

**Diplomarbeit**

# **Das Poisson'sche Schockmodell**

Vitali Altach

Januar 2009

**Fachbereich Mathematik  
der Westfälischen  
Wilhelms-Universität  
Münster**

**Betreuer: PD. Dr. Volkert Paulsen**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Operationelle Risiken</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Univariate Extremwerttheorie</b>	<b>11</b>
2.1	Konvergenzverhalten des Stichprobenmaximums . . . . .	11
2.2	Maximaler Anziehungsbereich von $H_\xi$ . . . . .	14
2.2.1	Maximaler Anziehungsbereich der Fréchetverteilung $\Phi_\alpha$ . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Schätzung von VaR mittels Extremwerttheorie</b>	<b>19</b>
3.1	Peak Over Threshold-Methode . . . . .	19
3.2	Schätzen des Gestaltparameters $\xi$ von $H_\xi$ . . . . .	23
3.2.1	Pickands Schätzer . . . . .	25
3.2.2	Hill Schätzer . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Poisson Prozess</b>	<b>29</b>
4.1	Definition des Poisson Prozesses . . . . .	29
4.2	Ausdünnung und Superposition von Poisson Prozessen . . . . .	31
4.3	Der zusammengesetzte Poisson Prozess . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Common Poisson Shock Modell</b>	<b>37</b>
5.1	Schadensanzahl . . . . .	37
5.2	Schadenshöhe . . . . .	51
5.3	Ersteintrittszeiten von Verlusten . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Modellkalibrierung</b>	<b>59</b>
6.1	Schadenshäufigkeitsverteilung . . . . .	59
6.1.1	Beispiel . . . . .	61
6.1.2	Verallgemeinerung der Parameterschätzung . . . . .	62
6.2	Schadenshöhenverteilung . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Simulation des Modells</b>	<b>65</b>
7.1	Effekt abhängiger Bernoullivariablen . . . . .	65
7.2	Effekt abhängiger Schadenshöhen . . . . .	68
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>79</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>80</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>82</b>

Literaturverzeichnis
----------------------

84
----

# Kapitel 1

## Operationelle Risiken

In der jüngsten Vergangenheit basierte das Risikomanagement von Kreditinstituten größtenteils auf den Markt- und Kreditrisiken, da angenommen wurde, dass von diesen beiden das größte Schadenspotential ausgeht. Doch ein beträchtlicher Teil der spektakulären Verlustfälle (im folgenden werden einige aufgeführt) der letzten 10-15 Jahren zeigt, dass diese sehr oft durch operationelle Risiken verursacht wurden. Menschliches Fehlverhalten bzw. Versagen, Fehler in Computersystemen und Arbeitsprozessen aber auch externe Einflüsse sind die wesentlichen Determinanten dieser Verluste.

- Das Geldtransportunternehmen *Heros* hat über Jahre hinweg seine Kunden geschädigt, indem die Weitergabe von Geldern verzögert wurde. Der dadurch entstandene Schaden beläuft sich schätzungsweise auf 300 Mio.EUR.
- Im Jahre 1995 wurde *Barings Bank* durch unautorisierte Geschäfte des Händlers Nick Leeson insolvent, der einen Verlust von 1,4 Milliarden GBP verursacht hatte. Dies war aufgrund von Versagen der Kontrolle und der Funktionstrennung möglich gewesen.
- Im Jahre 2007 waren 4,9 Mrd. Euro durch unerlaubte Spekulationen eines Aktiehändlers der *Société Générale* abhanden gekommen.

Aber nicht nur aufgrund dieser Verluste sind operationelle Risiken in den Fokus der Öffentlichkeit und Banken gerückt. Schätzungen zufolge verlieren Banken durchschnittlich 1 bis 2% ihrer Bilanzsumme durch operationelle Risiken *per annum*. Ein weiterer Grund, der für Berücksichtigung operationeller Risiken im Risikomanagement eines Kreditinstituts spricht, ist die Tatsache, dass im Laufe der Zeit Quantifizierungsmethoden für Markt- und Kreditrisiko immer präziser werden. Dies führt zu einer Verringerung der Eigenkapitalunterlegung für diese beiden Risikoarten. Damit steht ein immer kleiner werdender Betrag an Eigenkapital zur Abfederung von Restrisiken und somit auch von operationellen Risiken zur Verfügung. Die oben aufgeführten Gründe lassen keinen Zweifel zu, dass operationelle Risiken als eigenständige Risikokategorie in Kreditinstituten zu behandeln sind. Als Reaktion darauf hat sich auch die Bankenaufsicht verstärkt mit operationellen Risiken auseinandergesetzt. Somit wurden erstmals neben den Kredit- und Marktrisiken auch operationelle Risiken in den Neuen Basler Eigenkapitalvereinbarungen, auch Basel II genannt, explizit ausgewiesen. Gemäß Basel II sind Banken nun aufgefordert operationelle Risiken zu bewerten und mit Eigenkapital zu unterlegen. Ferner wird diese Risikokategorie definiert:

“ *Operationelles Risiko ist die Gefahr von Verlusten, die in Folge der Unangemessenheit oder des Versagens von interner Verfahren, Menschen und Systemen oder in Folge externer Ereignissen eintreten. Diese Definition schließt Rechtsrisiken ein, beinhaltet aber nicht strategische Risiken oder Reputationsrisiken.* “<sup>1</sup>

Nachdem wir uns nun mit dem Begriff der operationellen Risiken vertraut gemacht haben, wollen wir im nächsten Schritt der Frage der Quantifizierung dieser nachgehen. Die Beantwortung dieser Frage ist im allgemeinen sehr schwer und stellt für Kreditinstitute eine große Herausforderung dar. Dies liegt nicht zuletzt an der unorthodoxen Charakteristika dieser Risikoart, nämlich an schwerer Erfassbarkeit und unternehmensspezifischer Ausrichtung. Das sind unter anderem Gründe dafür, weshalb sich Quantifizierungsmethoden für operationelle Risiken immer noch im Anfangsstadium der Entwicklung befinden. Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht stellt im Rahmen von Basel II drei Ansätze für die Messung operationeller Risiken vor. Die Ansätze sind aufsteigend nach Komplexität und Risikosensitivität geordnet:

1. Basisindikatoransatz (BIA)
2. Standardansatz (STA)
3. ambitionierte (auch fortgeschrittene genannt) Messansätze (AMA)

Die ersten beiden Ansätzen könnte man als primitiv<sup>2</sup> bezeichnen, da es diesen an Feinheit fehlt. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass bei der Berechnung der Kapitalunterlegung nur sehr wenige unternehmensspezifische Informationen verwendet werden. Während beim Basisindikatoransatz diese aus Multiplikation eines festgelegten Prozentsatzes und dem Drei-Jahres-Durchschnitt des positiven Bruttoertrags ermittelt wird, wird die Situation beim Standardansatz dahingehend verfeinert, dass man Tätigkeiten einer Bank in acht Geschäftsfeldern aufteilt. Für jeden dieser Geschäftsbereiche wird ein Betrag bestimmt, ähnlich dem BIA. Die Kapitalunterlegung von operationellen Risiken bezogen auf das gesamte Unternehmen ergibt sich dann als Summe dieser Beträge über alle Geschäftsbereiche. Möchte man bei der Berechnung der Eigenkapitalunterlegung mehr unternehmensspezifische Informationen einbeziehen, dann sollte eine Bank in diesem Fall auf AMA zurückgreifen. Die AMA bieten Kreditinstituten die Möglichkeit anhand eigensentwickelter Modelle/Verfahren operationelle Risiken zu quantifizieren, wenn der Anwendung dieser durch die Bankenaufsicht zugestimmt wurde. Generell gilt, dass bei den ambitionierten Ansätzen die Komplexität steigt und sowohl die quantitativen als auch qualitativen Anforderungen höher sind. Jedoch führen diese *ceteris paribus* zu einer Verringerung der Eigenkapitalunterlegung für operationelle Risiken im Vergleich zu BIA oder STA. Der Baseler Ausschuss schlägt folgende ambitionierte Messansätze vor:

- Verlustverteilungsansatz (*Loss Distribution Approach/LDA*)
- Szenariobasierter Ansatz
- *Risk Drivers and Controls Approach*

---

<sup>1</sup>[3] S.157

<sup>2</sup>[14]

1.Unternehmensfinanzierung/-beratung ( <i>Corporate Finance</i> )
2.Handel ( <i>Trading &amp; Sales</i> )
3.Privatkundengeschäft ( <i>Retail Banking</i> )
4.Firmenkundengeschäft ( <i>Commercial Banking</i> )
5.Zahlungsverkehr und Wertpapierabwicklung ( <i>Payment and Settlement</i> )
6.Depot- und Treuhandgeschäfte ( <i>Agency Services</i> )
7.Vermögensverwaltung ( <i>Asset Management</i> )
8.Wertpapierprovisionsgeschäft ( <i>Retail Brokerage</i> )

Tabelle 1.1: Aufteilung nach Geschäftsfeldern gemäß Basel II

1.Interner Betrug ( <i>Internal Fraud</i> )
2.Externer Betrug ( <i>External Fraud</i> )
3.Beschäftigungspraxis und Arbeitsplatzsicherheit ( <i>Employment Practices and Workplace Safety</i> )
4.Kunden, Produkte und Geschäftsgepflogenheiten ( <i>Clients, Products and Business Services</i> )
5.Sachschäden ( <i>Damage to Physical Assets</i> )
6.Geschäftsunterbrechungen und Systemausfälle ( <i>Business Disruption and System Failures</i> )
7.Abwicklung, Vertrieb- und Prozessmanagement ( <i>Execution Delivery and Process Management</i> )

Tabelle 1.2: Ereigniskategorien gemäß Basel II

Wir werden uns in folgendem ausschließlich mit Verlustverteilungsansätzen beschäftigen. Diese Ansätze basieren größtenteils auf versicherungsmathematischen Modellen, die dadurch charakterisiert sind, dass Häufigkeit und Schadensschwere der Verlustereignisse separat betrachtet und modelliert werden. Diese Vorgehensweise (..) ermöglicht eine effizientere Ausnutzung der Datenbasis sowie die individuelle Anpassung an veränderte Gegebenheiten<sup>3</sup> [...]. An dieser Stelle möchten wir ein generelles Vorgehen bei der Anwendung von

---

<sup>3</sup>[15]

LDA beschreiben. Der Modellansatz basiert auf einer Matrix aus Geschäftsfeldern (GF) und Ereigniskategorien (EK). Die von Basel II vorgeschlagene Aufteilung in Geschäftsfelder und Ereigniskategorien ist in Tabellen 1.1 und 1.2 zu finden. Somit ergibt sich eine Matrix mit 56 Einträgen/Zellen, wobei jeder einzelner/jede einzelne für eine GF/EK-Kombinationen steht.

Sei  $N_{ij}$  eine Zufallsvariable, die die Schadensanzahl und  $X_{ij}^{(n)}$  die Schadenshöhe der Zelle  $(i, j)$  beim  $n$ -ten Eintreten beschreibt. Damit ergibt sich der Verlust der Zelle  $(i, j)$  in einem vorgegebenen Zeitraum als

$$L_{ij} = \sum_{n=1}^{N_{ij}} X_{ij}^{(n)}.$$

Den operationellen Gesamtverlust des Unternehmens einer Periode erhalten wir nun als

$$L = \sum_{i,j} L_{ij}, \tag{1.1}$$

wobei die Zufallsvariablen  $L_{ij}$  im allgemeinen stochastisch abhängig sind. Unter gewissen Annahmen bezüglich der Verteilung von  $N_{ij}$  und  $X_{ij}^{(n)}$  besitzt die Verteilung von  $L$  besonders schöne Eigenschaften. Die genaueren Details werden in Kapitel 5 dargestellt.

Anhand der historischen Daten wird die Verlusthäufigkeits- (*loss frequency distribution*) und Verlustschadenshöhenverteilung (*loss severity distribution*) für jeden Eintrag der Matrix geschätzt. Anschließend wird aus den beiden Verteilungen die sogenannte aggregierte Verlustverteilung bestimmt, wobei oft zusätzlich vorausgesetzt wird, dass Häufigkeits- und Schadenshöhenverteilung stochastisch unabhängig sind. Das bedeutet, dass die Schadenshöhe eines einzelnen Verlustereignisses durch dessen Auftrittshäufigkeit nicht beeinflusst wird. Diese Annahme ist nicht immer doch in manchen Fällen ökonomisch vertretbar. Nachdem die Verlustverteilungsfunktion bestimmt ist, kann man den Value at Risk (VaR) ausrechnen. Dabei ist VaR ein Risikomaß, dessen Wert den möglichen Verlust einer bestimmten GF/EK-Kombination darstellt, der mit einer gegebenen großen Wahrscheinlichkeit innerhalb eines gegebenen Zeitraums nicht überschritten wird. Dieser Wert entspricht dem  $\alpha$ -Quantil der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion, wobei  $\alpha$  gewöhnlich nahe bei 1 gewählt wird (z.B. 0.99 oder größer).



### 1.1 Definition

Gegeben sei ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann ist der VaR einer GF/EK-Kombination zum Niveau  $\alpha$  das kleinste  $l \in \mathbb{R}$ , so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Verlust  $L$  ein Wert  $l$  übersteigt, nicht größer als  $(1 - \alpha)$  ist. Genauer

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\},$$

wobei  $F_L$  die Verteilungsfunktion von  $L$  bezeichnet<sup>4</sup>.

Um auch im Falle einer unstetigen Verteilungsfunktion den  $\text{VaR}_\alpha$  bzw. das  $\alpha$ -Quantil berechnen zu können, führt man den Begriff der Pseudo-Inversen (auch Quantilfunktion genannt) ein.

### 1.2 Definition

Gegeben sei eine Verteilungsfunktion  $F$ . Dann bezeichnet man mit  $F^\leftarrow$  gegeben durch

$$F^\leftarrow(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}, \quad y \in (0, 1)$$

die Pseudo-Inverse von  $F$  ein.

In der Praxis wird oft bemängelt, dass es nicht genügend historische Daten vorhanden sind, um vernünftige Schätzungen der Verteilungen durchführen zu können. Deswegen und weil wir uns vor allem für den  $\text{VaR}_\alpha$  interessieren, ist es in diesem Fall sinnvoll reduzierte Datensätze zu betrachten. Unser Interesse gilt in erster Linie den sogenannten Extremereignissen. Diese sind durch kleine Häufigkeit und große Schadenshöhe charakterisiert und besitzen deshalb ein hohes Risikopotential. Eine Möglichkeit zur Behandlung solcher Ereignisse stellt die univariate Extremwerttheorie dar, die im nächsten Kapitel vorgestellt wird. Die univariate Theorie ist in unserem Fall ausreichend. Da wir unser eingangs formuliertes mehrdimensionales Quantifizierungsproblem mittels (1.1) in ein eindimensionales Problem transformiert haben.

---

<sup>4</sup>[19] S.38



# Kapitel 2

## Univariate Extremwerttheorie

In diesem und dem nächsten Kapitel werden einige Ergebnisse der Extremwerttheorie präsentiert, wobei wir vor allem [9] und [19] als Quellen verwendet haben.

### 2.1 Konvergenzverhalten des Stichprobenmaximums

Sei  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  mit Verteilungsfunktion  $F$ . Da man in folgendem keine spezifischen Informationen bezüglich des Wahrscheinlichkeitsraums benötigt, werden wir nicht näher auf diesen eingehen. Wir können diese Zufallsvariablen als operationelle Verluste interpretieren. Ferner möchten wir das Stichprobenmaximum  $M_n$  untersuchen, wobei dieses wie folgt gegeben ist

$$M_1 = X_1 \text{ und } M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ für } n \geq 2.$$

Die entsprechenden Aussagen für das Stichprobenminimum erhält man mittels der Transformation

$$\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \dots, -X_n\}.$$

Da die Zufallsvariablen unabhängig identisch verteilt sind, ergibt sich leicht die Verteilung von  $M_n$ :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x), x \in \mathbb{R}.$$

Extreme Ereignisse liegen „nahe“ dem oberen Ende des Definitionsbereichs der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion  $F$ , deshalb würde man intuitiv erwarten, dass das asymptotische Verhalten von  $M_n$  das Tailverhalten von  $F$  nahe seines rechten Endpunkts betrifft. Der rechte Endpunkt einer Verteilungsfunktion  $F$  ist definiert durch

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Ferner definieren wir den Begriff der Tail- oder Überlebensfunktion  $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$ . Wir erhalten direkt aus der Definition von  $x_F$ , dass

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{für } x < x_F \quad (2.1)$$

und falls  $x_F < \infty$

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) = 1 \quad \text{für} \quad \forall x \geq x_F \quad (2.2)$$

gilt. Somit konvergiert  $M_n \xrightarrow{P} x_F$  für  $n \rightarrow \infty$ , wobei  $x_F \leq \infty$  ist. Da  $M_n$  zusätzlich zu der stochastischen Konvergenz gegen  $x_F$  auch noch wachsend in  $n$  ist, gilt sogar

$$M_n \xrightarrow{f.s.} x_F \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Die aufgeführten Resultate sind nicht besonders aufschlussreich. Wesentlich bessere Aussagen lassen sich über normalisiertes Stichprobenmaximum herleiten. Dabei spielt die Extremwertverteilung eine entscheidende Rolle und ist vergleichbar mit der der Normalverteilung im ZGW (Zentraler Grenzwertsatz) für Summen von Zufallsvariablen. Das wichtigste Ergebnis dieses Abschnitts ist der Satz von Fisher und Tippett, der eine Aussage über die Grenzverteilung eines normalisierten Stichprobenmaximums macht.

### 2.1 Satz (Fisher-Tippett)

Sei  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$ . Existieren normierende Folgen  $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$  derart, dass für  $M_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  gilt:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

wobei  $H$  eine nicht degenerierte Verteilung ist, dann besitzt  $H$  foldende Form

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \text{falls } \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

mit  $1 + \xi x > 0$ .  $H_\xi(x)$  heißt verallgemeinerte (Standard-)Extremwertverteilung und der Fall  $\xi = 0$  ist als Grenzwert von  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}})$  zu verstehen.

Die Bezeichnung Standard-Extremwertverteilung wird verständlich, wenn man den Lageparameter  $\mu \in \mathbb{R}$  und den Skalierungsparameter  $\sigma > 0$  einführt, indem  $H_{\xi, \mu, \sigma}(x) := H_\xi(\frac{x - \mu}{\sigma})$  definiert wird. Die oben angegebene Darstellung von  $H_\xi$  wird als Jenkinson-von Mises Darstellung bezeichnet und vereinigt in sich Weibull- ( $\xi < 0$ ), Fréchet- ( $\xi > 0$ ) und Gumbelverteilungen ( $\xi = 0$ ).

### 2.2 Bemerkung

1. In weiterem Verlauf bezeichnen wir die drei Standard-Extremwertverteilungen für  $\xi = \alpha^{-1} > 0$ ,  $\xi = -\alpha^{-1} < 0$  und  $\xi = 0$  mit  $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda$ :

$$\text{Fréchet : } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \alpha > 0$$

$$\text{Weibull : } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \alpha > 0$$

$$\text{Gumbel : } \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

2. Sei  $X > 0$  eine Zufallsvariable. Offensichtlich besteht dann folgender Zusammenhang zwischen  $\Phi_\alpha, \Lambda$  und  $\Psi_\alpha$

$X$  hat Verteilung  $\Phi_\alpha \Leftrightarrow \ln X^\alpha$  hat Verteilung  $\Lambda \Leftrightarrow -X^{-1}$  hat Verteilung  $\Psi_\alpha$ .

Die zugehörigen Dichten zeigt die Abbildung 2.1, wobei wir  $\alpha = 1$  für Fréchet- und Weibullverteilung wählen.

Es stellt sich natürlicherweise die Frage: Was passiert mit der Grenzverteilung, falls

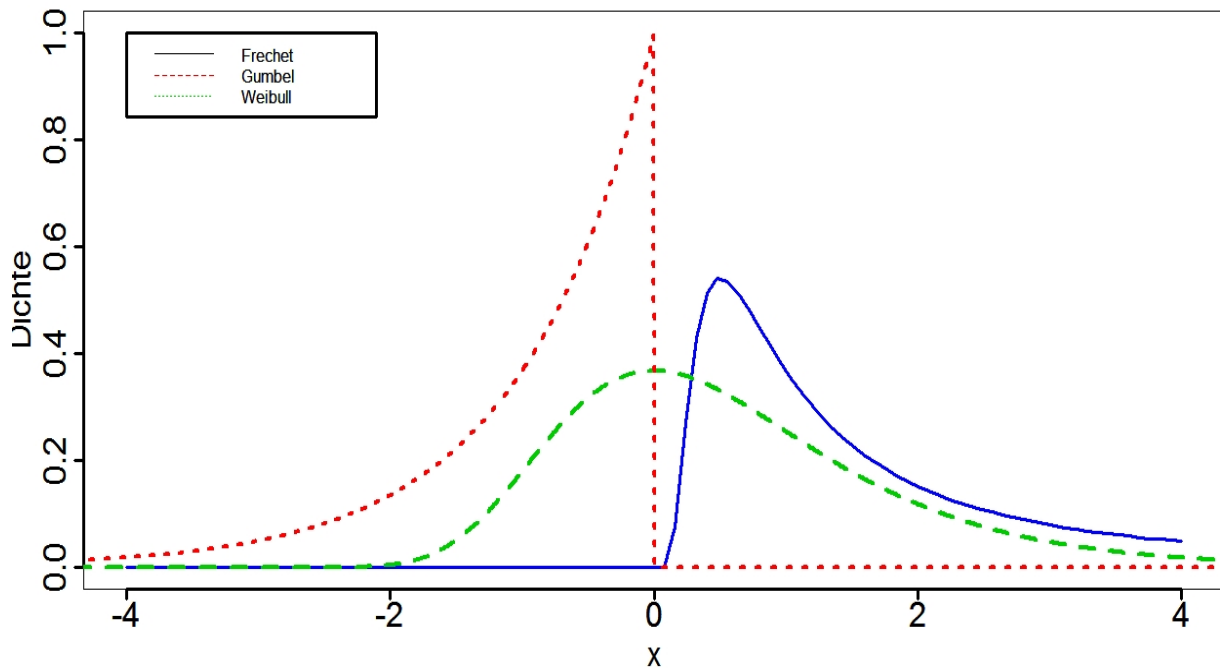


Abbildung 2.1: Dichten der Standard-Extremwertverteilungen.

man andere Normierungsfolgen wählt? Erfreulicherweise gibt es eine befriedigende Antwort darauf. Falls das normierte Maximum gegen eine nicht-degenerierte Grenzverteilung konvergiert, so ist der Verteilungstyp der letzten eindeutig bestimmt (bis auf eine affine Transformation), obwohl der Lage-  $\mu$  und der Skalierungsparameter  $\sigma$  von den tatsächlichen Normierungsfolgen abhängen. Somit ist es immer möglich die Folgen so zu wählen, dass das normierte Maximum schwach gegen die Standard-Extremwertverteilung  $H_\xi$  konvergiert. Zusammenfassung dieser Aussagen liefert der folgende

### 2.3 Satz

Seien  $A, B, A_1, A_2, \dots$  Zufallsvariablen,  $b_n > 0, \beta_n > 0$  und  $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$  normierende Folgen. Falls

$$\frac{A_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} A, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

dann gilt

$$\frac{A_n - \alpha_n}{\beta_n} \xrightarrow{d} B, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0, \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n} = a \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Gilt die Aussage (2.5), dann ist  $B = bA + a$  und  $a, b$  sind eindeutig. Ferner ist  $B$  nicht degeneriert genau dann, wenn  $b > 0$ , und in diesem Fall gehören  $A$  und  $B$  dem gleichen Verteilungstyp an. Aus (2.6) folgt, dass  $a_n$  und  $b_n$  bis auf asymptotische Relation eindeutig sind.

## 2.2 Maximaler Anziehungsbereich von $H_\xi$

Als nächstes führen wir den Begriff des maximalen Anziehungsbereichs von  $H_\xi$  ein. Außerdem gehen wir den Fragen nach: Welche Bedingungen an die Verteilungsfunktion  $F$  müssen erfüllt werden, damit normiertes  $M_n$  schwach gegen eine Extremwertverteilung  $H$  konvergiert? Welche Verteilungsfunktionen liegen im maximalen Anziehungsbereich von solch einem  $H$ ?

### 2.4 Definition

Eine Zufallsvariable  $Y$  bzw. deren Verteilungsfunktion  $G$  liegt im maximalen Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung  $H$ , falls es Folgen  $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

gilt. Dabei bezeichnet  $M_n$  das Stichprobenmaximum der Kopien von  $Y$  vom Umfang  $n$ , d.h.

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} \text{ mit } (Y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ unabhängig und } Y_i \stackrel{d}{=} Y \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Man schreibt kurz  $Y \in MDA(H)$  (Maximum Domain of Attraction) bzw.  $G \in MDA(H)$ .

### 2.5 Beispiel

Gegeben sei eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen, die jeweils Verteilungsfunktion  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$  für  $\lambda > 0$  und  $x \geq 0$  besitzen. Wählt man die Folgen  $c_n = \frac{1}{\lambda}$  und  $d_n = \frac{\ln n}{\lambda}$ , so bekommt man

$$F^n(c_n x + d_n) = \left(1 - \frac{1}{n} \exp(-x)\right)^n, \text{ für } \frac{x + \ln n}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\ln n.$$

und für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich folgende Grenzverteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

Somit liegt die Exponentialverteilung im maximalem Anziehungsbereich der Gumbelverteilung.

### 2.6 Bemerkung

Da die Extremwertverteilungen stetig auf  $\mathbb{R}$  sind, ist  $\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H$  für  $n \rightarrow \infty$  äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq c_n x + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**2.7 Satz**

Seien  $\tau \in [0, \infty]$  und eine Folge  $u_n$  reeller Zahlen vorgegeben. Dann sind äquivalent:

$$\begin{aligned} n\bar{F}(u_n) &\rightarrow \tau, \\ P(M_n \leq u_n) &\rightarrow e^{-\tau}, \end{aligned}$$

wobei  $\bar{F}$  die Tailfunktion von  $F$  bezeichnet.

Bemerkung 2.6 und Satz 2.7 liefern folgende Charakterisierung des maximalen Anziehungsbereichs.

**2.8 Satz**

Eine Verteilung  $F$  liegt im maximalen Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung  $H$  mit Normierungsfolgen  $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Falls  $H(x) = 0$  ist, wird der Grenzwert als  $\infty$  interpretiert.

Für die Beschreibung des maximalen Anziehungsbereichs einer Extremwertverteilung benötigen wir einige weitere Begriffe, die das Wachstumsverhalten einer Funktion charakterisieren.

**2.9 Definition**

(i) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $\mathfrak{L}$  auf  $(0, \infty)$  heißt langsam variierend bei  $\infty$ , falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{L}(tx)}{\mathfrak{L}(x)} = 1, \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Man bezeichnet mit  $\mathfrak{X}_0$  die Menge aller langsam variierenden Funktionen.

(ii) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $h$  auf  $(0, \infty)$  heißt regulär variierend bei  $\infty$  mit Index  $\rho \in \mathbb{R}$ , falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\rho, \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Man bezeichnet mit  $\mathfrak{X}_\rho$  die Menge der regulär variierenden Funktionen mit Index  $\rho$ .

(iii) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $h$  auf  $(0, \infty)$  heißt rapide variierend mit Index  $-\infty$  (kurz  $h \in \mathfrak{X}_{-\infty}$ ), falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \begin{cases} 0, & \text{für } t > 0, \\ \infty, & \text{für } 0 < t < 1. \end{cases}$$

### 2.10 Bemerkung

Zu der Klasse  $\mathfrak{X}_0$  gehören trivialerweise konstante Funktionen und jedes  $\mathfrak{L}$ , für das  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(x)$  existiert, endlich und  $\neq 0$  ist. Außerdem zählen dazu Funktionen, die bei  $\infty$  den Limes  $\infty$  haben, z.B.  $\mathfrak{L}(x) = \log(x)$  oder auch solche, die bei  $\infty$  nicht konvergieren z.B.  $\mathfrak{L}(x) = 2 + \sin \sqrt{x}$ .<sup>1</sup>

Zur Klasse  $\mathfrak{X}_\rho$  gehören Funktionen der Form  $h(x) = x^\rho \mathfrak{L}(x)$ , also insbesondere Potenzfunktionen  $x^\rho$  und auch endliche Summen solcher mit einem Index, der dem größten Exponenten dieser Summe entspricht.

Als Beispiel für eine Funktion aus  $\mathfrak{X}_{-\infty}$  kann man  $h(x) = e^{-x}$  angeben.

### 2.11 Definition (Tailäquivalenz)

Zwei Verteilungsfunktionen  $F$  und  $G$  heißen Tail-äquivalent, wenn  $x_F = x_G$  und

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c$$

für ein konstantes  $c$  mit  $0 < c < \infty$ .

Man kann zeigen, dass jeder maximale Anziehungsbereich bezüglich der Tailäquivalenz abgeschlossen ist, d.h. für tailäquivalente  $F$  und  $G$  gilt:

$$F \in MDA(H) \Leftrightarrow G \in MDA(H)$$

Man kann außerdem für zwei tailäquivalente Verteilungen die selben Normierungsfolgen benutzen, was sich oft in Anwendungen als hilfreich erweist.

Da man oft zur Modellierung von Extremereignissen *heavy-tailed* Verteilungen einsetzt, interessieren wir uns im Bezug auf operationelle Risiken insbesondere für  $MDA(\Phi_\alpha)$

#### 2.2.1 Maximaler Anziehungsbereich der Fréchetverteilung $\Phi_\alpha$ .

Mittels Taylor-Entwicklung von  $\exp(-x^{-\alpha})$  erhält man folgende Charakterisierung des Tailverhaltens von  $\Phi_\alpha$ :

$$\bar{\Phi}_\alpha = 1 - \Phi_\alpha = 1 - \exp(-x^{-\alpha}) \sim x^{-\alpha} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Das bedeutet, dass der Tail von  $\Phi_\alpha$  wie eine Potenzfunktion fällt.

### 2.12 Satz

Für eine Verteilungsfunktion  $F$  und ein  $\alpha > 0$  gilt:

$$F \in MDA(\Phi_\alpha) \iff \bar{F}(x) = x^{-\alpha} \mathfrak{L}(x) \text{ mit } \mathfrak{L} \in \mathfrak{X}_0$$

Wenn  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ , dann gilt  $\frac{M_n}{c_n} \xrightarrow{d} \Phi_\alpha$ , wobei  $c_n = (1/\bar{F})^{-}(n)$  gewählt werden kann.

Da jedes  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$  die Form  $1 - x^{-\alpha} \mathfrak{L}(x)$  für ein  $\mathfrak{L} \in \mathfrak{X}_0$  besitzt, impliziert dies  $x_F = \infty$ . Ferner ergibt sich für  $c_n$  folgende Darstellung  $c_n = n^{1/\alpha} \mathfrak{L}_1(n)$  mit  $\mathfrak{L}_1 \in \mathfrak{X}_0$ . Um die Zugehörigkeit einer Verteilung zu einem MDA überprüfen zu können, kann man in

<sup>1</sup>vgl.[1] S.274



bestimmten Fällen auf folgende Bedingung zurückgreifen.

### 2.13 Korollar (Von Mises Bedingung)

Sei  $F$  eine absolut stetige Verteilungsfunktion mit Dichte  $f$ , die der folgenden Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0$$

genügt. Dann gilt  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ .

Bei der Berechnung der Normierungsfolge  $c_n$  ist der folgende Satz ein nützliches Hilfsmittel.

### 2.14 Satz

Seien  $F$  und  $G$  Verteilungsfunktionen. Ferner nehmen wir an, dass  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$  mit Normierungsfolge  $c_n > 0$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(c_n x)^n = \Phi_\alpha(cx), \quad x > 0$$

für ein  $c > 0$  genau dann, wenn  $F$  und  $G$  tailäquivalent sind mit

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \bar{F}(x)/\bar{G}(x) = c^\alpha.$$

Analog lassen sich auch  $MDA(\Psi_\alpha)$  für  $\alpha > 0$  und  $MDA(\Lambda)$  charakterisieren. Interessierende Leser seien auf [9] und [19] verwiesen.

Abschließend wollen wir einen Satz formulieren, der die wesentlichen Ergebnisse im Bezug auf  $MDA(H_\xi)$  noch einmal zusammenfasst. Dazu führen wir zunächst eine weitere Bezeichnung ein: Für eine Verteilungsfunktion  $F$  mit der zugehörigen Quantilfunktion  $F^\leftarrow$  definieren wir

$$U(t) = F^\leftarrow(1 - 1/t) \text{ für } t > 0.$$

### 2.15 Satz (Charakterisierung von $MDA(H_\xi)$ )

Sei  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $F \in MDA(H_\xi)$ .
2. Es existiert eine positive meßbare Funktion  $a(\cdot)$ , so dass für  $1 + \xi x > 0$  gilt

$$\lim_{u \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{falls } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{falls } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

3. Für  $x, y > 0$  und  $y \neq 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \begin{cases} \frac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & \text{falls } \xi \neq 0, \\ \frac{\ln(x)}{\ln(y)} & \text{falls } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

### 2.16 Bemerkung

1. Die Bedingung (2.8) lässt eine interessante, wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation zu. Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$ , dann kann (2.8) umformuliert werden zu:

$$\lim_{u \uparrow x_F} P\left(\frac{X - u}{a(u)} > x \mid X > u\right) = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{falls } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{falls } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Somit gibt (2.10) eine Approximation der Verteilung für skalierte Exzesse über die Schwelle  $u$  mit Skalierungsfaktor  $a(u)$  an. Die Darstellung (2.10) wird eine wichtige Rolle in Kapitel 3 spielen. Dort werden wir auch definieren, was unter einem Exzess zu verstehen ist.

2. Mithilfe eines Spezialfalls der Gleichung (2.9) werden wir in Kapitel 3 den sogenannten Pickands Schätzer herleiten. Dieser wird eingesetzt um den Gestaltparameter  $\xi$  von  $H_\xi$  zu schätzen.

# Kapitel 3

## Schätzung von VaR mittels Extremwerttheorie

Nachdem wir in Kapitel 2 die wesentlichen Ergebnisse der Extremwerttheorie zusammengestellt haben, wollen wir im nächsten Schritt diese Erkenntnisse nutzen, um den  $\text{VaR}_\alpha$  zu schätzen.

### 3.1 Peak Over Threshold-Methode

Die Idee der *Peak Over Threshold* (POT) Methode besteht darin, Verluste oberhalb einer bestimmten hohen Schwelle  $u$  zu betrachten. Dabei gehen wir von einer Stichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen mit unbekannter Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  für ein  $\xi \in \mathbb{R}$  aus. Ferner betrachten wir Zufallsvariablen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u}$ , wobei

$$N_u = |\{i : i = 1, \dots, n, X_i > u\}| \quad \text{und} \quad Y_i = X_i - u, \quad i = 1, \dots, N_u$$

ist (siehe Abbildung 3.1).<sup>1</sup>  $Y_i$  bildet den Exzess von  $X_i$  über der Schwelle  $u$  für  $i = 1, \dots, N_u$ .

Für weitere Untersuchungen benötigen wir den Begriff der Exzessverteilungsfunktion.

#### 3.1 Definition

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$  und rechtem Endpunkt  $x_F$ . Dann heißt für ein festes  $u < x_F$

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u), \quad x \geq 0$$

die Exzessverteilungsfunktion von  $X$  über die Schwelle  $u$ . Die Funktion

$$e(u) = E(X - u | X > u)$$

heißt mittlere Exzessfunktion.

Will man die Eigenschaften der Exzessverteilungsfunktion studieren, so stellt sich heraus, dass dabei die verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD/ *generalized Pareto distribution*) eine zentrale Rolle spielt. Deshalb werden als nächstes Definition und die wichtigsten

---

<sup>1</sup>Die Abbildung wurde aus [9] übernommen.

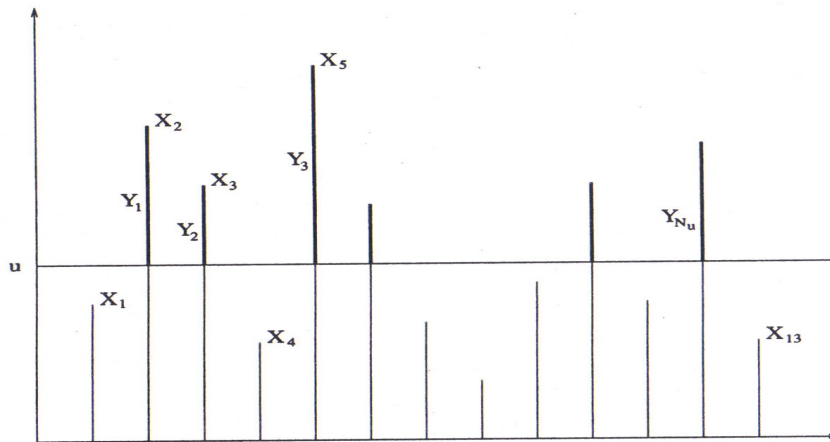


Abbildung 3.1: Daten  $X_1, \dots, X_{13}$  mit zugehörigen Überschreitungen  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  von  $u$ .

Eigenschaften der GPD präsentiert.

### 3.2 Definition (Die verallgemeinerte Paretoverteilung)

Die Verteilungsfunktion  $G_\xi$  sei gegeben durch

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{falls } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

wobei

$$x \geq 0 \quad \text{falls } \xi \geq 0,$$

$$0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi} \quad \text{falls } \xi < 0.$$

$G_\xi$  heißt Standard verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD). Man kann analog zur verallgemeinerten Extremwertverteilung Lage-  $\nu$  und Skalierungsparameter  $\beta$  einführen, indem man  $G_{\xi, \nu, \beta}(x) = G_\xi\left(\frac{x-\nu}{\beta}\right)$  für  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  setzt. Der Definitionsbereich muss dann entsprechend angepasst werden. Der Fall  $\xi = 0$  ist als der Grenzwert von  $\lim_{\xi \rightarrow 0} (1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi})$  zu verstehen.

Um die Schreibweise etwas abzukürzen, schreiben wir im folgenden für  $G_{\xi, 0, \beta}$   $G_{\xi, \beta}$ . Für den Definitionsbereich  $\mathfrak{D}(\xi, \beta)$  von  $G_{\xi, \beta}$  gilt dann

$$\mathfrak{D}(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{falls } \xi \geq 0, \\ [0, -\frac{\beta}{\xi}] & \text{falls } \xi < 0. \end{cases}$$

Der folgende Satz stellt die wesentlichen Eigenschaften von GPD zusammen.

**3.3 Satz**

1. Sei  $X \stackrel{d}{=} G_{\xi, \beta}$ . Dann ist  $\mathbb{E}(X) < \infty$  genau dann, wenn  $\xi < 1$ . Ferner gilt für  $\xi < 1$

$$\mathbb{E}\left[\left(1 + \frac{\xi}{\beta}X\right)^{-r}\right] = \frac{1}{1 + \xi^r}, \quad \text{falls } r > -\frac{1}{\xi},$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\ln\left(1 + \frac{\xi}{\beta}X\right)\right)^k\right] = \xi^k k!, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{E}\left[X\left(\bar{G}_{\xi, \beta}(X)\right)^r\right] = \frac{\beta}{(r+1-\xi)(r+1)}, \quad \text{falls } \frac{r+1}{\xi} > 0.$$

Für den Fall  $\xi < \frac{1}{r}$  mit  $r \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mathbb{E}\left[X^r\right] = \frac{\beta^r}{\xi^{r+1}} \frac{\Gamma(\xi^{-1} - r)}{\Gamma(1 + \xi^{-1})} r!$$

2. Für jedes  $\xi \in \mathbb{R}$  ist  $F \in MDA(H_\xi)$  genau dann, wenn

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

für eine positive Funktion  $\beta$ .

3. Seien  $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(\xi, \beta)$ . Dann gilt

$$\frac{\bar{G}_{\xi, \beta}(x_1 + x_2)}{\bar{G}_{\xi, \beta}(x_1)} = \bar{G}_{\xi, \beta + \xi x}(x_2).$$

4. Sei  $N$  poissonverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$  und unabhängig von der Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $X_i \stackrel{d}{=} G_{\xi, \beta}$ . Dann gilt

$$P(M_N \leq x) = \exp\{-\lambda(1 + \xi \frac{x}{\beta})^{-1/\xi}\} = H_{\xi, \mu, \sigma}(x),$$

wobei  $\mu = \beta \xi^{-1}(\lambda^\xi - 1)$ ,  $\sigma = \beta \lambda^\xi$  und  $M_N = \max\{X_1, \dots, X_N\}$  sind.

5. Sei  $\xi < 1$  und  $X \stackrel{d}{=} G_{\xi, \beta}$ . Dann gilt für  $u < x_F$ ,

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\beta + \xi u}{1 + \xi}, \quad \text{falls } \beta + \xi u > 0.$$

### 3.4 Bemerkung

1. Durch die im Satz 3.3 dargestellten Eigenschaften wird die enorme Bedeutung der GPD innerhalb der statistischen Analyse von Extrema begründet.
2. Die Eigenschaft 3. kann folgendermaßen umformuliert werden: die Klasse der verallgemeinerten Paretoverteilungen ist bezüglich eines Schwellenwechsels abgeschlossen. Wir können die linke Seite der Gleichung in 3. auch anders schreiben. Sei  $Z \stackrel{d}{=} G_{\xi,\beta}$ , dann gilt

$$\frac{\bar{G}_{\xi,\beta}(x_1 + x_2)}{\bar{G}_{\xi,\beta}(x_1)} = \frac{1 - G_{\xi,\beta}(x_1 + x_2)}{1 - G_{\xi,\beta}(x_1)} = \frac{P(Z > x_1 + x_2)}{P(Z > x_1)} = \frac{P(Z > x_1 + x_2, Z > x_1)}{P(Z > x_1)},$$

da  $x_2 \geq 0$  ist. Die rechte Seite der Gleichung sagt uns aber, dass diese bedingte Wahrscheinlichkeit wiederum vom verallgemeinerten Paretotyp ist.

3. Die Eigenschaft 2. suggeriert, dass die GPD eine passende Approximation für die Exzessverteilungsfunktion  $F_u$  für hinreichend große  $u$  darstellt. Dieses Ergebnis wird oft in folgender Weise formuliert: Für eine Funktion  $\beta$ , die anhand gegebener Daten geschätzt wird, gilt

$$\bar{F}_u(x) = P(X - u > x | X > u) \approx \bar{G}_{\xi,\beta(u)}(x) \text{ mit } x > 0,$$

wobei  $u$  hinreichend groß gewählt werden muss.

4. Ein handliches graphisches Hilfsmittel für die Ermittlung der angemessenen Schwelle  $u$  - sodass eine Approximation der Exzessverteilungsfunktion  $F_u$  durch eine GPD gerechtfertigt ist - liefern die Eigenschaften 2. und 5.: Gegeben sei eine Stichprobe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ . Nun konstruieren wir aus diesen Daten die empirische mittlere Exzessfunktion

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u) \text{ für } u > 0,$$

wobei  $\Delta_n(u) = \{i : i = 1, \dots, n, X_i > u\}$  und  $N_u = |\Delta_n(u)|$  ist. Wir verwenden  $e_n(u)$  als eine Schätzung für  $e(u)$ . Da die mittlere Exzessfunktion von einer GPD nach 5. linear in  $u$  ist, suchen wir einen Bereich von  $u$ , in dem der Graph von  $e_n(u)$  annähernd linear ist. Dann ist die Approximation von  $F_u$  durch eine GPD für solche  $u$  sinnvoll.

Nun wollen wir uns unserem primären Ziel zuwenden, nämlich dem Schätzen von  $\text{VaR}_\alpha$ . Der Ausdruck

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u)$$

lässt sich umschreiben zu:

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(y).$$

Ferner wissen wir aus dem Satz 3.3, dass

$$\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\xi, \beta}(y)$$

für ein großes  $u$  und eine angemessene positive Funktion  $\beta$  gilt. Um nun den Tail von  $F$  zu schätzen, können wir separat  $\bar{F}_u(y)$  und  $\bar{F}(u)$  schätzen. Als ein natürlicher Schätzer für  $\bar{F}(u)$  bietet sich die zugehörige empirische Verteilungsfunktion an

$$\widehat{\bar{F}(u)} = \bar{F}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > u\}} = \frac{N_u}{n}.$$

Für  $\bar{F}_u(y)$  können wir direkt die Parameter  $\xi$  und  $\beta$  der GPD schätzen, d.h.

$$\widehat{\bar{F}_u(y)} = \bar{G}_{\widehat{\xi}, \widehat{\beta}}(y)$$

mit passenden  $\widehat{\xi} = \widehat{\xi}_{N_u}$  und  $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}_{N_u}$ . Insgesamt erhalten wir als Schätzer für den Tail  $\bar{F}(u + y)$  und  $y > 0$  folgendes:

$$\widehat{\bar{F}(u + y)} = \frac{N_u}{n} (1 + \widehat{\xi}y/\widehat{\beta})^{-1/\widehat{\xi}}.$$

Somit lässt sich nun leicht ein  $\alpha$ -Quantil bestimmen, nämlich

$$\widehat{q}_\alpha = \widehat{\text{VaR}}_\alpha = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left[ \left( \frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right] \text{ für } \alpha \in (0, 1).$$

## 3.2 Schätzen des Gestaltparameters $\xi$ von $H_\xi$

In diesem Abschnitt wollen wir einige Methoden vorstellen, mit deren Hilfe man den Parameter  $\xi$  der verallgemeinerten Extremwertverteilung  $H_\xi = \exp\{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\}$  schätzen kann. Um die Schätzung durchführen zu können, gehen wir von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  aus. Gemäß Satz 2.8 gilt

$$F \in \text{MDA}(H_\xi) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln(H_\xi(x)),$$

wobei die Folgen  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  passend gewählt werden und  $x$  im Definitionsbereich von  $H_\xi$  liegt. Somit gilt für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  und  $u = c_n x + d_n$

$$n\bar{F}(u) \approx \left( 1 + \xi \frac{u - d_n}{c_n} \right)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Damit ergibt sich für den Tail von  $F$  ein Schätzer folgender Form

$$\widehat{\bar{F}(u)} = \frac{1}{n} \left( 1 + \widehat{\xi} \frac{u - \widehat{d}_n}{\widehat{c}_n} \right)^{-1/\widehat{\xi}}$$

mit geeigneten Schätzern  $\widehat{\xi}, \widehat{c}_n$  bzw.  $\widehat{d}_n$  für  $\xi, c_n$  bzw.  $d_n$ .

### 3.5 Definition

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen. Dann bezeichnet man

$$X_{n,n} \leq X_{n-1,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$$

als Ordnungsstatistiken. Die Zufallsvariable  $X_{k,n}$  nennt man  $k$ -te obere Ordnungsstatistik.

Da die verallgemeinerte Extremwertverteilung das Verhalten von Zufallsvariablen in den Tails beschreibt, kann man sich bei der Schätzung von  $\xi$ ,  $c_n$  und  $d_n$  auf die  $k$  größten Werte  $X_{k,n} \leq X_{k-1,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$  der Stichprobe beschränken. Dabei muss folgendes beachtet werden:

(a)  $k = k(n) \rightarrow \infty$ , um eine kleine Varianz zu haben, muss die obere Ordnungsstatistik groß sein.

(b)  $\frac{n}{k(n)} \rightarrow \infty$ , damit nur realisierte Extremwerte in die Schätzung einbezogen werden.

### 3.6 Lemma (Quantiltransformation)

Seien  $X_1, \dots, X_n$  bzw.  $U_1, \dots, U_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$  bzw. gleichverteilt auf  $(0, 1)$  und zugehörige Ordnungsstatistiken

$$X_{n,n} \leq X_{n-1,n} \leq \dots \leq X_{1,n} \text{ bzw. } U_{n,n} \leq U_{n-1,n} \leq \dots \leq U_{1,n}.$$

Dann gilt

1.  $F^\leftarrow(U_1) \stackrel{d}{=} X_1$ .

2. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(X_{1,n}, \dots, X_{n,n}) \stackrel{d}{=} (F^\leftarrow(U_{1,n}), \dots, F^\leftarrow(U_{n,n})).$$

3. Die Zufallsvariable  $F(X_1)$  ist gleichverteilt auf  $(0, 1)$  genau dann, wenn  $F$  stetig ist.

### 3.7 Definition

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen. Wir definieren durch

1.  $F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}}$  empirische Verteilungsfunktion für  $x \in \mathbb{R}$ ,

2.  $F_n^\leftarrow(y) := \inf\{t : F_n(t) \geq y\}$  empirische Quantilfunktion für  $y \in (0, 1)$ .

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der empirischen Verteilungsfunktion und der Ordnungsstatistik

$$X_{k,n} \leq x \iff \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > x\}} < k.$$

Dies impliziert

$$P(X_{k,n} \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > x\}} < k\right) = P\left(n - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}} < k\right) = P(F_n(x) > 1 - \frac{k}{n}).$$

Nimmt man zusätzlich an, dass

$$X_{1,n} < \dots < X_{n,n} \text{ gilt.}$$

Dann folgt

$$F_n^\leftarrow(t) = X_{k,n} \quad \text{falls} \quad 1 - \frac{k}{n} < t \leq 1 - \frac{k-1}{n},$$

für  $k = 1, \dots, n$ .



### 3.2.1 Pickands Schätzer

Die Hauptidee hinter diesem Schätzer besteht darin, eine Bedingung zu finden, die zu  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  äquivalent ist, woraus dann leicht  $\xi$  ermittelt werden kann. Diese Bedingung wird mithilfe des Satzes 2.22 hergeleitet. Dieser besagt, dass  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  mit  $U(s) = F^{\leftarrow}(1 - 1/s)$  äquivalent ist zu

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \frac{2^\xi - 1}{1 - 2^{-\xi}} = 2^\xi \text{ für } \xi \neq 0.$$

Die Gültigkeit der Gleichung (2.9) im Satz 2.22 bleibt erhalten, wenn wir zu einer positiven Funktion  $c(s)$  mit  $\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = 2$  übergehen. Es ergibt sich

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(sc(s)) - U(s)}{U(s) - U(s/c(s))} = 2^\xi \quad (3.1)$$

In folgendem benutzen wir die letzte Gleichung um einen empirischen Schätzer für  $\xi$  zu konstruieren. Dafür betrachten wir unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen  $V_1, \dots, V_n$  mit Verteilungsfunktion  $F_V(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ,  $x \geq 1$  und zugehörigen Ordnungsstatistiken

$$V_{n,n} \leq V_{n-1,n} \leq \dots \leq V_{1,n}.$$

Dann gilt nach Lemma 3.6, dass

$$(X_{k,n})_{k=1,\dots,n} \stackrel{d}{=} (U(V_{k,n}))_{k=1,\dots,n},$$

wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion  $F$  sind. Man beachte dabei, dass  $V_{k,n}$  das empirische  $(1 - \frac{k}{n})$ -Quantil von  $F_V$  ist. Ferner lässt sich zeigen, dass

$$\frac{k}{n} V_{k,n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei  $k = k(n) \rightarrow \infty$  und  $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ . Insbesondere gilt

$$V_{k,n} \xrightarrow{P} \infty \quad \text{und} \quad \frac{V_{2k,n}}{V_{k,n}} \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Insgesamt erhalten wir mithilfe der Gleichung (3.1)

$$\frac{U(V_{k,n}) - U(V_{2k,n})}{U(V_{2k,n}) - U(V_{4k,n})} \xrightarrow{P} 2^\xi \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Motiviert durch obere Ausführungen erhalten wir den sogenannten Pickands Schätzer

$$\widehat{\xi}_{k,n}^{(P)} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}.$$

Als nächstes wollen wir einige Eigenschaften des Pickands-Schätzers aufführen.

### 3.8 Satz (Eigenschaften des Pickands-Schätzers)

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  und  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dann besitzt der Pickands-Schätzer  $\widehat{\xi}^{(P)} = \widehat{\xi}_{k,n}^{(P)}$  folgende Eigenschaften:

1. (Schwache Konsistenz) Wenn  $k \rightarrow \infty$ ,  $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ . Dann gilt

$$\widehat{\xi}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

2. (Starke Konsistenz) Wenn  $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{k}{\ln \ln n} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$\widehat{\xi}^{(P)} \xrightarrow{f.s.} \xi \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

3. (Asymptotische Normalität) Unter weiteren Bedingungen an  $k$  und  $F$  gilt

$$\sqrt{k}(\widehat{\xi} - \xi) \xrightarrow{d} N(0, \nu(\xi)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.,$$

wobei

$$\nu(\xi) = \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \ln 2)^2}.$$

Basierend auf diesem Schätzer kann man Quantil- und Tailschätzer herleiten und die zugehörigen Konfidenzintervalle bestimmen.

Bei der Datenanalyse mittels Pickands-Schätzer wird der sogenannte Pickands-Plot betrachtet:

$$\left\{ (k, \widehat{\xi}_{k,n}^{(P)}) : k = 1, \dots, n \right\}.$$

Um nun eine gute Wahl von  $k$  treffen zu können, sucht man einen Bereich von kleinen  $k$ , in dem der Plot annähernd horizontal verläuft. Allerdings ist die Interpretation von solchen Plots sehr schwierig und für die Wahl von  $k$  gibt es keine eindeutige beste Lösung.

### 3.2.2 Hill Schätzer

Hier wollen wir den Gestaltparameter  $\xi$  für den Fréchet-Fall schätzen, d. h. wir gehen von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  mit Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  aus, wobei  $\frac{1}{\alpha} = \xi > 0$  und  $\Phi_\alpha = \exp(-x^{-\alpha})$  für  $x > 0$  ist. Somit erhalten wir, dass  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} \mathfrak{L}(x)$  mit einer langsam variierenden Funktion  $\mathfrak{L}$ .

### 3.9 Definition (Hill Schätzer)

$X_{n,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$  bezeichne die Ordnungsstatistiken. Dann ist der Hill Schätzer für ein passendes  $k = k(n)$  gegeben durch

$$\widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \left( \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Um diese Form des Schätzers erklären zu können, betrachten wir einen Spezialfall. Wir nehmen an, dass  $\mathfrak{L}(x) = c^\alpha$  für ein  $c > 0$  konstant ist. Ferner setzen wir  $Y_j = \ln\left(\frac{X_j}{c}\right)$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$P(Y_j > y) = P(X_j > ce^y) = e^{-\alpha y} \text{ mit } y > 0.$$

Somit sind  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige exponentiell verteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\alpha$ . Ein „guter“ Schätzer für  $\alpha = E(Y_1)^{-1}$  ist bekanntlich der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{X_j}{c}\right) \right)^{-1} = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} - \ln c \right)^{-1},$$

wobei für die zweite Gleichheit nur die Summationsreihenfolge verändert wurde. Man sieht, dass die Form von  $\hat{\alpha}$  der von  $\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$  ähnelt. Im allgemeinen gilt allerdings nur  $\bar{F}(x) \approx \frac{c^\alpha}{x^\alpha}$  für hinreichend große  $x$ . Die Argumentation im Spezialfall lässt sich auf die Beobachtungen  $X_{1,n} \geq \dots \geq X_{k,n} \geq u$  oberhalb der Schwelle  $u$  verallgemeinern, so dass bei der Definition des Hill Schätzers nur die  $k$  größten Werte berücksichtigt werden. Man beachte dabei, dass die Schwelle  $u$  in Abhängigkeit von  $n$  so gewählt werden muss, dass für die Anzahl der Überschreitungen  $k$  gilt:

$$k(n) \rightarrow \infty \text{ und } \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

### 3.10 Bemerkung

1. Wie auch bei der POT-Methode stellt sich hier die Frage nach der richtigen Wahl der Schwelle  $u = X_{k,n}$ , oberhalb derer Beobachtungen in den Schätzwert eingehen. Wir stehen wiederum vor Problemen, dass
  - (a) wenn  $k$  zu klein ist, fließen nur wenige Beobachtungen in den Schätzer  $\hat{\alpha}^{(H)}$  ein und somit die Varianz des Schätzers zu hoch ausfällt.
  - (b) andererseits, wenn  $k$  zu groß ist, ist die Annahme, dass  $\mathfrak{L}(x)$  für alle  $x \geq X_{k,n}$  ungefähr konstant ist, im allgemeinen nicht gut genug erfüllt. Damit wird der Bias  $(E\hat{\alpha}^{(H)} - \alpha)$  zu groß.
2. Bei der Wahl von  $k$  kann man den Hill-Plot benutzen:

$$\left\{ (k, \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}) : k = 2, \dots, n \right\}.$$

*Man wählt einen Bereich von kleinen  $k$ , in dem der Hill-Plot annähernd horizontal verläuft. In diesem wird dann ein  $k$  ausgewählt.*

Das Schätzen des Gestaltparameters  $\xi$  lässt sich auch mittels Maximum Likelihood Methode durchführen. In 5.2 gehen wir genauer darauf ein.



# Kapitel 4

## Poisson Prozess

Poisson Prozesse werden normalerweise verwendet, um Ereignisse zu zählen, die zu zufälligen Zeitpunkten eintreten. Typische Beispiele hierfür sind die Anzahl der Anrufe in einem Call-Center oder die Anzahl der Verluste, die innerhalb einer bestimmten Zeit durch operationelle oder andere Risiken verursacht werden.

Für diesen und weitere Kapitel, wenn nicht anders gesagt, gehen wir von einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  aus, der nicht weiter präzisiert wird.

Die in folgendem vorgestellten Ergebnisse spielen eine besonders wichtige Rolle für das im Kapitel 5 vorgestellte Modell.

### 4.1 Definition des Poisson Prozesses

#### 4.1 Definition (Wartezeit-, Sprungzeit-, Sprungprozess)

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein rechtsstetiger stochastischer Prozess mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$ . Dann ist der Sprungzeitenprozess  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  induktiv definiert durch

$$T_0 := 0 \quad \text{und} \quad T_{n+1} := \inf\{t \geq T_n : X_t \neq X_{T_n}\}.$$

Dabei wird vereinbart, dass  $\inf \emptyset = \infty$ . Der Wartezeitprozess  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist definiert durch

$$W_n := \begin{cases} T_n - T_{n-1} & \text{falls } T_{n-1} < \infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Sprungprozess  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist definiert durch

$$S_n := \begin{cases} X_{T_n} & \text{falls } T_n < \infty, \\ X_a \text{ mit } a := \max\{r \in \mathbb{N}_0 : T_r < \infty\} & \text{falls } T_n = \infty. \end{cases}$$

Die in der Definition aufgeführten Fallunterscheidungen verfolgen das Ziel, dass der Fall endlich vieler Sprünge miteinbezogen wird. Macht ein Pfad nur endlich viele Sprünge, so bedeutet dies gemäß unserer Definition, dass die Wartezeit nach dem letzten Sprung unendlich ist und der Prozess im letzten angenommenen Zustand verharrt. Allerdings tritt dieser Fall bei Poisson Prozessen nicht auf. Nun kommen wir zur Definition eines Poisson Prozesses, deren Vorteil darin liegt, dass sie sehr anschaulich ist. Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden wir eine äquivalente Definition angeben, die gelegentlich sich für Beweise als hilfreicher erweist.

#### 4.2 Definition (Poisson Prozess)

Ein Prozess  $(N_t)_{t \geq 0}$  mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$  und  $N_0 = 0$  fast sicher heißt homogener Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$ , falls folgende Bedingungen gelten:

1. Die Folge der Wartezeiten  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist unabhängig. Ferner ist  $W_n$  exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Der Sprungprozess  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist gegeben durch

$$S_n = n \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wenn wir im folgenden von Poisson Prozessen sprechen, meinen wir immer homogene Poisson Prozesse. Einen solchen kann man auch mittels einer Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$  konstruieren.

#### 4.3 Satz

Sei  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda > 0$ . Wir setzen

$$T_0 := 0 \text{ und } T_n := \sum_{i=1}^n W_i \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

sowie

$$N_t := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{I}_{]0,t]}(T_i), \quad t \geq 0.$$

Dann ist  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$ .

*Beweis:* Auf den Beweis des Satzes verzichten wir und verweisen auf [1] S.145 oder [17] s.277 ff.

□

Als nächsten wollen wir die angekündigte äquivalente Definition für Poisson Prozess angeben.

#### 4.4 Satz

Ein Prozess  $(N_t)_{t \geq 0}$  mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$  ist genau dann ein Poisson Prozess, wenn folgende Bedingungen gelten:

1.  $N_0 = 0$  fast sicher.
2. Die Zuwächse sind Poisson-verteilt, d.h. für alle  $s, t \geq 0$  ist  $N_{s+t} - N_s$   $\text{Poi}(\lambda t)$ -verteilt.
3.  $(N_t)_{t \geq 0}$  hat unabhängige Zuwächse.

*Beweis:* siehe [17] S. 282

## 4.2 Ausdünnung und Superposition von Poisson Prozessen

Als nächstes stellen wir zwei besonders wichtige Konstruktionsprinzipien im Zusammenhang mit Poisson Prozessen vor. Dabei beschäftigen wir uns mit den Fragen:

- Welche Verteilung besitzt ein Prozess, den wir als Summe mehrerer unabhängiger Poisson Prozesse erhalten?
- Welche Verteilungen besitzen Prozesse, die durch Zerlegung eines gegebenen Poisson Prozesses, auf eine bestimmte Art und Weise, hervorgehen?

Die erste Konstruktionsmethode wird häufig als Superposition und die zweite als Ausdünnung (*eng. thinning*) bezeichnet. Der folgende Satz beantwortet die erste Frage.

### 4.5 Satz (Superposition)

Seien  $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}, \dots, (N_t^{(m)})_{t \geq 0}$  unabhängige Poisson Prozesse mit Intensitäten  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$  und  $m \geq 2$ . Dann ist die Superposition

$$N_t := \sum_{i=1}^m N_t^{(i)}, t \geq 0$$

ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda := \sum_{i=1}^m \lambda^{(i)}$ .

*Beweis:* Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall  $m = 2$ , denn jeden anderen Fall können wir auf diesen zurückführen. Die erste Bedingung des Satzes 4.4 ist offensichtlich erfüllt.  $(N_t)_{t \geq 0}$  erfüllt auch die dritte Bedingung, da  $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  und  $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  unabhängig voneinander sind und unabhängige Zuwächse haben. Es bleibt die zweite Bedingung nachzuweisen. Für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  berechnen wir folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(N_{s+t} - N_s = k) &= P(N_{s+t}^{(1)} - N_s^{(1)} + N_{s+t}^{(2)} - N_s^{(2)} = k) \\ &= \sum_{j=1}^k P(N_{s+t}^{(1)} - N_s^{(1)} = j) P(N_{s+t}^{(2)} - N_s^{(2)} = k - j) \\ &= \sum_{j=1}^k \exp(-\lambda_1 t) \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} \cdot \exp(-\lambda_2 t) \frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) \frac{(\lambda_1 t + \lambda_2 t)^k}{k!} \\ &\quad \cdot \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^j \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-j} \\ &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) \frac{(\lambda_1 t + \lambda_2 t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

wobei bei dem zweiten Gleichheitszeichen die Unabhängigkeit der Prozesse eingeht. In der vorletzten Zeile addiert sich die Summe nach dem Binomischen Lehrsatz zu 1.

□

Der folgende Satz beantwortet die zweite Frage.

#### 4.6 Satz (Ausdünnung)

Sei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda > 0$ . Ferner seien  $I_1, I_2, \dots$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable mit  $P(I_k = 1) = p = 1 - P(I_k = 0)$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $k \geq 1$ , die auch von  $(N_t)_{t \geq 0}$  unabhängig sind. Dann sind  $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  und  $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  mit

$$N_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_t} I_i, \quad N_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} (1 - I_i)$$

unabhängige Poisson Prozesse mit Intensitäten  $\lambda p$  und  $\lambda(1 - p)$ .

*Beweis:*

Als erstes zeigen wir, dass  $\{N_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_t} I_i, t \geq 0\}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda p$  ist.

Die erste Bedingung des Satzes 4.4 ist offensichtlich, da  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess ist. Für den Nachweis der zweiten Bedingung seien  $s > t > 0$  gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(N_{s+t}^{(1)} - N_s^{(1)} = r) &= P\left(\sum_{i=1}^{N_{t+s}} I_i - \sum_{i=1}^{N_s} I_i = r\right) \\ &= \sum_{m_1-r \geq 0} \sum_{m_2=0}^{m_1-r} P\left(\sum_{i=1}^{m_1} I_i - \sum_{i=1}^{m_2} I_i = r, N_{s+t} = m_1, N_s = m_2\right) \\ &= \sum_{m_1-r \geq 0} \sum_{m_2=0}^{m_1-r} P\left(\sum_{i=1}^{m_1-m_2} I_i = r\right) P(N_{t+s} - N_s + N_s = m_1, N_s = m_2) \\ &= \sum_{m_1-r \geq 0} \sum_{m_2=0}^{m_1-r} P\left(\sum_{i=1}^{m_1-m_2} I_i = r\right) P(N_{t+s} - N_s = m_1 - m_2) P(N_s = m_2) \\ &= \sum_{m_1-r \geq 0} \sum_{m_2=0}^{m_1-r} \binom{m_1-m_2}{r} p^r (1-p)^{m_1-m_2-r} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m_1-m_2}}{(m_1-m_2)!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{m_2}}{m_2!} \\ &= \sum_{m_1-r \geq 0} p^r (1-p)^{m_1-r} e^{-\lambda(t+s)} (\lambda t)^{m_1} \\ &\quad \cdot \sum_{m_2=0}^{m_1-r} \binom{m_1-m_2}{r} \left(\frac{s}{t(1-p)}\right)^{m_1-m_2-r} \frac{1}{m_2!(m_1-m_2)!} \\ &= \sum_{m_1-r \geq 0} \frac{1}{r!(m_1-r)!} p^r e^{-\lambda(t+s)} (\lambda t)^r \left(\lambda t(1-p) \frac{s+t-tp}{t(1-p)}\right)^{m_1-r} \\ &= \frac{(pt\lambda)^r}{r!} e^{-\lambda(t+s)} \sum_{m_1-r \geq 0} \frac{(\lambda(s+t) - \lambda tp)^{m_1-r}}{(m_1-r)!} = \frac{(pt\lambda)^r}{r!} e^{-\lambda tp}. \end{aligned}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung lässt sich auch die 3. Eigenschaft des Satzes 4.4 nachweisen.

Die entsprechenden Aussagen für  $\{N_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} (1 - I_i), t \geq 0\}$  erhält man analog. Somit



bleibt die Unabhängigkeit von  $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  und  $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  zu zeigen. Hierfür betrachten wir folgendes

1.

$(\tilde{N}_1(t))_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda p$ ,  
 $(\tilde{N}_2(t))_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda(1-p)$ ,  
 $(\tilde{N}_1(t))_{t \geq 0}$  und  $(\tilde{N}_2(t))_{t \geq 0}$  sind unabhängig.

Dann gilt  $\{N_t = \tilde{N}_1(t) + \tilde{N}_2(t), t \geq 0\}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$

2.

$(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda p$ ,  
 $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda(1-p)$ ,  
 $(N_t^{(1)} + N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$ .

$(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  und  $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  erhalten wir durch das Ausdünnen von  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Dann besitzt  $(\tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t))_{t \geq 0}$  die gleiche Verteilung wie  $(N_t^{(1)}, N_t^{(2)})_{t \geq 0}$ . Also sind  $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  und  $(N_t^{(2)})_{t \geq 0}$  insbesondere unabhängig. Insgesamt folgt nun die Behauptung.

□

### 4.3 Der zusammengesetzte Poisson Prozess

Als Motivation für den zusammengesetzten Poisson Prozess stelle man sich folgende Situation vor. Ein Unternehmen möchte den Gesamtverlust aus operationellen Risiken eines Jahres modellieren, um diesen mit Eigenkapital zu unterlegen. Dabei wird angenommen, dass die Schadensanzahl durch ein Poisson Prozess und die Schadenshöhen durch eine Folge  $\mathbb{N}$ -wertiger unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen beschrieben wird. Die Folge ist zudem vom Poisson Prozess stochastisch unabhängig. Zur Modellierung dieses Sachverhalts könnte man den zusammengesetzten Poisson Prozess einsetzen.

#### 4.7 Definition (Der zusammengesetzte Poisson Prozess)

Sei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$  und  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen, die auch von  $(N_t)_{t \geq 0}$  unabhängig sind. Dann heißt der Prozess  $(Z_t)_{t \geq 0}$  mit

$$Z_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0$$

ein zusammengesetzter (eng. compound) Poisson Prozess.

#### 4.8 Satz

Sei  $N$  eine Zufallsvariable mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$  und  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen, die auch von  $N$  unabhängig sind. Setze

$$Z := \sum_{i=1}^N Y_i$$

Dann gilt

1. Für  $\mathbb{E}(N) < \infty$  folgt

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y_1)$$

2. Für  $\mathbb{E}(N^2) < \infty$  folgt

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(Y_1)^2$$

3. Für  $N \stackrel{d}{\sim} \text{Poi}(\lambda)$  folgt

$$\mathbb{E}(Z) = \lambda\mathbb{E}(Y_1) \text{ und } \mathbb{V}(Z) = \lambda\mathbb{E}(Y_1)^2.$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z|N=n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N Y_i | N=n\right) \\ 1. &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i | N=n\right) \\ &\stackrel{N, (Y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ unabh.}}{=} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) \\ &\stackrel{(Y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ id. vert.}}{=} n\mathbb{E}(Y_1). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}(Y_1)P(N=n) \\ &= \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(N) \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2|N=n) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 | N=n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j,i=1}^n Y_i Y_j | N=n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 | N=n\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{j \neq i, i,j=1}^n Y_i Y_j | N=n\right) \\ &= n\mathbb{E}(Y_1^2) + n(n-1)\mathbb{E}(Y_1)^2. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z^2|N = n)P(N = n) \\ &= \mathbb{E}(Y_1^2)\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(Y_1)^2\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2\mathbb{E}(N).\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir für die Varianz:

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Y_1^2)\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(Y_1)^2\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2\mathbb{E}(N) - \mathbb{E}(Y_1)^2\mathbb{E}(N)^2$$

und damit die Behauptung 2.

3. Die 3. Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den ersten beiden Aussagen.

□

#### 4.9 Satz

Seien  $(Z_t^1)_{t \geq 0}$  und  $(Z_t^2)_{t \geq 0}$  zwei unabhängige zusammengesetzte Poisson Prozesse definiert durch

$$Z_t^1 = \sum_{i=1}^{N_t^1} Y_i \quad \text{und} \quad Z_t^2 = \sum_{i=1}^{N_t^2} X_i, \quad t \geq 0,$$

wobei  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}, (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  nicht negative Zufallsvariablen sind.

Dann ist die Summe  $(Z_t^1 + Z_t^2)_{t \geq 0}$  wiederum ein zusammengesetzter Poisson Prozess

*Beweis:*

Zunächst wollen wir die L.T. (Laplace Transformierte) von  $Z_t^1$  bzw.  $Z_t^2$  für ein festes  $t \geq 0$  bestimmen. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \mathbb{E}(e^{-sZ_t^1}) \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( -s \sum_{i=1}^{N_t^1} Y_i \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( -s \sum_{i=1}^{N_t^1} Y_i \right) \middle| N_t^1 = n \right] P(N_t^1 = n) \\ &\stackrel{N_t^1, (Y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{unab.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( -s \sum_{i=1}^n Y_i \right) \right] P(N_t^1 = n) \\ &\stackrel{(Y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{id. vert.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \exp(-sY_1) \right] P(N_t^1 = n) \\ &\stackrel{\text{Multi.Satz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_1^n(s) P(N_t^1 = n) = \exp(-\lambda^1 t (1 - f_1(s))),\end{aligned}$$

wobei  $f_1(s)$  die L.T. von  $Y_1$  ist und Poisson Prozess  $(N_t^1)_{t \geq 0}$  Intensität  $\lambda^1$  besitzt. Ferner bezeichne  $f_2(s)$  die L.T. von  $X_1$  und  $\lambda^2$  Intensität von  $(N_t^2)_{t \geq 0}$ . Analog ergibt sich die L.T. von  $Z_t^2$ :

$$\varphi_2(s) = \exp(-\lambda^2 t (1 - f_2(s))).$$

Nun können wir die L.T. von  $Z_t := Z_t^1 + Z_t^2$  berechnen. Diese erhalten wir nach dem Multiplikationssatz als Produkt von  $\varphi_1(s)$  und  $\varphi_2(s)$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1(s)\varphi_2(s) &= e^{-\lambda^1 t(1-f_1(s))} e^{-\lambda^2 t(1-f_2(s))} \\ &= \exp\left(-(\lambda^1 + \lambda^2)t\left(1 - \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \lambda^2}f_1(s) - \frac{\lambda^2}{\lambda^1 + \lambda^2}f_2(s)\right)\right).\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen

$$Z_t \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{N_t} H_i =: Z'_t,$$

wobei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $(\lambda^1 + \lambda^2)$  ist und

$$P(H_i \in \cdot) = \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \lambda^2}P(Y_i \in \cdot) + \frac{\lambda^2}{\lambda^1 + \lambda^2}P(X_i \in \cdot) \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Die L.T.  $Z'_t$  ist dann gegeben durch

$$z'(s) = \exp\left(-(\lambda^1 + \lambda^2)t(1 - h(s))\right),$$

wobei

$$h(s) = \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \lambda^2}f_1(s) + \frac{\lambda^2}{\lambda^1 + \lambda^2}f_2(s)$$

die L.T. von  $H_1$  ist. Aufgrund der Tatsache, dass jede Verteilung auf  $[0, \infty)$  durch ihre L.T. eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. □

Es sei noch einmal erwähnt, dass der zusammengesetzte Poisson Prozess und die Konstruktionsprinzipien der Ausdünnung bzw. der Superposition außerordentlich wichtig für das *Common Poisson Shock* Modell sind.

# Kapitel 5

## Common Poisson Shock Modell

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem sogenannten *Common Poisson Shock* Modell. Ausgangspunkt bilden  $m$  unabhängige Poisson Prozesse, die in folgendem als Schockprozesse bezeichnet werden. Ereignet sich ein Schock, so kann dieser zu Verlusten/Schäden von Typen in  $\{1, \dots, n\}$  führen. Werden durch ein Schock simultan Verluste unterschiedlicher Typen verursacht, dann spricht man von einem gemeinsamen (*common*) Schock. Damit sind durch einen gemeinsamen Schock verursachten Schadenshöhen stochastisch abhängig. Ferner betrachten wir  $n$  Schadensanzahlzählprozesse, die in einem noch zu klärenden Zusammenhang mit den Schockprozessen stehen. Deswegen sind diese Zählprozesse im allgemeinen stochastisch abhängig. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass die Schockprozesse und die Schadenshöhen stochastisch unabhängig sind.

Man unterscheidet zwei Arten von Schockmodellen:

- *fatal shock model*, falls jeder Schock verlustverursachend ist.
- *non-fatal shock model*, falls nicht jeder Schock zu einem Verlust führt.

Besonderer Anreiz für die Betrachtung eines solchen Modells liegt darin begründet, dass unter den oben getroffenen Annahmen der aggregierte Gesamtschadenshöhenprozess ein zusammengesetzter Poisson Prozess ist. Insbesondere eignet sich dieses Modell um in Kapitel 1 formuliertes mehrdimensionales Quantifizierungsproblem der operationellen Risiken zu behandeln.

Nun wollen wir das Modell mathematisch beschreiben.

### 5.1 Schadensanzahl

Hier wollen wir die Schadensanzahlzählprozesse unterschiedlicher Typen beschreiben. Wir starten mit einer Familie unabhängiger Poisson Prozesse

$$\{N^{(e)}(t), \quad t \geq 0\}, \quad e \in \{1, \dots, m\}$$

mit Intensitäten  $\lambda^{(e)}$ , wobei  $N^{(e)}(t)$  die Anzahl der Schocks vom Typ  $e$  zählt, die sich im Intervall  $(0, t]$  ereignen. Ferner gehen wir davon aus, dass es  $n$  verschiedene Schadenstypen gibt und die Schadensanzahl durch die Zählprozesse

$$\{N_j(t), \quad t \geq 0\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

beschrieben werden. Dabei gibt  $N_j(t)$  die Anzahl der Schäden vom Typ  $j$  im Intervall  $(0, t]$  an.

Ereignet sich ein Schock, so kann dieser zu Verlusten führen. Diese Situation können wir mit Hilfe von Bernoullivariablen beschreiben. Bezeichne  $I_{j,r}^{(e)}$  eine solche Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, falls ein Schock vom Typ  $e$  beim  $r$ -ten Auftreten einen Verlust vom Typ  $j$  verursacht und 0 falls nicht. Für  $r \in \mathbb{N}$  setzen wir die Vektoren

$$\mathbb{I}_r^{(e)} = (I_{1,r}^{(e)}, \dots, I_{n,r}^{(e)})$$

als unabhängig und identisch multivariat bernoulli verteilt voraus. Allerdings können die Komponenten von  $\mathbb{I}_r^{(e)}$  für ein festes  $r$  abhängig sein, wobei die Abhängigkeitsstruktur durch die Spezifizierung der multivariaten Bernoulliverteilung festgelegt wird. Zur Vereinfachung führen wir folgende Kurzschreibweisen für  $p$ -dimensionale Randwahrscheinlichkeiten dieser Verteilung ein.

$$P(I_{j_1}^{(e)} = i_{j_1}, \dots, I_{j_p}^{(e)} = i_{j_p}) = p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(i_{j_1}, \dots, i_{j_p}),$$

wobei der Index  $r$  übersichtlichkeitshalber weggelassen wurde und  $i_{j_1}, \dots, i_{j_p} \in \{0, 1\}$ . Wir schreiben  $p_j^{(e)}(1) = p_j^{(e)}$  für eindimensionale Randwahrscheinlichkeiten.

Mit den oberen Bezeichnungen können wir die Gesamtzahl der Schäden vom Typ  $j$  im Intervall  $(0, t]$  folgendermaßen darstellen

$$N_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)}. \quad (5.1)$$

$(N_j(t))_{t \geq 0}$  ist ein Poisson Prozess, denn:

1.  $I_{j,r}^{(e)}$  ist eine Bernoullivariablen und nach Satz 4.6 ist

$$\left\{ \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)}, \quad t \geq 0 \right\},$$

ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda^{(e)} p_j^{(e)}$ .

2. Mit 1. und Satz 4.5 erhalten wir  $N_j(t)$  als Superposition von  $m$  unabhängigen Poisson Prozessen.

Die Gesamtanzahl der Schäden  $N(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t)$  im Intervall  $(0, t]$  ist kein „einfacher“ Poisson, sondern ein zusammengesetzter Poisson Prozess. Dies kann man leicht einsehen, wenn wir  $N(t)$  etwas umschreiben, nämlich

$$N(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} \sum_{j=1}^n I_{j,r}^{(e)}. \quad (5.2)$$

Da  $\sum_{j=1}^n I_{j,r}^{(e)}$  im allgemeinen eine Summe abhängiger Bernoullivariablen ist, ist

$$\left\{ \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} \sum_{j=1}^n I_{j,r}^{(e)}, \quad t \geq 0 \right\}$$

ein zusammengesetzter Poisson Prozess. Mit dem Satz 4.9 erhalten wir die Behauptung.

Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften der Poisson Prozesse  $(N_i(t))_{t \geq 0}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  zusammen.

### 5.1 Satz

1.  $(N_i(t))_{t \geq 0}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  sind Poisson Prozesse mit

$$\mathbb{E}[N_i(t)] = t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_i^{(e)}$$

2. Seien  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ , dann ist die 2-dimensionale Randverteilung gegeben durch

$$P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) = e^{-\lambda t(p_{j,k}(1,1) + p_{j,k}(1,0) + p_{j,k}(0,1))} \times \\ \sum_{i=0}^{\min\{n_j, n_k\}} \frac{(\lambda t p_{j,k}(1,1))^i (\lambda t p_{j,k}(1,0))^{n_j-i} (\lambda t p_{j,k}(0,1))^{n_k-i}}{i!(n_j-i)!(n_k-i)},$$

wobei

$$\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \quad \text{und} \quad p_{j,k}(i_j, i_k) = \frac{1}{\lambda} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(i_j, i_k), \quad i_j, i_k \in \{0, 1\} \text{ ist.}$$

3. Die Kovarianz und die Korrelation sind gegeben durch

$$\text{cov}(N_j(t), N_k(t)) = t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)$$

und

$$\rho(N_j(t), N_k(t)) = \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)}{\sqrt{\left( \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)} \right) \left( \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)} \right)}}.$$

*Beweis:*

1. Behauptung 1. ergibt sich aus der Tatsache, dass  $N_j(t)$  eine Superposition von  $m$  unabhängigen Poisson Prozessen der Form

$$\left\{ \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)}, \quad t \geq 0 \right\},$$

mit Intensitäten  $\lambda^{(e)} p_j^{(e)}$  für  $e \in \{1, \dots, m\}$  ist.

2. Da die Schockprozesse  $\{N^{(e)}(t), t \geq 0\}$ ,  $e \in \{1, \dots, m\}$  unabhängig sind, wissen wir nach Satz 4.8, dass

$$\left\{ \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t), t \geq 0 \right\},$$

ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$  ist. Für  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \geq 0$  entspricht

dann  $P\left(\sum_{e=1}^m N^{(e)}(t) = l\right)$  der Wahrscheinlichkeit, dass es in  $[0, t]$   $l$  Schocks auftreten.

Allerdings sind im allgemeinen nicht alle verlustverursachend. Ferner kann man sich leicht überlegen, dass

$$P\left(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k \mid \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t) = l\right) \stackrel{d}{\sim} M\left(l, p_{j,k}(1, 1), p_{j,k}(1, 0), p_{j,k}(0, 1), p_{j,k}(0, 0)\right),$$

wobei  $M(\cdot, \dots, \cdot)$  eine Multinomialverteilung bezeichnet. Werden durch einen Schock simultan Verluste vom Typ  $j$  und  $k$  verursacht, dann nennen wir sie gemeinsame Verluste. Wir wissen, dass es maximal  $\min\{n_j, n_k\}$  solche auftreten können. Mit diesen Vorüberlegungen gilt

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) &= \sum_{l \geq n_j + n_k} P\left(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k \mid \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t) = l\right) \\ &\quad \times P\left(\sum_{e=1}^m N^{(e)}(t) = l\right) \\ &= \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\min\{n_j, n_k\}} \sum_{l=n_j+n_k-i}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \frac{l! (p_{j,k}(1, 1))^i (p_{j,k}(1, 0))^{n_j-i} (p_{j,k}(0, 1))^{n_k-i} (p_{j,k}(0, 0))^{l-n_j-n_k+i}}{i!(n_j-i)!(n_k-i)!(l-n_j-n_k+i)!}.$$

Ersetzt man  $p_{j,k}(0, 0)$  durch  $1 - (p_{j,k}(1, 1) + p_{j,k}(0, 1) + p_{j,k}(1, 0))$  und führt die innere Summation aus, so erhält man die Behauptung.

3. Behauptung 3. ist ein Spezialfall des Satzes 5.9.

□

Satz 5.1 Teil 3 liefert eine notwendige Bedingung für die Unabhängigkeit von  $N_j(t)$  und  $N_k(t)$ , nämlich  $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$  für alle  $e$ . Dies bedeutet, dass es unmöglich ist, Schäden vom Typ  $j$  und  $k$  mit dem selben Schock zu verursachen. Sollte es doch möglich sein, dann



besteht zwingend eine positive Abhängigkeit zwischen der Schadensanzahl beider Typen. Bezüglich der Unabhängigkeit von  $N_j(t)$  und  $N_k(t)$  können wir folgendes Ergebnis formulieren.

### 5.2 Korollar

$N_j(t)$  und  $N_k(t)$  sind unabhängig genau dann, wenn  $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$  für jedes  $e \in \{1, \dots, m\}$ .

*Beweis:*

1. Seien  $N_j(t)$  und  $N_k(t)$  unabhängig und  $t > 0$ . Dann gilt insbesondere

$$\text{cov}(N_j(t), N_k(t)) = 0 \iff t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$$

Da  $t > 0$  und  $\lambda^{(e)} > 0$  für alle  $e$  gilt, folgt  $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$  für alle  $e$ .

2. Gelte umgekehrt  $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$  für alle  $e$ . Wir müssen zeigen

$$P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) = P(N_j(t) = n_j)P(N_k(t) = n_k).$$

Satz 5.1 und die Voraussetzung liefern

$$P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) = e^{-\lambda t(p_{j,k}(1,0) + p_{j,k}(0,1))} \frac{(\lambda t p_{j,k}(1,0))^{n_j}}{n_j!} \frac{(\lambda t p_{j,k}(0,1))^{n_k}}{n_k!}.$$

Da  $p_j^{(e)}(1) = p_{j,k}^{(e)}(1, 0) + p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = p_{j,k}^{(e)}(1, 0)$  und  $p_k^{(e)}(1) = p_{j,k}^{(e)}(1, 0)$  für alle  $e$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) &= \exp \left\{ -t \left( \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}(1) + \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)}(1) \right) \right\} \\ &\quad \times \frac{\left( t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}(1) \right)^{n_j}}{n_j!} \frac{\left( t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)}(1) \right)^{n_k}}{n_k!} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

### 5.3 Korollar

Ist  $\sum_{j=1}^n p_j^{(e)}(1) > 1$  für ein  $e \in \{1, \dots, m\}$ , dann sind  $N_1(t), \dots, N_n(t)$  nicht unabhängig.

*Beweis:*

Für den Beweis benötigen wir folgende Feststellung: Ist  $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$  für alle  $j, k$  mit  $j \neq k$ , dann gilt

$$P[\mathbb{I}_r^{(e)} = (0, \dots, 0)] = 1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(e)}(1). \quad (5.3)$$

Begründung:

Zunächst gilt folgende Abschätzung

$P(I_{1,r}^{(e)} = \cdot, \dots, I_{n,r}^{(e)} = \cdot : \text{mindestens zwei Indikatoren haben den Wert 1}) \leq p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$ ,  
mit einer passenden Wahl von  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Damit erhalten wir

$$P(I_{1,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) = 1 - \sum_{j=1}^n P[I_{l,r}^{(e)} = 0 \text{ für alle } l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}, I_{j,r}^{(e)} = 1].$$

Wegen der oberen Abschätzung folgt unmittelbar

$$p_j^{(e)}(1) = P[I_{l,r}^{(e)} = 0 \text{ für alle } l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}, I_{j,r}^{(e)} = 1]$$

Nun können wir das Korollar mittels Kontraposition beweisen. Seien  $N_1(t), \dots, N_n(t)$  unabhängig, dann sind insbesondere  $N_j(t)$  und  $N_k(t)$  für alle  $k, j$  mit  $k \neq j$  unabhängig. Damit erhalten wir nach Korollar 5.2, dass  $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$  für alle  $j, k$  mit  $j \neq k$  gilt. Hieraus folgt

$$P[\mathbb{I}_r^{(e)} = (0, \dots, 0)] = 1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(e)}(1) \geq 0 \iff 1 \geq \sum_{j=1}^n p_j^{(e)}(1).$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Wir haben bereits erwähnt, dass  $N(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t)$  im allgemeinen kein Poisson Prozess ist, da die Komponenten  $N_j(t)$  nicht unbedingt unabhängig sind.

#### 5.4 Bemerkung

Sei  $\left\{ N(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t), \quad t \geq 0 \right\}$  der Gesamtschadensanzahlzählprozess mit  $\text{cov}\left(N_j(t), N_k(t)\right) > 0$  für alle  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt

$$\mathbb{V}(N(t)) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \text{cov}\left(N_j(t), N_k(t)\right) > \mathbb{E}(N(t)).$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(N(t)) &= \sum_{j=1}^n \text{cov}\left(N_j(t), N_j(t)\right) + \sum_{j,k=1:j \neq k}^n \text{cov}\left(N_j(t), N_k(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,j}^{(e)} + \sum_{j,k=1:j \neq k}^n \text{cov}\left(N_j(t), N_k(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(N_j(t)) + \sum_{j,k=1:j \neq k}^n \text{cov}\left(N_j(t), N_k(t)\right) \\ &= \mathbb{E}(N(t)) + \underbrace{\sum_{j,k=1:j \neq k}^n \text{cov}\left(N_j(t), N_k(t)\right)}_{>0 \text{ n.Voraus.}} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

□

Nach der letzten Bemerkung ist die Situation positiv abhängiger Summanden von  $N_t$  „gefährlicher“ als die der unabhängiger Komponenten. Denn die Varianz von  $N_t$  im ersten Fall ist echt größer als die im zweiten.

Das bisher entwickelte *non-fatal-shock* Modell lässt sich leicht interpretieren. Allerdings wollen wir als nächstes zeigen, dass dieses Modell eine äquivalente Darstellung als ein *fatal* Modell besitzt. Dies wird umgesetzt, indem man anstatt aller nur die verlustverursachenden Schocks zählt. Anschließend ermöglicht die neue Darstellung einige nicht triviale Folgerungen über das Ausgangsmodell zu treffen.

Sei  $\mathfrak{S} := \mathfrak{P}(\{1, \dots, n\}) \setminus \emptyset$  und für  $s \in \mathfrak{S}$  definieren wir einen Zählprozess  $\tilde{N}_s(t)$ , der die Anzahl der Schocks im Intervall  $(0, t]$  beschreibt. Dabei verursachen diese Schocks Verluste ausschließlich von Typen in  $s$ . Wenn  $s = \{1, 2, 3\}$  ist, dann zählt  $\tilde{N}_s(t)$  Schocks, die gleichzeitig Verluste vom Typ 1, 2 und 3 nicht aber vom Typ 4 bis  $n$  verursachen.

### 5.5 Bemerkung

1. Der Prozess  $\tilde{N}_s(t)$  ist gegeben durch

$$\tilde{N}_s(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} \sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)},$$

wobei

$$J_{s,r}^{(e)} := \sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} \quad (5.4)$$

eine  $\{0,1\}$ -wertige Zufallsvariable ist. Diese nimmt den Wert 1 an, falls der  $r$ -te Schock vom Typ  $e$  nur Verluste von Typen in  $s$  verursacht, und 0 sonst.

2. Die Gesamtzahl der verlustverursachenden Schocks  $\tilde{N}(t)$  ist gegeben durch

$$\tilde{N}(t) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \tilde{N}_s(t)$$

3. Es gilt

$$P(J_{s,r}^{(e)} = 1) = \sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right)$$

*Beweis:*

1. Wir wollen zeigen, dass die Zufallsvariable  $J_{s,r}^{(e)}$   $\{0,1\}$ -wertig ist. Dazu nehmen wir ein beliebiges  $s \in \mathfrak{S}$  mit  $|s| = k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  und setzen voraus, dass

$$I_{l,r}^{(e)} = 1 \quad \text{für alle } l \in s. \quad (5.5)$$

Ist dies nicht der Fall, d.h. es gibt ein  $l \in s$  mit  $I_{l,r}^{(e)} = 0$ , dann ist auch  $J_{s,r}^{(e)} = 0$ .

Die Beweisidee besteht darin, sich die Anzahl der Indikatoren anzuschauen, die zusätzlich zu den oberen  $k$  den Wert 1 annehmen. Das heißt, dass wir uns für die Anzahl der Indizes  $l \in \{1, \dots, n\} \setminus s$  mit  $I_{l,r}^{(e)} = 1$  interessieren und diese mit  $i$  für  $0 \leq i \leq n - k$  bezeichnen.

1. *Fall:* Sei  $i = 0$ , d.h.

$$\nexists l \in \{1, \dots, n\} \setminus s \text{ mit } I_{l,r}^{(e)} = 1 \iff \forall l \in \{1, \dots, n\} \setminus s \text{ gilt } I_{l,r}^{(e)} = 0$$

Wegen der Voraussetzung (5.5) folgt nun  $J_{s,r}^{(e)} = 1$ .

2. Fall: Behauptung: Für  $i > 0$  gilt  $J_{s,r}^{(e)} = 0$ .

Sei  $i = 1$ , d.h.

$$\exists! j \in \{1, \dots, n\} \setminus s \text{ mit } I_{j,r}^{(e)} = 1 \quad \text{und} \quad I_{l,r}^{(e)} = 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, n\} \setminus s, \quad l \neq j.$$

Man kann sich leicht überlegen, dass  $\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1$  nur für  $s' \in \{s, s''\}$  gilt, wobei  $s'' = s \cup \{j\}$  ist. Somit erhalten wir

$$\sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = \sum_{s': s' \in \{s, s''\}} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 0.$$

Nun wollen wir diese Überlegung auf ein beliebiges  $i \in \{1, \dots, n - k\}$  anwenden. Es gibt genau  $2^i - 1$  Mengen  $s''$ , so dass

1.  $s'' \supset s$
2. Für jedes  $l \in s''$  gilt  $I_{l,r}^{(e)} = 1$ .

Damit reduziert sich die Summe  $\sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)}$  auf solche Mengen  $s''$  und wir erhalten

$$1 + \sum_{s''} (-1)^{|s''| - |s|} \prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} = 0,$$

wobei  $\binom{i}{j}$  die Anzahl der Mengen  $s''$  mit  $|s'' \setminus s| = j$  angibt.

Insgesamt folgt die Behauptung.

2. Bei 2. ist nichts zu beweisen

3. Die Behauptung werden wir mittels vollständiger Induktion nach der Mächtigkeit von  $s^c$  zeigen, wobei  $s \in \mathfrak{S}$  beliebig ist. Für ein  $s$  mit  $|s| = k$  können wir durch eventuelles Umm nummerieren der Elemente stets erreichen, dass  $s = \{1, \dots, k\}$  für  $k \in \{1, \dots, n\}$  ist.

**I.A.:**  $|s^c| = 1 \Rightarrow s = \{1, \dots, n - 1\}$

$$\begin{aligned} P(J_{s,r}^{(e)} = 1) &= P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{n-1,r}^{(e)} = 1, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{n-1,r}^{(e)} = 1) - P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{n-1,r}^{(e)} = 1, I_{n,r}^{(e)} = 1) \\ &= \sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \end{aligned}$$

**I.V'.:**<sup>1</sup> Es gelte

$$P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) = \sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right),$$

wobei  $s = \{1, \dots, k + 1\}$  ist.

**I.S.:**  $(n - k - 1) \mapsto (n - k)$ , d.h. wir müssen folgendes zeigen

<sup>1</sup>I.V'. bzw. I.V''. bezeichnet die erste bzw. die zweite Induktionsvoraussetzung

$$P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k,r}^{(e)} = 1, I_{k+1,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) = \sum_{s': s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right),$$

wobei  $s = \{1, \dots, k\}$  ist.

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k,r}^{(e)} = 1, I_{k+1,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &- P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0). \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k,r}^{(e)} = 1, I_{k+1,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &+ \sum_{\substack{s': s' \supseteq s \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s'| - |s| + 1} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

Man kann sich leicht die Gültigkeit folgender Gleichung überlegen.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{s': s' \supseteq s \\ s = \{1, \dots, k\}}} (-1)^{|s'| - |s| + 1} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) &= \sum_{\substack{s'': s'' = s' \setminus \{k+1\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+1\} \\ s = \{1, \dots, k\}}} (-1)^{|s''| - |s|} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \\ &+ \sum_{\substack{s': s' \supseteq s \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s'| - |s| + 1} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

Somit muss folgendes gezeigt werden

$$P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) = \sum_{\substack{s'': s'' = s' \setminus \{k+1\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+1\} \\ s = \{1, \dots, k\}}} (-1)^{|s''| - |s|} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right).$$

Diese Aussage wird per Induktion nach der Anzahl der Elemente von  $(|s^c| - 1)$  bewiesen.  
**I.A.:**  $(|s^c| - 1) = 1$  : Durch eventuelles Ummummern der Elemente von  $s$  erhalten wir

$$\sum_{\substack{s'': s'' = s' \setminus \{n-1\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, n-1\} \\ s = \{1, \dots, n-2\}}} (-1)^{|s''| - |s|} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \stackrel{(*)}{=} P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{n-2,r}^{(e)} = 1, I_{n,r}^{(e)} = 0),$$

wobei

$$(*) = \begin{cases} s' = \{1, \dots, n-1\} \Rightarrow s'' = \{1, \dots, n-2\} \Rightarrow (-1)^0 P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{n-2,r}^{(e)} = 1) \\ s' = \{1, \dots, n\} \Rightarrow s'' = \{1, \dots, n-2, n\} \Rightarrow (-1)^1 P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{n-2,r}^{(e)} = 1, I_{n,r}^{(e)} = 1). \end{cases}$$

**I.V''**.: Es gelte

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+2,r}^{(e)} = 1, I_{k+4,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+3\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+2\}}} (-1)^{|s''| - |s|} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

**I.S.**.: Wir müssen die Gültigkeit der folgenden Gleichung nachweisen.

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+3,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+2\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+2\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - |s|} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

Dazu schreiben wir die Wahrscheinlichkeit  $P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+2,r}^{(e)} = 1, I_{k+4,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0)$  um:

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+3,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+2,r}^{(e)} = 1, I_{k+4,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &\quad - P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+3,r}^{(e)} = 1, I_{k+4,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &\quad + P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0). \end{aligned}$$

Auf die beiden letzten Zeilen können wir nun **I.V'**. anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} & \underbrace{P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+2,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0)}_{=} - \underbrace{P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+3,r}^{(e)} = 1, I_{k+4,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0)}_{=} \\ &= \sum_{\substack{s' : s' \supseteq s \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) - \sum_{\substack{s' : s' \supseteq s \\ s = \{1, \dots, k+3\}}} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \\ &= \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+2, k+3\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - (|s| - 2)} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+2\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - (|s| - 2)} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+3\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - (|s| - 2)} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach **I.V''** .:

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+2,r}^{(e)} = 1, I_{k+4,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+3\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+2\}}} (-1)^{|s''| - |s|} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & P(I_{1,r}^{(e)} = 1, \dots, I_{k+1,r}^{(e)} = 1, I_{k+3,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0) \\ &= \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+2, k+3\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - (|s| - 2)} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \\ &+ \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+2\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+3\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - (|s| - 2)} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) \\ &= \sum_{\substack{s'' : s'' = s' \setminus \{k+2\} \\ s' \supseteq \{1, \dots, k+2\} \\ s = \{1, \dots, k+1\}}} (-1)^{|s''| - (|s| - 2)} P\left(\prod_{m \in s''} I_{m,r}^{(e)} = 1\right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die Behauptung. □

Das folgende Ergebnis ermöglicht uns das äquivalente *fatal-shock* Modell aufzustellen.

### 5.6 Satz

Für  $s \in \mathfrak{S}$  sind  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}$  unabhängige Poisson Prozesse.

*Beweis:* Gemäß Bemerkung 5.5 (3.) wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit  $P(J_{s,r}^{(e)} = 1)$  nicht von  $r$  abhängt. Deswegen erhalten wir durch das Ausdünnen des Prozesses  $\{N^{(e)}(t), t \geq 0\}$  einen neuen Poisson Prozess

$$\left\{ \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} J_{s,r}^{(e)}, t \geq 0 \right\} \text{ mit Intensität } \lambda^{(e)} \sum_{s' : s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Poisson Prozesse  $N^{(1)}(t), \dots, N^{(m)}(t)$  ergibt sich der Prozess

$$\left\{ \tilde{N}_s(t), t \geq 0 \right\}$$

als Superposition von unabhängigen Poisson Prozessen

$$\left\{ \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} J_{s,r}^{(e)}, \quad t \geq 0 \right\} \quad \text{für } e \in \{1, \dots, m\}.$$

Somit ist  $\{\tilde{N}_s(t), \quad t \geq 0\}$  ein Poisson Prozess mit Intensität

$$\lambda_s = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{s':s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right).$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $\{N(t), \quad t \geq 0\}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\tilde{\lambda} = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \lambda_s$  ist. Dazu betrachten wir folgende Bernoullivariablen

$$B_{s,r}^{(e)} := \sum_{s \in \mathfrak{S}} \sum_{s':s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)}.$$

Man kann sich leicht überlegen, dass folgendes gilt

$$P\left(\sum_{s \in \mathfrak{S}} \sum_{s':s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 1 - P\left(\prod_{m \in s'} (1 - I_{m,r}^{(e)}) = 1\right).$$

Damit sehen wir, dass die Wahrscheinlichkeit  $P(B_{s,r}^{(e)} = 1)$  nicht von  $r$  abhängt. Ferner können wir  $\tilde{N}(t)$  umformulieren zu:

$$\tilde{N}(t) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \tilde{N}_s(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} B_{s,r}^{(e)}.$$

Mit einer ähnlichen Argumentation, wie im Falle von  $\tilde{N}_s(t)$ , lässt sich nun folgern, dass  $\tilde{N}(t)$  ein Poisson Prozess mit Intensität

$$\tilde{\lambda} = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \lambda_s = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} (1 - P(I_{1,r}^{(e)} = 0, \dots, I_{n,r}^{(e)} = 0))$$

ist. Da sowohl  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}$  als auch  $\tilde{N}(t)$  Poisson Prozesse sind, entspricht jeder Sprung von  $\tilde{N}(t)$  genau einem Sprung genau eines der Prozesse  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}$ ,  $s \in \mathfrak{S}$ .

Ordnet man die  $l = 2^n - 1$  Elemente von  $\mathfrak{S}$  beliebig an. Dann gilt

$$P(\tilde{N}_{s_1}(t) = n_1, \dots, \tilde{N}_{s_l}(t) = n_l | \tilde{N}(t) = \tilde{n}) = \begin{cases} \tilde{n}! \prod_{j=1}^l \frac{(\lambda_{s_j} / \tilde{\lambda})^{n_j}}{n_j!}, & \tilde{n} = \sum_{j=1}^l n_j \\ 0, & \tilde{n} \neq \sum_{j=1}^l n_j \end{cases}$$

Damit folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}_{s_1}(t) = n_1, \dots, \tilde{N}_{s_l}(t) = n_l) &= P\left(\tilde{N} = \sum_{j=1}^l n_j\right) \left(\sum_{j=1}^l n_j\right)! \prod_{j=1}^l \frac{(\lambda_{s_j} / \tilde{\lambda})^{n_j}}{n_j!} \\ &= \prod_{j=1}^l e^{-\lambda_{s_j} t} \frac{(\lambda_{s_j} t)^{n_j}}{n_j!} = \prod_{j=1}^l P(\tilde{N}_{s_j}(t) = n_j). \end{aligned}$$

Also sind die Poisson Prozesse  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}$  für  $s \in \mathfrak{S}$  unabhängig.



□

### 5.7 Bemerkung

Da für  $s \in \mathfrak{S}$  die Poisson Prozesse  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}$  unabhängig sind, können wir  $N_j(t)$  folgendermaßen darstellen

$$N_j(t) = \sum_{s:j \in s} \tilde{N}_s(t).$$

Damit erhalten wir auch eine *fatal-shock* Darstellung des Ausgangsmodells.

### 5.8 Lemma

1. Mit Bezeichnungen aus Satz 5.6 gilt

$\lambda_s = 0$  für alle  $|s| \geq 2$  genau dann, wenn  $p_{j,k}^{(e)}(1,1) = 0$  für alle  $e$  und alle  $j, k$  mit  $j \neq k$ .

2.  $N_1(t), \dots, N_n(t)$  sind unabhängig genau dann, wenn  $p_{j,k}^{(e)}(1,1) = 0$  für alle  $e$  und alle  $j, k$  mit  $j \neq k$

*Beweis:*

1. Sei  $\lambda_s = 0$  für alle  $|s| \geq 2$ , d.h.

$$\lambda_s = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{s':s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 0 \quad \text{für alle } |s| \geq 2.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |s| = n &\Rightarrow P\left(\prod_{m \in s} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 0 \quad \forall e \\ |s| = n-1 &\Rightarrow P\left(\prod_{m \in s} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) + (-1)P\left(\prod_{m \in \{1, \dots, n\}} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow P\left(\prod_{m \in s} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 0 \quad \forall e \\ &\vdots \\ |s| = 2 &\Rightarrow P\left(\prod_{m \in s} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) + \sum_{s':s' \supseteq s} (-1)^{|s'| - |s|} P\left(\prod_{m \in s'} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow P\left(\prod_{m \in s} I_{m,r}^{(e)} = 1\right) = 0 \quad \forall e \end{aligned}$$

Somit ist  $P(I_{j,r}^{(e)} = 1, I_{k,r}^{(e)} = 1) = 0$  für alle  $e$  und alle  $j, k$  mit  $j \neq k$ .

Gelte umgekehrt  $P(I_{j,r}^{(e)} = 1, I_{k,r}^{(e)} = 1) = 0$  für alle  $e$  und alle  $j, k$  mit  $j \neq k$ . Aus der Darstellung von  $\lambda_s$  und der Voraussetzung folgt unmittelbar:  $\lambda_s = 0$  für alle  $|s| \geq 2$ .

2. Sei

$$P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) = P(N_1(t) = k_1) \cdot \dots \cdot P(N_n(t) = k_n) \quad (5.6)$$

für alle  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ . Die Gleichung (5.6) können wir umschreiben zu

$$P\left(\sum_{\{s:1 \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_1, \dots, \sum_{\{s:n \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_n\right) = \\ P\left(\sum_{\{s:1 \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_1\right) \cdot \dots \cdot P\left(\sum_{\{s:n \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_n\right).$$

Andererseits wissen wir nach Satz 5.6, dass  $\sum_{\{s:1 \in s\}} \tilde{N}_s(t), \dots, \sum_{\{s:n \in s\}} \tilde{N}_s(t)$  unabhängig, falls

$$\{s : 1 \in s\} \cap \{s : 2 \in s\} \cap \dots \cap \{s : n \in s\} = \emptyset.$$

Dies ist genau dann der Fall, falls

$$\{s : 1 \in s\} = \{1\}, \{s : 2 \in s\} = \{2\}, \dots, \{s : n \in s\} = \{n\}$$

gilt. Somit haben wir

$$Poi\left(t \sum_{\{s:i \in s\}} \lambda_s\right) \stackrel{d}{\sim} \sum_{\{s:i \in s\}} \tilde{N}_s(t) = \tilde{N}_{\{i\}}(t) \stackrel{d}{\sim} Poi(t\lambda_{\{i\}})$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Daraus folgt, dass  $\lambda_s = 0$  für alle  $s$  mit  $|s| \geq 2$  und nach 1. ergibt sich die Behauptung.

Sei umgekehrt  $p_{j,k}^{(e)} = 0$  für alle  $e$  und alle  $j, k$  mit  $j \neq k$  vorausgesetzt. Es gilt

$$P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) = P\left(\sum_{\{s:1 \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_1, \dots, \sum_{\{s:n \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_n\right).$$

Da  $\lambda_s = 0$  für alle  $s$  mit  $|s| \geq 2$  nach 1. gilt, folgt

$$\sum_{\{s:i \in s\}} \tilde{N}_s(t) \stackrel{d}{\sim} Poi\left(t \sum_{\{s:i \in s\}} \lambda_s\right) = Poi(t\lambda_{\{i\}}) \stackrel{d}{\sim} \tilde{N}_{\{i\}}(t).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von  $\tilde{N}_{\{1\}}(t), \dots, \tilde{N}_{\{n\}}(t)$  erhalten wir

$$P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) = P\left(\sum_{\{s:1 \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_1, \dots, \sum_{\{s:n \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_n\right) \\ = P(\tilde{N}_{\{1\}}(t) = k_1, \dots, \tilde{N}_{\{n\}}(t) = k_n) \\ = P(\tilde{N}_{\{1\}}(t) = k_1) \cdot \dots \cdot P(\tilde{N}_{\{n\}}(t) = k_n) \\ = P\left(\sum_{\{s:1 \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_1\right) \cdot \dots \cdot P\left(\sum_{\{s:n \in s\}} \tilde{N}_s(t) = k_n\right) \\ = P(N_1(t) = k_1) \cdot \dots \cdot P(N_n(t) = k_n).$$

Damit haben wir die Unabhängigkeit von  $N_1(t), \dots, N_n(t)$  nachgewiesen.

□

## 5.2 Schadenshöhe

Nun wollen wir unser bisher entwickeltes Modell um Schadenshöhen erweitern. Dazu nehmen wir an, dass das  $r$ -te Auftreten eines Schocks vom Typ  $e$  einen Schaden vom Typ  $j$  mit Schadenshöhe  $X_{j,r}^{(e)}$  verursachen könnte. Ob dies tatsächlich passiert, wird durch die Zufallsvariable  $I_{j,r}^{(e)}$  bestimmt. Ferner setzen wir voraus, dass  $X_{j,r}^{(e)}, I_{j,r}^{(e)}$  unabhängig und

$$\left\{ X_{j,r}^{(e)}, r \in \mathbb{N}, e = 1, \dots, m \right\}$$

unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion  $F_j$  sind. Der Zufallsvektor  $\mathbb{X}_r^{(e)} = (X_{1,r}^{(e)}, \dots, X_{n,r}^{(e)})$  besitze Verteilungsfunktion  $F$ , wobei die Komponenten von  $\mathbb{X}_r^{(e)}$  abhängig sein könnten. Mit den eingeführten Bezeichnungen können wir den aggregierten Prozess  $Z_j(t)$  für Schäden vom Typ  $j$  folgendermaßen darstellen

$$Z_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}.$$

Damit erhalten wir den aggregierten Gesamtschadenshöhenprozess  $\{Z(t), t \geq 0\}$  als Summe von  $m$  unabhängigen zusammengesetzten Poisson Prozessen

$$Z(t) = \sum_{j=1}^n Z_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} \sum_{j=1}^n X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}.$$

Also ist  $\{Z(t), t \geq 0\}$  selbst ein zusammengesetzter Poisson Prozess und wir können diesen umformulieren zu:

$$Z(t) = \sum_{s=1}^{S(t)} Y_s \tag{5.7}$$

Dabei bezeichnet  $\{S(t), t \geq 0\}$  ein Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$  und

$Y_1, \dots, Y_n (\stackrel{d}{=} Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, die auch von  $S(t)$  unabhängig sind. Die Zufallsvariable  $Y$  besitzt die Darstellung

$$Y \stackrel{d}{=} \mathbb{I}'\mathbb{X},$$

wobei  $\mathbb{I}$  ein Zufallsvektor mit  $P(\mathbb{I} = \mathbb{I}^{(e)}) = \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda}$  für  $e \in \{1, \dots, m\}$  ist.  $\mathbb{I}^{(e)}$  bezeichne den gewöhnlichen Zufallsvektor von Indikatoren für Schocks vom Typ  $e$  und  $\mathbb{X}$  den gewöhnlichen Zufallsvektor für Schadenshöhen, die durch den selben Schock verursacht wurden. Außerdem sind  $\mathbb{X}$  und  $\mathbb{I}^{(1)}, \dots, \mathbb{I}^{(m)}$  unabhängig.

Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften der zusammengesetzten Poisson Prozesse  $(Z_i(t))_{t \geq 0}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  zusammen.

### 5.9 Satz

1.  $(Z_i(t))_{t \geq 0}$  ist ein zusammengesetzter Poisson Prozess für  $i \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathbb{E}(Z_j(t)) = \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(N_j(t)),$$

falls  $\mathbb{E}(|X_j|) < \infty$  ist.

2. Sind  $\mathbb{E}(|X_j|) < \infty$  und  $\mathbb{E}(|X_k|) < \infty$ , dann gilt

$$\text{cov}(Z_j(t), Z_k(t)) = \mathbb{E}(X_j X_k) \text{cov}(N_j(t), N_k(t))$$

und

$$\rho(Z_j(t), Z_k(t)) = \frac{\mathbb{E}(X_j X_k)}{\sqrt{\mathbb{E}(X_j^2) \mathbb{E}(X_k^2)}} \rho(N_j(t), N_k(t))$$

*Beweis:*

1. Behauptung 1. lässt sich leicht nachrechnen.

2. Sei  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)} \cdot \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \middle| N^{(e)}(t) = n \right) \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{r=1}^n X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} + \sum_{r \in \{2,3,\dots,n\}} X_{j,1}^{(e)} I_{j,1}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right. \\ &+ \sum_{r \in \{1,3,\dots,n\}} X_{j,2}^{(e)} I_{j,2}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} + \sum_{r \in \{1,2,4,5,\dots,n\}} X_{j,3}^{(e)} I_{j,3}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \\ &+ \left. \sum_{r \in \{1,2,3,5,\dots,n\}} X_{j,4}^{(e)} I_{j,4}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \dots + \sum_{r \in \{1,\dots,n-1\}} X_{j,n}^{(e)} I_{j,n}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right] \\ &= n \mathbb{E}(I_j^{(e)} I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j X_k) + n(n-1) \mathbb{E}(I_j^{(e)}) \mathbb{E}(I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k) \end{aligned}$$

Das Fehlen von Indizes ergibt sich aus der Tatsache, dass das Variieren dieser keine Veränderung des Erwartungswertes nach sich zieht.

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_j(t), Z_k(t)) &= \mathbb{E} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)} \cdot \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right) - \mathbb{E} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right) \mathbb{E} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( N^{(e)}(t) \right) \mathbb{E}(I_j^{(e)} I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j X_k) \\ &+ \left[ \mathbb{E} \left( \left( N^{(e)}(t) \right)^2 \right) - \mathbb{E} \left( N^{(e)}(t) \right) \right] \mathbb{E}(I_j^{(e)}) \mathbb{E}(I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k) \\ &- \mathbb{E} \left( N^{(e)}(t) \right)^2 \mathbb{E}(I_j^{(e)}) \mathbb{E}(I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k) \\ &= \mathbb{E} \left( N^{(e)}(t) \right) \mathbb{E}(I_j^{(e)} I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j X_k) \\ &+ \left[ \mathbb{V} \left( N^{(e)}(t) \right) - \mathbb{E} \left( N^{(e)}(t) \right) \right] \mathbb{E}(I_j^{(e)}) \mathbb{E}(I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k) \\ &= \mathbb{E} \left( N^{(e)}(t) \right) \mathbb{E}(I_j^{(e)} I_k^{(e)}) \mathbb{E}(X_j X_k) \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z_j(t), Z_k(t)) &= \sum_{e=1}^m \text{cov} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}, \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{e=1}^m \sum_{e \neq f} \text{cov} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}, \sum_{r=1}^{N^{(f)}(t)} X_{k,r}^{(f)} I_{k,r}^{(f)} \right)}_{=0, \text{ wegen der Unabhängigkeit}} \\
&= \sum_{e=1}^m \text{cov} \left( \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}, \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{k,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right) \\
&= \mathbb{E}(X_j X_k) \sum_{e=1}^m \mathbb{E}(I_j^{(e)} I_k^{(e)}) \mathbb{E}(N^{(e)}(t)) \\
&= \mathbb{E}(X_j X_k) t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1) \\
&= \mathbb{E}(X_j X_k) \text{cov}(N_j(t), N_k(t))
\end{aligned}$$

□

### 5.10 Satz

Sei  $Z(t)$  gemäß (5.7) gegeben. Dann gilt

1. Falls Momente von  $Z(t)$  existieren, dann sind sie rekursiv gegeben durch

$$\mathbb{E}(Z(t)^p) = \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \mathbb{E}(Y^{k+1}) \mathbb{E}(Z(t)^{p-k-1})$$

mit  $\mathbb{E}(Y^{k+1})$  aus (6.8).

2. Falls das zweite und dritte zentrale Moment von  $Z(t)$  existieren, dann sind sie gegeben durch

$$\mathbb{E} \left[ \left( Z(t) - \mathbb{E}(Z(t)) \right)^p \right] = \lambda t \mathbb{E}(Y^p), \quad p = 2, 3,$$

wobei  $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$  und

$$\mathbb{E}(Y^p) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_p=1}^n \mathbb{E}(X_{j_1}, \dots, X_{j_p}) \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1). \quad (5.8)$$

*Beweis:*

1. Da wir bereits im Beweis vom Satz 4.9 die L.T.  $\varphi$  eines zusammengesetzten Poisson Prozesses bestimmt haben, können wir die momentenerzeugende Funktion  $M_{Z(t)}$  von  $Z(t)$  mittels Transformation  $\varphi(s) = M_{Z(t)}(-s)$  direkt ablesen. Für  $M_{Z(t)}(s)$  gilt folgende Gleichung

$$M_{Z(t)}^{(p)}(s) = \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} M_Y^{(k+1)}(s) M_{Z(t)}^{(p-k-1)}(s),$$

wobei  $M_Y$  die momentenerzeugende Funktion von  $Y$  und  $M_Y^{(p)}$  deren  $p$ -te Ableitung bezeichnet.

*Beweis mittels Induktion nach  $p$ :*

I.A:  $p = 1$  :  $\lambda t M_Y^{(1)} \exp(\lambda t(M_Y - 1)) = M_{Z(t)}^{(1)} = \lambda t(M_Y^{(1)} M_{Z(t)}^{(0)}(s)),$

wobei  $M_{Z(t)}^{(0)}(s) := M_{Z(t)}(s)$  ist.

I.S:  $p \mapsto p + 1$  :

$$\begin{aligned} M_{Z(t)}^{(p+1)}(s) &= \left( M_{Z(t)}^{(p)}(s) \right)' = \left( \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} M_Y^{(k+1)}(s) M_{Z(t)}^{(p-k-1)}(s) \right)' \\ &= \lambda t \left[ \binom{p-1}{0} M_Y^{(2)}(s) M_{Z(t)}^{(p-1)}(s) + \binom{p-1}{0} M_Y^{(1)}(s) M_{Z(t)}^{(p)}(s) \right. \\ &\quad + \binom{p-1}{1} M_Y^{(3)}(s) M_{Z(t)}^{(p-2)}(s) + \binom{p-1}{1} M_Y^{(2)}(s) M_{Z(t)}^{(p-1)}(s) \\ &\quad + \binom{p-1}{2} M_Y^{(4)}(s) M_{Z(t)}^{(p-3)}(s) + \binom{p-1}{2} M_Y^{(3)}(s) M_{Z(t)}^{(p-2)}(s) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \binom{p-1}{p-2} M_Y^{(p)}(s) M_{Z(t)}^{(1)}(s) + \binom{p-1}{p-2} M_Y^{(p-1)}(s) M_{Z(t)}^{(2)}(s) \\ &\quad \left. + \binom{p-1}{p-1} M_Y^{(p+1)}(s) M_{Z(t)}^{(0)}(s) + \binom{p-1}{p-1} M_Y^{(p)}(s) M_{Z(t)}^{(1)}(s) \right] \\ &= \lambda t \left[ \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} M_Y^{(k+1)}(s) M_{Z(t)}^{(p-k)}(s) \right. \\ &\quad \left. + \binom{p-1}{0} M_Y^{(1)}(s) M_{Z(t)}^{(p)}(s) + \binom{p-1}{p-1} M_Y^{(p+1)}(s) M_{Z(t)}^{(0)}(s) \right] \\ &= \lambda t \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M_Y^{(k+1)}(s) M_{Z(t)}^{(p-k)}(s) \end{aligned}$$

Mithilfe der bekannten Beziehung  $\mathbb{E}(Z(t)^p) = M_{Z(t)}^{(p)}(0)$  ergibt sich die erste Behauptung.

2. Für  $p = 2$  erhalten wir mit der zweiten Waldschen Identität

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( Z(t) - \mathbb{E}(Z(t)) \right)^2 \right] &= \mathbb{V}(Z(t)) = \mathbb{E}(S(t))\mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(S(t))\mathbb{E}(Y)^2 \\ &= \lambda t(\mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) = \lambda t\mathbb{E}(Y^2). \end{aligned}$$

Für  $p = 3$  gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \left( Z(t) - \mathbb{E}(Z(t)) \right)^3 \right] = \mathbb{E}(Z(t)^3) - 3\mathbb{E}(Z(t)^2)\mathbb{E}(Z(t)) + 2\mathbb{E}(Z(t))^3 \stackrel{!}{=} \lambda t\mathbb{E}(Y^3).$$

Mit  $Y \stackrel{d}{=} \mathbb{I}'\mathbb{X}$  und  $P(\mathbb{I} = \mathbb{I}^{(e)}) = \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda}$  für  $e \in \{1, \dots, m\}$  erhalten wir folgendes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^p) &= \sum_{e=1}^m \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda} \mathbb{E} \left[ \left( \mathbb{I}^{(e)'} \mathbb{X} \right)^p \right] \\ &= \sum_{e=1}^m \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda} \mathbb{E} \left[ \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_p=1}^n I_{j_1}^{(e)} \cdots I_{j_p}^{(e)} X_{j_1} \cdots X_{j_p} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_p=1}^n \mathbb{E}(X_{j_1} \cdots X_{j_p}) p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_p=1}^n \mathbb{E}(X_{j_1} \cdots X_{j_p}) \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1). \end{aligned}$$

□

### 5.3 Ersteintrittszeiten von Verlusten

Bezeichne die Zufallsvariable  $T_j = \inf\{t : N_j(t) > 0\}$  die Ersteintrittszeit eines Verlusts vom Typ  $j$ . Wir interessieren uns für die Verteilung von  $(T_1, \dots, T_n)$ .

#### 5.11 Satz

Sei  $T_j = \inf\{t : N_j(t) > 0\}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann besitzt der Zufallsvektor  $(T_1, \dots, T_n)$  eine mehrdimensionale Exponentialverteilung, deren Überlebenscopula eine Marshall-Olkin Copula ist.

*Beweis:*

Aufgrund der Unabhängigkeit der Folge  $(\tilde{N}_s(t))_{s \in \mathfrak{S}}$  sind die Zufallsvariablen

$$Z_s = \inf\{t : \tilde{N}_s(t) > 0\}, \quad s \in \mathfrak{S}$$

unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda_s$ . Ferner gilt

$$T_j = \inf\{t : N_j(t) > 0\} = \inf\{t : \sum_{\{s: j \in s\}} \tilde{N}_s(t) > 0\} = \min_{\{s: j \in s\}} Z_s.$$

Damit ist  $T_j$  exponentialverteilt. Außerdem ist die Überlebenscopula von

$$(T_1, \dots, T_n) = \left( \min_{\{s: 1 \in s\}} Z_s, \dots, \min_{\{s: n \in s\}} Z_s \right)$$

eine  $n$ -dimensionale Marshall-Olkin Copula (vgl. [18]).

□

Wir wollen die 2-dimensionale Marshall-Olkin Copula konstruieren.

$$\begin{aligned}
P(T_i > t_i, T_j > t_j) &= P(\min_{\{s:i \in s\}} Z_s > t_i, \min_{\{s:j \in s\}} Z_s > t_j) = \\
P(\min_{\{s:i \in s, j \notin s\}} Z_s > t_i, \min_{\{s:j \in s, i \notin s\}} Z_s > t_j, \min_{\{s:(i,j) \in s\}} Z_s > t_i, \min_{\{s:(i,j) \in s\}} Z_s > t_j) &= \\
P(\min_{\{s:i \in s, j \notin s\}} Z_s > t_i) P(\min_{\{s:j \in s, i \notin s\}} Z_s > t_j) P(\min_{\{s:(i,j) \in s\}} Z_s > \max(t_i, t_j)) &= \\
\exp\left(-t_i \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} (p_i^{(e)}(1) - p_{i,j}^{(e)}(1, 1))\right) &\cdot \\
\exp\left(-t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} (p_j^{(e)}(1) - p_{i,j}^{(e)}(1, 1))\right) &\cdot \\
\exp\left(-\max(t_i, t_j) \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right) &= \\
\exp\left(-t_i \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_i^{(e)}(1) - t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}(1)\right) &\cdot \\
\exp\left(\left(t_i + t_j - \max(t_i, t_j)\right) \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right) &= \\
\exp\left(-t_i \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_i^{(e)}(1) - t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}(1)\right) &\cdot \\
\exp\left(\min(t_i, t_j) \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right) &
\end{aligned}$$

Da  $\bar{F}_k(t) = P(T_k > t) = \exp\left(-t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)}(1)\right)$  für  $k = i, j$  gilt und  $e^x$  monoton wachsend ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\min(t_i, t_j) \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right) = \\
&\min\left[\exp\left(t_i \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right), \exp\left(t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right)\right]
\end{aligned}$$

und damit

$$P(T_i > t_i, T_j > t_j) = \bar{F}_i(t_i) \bar{F}_j(t_j) \min\left[\exp\left(t_i \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right), \exp\left(t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right)\right].$$

Wir setzen

$$\alpha_i = \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)}{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_i^{(e)}(1)} \quad \text{und} \quad \alpha_j = \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)}{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}(1)}.$$



Dann gilt

$$\exp\left(t_i \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right) = \bar{F}_i(t_i)^{-\alpha_i}, \quad \exp\left(t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{i,j}^{(e)}(1, 1)\right) = \bar{F}_j(t_j)^{-\alpha_j}$$

und

$$P(T_i > t_i, T_j > t_j) = C_{\alpha_i, \alpha_j}(\bar{F}_i(t_i) \bar{F}_j(t_j)),$$

wobei

$$C_{\alpha_i, \alpha_j}(u, v) = \min(u^{1-\alpha_i} v, u v^{1-\alpha_j}) = \begin{cases} u^{1-\alpha_i} v, & u^{\alpha_i} \geq v^{\alpha_j}, \\ u v^{1-\alpha_j}, & u^{\alpha_i} \leq v^{\alpha_j} \end{cases}$$

eine 2-dimensionale Marshall-Olkin Copula ist.



# Kapitel 6

## Modellkalibrierung

In diesem Kapitel wollen wir unser Schock-Modell aus der Sicht eines Anwenders betrachten. Hierfür gehen wir von einer Realisation des Modells aus und wollen anhand dieser die zugehörigen unbekannt Parameter schätzen. Doch zunächst müssen wir uns überlegen, welche Informationen überhaupt beobachtet und erfasst werden können. In der Praxis wird man ausschließlich verlustverursachende Schocks und die zugehörigen Verluste/ Schäden wahrnehmen können. Zusätzlich gehen wir davon aus, dass man in der Lage ist, Schock- und Verlusttypen mitzuerfassen. Dies bedeutet, dass wir die Prozesse

$$\left\{ \tilde{N}(t), \quad t \geq 0 \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \tilde{N}_s(t), \quad t \geq 0 \right\} \quad \text{für } s \in \mathfrak{S}$$

vollständig beobachten können. Der Gesamtschadenshöhenprozess ist gegeben durch

$$\left\{ \tilde{Z}(t) = \sum_{r=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_r, \quad t \geq 0 \right\},$$

wobei  $\{\tilde{X}_r : r \in \mathbb{N}\}$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen und unabhängig von  $\tilde{N}(t)$  sind.

### 6.1 Schadenshäufigkeitsverteilung

Zuerst wollen wir uns den Prozess  $\{\tilde{N}(t), \quad t \geq 0\}$  in einem einfacheren Fall genauer anschauen. Wir nehmen an: Es gebe nur einen Schockprozess  $\{\tilde{N}^{(1)}(t), \quad t \geq 0\}$  und zwei Verlusttypen  $\{1, 2\}$ . Dann gilt

$$\left\{ \tilde{N}(t) = \tilde{N}_1(t) + \tilde{N}_2(t) + \tilde{N}_{12}(t), \quad t \geq 0 \right\}.$$

Anhand dieser Informationen wollen wir den Prozess  $\{\tilde{N}(t), \quad t \geq 0\}$  eindeutig parametrisieren. Da wir den Prozess  $\{\tilde{N}^{(1)}(t), \quad t \geq 0\}$  nicht vollständig beobachten können, sind wir nicht in der Lage, die Intensität  $\lambda^{(1)}$  und die gemeinsame Bernoulliverteilung eindeutig zu schätzen. Damit würde man fälschlicherweise zum Schluss kommen, dass

$\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$  nicht eindeutig parametrisierbar sei. Da wir allerdings die Prozesse  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}$  für  $s \in \mathfrak{S} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  beobachten können, lässt sich dieses vermeintliche Problem leicht umgehen.

Im ersten Schritt wollen wir die Intensität  $\tilde{\lambda}$  schätzen. Wir können

1.  $\tilde{\lambda}$  direkt aus der Realisierung von  $\tilde{N}(t)$  schätzen.
2.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$  separat schätzen und  $\hat{\tilde{\lambda}} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_{12}$  bestimmen.

Da die Zwischenankunftszeiten von  $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\} \text{Exp}(\tilde{\lambda})$  verteilt sind, erhalten wir  $\hat{\tilde{\lambda}}$  mittels Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS)

$$\frac{\hat{1}}{\hat{\tilde{\lambda}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \iff \quad \hat{\tilde{\lambda}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

wobei  $n$  der Stichprobenumfang und  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  die Realisierungen der Zwischenankunftszeiten bezeichnen.

Im zweiten Schritt schätzen wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P_{10|00} := P((I_1, I_2) = (1, 0) | (I_1, I_2) \neq (0, 0))$$

$$P_{11|00} := P((I_1, I_2) = (1, 1) | (I_1, I_2) \neq (0, 0))$$

$$P_{01|00} := P((I_1, I_2) = (0, 1) | (I_1, I_2) \neq (0, 0)).$$

Diese sind gerade die Ausdünnungswahrscheinlichkeiten des Prozesses  $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ , d.h. ein Ereignis von  $\tilde{N}(t)$  gehört mit Wahrscheinlichkeit  $P_{10|00}$  zum Prozess  $\tilde{N}_1(t)$ , mit Wahrscheinlichkeit  $P_{11|00}$  zu  $\tilde{N}_{12}(t)$  und mit Wahrscheinlichkeit  $P_{01|00}$  zu  $\tilde{N}_2(t)$ . Dies wird deutlicher, wenn man sich folgendes überlegt

$$\tilde{\lambda} P_{10|00} = \lambda^{(1)} P((I_1, I_2) = (1, 0)) = \lambda_1$$

$$\tilde{\lambda} P_{11|00} = \lambda^{(1)} P((I_1, I_2) = (1, 1)) = \lambda_{12}$$

$$\tilde{\lambda} P_{01|00} = \lambda^{(1)} P((I_1, I_2) = (0, 1)) = \lambda_2.$$

Die Schätzung der bedingten Wahrscheinlichkeiten erfolgt anhand relativer Häufigkeiten, d.h.

$$\widehat{P}_{10|00} = \frac{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}_1 \text{ in } [0, T]}{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N} \text{ in } [0, T]}$$

$$\widehat{P}_{11|00} = \frac{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}_{12} \text{ in } [0, T]}{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N} \text{ in } [0, T]}$$

$$\widehat{P}_{01|00} = \frac{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}_2 \text{ in } [0, T]}{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N} \text{ in } [0, T]},$$

wobei  $[0, T]$  der Beobachtungszeitraum ist. Das vorgestellte Prozedere wollen wir anhand eines Beispiels verdeutlichen. Doch zunächst stellen wir zwei Algorithmen zur Simulation von Poisson Prozessen vor.

1. (a) Seien  $T \in \mathbb{R}_+$  und  $\lambda > 0$  fest. Erzeuge  $n$   $\text{Exp}(\lambda)$  verteilte Zufallszahlen  $Y_1, \dots, Y_n$
- (b) Berechne  $S_m$ :

$$S_0 = 0, \quad S_m = S_{m-1} + Y_m, \quad m \in \{1, \dots, n\}.$$

$(S_m)_{0 \leq m \leq n}$  sind die Sprungzeiten des Poisson Prozesses.

2. (a) Erzeuge eine  $\text{Poi}(\lambda T)$  verteilte Zufallszahl  $P$ .
- (b) Erzeuge  $P$  gleichverteilte Zufallszahlen  $u_1, \dots, u_P$  auf  $[0, T]$  und sortiere diese. Dann sind  $u_{(1)} < u_{(2)} \dots < u_{(P)}$  die Sprungzeiten des Poisson Prozesses. Für  $t < u_{(1)}$  hat der Poisson Prozess den Wert 0 danach springt er jeweils um 1 nach oben.

### 6.1.1 Beispiel

Hier wollen wir an einem konkreten Beispiel das oben beschriebene Prozedere demonstrieren. Wir gehen von den folgenden Parametern aus:

$$\begin{aligned} P(I_1 = 0, I_2 = 0) &= 0.1, & \lambda^{(1)} &= 0.6, \\ P(I_1 = 1, I_2 = 0) &= 0.3, & T &= 200, \\ P(I_1 = 1, I_2 = 1) &= 0.4, \\ P(I_1 = 0, I_2 = 1) &= 0.2. \end{aligned}$$

Die wahren Werte, die geschätzt werden müssen, sind:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.18, & P\left((I_1, I_2) = (1, 0) \mid (I_1, I_2) \neq (0, 0)\right) &= \frac{1}{3}, \\ \lambda_{12} &= 0.24, & P\left((I_1, I_2) = (1, 1) \mid (I_1, I_2) \neq (0, 0)\right) &= \frac{4}{9}, \\ \lambda_2 &= 0.12, & P\left((I_1, I_2) = (0, 1) \mid (I_1, I_2) \neq (0, 0)\right) &= \frac{2}{9}, \\ \tilde{\lambda} &= 0.54. \end{aligned}$$

Durch die Simulation erzeugte Realisierungen von  $\tilde{N}(t)$ ,  $\tilde{N}_1(t)$ ,  $\tilde{N}_2(t)$  und  $\tilde{N}_{12}(t)$  sind in Abbildung 7.1 zu finden. Aufgrund der simulierten Daten ergeben sich folgende Schätzwerte:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= 0.1850680, & \widehat{P}_{10|00} &= 0.3461538, \\ \hat{\lambda}_{12} &= 0.2451410, & \widehat{P}_{11|00} &= 0.4615385, \\ \hat{\lambda}_2 &= 0.1075253, & \widehat{P}_{01|00} &= 0.1923077, \\ \text{direkte Schätzung : } \hat{\lambda} &= 0.5251929, & \hat{\lambda} &= \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_{12} = 0.5377343. \end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass die Schätzung zu recht guten Ergebnissen führt.

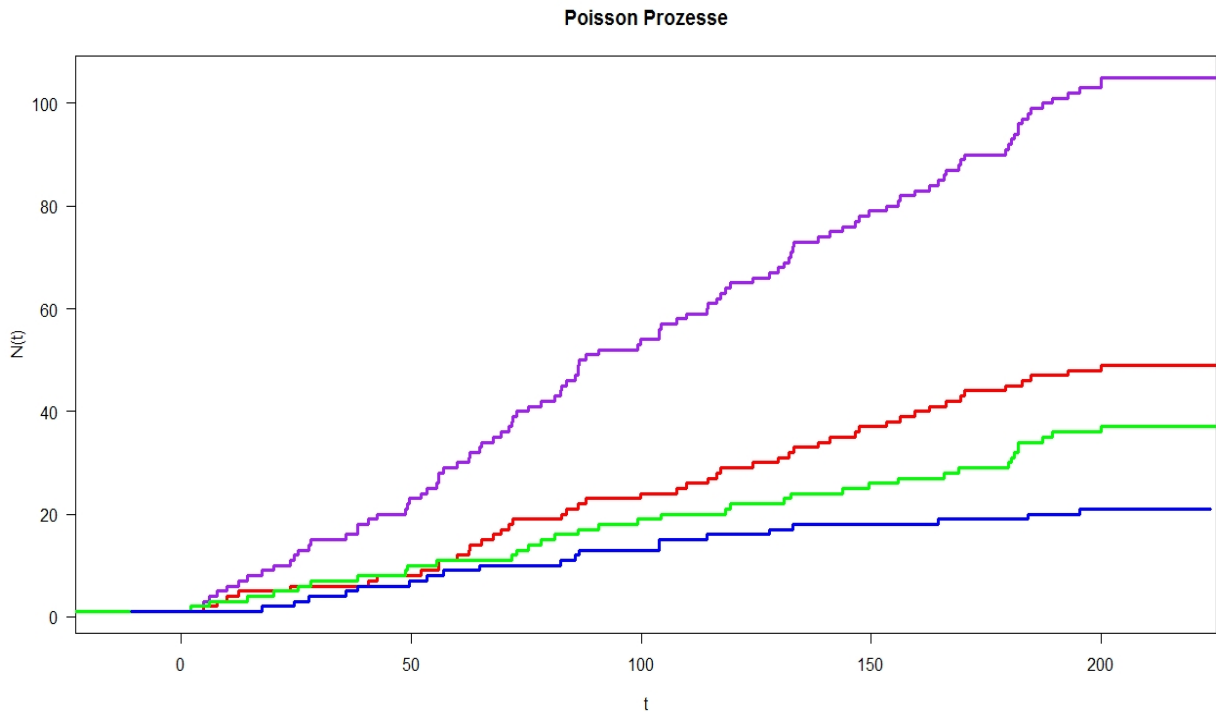


Abbildung 6.1: Poisson Prozesse:  $\tilde{N}(t)$ (violett),  $\tilde{N}_1(t)$ (grün),  $\tilde{N}_2(t)$ (blau) und  $\tilde{N}_{12}(t)$ (rot)

### 6.1.2 Verallgemeinerung der Parameterschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir die Parameterschätzung zuerst auf den Fall zweier Verlusttypen und  $m$  Schockprozesse verallgemeinern. Anschließend betrachten wir die Erweiterung auf den Fall von  $n$  Verlusttypen.

Aufgrund der Unabhängigkeit der Schockprozesse  $\{N^{(e)}(t), t \geq 0\}, e \in \{1, \dots, m\}$  und der Prozesse  $\{\tilde{N}_s(t), t \geq 0\}, s \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  können wir  $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$  umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}(t) &= \sum_{s \in \mathfrak{S}} \tilde{N}_s(t) \\
 &= \sum_{s \in \mathfrak{S}} \sum_{e=1}^m \underbrace{\sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} J_{s,r}^{(e)}}_{=: \tilde{N}_s^{(e)}(t)} \\
 &= \sum_{e=1}^m \sum_{s \in \mathfrak{S}} \tilde{N}_s^{(e)}(t) \\
 &= \underbrace{\sum_{s \in \mathfrak{S}} \tilde{N}_s^{(1)}(t)}_{=: \tilde{N}^{(1)}(t)} + \dots + \underbrace{\sum_{s \in \mathfrak{S}} \tilde{N}_s^{(m)}(t)}_{=: \tilde{N}^{(m)}(t)} \\
 &= \tilde{N}^{(1)}(t) + \dots + \tilde{N}^{(m)}(t),
 \end{aligned}$$

wobei  $\{\tilde{N}^{(j)}(t), t \geq 0\}$  für  $j \in \{1, \dots, m\}$  unabhängige Poisson Prozesse mit Intensitäten  $\tilde{\lambda}^{(j)} = \lambda^{(j)} P\left((I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) \neq (0, 0)\right)$  sind. Andererseits gilt

$$\tilde{\lambda}^{(j)} = \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)} + \lambda_{12}^{(j)},$$

wobei  $\lambda_s^{(j)}$  die Intensität des Prozesses  $\{\tilde{N}_s^{(j)}(t), t \geq 0\}$  für  $s \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  bezeichnet. Somit können wir analog zu dem oberen einfacheren Fall die Intensitäten mittels entsprechender MLS schätzen. Die Ausdünnungswahrscheinlichkeiten des Prozesses  $\{\tilde{N}^{(j)}(t), t \geq 0\}$  ergeben sich folgendermaßen

$$\hat{P}\left((I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) = (1, 0) \mid (I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) \neq (0, 0)\right) = \frac{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}_1^{(j)} \text{ in } [0, T]}{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}^{(j)} \text{ in } [0, T]},$$

$$\hat{P}\left((I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) = (1, 1) \mid (I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) \neq (0, 0)\right) = \frac{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}_{12}^{(j)} \text{ in } [0, T]}{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}^{(j)} \text{ in } [0, T]},$$

$$\hat{P}\left((I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) = (0, 1) \mid (I_1^{(j)}, I_2^{(j)}) \neq (0, 0)\right) = \frac{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}_2^{(j)} \text{ in } [0, T]}{\text{Anzahl der Sprünge von } \tilde{N}^{(j)} \text{ in } [0, T]},$$

wobei  $[0, T]$  der Beobachtungszeitraum und  $j \in \{1, \dots, m\}$  ist.  $\hat{P}(\dots)$  bezeichnet den Schätzwert der entsprechenden Wahrscheinlichkeit.

Eine Erweiterung auf den Fall von  $m$  Schockprozessen und  $n$  Verlusttypen ist nicht wesentlich komplizierter. Dazu muss man lediglich mehr Parameter, im Vergleich zum letzten Fall, schätzen und statt einer 2-dimensionalen eine  $n$ -dimensionale Bernoulliverteilung betrachten. Die Schätzmethoden sind allerdings die gleichen.

## 6.2 Schadenshöhenverteilung

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit der Tailanpassung der Schadenshöhenverteilung dargestellt, die auf der Extremwerttheorie basiert. Hierfür wenden wir die POT-Methode an, die in Kapitel 3 vorgestellt wurde.

Als erstes betrachten wir den Fall zweier Verlusttypen und  $m$  Schockprozesse. Wir setzen

$$\tilde{X}_r = \sum_{e=1}^m \left( X_{1,r}^{(e)} \mathbb{I}_{\{I_{1,r}^{(e)}=1, I_{2,r}^{(e)}=0\}} + X_{2,r}^{(e)} \mathbb{I}_{\{I_{1,r}^{(e)}=0, I_{2,r}^{(e)}=1\}} + (X_{1,r}^{(e)} + X_{2,r}^{(e)}) \mathbb{I}_{\{I_{1,r}^{(e)}=1, I_{2,r}^{(e)}=1\}} \right),$$

wobei  $\tilde{X}_r$  für  $r \in \{1, \dots, \tilde{N}(t)\}$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen und unabhängig von  $\tilde{N}(t)$  sind. Der Gesamtschadenshöhenprozess ist dann gegeben durch

$$\left\{ \tilde{Z}(t) = \sum_{r=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_r, \quad t \geq 0 \right\}.$$

Wir können die Realisierungen der Zufallsvariablen

$$\tilde{X}_r \text{ für } r \in \{1, \dots, \tilde{N}(t)\}$$

beobachten und müssen anhand dieser die Tailanpassung/-schätzung durchführen. Hierzu muss gemäß der POT-Methode als erstes die Wahl einer angemessenen Schwelle  $u$  getroffen werden. Die empirische mittlere Exzessfunktion  $e_n(u)$  kann bei der Suche der Schwelle  $u$  hilfreich sein (siehe Bemerkung 3.4). Nachdem  $u$  gewählt wurde, können wir mittels

$$\widehat{\bar{F}}(u+y) = \frac{N_u}{n} (1 + \widehat{\xi}y/\widehat{\beta})^{-1/\widehat{\xi}}, \quad y > 0$$

die Tailschätzung durchführen. Dabei bezeichnet  $F$  die unbekannte Verteilungsfunktion, die den Zufallsvariablen  $\tilde{X}_r$  für  $r \in \{1, \dots, n\}$  zugrunde liegt, und  $n$  eine Realisierung von  $\tilde{N}(t)$ . Ferner sind  $\widehat{\xi}, \widehat{\beta}$  die Schätzwerte für die Parameter  $\xi, \beta$  der GPD und

$$N_u = |\{r : r = 1, \dots, n, Y_r = \tilde{X}_r - u > 0\}|$$

ist die Anzahl der Überschreitungen der Schwelle  $u$ . Um die Parameter  $\xi, \beta$  zu schätzen, kann beispielsweise die ML-Methode angewendet werden. Die Log-Likelihoodfunktion besitzt folgende Form für  $\xi \neq 0$

$$\ln L(\xi, \beta; Y_1, \dots, Y_{N_u}) = -N_u \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{r=1}^{N_u} \ln \left(1 + \xi \frac{Y_r}{\beta}\right), \text{ falls } (1 + \xi \frac{Y_r}{\beta}) > 0 \quad \forall r$$

und für  $\xi = 0$

$$\ln L(\beta; Y_1, \dots, Y_{N_u}) = -N_u \ln \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{r=1}^{N_u} Y_r.$$

Die Bestimmung der Schätzwerte  $\xi, \beta$  muss allerdings numerisch erfolgen.

Eine Tailanpassung für den Fall von  $m$  Schockprozessen und  $n$  Verlusttypen wird genauso durchgeführt. Die Zufallsvariable  $\tilde{X}_r$  sieht lediglich komplizierter aus.



# Kapitel 7

## Simulation des Modells

In diesem Kapitel wollen wir die Auswirkungen unterschiedlicher Modellannahmen auf einen *Value at Risk* untersuchen. Dazu wird die Abhängigkeitsstruktur sowohl zwischen den Bernoullivariablen als auch zwischen den Schadenshöhenvariablen verändert und die daraus resultierenden Ergebnisse verglichen. Ferner werden die Veränderungen untersucht, die durch Variation von Randverteilungen verursacht werden.

Die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Variablen, die die Schadenshöhen beschreiben, wird durch die Wahl einer Copula festgelegt. Die damit erzielten Ergebnisse wollen wir vergleichen. Hierzu sehen wir zwei Copulas als vergleichbar an, falls deren Kendalls  $\tau$  übereinstimmen.

Durch das Variieren von Annahmen wollen wir ein breites Spektrum der Abhängigkeit, von unabhängig bis komonoton, abdecken.

Im folgenden gehen wir von zwei Verlusttypen und einem Schockprozess  $\{N^{(1)}(t), t \geq 0\}$  mit Intensität  $\lambda^{(1)} = 0.6$  aus. Die Schadenshöhen werden durch Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  beschrieben. Den Zeitraum, in dem der Schockprozess beobachtet wird, setzen auf  $[0, T]$  mit  $T = 200$  (z.B. Tage). Die Wahl der Parameter wurde willkürlich getroffen, da dies unserem hier verfolgten Ziel genügt. Unser Interesse gilt in erster Linie nicht dem tatsächlichen VaR, sondern vielmehr der Veränderung des letzteren, bedingt durch das Variieren der Modellannahmen.

### 7.1 Effekt abhängiger Bernoullivariablen

Als erstes werden die Auswirkungen der Abhängigkeit zwischen den Bernoullivariablen auf einen VaR untersucht. Hierzu werden viele Realisierungen von

$$Z(T) = \sum_{r=1}^{N^{(1)}(T)} (I_{1,r}X_{1,r} + I_{2,r}X_{2,r})$$

erzeugt, um mit deren Hilfe einen VaR zu schätzen. Um einen besseren Eindruck von dem Einfluss der Abhängigkeitsstruktur auf einen VaR gewinnen zu können, betrachten wir 3 Fälle, die in Tabelle 8.1 zu finden sind. Die 3 Varianten erstrecken sich von unabhängigen bis komonotonen Bernoullivariablen, wobei wir  $P(I_1 = 1) = 0.6, P(I_2 = 1) = 0.2$  setzen.

Im ersten Schritt setzen wir voraus, dass  $X_1$  paretoverteilt mit Parametern  $\xi = 0.4, \beta = 1, \nu = 0^1$  und  $X_2$  paretoverteilt mit  $\xi = 0.2, \beta = 1, \nu = 0$  ist. In einem

---

<sup>1</sup>Die Wahl der Parameter ist durch die Arbeit [22] motiviert.

weiteren Schritt wählen wir unterschiedliche Randverteilungen im Bezug auf dessen Tailverhalten aus. Dazu betrachten wir Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda = 5.2$  für  $X_1$  und Paretoverteilung mit Parametern  $\xi = 0.3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\nu = 0$  für  $X_2$ . Für die Abhängigkeitsstruktur der Schadenshöhen verwenden wir dabei die Gumbel-Copula mit  $\theta = 1.96$ . Es werden 100.000 Realisierungen von  $Z(T)$  für jede Variante aus der Tabelle 8.1 erzeugt, um anschließend mit deren Hilfe den  $\text{VaR}_\alpha$  für  $\alpha \in \{0.990, 0.991, \dots, 0.999\}$  zu schätzen. Um die Schwankung der Ergebnisse zu verdeutlichen, wird die Simulation für jede Variante zweimal durchgeführt.

Zur Erzeugung einer Realisierung  $z$  von  $Z(T)$  wird folgendes Simulationsalgorithmus verwendet:

1. Erzeuge eine Zufallszahl  $N$  gemäß  $Poi(\lambda^{(e)}T)$ -Verteilung.
2. Ziehe aus der Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  eine Stichprobe der Länge  $N$  mit Wahrscheinlichkeiten

$$p_0 := P(I_1 = 0, I_2 = 0)$$

$$p_1 := P(I_1 = 1, I_2 = 1)$$

$$p_2 := P(I_1 = 1, I_2 = 0)$$

$$p_3 := P(I_1 = 0, I_2 = 1)$$

Sei  $N = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$ , wobei  $n_i$  für  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  die Anzahl der Elemente  $i$  in der Stichprobe bezeichnet.

3. Erzeuge  $n_1$  Realisierungen  $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}), \dots, (x_{n_1}^{(1)}, x_{n_1}^{(2)})$  über die Schadenshöhen-Copula und die Randverteilungen  $F_{X_1}$  und  $F_{X_2}$ .
4. Erzeuge  $n_2$  Realisierungen  $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$  gemäß  $F_{X_1}$ .
5. Erzeuge  $n_3$  Realisierungen  $z_1, z_2, \dots, z_{n_3}$  gemäß  $F_{X_2}$ .
6.  $z = \sum_{i=1}^{n_1} (x_i^{(1)} + x_i^{(2)}) + \sum_{i=1}^{n_2} y_i + \sum_{i=1}^{n_3} z_i$  ist eine Realisation von  $Z(T)$ .

Variante	Wahrscheinlichkeiten			
	$P(I_1 = 1, I_2 = 1)$	$P(I_1 = 1, I_2 = 0)$	$P(I_1 = 0, I_2 = 1)$	$P(I_1 = 0, I_2 = 0)$
1	0.12	0.48	0.08	0.32
2	0.16	0.44	0.04	0.36
3	0.2	0.4	0	0.4

Tabelle 7.1: *Wahrscheinlichkeiten, die sich vom unabhängigen bis komonotonen Fall der Bernoullivariablen erstrecken.*

**1.Kombination:**  $X_1 \stackrel{d}{\sim} G_{0.4,0,1}$ ,  $X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.2,0,1}$  und Gumbel-Copula  $C_{1.96}^{Gu}$  <sup>2</sup>

Niveau	Variante					
	1		2		3	
0.990	258.47	259.23	262.71	263.77	264.77	265.31
0.991	262.27	263.45	266.02	267.96	267.89	268.72
0.992	265.87	266.16	270.41	271.72	271.81	273.34
0.993	271.45	271.82	275.40	276.67	277.57	278.98
0.994	277.61	278.76	280.42	283.26	283.20	284.63
0.995	284.88	285.19	287.03	290.84	289.12	294.38
0.996	298.36	294.24	297.56	302.30	298.73	303.29
0.997	313.21	308.39	310.99	316.60	314.17	316.69
0.998	333.81	330.04	335.95	340.24	333.71	344.03
0.999	377.62	372.03	378.48	383.04	387.74	388.00

Tabelle 7.2: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für die 1.Kombination*

**2.Kombination:**  $X_1 \stackrel{d}{\sim} G_{0.4,0,1}$ ,  $X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.2,0,1}$  und Gauß-Copula  $C_{0.7}^{Ga}$

Niveau	Variante					
	1		2		3	
0.990	258.46	259.70	260.46	260.36	263.20	262.42
0.991	262.36	263.39	263.68	263.89	266.89	265.41
0.992	266.35	267.06	267.65	268.19	271.19	269.45
0.993	271.84	271.74	273.16	272.63	276.29	274.75
0.994	277.61	278.09	277.79	278.59	281.78	279.63
0.995	285.75	285.87	283.98	283.81	288.35	286.89
0.996	295.40	295.52	294.37	293.57	297.85	296.92
0.997	311.77	309.41	308.54	308.50	312.64	311.58
0.998	335.07	329.67	332.03	330.69	341.31	337.59
0.999	372.45	370.90	375.66	379.39	389.61	382.64

Tabelle 7.3: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für die 2.Kombination*

<sup>2</sup>Erinnerung:  $G_{\xi,\nu,\beta}$  bezeichnet die verallgemeinerte Paretoverteilung

**3.Kombination:**  $X_1 \stackrel{d}{\sim} Exp(5.2)$ ,  $X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.3,0,1}$  und Gumbel-Copula  $C_{1.96}^{Gu}$

Niveau	Variante					
	1		2		3	
0.990	89.30	89.79	89.89	89.70	90.81	90.64
0.991	90.65	90.98	91.02	90.95	92.06	91.69
0.992	91.92	92.39	92.32	92.36	93.70	93.55
0.993	93.12	94.05	94.11	93.75	95.24	94.94
0.994	95.12	95.94	95.68	95.84	96.93	96.26
0.995	97.61	97.00	97.77	97.83	99.07	98.40
0.996	100.15	100.91	101.09	100.17	101.89	101.04
0.997	104.10	104.61	104.84	103.85	106.04	105.45
0.998	110.29	110.83	111.03	108.99	113.40	112.31
0.999	121.56	122.23	120.83	120.20	125.67	128.38

Tabelle 7.4: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für 3.Kombination*

### Ergebnis:

Obwohl der Simulationsumfang von 100.000 Zufallszahlen relativ gering ist, lässt sich trotzdem folgendes erkennen:

1. Die Abhängigkeitsstruktur der Bernoullivariablen besitzt einen nicht zu vernachlässigbaren Einfluss auf den VaR.
2. Der Ausmaß der Auswirkungen fällt, je nach Wahl der Randverteilungen, unterschiedlich aus. Bei der 1.Kombination liegen die Werte von Variante 1 und 3 etwa 1.2 bis 5% auseinander. Bei der 3.Kombination sind es 2.4 bis 4%.
3. Zusätzlich wird der VaR durch die Wahl der Copula beeinflusst. Mit der Gauß-Copula erzielen wir insgesamt kleinere Werte für die Schätzung als mit der Gumbel-Copula, obwohl die Ergebnisse im gewissen Sinne vergleichbar sind (näheres dazu im nächsten Abschnitt). Zu vermuten ist, dass die Wertdifferenz zwischen dem unabhängigen und dem komonotonen Fall der Bernoullivariablen wächst, falls  $\theta$  bzw.  $\rho$  steigt.

## 7.2 Effekt abhängiger Schadenshöhen

In diesem Abschnitt wollen wir die Veränderungen des VaR bedingt durch das Variieren der Randverteilungen und der Copula-Parameter untersuchen. Die Ergebnisse, die mittels unterschiedlicher Copulafamilien erzielt werden, wollen wir untereinander vergleichen. Als Vergleichskriterium wird, wie bereits oben erwähnt, das Kendalls  $\tau$  herangezogen. Somit sehen wir Copulas verschiedener Familien als vergleichbar an, falls diese den gleichen Kendalls  $\tau$  Wert besitzen. Die korrespondierenden Parameter der Gauß und Gumbel-Copula sind in Tabelle 8.4 zu finden.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Die entsprechenden Werte wurden aus [22] übernommen.

Gauß	0.01	0.2	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99
Gumbel	1.01	1.15	1.51	1.96	3.47	4.98	11.15

Tabelle 7.5: Korrespondierende Parameter bezüglich Kendalls  $\tau$ .

Wir betrachten im folgenden drei Kombinationen:

1.  $X_1 \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(5.2), X_2 \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(2)$
2.  $X_1 \stackrel{d}{\sim} G_{0.4,0,1}, X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.2,0,1}$
3.  $X_1 \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(5.2), X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.3,0,1}$

Zur Abbildung der Abhängigkeit zwischen  $X_1$  und  $X_2$  wird sowohl Gauß- als auch Gumbel-Copula verwendet. Die Copula-Parameter entnehmen wir der Tabelle 8.5. Zusätzlich wird der Fall  $\rho = -0.3$  betrachtet. Zu vermuten ist, dass dies zum kleineren VaR als im unabhängigen Fall von  $X_1$  und  $X_2$  führt.

Als Referenzgrößen werden jeweils die VaR-Werte für komonotonen und unabhängigen Fall der Schadenshöhen bestimmt. Darüber hinaus werden die entsprechenden Werte in bi-komonotonen und bi-unabhängigen Fall ermittelt. Dabei bedeutet bi-komonoton, dass zusätzlich zu den komonotonen Schadenshöhen auch die Bernoullivariablen komonoton sind. Analog ist die Bezeichnung bi-unabhängig zu verstehen.

Als erstes werden die jeweiligen Schätzwerte für den VaR zusammengestellt. Anschließend werden die Ergebnisse kommentiert.

**Kombination 1:**  $X_1 \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(5.2), X_2 \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(2)$

Niveau	unabh.		komon.	
0.990	37.50	37.56	38.59	38.63
0.991	37.73	37.75	38.84	38.87
0.992	37.93	38.01	39.16	39.12
0.993	38.21	38.32	39.54	39.50
0.994	38.53	38.66	39.86	39.82
0.995	38.96	39.02	40.30	40.24
0.996	39.38	39.49	40.75	40.75
0.997	39.94	39.98	41.24	41.33
0.998	40.70	40.67	41.95	42.31
0.999	42.21	41.97	43.66	43.74

Tabelle 7.6: Geschätzter  $\text{VaR}_\alpha$  für Kombination 1 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.

Niveau	bi-unabh.		bi-komon.	
	0.990	37.25	37.22	39.12
0.991	37.52	37.50	39.41	39.37
0.992	37.77	37.73	39.65	39.65
0.993	37.99	37.99	39.99	40.05
0.994	38.27	38.28	40.35	40.42
0.995	38.66	38.65	40.75	40.84
0.996	39.04	39.09	41.28	41.37
0.997	39.72	39.70	41.94	42.05
0.998	40.52	40.44	42.81	42.77
0.999	41.84	41.58	44.19	43.95

Tabelle 7.7: Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 1 im bi-unabhängigen und bi-komotonen Fall.

Niveau	Parameter $\theta$ der Gumbel-Copula					
	1.15		1.51		1.96	
0.990	37.98	37.88	38.36	38.17	38.44	38.39
0.991	38.23	38.09	38.61	38.42	38.71	38.59
0.992	38.53	38.33	38.86	38.62	38.98	38.84
0.993	38.80	38.60	39.24	38.90	39.25	39.09
0.994	39.11	38.89	39.61	39.25	39.59	39.45
0.995	39.54	39.26	40.02	39.76	39.93	39.85
0.996	40.04	39.73	40.48	40.24	40.53	40.42
0.997	40.61	40.37	41.07	40.80	41.30	41.07
0.998	41.33	41.13	41.92	41.54	42.12	42.13
0.999	42.67	42.53	43.25	43.00	43.63	43.62

Tabelle 7.8: Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 1 mit der Gumbel-Copula.

Niveau	Parameter $\theta$ der Gumbel-Copula					
	3.47		4.98		11.15	
0.990	38.54	38.68	38.60	38.67	38.75	38.54
0.991	38.78	38.94	38.85	38.95	39.08	38.80
0.992	39.02	39.23	39.10	39.24	39.37	39.07
0.993	39.26	39.54	39.39	39.52	39.69	39.34
0.994	39.58	39.91	39.72	39.83	40.04	39.72
0.995	39.99	40.24	40.13	40.27	40.44	40.09
0.996	40.45	40.88	40.55	40.86	40.92	40.60
0.997	41.19	41.63	41.32	41.40	41.54	41.27
0.998	42.04	42.39	42.10	42.12	42.22	42.25
0.999	43.46	43.68	43.54	43.68	43.73	43.47

Tabelle 7.9: Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 1 mit der Gumbel-Copula.

Niveau	Parameter $\rho$ der Gauß-Copula							
	-0.3		0.01		0.2		0.5	
0.990	37.28	37.21	37.46	37.48	37.59	37.68	38.10	38.03
0.991	37.50	37.43	37.66	37.71	37.77	37.91	38.29	38.26
0.992	37.74	37.70	37.91	37.95	38.05	38.16	38.55	38.53
0.993	38.05	37.96	38.15	38.21	38.39	38.43	38.84	38.78
0.994	38.37	38.22	38.41	38.53	38.69	38.76	39.19	39.11
0.995	38.69	38.57	38.72	38.97	39.15	39.17	39.65	39.43
0.996	39.04	38.96	39.14	39.46	39.61	39.58	40.15	39.93
0.997	39.60	39.41	39.69	40.07	40.16	40.13	40.70	40.61
0.998	40.31	40.18	40.40	40.89	40.88	41.00	41.70	41.46
0.999	41.74	41.38	41.95	42.10	42.14	42.24	43.03	42.67

Tabelle 7.10: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 1 mit der Gauß-Copula.*

Niveau	Parameter $\rho$ der Gauß-Copula							
	0.7		0.9		0.95		0.99	
0.990	38.35	38.14	38.59	38.68	38.60	38.60	38.67	38.70
0.991	38.51	38.42	38.85	38.94	38.82	38.81	38.93	38.93
0.992	38.82	38.66	39.11	39.24	39.09	39.10	39.27	39.23
0.993	39.07	38.93	39.40	39.57	39.42	39.42	39.64	39.54
0.994	39.48	39.28	39.74	39.92	39.82	39.74	40.07	39.91
0.995	39.87	39.72	40.15	40.37	40.26	40.11	40.51	40.29
0.996	40.37	40.25	40.72	40.86	40.81	40.58	41.00	40.73
0.997	41.04	40.92	41.39	41.47	41.51	41.19	41.65	41.38
0.998	41.91	41.50	42.29	42.25	42.34	42.09	42.71	42.27
0.999	43.30	42.99	43.43	43.52	43.79	43.53	44.28	43.74

Tabelle 7.11: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 1 mit der Gauß-Copula.*

### Ergebnisse Kombination 1

- Vergleich der Tabellen 8.6 und 8.7 zeigt erneut, dass die Abhängigkeit der Bernoulli-Variablen einen spürbaren Einfluss auf den VaR ausübt. Die Abweichung der VaR-Werte zwischen unabhängigen und bi-unabhängigen Fall ist unter 1%. Im anderen Extremfall liegt sie bei maximal 2%. Die VaR-Werte im komonotonen Fall liegen 2 bis 4% über denen des unabhängigen Falls.
- Das Ergebnis der Simulation entspricht für  $\rho = 0.01$  bzw.  $\rho = 0.95$  in etwa dem unabhängigen bzw. dem komonotonen Fall der Schadenshöhen.
- Für  $\theta = 4.98$  erreichen wir annähernd den komonotonen Fall. Man entfernt sich für große Werte von  $\rho$  um 3.1 bis 4.7% vom unabhängigen Fall. Im Gumbel-Fall sind es 3.2 bis 3.8%.
- Für  $\rho = -0.3$  liegt der VaR erwartungsgemäß unter dem des unabhängigen Falls.

- Vergleicht man die korrespondierenden VaR-Werte bezüglich Kendalls  $\tau$ , so stellen wir fest:

Die VaR-Werte mit der Gumbel-Copula sind durchgehend größer als die mit der Gauß-Copula und steigen auch schneller an. Den größten Anstieg haben wir zwischen  $\theta = 1.15$  und  $\theta = 1.51$ . Die VaR-Werte mit der Gauß-Copula steigen gleichmäßiger an.

**Kombination 2:**  $X_1 \stackrel{d}{\sim} G_{0.4,0,1}, X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.2,0,1}$

Niveau	unabh.		komon.	
0.990	255.13	254.33	264.20	263.62
0.991	258.72	258.59	267.75	267.82
0.992	263.35	262.61	272.14	272.71
0.993	267.27	268.35	276.77	278.34
0.994	274.44	275.20	281.85	284.08
0.995	281.89	283.71	288.57	293.06
0.996	293.27	294.53	296.55	303.91
0.997	309.75	309.85	309.97	318.34
0.998	333.79	333.86	336.98	341.66
0.999	385.03	382.91	389.66	389.48

Tabelle 7.12: Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 2 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.

Niveau	bi-unabh.		bi-komon.	
0.990	252.89	251.50	266.71	266.90
0.991	256.63	254.47	271.55	271.44
0.992	260.85	258.23	276.48	275.95
0.993	265.30	263.04	281.69	281.26
0.994	270.84	268.73	287.12	286.73
0.995	278.63	275.81	294.24	295.63
0.996	289.51	285.65	306.35	305.20
0.997	302.42	296.54	320.29	318.89
0.998	324.37	317.58	346.17	340.79
0.999	375.35	355.47	404.92	402.02

Tabelle 7.13: Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 2 im bi-unabhängigen und bi-komonotonen Fall.



Niveau	Parameter $\rho$ der Gauß-Copula							
	-0.3		0.01		0.2		0.5	
0.990	254.38	255.18	253.38	253.70	256.06	255.33	251.43	257.65
0.991	257.59	259.40	256.90	257.08	259.67	259.14	261.01	260.96
0.992	261.78	262.33	261.36	260.67	264.02	263.94	264.48	265.02
0.993	266.53	267.21	266.37	265.33	269.37	268.57	270.10	269.92
0.994	271.48	273.96	272.21	270.77	274.73	274.71	275.37	276.90
0.995	280.16	282.74	280.25	278.26	283.47	283.05	281.39	285.23
0.996	290.20	291.09	290.42	288.93	291.05	291.88	290.14	294.67
0.997	305.48	307.52	304.38	304.13	303.76	316.12	303.53	309.87
0.998	328.84	330.35	324.91	327.96	328.46	327.96	324.77	333.88
0.999	379.04	385.63	363.68	377.89	373.98	383.07	366.71	339.98

Tabelle 7.14: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 2 mit der Gauß-Copula.*

Niveau	Parameter $\rho$ der Gauß-Copula							
	0.7		0.9		0.95		0.99	
0.990	258.44	260.23	262.48	261.59	262.50	262.73	261.79	262.96
0.991	261.85	263.57	265.98	265.03	266.28	266.84	265.39	266.92
0.992	266.19	267.46	269.68	268.87	270.98	270.80	269.49	271.08
0.993	270.60	272.58	274.17	273.66	275.67	275.66	274.60	277.33
0.994	276.53	279.32	280.25	279.92	282.34	281.49	281.43	283.82
0.995	284.03	286.36	287.23	288.35	288.20	289.27	289.26	291.10
0.996	294.16	294.87	295.54	298.30	297.00	299.52	297.96	301.71
0.997	308.86	310.81	309.46	313.77	313.16	311.60	310.70	316.71
0.998	332.74	330.27	331.13	340.32	337.22	335.13	327.40	336.75
0.999	388.31	378.43	386.22	401.78	382.35	383.60	383.23	394.53

Tabelle 7.15: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 2 mit der Gauß-Copula.*

Niveau	Parameter $\theta$ der Gumbel-Copula					
	1.15		1.51		1.96	
0.990	257.82	257.55	262.06	260.94	261.11	264.18
0.991	261.23	261.59	266.06	264.51	264.17	267.97
0.992	265.38	265.88	269.65	268.35	268.44	273.38
0.993	269.70	270.55	274.39	273.58	274.72	278.25
0.994	275.44	277.44	279.25	280.93	280.93	283.81
0.995	284.63	284.48	286.85	288.93	289.00	290.27
0.996	295.84	293.99	296.40	300.28	300.31	293.84
0.997	309.27	308.62	310.07	314.81	314.17	317.23
0.998	335.50	333.40	330.29	339.26	340.34	340.15
0.999	383.48	375.29	373.52	386.50	387.62	389.77

Tabelle 7.16: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 2 mit der Gumbel-Copula.*

Niveau	Parameter $\theta$ der Gumbel-Copula					
	3.47		4.98		11.15	
0.990	264.51	263.80	264.94	261.62	264.47	263.83
0.991	267.86	267.60	267.90	265.28	268.51	268.18
0.992	272.13	272.23	272.69	270.00	272.75	272.61
0.993	277.56	276.47	278.11	275.15	278.36	277.21
0.994	284.29	282.96	284.75	280.55	284.69	283.53
0.995	290.88	293.00	293.43	288.04	292.15	292.04
0.996	303.50	304.85	303.23	295.55	304.08	301.53
0.997	320.37	318.15	321.40	311.87	319.50	316.88
0.998	348.44	339.94	347.46	333.64	341.74	339.90
0.999	400.58	385.80	405.29	382.93	392.55	387.15

Tabelle 7.17: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 2 mit der Gumbel-Copula.*

## Ergebnisse Kombination 2

- Die Abweichung der VaR-Werte zwischen unabhängigen und bi-unabhängigen Fall ist maximal 7%. Dies ist viel mehr als bei der Kombination 1. Im anderen Extremfall liegt sie bei maximal 3.8%. Die VaR-Werte des komonotonen Falls übersteigen die des unabhängigen Falls um maximal 4%.
- Für ein  $\rho \in (0.01, 0.2)$  wird der unabhängige Fall erreicht. Der komonotone Fall mit der Gauß-Copula und der unabhängige mit der Gumbel-Copula wird nicht realisiert. Die VaR-Werte für  $\rho = -0.3$  liegen entgegen den Erwartungen über denen zu  $\rho = 0.01$ . Für  $\theta = 3.47$  entspricht das Ergebnis der Simulation in etwa dem komonotonen Fall.
- Die Wirkungsweise der Erhöhung der Copulaparameter fällt in beiden Fällen unterschiedlich aus. Während man sich für große Werte von  $\rho$  um maximal 3.6% vom unabhängigen Fall entfernt, sind es im Gumbel-Fall 3.4 bis 5.5%.
- Vergleich der korrespondierenden VaR bezüglich Kendalls  $\tau$  liefert:  
Ausgenommen den Fall  $\rho = -0.3$  steigen die VaR-Werte zwischen  $\rho = 0.01$  und  $\rho = 0.7$  relativ schnell an. Danach sind nur kleinere Zuwächse zu verzeichnen. Im Gumbel-Fall sieht die Situation ähnlich aus. Zwischen  $\theta = 1.15$  und  $\theta = 3.47$  ist der Anstieg von VaR groß, danach wird dieser kleiner. Insgesamt übersteigen die VaR-Werte mit der Gumbel-Copula die mit der Gauß-Copula.

**Kombination 3:**  $X_1 \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(5.2)$ ,  $X_2 \stackrel{d}{\sim} G_{0.3,0,1}$

Niveau	unabh.		komon.	
0.990	88.65	88.20	90.49	90.49
0.991	89.69	89.36	91.86	91.67
0.992	91.08	90.70	93.13	93.16
0.993	92.51	92.11	94.75	94.73
0.994	94.65	93.68	96.41	96.62
0.995	97.20	96.58	98.54	98.48
0.996	100.16	99.44	101.50	101.72
0.997	103.32	102.89	105.26	105.40
0.998	110.24	108.50	111.17	111.70
0.999	123.96	120.63	123.30	122.82

Tabelle 7.18: Geschätzter  $\text{VaR}_\alpha$  für Kombination 3 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.

Niveau	bi-unabh.		bi-komon.	
0.990	88.98	89.03	90.76	91.22
0.991	90.28	90.16	91.87	92.41
0.992	91.83	91.64	93.07	93.72
0.993	93.44	93.04	94.63	95.09
0.994	94.93	94.81	96.40	96.82
0.995	96.88	96.96	98.73	98.83
0.996	99.76	99.35	100.79	102.06
0.997	103.50	103.91	105.82	106.07
0.998	109.03	109.53	112.60	111.72
0.999	119.56	121.06	122.90	123.35

Tabelle 7.19: Geschätzter  $\text{VaR}_\alpha$  für Kombination 3 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.

Niveau	Parameter $\rho$ der Gauß-Copula							
	-0.3		0.01		0.2		0.5	
0.990	88.29	88.63	88.85	89.08	88.65	88.68	89.63	89.56
0.991	89.33	89.77	89.86	90.43	89.85	89.88	90.77	90.76
0.992	90.51	91.05	91.19	91.67	91.03	91.16	92.25	91.18
0.993	91.99	92.46	92.64	93.06	92.42	92.66	93.78	93.53
0.994	93.83	94.23	94.40	94.74	94.00	94.18	95.58	95.41
0.995	96.07	96.05	96.72	97.16	96.01	96.38	97.55	97.65
0.996	98.59	98.91	99.43	100.08	98.71	98.82	100.13	100.57
0.997	102.59	102.24	104.13	103.56	102.36	102.07	103.66	104.39
0.998	108.27	108.11	110.54	109.13	107.59	107.68	108.71	109.90
0.999	118.32	120.34	120.30	119.92	118.98	117.44	118.72	119.94

Tabelle 7.20: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 3 mit der Gauß-Copula.*

Niveau	Parameter $\rho$ der Gauß-Copula							
	0.7		0.9		0.95		0.99	
0.990	89.47	90.11	90.43	90.08	91.18	90.18	90.14	90.25
0.991	90.58	91.18	91.56	91.14	92.30	91.38	91.33	91.61
0.992	91.86	92.44	92.71	92.76	93.67	92.77	92.48	93.00
0.993	93.34	93.83	94.11	94.09	95.14	94.59	93.98	94.53
0.994	95.19	95.59	96.00	96.18	97.10	96.36	95.80	96.95
0.995	97.02	97.82	98.57	98.38	99.19	98.74	98.29	98.95
0.996	99.43	100.30	100.27	101.33	102.16	101.60	100.88	101.93
0.997	103.44	103.76	104.42	105.17	106.50	105.90	105.08	105.88
0.998	108.35	109.92	109.80	110.07	113.15	113.44	112.06	112.49
0.999	118.72	119.94	118.65	120.31	124.43	125.55	122.97	125.24

Tabelle 7.21: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 3 mit der Gauß-Copula.*

Niveau	Parameter $\theta$ der Gumbel-Copula					
	1.15		1.51		1.96	
0.990	89.33	89.04	89.51	89.49	89.59	90.15
0.991	90.64	90.10	90.71	90.74	90.93	91.24
0.992	91.98	91.28	91.99	92.06	92.11	92.58
0.993	93.53	92.97	93.65	93.36	93.64	94.02
0.994	95.18	94.74	95.78	95.10	95.83	95.85
0.995	97.47	96.72	98.07	97.06	97.99	98.08
0.996	99.99	99.44	100.86	100.03	101.06	101.06
0.997	104.33	103.35	104.73	103.47	104.63	104.61
0.998	109.60	108.51	110.85	109.08	110.26	110.28
0.999	120.47	118.63	121.66	120.06	121.47	120.10

Tabelle 7.22: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 3 mit der Gumbel-Copula.*

Niveau	Parameter $\theta$ der Gumbel-Copula					
	3.47		4.98		11.15	
0.990	90.12	90.51	90.04	89.57	90.69	90.38
0.991	91.19	91.74	91.37	90.82	91.87	91.61
0.992	92.44	92.87	92.90	92.18	93.42	92.93
0.993	94.02	94.55	94.76	93.18	95.09	94.34
0.994	95.77	96.37	96.30	95.31	96.86	96.23
0.995	97.42	99.09	98.85	97.62	98.89	98.22
0.996	100.05	102.67	101	100.88	102.21	100.68
0.997	103.61	106.34	106.21	103.88	106.41	104.53
0.998	108.72	112.91	111.28	109.62	113.42	110.33
0.999	118.37	122.80	121.71	121.81	125.50	122.70

Tabelle 7.23: *Geschätzter  $VaR_\alpha$  für Kombination 3 mit der Gumbel-Copula.*

### Ergebnisse Kombination 3

- Die Abweichung der VaR-Werte zwischen dem unabhängigen und bi-unabhängigem Fall ist wesentlich kleiner als in den ersten beiden Kombinationen. Die Werte des bi-unabhängigen Falls liegen teilweise unter denen des unabhängigen Falls. Ähnlich sieht es auch im anderen Extremfall aus. Die VaR-Werte des komonotonen Falls übersteigen die des unabhängigen um maximal 2.9%.
- Während wir für  $\theta = 11.15$  in etwa den komonotonen Fall erreichen, wird dieser im Gauß-Fall leicht unterschritten. Jedoch wird der unabhängige Fall nur mit der Gauß-Copula für ein  $\rho < 0.01$  realisiert. Erwartungsgemäß liegen die VaR-Werte für  $\rho = -0.3$  unter denen zu  $\rho = 0.01$ .
- Die Wirkungsweise der Erhöhung der Copulaparameter fällt in beiden Fällen unterschiedlich aus. Während man sich für große Werte von  $\rho$  um 1 bis 3.7% vom unabhängigen Fall entfernt, sind es im Gumbel-Fall 1.7 bis 4.3%. Dieser Unterschied ist kleiner als bei der Kombination 2 und ähnelt dem bei der Kombination 1. Für wachsende  $\theta \geq 1.15$  und wachsende  $\rho \geq -0.3$  steigen die VaR-Werte gleichmäßig an. Allerdings ist auch hier der VaR mit der Gumbel-Copula größer als der mit der Gauß-Copula.

### Fazit:

Aufgrund der Ergebnisse aus Abschnitten 8.1 und 8.2 stellen wir fest, dass das vorgestellte Modell die auftretenden Abhängigkeiten angemessen abbildet. Wir haben gesehen, dass der VaR sowohl auf die Veränderung der Abhängigkeit zwischen den Bernoullivariablen als auch zwischen den Schadenshöhenvariablen reagiert. Erwartungsgemäß führt eine Erhöhung der positiven Abhängigkeit der Variablen zur einer Vergrößerung des VaR. Allerdings ist der Ausmaß dieser Veränderung von den gewählten Randverteilungen und der Abhängigkeit der Bernoullivariablen abhängig. Durch den Einsatz von Copulas kann ausreichend große Bandbreite von VaR-Werten erreicht werden. Der komonotone und der unabhängige Fall können annähernd abgebildet werden.



# Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$ .....	Menge der positiven natürlichen Zahlen 1,2,..
$\mathbb{N}_0$ .....	Menge der natürlichen Zahlen 0,1,2,..
$\mathbb{R}$ .....	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{X}$ .....	Zufallsvektor
$\mathbb{E}(X)$ .....	Erwartungswert der Zufallsvariable $X$
$\mathbb{V}(X)$ .....	Varianz der Zufallsvariable $X$
$C$ .....	Copula
$F^{\leftarrow}$ .....	Pseudo-Inverse einer Verteilungsfunktion $F$
$X \stackrel{d}{=} Y$ .....	$X$ und $Y$ besitzen die gleiche Verteilung
$X \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ .....	Zufallsvariable $X$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda$
$\Lambda$ .....	Gumbelverteilung
$\Phi_\alpha$ .....	Fréchetverteilung mit Parameter $\alpha$
$\Psi_\alpha$ .....	Weibullverteilung mit Parameter $\alpha$
$\bar{C}$ .....	Überlebenscopula
$\bar{F}$ .....	Tail- oder Überlebensfunktion von $F$
$\lambda_o$ .....	Oberer Randabhängigkeitskoeffizient
$\lambda_u$ .....	Unterer Randabhängigkeitskoeffizient
$\xrightarrow{P}$ .....	konvergent in Wahrscheinlichkeit
$\xrightarrow{d}$ .....	verteilungskonvergent
$\xrightarrow{f.s.}$ .....	fast sicher konvergent
$\rho$ .....	Linearer Korrelationskoeffizient
$\rho_s$ .....	Spearman's Rangkorrelationskoeffizient
$\sim$ .....	verhält sich wie
$\tau$ .....	Kendalls Rangkorrelationskoeffizient
$\mathfrak{L}$ .....	Langsam variierende Funktion bei $\infty$
$\mathfrak{P}(\Omega)$ .....	Potenzmenge von $\Omega$
$\mathfrak{X}_0$ .....	Menge der langsam variierender Funktion bei $\infty$
$\mathfrak{X}_{-\infty}$ .....	Menge der rapide variierender Funktion bei $\infty$ mit Index $-\infty$
$\mathfrak{X}_\rho$ .....	Menge der regulär variierender Funktion bei $\infty$ mit Index $\rho$
$x_F$ .....	rechter Endpunkt der Verteilungsfunktion $F$
$\text{cov}(X, Y)$ .....	Kovarianz der Zufallsvariablen $X$ und $Y$
$\text{Exp}(\lambda)$ .....	Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda \in (0, \infty)$
$\text{MDA}(H)$ .....	Maximale Anziehungsbereich der Verteilung
$\text{Poi}(\lambda)$ .....	Poissonverteilung mit Parameter $\lambda \in [0, \infty)$
$\text{VaR}_\alpha$ .....	Risikomaß 'Value at Risk' zum Niveau $(1 - \alpha)$





# Tabellenverzeichnis

1.1	<i>Aufteilung nach Geschäftsfeldern gemäß Basel II</i>	7
1.2	<i>Ereigniskategorien gemäß Basel II</i>	7
7.1	<i>Wahrscheinlichkeiten, die sich vom unabhängigen bis komonotonen Fall der Bernoullivariablen erstrecken.</i>	66
7.2	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für die 1.Kombination</i>	67
7.3	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für die 2.Kombination</i>	67
7.4	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für 3.Kombination</i>	68
7.5	<i>Korrespondierende Parameter bezüglich Kendalls <math>\tau</math>.</i>	69
7.6	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 1 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.</i>	69
7.7	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 1 im bi-unabhängigen und bi-komonotonen Fall.</i>	70
7.8	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 1 mit der Gumbel-Copula.</i>	70
7.9	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 1 mit der Gumbel-Copula.</i>	70
7.10	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 1 mit der Gauß-Copula.</i>	71
7.11	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 1 mit der Gauß-Copula.</i>	71
7.12	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 2 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.</i>	72
7.13	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 2 im bi-unabhängigen und bi-komonotonen Fall.</i>	72
7.14	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 2 mit der Gauß-Copula.</i>	73
7.15	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 2 mit der Gauß-Copula.</i>	73
7.16	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 2 mit der Gumbel-Copula.</i>	73
7.17	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 2 mit der Gumbel-Copula.</i>	74
7.18	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 3 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.</i>	75
7.19	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 3 im unabhängigen und komonotonen Fall der Schadenshöhen.</i>	75
7.20	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 3 mit der Gauß-Copula.</i>	76
7.21	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 3 mit der Gauß-Copula.</i>	76
7.22	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 3 mit der Gumbel-Copula.</i>	76
7.23	<i>Geschätzter <math>VaR_\alpha</math> für Kombination 3 mit der Gumbel-Copula.</i>	77



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Dichten der Standard-Extremwertverteilungen. . . . .	13
3.1	Daten $X_1, \dots, X_{13}$ mit zugehörigen Überschreitungen $Y_1, \dots, Y_{N_u}$ von $u$ . . . .	20
6.1	Poisson Prozesse: $\tilde{N}(t)$ (violett), $\tilde{N}_1(t)$ (grün), $\tilde{N}_2(t)$ (blau) und $\tilde{N}_{12}(t)$ (rot) .	62



# Literaturverzeichnis

- [1] ALSMEYER, G. (2005) *Wahrscheinlichkeitstheorie (4. Auflage)*. Skripten zur mathematischen Statistik Nr. 30.
- [2] BARLOW, R., PROSCHAN, F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart & Winston, New York.
- [3] BASEL II (2004a) *Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen*.
- [4] BROMMUNDT, B. (2003) *Value at Risk Schätzung mit Hilfe elliptischer Copulae*. Diplomarbeit am Zentrum Mathematik der TU München.
- [5] CHAPELLE, A., CRAMA, Y., HUBNER, G., PEETERS, J-P. (2004) *Basel II and Operational Risk: Implications for risk measurement and management in the financial sector*.
- [6] CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P., NESLEHOVA, J. (2005) *Quantitative models for operational risk: Extremes, dependence and aggregation*.
- [7] EMBRECHTS, P. (2008) *Copulas: A personal view*. Journal of Risk and Insurance.
- [8] EMBRECHTS, P., FURRER, H., KAUFMANN, R. (2003) *Quantifying regulatory capital for operational risk*. Derivatives Use, Trading and Regulation 9(3), 217-233.
- [9] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, New York.
- [10] EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., McNEIL, A. (2001) *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*.
- [11] EMBRECHTS, P., PUC CETTI, G. (2007) *Aggregating risk across matrix structured loss data: the case of operational risk*. Journal of Operational Risk 3 (2).
- [12] JOE, H. (1997) *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.
- [13] GLAUSER, M. (2003) *Messung von Marktrisiken unter Verwendung von Copulafunktionen. Eine empirische Studie für den Schweizer Aktienmarkt*. <http://ethesis.unifr.ch/theses/downloads.php?file=GlauserM.pdf>
- [14] HECHENBLAIKNER, A. (2006) *Operational Risk in Banken*. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.

- [15] KAISER, T., KÖHNE, F. (2007) *Operationelle Risiken in Finanzinstituten*. Gabler Verlag, Wiesbaden.
- [16] LINDSKOG, F., McNEIL, A. (2001) *Common Poisson Shock Models: Applications to Insurance and Credit Risk Modelling*. <http://www.ma.hw.ac.uk/mcneil/ftp/CommonPoissonShockModels.pdf>
- [17] MEINTRUP, D., SCHÄFFLER, S. (2005) *Stochastik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [18] MARSHALL, A. W., I. OLKIN (1967) *A multivariate exponential distribution*. Journal of the American Statistical Association.
- [19] McNEIL, A., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005) *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton University Press.
- [20] NELSEN, R.B. (2006) *An introduction to copulas*. Springer, New York.
- [21] NESLEHOVA, J. (2006) *Eine Einführung in Copulas*.
- [22] PAULSEN, V., STRUNK, C. (2006) *Ein homogenes Gesamtbankmodell zur Bewertung operationeller Risiken für die HSH Nordbank*.
- [23] SCHWARZ, C. (2005) *Eine gruppierte elliptische Copula und ihre Anwendung im Kreditrisikomanagement*. Diplomarbeit am Zentrum Mathematik der TU München.