Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik/Informatik
Bachelorarbeit Finanzmathematik
Sommersemester 2012
Betreuer: PD Dr. Volkert Paulsen

Darstellungen von konvexen Risikomaßen auf L^p-Räumen

Benjamin Welzel
An der Leuchtenburg 4
49152 Bad Essen
Matrikelnummer: 379488
Datum: 11.07.2012

Inhaltsverzeichnis

0.1 Einleitung

Ich verbinde mit dieser Arbeit drei Ziele. Das erste Ziel dreht sich um die Theorie der Risikomaße. Genauer gesagt, um konvexe Risikomaße auf L^p-Räumen. Dabei ist $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der Raum aller p-fach integrierbaren Funktionen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Rein mathematisch betrachtet sind konvexe Risikomaße, definiert auf L^p, nichts anderes als konvexe Funktionen

$$\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty],$$

mit den zusätzlichen Eigenschaften der monotonie und Cash-Invarianz.
Ein Element in $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wird interpretiert als eine, mit Risiko verbundene, monetäre Positionen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Das heißt der letztendliche Wert von X ist unbestimmt und der Wert $\rho(X)$ wird als das Risiko von X interpretiert; z.B. die Höhe des Verlustes von X, bei Eintritt eines Ereignisses mit "geringer" Wahrscheinlichkeit.
Der Zweck von Risikomaßen besteht wohl darin, seltenen Ereignissen, dass heißt Ereignissen die durch ihr geringes Auftreten schwer zu Bewerten sind, einen monetären Wert (Verlust) zuzuorden.
Ich bin in dieser Arbeit weniger daran interessiert konkrete Risikomaße auf ihre Anwendbarkeit zu besprechen, als für bestimmte Klassen von Risikomaße eine spezielle Form der Darstellung zu beweisen. Konvexe-, kohärente-, bzw. verteilungs-invariante Risikomaße sind Beispiele für solche Klassen von Risikomaßen, die ihre jeweils eigene Form der Darstellung haben. Um das zu erreichen, ist ein hohes Maß an Theorie erforderlich, sowohl aus der Funktionalanalysis als auch der konvexen-Analysis.
Das führt mich zu meinem zweiten Ziel, nämlich die oben erwähnte Theorie detailiert zu erläutern. Zwei Theoreme stehen dabei besonders im Fordergrund. Zum einen der Bipolarensatz, der es ermöglicht kohärente Risikomaße (positiv homogen und subadditiv) in der dualen Form,

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X]$$

darzustellen. Zum anderen das Fenchel-Moreau-Theroem, welches eine verallgemeinerung des Bipolarensatzes ist und es ermöglicht konvexe Risikomaße in der dualen Form,

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} (E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}))$$

darzustellen, wobei sich Dualität durch die konjugierte Funktion ρ^* ausdrückt.
Das dritte Ziel dieser Arbeit ist das Beschreiben von stetigkeits-Eigenschaften von konvexen Risikomaßen, im Zusammenhang mit den unterschiedlichen L^p-Räumen und L^p-Topologien (norm, schwach, schwach-*). Es wird sich zeigen, dass dabei der Raum L^∞ gesondert behandelt werden muss.
Mein Vorgehen wird sich dabei in der folgenden Weise gliedern:
In Kapitel 1 werden grundlegende, allgemeingültige Eigenschaften von Risikomaßen erläutert. In Kapitel 2 wird die, für das weitere Vorgehen, benötigte Theorie aus der Funktionalanalysis bereitgestellt und angewendet auf einen bekannten Darstellungssatz für kohärente Risikomaße [2]. Kapitel 3 befasst sich mit elementaren und fundamentalen Mitteln der konvexen-Analysis. In Kapitel 4 wird die vorab behandelte Theorie, zur Darstellung von verschiedenen Klassen von konvexen Risikomaßen werwendet. Außerdem werden stetigkeits-Eigenschaften von Risikomaßen, im Zumamenhang mit den schwachen- bzw. schwach-*-Topologien, auf den unterschiedlichen L^p-Räumen besprochen. Kapitel 5 dient wiederum als Vorbereitung auf das darauffolgende Kapitel 6, welches vereilungs-invariante, konvexe Risikomaße behandelt. Kapitel 7. bietet zwei interassante und wichtige Beipiele für Risikomaße.

0.2 Präliminarien

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein atomloser Wahrscheinlichkeitsraum (siehe Kapitel 5.). $\mathcal{F}$ sei endlich erzeugt, das heißt $\mathcal{F} := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, wobei $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, ...A_n)$, für Partitionen $(A_k^{(n)})_{k\in\{1,...,n\}}$ von Ω.
$L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der normierte Vektorraum aller bzgl. P, p-fach integrierbaren Funktionen.
Für ein $p \in [1, \infty]$ bezeichne ich mit $q \in [1, \infty]$, den zu p dualen Integer, dass heißt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\forall p \in (1, \infty)$, für $p = 1$ sei $q = \infty$ und umgekehrt für $p = \infty$ sei $q = 1$.
$\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ bezeichnet den Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße über $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_1(P) := \{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \mid Q \ll P\}$, der Raum aller bzgl. P, absolut-stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße.
$\mathcal{M}_1^q(P) := \{Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid \frac{dQ}{dP} \in L^q\}$, der Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße, deren Radon-Nykodym-Ableitungen bzgl. P, q-fach Integrierbar sind.
$L_+^1 := \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid X \geq 0$ P-f.s.$\}$.
$L_{+,1}^1 := \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid X \geq 0$ P-f.s. , $\int XdP = 1\}$.
$ca(\Omega, \mathcal{F})$, der Raum aller beschränkten, signierten Maße.
$ca(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{\nu \in ca(\Omega, \mathcal{F}) \mid \nu \ll P\}$, der Raum aller beschränkten signierten Maße, die absolut-stetig bzgl. P sind.
$ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{\nu \in ca(\Omega, \mathcal{F}) \mid \nu \ll P, \frac{d\nu}{dP} \in L^q\}$, der Raum aller beschränkten signierten Maße, die absolut-stetig bzgl. P sind und deren Radon-Nykodym-Ableitung q-fach integrierbar sind.
$ba(\Omega, \mathcal{F})$, der Raum aller beschränkten Ladungen.

1 Eigenschaften und Charakterisierung von Risikomaßen auf L^p-Räumen

Dieses Kapitel dient zur Einführung von Risikomaßen. Einige Eigenschaften und Beispiele werden vorgestellt, wodurch ziemlich schnell klar wird, dass Risikomaße auf unterschiedliche L^p-Räumen, auch unterschiedliche Eigenschaften mitbringen. Der Raum L^∞ ist dabei eine Besonderheit, weil Risikomaße auf L^∞ immer stetig sind. Allerdings werden wir in Kapitel 4 sehen, dass der Raum L^∞ nicht nur positive Eigenschaften hat.
Im Folgenden sei $L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, für einen atomlosen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei ich Voraussetze, dass $\mathcal{F}$ endlich erzeugt ist.

Definition 1.1.1 (Risikomaß) Eine Funktion $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ heißt Risikomaß, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Cash-Invarianz*: $\rho(X + m) = \rho(X) - m \ \forall m \in \mathbb{R}$

(ii) *Monotonie*: $X \leq Y$ P-f.s. $\Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$

(iii) *Null-Absorbierend*: $\rho(0) \in \mathbb{R}$.

Erfüllt ρ außerdem die Bedingung der

(iv) *Konvexität*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)Y \ \forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall X, Y \in L^p$, so nennt man ρ ein konvexes Risikokomaß.

Gilt für ein konvexes Risikomaß ρ außerdem

(v) *Positive Homogenität*: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, so nennt man ρ ein kohärentes Risikomaß.

Interpretation:
Cash-Invarianz: Durch addieren/subtrahieren eines konstaten Betrags m zur Position X, veringert/erhöht sich das Risiko um eben diesen Betrag.
Monotonie: Ist der Wert einer Position X, mit Warscheinlichkeit 1, größer als der Wert einer Position Y, so ist das Risiko von X kleiner als das von Y.
Konvexität: Dass Risiko einer Allokation von zwei Positionen ist höchstens so groß wie die Summe der einzelnen Risiken, bewertet mit den jeweiligen Anteilen dieser Allocation. Grob gesagt, impliziert Diversifikation eine Verringerung des Risikos.

Null-Absorbierend: Ist ein technisches Kriterium, welches garantiert, dass das Risikomaß, betrachtet als Funktion, *eigentlich* (siehe 3.1.1) ist.

Corollar 1.1.2 Ist $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ ein positiv homogenes Risikomaß, so ist ρ konvex genau dann, wenn es sublinear ist.

Beweis. Sei ρ konvex, und $\lambda \in [0,1]$, so gilt
$\rho(X+Y) = \rho(\frac{\lambda}{\lambda}X + \frac{(1-\lambda)Y}{(1-\lambda)}) \leq \lambda\rho(\frac{X}{\lambda}) + (1-\lambda)\rho(\frac{Y}{(1-\lambda)}) = \rho(X) + \rho(Y)$.
Sei umgekehrt ρ sublinear so folgt,
$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) = \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$ □

Der folgende Satz zeigt zwei Vorzüge von Risikomaßen auf L^∞, die für Risikomaße auf alle anderen L^p-Räumen im allgemeinen nicht gelten.

Satz 1.1.3 (Steitigkeit von Risikomaßen auf L^∞ [3]) Für jedes Risikomaß $\rho : L^\infty \longrightarrow]-\infty, \infty]$ gilt:

(i) ρ ist reellwertig: $\rho(X) < \infty \ \forall X \in L^\infty$

(ii) ρ ist Lipschitzstetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. D.h.

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty \ \forall X, Y \in L^\infty.$$

Beweis. (i) Sei $X \in L^\infty$, dann existiert $n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $X^- \leq n$ f.s. $\Rightarrow \rho(X) \leq \rho(-n) = \rho(0) + n < \infty$
(ii) Für $X, Y \in L^\infty$ gilt sowohl $X \leq Y + \|X - Y\|_\infty$ f.s. , als auch $Y \leq X + \|X - Y\|_\infty$ f.s.. Daraus folgt, unter Zuhilfenahme von Cash-invarianz und monotonie, sowohl: $\rho(Y) - \|X - Y\|_\infty \leq \rho(X)$ als auch $\rho(X) - \|X - Y\|_\infty \leq \rho(Y)$. D.h. aber $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$ □

Beispiel 1.1.4 $\rho : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longmapsto E_Q[-X]$; $Q \in \mathcal{M}_1^q(P)$ definiert ein kohärentes Risikomaß.

Beispiel 1.1.5 (Value at Risk ($V@R$)) Sei $\lambda \in (0,1)$, dann wird durch

$$\rho_\lambda : L^p \to \mathbb{R},\ \rho_\lambda(X) := -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid P[X \leq x] > \lambda\},$$

ein positiv homogenes Risikomaß definiert.

Beweis. Cash-invarianz: $\rho_\lambda(X+m) = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid P[X \leq x - m] > \lambda\}$
$= -\inf\{x + m \in \mathbb{R} \mid P[X \leq x] > \lambda\} = \rho_\lambda(X) - m \ \forall X \in L^p, \ \forall m \in \mathbb{R}$.
positive homogenität: $\rho(\alpha X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid P[X \leq \frac{x}{\alpha}] > \lambda\}$
$= -\inf\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid P[X \leq x] > \lambda\} = \alpha \rho_\lambda(X) \ \forall X \in L^p, \ \forall \alpha \geq 0$.
monotonie: Sei $X \leq Y$ P-f.s. , dann gilt: $P[X \leq x] \geq P[Y \leq x] \ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P[X \leq x] > \lambda\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P[Y \leq x] > \lambda\}$
$\Rightarrow \rho_\lambda(X) \geq \rho_\lambda(Y) \ \forall X, Y \in L^p$. □

Value at Risk ist wohl das populärste und am meisten verwendete Risikomaß. Allerdings verbirgt es auch zwei Probleme. Zum einen ist es im allgemeinen nicht konvex (siehe [3] 4.4.1), zum anderen gibt es zwar den Verlust an, der mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $\lambda \in (0,1)$ nicht überschritten wird, jedoch unterschätzt es die Höhe des Verlustes bei Eintritt eines Ereignisses mit Wahrscheinlichkeit $\lambda' \in (0, \lambda)$. In Kapitel 7.1.1 wird das sogenannte Average-Value-at-Risk ($AV@R$) Risikomaß eingefürt, dass diese Probleme nicht besitzt.

Das Risikomaße im allgemeinen nicht stetig und auch nicht endlich sein müssen, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 1.1.6 Sei $\delta : L^p \to]-\infty, \infty]$, definiert durch

$$\delta(X) := \begin{cases} E[-X], & X \in L^\infty \\ \infty, & X \in L^p \setminus L^\infty \end{cases}.$$

Dann ist δ ein kohärentes Risikomaß. δ ist aber nicht endlich und auch nicht stetig, denn:
Sei $X \in L^p \setminus L^\infty$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, ..., A_n)$, für eine Partition $(A_k)_{k \in \{1,...,n\}}$ von Ω. Dann ist $(E[X \mid \mathcal{F}_n])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^\infty$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, dass fast sicher und in L^p gegen X konvergiert.
$\Rightarrow E[-X] = \lim\limits_{n\to\infty} E[-E[X \mid \mathcal{F}_n]] = \lim\limits_{n\to\infty} \delta(E[X \mid \mathcal{F}_n])$
$< \delta(\lim\limits_{n\to\infty} E[X \mid \mathcal{F}_n]) = \delta(X) = \infty$

Definition 1.1.7 (Akzeptanzmenge) Sei $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ ein Risikomaß, dann wird folgende Menge:

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in L^p \mid \rho(X) \leq 0\}$$

als Akzeptanzmenge bezeichnet.

Eine, mit Risiko verbundene, monetäre Position $X \in L^p$ wird nur dann akzeptiert, wenn ihr Risiko kleiner oder gleich null ist. In Beispiel 1.1.4 heißt das, dass nur Positionen $X \in L^p$ akzeptiert werden, deren Erwartungswert bzgl. Q größer oder gleich null ist.

Der Folgende Satz zeigt, dass ein Risikomaß ρ, alternativ auch über die Akzeptanzmenge definiert werden kann.

Satz 1.1.8 (Charakterisierung von $\mathcal{A}_\rho$ [3])
Angenommen $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ ist ein Risikomaß. Dann erfüllt $\mathcal{A}_\rho$ folgende Bedingungen:

(i) $\mathcal{A}_\rho$ bestimmt ρ, d.h. $\rho(X) = \inf\{m \in]-\infty, \infty] \mid m + X \in \mathcal{A}_\rho\}$.

(ii) $\mathcal{A}_\rho$ ist monoton, d.h. $X \in \mathcal{A}_\rho$, $Y \in L^p$ und $X \leq Y$ P-f.s. $\Rightarrow Y \in \mathcal{A}_\rho$. Außerdem gilt: $-\infty < \inf\{m \in]-\infty, \infty] \mid m \in \mathcal{A}_\rho\} < \infty$

(iii) Ist $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ ein konvexes Risikomaß, so ist auch $\mathcal{A}_\rho$ konvex.

(iv) Ist $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ ein kohärentes Risikomaß, so ist $\mathcal{A}_\rho$ ein konvexer Kegel.

Beweis. (i)

$$\begin{aligned} &\inf\{m \in]-\infty, \infty] \mid m + X \in \mathcal{A}_\rho\} \\ &= \inf\{m \in]-\infty, \infty] \mid \rho(X + m) \leq 0\} \\ &= \inf\{m \in]-\infty, \infty] \mid \rho(X) \leq m\} = \rho(X) \end{aligned}$$

(ii) Es sei $X \in \mathcal{A}_\rho$, $Y \in L^p$ und $X \leq Y$ f.s., dann folgt aus der monotonie von ρ: $\rho(Y) \leq \rho(X) \leq 0$, also $Y \in \mathcal{A}_\rho$. Außerdem folgt nach Definition von ρ:
$-\infty < \rho(0) < \infty$, wegen (i) gilt aber $\rho(0) = \inf\{m \in]-\infty, \infty] \mid m \in \mathcal{A}_\rho\}$.

(iii) Seien $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$; $\lambda \in [0, 1]$ dann gilt:
$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \leq 0 \Rightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho$
(iv) Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und $X \in \mathcal{A}_\rho$, dann folgt $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \leq 0$. D.h. $\lambda X \in \mathcal{A}_\rho$. $\square$

2 Duale Paare, Polare und der Bipolarensatz

In diesem Kapitel werden einige fundamentale, für mein weiteres Vorgehen, entscheidene Sätze der Funktionalanalysis wiederholt. In Abschnitt 1 werden duale Paare eingeführt und stetigkeits-Eigenschaften der, durch ein duales Paar induzierten Linearformen besprochen. In Teil 2 werden Polare definiert und der Bipolarensatz bewiesen. Wie sich noch herausstellen wird, sind der Bipolarensatz und besonders das Fenchel-Moreau-Theorem die zentralen Sätze, um konkrete Darstellungen für bestimmte Klassen von Risikomaßen zu ermöglichen. Beide Sätze beruhen, ganz entscheidend, auf einer Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach.
Abschließend wird in Teil 3, als Anwendung des Bipolarensatzes, ein Darstellungssatz für kohärente Risikomaße bewiesen.
Als Referenz für dieses Kapitel verweise ich auf [15].

2.1 Duale Paare, stetige Linearformen und der Trennungssatz

Definition 2.1.1 (Duales Paar) Man bezeichnet mit $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein duales Paar (kurz (X, Y)), falls folgendes gilt:
X und Y sind Vektorräume. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ ist bilinear und punktetrennend bzgl. X und Y, d.h:

$$\forall x \in X \backslash \{0\} \exists y \in Y \langle x, y \rangle \neq 0$$

$$\forall y \in Y \backslash \{0\} \exists x \in X \langle x, y \rangle \neq 0$$

Sei $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein duales Paar, dann definiert $\mathcal{P} := \{p_y \mid y \in Y\}$, mit $p_y(x) = |\langle x, y \rangle|$ ein System von Halbnormen auf X. Und $\mathcal{P}' := \{p'_x \mid x \in X\}$, mit $p'_x(y) := |\langle x, y \rangle|$, definiert ein System von Halbnormen auf Y.

Bemerkung: Die von $\mathcal{P}$ auf X erzeugte Topologie heißt $\sigma(X, Y)$-Topologie. Analog wird die $\sigma(Y, X)$-Topologie erklärt. Beide Topologien sind lokal-konvex, das bedeuted

$$U_{y_1,...,y_n,\epsilon}(0) := \{x \in X \mid |\langle x, y_i \rangle| \leq \epsilon,\ i \in \{1, ..., n\}\};\ n \in \mathbb{N},\ y_i \in Y,\ \epsilon > 0,$$

$$U'_{x_1,...,x_n,\epsilon}(0) := \{y \in Y \mid |\langle x_i, y \rangle| \leq \epsilon,\ i \in \{1, ..., n\}\};\ n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ \epsilon > 0,$$

bilden ein, die Topologie definierendes, System von Nullumgebungen aus absolutkonvexen, absorbierenden Mengen auf X bzw. Y.
Dabei wird absorbieren, durch das Minkowski Funktional charakterisiert. $U \subseteq X$ ist *absorbierend*, falls $p_U(x) < \infty \; \forall x \in U$.

Definition 2.1.2 (Minkowski-Funktional) Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist das Minkowski-Funktional definiert durch:

$$p_A : X \to [0, \infty], \; p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid \tfrac{x}{\lambda} \in A\}.$$

Beispiele: (i) $(L^p, L^q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $p \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, zusmamen mit $\langle X, Y \rangle := \int XY dP \; \forall X \in L^p, \; Y \in L^q$ ist ein Duales Paar. Denn nach der Hölder-Ungleichung gilt, $\langle X, Y \rangle \leq \int |XY| dP \leq \|X\|_p \|Y\|_q$.
(ii) $(L^p, ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein duales Paar, mit $\langle X, \nu \rangle := \int X d\nu$ $\forall X \in L^p, \; \forall \nu \in ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Denn mit der Hölder-Ungleichung folgt wiederum, $\langle X, \nu \rangle \leq \|X\|_p \|\frac{d\nu}{dP}\|_q$.
(iii) Sei X ein Vektorraum und X^* sein Dualraum dann definiert $(X, X^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle x, x' \rangle := x'(x); \; x \in X, \; x' \in X^*$ ein Duales Paar ($|x'(x)| \leq \|x'\| \|x\|$). Die $\sigma(X, X^*)$-Topologie wird als schwache-Topologie bezeichnet.
(iv) Sei X ein Vektorraum und X^* sein Dualraum dann definiert $(X^*, X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle x', x \rangle := x'(x); \; x \in X, \; x' \in X^*$ ein Duales Paar. Die $\sigma(X^*, X)$-Topologie wird als schwach-*-Topologie bezeichnet.

Der folgende Satz charakterisiert, bei gegebenen Dualem Paar $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, alle bzgl. $\sigma(X, Y)$ stetigen Funktionale auf X. Er kann als Verallgemeinerung des Rieszschen-Darstellungssatz (für Hilberträume) angesehen werden.

Satz 2.1.3 (Darstellungssatz) Sei $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein duales Paar. Ein Funktional $x' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig bzgl. $\sigma(X, Y)$ genau dann, wenn $\exists y \in Y : x'(x) = \langle x, y \rangle \; \forall x \in X$. D.h. $(X, \sigma(X, Y))^* \cong Y$.

Bemerkung: Bekanntermaßen stimmen auf metrisierbaren Räumen, Folgenabgeschlosenheit und Abgeschlossenheit überein. Die L^p-Räume, $p \in [1, \infty]$, sind normierte Räume, also insbesondere metrische Räume. Allerdings werden uns in den nächsten Kapitel überwiegend Räume derart: $(L^p, \sigma(L^p, L^q))$ interessieren. Für $p \in [1, \infty]$, sind solche Räume immer lokal-konvex, was im allgemeinen allerdings nicht bedeuted, dass sie auch metrisierbar sind. Um abgeschlossenheit zu charakterisieren, werden wir also Netze verwenden. Für die $\sigma(L^p, L^q)$-Topologie bedeuted das dann:

$$A \subseteq L^p \text{ ist abgeschlossen bzgl. } \sigma(L^p, L^q)$$
$$\Leftrightarrow [\text{Sei } (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq L^p \text{ und es gelte: } \langle X_\lambda, Y \rangle \to \langle X, Y \rangle \ \forall Y \in L^q] \Rightarrow X \in A$$

Satz 2.1.4 (Satz von Mazur) Sei X ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ konvex, dann sind äquivalent: (i) A ist abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$ (ii) A ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, X^*)$.

Eine ganz wichtige Konsequenz, die aus dem Satz von Mazur folgt, ist die Folgende: Sei X ein normierter Raum, dann gilt,

$$x' \in X^* \text{ ist stetig bzgl. } \|\cdot\| \Leftrightarrow x' \in X^* \text{ ist stetig bzgl. } \sigma(X, X^*)$$

(siehe: 3.1.4).

Bekanntermaßen gilt: $(L^p)^* \cong L^q$, für $p \in [1, \infty)$. Dann implizierte der Satz von Mazur und Satz 2.1.3, also insbesondere $(L^p, \sigma(L^p, L^q))^* = (L^p, \|\cdot\|)^* \cong L^q$.
Als Warnung sei bemerkt, dass sich der Satz von Mazur nicht auf ein beliebiges Duales Paar $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ überträgt. Womit ich meine, dass abgeschlossenheit bzgl. Norm und abgschlossenheit bzgl. $\sigma(X, Y)$, im allgemeinen nicht äquivalent sind.

Es gibt viele Versionen des Satzes von Hahn-Banach, die Version die für unser weiteres Vorgehen entscheidend, ist die Folgende.

Satz 2.1.5 (Trennungssatz von Hahn-Banach) Sei $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein duales Paar, $V \subseteq X$ sei abgeschlossen und konvex und $x_0 \notin V$. Dann ex. $y \in Y$ und $\epsilon > 0$ mit

$$\langle x, y \rangle \le \langle x_0, y \rangle - \epsilon < \langle x_0, y \rangle \ \forall x \in V.$$

Oder anders ausgedrückt:

$$\sup_{x \in V} \langle x, y \rangle < \langle x_0, y \rangle.$$

Ich will diesen Abschnitt mit dem Fazit abschließen, dass durch Duale Paare zwar, in kanonischer Weise, die stetigen Linearformen bestimmt werden, andereseits aber, die von den Linearformen erzeugten Topologien oftmals echt gröber sind als die jeweiligen schwachen Topologien. Das führt zu unterschieden im Verständnis der Abgeschlossenheit von Mengen bzw. der Stetigkeit von Linearformen, zwischen diesen Topologien.

2.2 Polare und der Bipolarensatz

Definition 2.2.1 (Polare Menge) Sei $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein duales Paar, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Die Polare Menge von A ist

$$A^o := \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in A\},$$

die Polare Menge von B ist

$$B^o := \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in B\}$$

Hier jetzt einige Eigenschaften von polaren Mengen, die in enger beziehung zu Kapitel 3., Lemma 3.2.2 stehen.

Lemma 2.2.2(Eigenschaften von Polaren) Sei $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein duales Paar und $A \subseteq X$.
(i) Es gilt $A^o = \overline{conv(A^o)}^{\sigma(Y,X)}$, d.h. A^o ist konvex und $\sigma(X, Y)$-abgeschlossen.
(ii) $0 \in A$ und $A \subseteq A^{oo}$.
(iii) Ist $C \subseteq A$, so gilt $A^o \subseteq C^o$.
(iv) Ist A ein convexer Kegel, so gilt $A^o = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 0; \forall x \in A\}$.

Beweis. (i) Seien $y_1, y_2 \in A^o \Rightarrow \langle x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \rangle$
$= \langle x, \lambda y_1 \rangle + \langle x, (1-\lambda) y_2 \rangle \leq \lambda + (1-\lambda) = 1 \ \forall x \in A$
Sei $x \in A$, dann ist $\{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \rangle\}$ $\sigma(X, Y)$-abgeschlossen, also auch:
$\bigcap\limits_{x \in A} \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \rangle\} = A^o$.
(ii) $0 \in A^o$ ist klar. Sei $x \in A \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in A^o \Rightarrow x \in A^{oo}$
(iii) Es gelte $C \subseteq A \subseteq X \Rightarrow A^o = \bigcap\limits_{x \in A} \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1\}$
$\subseteq \bigcap\limits_{x \in C} \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1\} = C^o$
(iv) $A^o := \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in A\}$,
$\Rightarrow \{y \in Y \mid \langle \lambda x, y \rangle \leq 1 \ \forall \lambda x \in A\} \ \forall \lambda \geq 0$,

$\Rightarrow \{y \in Y \mid \langle x, y\rangle \leq \frac{1}{\lambda} \; \forall x \in A\} \; \forall \lambda \geq 0,$
$\Rightarrow A^o = \{y \in Y \mid \langle x, y\rangle \leq 0 \; \forall x \in A\}.$ $\square$

Der folgende Satz ist der Eckstein zum Beweis von Theorem 2.3.1. Ich gebe den Satz mit Beweis an, um deutlich zu machen, welche ausschlaggebene Rolle der Trennungssatz von Hahn-Banach für die Darstellbarkeit von Risikomaßen hat.

Satz 2.2.3 (Bipolarensatz) Sei $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein duales Paar und $A \subseteq X$, dann gilt

$$A^{oo} = \overline{conv(A \cup 0)}^{\sigma(X,Y)}.$$

Beweis. Nach Lemma 2.2.2 gilt $A \subseteq A^{oo}$, sowie $0 \in A^{oo}$ und A^{oo} ist konvex und abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, Y)$. D.h. $\overline{conv(A \cup 0)}^{\sigma(X,Y)} \subseteq A^{oo}$.
Angenommen $\exists x_0 \in A^{oo}$ und $x_0 \notin \overline{conv(A \cup 0)}^{\sigma(X,Y)} := V$. V ist nach definition convex und abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, Y)$ und $x_0 \notin V$. Nach Satz 2.1.5 existiert $y \in Y$:
$\langle x, y\rangle \leq \sup\limits_{x\in A}\langle x, y\rangle \leq \sup\limits_{x\in V}\langle x, y\rangle < \langle x_0, y\rangle \; \forall x \in A.$
Definieren wir $K := \sup\limits_{x\in A}\langle x, y\rangle$ und $\tilde{y} := \frac{y}{K}$, so folgt:
$\langle x, \tilde{y}\rangle \leq 1 < \langle x_0, \tilde{y}\rangle \; \forall x \in A$. Die erste Ungleichung besagt $\tilde{y} \in A^o$ und damit die zweite: $x_0 \notin A^{oo}$. ↯ $\square$

Ist $A \subseteq X$ konvex und abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, Y)$, dann besagt der Bipolarensatz also folgendes:

$$x \in A \Leftrightarrow \forall y \in A^o \; : \; \langle x, y\rangle \leq 1$$

2.3 Darstellung kohärenter Risikomaße auf L^p-Räumen

Das Folgende Theorem geht zurück auf [2]. Es ist wohl der erste Darstellungssatz für Risikomaße auf unedlich-dimensionalen Räumen.

2.3.1 (Darstellung von kohärenten Risikomaßen [2])
Sei $\rho : L^p \longrightarrow \mathbb{R},\; p \in [1, \infty]$ ein kohärentes Risikomaß und $\mathcal{A}_\rho$ sei abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$, dann existiert $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}_1^q(P)$, so dass gilt:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X]$$

Beweis. $\mathcal{A}_\rho := \{X \in L^p \mid \rho(X) \leq 0\}$ ist ein konvexer Kegel (nach Satz 1.1.8 (iv)) und abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ nach Vorraussetzung.

$\mathcal{A}_\rho^o = \{Y \in L^1 \mid \langle X, Y \rangle \leq 0 \ \forall X \in A_\rho\}$ (nach 2.2.2)

Ich zeige zuerst, das gilt: $A_\rho^o \subseteq L_-^q$
Angenommen: $\exists\ 0 \neq Y_o \in A_\rho^o$, $Y_o \notin L_-^q \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle \leq 0 \ \forall X \in A_\rho$. (nach 2.2.2)
Dann gilt aber, $P[Y_o > 0] > 0$ und $0 \leq \mathbf{1}_{\{Y>0\}} \in \mathcal{A}_\rho \Rightarrow \langle \mathbf{1}_{\{Y>0\}}, Y_0 \rangle > 0 \Rightarrow$ $Y_0 \notin \mathcal{A}_\rho^o \lightning \Rightarrow \mathcal{A}_\rho^o \subseteq L_-^q$

Der Bipolarensatz besagt dann: $X \in \mathcal{A}_\rho \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle \leq 0 \quad \forall\ Y \in A_\rho^o \cap L_-^q$

$\Leftrightarrow \langle X, \frac{Y}{\|Y\|_1} \rangle \leq 0 \quad \forall\ \frac{Y}{\|Y\|_1} \in A_\rho^o \cap L_-^q$

$\Leftrightarrow \langle X, \tilde{Y} \rangle \leq 0 \quad \forall\ \tilde{Y} \in A_\rho^o \cap L_{-,-1}^q$

$\Leftrightarrow E_Q[-X] = \langle -X, \frac{dQ}{dP} \rangle \leq 0 \quad \forall\ \frac{dQ}{dP} \in A_\rho^o \cap L_{+,1}^q$ (Satz von Radon-Nikodym)

Sei jetzt $\mathcal{Q} := \{Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid \frac{dQ}{dP} \in A_\rho^o \cap L_{+,1}^q\}$, dann gilt also:

$X \in A_\rho \Leftrightarrow \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \leq 0$

Für alle $X \in L^p$ gilt, $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$. Die obige Herleitung liefert dann, $\sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-(X + \rho(X))] \leq 0 \Leftrightarrow \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \leq \rho(X)$.
Andererseits gilt: $X + \rho(X) - \epsilon \notin \mathcal{A}_\rho \ \forall \epsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists Q \in \mathcal{Q} : E_Q[-(X + \rho(X) - \epsilon)] > 0 \ \forall \epsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists Q \in \mathcal{Q} : E_Q[-(X + \rho(X))] \geq 0 \Leftrightarrow E_Q[-X] \geq \rho(X)$, also gesamt:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \qquad \square$$

3 Unterhalb-Stetigkeit, konjugierte Funktionen und das Fenchel-Moreau-Theorem

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen der konvexen-Analysis präsentiert. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass konvexe, abgeschlossene Mengen eine duale Darstellung bzgl. ihrer Polare haben. Dieses Prinzip überträgt sich auf konvexe- und unterhalb-stetige Funktionen, durch konjugation dieser Funktion.
Teil 1 dieses Kapitels behandelt Zusammenhänge zwischen unterhalb-stetigen, konvexen Funktionen und den Epigraphen bzw. den Niveaumengen dieser Funktion.
In Teil 2 wird die konjugierte Funktionen einer Funktion definiert. Gewisse Eigenschaften dieser konjugierten Funktionen zeigen eine starke Analogie zu Polaren einer Menge. Der Höhepunkt dieses Kapitels ist das Fenchel-Moreau-Theoem. Es ist, wie sich zeigen wird, eine Verallgemeinerung des Bipolarensatz und erlaubt es konvexe, unterhalb-stetige Funktionen durch ihre konjugierte-Funktion darzustellen.

3.1 Konvexe, unterhalb-stetige Funktionen

3.1.1 (Definitionen)

$$dom(f) := \{x \in X \mid f(x) < \infty\} \text{ (effektiver Definitionsbereich von } f)$$

$$epi(f) := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\} \text{ (Epigraph von } f)$$

Sei $A \subseteq X$, dann ist die Indikatorfunktion $I_A : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ definiert durch

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ \infty & x \notin A \end{cases}$$

Eine Funktion $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ heißt *eigentlich*, falls: $f(x) > -\infty \; \forall x \in X$ und $f \not\equiv \infty$.

Sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann ist eine Funktion
$f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *unterhalb-stetig* bzgl. τ in x_0, falls

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \xrightarrow{\tau} x_0} f(x)$$

Die folgenden beiden Lemmas beleuchten den bereits angekündigten Zusammenhang zwischen Konvexität bzw. unterhalb-Stetigkeit einer Funktion und Konvexität bzw. Abgeschlossenheit des Epigraphen dieser Funktion. Für einen Beweis siehe [1].

Lemma 3.1.2 Eine Funktion $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ ist konvex genau dann, wenn $epi(f) \subseteq X \times \mathbb{R}$ konvex ist.

Proposition 3.1.3 Gegeben sei (X, τ) ein topologischer Raum und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$, dann sind äquivalent:
(i) f ist unterhalbstetig bzgl. τ.
(ii) Die Niveaumengen $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sind abgeschlossen bzgl. τ.
(iii) $epi(f) \subseteq X \times \mathbb{R}$ ist abgeschlossen bzgl. τ.

Der Satz von Mazur besagt, dass für konvexe Mengen, norm-abgeschlossenheit und abgeschlossenheit im Sinne der schwachen Topologie äquivalent sind. Der folgende Satz überträgt diese Eigenschaft auf unterhalb-stetige, konvexe Funktionen.

Satz 3.1.4 (Mazur) Sei X ein normierter Vektorraum. Eine konvexe Funktion $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ ist genau dann unterhalb-stetig bzgl. $\|\cdot\|$, wenn sie unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(X, X^*)$ ist.

Beweis. $epi(f)$ ist konvex und abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn $epi(f)$ konvex und abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, X^*)$ ist, genau dann, wenn f unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(X, X^*)$ ist. $\square$

Bemerkung: Alle hier behandelten Aussagen übertragen sich in kanonischer Weise auf konkave Funktionen, wobei dann unterhalb-Stetigkeit durch oberhalb-Stetigkeit ersetzt werden muss und Epigraph durch Hypograph.
Weil lineare Funktionen konkav und konvex sind, impliziert das die folgende Aussage.
Sei X ein Banachraum (also abgeschlossen bzg. $\|\cdot\|$), dann gilt:

$$x' \in X^* \text{ ist stetig bzgl. } \|\cdot\| \Leftrightarrow x^* \in X^* \text{ ist stetig bzgl. } \sigma(X, X^*).$$

3.2 Konjugierte Funktionen und das Fenchel-Moreau -Theorem

Definition 3.2.1 (Konjugierte Funktionen) Sei $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein duales Paar und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ eine beliebige Funktion. Dann definieren wir die *konjugierte-Funktion* $f^* : Y \longrightarrow [-\infty, \infty]$ von f durch,

$$f^*(y) := \sup_{x \in X}(\langle x, y\rangle - f(x)) \ \forall y \in Y$$

und die bikonjugierte-Funktion $f^{**} : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ durch,

$$f^{**}(x) := \sup_{y \in Y}(\langle x, y\rangle - f^*(x)) \ \forall x \in X.$$

Beispiele: (i) Sei $A \subseteq X$, $\mathbf{I}_A$ die Indikatorfunktion auf A und $y \in Y$, dann gilt $\mathbf{I}_A^*(y) = \sup_{x \in X}(\langle x, y\rangle - \mathbf{I}_A(x)) = \sup_{x \in A}\langle x, y\rangle$.
(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x - a$. Dann gilt,
$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(x(y-1) - a) = -a\mathbf{I}_{\{1\}}(y)$.
(iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := exp(x)$. Elementare Analysis liefert,
$f^*(y) = ylog(y) - y$.

Wie schon erwähnt stehen Polare von Mengen und konjugierte Funktionen in engem Zusammenhang. Der folgende Satz bestimmt ein paar wichtige Eigenschaften von konjugierten bzw. bikonjugierten Funktionen. Man vergleiche die folgenden Eigenschaften mit denen von Polaren (siehe Lemma 2.2.2).

Lemma 3.2.2 (Elementare Eigenschaften konjugierter Funktionen) Sei $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein duales Paar und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ eine beliebige erweiterte Funktion, dann gilt:
(i) f^* ist konvex und unterhalbstetig bzgl. $\sigma(Y, X)$; f^{**} ist konvex und unterhalbstetig bzgl. $\sigma(X, Y)$,
(ii) $f \leq f^{**}$,
(iii) $f_1 \leq f_2$ impliziert $f_1^* \geq f_2^*$,
(iv) $f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y\rangle$, bzw. $f^*(y) + f^{**}(x) \geq \langle x, y\rangle \ \forall x \in X,\ \forall y \in Y$.

Beweis. (i) $f_x(y) := \langle x, y\rangle - f(x)$ ist als affin-lineare Funktion konvex und unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(Y, X)$. $\Rightarrow \{y \in Y \mid f^*(y) \leq \lambda\} = \bigcap_{x \in X}\{y \in Y \mid f_x(y) \leq \lambda\}$ sind konvex und abgeschlossen $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. D.h. f^* ist konvex und unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(Y, X)$ (nach 3.1.3). Analog für f^{**}.

(ii) $f^{**}(x) = \sup\limits_{y \in Y}(\langle x, y\rangle - f^*(y)) = \sup\limits_{y \in Y}(\langle x, y\rangle - \sup\limits_{x \in X}(\langle x, y\rangle - f(x))) \leq f(x)$ $\forall x \in X$.
(iii) Sei $f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1^*(y) = \sup\limits_{x \in X}(\langle x, y\rangle - f_1(x))$
$\leq \sup\limits_{x \in X}(\langle x, y\rangle - f_2(x)) = f_2^*$ $\forall y \in Y$.
(iv) Nach Definition von f^* bzw. f^{**}, ist das klar. □

Das folgende Theorem hat eine ganz Zentrale Rolle in den nächsten Kapiteln. Es gibt uns die Möglichkeit, Risikomaße, wie in der Einleitung angedeuted, durch ihre konjugierte-Funktion darzustellen.

3.2.2 (Fenchel-Moreau-Theorem) Sei $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein duales Paar. $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ sei eine eigentliche Funktion, dann gilt $f = f^{**}$ genau dann, wenn f konvex und unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(X, Y)$ ist.

Beweis. Gilt $f = f^{**}$, dann ist f nach Satz 3.2.1 konvex und unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(X, Y)$.
Sei umgekehrt f konvex und unterhalb-stetig. Satz 3.2.1 besagt $f^{**} \leq f$.
Angenommen es existiert $x_0 \in X : \ f^{**}(x_0) < f(x)$, dass bedeuted, $(x_0, f^{**}(x_0)) \notin epi(f)$. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach, können wir $(x_0, f^{**}(x_0))$, strikt, durch ein lineares Funktional auf $X \times \mathbb{R}$ trennen. Diese Aussage wird dann zum Wiederspruch geführt. Für Details siehe [1].□

Das der Bipolarensatz vom Fenchel-Maureau-Theorem impliziert wird, zeigt die Beweisskizze des folgenden Theorems.

Theorem 3.2.3 (Bipolarensatz) Sei X ein Vektorraum und $A \subseteq X$, dann gilt:

$$A^{oo} = \overline{conv(A \cup 0)}^{\sigma(X,Y)}.$$

Beweis. p_A sei das Minkowski-Funktional (2.1.2) über A, dann überzeugt man sich mit Hilfe von [1], dass gilt :
(i) $\mathbf{I}_A$ ist konvex und unterhalbstetig $\Leftrightarrow$ A ist konvex und abgeschlossen
(ii) $p_{A^o} = \mathbf{I}_A^*$ (falls $0 \in A$)
(iii) $p_A^* = \mathbf{I}_{A^o}$ (falls $0 \in A$)

Dann folgt mit Hilfe des Fenchel-Maureau-Theorems:
$\mathbf{I}_{A^{oo}} = p^*_{A^o} = \mathbf{I}^{**}_A = \mathbf{I}_A$ genau dann, wenn [$0 \in A$, A ist konvex und abgeschlossen]. $\square$

Bemerkung: Sei jetzt $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$, $p \in [1, \infty]$, ein konvexes, $\sigma(L^p, L^q)$-unterhalb-stetiges Risikomaß, dann erlaubt uns Theorem 3.2.2, ρ in der folgenden Form darzustellen:

$$\rho(X) = \sup_{Y \in L^q} (\langle X, Y \rangle - \rho^*(Y)) \; \forall X \in L^p.$$

Dabei wurde aber noch nicht ausgenutzt, dass ρ sowohl monoton, als auch cash-invariant ist. Verwendet man diese beiden, zusätzlichen Eigenschaften, erhällt man eine präzisere Darstellung als die oben angegebene und insbesondere eine Darstellung über Wahrscheinlichkeitsmaße (siehe Kapitel 4).

4 Darstellungen für konvexe Risikomaße auf L^p-Räumen und stetigkeits-Eigenschaften

Das Fenchel-Moreau-Theorem erlaubt es uns in diesem Kapitel konkrete Darstellungenen für Risikomaße auf L^p zu erhalten, wenn wir unterhalb-Stetigkeit bzgl. der $\sigma(L^p, L^q)$-Topologie voraussetzen. Da der Raum L^∞ nicht reflexiv ist, ist die $\sigma(L^\infty, L^1)$-Topologie echt gröber als die schwache Topologie auf L^∞. Das bedeuted, dass unterhalb-Stetigkeit bzgl. dieser Topologie, eine stärkere Voraussetzung an das Risikomaß ρ ist, als schwache unterhalb-stetigkeit. Der Raum L^∞ muss also gesondert behandelt.
In Teil 4.1 werden ich im Detail auf die Darstellbarkeit für Risikomaße auf den unterschiedlichen L^p-Räumen eingehen. Außerdem werden hinreichende Kriterien für die $\sigma(L^p, L^q)$-unterhalb-stetigkeit angegeben. In Teil 4.2 werden noch eingehender kohärente Risikomaße besprochen und Teil 4.3 beschäftigt sich mit endlichen (reell-wertigen) Risikomaßen.

4.1 Darstellungen und stetigkeits-Eigenschaften konvexer Risikomaße auf L^p-Räumen

Theorem 4.1.1 (Darstellung $p \in [1, \infty]$ [4])
Sei $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$, $p \in [1, \infty]$, ein konvexes Risikomaß, dann ist ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ genau dann, wenn

(i) $\rho(X) = \sup\limits_{Q \in \mathcal{M}_1^q(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$

(ii) $\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] \quad \forall \frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}$.

Beweis. (i) Wir haben gezeigt, dass Riskikomaße immer eigentlich sind. Sei jetzt ρ unterhalbstetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ und konvex. Dann folgt mit dem Fenchel-Moreau-Theorem $\rho = \rho^{**}$. Sei $X \in L^p$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \sup_{Y \in L^q} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) = \sup_{\substack{Y \in L^q \\ \rho^*(Y) < \infty}} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) \\
&\underset{1.}{=} \sup_{\substack{Y \in L^q_- \\ \rho^*(Y) < \infty}} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) \underset{2.}{=} \sup_{\substack{Y \in L^q_{-,-1} \\ \rho^*(Y) < \infty}} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) \\
&= \sup_{\substack{Y \in L^q_{+,1} \\ \rho^*(-Y) < \infty}} (\langle -X, Y\rangle - \rho^*(-Y)) \underset{3.}{=} \sup_{Q \in \mathcal{M}_1^q(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}))
\end{aligned}$$

1. Sei $\lambda \geq 0,\ Y \in L^q$, mit $\rho^*(Y) < \infty$. Dann gilt, $\rho(\lambda \mathbf{1}_{\{Y \geq 0\}}) \leq 0$
$\Rightarrow \langle \lambda \mathbf{1}_{\{Y\geq 0\}}, Y\rangle - \rho^*(Y) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda\langle \mathbf{1}_{\{Y\geq 0\}}, Y\rangle \leq \rho^*(Y) < \infty\ \forall \lambda \geq 0$. Die Aussage ist aber nur richtig, wenn $Y \in L^q_-$ ist. (vergleiche 2.3.1)
2. Sei $\lambda \geq 0$, dann gilt $\rho(\lambda) = -\lambda + \rho(0) \Rightarrow \langle \lambda, Y\rangle - \rho^*(Y) \leq -\lambda + \rho(0)$
$\Leftrightarrow \lambda(\langle 1, Y\rangle + 1) \leq \rho^*(Y) + \rho(0) < \infty\ \forall Y \in L^q : \rho^*(Y) < \infty$.
Was nur Sinn macht $\forall \lambda \geq 0$, wenn $\langle 1, Y\rangle = -1$. Also, $Y \in L^q_{-,-1}$.
3. Der Satz von Radon-Nikodym impliziert nun, dass wir $Y \in L^q_{+,1}$ mit $\frac{dQ}{dP}$, für ein $Q \in \mathcal{M}^q_1(P)$ identifizieren können. Woraus dann folgt, dass:
$\langle -X, Y\rangle = \int -XY dP = \int -X\frac{dP}{dQ}dP = \int -X dQ = E_Q[-X]$.

(ii) Sei $Z \in L^p$, dann ist $Y := Z + \rho(Z) \in \mathcal{A}_\rho$.
D.h. $\sup\limits_{X\in\mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] \geq E_Q[-Y] = E_Q[-Z] - \rho(Z)$
$\Rightarrow \sup\limits_{X\in\mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] \geq \sup\limits_{Z\in L^p}(E_Q[-Z] - \rho(Z)) = \rho^*(-\frac{dQ}{dP})$.
Andererseits gilt: $\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \sup\limits_{X\in L^p}(E_Q[-X]-\rho(X)) \geq \sup\limits_{X\in\mathcal{A}_\rho}(E_Q[-X]-\rho(X))$
$\geq \sup\limits_{X\in\mathcal{A}_\rho} E_Q[-X]$. Also gesamt, $\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \sup\limits_{X\in\mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] \quad \forall \frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}$.
Gilt umgekehrt,
$\rho(X) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{M}^q_1(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$,
dann folgt aus der Monotonie und Cash-Invarianz (wie oben),
$\rho(X) = \sup\limits_{Y\in L^q}(\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) = \rho^{**}(X)\ \forall X \in L^p$.

Das Fenchel-Maurea-Theorem impliziert dann die unterhalb-Stetigkeit bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$, von ρ. □

Das folgende Lemma bietet ein paar notwendige- und hinreichende Kriterien für die Darstellbarkeit von konvexen Risikomaßen.

Lemma 4.1.2 (Charakterisierung $p \in [1, \infty]$)
Es sei $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty],\ p \in [1, \infty]$ ein konvexes Risikomaß. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) ρ ist unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$.

(ii) $\rho(X) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{M}^q_1(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$

(iii) $\rho(X) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{K}^q}(E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$

$\mathcal{K}^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \rho^*(-\frac{dQ}{dP}) < \infty\}$

(iv) $\mathcal{A}_\rho$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii)$\Leftrightarrow$(iii) impliziert Theorem 4.1.1.
(iv)$\Leftrightarrow$(i): $\mathcal{A}_\rho := \{X \in L^p \mid \rho(X) \leq 0\}$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$.
$\Leftrightarrow \{X \in L^p \mid \rho(X - m) \leq m\}$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ $\forall m \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow \{X + m \in L^p \mid \rho(X) \leq m\}$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ $\forall m \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow \{X \in L^p \mid \rho(X) \leq m\}$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ $\forall m \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow \rho$ ist unterhalbstetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$. □

Ist ein Risikomaß gegeben auf L^∞, dann mag sich die Frage nach hinreichenden Kriterien für die $\sigma(L^\infty, L^1)$-unterhalb-stetigkeit stellen. Ein tiefer Satz aus der Funktionalanalysis, der Satz von Krein-Smulyan (siehe [12]), liefert so ein Kriterium.
Alle anderen L^p-Räume werden noch genauer im nächsten Lemma charakterisiert.

Lemma 4.1.3 (Charakterisierung $p \in [1, \infty)$)
Es sei $\rho : L^p \longrightarrow] - \infty, \infty]$, $p \in [1, \infty)$ ein konvexes Risikomaß. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) ρ ist unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$.

(ii) ρ ist unterhalb-stetig bzgl. $\|\cdot\|_p$.

(iii) $\mathcal{A}_\rho$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$.

(iv) $\mathcal{A}_\rho$ ist abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_p$.

(v) $\rho(X) = \sup\limits_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$

(vii) $\rho(X) = \sup\limits_{Q \in \mathcal{K}^q} (E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$.
$\mathcal{K}^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \rho^*(-\frac{dQ}{dP}) < \infty\}$.

Beweis. Die noch fehlende Implikation liefert der Satz von Mazur (3.1.3).□

Fazit: Für Risikomaße definiert auf $L^p, p \in [1, \infty)$, liegt der Vorteil darin, dass die $\sigma(L^p, L^q)$-unterhalb-stetigkeit ganz einfach durch die Norm-unterhalb-Stetigkeit zu charakterisieren ist. Andererseits haben Risikomaße auf L^∞ den Vorteil, dass sie immer stetig (siehe 1.1.3) sind, was allerdings noch kein hinreichendes Kriterium zur Darstellung über die konjugierte Funktion ist. Dazu müsste noch zusätzlich $\sigma(L^\infty, L^1)$-unterhalb-Stetigkeit gelten.

4.2 Darstellungen und stetigkeits-Eigenschaften kohärenter Risikomaße auf L^p-Räumen

Die folgenden beiden Punkte behandeln kohärente Risikomaße. Wir werden sehen, dass eine duale Darstellung für ein kohärentes Risikomaß, im Vergleich gesehen, besonders einfach ist, weil die konjugierte Funktion nur die zwei Werte 0 und ∞ annehmen kann.

Proposition 4.2.1 [3] Es sei $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty],\ p \in [1, \infty]$, ein kohärentes Risikomaß, dann gilt,

$$\rho^*(Y) \in \{0, \infty\}\ \forall Y \in L^q.$$

Beweis. Sei $Y \in L^q$, dann gilt $\rho^*(Y) = \sup\limits_{X \in L^p} (\langle X, Y\rangle - \rho(X))$
$= \sup\limits_{\lambda X \in L^p} (\langle \lambda X, Y\rangle - \rho(\lambda X)) = \lambda \rho^*(Y)\ \forall \lambda \geq 0. \Rightarrow \rho^*(Y) \in \{0, \infty\}.$ □

Theorem 4.2.2 (Darstellung kohärenter Risikomaße) Sei $\rho : L^p \longrightarrow] - \infty, \infty],\ p \in [1, \infty]$, ein kohärentes Risikomaß, dann sind äquivalent:

(i) ρ ist unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$.

(ii) $\rho(X) = \sup\limits_{Q \in \mathcal{C}^q} E_Q[-X], \quad \mathcal{C}^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = 0\}$.

(iii) $\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \mathbf{I}_{\mathcal{D}^q}(\frac{dQ}{dP}) \quad \forall \frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}, \quad \mathcal{D}^q := \{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1} \mid Q \in \mathcal{C}^q\}$.

Beweis. Genau dann, wenn ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$ ist, gilt:
$\rho(X) = \sup\limits_{Y \in L^q} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) = \sup\limits_{\substack{Y \in L^q \\ \rho^*(Y) < \infty}} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y))$
$\underset{4.2.1}{=} \sup\limits_{\substack{Y \in L^q \\ \rho^*(Y) = 0}} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(Y)) \underset{4.1.1}{=} \sup\limits_{Q \in \mathcal{C}^q} E_Q[-X] = \sup\limits_{\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{D}^q} \langle -X, \frac{dQ}{dP}\rangle$
$= \sup\limits_{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}} (\langle -X, \frac{dQ}{dP}\rangle - \mathbf{I}_{\mathcal{D}^q}(\frac{dQ}{dP}))\ \forall X \in L^p.$ □

Es versteht sich von selbst, dass alle in Abschnitt 4.1 erhaltenen Resultate auch für kohärente Risikomaße gelten.

4.3 Darstellungen und stetigkeits-Eigenschaften endlicher, konvexer Risikomaße auf L^p-Räumen

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 4 wird sich zeigen, dass endliche Risikomaße auf L^p-Räumen den Vorzug besitzten, immer stetig zu sein. Außerdem wird in Theorem 4.3.4 bewiesen, dass für endliche konvexe Risikomaße, bezüglich der dualen Darstellung, dass Supremum durch ein Maximum ersetzt werden kann. Besonders elegant äußert sich diese Tatsache an kohärenten Risikomaßen (Theorem 4.3.5). Proposition 4.3.3 liefert ein zur Endlichkeit äquivalentes Kriterium.

4.3.1 (Erweitertes Namioka-Klee-Theorem (siehe [9])) Sei (X, τ) ein Banach-Verband und $f : X \to]-\infty, \infty]$ eigentlich, konvex und wachsend. Dann ist f stetig bzgl. τ auf $int(dom(f))$.

Corollar 4.3.2 (Stetigkeit endlicher, konvexer Risikomaße [9]) Jedes endliche, konvexe Risikomaß $\rho : L^p \to \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$, ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_p$.

Beweis. $(L^p, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty]$ ist ein Banach Verband (siehe z.B. Elstrodt).
Es gilt: $\rho(X) < \infty \ \forall X \in L^p \Rightarrow dom(\rho) = L^p$
$\Rightarrow int(dom(\rho)) = int(L^p) = L^p$. Unter Benutzung von 4.3.1 folgt, dass $\tilde{\rho} : L^p \to \mathbb{R}$, $\tilde{\rho}(X) := \rho(-X)$ stetig bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist, denn $\tilde{\rho}$ ist eigentlich, konvex und wachsend. $\Rightarrow \rho$ ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_p$. □

Proposition 4.3.3 [9] Sei $\rho : L^p \to \mathbb{R}$ ein konvexes, $\sigma(L^p, L^q)$-unterhalbstetiges Risikomaß und $\mathcal{K}^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \rho^*(-\frac{dQ}{dP}) < \infty\}$. Dann gilt:
$\mathcal{D}^q := \{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1} \mid Q \in \mathcal{K}^q\}$ ist beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_q$ genau dann, wenn ρ endlich ist.

Beweis. Ist $\mathcal{D}^q$ beschränkt und sei $X \in L^p$, dann gilt:
$E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}) \leq \|X\|_p \|\frac{dQ}{dP}\|_q - \rho^*(-\frac{dQ}{dP})$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(X) &= \sup_{Q \in \mathcal{K}^q} (E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})) \\ &\leq \ \|X\|_p \sup_{Q \in \mathcal{K}^q} \|\tfrac{dQ}{dP}\|_q - \sup_{Q \in \mathcal{K}^q} \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) < \infty \end{aligned}$$

Andererseits nehmen wir an, dass ρ endlich ist, aber $\mathcal{D}^q$ nicht Norm-beschränkt. Dann gibt es $\forall X_n \in L^p$, ein $Q_n \in \mathcal{K}^q : X_n \leq 0$, $\|X_n\|_p = 1$ und $E_{Q_n} \geq n^3$. L^p

ist ein Banachraum, dass impliziert $X := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_n}{n^2} \in L^p$. $X \leq \frac{X_n}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\rho(X) \geq \rho(\frac{X_n}{n^2}) \geq E_{Q_n}[\frac{X_n}{n^2}] - \rho^*(\frac{dQ_n}{dP}) \geq n - K\ \forall n \in \mathbb{N}$ und ein $K \in \mathbb{R}$. Das heißt aber, dass ρ nicht endlich ist.↯ □

Die abschließenden beiden Theoreme dieses Kapitels zeigen, wie bereits erwähnt, dass für endliche, konvexe Risikomaße, bzgl. der dualen Darstellung, dass Supremum durch ein Maximum ersetzt werden kann. Dabei wird ein Kompaktheitsargument (Banach-Alaoglu) verwendet, welches für den Fall $p = \infty$ allerdings nicht greift. Für diesen Fall verweise ich auf Theorem 5.2.5.

Theorem 4.3.4 (Darstellung endlicher, konvexer Risikomaße [9])
Sei $\rho : L^p \to]-\infty, \infty]$, $p \in [1, \infty)$, ein endliches, konvexes Risikomaß, dann hat ρ eine Darstellung der Form,

$$\rho(X) = \max_{Q\in\mathcal{K}^q}(E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})),\ \mathcal{K}^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) < \infty\}$$

und $\mathcal{K}^q$ ist relativ kompakt bzgl. $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$.

Beweis. Ist ρ endlich, so ist nach Korollar 4.3.2, ρ $\|\cdot\|_p$-stetig. Also insbesondere unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^p, L^q)$, für $p \in [1, \infty)$. Nach Prop. 4.3.3 ist $\mathcal{D}^q := \{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{1,+} \mid Q \in \mathcal{K}^q\}$ Norm-beschränkt. Insbesondere ist also $\overline{\mathcal{D}^q}$ Norm-beschränkt. Der Satz von Banach-Alaoglu besagt dann, $\overline{\mathcal{D}^q}$ ist $\sigma(L^q, L^p)$-kompakt ($(L^p)^* \cong L^q$). Das ist äquivalent dazu, dass $\overline{\mathcal{K}^q}$ kompakt bzgl. $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$ ist (siehe Beispiel 2.1.2 (ii)). Also ist $\mathcal{K}^q$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$.
Wir definieren $f : \mathcal{D}^q \to \mathbb{R}$, durch $f(\frac{dQ}{dP}) := \langle -X, \frac{dQ}{dP}\rangle - \rho^*(-\frac{dQ}{dP})$, für ein $X \in L^p$. Dann ist f oberhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^q, L^p)$, weil ρ^* immer $\sigma(L^q, L^p)$-unterhalb-stetig ist (3.2.2 (i)). Oberhalb-stetige Funktionen (bzgl. $\sigma(L^q, L^p)$) nehmen ihr Supremum auf Kompakta an (siehe: Aliprantis, Infnite dimensional Analysis, Theorem 2.40).(*)

$$\Rightarrow \rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{K}^q}(E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})) = \sup_{Q\in\overline{\mathcal{K}^q}}(E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}))$$
$$= \sup_{\frac{dQ}{dP}\in\overline{\mathcal{D}^q}}(\langle -X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})) \underset{(*)}{=} \max_{\frac{dQ}{dP}\in\overline{\mathcal{D}^q}}(\langle -X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}))$$
$$= \max_{\frac{dQ}{dP}\in\mathcal{D}^q}(\langle -X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})) = \max_{Q\in\mathcal{K}^q}(E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})).$$

Die vorletzte Gleichung folgt, weil für $\frac{dQ}{dP} \in \overline{\mathcal{D}^q} \setminus \mathcal{D}^q$, ist $\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \infty$. □

Theorem 4.3.5 (Darstellung kohärenter Risikomaße [9])
Sei $\rho : L^p \to]-\infty, \infty]$, $p \in [1, \infty)$, ein kohärentes, $\|\cdot\|_p$-unterhalb-stetiges Risikomaß. Dann hat ρ eine Dastellung der Form,

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{C}^q} E_Q[-X],\ \mathcal{C}^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = 0\}$$

und $\mathcal{C}^q$ ist $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$-kompakt.

Beweis. Ich zeige zuerst, dass
$\mathcal{D}^q := \{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1} \mid Q \in \mathcal{C}^q\}$ $\|\cdot\|_q$-beschränkt ist. Sei dazu $\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{D}^q$ dann gilt,

$$\begin{aligned}\rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{X \in L^p} (\langle X, -\tfrac{dQ}{dP}\rangle - \rho(X)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle \geq -\rho(X)\ \forall X \in L^p \\ &\Leftrightarrow \langle -X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle \geq -\rho(-X)\ \forall X \in L^p \\ &\Leftrightarrow \langle X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle \leq \rho(-X)\ \forall X \in L^p\end{aligned}$$

also gesamt,

$$\begin{aligned}-\rho(X) \leq \langle X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle \leq -\rho(-X)\ \forall X \in L^p. \\ \Rightarrow -\rho(X) \leq \sup_{\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{D}^q} \langle X, \tfrac{dQ}{dP}\rangle \leq -\rho(-X)\ \forall X \in L^p.\end{aligned}$$

Das heißt aber nichts anderes als, $\mathcal{D}^q$ ist beschränkt bzgl. $\sigma(L^q, L^p)$, oder anders ausgedrückt, $\mathcal{D}^q$ ist beschränkt bzgl. $\sigma((L^p)^*, L^p)$. Der Satz von Banach-Steinhaus besagt dann, $\mathcal{D}^q$ ist beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_q$. Mit Prop. 4.3.3 folgt, dass ρ endlich ist. Unter Benutzung von Theorem 4.3.4 erhalten wir dann,

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{C}^q} E_Q[-X]\ \forall X \in L^p.$$

Wir wissen das $\mathcal{C}^q$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$ ist. Also ist nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{C}^q$ abgeschlossen bzgl. $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$ ist.
Weil ρ^* unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^q, L^p)$ ist und

$$\mathcal{D}^q := \{\tfrac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1} \mid \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = 0\} \underset{4.2.1}{=} \{\tfrac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1} \mid \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) \leq 0\},$$

folgt, dass $\mathcal{D}^q$ abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^q, L^p)$ ist. Also ist $\mathcal{C}^q$ abgeschlossen bzgl. $\sigma(ca^q(\Omega, \mathcal{F}, P), L^p)$. □

5 Atomlose Wahrscheinlichkeitsräume, der Raum $ba(\Omega, \mathcal{F})$, adjungiert-bedingte Erwartungen und maximale Korrelation

Dieses Kapitel dient vornehmlich zur Vorbereitung für die abschließenden Kapitel. In Teil 5.1 beschäftige ich mich mit atomlosen Wahrscheinlichkeitsräumen und deren Implikationen, sowie mit Quantilfunktionen. Wir werden im folgenden immer wieder benötigen, dass auf dem vorgegebene Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine, auf $[0,1]$, unter P, gleichverteilte Zufallsvariable existiert. Atomlosigkeit ist dafür ein hinreichendes Kriterium. Mit hilfe von Quantilfunktionen werden wir sehen, dass Atomlosigkeit noch weitere interessante und überraschende Konsequenzen beinhaltet.
In 5.2 und 5.3 wird der Raum $ba(\Omega, \mathcal{F})$, aller beschränkten *Ladungenen* behandelt. Zum einen werden wir eine Teilmenge von $ba(\Omega, \mathcal{F})$ als Dualraum von $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ identifizieren, zum anderen wird die adjungiert-bedingte Erwartung (als linearer Operator) definiert, welche uns im wesentlichen dazu dienen wird einen wichtigen Stetigkeitssatz über verteilungs-invariante Risikomaße, in Kapitel 6, zu beweisen.
Teil 5.4 dreht sich um die maximale Korrelation zweier Zufallsvariablen. Die Hardy-Littlewood-Ungleichung liefert, wie wir sehen werden, eine Korrelationsschranke.

5.1 Konstruktion, Simulation, Replikation und Approximation von Zufallsvariablen auf atomlosen Wahrscheinlichkeitsräumen

Definition 5.1.1 (Quantilfunktionen) Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheilichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Verteilungsfunktion F_X. Dann werden durch

$$q_X^+ : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ q_X^+(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) > t\},$$
$$q_X^- : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ q_X(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq t\},$$

die obere- und untere Quantilfunktion definiert.
Für eine beliebige Quantilfunktion

$$q_X : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

muss gelten, $F_X(q_X(t)-) \leq t \leq F_X(q_X(t))\ \forall t \in (0,1)$.

Im Fall von stetigen Verteilungen sind die Quantilfuktionen nichts anderes als die Inversen der Verteilungsfunktion, was impliziert, dass dann q_X^+, q_X^+ und q_X f.s. übereinstimmen. Im unstetigen Fall ist q_X^- noch linksstetig und q_X^+ rechtsstetig.
Quantilfunktionen werden im weiteren Verlauf eine tragende Rolle spielen, da sie zum einen direkt zur Bestimmung des Risikos verwendet werden können (siehe 1.3 (Value at Risk)), zum anderen besagt das folgende Lemma, unter anderem auch, dass sie zur Simulation (5.1.2 (i)) eines gegebenen Zufallsexperiments X benutzt werden können.

Lemma 5.1.2 (Eigenschaften von Quantilfunktionen [3])
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der eine auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariable U trägt. X sei eine beliebige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Verteilungsfunktion F_X und beliebiger Quantilfunktion q_X (definiert wie oben), dann gilt:
(i) $q_X(U) \sim X$,
(ii) $q_X^+(t) = -q_{-X}^-(1-t)\ \forall t \in (0,1)$.
Hat X eine stetige Verteilung, dann gilt zusätzlich:
(iii) $F_X(X) \sim U$,
(iv) $X = q_X(U)$ P-f.s..

Die Frage, wann ein Wahrscheilichkeitsraum eine, auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariable trägt, beantwortet folgende Definition und das darauf folgende Lemma.

Definition 5.1.3 (Atomloser Wahrscheinlichkeitsraum) Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt *atomlos*, falls folgendes gilt:
$\forall A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0\ \exists B \subseteq A,\ B \in \mathcal{F} : 0 < P(B) < P(A)$.

Lemma 5.1.4 (Eigenschaften atomloser Wahrscheinlichkeitsräume [3]) Für einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist atomlos.

(ii) Es existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von bernoulli-verteilten Zufallsvariablen.

(iii) Für alle $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ gibt es eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit gemeinsamer Verteilung Q.

(iv) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ trägt eine bzgl. P, auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariable U.

Atomlosigkeit bedeuted also nicht, dass $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ausschließlich Zufallsvariablen mit stetiger Verteilung trägt.
Sei dazu U eine, unter P, auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariable. Dann können Bernoulli-Zufallsvariablen $B_{\frac{1}{2}}$ mit Hilfe von Indikatorfunktionen derart, $\mathbf{1}_{\{U \leq \frac{1}{2}\}}$, simuliert werden. Eine zweite, von $B_{\frac{1}{2}}$ unabhängige Bernoulli-Zufallsvariable erhält man durch, $B_{\frac{1}{2}}^{(2)} := \mathbf{1}_{\{U \leq \frac{1}{4}\} \cup \{U > \frac{3}{4}\}}$. Induktiv kann man so eine ganze Folge $(B_{\frac{1}{2}}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von solchen Zufallsvariablen erzeugen. Umgekehrt gewinnt man durch, $\tilde{U} := \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} B_{\frac{1}{2}}^{(k)}$ eine, unter P, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable zurück.
Von einem praktischen Standpunkt aus, sind Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungen wesentlich leichter zu handhaben.
Der folgende, extrem nützliche, Satz erklärt wie man Zufallsvariablen mit unstetigen Verteilungen durch Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungen, gleichgradig approximieren kann.

Satz 5.1.5 (Approximationssatz [13]) Sei $X \in L^1$, dann exisistiert eine Folge von stetig-verteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1$, für die gilt:
(i) $X_n \xrightarrow[f.s.]{n \to \infty} X$,
(ii) $X_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n \to \infty} X$,
(iii) $X^{\pm} - 1 \leq X_n^{\pm} \leq X^{\pm}$ P-f.s. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $D := \{x \in \mathbb{R} \mid P[X = x] > 0\}$, die Menge aller Unstetigkeitstellen (abzählbar) von F_X. Da $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ atomlos ist folgt mit Satz 5.1.4: Für alle $x \in D$ gibt es $U_x \in L^1$ mit,

$$U_x \sim \lambda_{[0, \frac{|x|}{2} \wedge 1]} \text{ bzgl. } P(\cdot \mid \{X = x\})$$

(U_x ist auf dem Intervall $[0, \frac{|x|}{2} \wedge 1]$, unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\cdot \mid \{X = x\})$, gleichverteilt). Jetzt definieren wir

$$X_n := X - \frac{1}{n} \sum_{x \in D} sgn(x) U_x \mathbf{1}_{\{X = x\}}$$

D.h. für $x \notin D$ gilt $X_n = X$ und für $x \in D$ wird ein zweites Zufallsexperiment $U_x \in [0, \frac{|x|}{2} \wedge 1]$ durchgeführt. Es ist dann sofort ersichtlich, dass gilt:

$\|X_n - X\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Zu zeigen ist zuerst, dass X_n stetig verteilt ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$P[X_n = y] = P[X_n = y, y \notin D] + P[X_n = y, X \in D]$$

$$= P[X = y, y \notin D] + P[\bigcup_{x\in D} \{X = x, x - \tfrac{1}{n} sgn(x)U_x = y\}]$$

$$= \sum_{x\in D} P[Z = y, U_x = sgn(x)n(x-y)]$$

$$= \sum_{x\in D} P[X = x]P[U_x = sgn(x)n(x-y) \mid \{X = x\}] = 0$$

Die vorletzte Gleichung gilt aufgrund der Bayes-Formel und die letzte nach definition von U_x. Wir kommen jetzt zur fast sicheren konvergenz, und benutzten Borel-Cantelli.
(i)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P[|X_n - X| > \epsilon] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x\in D} P[| - \tfrac{1}{n} sgn(x)U_x| > \epsilon,\ x \in D]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x\in D} P[X = x]P[U_x > \epsilon n \mid \{X = x\}]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x\in D} P[X = x](1 - \tfrac{\epsilon n \wedge (1\wedge|x|)}{1\wedge|x|})$$

$$= \sum_{\{n|\epsilon n < 1\wedge|x|\}} \sum_{x\in D} P[X = x](1 - \tfrac{\epsilon n \wedge (1\wedge|x|)}{1\wedge|x|})$$

$$\leq \sum_{\{n|\epsilon n < 1\wedge|x|\}} \sum_{x\in D} P[X = x] < \infty\ \forall \epsilon > 0.$$

(ii)

$$\|X_n - X\|_1 = \int | - \tfrac{1}{n} \sum_{x\in D} sgn(x)U_x \mathbf{1}_{A_x}|\ dP$$

$$= \tfrac{1}{n} \sum_{x\in D} P[X = x] \int U_x\ dP(\cdot \mid \{X = x\}) \leq \tfrac{1}{n} \sum_{x\in D} P[X = x] \leq \tfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(iii) Sollte klar sein, weil $| - \frac{1}{n} sgn(x)U_x \mathbf{1}_{A_x}| \leq 1$. □

5.2 Der Raum $ba(\Omega, \mathcal{F})$

Das Ziel von diesem Abschnitt ist es, die schwache Topologie auf L^∞ zu identifizieren. Dazu muss der Dualraum von L^∞ bestimmt werden. Vorher werden aus verständlichkeits-Gründen, Grundlagen der Integrationstheorie auf $ba(\Omega, \mathcal{F})$ aufgelistet. Für Details siehe [8].

Definition 5.2.1 (Der Raum aller beschränkten Ladungen $ba(\Omega, \mathcal{F})$)
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Wir bezeichnen mit $ba(\Omega, \mathcal{F})$, die Menge aller Abbildungen $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [-\infty, \infty]$, mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Seien $A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset$, dann gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
(iii) $\sup\limits_{A\in\mathcal{F}} |\mu(A)| < \infty$
Ein Element $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$ nennen wir eine *beschränkte Ladung* (endlich-additives, signiertes Maß).
Von einem theoretischen Standpunkt aus, kann man Ladungen wie signierte Maße behandeln. Das bedeutet, dass sich fast die gesamte Lebesquesche-Integrations-Theorie, auf $ba(\Omega, \mathcal{F})$ überträgt, wobei allerdings unterschiedliche Konvergenzbegriffe verwendet werden. Mit

$$\|\mu\|_{var} := |\mu|(\Omega) := \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega),$$

$$\mu^+(E) := \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq E,\ B \in \mathcal{F}\}\ , F \in \mathcal{F},$$

$$\mu^-(E) := -\inf\{\mu(F) \mid F \subseteq E,\ B \in \mathcal{F}\}\ , F \in \mathcal{F},$$

wird $ba(\Omega, \mathcal{F})$ zu einem normierten Vektorraum.

5.2.2 (Fakten über $ba(\Omega, \mathcal{F})$ [8])

(D-Integral) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ gegeben, wobei μ eine beschränkte Ladung ist. Dann sagen wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist D-integrierbar, falls eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen (endlicher Wertebereich) existiert, für die gilt:
(i) $f_n, n \geq 1$ konvergiert *diffus* gegen f, (siehe [8], 4.4.11)
(ii) $\lim\limits_{n,m\to\infty} D \int |f_n - f_m|\ d|\mu|$.

Wie schon erwähnt, gelten im wesentlichen die selben Regeln wie für das Lebesque-Integral.

(Absolute Stetigkeit) Seien $\mu, \nu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$. ν heißt absolut stetig bzgl. μ falls $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |\mu|(E) < \delta \Rightarrow |\nu|(E) < \epsilon \ \forall E \in \mathcal{F}$. Wir schreiben dafür $\nu \ll \mu$.

Ein entscheidener Unterschied zwischen $ba(\Omega, \mathcal{F})$ und $ca(\Omega, \mathcal{F})$ ist der folgende: Für $\mu, \nu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$, folgt aus $[\mu(E) = 0,\ E \in \mathcal{F} \Rightarrow \nu(E) = 0]$, im allgeminen nicht $\nu \ll \mu$.
Das hat Konsequenzen für den Satz von Radon-Nykodym (auf $ba(\Omega, \mathcal{F})$).

(Satz von Radon Nikodym) Seien $\mu, \nu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) $\nu \ll \mu$
(ii) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine einfache Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$:
$|\nu(E) - D \int_E f \ d\mu| < \epsilon \ \forall F \in \mathcal{F}$.

Im Fall eines Maßraumes (signiert) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ besagt der Satz von Radon-Nikodym, dass man $\nu \in ca(\Omega, \mathcal{F})$ mit der zu ν gehörenden Dichte $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1$ identifizieren kann, genau dann, wenn $\nu \ll \mu$. Im Fall von $\nu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$, kann man ν im allgemeinen nicht exakt mit einer D-integrierbaren Funktion identifizieren. So eine Funktion existiert im allgemeinen nicht (siehe. [8] 6.3.5).

Sei jetzt ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben, dann definieren wir,

$$ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}) := \{\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}) \mid \mu(N) = 0 \ \forall N \in \mathcal{N}\},$$

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} \mid P(N) = 0\} \text{ (Die Menge aller } P\text{-Nullmengen).}$$

Theorem 5.2.3 (Dualraum von $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$) ([8] 4.7.11)
Sei $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$der normierte Vektorraum aller bzgl. P essentiell-beschränkten Funktionen und $ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ definiert wie oben, dann gilt:

$$(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P))^* \cong ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}).$$

Für $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ und $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt, analog zum Raum $ca(\Omega, \mathcal{F}, P)$: $|D \int f d\mu| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_{var}$. Dadurch erhalten wir folgendes Corollar.

Corollar 5.2.4 (Schwache Topologie auf $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$)
$(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle_D)$ ist ein duales Paar, wobei

$$\langle X, \mu\rangle_D := D \int X \; d\mu \quad \forall X \in L^\infty, \; \forall \mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}).$$

Wenn man jetzt

$$\mathcal{M}_{1,f}(\mathcal{N}) := \{\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}) \mid \mu(\Omega) = 1, \; \mu(E) \geq 0 \; \forall E \in \mathcal{F}\}$$

interpretiert als Raum von “Wahrscheinlichkeits-Ladungen“, mit

$$E_\mu[X] := \langle X, \mu\rangle_D \; \forall \mu \in \mathcal{M}_{1,f}(P), \; \forall X \in L^\infty,$$

so erhält man als Corollar, folgenden Darstellungssatz für Risikomaße.

Theorem 5.2.5 (Darstellungssatz für konvexe Risikomaße auf L^∞)
Sei $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ ein konvexes Risikomaß, so hat ρ die folgende Darstellung,

$$\rho(X) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_{1,f}(\mathcal{N})} (E_\mu[-X] - \rho^*(-\mu)).$$

Beweis. Wir haben in Satz 1.3 gesehen, das Risikomaße auf L^∞, Lipschitz-stetig sind, also insbesondere stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Mit dem Satz von Mazur und 5.2.3 folgt, dass ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}))$ ist. Von hier an verläuft der Beweis analog zu Theorem 4.1.1 und wir erhalten

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{1,f}(\mathcal{N})} (E_\mu[-X] - \rho^*(-\mu)) \; \forall X \in L^\infty.$$

Eine analoge Argumentation zu Theorem 4.3.5 liefert uns die gewünschte Darstellung. □

Das folgende Theorem liefert die in Abschnitt 4.3 versprochene Darstellung für kohärente Risikomaße auf L^∞.

Korollar 5.2.6 (Darstellung kohärenter Risikomaße auf L^∞)
Sei $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ ein kohärentes Risikomaß, dann hat ρ eine Darstellung der Form,

$$\rho(X) = \max_{\mu \in \mathcal{C}_f} E_\mu[-X], \; \mathcal{C}_f := \{\mu \in \mathcal{M}_{1,f}(\mathcal{N}) \mid \rho^*(-\mu) = 0\}.$$

Abgesehen von der eleganten Darstellungsweise, stellt sich die Frage, welchen konstruktiven Wert solche Darstellungen besitzen. [8] 10.2.1 zeigt, dass jedes $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$ eine Zerlegung der Form, $\mu = \mu_c + \mu_p$ besitzt. Dabei ist $\mu_c \in ca(\Omega, \mathcal{F})$ und $\mu_p \in ca(\Omega, \mathcal{F})^{\perp}$, ist eine sogenannte *reine Ladung* (engl. pure charge)). In [7] wird bewiesen, dass ohne Verwendung des Auswahlaxioms, $\mu \in ca(\Omega, \mathcal{F})^{\perp}$ nicht konstruierbar ist. Das heißt solche Objekte existieren in ZF (ohne C) gar nicht.
Dass man aber auch von einem konstruktiven Standpunkt mit Elementen aus $ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ arbeiten kann, rechtfertigt der nächste Abschnitt.

5.3 Die adjungiert-bedingte Erwartung

Dieser Abschnitt wird zeigen, wenn man Elemente aus $ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ über endlich- erzeugte σ-Algebren bedingt, erhählt man Elemente aus $ca(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dazu muss aber erst erklärt werden, was "bedingen" von Elementen aus $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ überhaupt bedeutet.

Sei dazu X ein Vektorraum und $T : X \longrightarrow X$ ein linearer Operator, dann induziert T eine lineare Abbildung $T' : X^* \longrightarrow X^*$ mit $T'(x')(x) := x'(T(x))$ $\forall x \in X,\ \forall x' \in X^*$.
Für ein duales Paar $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und einen linearen Operator $T : X \longrightarrow X$, können wir also $T^* : Y \longrightarrow Y$ definieren durch, $\langle x, T^*(y) \rangle := \langle T(x), y \rangle$ $\forall x \in X,\ \forall y \in Y$. T^* heißt der zu T adjungierte Operator.

Definition 5.3.1 (adjungiert-bedingte-Erwartung) Gegeben $ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine unter-σ-Algebra, $E[\cdot \mid \mathcal{G}] : L^\infty \longrightarrow L^\infty$ sei die bedingte-Erwartung, dann wird durch

$$E^*[\cdot \mid \mathcal{G}] : ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}) \longrightarrow ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$$

$$\langle X, E^*[\mu \mid \mathcal{G}] \rangle_D := \langle E[X \mid \mathcal{G}], \mu \rangle_D \ \forall X \in L^\infty,\ \forall \mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}),$$

die adjungiert-bedingte-Erwartung definiert.

Proposition 5.3.2 (Bedingen unter endlich-erzeugten σ-Algebren [11]) Sei $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, ..., A_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine endlich-erzeugte unter-σ-Algebra und $E^*[\cdot \mid \mathcal{F}_n] : ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}) \longrightarrow ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ die adjungiert-bedingte-Erwartung über $\mathcal{F}_n$, dann gilt:

$\langle X, E^*[\mu \mid \mathcal{F}_n]\rangle_D = \langle X, \frac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP}\rangle \ \ \forall X \in L^\infty,\ \forall \mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$, mit

$$\frac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP} := \sum_{k=1}^n \frac{\mu(A_k)}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} \in L^\infty.$$

Beweis. Sei also $X \in L^\infty,\ \mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$, dann gilt
$\mathrm{D}\!\int X dE^*[\mu \mid \mathcal{F}_n] = \langle X, E^*[\mu \mid \mathcal{F}_n]\rangle_D = \langle E[X \mid \mathcal{F}_n], \mu\rangle_D = \mathrm{D}\!\int \sum_{k=1}^n \frac{E[X\mathbf{1}_{A_k}]}{P(A_k)} d\mu$
$= \sum_{k=1}^n \frac{E[X\mathbf{1}_{A_k}]}{P(A_k)} \mathrm{D}\!\int \mathbf{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \frac{\int X\mathbf{1}_{A_k} dP}{P(A_k)} \mu(A_k) = \int X \frac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP} dP$
$= \langle X, \frac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP}\rangle.$ □

5.4 Die Hardy-Littlewood-Ungleichung und maximale Korrelation

Theorem 5.4.1 (Hardy-Littlewood-Ungleichung) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit beliebigen Quantilfunktionen q_X und q_Y, dann gilt

$$\int_0^1 q_X(1-t) q_Y(t) dt \le E[XY] \le \int_0^1 q_X(t) q_Y(t) dt,$$

falls die jeweiligen Integrale wohldefiniert sind.

Definition 5.4.2 (Equi-Verteilungsklasse) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^p$, dann bezeichnen wir mit

$$\{\tilde{X} \sim X\} := \{\tilde{X} \in L^p \mid P^{\tilde{X}} = P^X\},$$

die equi-Verteilungsklasse von X.

Die Hardy-Littlewood-Ungleichung liefert eine obere- und eine untere Schranke für die Korrelation zweier Zufallsvariablen. Der folgende Satz beweist, dass auch Zufallsvariablen existieren, die diese Schranken annehmen.

Satz 5.4.3 (Maximale Korrelation [13]) Für einen atomlosen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $X \in L^p$, $Y \in L^q$, sowie $p \in [1, \infty]$ gilt,

$$\int_0^1 q_X(t) q_Y(t) dt = \sup_{\tilde{X} \sim X} E[\tilde{X} Y] = \sup_{\tilde{Y} \sim Y} E[X \tilde{Y}].$$

Beweis. Sei $X \in L^p,\ Y \in L^q$. Wegen der Hardy-Littlewood-Ungleichung folgt $\sup\limits_{\tilde{X}\sim X} E[\tilde{X}Y] \leq \int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt$.
1. Angenommen Y hat eine stetige Verteilung, dann gilt zum einen, $U := F_Y(Y)$ ist unter P auf $(0,1)$ gleichverteilt (5.1.2 (iii)). Zum anderen gilt nach Satz 5.1.2 (iv), $Y = q_Y(U)$ P-f.s.. Definieren wir $\tilde{X} := q_X(U)$, dann besagt 5.1.2 (i), dass $\tilde{X} \sim X$.
$\Rightarrow E[\tilde{X}Y] = E[\tilde{X}q_Y(U)] = E[q_X(U)q_Y(U)] = \int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt$. Also gilt "=".

2. Sei jetzt Y nicht notwendig stetig, dann existiert nach Proposition 5.1.5 eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^q$ mit stetigen Verteilungen und folgenden Eigenschaften: (i) $Y_n \xrightarrow[f.s.]{n\to\infty} Y$, (ii) $Y^\pm - 1 \leq Y_n^\pm \leq Y^\pm$
$\Rightarrow\ (q_X(U)q_{Y_n}(U)) \xrightarrow[f.s.]{n\to\infty} (q_X(U)q_Y(U))$ und $|q_X(U)q_{Y_n}(U)| \leq |q_X(U)q_Y(U)|$ f.s.
Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert:

$$\int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 q_X(t)q_{Y_n}(t)dt \underset{\text{(i)}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{\tilde{X}\sim X} E[\tilde{X}Y_n] \underset{\text{(ii)}}{=} \sup_{\tilde{X}\sim X} E[\tilde{X}Y].$$

(i) X_n ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt (i) wegen Teil 1.
(ii) Definieren wir $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Proposition 4.1.5 so folgt mit der Hölder-Ungleichung und (iv) in Prop. 4.1.5:

$$|E[\tilde{X}Y_n] - E[\tilde{X}Y]| = |E[\tilde{X}(Y - Y_n)]| \leq \|\tilde{X}\|_p \|Y - Y_n\|_q \leq \frac{1}{n}\|\tilde{X}\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Ein interessantes Risikomaß liefert die folgende Definition.

Definition 5.4.4 (Maximum-Korrelations-Risikomaß [5],[10]) Sei $X \in L^p,\ p \in [1,\infty]$ und $Q \in \mathcal{M}_1^q(P)$, dann wird durch

$$\rho_{max}(X) := \sup_{\tilde{Q}\sim Q} E_Q[-X],$$
$$\{\tilde{Q} \sim Q\} := \{\tilde{Q} \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \tfrac{d\tilde{Q}}{dP} \sim \tfrac{dQ}{dP}\}$$

ein kohärentes Risikomaß definiert.

Das vorgegebene Wahrscheinlichkeitsmaß Q nennt man das Basismaß (engl. baseline measure oder baseline distribution). ρ_{max} bestimmt also den Erwartungswert der Position X, über dem Wahrscheinlichkeitsmaß

$Q_o \in \{\tilde{Q} \sim Q\}$, welches bezüglich X maximal korreliert ist.
Der Fall, ρ_{max} definiert auf $L^p(\Omega, F, P, \mathbb{R}^d)$, ist zur Zeit aktuelles Forschungsobjekt (siehe z.B. [5] oder[10]).

6 Darstellung, stetigkeits-Eigenschaften und Fortsetzung von verteilungs-invarianten Risikomaßen auf L^p-Räumen

Dieses Kapitel behandelt verteilungs-invariante Risikomaße und deren Eigenschaften.
In Teil 6.1 wird gezeigt, dass die duale Darstellung von konvexen, verteilungs-invarianten Risikomaßen sich nicht nur über Wahrscheinlichkeitsmaße $Q \in \mathcal{M}_1^q(P)$ ausdrückt, sondern auch über die Quantilfunktionen der Position $X \in L^p$ und der Radon-Nykodym-Abeitung $\frac{dQ}{dP} \in L^q$ von Q. Die aus Teil 5.4 erbrachten Resultate über maximale Korrelation spielen dabei, für den Beweis dieser Darstellung, die ausschlaggebende Rolle. Grob gesagt, wird das Risiko der Position $X \in L^p$, über das zu X maximal-korrelierte Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \in \mathcal{M}_1^q(P)$ bestimmt.
In 6.2 wird bewiesen, dass konvexe, verteilungs-invariante Risikomaße auf L^∞ immer unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ sind. Dieses Resultat geht zurück auf [6] und kann als Meilenstein für die Theorie der Risikomaße angesehen werden.
Teil 6.3 zeigt, dass die aus 6.2 erbrachten Resultate sich nicht auf den Raum L^∞ beschränken, sondern in kanonischer Weise auf L^p-Risikomaße ($p \in [1, \infty]$) fortgesetzt werden können.

6.1 Darstellung verteilungs-invarianter, konvexer Risikomaße auf L^p-Räumen

Definition 6.1.1 (Verteilungs-invariante Funktion) Eine Funktion $f : L^p \to [-\infty, \infty]$ heißt verteilungs-invariant, falls gilt:

$$X, Y \in L^p,\ X \sim Y \Rightarrow f(X) = f(Y).$$

Definition 6.1.2 (Verteilungs-invariante Menge) Eine Teilmenge $C \subseteq L^p$ heißt verteilungs-invariant, falls folgendes gilt:

$$X \in L^p, Y \in C, X \sim Y \Rightarrow X \in C.$$

Bemerkung: Das maximal-korrelations Risikomaß aus Teil 5.4 ist ein Beispiel für eine verteilungs-invariante Funktion.
Ist $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ ein verteilungs-invariantes Risikomaß, so ist $\mathcal{A}_\rho$ eine verteilungs-invariante Menge.

Theorem 6.1.3 (Darstellung verteilungs-invarianter Risikomaße [3]) Sei $\rho : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$, $p \in [1, \infty]$, ein konvexes, $\sigma(L^p, L^q)$-unterhalb-stetiges Rsikomaß. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) ρ ist verteilungs-invariant.

(ii) ρ^* ist verteilungs-invariant.

(iii) $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1^q(P)} (\int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t) dt - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$; $\forall X \in L^p$

$\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t) dt \ \forall \frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii): Ist ρ verteilungs-invariant, so ist auch $\mathcal{A}_\rho$ verteilungs-invariant, wie schon bemerkt. Unter verwendung von Theorem 4.1.1 und Satz 5.4.3 erhält man:

$$\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E[-X \frac{dQ}{dP}] = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \sup_{\tilde{X} \sim X} E[-\tilde{X} \frac{dQ}{dP}]$$
$$= \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t) dt \Rightarrow \rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \rho^*(-\frac{d\tilde{Q}}{dP}) \ \forall \ \frac{dQ}{dP} \sim \frac{d\tilde{Q}}{dP}.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii): $L^q_{+,1}$ ist verteilungs-invariant. Ist ρ^* verteilungs-invariant, so liefern Theorem 4.1.1 und Satz 5.4.3:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1^q(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP})) = \sup_{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}} (E[-X \frac{dQ}{dP}] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$$
$$= \sup_{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}} \sup_{\frac{d\tilde{Q}}{dP} \sim \frac{dQ}{dP}} (E[-X \frac{d\tilde{Q}}{dP}] - \rho^*(-\frac{d\tilde{Q}}{dP})) = \sup_{\frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}} (\int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t) dt - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$$
$$= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1^q(P)} (\int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t) dt - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$$

$\Rightarrow$ ρ ist verteilungs-invariant (siehe (iii)$\Rightarrow$(i)) und deshalb, analog wie im ersten Teil des Beweises:

$$\rho^*(-\frac{dQ}{dP}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t) dt \ \forall \frac{dQ}{dP} \in L^q_{+,1}$$

(iii)$\Rightarrow$(i): Sei $X \in L^p$ und $\tilde{X} \sim X$ dann gilt, $F_X = F_{\tilde{X}} \Rightarrow q_X = q_{\tilde{X}}$. $\square$

6.2 $\sigma(L^\infty, L^1)$-unterhalb-Stetigkeit von verteilungs-invarianten, konvexen Risikomaßen auf L^∞

Der folgende Satz geht zurück auf [6], für einen detailierten Beweis verweise ich auf [12].

Satz 6.2.1 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine Wahrscheinlichkeitsraum ohne Atome und sei $C \subseteq L^\infty$ verteilungs-invariant, konvex und abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$, dann gilt für alle unter-σ-Algebren $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ und für alle $X \in C$:

$$E[X \mid \mathcal{G}] \in C.$$

Die folgende Proposition ist der Eckstein zum Beweis der $\sigma(L^\infty, L^1)$-unterhalb-Stetigkeit von konvexen, verteilungs-invarianten Risikomaßen. Die in 5.2 und 5.3 erarbeiteten Resultate über $ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ und die adjungiert-bedingte-Erwartung fließen hier in den Beweis mit ein.

Proposition 6.2.2 [11] Sei $C \subseteq L^\infty$ verteilungs-invariant, konvex und abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Dann ist C abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^\infty, L^\infty)$.

Beweis. Sei $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, ..., A_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine endlich-erzeugte unter-σ-Algebra und $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq C$ ein Netz für das gilt $X_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\sigma(L^\infty, L^\infty)} X$. Das bedeuted $\langle X_\lambda, Y\rangle \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \langle X, Y\rangle\ \forall Y \in L^\infty$.

Für alle $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ gilt nach Proposition 5.3.2: $\frac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP} \in L^\infty$.

$$\Rightarrow \langle X_\lambda, \tfrac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP}\rangle \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \langle X, \tfrac{dE^*[\mu|\mathcal{F}_n]}{dP}\rangle\ \forall \mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$$

$$\Leftrightarrow \langle E[X_\lambda \mid \mathcal{F}_n], \mu\rangle_D = \langle X_\lambda, E^*[\mu \mid \mathcal{F}_n]\rangle_D$$

$$\xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \langle X, E^*[\mu \mid \mathcal{F}_n]\rangle_D = \langle E[X \mid \mathcal{F}_n], \mu\rangle_D \ \ \forall \mu \in ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$$

$$\Leftrightarrow E[X_\lambda \mid \mathcal{F}_n] \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\sigma(L^\infty, ba(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{N}))} E[X \mid \mathcal{F}_n], \text{ mit } (E[X_\lambda \mid \mathcal{F}_n])_{\lambda\in\Lambda} \subseteq C \text{ (nach 6.2.1).}$$

Der Satz von Mazur besagt:

C ist konvex und abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow C$ ist konvex und abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^\infty, ba(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N}))$.
Das impliziert, dass $E[X \mid \mathcal{F}_n] \in C \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Also ist $(E[X \mid \mathcal{F}_n])_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ und damit analog zu Beispiel 1.1.6:
$\|X - E[X \mid \mathcal{F}_n]\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Weil C $\|\cdot\|_\infty$-abgeschlossen ist, gilt $X \in C$. □

Theorem 6.2.3 (Stetigkeits- und Darstellungssatz auf L^∞ [11])
Sei
$\rho : L^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ ein konvexes, verteilungs-invariantes Risikomaß, dann ist ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ genau dann, wenn

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_1(P)} \left(\int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t)dt - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})\right) \ \forall X \in L^\infty$$
$$\rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t)dt \ \forall \tfrac{dQ}{dP} \in L^1_{+,1}.$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ ist. Nach Satz 1.3, ist ρ $\|\cdot\|_\infty$-stetig und damit
$\mathcal{A}_\rho = \{X \in L^\infty \mid \rho(X) \leq 0\}$, $\|\cdot\|_\infty$-abgeschlossen. A_ρ ist offensichtlich verteilungs-invariant und damit $\sigma(L^\infty, L^\infty)$-abgeschlossen (nach Prop. 6.2.2). Das heißt insbesondere, dass A_ρ abgeschlossen bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ ist, was nach Lemma 4.1.2 impliziert, dass ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ ist. □

6.3 Fortsetzung von verteilungs-invarianten, konvexen Risikomaßen

Theorem 6.3.1 (Fortsetzungssatz) [11] Sei $p \in [1, \infty]$ und $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ ein konvexes, verteilungs-invariantes Risikomaß. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\hat{\rho} : L^p \longrightarrow]-\infty, \infty]$ von ρ, gegeben durch:

$$\hat{\rho}(X) := \sup_{Y\in L^q} (\langle X, Y\rangle - \rho^*(X)) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_1^q(P)} \left(\int_0^1 q_{-X}(t) q_{\frac{dQ}{dP}}(t)dt - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})\right)$$

$\hat{\rho}$ besitzt folgende Eigenschaften:
(i) $\hat{\rho}|_{L^\infty} = \rho$.
(ii) $\hat{\rho}^* = \rho^*|_{L^q}$
(iii) $\hat{\rho}$ und $\hat{\rho}^*$ sind verteilungs-invariant.

Beweis. (i) Da ρ verteilungs-invariant ist, ist ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^\infty)$, also insbesondere unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$, d.h:

$\rho(X) = \sup\limits_{Y\in L^\infty}(\langle X,Y\rangle - \rho^*(X)) = \sup\limits_{Y\in L^1}(\langle X,Y\rangle - \rho^*(X))\ \forall X \in L^\infty$
$\Rightarrow \rho(X) \leq \hat{\rho}(X) = \sup\limits_{Y\in L^q}(\langle X,Y\rangle - \rho^*(X)) \leq \rho(X)\ \forall X \in L^\infty$
$\Rightarrow \hat{\rho}|_{L^\infty} = \rho$.
(ii) ρ^* ist unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^\infty)$, weil ρ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^\infty)$ ist (Lemma 3.2.2). Sei jetzt $Y \in L^q$, dann folgt:
$\rho^*(Y) = \sup\limits_{X\in L^\infty}(\langle X,Y\rangle - \rho(X)) \underset{\text{(i)}}{=} \sup\limits_{X\in L^\infty}(\langle X,Y\rangle - \hat{\rho}(X)) = \hat{\rho}^*(Y)$
$\Rightarrow \hat{\rho}^* = \rho^*|_{L^q}$
(iii) $\hat{\rho}(X) := \sup\limits_{Y\in L^q}(\langle X,Y\rangle - \rho^*(X)) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{M}_1^q(P)}(E_Q[-X] - \rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$
$= \sup\limits_{Q\in\mathcal{M}_1^q(P)} \sup\limits_{\frac{d\tilde{Q}}{dP}\sim\frac{dQ}{dP}}(E_Q[-X]-\rho^*(-\frac{dQ}{dP})) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{M}_1^q(P)}(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\frac{dQ}{dP}}(t)dt-\rho^*(-\frac{dQ}{dP}))$
Das bedeuted aber $\hat{\rho}$ ist verteilungs-invariant. Analog folgt die Verteilungsinvarianz von $\hat{\rho}^*$. Um die Eindeutigkeit von $\hat{\rho}$ zu zeigen, brauchen wir folgendes Resultat aus [14] (Lemma B. 8): Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ und $\rho_o : L^p \to \mathbb{R}$ sei ein konvexes, verteilungs-invariantes Risikomaß, dann gilt: $\rho_o(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq \rho_o(X)$. (*)

Sei $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, ..., A_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine endl. erzeugte σ-unter-Algebra und $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.
Eindeutigkeit:
Sei $g : L^p \to]-\infty,\infty]$ eine beliebige Erweiterung von ρ, welche die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt, dann gilt zum einen $g(E[X \mid \mathcal{F}_n]) \leq g(X)$ $\forall X \in L^p$ (wegen (*)).
Andererseits ist $g|_{L^\infty} = \rho$ unterhalb-stetig bzgl. $\sigma(L^\infty, L^\infty)$
$\Rightarrow g(X) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} g(E[X \mid \mathcal{F}_n])\ \forall X \in L^p$, weil $E[X \mid \mathcal{F}_n] \in L^\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Diese Argumente gelten natürlich auch für $\hat{\rho}$.
$\Rightarrow g(X) = \lim\limits_{n\to\infty} g(E[X \mid \mathcal{F}_n]) \underset{\text{(i)}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \rho(E[X \mid \mathcal{F}_n]) = \hat{\rho}(X)$.

7 Zwei wichtige Beispiele

In diesem Kapitel werden abschließend zwei wichtige Beipiele von Risikomaßen vorgestellt. Zum einen das $AV@R$-Risikomaß und zum anderen das Shortfall-Risikomaß. Ersteres ist eine "kommulierte Version" des $V@R$, welches zudem noch kohärent ist. Zweiteres dient gewissermaßen dazu, dass Risiko unter Risikoaversion zu bestimmen. D.h., die möglichen Verluste einer Position $X \in L^p$ werden durch eine wachsende, konvexe Funktion $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höher bewertet als sie tatsächlich sind.

7.1 Average-Value-at-Risk ($AV@R$)

Definition 7.1.1 (Average-Value-at-Risk ($AV@R$)) Sei $\alpha \in (0,1]$, dann definieren wir

$$\rho_\alpha : L^p \to \mathbb{R},\ \rho_\alpha(X) := -\tfrac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X^-(t)dt$$

und nennen ρ_α den Average Value at Risk.

Um zu zeigen, dass $AV@R$ subadditiv ist, beweise ich das $AV@R$ ein maximalkorrelations-Risikomaß mit einer bernoulli-α-Basisverteilung ist. Die Idee dazu stammt aus [5] Example 2.5.

Theorem 7.1.2 (Kohärenz $AV@R$) Für $\alpha \in (0,1],\ p \in [1,\infty]$, ist

$$\rho_\alpha : L^p \to \mathbb{R},\ \rho_\alpha(X) := -\tfrac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X^-(t)dt$$

ein verteilungs-invariantes, endliches, kohärentes, $\|\cdot\|_p$-stetiges Risikomaß.

Beweis. Sei $X \in L^p$ und $U \sim \lambda_{[0,1]}$ $[P]$, dann gilt,

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(X) &= -\tfrac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X^-(t)dt = -\tfrac{1}{\alpha}\int q_X^-(t)\mathbf{1}_{(0,\alpha]}(t)dt \\ &= -\tfrac{1}{\alpha}\int -q_{-X}^+(1-t)\mathbf{1}_{(0,\alpha]}(t)dt = \tfrac{1}{\alpha}\int q_{-X}^+(t)\mathbf{1}_{[1-\alpha,1)}(t)dt \\ &= \tfrac{1}{\alpha}\int q_{-X}^+(U)\mathbf{1}_{\{U\geq 1-\alpha\}}dP \end{aligned}$$

Wir definieren $\mathbf{1}_{\{U\geq\alpha\}} := B_\alpha$, dann gilt $P[B_\alpha = 0] = 1-\alpha,\ P[B_\alpha = 1] = \alpha$ (B_α ist unter P bernoulli-α-verteilt).

$$\Rightarrow F_{B_\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-\alpha, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (F_{B_\alpha} \text{ ist die Verteilungsfunktion von } B_\alpha)$$

$$\Rightarrow q^+_{B_\alpha}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, 1-\alpha) \\ 1, & t \in [1-\alpha, 1) \end{cases} = \mathbf{1}_{[1-\alpha,1)}(t) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \rho_\alpha(X) = \tfrac{1}{\alpha} \int q^+_{-X}(U)\mathbf{1}_{\{U \geq 1-\alpha\}} dP \underset{(*)}{=} \tfrac{1}{\alpha} \int q^+_{-X}(U) q^+_{B_\alpha}(U) dP$$
$$= \sup_{\tilde{B}_\alpha \sim B_\alpha} E[-XB_\alpha]$$

Wobei die letzte Gleichung aus Satz 5.4.3 folgt. Zur sublinearität von ρ_α :

$$\rho_\alpha(X+Y) = \sup_{\tilde{B}_\alpha \sim B_\alpha} E[-(X+Y)B_\alpha] = \sup_{\tilde{B}_\alpha \sim B_\alpha} (E[-XB_\alpha] + E[-YB_\alpha])$$
$$\leq \rho_\alpha(X) + \rho_\alpha(Y).$$

Stetigkeit gilt aufgrund der Endlichkeit. Die anderen Eigenschaften sollten klar sein. □

Das folgende Theorem bestimmt eine duale Darstellung von $AV@R$. Für den Fall $p = \infty$ siehe [3].

Theorem 7.1.3 (Duale Darstellung des $AV@R$ [3],[9])

$$\rho_\alpha : L^p \to \mathbb{R}, \ \rho_\alpha(X) := \tfrac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^{1} q_{-X}(t)dt, \ p \in [1, \infty),$$

besitzt die duale Darstellung,

$$\rho_\alpha(X) = \max_{Q \in \mathcal{C}^q_\alpha} E_Q[-X], \text{ mit } \mathcal{C}^q_\alpha := \{Q \in \mathcal{M}^q_1(P) \mid \tfrac{dQ}{dP} \leq \tfrac{1}{\alpha}\}.$$

Beweis. Nach Satz 4.2.2 und 4.3.4 hat ρ_α eine Darstellung der Form (ρ_α ist endlich).

$$\rho_\alpha(X) = \max_{Q \in \mathcal{C}^q} E_Q[-X], \text{ mit } \mathcal{C}^q := \{Q \in \mathcal{M}^1_q(P) \mid \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = 0\}.$$

Angenommen es existiert ein $Q_o \in \mathcal{C}^q$ und $Q_o \notin \mathcal{C}^q_\alpha$, dann ex. $\alpha' \in (0, \alpha)$: $P[\frac{dQ_o}{dP} \geq \frac{1}{\alpha'}] > 0$.
Wir definieren $Y_o := -\mathbf{1}_{\{\frac{dQ_o}{dP} \geq \frac{1}{\alpha'}\}} \frac{dQ_o}{dP}$
$\Rightarrow P[Y_o \neq 0] = P[\frac{dQ_o}{dP} \geq \frac{1}{\alpha'}] \underset{Tscheby.}{\leq} \alpha' < \alpha.$
Da $Y_o \sim q^-_{Y_o}(U)$ (bzgl. P), folgt: $q^-_{Y_o}(t) = 0 \ \forall t \in [\alpha, 1)$. (*)
Einerseits gilt jetzt:

$$\rho_\alpha(Y_0) = -\tfrac{1}{\alpha} \int q^-_{Y_o}(U)\mathbf{1}_{\{U \leq \alpha\}} dP \underset{(*)}{=} -\tfrac{1}{\alpha} \int q^-_{Y_o}(U) dP = -\tfrac{1}{\alpha} E[Y_o].$$

Und andererseits:

$$E_{Q_0}[-Y_o] = \int -Y_o \frac{dQ_o}{dP} dP$$

$$= \int \mathbf{1}_{\{\frac{dQ_o}{dP} \geq \frac{1}{\alpha'}\}} \frac{dQ_o}{dP} \frac{dQ_o}{dP} dP \geq \frac{1}{\alpha'} \int \mathbf{1}_{\{\frac{dQ_o}{dP} \geq \frac{1}{\alpha'}\}} \frac{dQ_o}{dP} dP = \frac{1}{\alpha'} E[-Y_o]$$

$\Rightarrow 0 = \rho^*(-\frac{dQ_o}{dP}) = \sup_{X \in L^p} (E_{Q_o}[-X] - \rho(X)) \geq E[-Y_o] - \rho_\alpha(Y_o)$
$\geq \frac{1}{\alpha'} E[-Y_o] - \frac{1}{\alpha} E[-Y_o] > 0. \lightning$ $\square$

Corollar 7.1.4 (Fortsetzung des AV@R) Gegeben sei

$$\rho_\alpha : L^\infty \to \mathbb{R},\ \rho_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^{1} q_{-X}(t) dt,$$

dann existiert für jedes $p \in [1, \infty]$, eine Erweiterung $\hat{\rho}_\alpha : L^p \to] - \infty, \infty]$ von ρ_α, für die gilt,

$$\hat{\rho}_\alpha(X) := \max_{Q \in \mathcal{C}_\alpha^q} E_Q[-X],\ \mathcal{C}_\alpha^q := \{Q \in \mathcal{M}_1^q(P) \mid \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{a}\}$$

Beweis. Wir definieren $\mathcal{D}_\alpha^q := \{\frac{dQ}{dP} \in L_{1,+}^q \mid Q \in \mathcal{C}_\alpha^q\}$. Nach Satz 4.2.2 und 7.1.3 gilt, $\rho_\alpha^* = \mathbf{I}_{\mathcal{D}_\alpha^1}$. Und Satz 6.3.1 besagt: $\hat{\rho}^* = \rho_\alpha^*|_{L^q} = \mathbf{I}_{\mathcal{D}_\alpha^q}$.
$\Rightarrow \hat{\rho}(X) = \max_{\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{D}_\alpha^q(P)} E[-X \frac{dQ}{dP}] = \max_{Q \in \mathcal{C}_\alpha^q} E_Q[-X]\ \forall X \in L^p.$ $\square$

7.2 Shortfall-Risiko

7.2.1 (Shortfall-Risiko) Sei $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante, wachsende, konvexe Funktion, mit $0 \in ran(l)$.

$$\mathcal{A} := \{X \in L^p \mid E_Q[l(-X)] \leq 0\},$$

dann wird durch $\rho_\mathcal{A} : L^p \to] - \infty, \infty]$,

$$\rho_\mathcal{A}(X) := \inf\{m \in] - \infty, \infty] \mid E_Q[l(-(X + m))] \leq 0\},$$

ein convexes Risikomaß definiert.

Beweis. Da $0 \in ran(l)$, gilt $-\infty < \rho_\mathcal{A}(0) = \{m \in] - \infty, \infty] \mid E_Q[l(-m)] \leq 0\} < \infty$ Cash-invarianz folgt direkt aus der definition von $\rho_\mathcal{A}$. Konvexität und Monotonie, folgen aus der Konvexität von l. $\square$

Theorem 7.2.2 (Darstellung: Shortfall-Risiko [3],[9]) $\rho_{\mathcal{A}}(X) : L^p \to \mathbb{R}$ hat eine Darstellung der Form

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) := \sup_{Q \in \mathcal{M}_1^q(P)} (E_Q[-X] - \rho^*(-\tfrac{dQ}{dP})), \text{ mit}$$

$$\rho_{\mathcal{A}}^*(-\tfrac{dQ}{dP}) := \inf_{\lambda>0} \tfrac{1}{\lambda} E_Q[l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP})] \ \forall \tfrac{dQ}{dP} \in \mathcal{D}^q := \{\tfrac{dQ}{dP} \in L^1_{+,1} \mid Q \in \mathcal{M}_1^q(P)\}.$$

Beweis. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \cdot)$ ist ein duales Paar mit der gewöhnlichen multiplikation, dann folgt, zusammen mit der unterhalb-stetigkeit von l (wachsende, konvexe Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind unterhalb-stetig):

$l(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}}(xy - l^*(y)) \Rightarrow xy \leq l(x) + l^*(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Sei $\mathcal{A}^p_{\rho_{\mathcal{A}}} := \{X \in L^p \mid \rho_{\mathcal{A}}(X) \leq 0\}$, dann gilt für $\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{D}^q$ (definiert wie oben):

$$-X\tfrac{dQ}{dP} = \tfrac{1}{\lambda}(-X)(\lambda \tfrac{dQ}{dP}) \leq \tfrac{1}{\lambda}(l(-X) + l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP}))$$
$$\Rightarrow E[-X] \leq \tfrac{1}{\lambda}(E[l(-X)] + E[l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP})])$$
$$\Rightarrow \rho_{\mathcal{A}}^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = \sup_{X \in \mathcal{A}^p_{\rho_{\mathcal{A}}}} E[-X] \leq \tfrac{1}{\lambda} E[l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP})]$$
$$\Rightarrow \rho_{\mathcal{A}}^*(\tfrac{dQ}{dP}) \leq \inf_{\lambda>0} E[l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP})]$$

Eine lange Rechnung in [3] 4.9 Theorem 4.106 zeigt:

$$\sup_{X \in \mathcal{A}^\infty_{\rho_{\mathcal{A}}}} E_Q[-X] \geq \inf_{\lambda>0} \tfrac{1}{\lambda} E[l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP})]$$

$$\Rightarrow \rho_{\mathcal{A}}^*(\tfrac{dQ}{dP}) = \sup_{X \in \mathcal{A}^p_{\rho_{\mathcal{A}}}} E_Q[-X] \geq \sup_{\mathcal{A}^\infty_{\rho_{\mathcal{A}}}} E_Q[-X] \geq \inf_{\lambda>0} \tfrac{1}{\lambda} E[l^*(\tfrac{dQ}{dP})]. \qquad \square$$

Beispiel 7.2.3 (Relative Entropie) Sei $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l(x) := exp(x)$ dann gilt,

$$\rho_{\mathcal{A}}^*(-\tfrac{dQ}{dP}) = E_Q[log(\tfrac{dQ}{dP})],$$
$$\mathcal{A} := \{X \in L^p \mid E_Q[exp(-X)] \leq 0\}.$$

Beweis. Nach Beispiel 3.2.1 (iii) gilt: $l^*(y) = ylog(y) - y$

$$\Rightarrow \rho^*(\tfrac{dQ}{dP}) = \inf_{\lambda>0} \tfrac{1}{\lambda} E[\lambda \tfrac{dQ}{dP} log(\lambda \tfrac{dQ}{dP}) - \lambda \tfrac{dQ}{dP}]$$

$$= \inf_{\lambda>0} E[\tfrac{dQ}{dP}(\tfrac{log(\lambda)+log(\frac{dQ}{dP})}{\lambda} - 1)] = E[\tfrac{dQ}{dP} log(\tfrac{dQ}{dP})] - 1 = E_Q[log(\tfrac{dQ}{dP})] - 1 \quad \square$$

8 Referenzen

(1) Barbu, V. and Precupanu, Th. (1986), Convexity and Optimization in Banach Spaces, 2nd Edition, D. Reidel Publishing Company

(2) Delbaen, F. (2000), Coherent Risk Measures on General Probability Spaces, Preprint, E.T.H. Zurich

(3) Föllmer, H. and Schied, A. (2004), Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time, 2nd Edition, de Gruyter Studies in Mathematics 27.

(4) Fritelli, M. and Gianin R. (2002), Putting Order in Risk Measures, Journal of Banking and Finance Vol. 26 pp.1473-1486

(5) Galichon, A. , Ekeland, I. and Henry M. (2012), Comonotonic measures of multivariate risks, Mathematical Finance Vol. 22, pp. 109?132

(6) Jouini, E., Schachermayer, W. and Touzi, N. (2006), Law-Invariant Risk Measures have the Fatou Property, Advances in Mathematical Economics, Vol. 9, 49-71.

(7) Lauwers, L. (2010) Purely finitely additive measures are non-constructible objects, Center for Economic Studies, K.U.Leuven Naamsestraat 69, B-3000 Leuven, BELGIUM

(8) Rao, K.B. and Rao M. B. (1983), Theory of Charges, A Study of Finitely Additive Measures, Academic Press

(9) Rüschendorf, L. and Kaina, M. (2009), On Convex Risk Measures on L^p- spaces, Math. Methods Oper. Res., 69 no. 3, 475-495.

(10) Rüschendorf, L. (2012), Worst case portfolio vectors and diversification effects, Finance and Stochastics Vol. 16 (1), pp. 155-175,

(11) Svindland, G. and D. Filipovic (2009), The Canonical Model Space for Law-invariant Convex Risk Measures is L^1. Mathematical Finance, forthcoming.

(12) Svindland, G. (2010), Continuity Properties of Law-Invariant (Quasi-) Convex Risk Functions, Mathematics and Financial Economics, forthcoming

(13) Svindland, G. (2010), Subgradients of Law-Invariant Convex Risk Measures on L^1, Statistics and Decisions, 27, 169-199.

(14) Svindland, G. and D. Filipovic (2007), Convex risk measures on L^p, working paper

(15) Werner, D. (2002), Funktionalanalysis, Springer, 4. Auflage

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig, ohne fremde Hilfe angefertigt worden ist. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen worden sind, wurden als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum   Unterschrift