+1}}$  zu bestimmen, geben wir ein rekursives Schema an, um alle restlichen Zero-Coupon Bonds zu erhalten. Ausführlich soll dies am Beispiel von  $B_{T_m T_{n+1}}$  für  $T_1 \leq T_m < T_n$  gezeigt werden. Da wir rückwärts vorgehen, ist bei der Bestimmung von  $B_{T_m T_{n+1}}$  die funktionale Form des Zero-Coupon Bond  $B_{T_{m+1} T_{n+1}}$  als bekannt vorausgesetzt.

Um  $B_{T_m T_{n+1}}$  mit den aktuellen Marktpreisen zu kalibrieren, werfen wir zunächst einen formalen Blick auf die Bewertungsformel des digitalen Caplets.

Der digitale Caplet bezüglich der Libor-Rate  $L_{T_m}^m = L_{T_m}[T_m, T_{m+1}]$  mit Strike  $K$

hat gemäß der Definition von Kapitel 3.3 zum Zeitpunkt  $T_{m+1}$  die Auszahlung

$$\mathbb{1}_{\{L_{T_m}^m > K\}}.$$

Diskontiert man dies auf den Zeitpunkt  $T_m$ , so können wir den Wert der Auszahlung zum Zeitpunkt  $T_m$  alternativ darstellen durch

$$B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}) \mathbb{1}_{\{L_{T_m}^m (X_{T_m}) > K\}}.$$

Mit  $V_t^m(K)$  bezeichnen wir den digitalen Capletpreis zum Zeitpunkt  $t$  auf die Libor-Rate  $L_{T_m}^m$  mit Strike  $K$ . Bezuglich des Numeraires  $B_{T_{n+1}}$  und des Martingalmaßes  $Q^{n+1}$ , lässt sich der Preis zum Zeitpunkt  $t = 0$  des digitalen Caplets darstellen durch die Bewertungsformel

$$V_0^m(K) = B_{0 T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m})}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m})} \mathbb{1}_{\{L_{T_m}^m (X_{T_m}) > K\}} \right).$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass die digitalen Capletpreise mit der Black Formel mit impliziter Volatilität  $\tilde{\sigma}_m$  gegeben sind, ist der Preis  $V_0^m(K)$  gemäß Satz 3.6:

$$V_0^m(K) = B_{0 T_{m+1}}(X_0) \Phi(d_2^m),$$

wobei

$$d_2^m = \frac{\log(\frac{L_0}{K}) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2 T_m}{\tilde{\sigma}_m \sqrt{T_m}}.$$

Durch (P3) der Definition 5.1, also dass unser Numeraire eine strikt monoton fallende Funktion von  $X$  ist, überträgt sich dies auf die Libor-Rate. Die Libor-Rate  $L_{T_m}^m$  ist somit eine strikt monoton wachsende Funktion von  $X_{T_m}$  und somit

existiert ein eindeutiges  $X_{T_m}^*$ , so dass

$$L_{T_m}^m(X_{T_m}^*) = K$$

$Q^{n+1}$  fast sicher gilt. Damit lässt sich die Auszahlung zum Zeitpunkt  $T_m$  des digitalen Caplets umformen zu

$$\begin{aligned} V_{T_m}^m &= B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}) \mathbb{1}_{\{L_{T_m}^m(X_{T_m}) > K\}} \\ &\Leftrightarrow \\ V_{T_m}^m &= B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}) \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}}. \end{aligned}$$

Der Preis des digitalen Caplets mit Strike  $K$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  lässt sich durch den Erwartungswert bezüglich unser Martingalmaß  $Q^{n+1}$  berechnen durch

$$\begin{aligned} V_0^m(K) &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m})}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m})} \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}} \right) \quad (5.4) \\ &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left[ \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{B_{T_{m+1} T_{m+1}}(X_{T_{m+1}})}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(X_{T_{m+1}})} \mid \mathcal{F}_{T_m} \right) \right] \\ &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left[ \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{1}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(X_{T_{m+1}})} \mid \mathcal{F}_{T_m} \right) \right] \\ &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left[ \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{1}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(X_{T_{m+1}})} \mid X_{T_m} \right) \right] \\ &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left[ \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(z)} \phi_{X_{T_{m+1}} | X_{T_m}}(z) dz \right] \\ &= B_{0T_{n+1}} \int_{X_{T_m}^*}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(z)} \phi_{X_{T_{m+1}} | X_{T_m}}(z) dz \right] \phi_{X_{T_m} | X_0}(u) du. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wird deutlich, dass das Integral nur noch von den Zero-Coupon Bonds  $B_{T_{m+1} T_{n+1}}$  und  $B_{0T_{n+1}}$  abhängt. Im vorigen Iterations-Schritt wurde  $B_{T_{m+1} T_{n+1}}$  bestimmt und  $B_{0T_{n+1}}$  ist durch den Markt gegeben. Das heißt dem-

nach, für  $X_{T_m}^* \in \mathbb{R}$  lässt sich, wenn auch nur numerisch, dieses Integral lösen.

Den numerischen Wert dieses Integrals bezeichnen wir mit  $J(X_{T_m}^*)$ .

Zur Erinnerung,  $X_{T_m}^*$  wurde so gewählt, dass

$$L_{T_m}^m(X_{T_m}^*) = K$$

gilt. Wir wählen also ein  $X_{T_m}^*$  so, dass  $J(X_{T_m}^*)$  mit dem Marktpreis übereinstimmt.

Durch Gleichsetzen von  $J(X_{T_m}^*)$  und dem gegebenen Marktpreis  $V_0^m(K)$  bzw.

$$J(X_{T_m}^*) = V_0^m(K) = V_0^m(L_{T_m}^m(X_{T_m}^*))$$

erhalten wir eine Gleichung in  $L_{T_m}^m(X_{T_m}^*)$  und können damit die funktionale Form der Libor-Rate bestimmen. Dies erreichen wir, in dem wir den Marktpreis  $V_0^m(K)$  bzw.  $J(X_{T_m}^*)$  nach der Libor-Rate  $L_{T_m}^m(X_{T_m}^*)$  auflösen:

$$\begin{aligned} J(X_{T_m}^*) &= B_{0T_{m+1}}(X_0) \Phi \left( \frac{\log \left( \frac{L_0}{L_{T_m}^m(X_{T_m}^*)} \right) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2 T_m}{\tilde{\sigma}_m \sqrt{T_m}} \right) \\ &\Leftrightarrow \\ L_{T_m}^m(X_{T_m}^*) &= L_0^m \exp \left( -\frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2 T_m - \tilde{\sigma}_m \sqrt{T_m} \Phi^{-1} \left( \frac{J(X_{T_m}^*)}{B_{0T_{m+1}}} \right) \right), \end{aligned}$$

wobei  $\Phi^{-1}$  der Inversen der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung entspricht.

Damit wäre die funktionale Form der Libor-Rate  $L_{T_m}^m(X_{T_m}^*)$  bestimmt und somit lässt sich auch die funktionale Form des Zero-Coupon Bonds  $B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)$

herleiten. Dazu werden wir erst die Libor-Rate umformen in

$$\begin{aligned}
 L_{T_m}^m(X_{T_m}^*) &= \frac{1 - B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)}{\alpha_m B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)} \\
 &= \frac{1 - B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)}{\alpha_m B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}}}_{=1} \\
 &= \frac{1}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)} - \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)}{\alpha_m \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}}. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichung nach unserem gesuchten Zero-Coupon Bond  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)$  auf, so erhalten wir die funktionale Form

$$B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*) = \left( (1 + \alpha_m L_{T_m}^m(X_{T_m}^*)) \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)} \right)^{-1}.$$

Der auf der rechten Seite auftretende Wert  $\frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}$  wurde in der Berechnung vom Integral  $J(X_{T_m}^*)$  bzw. in der Berechnung des Erwartungswertes (5.4) berechnet und ist somit bekannt.

Mit dieser Kalibrierung haben wir also zu einem gegebenen Capletpreis mit Strike  $K$  die funktionale Form  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)$  bestimmt. Um alle Werte  $X_{T_m}^* \in \mathbb{R}$  bzw. die funktionale Form des Zero-Coupon Bonds  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)$  daraus zu erhalten, benötigen wir rein theoretisch unendlich viele Capletpreise mit Strikes  $K_i$ . In der Praxis sind allerdings nur endlich viele Capletpreise gegeben. Nehmen wir an, es seien die Capletpreise  $V_0^m(K_i)$  mit unterschiedlichen Strikes  $K_i$  für  $i = 1, \dots, d$  gegeben, so erhalten wir die diskrete Menge

$$\{X_{T_m, i}^* \mid L_{T_m}^m(X_{T_m, i}^*) = K_i\}.$$

Die funktionale Libor-Rate erhalten wir dann analog zur Berechnung (5.5) und

wird dargestellt durch

$$L_{T_m}^m(X_{T_m,i}^*) = \frac{\frac{1}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*)} - \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m,i}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*)}}{\alpha_m \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m,i}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*)}}$$

für  $i = 1, \dots, d$ .

Schlussendlich erhalten wir damit die Menge bzgl. der Zero-Coupon Bonds

$$\left\{ X_{T_m,i}^* \mid B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*) = \left( (1 + \alpha_m L_{T_m}^m(X_{T_m,i}^*)) \frac{B_{T_m T_{m+1}}(X_{T_m,i}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*)} \right)^{-1}; i = 1, \dots, d \right\}.$$

Dies ist aufgrund der endlichen Menge an Capletpreisen nur eine diskrete Menge.

Um die restlichen Zero-Coupon Bonds  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*)$  für  $i \neq 1, \dots, d$  zu erlangen, wird zwischen den bereits berechneten Zero-Coupon Bonds  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m,i}^*)$  für  $i = 1, \dots, d$  mit geeignetem Interpolationsverfahren interpoliert. Daraus ergibt sich die gewünschte stetige funktionale Form des Zero-Coupon Bonds  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m})$ .

Mit dieser Vorgehensweise der Rückwärts-Berechnung ist es folglich möglich, die restlichen Zero-Coupon Bonds bzw. unser Numeraire  $B_{T_i T_{n+1}}(X_{T_i})$  für  $i = 1, \dots, n-1$  zu bestimmen.

## 5.4 Swap-Markov-Functional Model

Eine andere Möglichkeit, die funktionale Form der Zero-Coupon Bonds zu bestimmen, ergibt sich über das Swap-Markov-Functional Model. Dieses Modell eignet sich, um Swap basierte Produkte zu bewerten, wie zum Beispiel ein Bermudian Swaption. Der Unterschied zum Libor-Markov-Functional Model besteht darin, dass wir die funktionale Form der Zero-Coupon Bonds nicht über die Verbindung zur Libor-Rate sondern über Swap-Raten herleiten.

Wir betrachten dazu eine Menge von Swaps mit Laufzeitende  $T_{n+1}$ . Genauer genommen betrachten wir  $n+1$  Payer-Swaps, wobei wir die einzelnen Swaps

mit  $SW_i$  für  $i = 0, \dots, n$  bezeichnen. Der erste Swap  $SW_0$  soll zum Zeitpunkt  $T_0$  starten und die Auszahlungen zu den Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_{n+1}$  liefern. Der zweite Swap  $SW_1$  startet zum Zeitpunkt  $T_1$  und liefert zu den Zeitpunkten  $T_2, \dots, T_{n+1}$  die Auszahlungen. Allgemein bezeichnet somit  $SW_i$  den Swap startend zum Zeitpunkt  $T_i$  mit den Auszahlungszeitpunkten  $T_{i+1}, \dots, T_{n+1}$ . Die entsprechenden Swap-Raten werden wie im Kapitel 3.4 definiert bzw. auf dieses Modell angepasst durch

$$y_t^i[T_i, \vec{S}_i] = \frac{B_{tT_i} - B_{tT_{n+1}}}{P_t^i[T_i, \vec{S}_i]}$$

wobei

$$P_t^i[T_i, \vec{S}_i] = \sum_{j=i+1}^{n+1} \alpha_{j-1} B_{tT_j};$$

$$\vec{S}_i := (T_i, \dots, T_{n+1})$$

$$\alpha_i := T_{i+1} - T_i$$

für  $i = 0, \dots, n$  gilt.

Um die Notation einfach zu halten, bezeichnen wir mit  $y_t^i$  die Swap-Rate  $y_t^i[T_i, \vec{S}_i]$  bezüglich des Swaps  $SW_i$ . Entsprechend wird  $P_t^i$ , der Barwert der festen Zinsswapzahlung (BfZ), mit  $P_t^i[T_i, \vec{S}_i]$  bezeichnet. Die Grundannahmen sind identisch zu denen des Libor-Markov-Functional Models. Wir wählen somit erneut den Zero-Coupon Bond  $B_{\cdot T_{n+1}}$  als Numeraire und das zugehörige Martingalmaß  $Q^{n+1}$ .

Der Markov Prozess entspricht wie im Libor-Markov-Functional Model der Dynamik

$$dX_t = \sigma_t^n dW_t, \quad X_0 = 0.$$

Basierend auf den gleichen Voraussetzungen wie im Libor-Fall, bedeutet das, dass es im Swap-Markov-Functional Model ebenfalls genügt, nur die funktionale Form der Zero-Coupon Bonds bzw. des Numeraires  $B_{T_{n+1}}$  zu bestimmen. Die restlichen Zero-Coupon Bonds ergeben sich analog zum Libor-Markov-Functional Model.

Berechnung des Numeraires :

Um die funktionale Form des Numeraires zu bestimmen, folgen wir der gleichen Idee, d.h. wir arbeiten uns rückwärts in der Zeit vor.

Wir starten somit beim Zeitpunkt  $T_{n+1}$ , die funktionale Form des Zero-Coupon Bond  $B_{T_{n+1}T_{n+1}}$  ist per Definition bekannt und entspricht

$$B_{T_{n+1}T_{n+1}}(X_{T_{n+1}}) \equiv 1.$$

Die funktionale Form des Zero-Coupon Bonds zum Zeitpunkt  $T_n$  ergibt sich, indem wir uns den Swap  $SW_n$  bzw. dessen Swap-Rate  $y_{T_n}^n$  betrachten. Das heißt, durch

$$\begin{aligned} y_{T_n}^n &= \frac{B_{T_n T_n} - B_{T_n T_{n+1}}}{P_{T_n}^n[T_n, \vec{S}_n]} \\ &= \frac{1 - B_{T_n T_{n+1}}}{\alpha_n B_{T_n T_{n+1}}} \\ &= L_{T_n}^n \end{aligned}$$

entspricht die Swap-Rate  $y_{T_n}^n$  der Libor-Rate. Damit haben wir für den Zeitpunkt  $T_n$  das gleiche Szenario wie im Libor-Markov-Functional Model und die funk-

nale Form ergibt sich durch

$$B_{T_n T_{n+1}}(X_{T_n}) = \frac{1}{1 + \alpha_n L_0^n \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{T_n} (\sigma_u^n)^2 du + X_{T_n}\right)}.$$

Analog zum Libor-Markov-Functional Model werden wir die restlichen Zero-Coupon Bonds  $B_{T_i T_{n+1}}$  für  $i = 1, \dots, n - 1$  rekursiv herleiten, indem wir erneut die funktionale Form des Zero-Coupon Bonds  $B_{T_m T_{n+1}}$  mit  $0 \leq T_m < T_n$  bestimmen. Die dahintersteckende Idee ist, nicht die Caplet-Preise als Kalibrierung zu verwenden sondern die digitalen Swaption Preise. Unter der Annahme, dass die digitalen Swaption Preise mittels der Black Formel mit impliziter Volatilität  $\tilde{\sigma}_m$  gegeben sind, ergibt sich der Preis des digitalen Swaptions nach Satz 3.6 durch

$$V_0^m = P_0^m \Phi(d_2)$$

wobei

$$d_2 := \frac{\log(\frac{y_0^m}{K}) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2 T_m}{\tilde{\sigma}_m \sqrt{T_m}}.$$

Für diesen Fall wird angenommen, dass die Swap-Rate eine strikt monoton wachsende Funktion vom Markov Prozess  $X$  ist. Daraus folgt, das ein eindeutiges  $X_{T_m}^*$  existiert, so dass

$$y_{T_m}^m(X_{T_m}^*) = K \quad (5.6)$$

gilt. Die Auszahlung des digitalen Swaptions bezüglich des Swaps  $SW_{T_m}$  zum Zeitpunkt  $T_m$  beträgt

$$\mathbb{1}_{\{y_{T_m}^m > K\}} P_{T_m}^m.$$

Mit der Wahl des Zero-Coupon Bonds  $B_{T_{n+1}}$  als Numeraire und dem entsprechen-

dem Martingalmaß  $Q^{n+1}$  lässt sich der Preis des digitalen Swaptions alternativ berechnen durch

$$\begin{aligned}
 V_0^m &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \frac{\mathbb{1}_{\{y_{T_m}^m(X_{T_m}) > K\}} P_{T_m}^m(X_{T_m})}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m})} \right) \\
 &\stackrel{(1)}{=} B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > X_{T_m}^*\}} \frac{P_{T_m}^m(X_{T_m})}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m})} \right) \\
 &= B_{0T_{n+1}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left( \mathbb{1}_{\{X_{T_m} > x_{T_m}^*\}} \mathbb{E}^{Q^{n+1}} \left[ \frac{P_{T_{m+1}}^m(X_{T_{m+1}})}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(X_{T_{m+1}})} \middle| \mathcal{F}_{T_m} \right] \right) \\
 &= B_{0T_{n+1}} \int_{X_{T_m}^*}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{T_{m+1}}^m(z)}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(z)} \phi_{X_{T_{m+1}} | X_{T_m}}(z) dz \right) \phi_{X_{T_m} | X_0}(u) du.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

In Gleichung (1) haben wir die Gleichung (5.6) verwendet. Per Definition ist

$$\begin{aligned}
 P_{T_{m+1}}^m &= \sum_{j=m+1}^{n+1} \alpha_{j-1} B_{T_{m+1} T_j}; \\
 &= \alpha_m B_{T_{m+1} T_{m+1}} + \alpha_{m+1} B_{T_{m+1} T_{m+2}} + \cdots + \alpha_n B_{T_{m+1} T_{n+1}}
 \end{aligned}$$

und hängt nur von  $B_{T_{m+1} S}$  für  $S = T_{m+1}, \dots, T_{n+1}$  ab. Somit ist die funktionale Form

$$\frac{P_{T_{m+1}}^m(X_{T_{m+1}})}{B_{T_{m+1} T_{n+1}}(X_{T_{m+1}})},$$

die bei der Berechnung des Integrales benötigt wird schon im vorigen Iterations-schritt berechnet worden. Den Wert des Integrals bezeichnen wir mit  $J(X_{T_m}^*)$  und gehen identisch zur Vorgehensweise des Libor-Falls vor. Wir setzen den Marktpreis per Black Formel unter der Berücksichtigung von Gleichung (5.6) mit  $J(X_{T_m}^*)$  gleich und erhalten die funktionale Form der Swap-Rate

$$y_{T_m}^m(X_{T_m}^*) = y_0^m \exp \left( -\frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2 T_m - \tilde{\sigma}_m \sqrt{T_m} \Phi^{-1} \left( \frac{J(X_{T_m}^*)}{P_0^m} \right) \right).$$

Durch die Darstellung der Swap-Rate mittels

$$\begin{aligned}
 y_{T_m}^m(X_{T_m}^*) &= \frac{1 - B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}{P_{T_m}^m(X_{T_m}^*)} \\
 &= \frac{1 - B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}{P_{T_m}^m(X_{T_m}^*)} \cdot \frac{\frac{1}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}}{\frac{1}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}} \\
 &= \frac{\frac{1}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)} - 1}{\frac{P_{T_m}^m(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}}
 \end{aligned}$$

erhalten wir durch Umformung nach  $B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)$  die funktionale Form

$$B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*) = \left( 1 + y_{T_m}^m(X_{T_m}^*) \frac{P_{T_m}^m(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)} \right)^{-1}.$$

Der in der Gleichung auftretende Ausdruck  $\frac{P_{T_m}^m(X_{T_m}^*)}{B_{T_m T_{n+1}}(X_{T_m}^*)}$  wurde in der Berechnung des Erwartungswertes (5.7) berechnet und ist somit bekannt. Die restlichen Zero-Coupons lassen sich dann analog zum Libor-Markov-Functional Model bestimmen.

## 6 Libor-Markt Modell

Ziel dieses Kapitels ist es, aufzuzeigen, dass das Libor-Markov-Functional Modell kein direkter Spezialfall vom Libor-Markt Modell ist. Um dies zu tun, wird zunächst das Libor-Markt Modell dargestellt.

Aufgebaut wird das Libor-Markt Modell auf einer Tenorstruktur  $T_1 < T_2 < \dots < T_n < T_{n+1} < \infty$ , wobei die Periodenlänge mit  $\alpha_i := T_{i+1} - T_i$  für  $i = 1, \dots, n$  bezeichnet wird. Um die Notation einfach zu halten, definieren wir die Libor-Raten mit

$$L_t^i := L_t[T_i, T_{i+1}],$$

für  $i = 1, \dots, n$ .

Unter der Annahme eines arbitragefreien Modells wählen wir als Numeraire den Zero-Coupon Bond  $D_{\cdot T_{n+1}}$  und das entsprechende Martingalmaß wird mit  $Q^{n+1}$  bezeichnet. Damit sind unsere Numeraire normierten Basisfinanzgüter

$$\left( \frac{D_{tT_i}}{D_{tT_{n+1}}} \right)_{0 \leq t \leq T_i} \text{ für } i = 1, \dots, n+1$$

$Q^{n+1}$ -Martingale.

Im Libor-Markt Modell werden die einzelnen Libor-Raten als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dL_t^i = \mu_t^i L_t^i dt + \sigma_t^i L_t^i dW_t^i$$

unter  $Q^{n+1}$  angenommen,<sup>12</sup> wobei  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)$  der korrelierte Wiener Prozess mit der Eigenschaft  $d[W^i, W^j]_t = \rho_{ij} dt$  entspricht. Als Drift bezeichnen wir die Funktion  $\mu^i$  und die deterministische beschränkte Volatilitätsfunktion wird durch  $\sigma^i$  dargestellt.

---

<sup>12</sup> Für weitere Informationen sei auf [7] verwiesen.

Um den Drift der Libor-Raten  $L_t^i$  für  $i = 1, \dots, n$  unter dem Martingalmaß  $Q^{n+1}$  weiter zu spezifizieren, betrachten wir das äquivalente Martingalmaß  $Q^{i+1}$  bezüglich des Numeraires  $D_{T_{i+1}}$ . Unter diesem Maß sind somit die Numeraire normierten Zero-Coupon Bonds  $\frac{D_{T_k}}{D_{T_{i+1}}}$  für  $1 \leq k \leq n+1$  Martingale. Durch einen Maßwechsel von  $Q^{n+1}$  nach  $Q^{i+1}$  lässt sich die Gestalt von  $\mu^i$  bestimmen und als Resultat erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 6.1**

*Das Libor-Markt Modell ist arbitragefrei unter dem Maß  $Q^{n+1}$ , falls der Drift der Form*

$$\mu_t^i = - \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \sigma_t^j \rho_{ij} \right) \sigma_t^i$$

*entspricht. Unter dem Maß  $Q^{n+1}$  erfüllen somit die Libor-Raten den Differenti-  
algleichungen*

$$dL_t^i = - \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \sigma_t^j \rho_{ij} \right) \sigma_t^i L_t^i dt + \sigma_t^i L_t^i dW_t^i.$$

*Beweis.*

Siehe [7] Satz 2.1 □

Wie im vorigen Kapitel aufgezeigt wurde, existieren zwei grundlegende Eigen-  
schaften des Libor-Markov-Functional Models:

Zum Einen wird die Libor-Rate als eine Funktion von einem **eindimensionalen**  
Markov Prozess  $X$  dargestellt. Zum Anderen ist die funktionale Form der Libor-  
Rate eine streng monotone Funktion in  $X$  ist.

Das sich das Libor-Markt Modell nicht als ein eindimensionales Markov-Functional  
Model darstellen lässt, ergibt sich aus Theorem 19.4 aus [8]:

**Satz 6.2**

In einem Libor-Markt Modell mit den Libor-Raten  $L^1, \dots, L^n$  mit  $n > 1$  existiert kein eindimensionaler Prozess  $X$  mit den Eigenschaften:

(i) Die Libor-Raten lassen sich als Funktion eines Markov Prozesses  $X$  darstellen;

(ii) Die Libor-Raten sind streng monotone Funktionen in  $X$ .

Beweis.

Wir werden diese Aussage indirekt beweisen, indem wir annehmen, es gäbe einen Prozess  $X$  der die Eigenschaften i) und ii) erfüllt. Durch die Invertierbarkeit der Funktion

$$X_t \mapsto L_t^i(X_t)$$

für  $i = 1, \dots, n$  lässt sich  $L_t^i$  darstellen durch

$$L_t^i = L_t^i(L_t^n). \quad (6.1)$$

Aufgrund der Libor-Markt Modell Bedingungen erfüllen die Libor-Raten die Differentialgleichungen

$$dL_t^i = - \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \sigma_t^j \rho_{ij} \right) \sigma_t^i L_t^i dt + \sigma_t^i L_t^i dW_t^i \quad (6.2)$$

unter unserem äquivalentem Martingalmaß  $Q^{n+1}$  bezüglich des Numeraires  $D_{\cdot, T_{n+1}}$ . Wenden wir nun das Ito-Lemma auf Gleichung (6.1) an, erhalten wir die Diffe-

rentialgleichung

$$dL_t^i = \left[ \frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial L_t^n} \right] dt + \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} \sigma_t^n L_t^n dW_t^n.^{13} \quad (6.3)$$

Setzen wir die lokalen Martingalanteile der Gleichungen (6.2) und (6.3) gleich, d.h.

$$\sigma_t^i L_t^i dW_t^i = \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} \sigma_t^n L_t^n dW_t^n$$

folgt  $W^i \equiv W^n$  sowie

$$\begin{aligned} \sigma_t^i L_t^i &= \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} \sigma_t^n L_t^n \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} &= \frac{\sigma_t^i L_t^i}{\sigma_t^n L_t^n}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Löst man die Differentialgleichung (6.4) ergibt sich

$$L_t^i = c_i(t) (L_t^n)^{\beta_i(t)},$$

wobei  $c_i(t)$  eine Funktion von  $t$  ist und  $\beta_i(t) = \frac{\sigma_t^i}{\sigma_t^n}$ .

Aufgrund der Bedingung  $W^i \equiv W^n$  ergibt sich die Differentialgleichung

$$dL_t^i = - \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \sigma_t^j \right) \sigma_t^i L_t^i dt + \sigma_t^i L_t^i dW_t^n \quad (6.5)$$

aus der Differentialgleichung (6.2). Durch Einsetzen von  $L_t^i = c_i(t) (L_t^n)^{\beta_i(t)}$  in die Differentialgleichung (6.3) und Gleichsetzen der endlichen Variationsteile der

---

<sup>13</sup>Die ausführliche Berechnung befindet sich im Anhang (Rechnung 1)

Gleichungen (6.3) und (6.5) erhalten wir

$$\frac{1}{\sigma_t^i} \left( \frac{c'_i(t)}{c_i(t)} + \beta'_i(t) \ln(L_t^i) \right) + \frac{1}{2} \sigma_t^i (\beta_i(t) - 1) = - \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j \sigma_t^j L_t^j}{1 + \alpha L_t^j} \quad {}^{14} \quad (6.6)$$

Setzt man in dieser Gleichung den Index  $i = n - 1$ , folgt  $\sigma_t^n = 0$  und das führt zum Widerspruch im Libor-Markt Modell.

□

Für weitere Vergleiche zwischen dem Libor-Markt Modell und dem Libor-Markov-Functional Model sei auf [3] verwiesen.

---

<sup>14</sup>Die ausführliche Berechnung der Darstellung (6.6) befindet sich im Anhang(Rechnung 2)

## 7 Zusammenfassung

Die Arbeit hat die Theorie des Markov-Functional Models Schritt für Schritt näher gebracht. Aufbauend auf den Grundlagen wurden die notwendigen Zinsderivate dargestellt und erläutert. Dadurch konnte im Hauptkapitel das Ziel dieser Arbeit erreicht werden, welches darin bestand, die funktionale Form der Zero-Coupon Bonds herzuleiten. Anschließend wurde das Markov-Functional Model in Beziehung zum populäreren Libor-Markt Modell gebracht. Dadurch wurde deutlich, dass das Markov-Functional Model kein Spezialfall vom Libor-Markt Modell ist.

In Bezug auf die Beurteilung des Markov-Functional Models stellen sich Vor- als auch Nachteile heraus. Ein wesentlicher Vorteil liegt in der einfachen Implementierung, da das Modell von einem eindimensionalem Markov Prozess gesteuert wird. Dadurch ist es möglich, exotische Derivate relativ unkompliziert zu bewerten, vor allem im Vergleich zu anderen Zinsstrukturmodellen.

Dieser Vorteil stellt zugleich die Schwäche des Modells dar. Alle Zero-Coupon Bonds über einen Markov Prozess zu steuern bzw. den kompletten Zufallsanteil der Zinsstruktur über einen Wiener Prozess zu beschreiben, könnte gegebenenfalls zu ungenauen Prognosen führen.

Sinnvoll wäre daher im nächsten Schritt das Markov-Functional Model mit alternativen Modellen zu vergleichen. Durch einen Vergleich könnten Vor- und Nachteile im Markov-Functional Model spezifiziert werden. Dafür würde sich beispielsweise das Libor-Markt Modell anbieten, da es mit diesem Modell möglich ist, exotische Zinsderivate zu bewerten und dessen Abweichungen zum Markov-Functional Ansatz zu betrachten.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, das Markov-Functional Model näher zu analysieren, wenn der Markov-Prozess eine Dimension größer 1 besitzt und dann wiederum in Vergleich zu anderen Modellen zu stellen.

## 8 Anhang

### Rechnung 1

Zu zeigen ist: Anwendung des Ito Lemmas auf  $L_t^i = L_t^i(L_t^n)$  ergibt

$$dL_t^i = \left[ \frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} \right] dt + \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} \sigma_t^n L_t^n dW_t^n.$$

Relevant für die Rechnung ist die Bemerkung, dass  $L_t^n$  unter dem Maß  $Q^{n+1}$  ein lokales Martingal darstellt und damit  $\mu^n \equiv 0$  bzw.

$$dL_t^n = \sigma_t^n L_t^n dW_t^n \quad (8.1)$$

gilt. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} d[L^n]_t &= d[L^n, L^n]_t \\ &= d[\sigma^n L^n \cdot W^n, \sigma^n L^n \cdot W^n]_t \\ &= (\sigma_t^n L_t^n)^2 d[W^n, W^n]_t^{15} \\ &= (\sigma_t^n L_t^n)^2 dt. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Wenden wir das Ito-Lemma auf  $L_t^i = L_t^i(L_t^n)$  unter der Berücksichtigung der Gleichungen (8.1) und (8.2) an, erhalten wir

$$\begin{aligned} dL_t^i &= \frac{\partial L_t^i}{\partial t} dt + \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} dL_t^n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} d[L^n]_t \\ &= \frac{\partial L_t^i}{\partial t} dt + \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} \sigma_t^n L_t^n dW_t^n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} (\sigma_t^n L_t^n)^2 dt \\ &= \left[ \frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} \right] dt + \frac{\partial L_t^i}{\partial L_t^n} \sigma_t^n L_t^n dW_t^n. \end{aligned}$$

---

<sup>15</sup>Theorem 3.77 in [9]

## Rechnung 2

Zu zeigen ist: Durch Einsetzen von  $L_t^i = c_i(t)(L_t^n)^{\beta_i(t)}$  in die Differentialgleichung (6.3) und Gleichsetzen der endlichen Variationsteile der Gleichungen (6.3) und (6.5) erhalten wir die Darstellung (6.6). Der endliche Variationsterm von (6.3) entspricht

$$\frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n}$$

und von (6.5)

$$- \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \sigma_t^j \right) \sigma_t^i L_t^i.$$

en und einsetzen von  $L_t^i = c_i(t)(L_t^n)^{\beta_i(t)} = c_i(t) \exp[\beta_i(t) \ln(L_t^n)]$  ergibt

$$\frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} = - \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j} \sigma_t^j \right) \sigma_t^i L_t^i$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sigma_t^i L_t^i} \left( \frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} \right) = - \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j \sigma_t^j L_t^j}{1 + \alpha_j L_t^j}.$$

Der rechte Teil der Gleichung stimmt mit (6.6) überein, der linke Teil wird unter Berücksichtigung von

$$L_t^i = c_i(t)(L_t^n)^{\beta_i(t)} \quad \text{bzw.} \quad (L_t^n)^{\beta_i(t)} = \frac{L_t^i}{c_i(t)}$$

und

$$\beta_i(t) = \frac{\sigma_t^i}{\sigma_t^n}$$

folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sigma_t^i L_t^i} \left( \frac{\partial L_t^i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\partial^2 L_t^i}{\partial^2 L_t^n} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_t^i L_t^i} \left( c_i'(t) (L_t^n)^{\beta_i(t)} + c_i(t) \beta_i'(t) \ln(L_t^n) (L_t^n)^{\beta_i(t)} + \frac{1}{2} (\sigma_t^n L_t^n)^2 c_i(t) \beta_i(t) (\beta_i(t) - 1) (L_t^n)^{\beta_i(t)-2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_t^i L_t^i} \left( \frac{c_i'(t) L_t^i}{c_i(t)} + \beta_i'(t) \ln(L_t^n) L_t^i + \frac{1}{2} (\sigma_t^n L_t^n)^2 \beta_i(t) (\beta_i(t) - 1) \frac{c_i(t) (L_t^n)^{\beta_i(t)}}{(L_t^n)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_t^i L_t^i} \left( \frac{c_i'(t) L_t^i}{c_i(t)} + \beta_i'(t) \ln(L_t^n) L_t^i + \frac{1}{2} (\sigma_t^n L_t^n)^2 \frac{\sigma_t^i}{\sigma_t^n} (\beta_i(t) - 1) \frac{L_t^i}{(L_t^n)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma_t^i} \left( \frac{c_i'(t)}{c_i(t)} + \beta_i'(t) \ln(L_t^n) \right) + \frac{1}{2} \sigma_t^n (\beta_i(t) - 1)
 \end{aligned}$$

# Literatur

- [1] **A**lsmeyer, G.: Vorlesungsskript Wahrscheinlichkeitstheorie
- [2] **A**lbrecht I.: Finanzmathematik
- [3] **B**ennett M.; Kennedy J.E.: A Comparison of Markov-Functional and Market Models: The One-Dimensional Case
- [4] **B**ranger N.; Schlag C.: Zinsderivate, Modelle und Bewertung
- [5] **F**ilipovic D.: Fixed Income Models
- [6] **F**ries C.: Mathematical Finance (Theory, Modeling and Implementation)
- [7] **H**asow K.: Modellierung der Volatitätsstruktur in LIBOR-Markt-Modellen
- [8] **H**unt P.J; Kennedy J.E.: Financial Derivatives in Theory and Practice
- [9] **K**ühn C.: Skript Stochastische Analysis mit Finanzmathematik
- [10] **L**eobacher G.: Stochastische Integration und stochastiche Differentialgleichungen
- [11] **o. V.**; Dissertation 9.Dez 2009, New College University of Oxford: Markov Functional interest rate models with stochastic volatility
- [12] **P**aulsen V.: Skript Stochastische Analysis
- [13] **P**aulsen V.: Vorlesungsskript Finanzmathematik
- [14] **P**aulsen V.: Vorlesungsskript Wahrscheinlichkeitstheorie
- [15] **P**aulsen V.: Vorlesungsskript Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik
- [16] **P**elsser A.: Efficient Methods for Valuing Interest Rate
- [17] **S**chmidt T.: Zinsstrukturmodelle

- [18] *Shreve S.*: Stochastic Calculus and Finance

## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Deniz Atug