

WESTFÄLISCHE
WILHELMUS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



FACHBEREICH 10
MATHEMATIK UND
INFORMATIK

Maren Urner

Eine Einführung in die Theorie der großen Abweichungen und ihre Anwendung im Kreditrisikomanagement

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des Grades Bachelor of Science

Institut für Mathematische Statistik

Betreuer: PD Dr. Volkert Paulsen

Abgabedatum: 09.10.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Der Satz von Cramér - ein Prinzip großer Abweichungen	4
2.1 Der Satz von Cramér	4
2.2 Das Prinzip großer Abweichungen	11
2.3 Die exponentielle Maßtransformation - ein Exkurs	12
3 Große Abweichungen im homogenen Einfaktor-Kreditrisikomodell	16
3.1 Das homogene Einfaktor-Kreditrisikomodell	16
3.2 Unabhängige Kredite	18
3.3 Abhängige Kredite	19
4 Schätzung von Wahrscheinlichkeiten mit Monte Carlo Methoden	35
4.1 Importance Sampling - die Idee	35
4.2 Importance Sampling	36
4.3 Konstruktion asymptotisch optimaler Importance Sampling Schätzer . .	38
4.3.1 Anwendung auf ein unabhängiges Kreditportfolio	38
4.3.2 Anwendung auf ein abhängiges Kreditportfolio	39
5 Fazit und Ausblick	44
6 Anhang	45
7 Literaturverzeichnis	47

1 Einleitung

Die Theorie der großen Abweichungen beschäftigt sich - grob gesagt - mit der Asymptotik von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse. Man hat also, wie z.B. im schwachen Gesetz der großen Zahlen, eine Folge von Wahrscheinlichkeiten vorliegen, die gegen Null konvergiert, und versucht die Konvergenzgeschwindigkeit mittels einer exponentiellen Rate und einer Ratenfunktion zu quantifizieren. In dieser Arbeit soll insbesondere der Satz von Cramér vorgestellt werden, der eine Möglichkeit aufzeigt, in gewissen Fällen eine solche Quantifizierung vorzunehmen. Im Beweis dieses Satzes werden wir mit exponentieller Maßtransformation arbeiten, d.h. wir werden das Wahrscheinlichkeitsmaß so transformieren, dass die seltenen Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit gesucht ist, typisch werden. Diese Idee wird uns durch die ganze Arbeit begleiten.

Gerade im Kreditrisikomanagement ist man daran interessiert Wahrscheinlichkeiten extrem seltener Ereignisse möglichst genau bestimmen zu können. Ein solches, seltenes Ereignis kann beispielsweise der Ausfall sehr vieler hoch gerateter Kredite in einem Portfolio sein, der dann zu einem dementsprechend hohen Verlust führt. Da Kreditportfolios häufig sehr groß sind, können asymptotische Resultate, wie sie die Theorie großer Abweichungen gibt, zur näherungsweisen Berechnung von Wahrscheinlichkeiten solcher seltenen Ereignisse herangezogen werden. Der Satz von Cramér beispielsweise gibt eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem sehr großen Kreditportfolio deutlich mehr Kredite ausfallen als erwartet. Er setzt dabei jedoch die Unabhängigkeit der Kredite voraus. Gerade die Subprime-Krise hat aber gezeigt, dass Abhängigkeiten innerhalb eines Portfolios eine nicht zu unterschätzende Rolle spielen, wenn man Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten großer Verluste treffen möchte.

Wir werden daher in Kapitel 3 ein Kreditrisikomodell einführen, mit dem wir ein Portfolio abhängiger Kredite modellieren können. Anschließend werden wir zwei Sätze über die Asymptotik von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse in abhängigen Kreditportfolios beweisen. Es wird sich jedoch herausstellen, dass die Resultate weniger Relevanz für die direkte Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten für den Ausfall vieler Kredite in großen Portfolios haben als vielmehr für die Schätzung dieser Wahrscheinlichkeiten mittels Monte Carlo Simulation bzw. Importance Sampling. Mit ihrer Hilfe gelingt es nämlich, asymptotisch optimale Importance Sampling Schätzer zu finden, also Schätzer, mit denen man Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse mit verhältnismäßig wenigen Simulationen verhältnismäßig genau bestimmen kann. Die Methode des Importance Sampling und das Problem der Bestimmung asymptotisch optimaler Schätzer werden wir in Kapitel 4 thematisieren.

2 Der Satz von Cramér - ein Prinzip großer Abweichungen

2.1 Der Satz von Cramér

Ein prominentes Beispiel für ein sog. Prinzip großer Abweichungen¹ ist der Satz von Cramér, der von seinem Namensgeber Carl Harald Cramér 1938 für Zufallsvariablen mit Dichten gezeigt und 1952 von Herman Chernoff verallgemeinert wurde. Er sagt aus, dass sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[S_n \geq nx]$, wenn S_n die n -te Partialsumme einer Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen bezeichnet und nx größer als der Erwartungswert von S_n ist, unter bestimmten Bedingungen für große n etwa so verhält wie $C(n)e^{-nI(x)}$. Dabei ist $I(x)$ eine Ratenfunktion, die von der Verteilung der unabhängigen Zufallsvariablen bestimmt wird, und $C(n)$ eine subexponentielle Funktion (d.h. eine Funktion für die gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C(n)}{n} = 0$), über deren nähere Gestalt der Satz aber keine Aussage macht.² In Anlehnung an Löwe, der ihn als Theorem 1.6 aufführt, und König(2006), bei dem er als Satz 1.4.3 vorkommt, soll der Satz von Cramér hier vorgestellt und bewiesen werden.

2.1 Satz (von Cramér)

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit identischer Verteilung \mathbb{P}^{X_1} und momenterzeugender Funktion

$$\phi_{X_1}(t) := \mathbb{E}[e^{tX_1}] < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt für alle $x > \mathbb{E}[X_1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq nx] = -I(x),$$

wobei

$$I(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \ln \phi_{X_1}(t)]$$

die sogenannte Legendre-Transformierte von $\ln \phi_{X_1}(t)$ ist.

2.2 Bemerkung

Für diese Arbeit setzen wir $\ln x = -\infty$ genau dann, wenn $x = 0$.

Für den Beweis des Satzes von Cramér zeigen wir im folgenden Lemma zunächst zwei grundsätzliche Eigenschaften der momenterzeugenden Funktion, die wir auch an anderen Stellen in dieser Arbeit benutzen werden.

2.3 Lemma

Sei X_1 eine Zufallsvariable mit endlicher momenterzeugender Funktion ϕ_{X_1} und sei \mathbb{P}^{X_1} die Verteilung der Zufallsvariable X_1 . Dann gilt:

¹ Die genaue Definition eines Prinzips großer Abweichungen geben wir in 2.10.

² Die genaue Gestalt von C ist schwer zu bestimmen. Aus diesem Grund schreibt man üblicherweise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq nx] = -I(x)$ statt $\mathbb{P}[S_n \geq nx] \sim C(n)e^{-nI(x)}$ (vgl. Bucklew (2004, S. 27)).

1. ϕ_{X_1} ist unendlich oft differenzierbar mit

$$\phi_{X_1}^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

2. ϕ_{X_1} ist strikt konvex, sofern X_1 nicht Dirac-verteilt mit $\mathbb{P}[X_1 = 0] = 1$ ist.

Um dieses Lemma beweisen zu können, brauchen wir ein Lemma über die Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung, das beispielsweise von Klenke (2008) als Differentiationslemma (Satz 6.28) aufgeführt wird.

2.4 Lemma (Differentiationslemma)

Sei $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein nichttriviales, offenes Intervall. Sei zudem $f : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

1. für jedes $t \in I$ ist $(x \mapsto f(x, t)) \in \mathcal{L}^1(\bar{\mu})$,
2. für fast alle $x \in \bar{\Omega}$ ist $I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar, wobei wir die Ableitung mit f' bezeichnen,
3. $h := \sup_{t \in I} |f'(\cdot, t)| \in \mathcal{L}^1(\bar{\mu})$.

Dann gilt: Für jedes $t \in I$ ist $f'(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\bar{\mu})$ und die Funktion $F : t \mapsto \int f(x, t) \bar{\mu}(dx)$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$F'(t) = \int f'(x, t) \bar{\mu}(dx).$$

BEWEIS: Die Aussage folgt aus dem Satz über die dominierte Konvergenz. Für Details siehe Klenke (2008, S. 143f.).

Hiermit zeigt man nun leicht Lemma 2.3.

BEWEIS (Lemma 2.3):

1. Für den Beweis der Aussage wählt man $t_0 > 0$ beliebig und sieht dann unter Benutzung des Differentiationslemmas schnell mit vollständiger Induktion über n , dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\phi_{X_1}^{(n-1)}$ auf $(-t_0, t_0)$ differenzierbar ist mit

$$\phi_{X_1}^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) < \infty \quad \text{für jedes } t \in (-t_0, t_0).$$

Da $t_0 > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt die Differenzierbarkeit auf ganz \mathbb{R} .

2. Gilt $\mathbb{P}[X_1 = 0] < 1$, ist ϕ_{X_1} strikt konvex, da dann $\phi_{X_1}''(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) > 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist.

□

2.5 Korollar

Aus Lemma 2.3 folgt $\mathbb{E}[X_1] = \phi'_{X_1}(0) < \infty$ und damit die Existenz von $\mathbb{E}[X_1]$ im Satz von Cramér.

Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis des Satzes von Cramér.

BEWEIS (Satz von Cramér): Wir können o. B. d. A. $x = 0$ und $\mathbb{E}[X_1] < 0$ annehmen, da mit Substitution $\hat{X}_i = X_i - x$ alle anderen Fälle aus diesem folgen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq nx] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n (X_i - x) \geq 0\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n \hat{X}_i \geq 0\right] \\ &\stackrel{!}{=} -\sup_{t \in \mathbb{R}} [-\ln \mathbb{E}[e^{t\hat{X}_1}]] = -\sup_{t \in \mathbb{R}} [-\ln \mathbb{E}[e^{tX_1} e^{-tx}]] = -\sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \ln \mathbb{E}[e^{tX_1}]] \\ &= -I(x) \end{aligned}$$

Wir müssen also zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq 0] = -I(0).$$

Für das weitere Prozedere führen wir die Schreibweisen $\psi_{X_1}(t) := \ln \phi_{X_1}(t)$ und $g := \inf_{t \in \mathbb{R}} \phi_{X_1}(t)$ ein. ψ_{X_1} heißt auch kumulantenerzeugende Funktion von X_1 . Natürlich ist $g \geq 0$ und wegen der Monotonie des Logarithmus gilt

$$I(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [-\ln \phi_{X_1}(t)] = -\inf_{t \in \mathbb{R}} [\ln \phi_{X_1}(t)] = -\ln g,$$

wobei nach Bemerkung 2.2 $I(0) = \infty$ für $g = 0$ ist.

Damit bleibt zu zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq 0] = \ln g. \quad (1)$$

Dafür unterscheiden wir zwei Fälle, abhängig davon, wo \mathbb{P} Masse hat. Der erste kann recht schnell abgehandelt werden, der zweite erfordert etwas mehr Aufwand. Wesentliche Schritte sind die Anwendung der exponentiellen Chebyshev-Ungleichung³ und die Durchführung einer exponentiellen Maßtransformation, der wir wegen ihrer Bedeutung einen eigenen Abschnitt am Ende dieses Kapitels widmen. Diese Schritte werden auch in anderen Beweisen in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielen.

1. $\mathbb{P}(X_1 \leq 0) = 1$

Weil X_1 mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte annimmt (da $\mathbb{E}[X_1] < 0$), ist in diesem Fall $\phi'_{X_1}(t) = \int_{\mathbb{R}} x e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) < 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ und damit ϕ_{X_1} streng monoton fallend. Folglich gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz $g = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{X_1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(-\infty, 0]} e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) = \mathbb{P}[X_1 = 0]$, wenn wir berücksichtigen, dass die Funktion $(t \mapsto e^{tx})$ für $x \in (-\infty, 0]$ monoton fällt und dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tx} = 0$ für $x < 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tx} = 1$ für $x = 0$ ist. Wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der X_i gilt weiter

$$\mathbb{P}[S_n \geq 0] = \mathbb{P}[X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i = 0] = g^n$$

³ Die exponentielle Chebyshev-Ungleichung ist wegen ihrer zentralen Rolle im Anhang mit Beweis aufgeführt (Satz 6.1).

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln g^n = \ln g.$$

2. $\mathbb{P}[X_1 < 0] > 0$ und $\mathbb{P}[X_1 > 0] > 0$

In diesem Fall gilt wiederum wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_{X_1}(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{(-\infty, 0]} e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{(0, \infty)} e^{tx} \mathbb{P}^{X_1}(dx) = \infty.$$

Aus der strikten Konvexität von ϕ_{X_1} folgt dann, dass es ein eindeutiges $\tau \in \mathbb{R}$ gibt, so dass ϕ_{X_1} in τ minimal wird, also so, dass $\phi'_{X_1}(\tau) = 0$ und $\phi_{X_1}(\tau) = g > 0$ ist. Da $\phi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}[X_1] < 0 = \phi'_{X_1}(\tau)$ ist, ist wegen der Konvexität von ϕ_{X_1} $\tau > 0$ und man kann die exponentielle Chebyshev-Ungleichung anwenden. Wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der X_i gilt also insgesamt

$$\mathbb{P}[S_n \geq 0] \leq \mathbb{E}[e^{\tau S_n}] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{\tau X_i}\right] = (\phi_{X_1}(\tau))^n = g^n.$$

So erhalten wir die obere Schranke

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq 0] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln g^n = \ln g. \quad (2)$$

Dass $\ln g$ auch unteres Schranke ist, also

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \ln g, \quad (3)$$

zeigen wir nun mithilfe einer exponentiellen Maßtransformation. Die Idee, die dahinter steht, ist die Verteilung der X_i so umzugewichten, dass sie den Erwartungswert Null besitzt und somit das Ereignis $\{S_n \geq 0\}$ nicht mehr selten, sondern typisch ist. Wir werden auf diese Idee am Ende dieses Kapitels noch genauer eingehen.

Wir führen also eine neue Folge $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen ein, die die transformierte Verteilung

$$\mathbb{P}^{Y_1}(dx) := \frac{1}{g} e^{\tau x} \mathbb{P}^{X_1}(dx)$$

besitzen.

Zunächst weisen wir nach, dass $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ und $\mathbb{V}[Y_1] \in (0, \infty)$ gilt. Dafür betrachten wir $\phi_{Y_1}(t) := \mathbb{E}[e^{t Y_1}]$, die momenterzeugende Funktion von Y_1 . Es gilt

$$\phi_{Y_1}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \mathbb{P}^{Y_1}(dx) = \frac{1}{g} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{\tau x} \mathbb{P}^{X_1}(dx) = \frac{1}{g} \phi_{X_1}(t + \tau). \quad (4)$$

Folglich ist auch ϕ_{Y_1} endlich und unendlich oft differenzierbar. Erinnern wir uns, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ $\phi''_{X_1}(t) > 0$ ist (Lemma 2.3), erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y_1] = \phi'_{Y_1}(0) = \frac{1}{g} \phi'_{X_1}(\tau) = 0 \quad (5)$$

und $\mathbb{V}[Y_1] = \mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1])^2] = \mathbb{E}[Y_1^2] = \phi''_{Y_1}(0) = \frac{1}{g} \phi''_{X_1}(\tau) \in (0, \infty)$.

Nun führen wir die Partialsummenfolge $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ ein und beweisen

$$\mathbb{P}[S_n \geq 0] = g^n \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}] \quad (6)$$

$$\text{und } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}] \geq 0. \quad (7)$$

Daraus ergibt sich dann nämlich direkt die untere Schranke (3):

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq 0] &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (g^n \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}]) \\ &= \ln g + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}] \geq \ln g. \end{aligned}$$

(6) gilt, da $\mathbb{P}^{X_1}(dx) = g e^{-\tau x} \mathbb{P}^{Y_1}(dx)$ und daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n \geq 0] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n \geq 0\}}] = \int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n x_i \geq 0\}} \mathbb{P}^{X_1}(dx_1) \right) \cdots \mathbb{P}^{X_1}(dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n x_i \geq 0\}} g e^{-\tau x_1} \mathbb{P}^{Y_1}(dx_1) \right) \cdots g e^{-\tau x_n} \mathbb{P}^{Y_1}(dx_n) \\ &= g^n \int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n x_i \geq 0\}} e^{-\tau \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{P}^{Y_1}(dx_1) \right) \cdots \mathbb{P}^{Y_1}(dx_n) \\ &= g^n \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}]. \end{aligned}$$

Für den Beweis von (7) wählen wir ein beliebiges $C > 0$. Dann erhalten wir wegen der Monotonie und Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}] &\geq \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{0 \leq T_n \leq C\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}\}}] \geq \mathbb{E}[e^{-\tau C\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}} \mathbb{1}_{\{0 \leq T_n \leq C\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}\}}] \\ &= e^{-\tau C\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 \leq T_n \leq C\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}\}}] = e^{-\tau C\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}} \mathbb{P}\left[\frac{T_n}{\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}} \in [0, C]\right]. \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie des Logarithmus gilt dann auch

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}] \geq \frac{-\tau C\sqrt{\mathbb{V}[Y_1]}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left[\frac{T_n}{\sqrt{n\mathbb{V}[Y_1]}} \in [0, C]\right].$$

Benutzt man nun (5) und den Zentralen Grenzwertsatz, erhält man

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[e^{-\tau T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \geq 0\}}] &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\tau C \sqrt{\mathbb{V}[Y_1]}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} \left[\frac{T_n}{\sqrt{n \mathbb{V}[Y_1]}} \in [0, C] \right] \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\tau C \sqrt{\mathbb{V}[Y_1]}}{\sqrt{n}} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,C]} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit sich daraus ergibt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,C]} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \in (0, 1).$$

Damit ist auch (7) gezeigt und wir haben somit die untere Schranke.

Aus der oberen Schranke (2) und der unteren Schranke (3) ergibt sich dann insgesamt (1), womit der Satz bewiesen ist. \square

2.6 Bemerkung

- Der Satz von Cramér sagt aus, dass sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[S_n \geq nx]$ asymptotisch wie $C(n)e^{-nI(x)}$ verhält, wobei $C(n)$ eine subexponentielle Funktion ist. Er sagt *nicht* aus, dass $\mathbb{P}[S_n \geq nx]$ und $e^{-nI(x)}$ asymptotisch äquivalent sind, wie man vielleicht auf den ersten Blick meinen könnte. Deutlich wird das, wenn man sich vor Augen führt, dass sowohl für $\mathbb{P}[S_n \geq nx] = e^{-nI(x)}$ als auch für $\mathbb{P}[S_n \geq nx] = \frac{1}{n^3} e^{-nI(x)}$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq nx] = -I(x)$.
- Wie man am obigen Beweis leicht nachvollziehen kann, gilt die Abschätzung $\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq nx] \leq -I(x)$, bzw. $\mathbb{P}[S_n \geq nx] \leq e^{-nI(x)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq \mathbb{E}[X_1]$.

2.7 Beispiel

Wir wollen hier exemplarisch die Legendre-Transformierte I für eine Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen berechnen, die zum Parameter p Bernoulli-verteilt sind. Zunächst berechnen wir dafür die kumulantenerzeugende Funktion von X_1 ;

$$\psi(t) = \ln \mathbb{E}[e^{tX_1}] = \ln(pe^t + (1-p)e^0) = \ln(1-p + pe^t). \quad (8)$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist nun $I(x)$ das Supremum von

$$h_x(t) := tx - \ln(1-p + pe^t).$$

Um dieses Supremum zu bestimmen, suchen wir Nullstellen t_x der Funktion

$$h'_x(t) = x - \frac{pe^t}{1-p+pe^t}.$$

Für $x \in (0, 1)$ erhalten wir als einzige Nullstelle $t_x = \ln\left(\frac{x-px}{p-px}\right)$.

Da $h''_x(t) = \left(\frac{pe^t}{1-p+pe^t}\right)^2 - \frac{pe^t}{1-p+pe^t} < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, liegt an der Stelle t_x ein Maximum vor und wir erhalten für alle $x \in (0, 1)$

$$I(x) = h_x(t_x) = x \ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x) \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right).$$

In allen anderen Fällen hat h'_x keine Nullstellen. Wir sehen aber

$$I(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [-\ln(1-p+pe^t)] = -\ln(1-p)$$

und

$$I(1) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [t - \ln(1-p+pe^t)] = -\ln\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} \left[\frac{1-p+pe^t}{e^t}\right]\right) = -\ln p = \ln \frac{1}{p}.$$

Für $x > 1$, also $x = 1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, berechnen wir

$$I(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [xt - \ln(1-p+pe^t)] = -\ln\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} \left[\frac{1-p+pe^t}{e^{xt}}\right]\right) = -\ln\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} \left[\frac{1-p}{e^{tx}} + \frac{p}{e^{tx}}\right]\right) = \infty$$

und für $x < 0$, also $x = -\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$

$$I(x) = -\ln\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} \left[\frac{1-p+pe^t}{e^{-\varepsilon t}}\right]\right) = -\ln\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} \left[(1-p)e^{\varepsilon t} + pe^{(1+\varepsilon)t}\right]\right) = \infty.$$

Also erhalten wir insgesamt

$$I(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x) \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) & \text{für } x \in [0, 1] \\ \infty & \text{für } x \notin [0, 1] \end{cases}.$$

In Abbildung 1 ist die berechnete Legendre-Transformierte für den Parameter $p = 0, 2$ dargestellt. An ihr erkennen wir typische Eigenschaften einer Legendre-Transformierten, die wir hier ohne Beweis angeben. Ein Beweis findet sich beispielsweise bei Winter (2009) unter Lemma 1.12.

2.8 Lemma (Eigenschaften der Legendre-Transformierten im Satz von Cramér)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}[X] > 0$. Die momentenerzeugende Funktion ϕ_X von X sei endlich. Dann besitzt die Legendre-Transformierte $I(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \ln \phi_X(t)]$ die folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $I(x) \geq 0$. $I(x) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = \mu$.
2. I ist konvex und von unten halbstetig auf \mathbb{R} .
3. Auf dem Intervall $(\text{ess inf}(X), \text{ess sup}(X))$ ist I stetig und strikt konvex. Dabei ist $\text{ess inf}(X) := \sup\{v \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X < v] = 0\}$ das wesentliche Infimum und $\text{ess sup}(X) := \inf\{w \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X > w] = 0\}$ das wesentliche Supremum der Zufallsvariable X .
4. Für jedes $s \geq 0$ ist die Niveaumenge $N_s := \{x \in \mathbb{R} | I(x) \leq s\}$ kompakt.

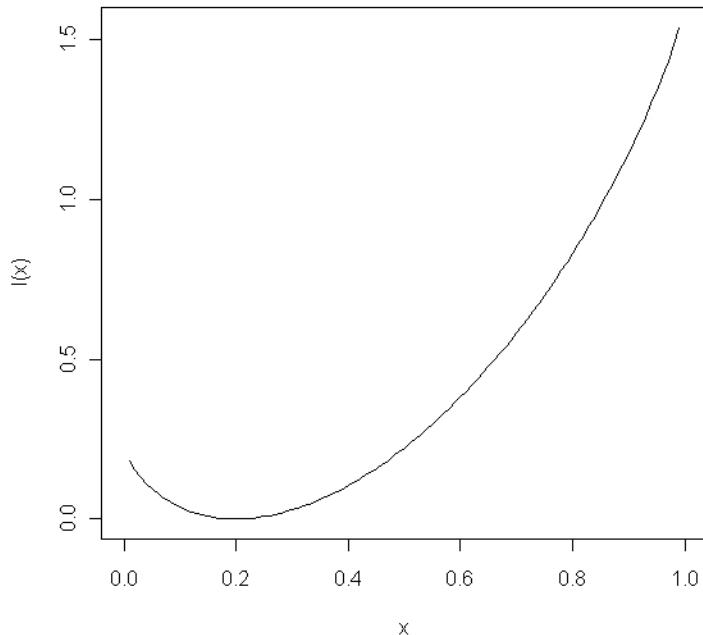


Abbildung 1: Ratenfunktion der $\text{Ber}(0,2)$ -Verteilung auf dem Intervall $[0, 1]$. Außerhalb dieses Intervalls nimmt $I(x)$ den Wert ∞ an.

2.2 Das Prinzip großer Abweichungen

Um den Satz von Cramér in den formalen Rahmen der Theorie großer Abweichungen zu stellen, werden wir in Anlehnung an König (2006) hier noch eine allgemeine Definition eines Prinzips großer Abweichungen geben. Zunächst geben wir aber die Definition einer Ratenfunktion.

2.9 Definition (Ratenfunktion)

Sei (E, d) ein metrischer Raum. Eine von unten halbstetige Funktion $J : E \rightarrow [0, \infty]$, die nicht konstant den Wert ∞ annimmt, heißt *Ratenfunktion*. Ist für jedes $s \geq 0$ die Niveaumenge $N_s := \{x \in E \mid J(x) \leq s\}$ kompakt, so nennen wir J eine gute Ratenfunktion.

Die Legendre-Transformierte I aus dem Satz von Cramér haben wir bislang einfach als Ratenfunktion bezeichnet. An den Eigenschaften aus Lemma 2.8 sehen wir schnell, dass I tatsächlich eine Ratenfunktion nach obiger Definition ist. I ist sogar eine gute Ratenfunktion.

2.10 Definition (Prinzip großer Abweichungen)

Sei (E, d) ein metrischer Raum und \mathfrak{B}_E die von den offenen Mengen auf E erzeugte σ -Algebra. Ferner sei $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (E, \mathfrak{B}_E) und $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\gamma_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. I sei eine Ratenfunktion auf E nach Definition 2.9.

Dann sagt man, dass die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einem Prinzip großer Abweichungen mit Ratenfunktion I und Skala γ_n genügt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

LDP 1 Für jede offene Menge $G \subset E$ gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n} \ln \mu_n(G) \geq -\inf_{x \in G} I(x)$.

LDP 2 Für jede abgeschlossene Menge $F \subset E$ gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n} \ln \mu_n(F) \leq -\inf_{x \in F} I(x)$.

Man sagt, eine Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von E -wertigen Zufallsvariablen erfüllt ein Prinzip großer Abweichungen, wenn die Folge ihrer Verteilungen einem solchen genügt.⁴

Wenn eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein Prinzip großer Abweichungen erfüllt, heißt das insbesondere, dass für Mengen $A \subset E$ mit der Eigenschaft $\inf_{x \in A} I(x) = \inf_{x \in \bar{A}} I(x)$ gilt $\mu_n(A) \sim \exp(-\gamma_n(\inf_{x \in A} I(x) - \chi_n))$, wobei $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (vgl. König (2006) Bemerkung 2.1.2.3).

Man kann den Satz von Cramér zu einem Prinzip großer Abweichungen nach Definition 2.10 fortsetzen. So zeigt zum Beispiel König (2006) unter Satz 2.2.1:

2.11 Satz (Fortsetzung des Satzes von Cramér zu einem Prinzip gr. Abweichungen)
Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten reellen Zufallsvariablen mit endlicher momenterzeugender Funktion ϕ_{X_1} und sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann erfüllt die Folge $(\frac{1}{n} S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Prinzip großer Abweichungen auf \mathbb{R} mit Skala n und Ratenfunktion I . Dabei ist I wie in Satz 2.1 die Legendre-Transformierte von $\ln \phi_{X_1}$.

Wir werden auf den Beweis dieses Satzes hier verzichten, da er für die in den nächsten Kapiteln vorgestellten Anwendungen nicht relevant ist.

Eine weitreichende Verallgemeinerung des Satz von Cramér findet man im Satz von Gärtner-Ellis, der ebenfalls ein Prinzip großer Abweichungen beschreibt. Man findet ihn unter anderem bei König (2006) und Bucklew (2004), aber auch in den meisten anderen Arbeiten, die in die Theorie großer Abweichungen einführen.

2.3 Die exponentielle Maßtransformation - ein Exkurs

Im Beweis des Satzes von Cramér haben wir die Technik der exponentiellen Maßtransformation benutzt, um ein seltenes Ereignis zu einem typischen Ereignis zu machen. Diese Technik begegnet uns oft in Beweisen von asymptotischen Aussagen über Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse. Wir werden auch in den folgenden Kapiteln immer wieder darauf zurückgreifen. Daher soll sie an dieser Stelle etwas allgemeiner eingeführt werden.

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, die die Verteilung \mathbb{P}^X besitzt. Die momenterzeugende Funktion $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ sei für alle $t \in \mathbb{R}$ endlich. Dann können wir durch

$$\mathbb{P}^{Y(t)}(dx) := \frac{e^{tx}}{\phi_X(t)} \mathbb{P}^X(dx) \quad (9)$$

⁴Vgl. König (2006), Definition 2.1.1 und Bemerkung 2.1.2.4.

die Verteilung einer neuen Zufallsvariable $Y^{(t)}$ definieren. Die Zufallsvariable $Y^{(t)}$ besitzt somit die \mathbb{P}^X -Dichte $r_t(x) := \frac{e^{tx}}{\phi_X(t)}$ und die Verteilungsfunktion

$$F_{Y^{(t)}}(a) = \mathbb{P}[Y \leq a] = \int_{(-\infty, a)} \mathbb{P}^{Y^{(t)}}(dx) = \int_{(-\infty, a)} \frac{e^{tx}}{\phi_X(t)} \mathbb{P}^X(dx).$$

Dass $\mathbb{P}^{Y^{(t)}}$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, sieht man schnell ein, wenn man sich vor Augen führt, dass die Dichte r_t für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv ist und dass gilt

$$\int_{\mathbb{R}} r_t(x) \mathbb{P}^X(dx) = \frac{1}{\phi_X(t)} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \mathbb{P}^X(dx) = \frac{\phi_X(t)}{\phi_X(t)} = 1.$$

Die transformierte Verteilung $\mathbb{P}^{Y^{(t)}}$ hängt von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ ab. Das gibt uns die Möglichkeit, sie unseren Zwecken durch Wahl eines geeigneten Parameters anzupassen. Um zu verstehen, inwieweit wir die Verteilung anpassen können, beweisen wir

2.12 Lemma

In der oben geschilderten Situation existiert für alle $x \in (\text{ess inf}(X), \text{ess sup}(X))$ ein $t_x \in \mathbb{R}$, so dass gilt $\mathbb{E}[Y^{(t_x)}] = x$. (Zur Erinnerung: $\text{ess inf}(X) := \sup\{v \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}[X < v] = 0\}$ und $\text{ess sup}(X) := \inf\{w \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}[X > w] = 0\}$)

Wir können also mittels exponentieller Transformation den Erwartungswert von X auf einen beliebigen Wert x verschieben, für den $\mathbb{P}[X \leq x] < 1$ und $\mathbb{P}[X \geq x] < 1$ gilt.

BEWEIS:⁵ Wir suchen für jedes $x \in (\text{ess inf}(X), \text{ess sup}(X))$ ein $t_x \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $x = \mathbb{E}[Y^{(t_x)}] = \phi'_{Y^{(t_x)}}(0)$ erfüllt. Es ist (vgl. (4))

$$\phi_{Y^{(t)}}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \mathbb{P}^{Y^{(t)}}(dx) = \frac{1}{\phi_X(t)} \int_{\mathbb{R}} e^{(s+t)x} \mathbb{P}^X(dx) = \frac{\phi_X(s+t)}{\phi_X(t)}$$

und folglich

$$\phi'_{Y^{(t)}}(s) = \frac{\phi'_X(s+t)}{\phi_X(t)}$$

sowie insbesondere

$$\phi'_{Y^{(t)}}(0) = \frac{\phi'_X(t)}{\phi_X(t)}.$$

Also muss t_x die Gleichung

$$x = \frac{\phi'(t_x)}{\phi(t_x)}$$

erfüllen. Dass für jedes $x \in (\text{ess inf}(X), \text{ess sup}(X))$ ein solches t_x existiert zeigen wir, indem wir beweisen, dass $a := \text{ess inf}(X)$ und $b := \text{ess sup}(X)$ die Asymptoten von $h(t) := \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$

⁵ Vgl. für diesen Beweis Gebennus (2006), Lemma 1.10. Gebennus lässt jedoch den Fall $\text{ess inf}(X) < 0$ außer Acht.

sind. Es gilt

$$h(t) = \frac{\mathbb{E}[X e^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]} \begin{cases} \geq \frac{\mathbb{E}[a e^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]} = a \\ \leq \frac{\mathbb{E}[b e^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]} = b, \end{cases}$$

das heißt für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $h(t) \in [a, b]$. Nun müssen wir noch zeigen, dass a und b nicht nur untere und obere Schranken von h , sondern tatsächlich Asymptoten sind. Wir zeigen hier nur, dass b Asymptote ist. Der Beweis für a läuft analog.

Wir können o. B. d. A. $a \geq 0$ annehmen. Ist $a < 0$ können wir nämlich zu $\hat{X} := X - a$ übergehen und zeigen, dass $\frac{\mathbb{E}[\hat{X} e^{t\hat{X}}]}{e^{t\hat{X}}}$ die Asymptoten 0 und $b - a$ hat. Da nämlich gilt

$$\frac{\mathbb{E}[\hat{X} e^{t\hat{X}}]}{e^{t\hat{X}}} = \frac{e^{-a} \mathbb{E}[X e^{tX}] - a e^{-a} \mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{-a} \mathbb{E}[e^{tX}]} = \frac{\mathbb{E}[X e^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]} - a,$$

hat dann $\frac{\mathbb{E}[X e^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]}$ die Asymptoten a und b .

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig und $A_\varepsilon := \{X > b - \varepsilon\}$. Dann gilt für $t > 0$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\mathbb{E}[X e^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]} \geq \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)(b - \varepsilon)e^{tX}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon^c}(X)e^{tX}]} \\ &= (b - \varepsilon) \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon^c}(X)e^{tX}]} \\ &\geq (b - \varepsilon) \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}] + \mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Lässt man t gegen unendlich laufen, konvergiert der letzte Term gegen $b - \varepsilon$. Das sieht man folgendermaßen ein: Der Bruch $\frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}] + \mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}$ konvergiert genau dann gegen 1, wenn sein Kehrwert $\frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}] + \mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}]}$ gegen 1 konvergiert, wenn also $\frac{\mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}]}$ gegen Null konvergiert. Letzteres können wir leicht zeigen. Da $\mathbb{P}[A_{\frac{\varepsilon}{2}}] > 0$ nach Definition von $\text{ess sup}(X)$, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(X)e^{tX}]} \leq \frac{\mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{\frac{\varepsilon}{2}}}(X)e^{tX}]} \\ &\leq \frac{\mathbb{P}[A_\varepsilon^c]e^{t(b-\varepsilon)}}{\mathbb{P}[A_{\frac{\varepsilon}{2}}]e^{t(b-\frac{\varepsilon}{2})}} \\ &= \frac{\mathbb{P}[A_\varepsilon^c]}{\mathbb{P}[A_{\frac{\varepsilon}{2}}]} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert für $t \rightarrow \infty$ offensichtlich gegen Null.

Es gilt also insgesamt

$$b \geq \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \geq b - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit gezeigt, dass b Asymptote von $h(t)$ ist. \square

Nun wollen wir nach McNeil *et al.* (2005, S. 369f.) noch ein Beispiel zur exponentiellen Transformation geben, in dem die Zufallsvariable, deren Verteilung transformiert werden soll, eine Lebesgue-Dichte besitzt.

2.13 Beispiel

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Transformieren wir die Verteilung von X exponentiell, erhalten wir eine neue Verteilung

$$\mathbb{P}^{Y(t)}(dx) = \frac{e^{tx}}{\phi_X(t)} \mathbb{P}^X(dx) = \frac{e^{tx}}{\phi_X(t)} \varphi(x) \lambda(dx).$$

Die momenterzeugende Funktion der standardnormalverteilten Zufallsvariable X ist $\phi_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ (vgl. z.B. McNeil *et al.* (2005, S. 370)). Die transformierte Verteilung $\mathbb{P}^{Y(t)}$ hat also die Lebesgue-Dichte

$$g_t(x) := \frac{e^{tx}}{\phi_X(t)} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx - \frac{1}{2}(t^2 - x^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(x-t)^2}.$$

Folglich ist eine Zufallsvariable $Y(t)$, die die transformierte Verteilung $\mathbb{P}^{Y(t)}$ besitzt, normalverteilt mit Erwartungswert t und Varianz 1. Wir können also durch exponentielle Transformation den Erwartungswert einer standardnormalverteilten Zufallsvariable beliebig verschieben (vgl. Lemma 2.12). Im Fall der Standardnormalverteilung bleibt die Varianz bei der Transformation unverändert.

In Kapitel 3 werden wir auf dieses Beispiel zurückkommen.

3 Große Abweichungen im homogenen Einfaktor-Kreditrisikomodell

3.1 Das homogene Einfaktor-Kreditrisikomodell

In diesem Abschnitt stellen wir in Anlehnung an Bluhm *et al.* (2010) und Glasserman und Li (2005) ein Kreditrisikomodell vor, mit dem wir dann anschließend arbeiten wollen. Dabei legen wir einen geeigneten, nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum zu Grunde.

Wir betrachten ein Portfolio aus n Krediten, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit p besitzen, in einem festen Betrachtungszeitraum (z.B. ein Jahr) auszufallen.⁶ In der Praxis entspricht das in etwa einem Portfolio aus Krediten der gleichen Ratingklasse. Zusätzlich nehmen wir an, dass bei jedem Kredit der gleiche konstante Verlust $V = 1$ aus einem Ausfall resultiert.⁷

Den Ausfall des i -ten Kredits modellieren wir mit einer Zufallsvariable Y_i . Wenn der i -te Kredit innerhalb des Betrachtungszeitraums ausfällt, nimmt Y_i den Wert 1 an, sonst den Wert 0. Für jedes $i \in \{1 \dots n\}$ ist Y_i somit zum Parameter p Bernoulli-verteilt. Die Zufallsvariable

$$L_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

gibt dann den Gesamtverlust in dem Portfolio an.

Unser Ziel ist es im Folgenden, Aussagen über die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(L_n \geq nq)$ für einen Schwellenwert $1 > q > \mathbb{E}[Y_1] = p$ zu treffen. Dafür müssen wir uns jedoch zuvor Gedanken über die Abhängigkeitsstruktur in dem Portfolio machen. Sind die Y_i unabhängig, ist L_n binomialverteilt und wir können $\mathbb{P}(L_n \geq nq)$ direkt berechnen oder (für großes n) mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes abschätzen. In der Praxis ist die Annahme der Unabhängigkeit jedoch kaum haltbar, da sich makroökonomische Einflüsse oft auf mehrere Kreditnehmer zugleich auswirken (vgl. z.B. McNeil *et al.* (2005, S. 329f.)).

Die Abhängigkeit der Y_i modellieren wir über die Abhängigkeit von latenten Bonitätsvariablen X_i . Die Bonitätsvariablen geben Auskunft über die Kreditwürdigkeit der entsprechenden Kreditnehmer. Man nimmt an, dass der Vektor (X_1, \dots, X_n) multivariat normalverteilt ist. Die einzelnen Einträge X_i werden standardnormalverteilt angenommen. Sie können beispielsweise die standardisierten logarithmischen Vermögenswertrenditen der Kreditnehmer angeben.⁸ Wir nehmen an, dass der i -te Kreditnehmer ausfällt, wenn dessen Bonitätsvariable X_i am Ende des Betrachtungszeitraums unter einer bestimmten Schranke x liegt. Diese Schranke x wird genau so gewählt, dass $\mathbb{P}[X_i \leq x] = \mathbb{P}[Y_i = 1] = p$ gilt, also $x = \Phi^{-1}(p)$. Da die X_i identisch verteilt sind und die Ausfallwahrscheinlichkeit aller Kredite gleich ist, ergibt sich für jeden Kredit die gleiche Schwelle.

⁶ Wir lassen hier nur die Möglichkeiten „Ausfall“ und „kein Ausfall“ zu (two-state model). Sonstige Übergänge von einer Ratingklasse in eine andere (rating migration), wie sie zum Beispiel bei Credit Metrics eine Rolle spielen, lassen wir außer Acht (vgl. zu Credit Metrics Paulsen (2009)).

⁷ In anderen Modellen werden unterschiedliche oder sogar zufällige Verluste zugelassen (vgl. Bluhm *et al.* (2010, S. 82f.)).

⁸ Vgl. Bluhm *et al.* (2010, S. 65f.) Bluhm *et al.* räumen jedoch ein, dass empirische Untersuchungen zeigen, dass es passendere Verteilungen als die Normalverteilung gibt, um die logarithmische Vermögenswertrenditen zu beschreiben.

Die Bonitätsvariablen $X_1 \dots X_n$ hängen nun in folgender Weise voneinander ab:
Für jedes $i \in \{1 \dots n\}$ postulieren wir den Zusammenhang

$$X_i = \kappa Z + \sqrt{1 - \kappa^2} \varepsilon_i, \quad \kappa \in [0, 1]. \quad (10)$$

Z ist dabei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, die einen makroökonomischen Einfluss abbildet, der auf alle Kreditnehmer einwirkt. Hat man ein Portfolio aus Krediten deutscher Unternehmen, kann sich in Z beispielsweise die Gesamtwirtschaftslage Deutschlands widerspiegeln. Man bezeichnet Z als *systematischen* Risikofaktor. Mit der ebenfalls standardnormalverteilten Zufallsvariable ε_i dagegen modelliert man Einflüsse, die nur den i -ten Kreditnehmer treffen. Sie heißt daher auch *idiosynkratischer* oder *spezifischer* Risikofaktor des i -ten Kreditnehmers. Die ε_i und Z sind insgesamt stochastisch unabhängig voneinander. Man rechnet leicht nach, dass unter den oben getroffenen Annahmen die Zufallsvariable $\kappa Z + \sqrt{1 - \kappa^2} \varepsilon_i$ tatsächlich für alle $i \in \{1 \dots n\}$ standardnormalverteilt ist und (10) somit Sinn ergibt.

Die Konstante κ^2 quantifiziert, welcher Anteil der Schwankung der Bonitätsvariablen durch makroökonomische Schwankungen erklärt werden kann. Genauer gesagt gilt für jedes $i \in \{1 \dots n\}$ wegen der Unabhängigkeit von Z und ε_i

$$\mathbb{V}[X_i] = \kappa^2 \mathbb{V}[Z] + (1 - \kappa^2) \mathbb{V}[\varepsilon_i].$$

Wir gehen in unserem Modell davon aus, dass κ für alle Kreditnehmer gleich groß ist. Man rechnet leicht nach, dass κ^2 genau der lineare Korrelationskoeffizient von zwei Bonitätsvariablen X_i und X_j ist.⁹ Aufgrund der Standardnormalverteilung von X_i und X_j , der Bilinearität der Kovarianz und der Unabhängigkeit von ε_i , ε_j und Z gilt nämlich

$$\begin{aligned} \rho(X_i, X_j) &= \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \kappa^2 \text{cov}(\kappa, \kappa) + \kappa \sqrt{1 - \kappa^2} \text{cov}(Z, \varepsilon_i) + \kappa \sqrt{1 - \kappa^2} \text{cov}(Z, \varepsilon_j) + (1 - \kappa^2) \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \\ &= \kappa^2 \mathbb{V}(Z) = \kappa^2. \end{aligned}$$

Wegen dieser Bedeutung der Konstante κ^2 schreibt man vielfach ρ statt κ^2 . Unsere Festlegung $\kappa \geq 0$ impliziert, dass die Bonität der Kreditnehmer mit dem systematischen Risikofaktor wächst. Der systematische Risikofaktor sollte so gewählt werden, dass diese Festlegung sinnvoll ist.

Das beschriebene Modell ist ein Einfaktormodell, da das systematische Risiko mit nur einem Faktor beschrieben wird. Mehrfaktormodelle berücksichtigen mehrere systematische Faktoren, die bei verschiedenen Kreditnehmern unterschiedlich gewichtet werden, je nachdem, wie sensibel diese auf den jeweiligen Einfluss reagieren. Man bezeichnet unser Modell als homogen, da die Konstanten κ , p und c für jeden Kreditnehmer den selben Wert annehmen.

Zudem fällt unser Modell in die Klasse der Gauß-Copula-Modelle. Der Name röhrt

⁹ Man beachte, dass κ^2 die Korrelation von Bonitätsvariablen angibt und nicht die Korrelation von Ausfallindikatoren. Wegen des Zusammenhangs der Bonität mit dem Vermögenswert eines Kreditnehmers bezeichnet man κ^2 auch als *asset*-Korrelation, während man die Korrelation der Ausfallindikatoren als *default*-Korrelation oder Ausfallkorrelation bezeichnet. Zur Ausfallkorrelation vgl. Bluhm *et al.* (2010, S. 56-58).

daher, dass die sogenannte Gauß-Copula in unserem Modell die Abhängigkeit der Bonitätsvariablen modelliert, indem sie die Standardnormalverteilungen der X_i zu der multivariaten Normalverteilung des Vektors (X_1, \dots, X_n) zusammenführt. Die Benutzung der Gauß-Copula bei der Modellierung der Abhängigkeit von Kreditnehmern wurde im Zusammenhang mit der Subprime-Krise scharf kritisiert (vgl. z.B. Salmon (2009)). Gegenstand der Kritik war unter anderem die unzureichende Berücksichtigung von Extremereignissen, die mehrere Kreditnehmer gleichzeitig treffen. Selbst wenn nämlich die Bonitätsvariablen zweier Kreditnehmer durch die Gauß-Copula mit starker Korrelation $\kappa^2 \neq 1$ gekoppelt sind, treten in dem Modell extreme Verluste der Kreditnehmer, die dann häufig zu einem Ausfall führen, (fast)unabhängig voneinander auf. Das ist natürlich von der Realität weit entfernt.¹⁰ Dennoch soll das Modell hier verwendet werden, da sich darin interessante Beobachtungen machen lassen, die vielleicht auf andere Copula-Modelle übertragbar sind.

3.2 Unabhängige Kredite

Im Fall $\kappa = 0$ sind die Bonitätsindikatoren X_i und damit auch die Ausfallindikatoren Y_i unabhängig. Diesen Fall wird man allerdings in der Praxis kaum antreffen (vgl. z.B. McNeil *et al.* (2005, S. 329f.)). Wie oben bereits erwähnt ist die Zufallsvariable L_n als Summe unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen in diesem Fall binomialverteilt zu den Parametern n und p . Das starke Gesetz der großen Zahlen besagt in diesem Fall, dass $\frac{L_n}{n} \mathbb{P}$ -fast sicher gegen die Ausfallwahrscheinlichkeit p konvergiert. Aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen folgt für beliebige Werte $\delta > 0$

$$\mathbb{P}[L_n \geq n(p + \delta)] \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Mit dem Satz von Cramér können wir auch eine asymptotische Abschätzung treffen, wie schnell die Wahrscheinlichkeit in (11) gegen Null konvergiert. Danach gilt nämlich für alle $\delta \in (0, 1 - p]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq n(p + \delta)] = -I(p + \delta),$$

wobei

$$I(x) = x \ln \left(\frac{x}{p} \right) + (1 - x) \ln \left(\frac{1 - x}{1 - p} \right),$$

da die Y_i Bernoulli-verteilt sind (vgl. Beispiel 2.7). $\mathbb{P}[L_n \geq n(p + \delta)]$ verhält sich also asymptotisch wie $C(n) e^{-n((p+\delta)\ln(\frac{p+\delta}{p})+(1-p-\delta)\ln(\frac{1-p-\delta}{1-p}))}$, wobei $C(n)$ eine subexponentielle Funktion ist. Es gilt sogar für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[L_n \geq n(p + \delta)] \leq e^{-n((p+\delta)\ln(\frac{p+\delta}{p})+(1-p-\delta)\ln(\frac{1-p-\delta}{1-p}))}$$

(vgl. Bemerkung 2.6). Könnte man sich also in der Praxis ein Portfolio aus n völlig unabhängigen Krediten zusammenstellen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p ausfallen,

¹⁰ Die Gauß-Copula erzeugt asymptotische Unabhängigkeit, vgl. u.a. Cottin und Döhler (2009, S. 281), Bluhm *et al.* (2010 S. 343f.).

so wüsste man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Portfolioverlust um mehr als einen gewissen Wert $n\delta > 0$ vom erwarteten Portfolioverlust np abweicht, den Wert $e^{-nI(p+\delta)}$ (I wie oben angegeben) nicht übersteigt. Mit wachsender Portfoliogröße fällt die Wahrscheinlichkeit, dass der Portfolioverlust um mehr als einen gewissen Wert $n\delta > 0$ vom erwarteten Portfolioverlust np abweicht, mit Rate $I(p+\delta)$ exponentiell gegen Null. Natürlich kann man im unabhängigen Fall $\mathbb{P}[L_n \geq n(p+\delta)]$ auch direkt berechnen oder mittels des Zentralen Grenzwertsatzes abschätzen.

3.3 Abhängige Kredite

In diesem Abschnitt werden wir versuchen, auch für den (realistischeren) Fall abhängiger Kredite ($\kappa > 0$) Aussagen über die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$, insbesondere für sehr große Werte von n bzw. $n \rightarrow \infty$, zu treffen. Das machen wir wiederum vor allem über asymptotische Resultate, aus denen wir dann Approximationen für große Werte von n ableiten können. Da Kreditportfolios häufig sehr groß sind (vgl. z.B. McNeil *et al.* (2005, S. 330)), ist das für die Praxis durchaus von Interesse. Es stellt sich jedoch das Problem, dass man den Approximationsfehler oft nicht quantifizieren kann.

Im Fall abhängiger Kredite kann man die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ nicht mehr einfach berechnen, sondern ist auf Abschätzungen und Simulationen angewiesen. Bedingt unter dem systematischen Faktor Z sind die Ausfallindikatoren Y_i auch im Fall abhängiger Kredite unabhängig und identisch Bernoulli-verteilt. Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} p(Z) &= \mathbb{P}[Y_1 = 1|Z] = \mathbb{P}[X_1 > -\Phi^{-1}(p)|Z] \\ &= \mathbb{P}\left[\kappa Z + \sqrt{1-\kappa^2}\varepsilon_1 > -\Phi^{-1}(p)|Z\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\varepsilon_1 > \frac{-\kappa Z - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}|Z\right] = \Phi\left(\frac{\kappa Z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Damit ist L_n bedingt unter Z binomialverteilt zu den Parametern n und $p(Z)$, d.h. $\mathbb{P}[L_n = k|Z = z] = \binom{n}{k} p(z)^k (1-p(z))^{n-k}$. Die unbedingte Verteilung von L_n erhalten wir, indem wir über die Verteilung von Z integrieren. Da p eine bijektive Abbildung von den reellen Zahlen in das Intervall $(0, 1)$ ist, können wir ebenso gut über die Verteilung von $p(Z)$ integrieren und erhalten

$$\mathbb{P}[L_n = k] = \binom{n}{k} \int_{(0,1)} r^k (1-r)^{n-k} dF(r) \quad (13)$$

und folglich

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq] = \sum_{k=nq}^n \binom{n}{k} \int_{(0,1)} r^k (1-r)^{n-k} dF(r). \quad (14)$$

Dabei bezeichnet F die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $p(Z)$. Da p streng monoton wachsend ist und surjektiv auf das Intervall $(0, 1)$ abbildet, berechnen wir diese zu

$$F(x) = \mathbb{P}[p(Z) \leq x] = \mathbb{P}[Z \leq p^{-1}(x)] = \mathbb{1}_{\{0 < x < 1\}}(x) \frac{\sqrt{1-\kappa^2}\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} + \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}(x).$$

Die Verteilung von $p(Z)$ bezeichnet man als Probit-Normalverteilung oder Vasicek-Verteilung. Die Integrale in (13) und (14) kann man beispielsweise mit Hilfe von Monte Carlo Methoden (vgl. Kapitel 4) numerisch berechnen. Für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ können wir die Verteilung von L_n jedoch auch ohne derartige Rechnungen direkt angeben, wie wir gleich in (15) sehen werden.

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(Z) \right\}} | Z \right] = \mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(Z) | Z \right] = 1 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Daraus resultiert wiederum

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(Z) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(Z) \right\}} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(Z) \right\}} | Z \right] \right] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

Also konvergiert $\frac{L_n}{n}$ hier nicht wie im unabhängigen Fall fast sicher gegen eine Konstante, sondern gegen die Zufallsvariable $p(Z)$. Für hinreichend großes n ist folglich der Anteil an Krediten, die in einem Portfolio der Größe n ausfallen, für einen gegebenen makroökonomischen Faktor $Z = z$ approximativ gleich $p(z)$.

Da aus fast sicherer Konvergenz schon Konvergenz in Verteilung folgt, können wir zudem für alle $0 < q < 1$ asymptotisch abschätzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[L_n \leq nq] = \mathbb{P}[p(Z) \leq q] = \Phi \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2} \Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} \right). \quad (15)$$

Während also im unabhängigen Fall für alle $\delta > 0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq n(p + \delta)]$ für wachsendes n gegen Null konvergiert, konvergiert sie im abhängigen Fall gegen die echt positive Konstante $1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2} \Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} \right)$. Aus der Grenzverteilung $F_{\kappa,p}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[L_n \leq nq]$ von L_n können wir durch Ableiten eine Grenzdichte $f_{\kappa,p}$ der Zufallsvariable L_n herleiten:

$$\begin{aligned} f_{\kappa,p}(q) &= \frac{dF_{\kappa,p}(q)}{dq} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\kappa^2} \left(\sqrt{1 - \kappa^2} \Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p) \right)^2 \right) \frac{\sqrt{1 - \kappa^2}}{\kappa} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\Phi^{-1}(q))^2 \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \kappa^2}}{\kappa} \exp \left(\frac{1}{2} (\Phi^{-1}(q))^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \left(\sqrt{1 - \kappa^2} \Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

In Abbildung 2 ist die Grenzdichte für $\kappa = 0.5$ und $p = 0.2$ dargestellt. Man kann deutlich eine schwere rechte Flanke erkennen. Auch für einen festen, großen Wert n weist die Dichtefunktion eine schwere rechte Flanke auf. Diese resultiert aus der Abhängigkeit der Ausfallindikatoren. Für unabhängige Ausfallindikatoren ist die Dichtefunktion nämlich annähernd symmetrisch, da L_n in diesem Fall binomialverteilt und damit für großes n approximativ normalverteilt ist (vgl. McNeil *et al.* (2005, S. 330)).

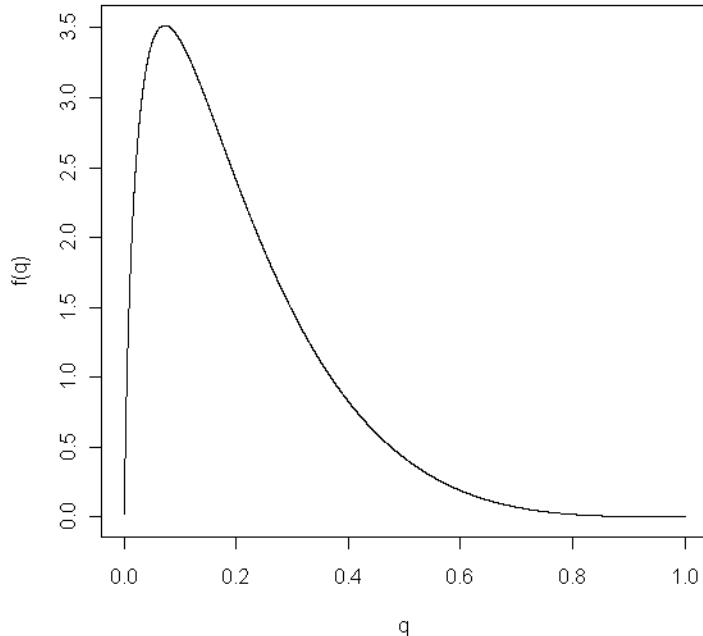


Abbildung 2: Grenzdichte für $\kappa = 0.5, p = 0.2$

Unser Ziel ist es nun, wie im Satz von Cramér eine asymptotische Abschätzung dafür zu finden, wie schnell die Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse gegen Null konvergieren, wenn n gegen ∞ wächst. Wie wir gesehen haben, konvergiert allerdings die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{L_n \geq nq\}$ im abhängigen Fall nicht gegen Null, sondern gegen eine positive Konstante. Wollen wir, dass das Ereignis $\{L_n \geq nq\}$ selten wird, wenn n wächst, müssen wir mit wachsendem n entweder die Korrelation κ^2 gegen Null fallen lassen, die Ausfallwahrscheinlichkeit p gegen Null fallen lassen, oder die Schwelle q gegen Eins wachsen lassen. Wir wollen uns hier mit dem zweiten und dritten Fall beschäftigen. Der zweite ist interessant, wenn man in sehr großen Portfolios aus sehr hoch gerateten Krediten die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen möchte, dass mehr Kredite ausfallen als erwartet. Der dritte ist interessant, wenn man in sehr großen Portfolios die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen möchte, dass deutlich mehr Kredite ausfallen als erwartet. Beim ersten Fall geht man von einer sehr kleinen Korrelation zwischen den Kreditnehmern aus. Dieser Fall soll hier nicht betrachtet werden. Für $p \in (0, \frac{1}{2})$ behandeln ihn Glassermann und Li (2005) im Zusammenhang mit Importance Sampling in Theorem 2 für verschiedene Geschwindigkeiten, mit denen κ gegen Null konvergiert. Für den Fall $\kappa = \frac{a}{n^\alpha}$ mit $\alpha > \frac{1}{2}$ und $a > 0$ ermitteln sie genau das Resultat aus dem Satz von Cramér.

Fall 3: Große Schwelle q

Zunächst behandeln wir in Anlehnung an Pham (2010) und Glasserman und Li (2005) den dritten Fall. Wir benötigen eine Folge von Schwellen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, 1)^\mathbb{N}$, die für wachsendes n von unten gegen Eins konvergiert. Die Wahl $q_n = \Phi(c\sqrt{\ln n})$ mit $0 < c < \sqrt{2}$ erweist sich als besonders geeignet. Dieser Fall gibt uns nämlich ein interessantes Resultat, das wir auch später im Zusammenhang mit Importance Sampling nutzen können.

3.1 Satz

Sei $q_n := \Phi(c\sqrt{\ln n})$ mit $0 < c < \sqrt{2}$. Dann gilt in dem beschriebenen homogenen Einfaktor-Kreditrisikomodell

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq_n] = -\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}. \quad (16)$$

Dieser Satz besagt, dass sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq_n]$ für große n annähernd so verhält wie $C_2(n)n^{-\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}}$, wobei $C_2(n)$ hier eine Funktion ist, für die gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_2(n)}{\ln n} = 0$, über deren nähere Gestalt jedoch keine Aussage gemacht wird. Auffällig ist, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit p in dem Grenzwert (16) keine maßgebliche Rolle spielt. Sie kann die Geschwindigkeit, mit der die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq_n]$ für große n gegen Null fällt, nur beeinflussen, indem sie in die Funktion $C_2(n)$ einfließt, die jedoch für große n nur eine untergeordnete Rolle spielt, da sie subpolynomiell wächst. Die Korrelation κ^2 hingegen übt einen großen Einfluss aus. Weisen die Bonitäten der Kreditnehmer eine geringe Abhängigkeit voneinander auf, fällt $C_2(n)n^{-\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}}$ für große n deutlich schneller gegen Null, als wenn sie in hohem Grade voneinander abhängen. Der Ausfall vieler Kredite in einem Portfolio ist also deutlich wahrscheinlicher, wenn die Bonitäten der Kreditnehmer stark voneinander abhängen. Große Ausfälle resultieren demnach hauptsächlich aus einer schlechten wirtschaftlichen Gesamtlage, die sich im systematischen Risikofaktor niederschlägt (vgl. Pham (2010, S. 41)).

BEWEIS:¹¹ Wir zeigen zunächst die untere Schranke

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \geq -\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}. \quad (17)$$

Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \geq \mathbb{P}[L_n \geq nq_n, p(Z) \geq q_n] = \mathbb{P}[L_n \geq nq_n | p(Z) \geq q_n] \mathbb{P}[p(Z) \geq q_n]. \quad (18)$$

Wir definieren nun für jedes $n \geq 1$

$$z_n := p^{-1}(q_n) = \frac{\sqrt{1 - \kappa^2} c \sqrt{\ln n} - \Phi^{-1}(p)}{\kappa}. \quad (19)$$

¹¹ Dieser Beweis orientiert sich an den Beweisen von Pham (2010) (dort unter Theorem 6.1) und Glasserman und Li (2005) (dort unter Theorem 3). Der Beweis von Pham ist jedoch bei den asymptotischen Abschätzungen zum Teil ungenau, der Beweis von Glasserman und Li lässt den Fall, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit p kleiner als 0,5 ist, außer Acht. Daher ist der hier geführte Beweis als Überarbeitung der Beweise von Pham und Glasserman und Li zu verstehen.

Weil p streng monoton wachsend ist, gilt $\{\mathbb{P}(Z) \geq q_n\} = \{Z \geq p^{-1}(q_n)\} = \{Z \geq z_n\}$. Da zudem der Verlust L_n wächst, wenn der systematische Risikofaktor Z größere Werte annimmt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L_n \geq nq_n | p(Z) \geq q_n] &= \mathbb{P}[L_n \geq nq_n | Z \geq z_n] \\ &\geq \mathbb{P}[L_n \geq nq_n | Z = z_n] = \mathbb{P}[L_n \geq nq_n | p(Z) = q_n].\end{aligned}\quad (20)$$

Zusammen mit (18) ergibt sich dann

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \geq \mathbb{P}[L_n \geq nq_n | p(Z) = q_n] \mathbb{P}[Z \geq z_n].$$

Gegeben $p(Z) = q_n$ ist L_n binomialverteilt zu den Parametern n und q_n . Für binomialverteilte Zufallsvariablen führt Slud (1977, S. 404) die folgende Ungleichung an:

3.2 Lemma (Slud)

Sei Y eine Zufallsvariable, die zu den Parametern n und p_0 binomialverteilt ist. Dann gilt für alle $k \leq np_0$

$$\mathbb{P}[Y \geq k] \geq 1 - \Phi\left(\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0}}\right). \quad (21)$$

BEWEIS: Slud nennt diese Ungleichung als Folgerung aus zwei anderen Ungleichungen, die wir hier nicht beweisen werden:

1. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $1 - P_\lambda(k-1) \geq 1 - \Phi(\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$ (nach Bohmann 1963).

2. Für alle $k \leq \frac{n^2 p_0}{n+1}$ gilt $1 - P_{np_0}(k) \leq 1 - B_{n,p_0}(k)$ (nach Anderson/Samuels 1965).

Dabei bezeichnet P_λ die kumulierte Poisson-Verteilung zum Parameter $\lambda \geq 0$, also $P_\lambda(k) = \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$ und B_{n,p_0} die kumulierte Binomialverteilung zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p_0 \in [0, 1]$, also $B_{n,p_0}(k) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j}$.

Aus $k \leq np_0$ folgt $k-1 \leq np_0 - 1 \leq \frac{n^2 p_0 - np_0 - n - 1}{n+1} \leq \frac{n^2 p_0}{n+1}$. Daher können wir beide Ungleichungen anwenden und erhalten für $k \leq np_0$:

$$1 - B_{n,p_0}(k-1) \geq 1 - P_{np_0}(k-1) \geq 1 - \Phi\left(\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0}}\right),$$

also (21).

Mit dieser Ungleichung können wir nun in unserem Fall abschätzen

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n | p(Z) = q_n] \geq 1 - \Phi\left(\frac{nq_n - np_0}{\sqrt{np_0}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Für den gesuchten Grenzwert erhalten wir nun, wenn wir uns erinnern, dass Z standard-normalverteilt ist,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq_n] &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}[Z \geq z_n] \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \frac{1}{2} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[Z \geq z_n] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[Z \geq z_n] \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln (1 - \Phi(z_n)).\end{aligned}$$

Um dies weiter zu berechnen nutzen wir die Abschätzung

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

die beispielsweise Feller (1968) auf Seite 175 beweist. Wir geben den Beweis im Anhang unter 6.3. Da $z_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln(1 - \Phi(z_n)) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \frac{\varphi(z_n)}{z_n} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\left(\ln \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2} c \sqrt{\ln n} - \Phi^{-1}(p)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2} c \sqrt{\ln n} - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} \right)^2 \right) \right) \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \kappa}{\ln n} - \frac{\ln \left(\sqrt{1 - \kappa^2} c \sqrt{\ln n} - \Phi^{-1}(p) \right)}{\ln n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{\ln n} - \frac{1}{2 \ln n} \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2} c \sqrt{\ln n} - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die untere Schranke (17) gezeigt.

Nun zeigen wir die obere Schranke

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \leq -\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}. \quad (22)$$

Da die Y_i unter der Bedingung $Z = z$ unabhängig und zum Parameter $p(z)$ Bernoulli-verteilt sind, berechnen wir analog zu (8) in Beispiel 2.7 die bedingte kumulantenerzeugende Funktion der Y_i ,

$$\psi(t, z) = \ln \mathbb{E}[e^{tY_i} | Z = z] = \ln(1 - p(z) + p(z)e^t).$$

Mit Hilfe der exponentiellen Chebyshev-Ungleichung für bedingte Wahrscheinlichkeiten (vgl. Bemerkung 6.2) erhalten wir für alle $t \geq 0$

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n | Z] \leq e^{-tnq_n} \mathbb{E}[e^{tL_n} | Z] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und, wenn wir berücksichtigen, dass die Y_i unter Z bedingt unabhängig und identisch verteilt sind, weiter

$$e^{-tnq_n} \mathbb{E}[e^{tL_n} | Z] = e^{-tnq_n} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n Y_i | Z\right] = e^{-tnq_n} (\mathbb{E}[e^{tY_1} | Z])^n = e^{-n(tq_n - \psi(t, Z))} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \quad (23)$$

Da (23) für alle $t \geq 0$ gilt, haben wir also

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n | Z] \leq \exp \left(-n \sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, Z)] \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Wegen der Linearität des Erwartungswerts können wir daraus folgern, dass

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[L_n \geq nq_n | Z]] \leq \mathbb{E} \left[\exp \left(-n \sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, Z)] \right) \right]. \quad (24)$$

im Folgenden wollen wir die Funktion

$$F_n(z) := -n \sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, z)]$$

genauer untersuchen.

Zunächst berechnen wir wie in Beispiel 2.7

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} [tq_n - \psi(t, z)] = q_n \ln \frac{q_n}{p(z)} + (1 - q_n) \ln \frac{1 - q_n}{1 - p(z)},$$

wobei $t_0 := \ln \frac{q_n - p(z)q_n}{p(z) - p(z)q_n}$ der eindeutige Maximierer von $tq_n - \psi(t, z)$ ist.

$t_0 \geq 0$ gilt nun genau dann, wenn $p(z) \leq q_n$ ist. Für $q_n < p(z)$ ist t_0 negativ. Da das Maximum bei t_0 das einzige Extremum der für alle q und z stetigen Funktion $(t \mapsto tq - \psi(t, z))$ ist, wird in diesem Fall das Maximum der Funktion über alle $t \geq 0$ an der Randstelle $t = 0$ angenommen und es ist $\sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, z)] = 0$. Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, Z)] &= \mathbb{1}_{\{p(z) \leq q_n\}} \left(q_n \ln \frac{q_n}{p(z)} + (1 - q_n) \ln \frac{1 - q_n}{1 - p(z)} \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{z \leq z_n\}} \left(q_n \ln \frac{q_n}{p(z)} + (1 - q_n) \ln \frac{1 - q_n}{1 - p(z)} \right) \end{aligned}$$

und somit

$$F_n(z) = -n \mathbb{1}_{\{z \leq z_n\}} \left(q_n \ln \frac{q_n}{p(z)} + (1 - q_n) \ln \frac{1 - q_n}{1 - p(z)} \right).$$

Wir stellen fest, dass F_n für $z < z_n$ zweimal stetig differenzierbar ist und dass für alle

$z < z_n$ gilt

$$\begin{aligned}
F'_n(z) &= -n \left(-\frac{q_n}{p(z)} + \frac{1-q_n}{1-p(z)} \right) p'(z) \\
&= n \left(\frac{q_n}{p(z)} - \frac{1-q_n}{1-p(z)} \right) \varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \\
F''_n(z) &= n \left(\left(-\frac{q_n}{(p(z))^2} - \frac{1-q_n}{(1-p(z))^2} \right) \left(\varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{q_n}{p(z)} - \frac{1-q_n}{1-p(z)} \right) \left(\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)^2 \left(-\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \right) \\
&= n \varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \left(\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)^2 \left[\left(-\frac{q_n}{(p(z))^2} - \frac{1-q_n}{(1-p(z))^2} \right) \varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{q_n}{p(z)} - \frac{1-q_n}{1-p(z)} \right) \left(-\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \right],
\end{aligned}$$

wenn man berücksichtigt, dass die Ableitungen von $p(z)$

$$\begin{aligned}
p'(z) &= \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \\
\text{und } p''(z) &= -\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)^2 \varphi \left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)
\end{aligned}$$

sind.

Mit Hilfe der Ableitungen erhalten wir einige Eigenschaften der Funktion F_n .

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $F_n(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{R}$ nichtpositiv, denn für $t = 0$ ist $tq_n - \psi(t, z) = 0$ und damit ist $\sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, z)] \geq 0$ und $F_n(z) = -n \sup_{t \geq 0} [tq_n - \psi(t, z)] \leq 0$. Der Maximalwert 0 wird für alle $z \geq z_n$ angenommen.
- F_n ist stetig differenzierbar. In den Stellen $z \neq z_n$ ist das offensichtlich, für die Stelle z_n sieht man das daran, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{z \nearrow z_n} F_n(z) &= 0 = F_n(z_n) \\
\text{und } \lim_{z \nearrow z_n} F'_n(z) &= 0 = \lim_{z \searrow z_n} F'_n(z).
\end{aligned}$$

- F_n ist monoton wachsend, denn $F'_n(z)$ ist für jedes $z \in \mathbb{R}$ nichtnegativ.
- F_n ist konkav. Für $z < z_n$ ist nämlich $F''_n(z)$ negativ und für $z \geq z_n$ nimmt die Funktion $F'_n(z)$ konstant ihren Minimalwert 0 an, womit insgesamt F'_n monoton fallend ist. Dass $F''_n(z)$ für $z < z_n$, d.h. für $p(z) < q_n$, negativ ist, ist offensichtlich für $-\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \leq 0$. Ist $-\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} > 0$, benutzt man die Abschätzung $x < \frac{\varphi(x)}{\Phi(-x)}$, die für alle $x > 0$ gilt und direkt aus der Abschätzung von Feller (vgl. Anhang 6.3) folgt.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
F_n''(z) &\leq n\varphi\left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)\left(\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)^2 \left[\left(-\frac{q_n}{(p(z))^2} - \frac{1-q_n}{(1-p(z))^2} \right) \varphi\left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{q_n}{p(z)} - \frac{1-q_n}{1-p(z)} \right) \frac{1}{\Phi\left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)} \varphi\left(-\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right) \right] \\
&= n \left(\varphi\left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right) \right)^2 \left(\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)^2 \left[-\frac{1-q_n}{(1-p(z))^2} - \frac{1-q_n}{(1-p(z))p(z)} \right] \\
&< 0,
\end{aligned}$$

wenn man zusätzlich berücksichtigt, dass $p(z) = \Phi\left(\frac{\kappa z + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)$ ist und dass φ symmetrisch ist.

Diese Eigenschaften werden uns bei unseren weiteren Überlegungen nützlich sein.
In (24) haben wir bereits

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \leq \mathbb{E}[e^{F_n(Z)}]$$

erhalten. Unser Ziel ist es, dies weiter nach oben abzuschätzen. Dafür arbeiten wir mit einer exponentiellen Maßtransformation, wie wir sie bereits in Kapitel 2 kennengelernt haben. Wir transformieren die Standardnormalverteilung von Z exponentiell mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$, den es später geschickt zu wählen gilt. Dadurch erhalten wir eine Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz 1 (vgl. Beispiel 2.13). Z_μ sei nun eine Zufallsvariable, die gemäß dieser transformierten Verteilung verteilt ist:

$$\mathbb{P}^{Z_\mu}(dx) = \exp\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\right) \mathbb{P}^Z(dx).$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}[\exp(F_n(Z))] = \mathbb{E}\left[\exp\left(F_n(Z_\mu) - \mu Z_\mu + \frac{1}{2}\mu^2\right)\right].$$

Da F_n konkav ist, gilt weiter

$$F_n(Z_\mu) \leq F_n(\mu) + F'_n(\mu)(Z_\mu - \mu),$$

so dass wir wegen der Monotonie der Exponentialfunktion und des Erwartungswerts abschätzen können

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(F_n(Z))] &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(F_n(\mu) + F'_n(\mu)(Z_\mu - \mu) - \mu Z_\mu + \frac{1}{2}\mu^2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(F_n(\mu) + (F'_n(\mu) - \mu)Z_\mu - \mu F'_n(\mu) + \frac{1}{2}\mu^2\right)\right]. \tag{25}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun $\mu = \mu_n$ so wählen, dass μ_n ein Fixpunkt von F'_n ist, hängt der Term, dessen Erwartungswert in (25) berechnet werden soll, nicht mehr von Z_μ ab und ist somit konstant. Damit vereinfacht sich unsere Abschätzung zu

$$\mathbb{E}[\exp(F_n(Z))] \leq \exp\left(F_n(\mu_n) - \frac{1}{2}\mu_n^2\right).$$

Wir müssen jedoch noch zeigen, dass tatsächlich ein μ_n existiert, das die Fixpunktgleichung

$$F'_n(\mu_n) - \mu_n = 0 \quad (26)$$

löst. Dafür bedienen wir uns des Zwischenwertsatzes.

Wegen der Nichtnegativität von F'_n ist $F'_n(\mu) - \mu > 0$ für $\mu < 0$. Für $\mu > \max\{z_n, 0\}$ ist $F'_n(\mu) = 0$ und damit $F'_n(\mu) - \mu < 0$. Da die Funktion $(\mu \mapsto F'_n(\mu) - \mu)$ stetig ist, muss also ein $\mu \in [0, \max\{z_n, 0\}]$ existieren, das (26) löst.

Insgesamt haben wir jetzt die Abschätzung

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \leq \exp\left(F_n(\mu_n) - \frac{1}{2}\mu_n^2\right). \quad (27)$$

Wenn wir zeigen können, dass $\mu_n \sim z_n$, sind wir fertig, denn dann ist wegen der Nichtpositivität von F_n

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq_n] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} F_n(\mu_n) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \frac{1}{2} \mu_n^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^2}{\ln n} = -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n^2}{\ln n} \\ &= -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2} c \sqrt{\ln n} - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} \right)^2 \\ &= -\frac{c^2}{2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Wir zeigen also, dass für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $z_n(1 - \varepsilon) < \mu_n < z_n$ für alle $n \geq n_0$. Da die Funktion $(\mu \mapsto F'_n(\mu) - \mu)$ als Summe von zwei monoton fallenden Funktionen monoton fallend ist und μ_n eine Nullstelle dieser Funktion ist, genügt es hierfür zu zeigen, dass

$$F'_n(z_n(1 - \varepsilon)) - z_n(1 - \varepsilon) > 0 \quad (29)$$

$$\text{und } F'_n(z_n) - z_n < 0. \quad (30)$$

Die Ungleichung (30) ist erfüllt, da $F'_n(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Um die Ungleichung (29) zu zeigen, bedarf es größeren Aufwands.

Wir erinnern uns, dass

$$F'_n(z_n(1 - \varepsilon)) = n \left(\frac{p(z_n)}{p(z_n(1 - \varepsilon))} - \frac{1 - p(z_n)}{1 - p(z_n(1 - \varepsilon))} \right) \varphi \left(\frac{\kappa z_n(1 - \varepsilon) + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \right) \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}}$$

und zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(z_n(1 - \varepsilon))}{g(n)} = \text{const.} > 0$$

und

$$\frac{z_n(1 - \varepsilon)}{g(n)} = 0$$

mit

$$g(n) := n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2} \exp\left(-\frac{c\varepsilon(1-\varepsilon)\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sqrt{\ln n}\right) > 0,$$

woraus dann direkt (29) folgt.

Da $z_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(z_n)}{p(z_n(1-\varepsilon))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{\kappa z_n + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right) \left(\Phi\left(\frac{\kappa z_n(1-\varepsilon) + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)\right)^{-1} = 1$$

und mit Hilfe der Abschätzung $1 - \Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}$ für $x \rightarrow \infty$ (Satz 6.3) außerdem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - p(z_n)}{1 - p(z_n(1-\varepsilon))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\kappa z_n(1-\varepsilon) + \Phi^{-1}(p)) \varphi\left(\frac{\kappa z_n + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)}{(\kappa z_n + \Phi^{-1}(p)) \varphi\left(\frac{\kappa z_n(1-\varepsilon) + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa z_n(1-\varepsilon) + \Phi^{-1}(p)}{\kappa z_n + \Phi^{-1}(p)} \exp\left(-\frac{1}{2} z_n^2 \left(-\kappa^2 \varepsilon^2 + 2\kappa^2 \varepsilon + \frac{2\kappa \varepsilon \Phi^{-1}(p)}{z_n}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $-\kappa^2 \varepsilon^2 + 2\kappa^2 \varepsilon > 0$ für $0 < \varepsilon < 2$.

Weiter berechnen wir mit Hilfe der Definition von z_n in (19)

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\kappa z_n(1-\varepsilon) + \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right) &= \varphi\left(c(1-\varepsilon)\sqrt{\ln n} + \frac{\Phi^{-1}(p)\varepsilon}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2} \exp\left(-\frac{c\varepsilon(1-\varepsilon)\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sqrt{\ln n}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Phi^{-1}(p)\varepsilon}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F'_n(z_n(1-\varepsilon))}{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2} \exp\left(-\frac{c\varepsilon(1-\varepsilon)\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sqrt{\ln n}\right)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Phi^{-1}(p)\varepsilon}{\sqrt{1-\kappa^2}}\right)^2\right) > 0.$$

Zu zeigen ist noch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} &\left(\frac{z_n(1-\varepsilon)}{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2} \exp\left(-\frac{c\varepsilon(1-\varepsilon)\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sqrt{\ln n}\right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\sqrt{1-\kappa^2}c(1-\varepsilon)}{\kappa} \sqrt{\ln n} - \frac{\Phi^{-1}(p)(1-\varepsilon)}{\kappa}(1-\varepsilon)}{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2} \exp\left(-\frac{c\varepsilon(1-\varepsilon)\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sqrt{\ln n}\right)} \right) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Für $b := -\frac{c\varepsilon(1-\varepsilon)\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\kappa^2}} \geq 0$, d.h. $p \leq \frac{1}{2}$, gilt (31), da in diesem Fall $\exp(b\sqrt{\ln n})$ für wachsendes n gegen unendlich divergiert (bzw. für $p = \frac{1}{2}$ gegen 1 konvergiert) und

zudem $\sqrt{\ln n}$ langsamer gegen unendlich divergiert als jede positive Potenz von n . Für $b < 0$, d.h. $p > \frac{1}{2}$ sieht man (31) folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n(1-\varepsilon)}{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2} \exp(b\sqrt{\ln n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\varepsilon}{\kappa} \left[-\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2}}} + c\sqrt{1-\kappa^2} \frac{\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2}}} \right] \frac{1}{\sqrt{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2}}} \exp(-b\sqrt{\ln n}). \end{aligned}$$

Da $\ln n$ langsamer konvergiert als jede positive Potenz von n , konvergiert der Faktor in den eckigen Klammern gegen Null. Wir berechnen weiter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^{1-\frac{c^2}{2}(1-\varepsilon)^2}}} \exp(-b\sqrt{\ln n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sqrt{\ln n} \left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{4}(1-\varepsilon)^2 \right) \sqrt{\ln n} + b \right] \right) = 0,$$

denn $\sqrt{\ln n} \left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{4}(1-\varepsilon)^2 \right) \sqrt{\ln n} + b \right] \rightarrow -\infty$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ist (31) gezeigt und wir erhalten insgesamt (29). \square

Fall 2: Kleine Ausfallwahrscheinlichkeit p

Nun lassen wir die Ausfallwahrscheinlichkeit p mit wachsender Portfoliogröße n gegen Null fallen. Dieser Fall ist besonders relevant für große Portfolios aus hoch gerateten Krediten, für welche die jährliche Ausfallwahrscheinlichkeit extrem klein ist. (Für Kredite aus der Ratingklasse A liegen beispielsweise die Ausfallwahrscheinlichkeiten häufig unter 0,1% (vgl. Glasserman und Li (2005, S. 14)).) Außerdem hat dieser Fall Relevanz, wenn man das Portfolio nur über einen kurzen Zeitraum betrachtet, innerhalb dessen die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall extrem gering ist. Wählen wir die Folge p_n geschickt, können wir ein ähnliches Resultat wie Satz 3.1 beweisen. $p_n = \Phi(-c\sqrt{n})$ mit $c > 0$ erweist sich als geeignet.

3.3 Satz

Sei $p_n := \Phi(-c\sqrt{n})$ mit $c > 0$ die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredits im beschriebenen homogenen Einfaktor-Kreditrisikomodell. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq] = -\frac{c^2}{2\kappa^2}. \quad (32)$$

Aus diesem Satz kann man folgern, dass sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für hinreichend großes n annähernd so verhält wie $C_3(n) \exp(-n\frac{c^2}{2\kappa^2})$, wobei $C_3(n)$ eine subexponentielle Funktion ist (d.h. eine Funktion für die gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_3(n)}{n} = 0$), über deren nähere Gestalt keine Aussage gemacht wird. Es fällt auf, dass die Schwelle q in dem Grenzwert auf der rechten Seite von (32) überhaupt keine Rolle spielt. Die

Geschwindigkeit, mit der die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für große n gegen Null fällt, kann sie also nur beeinflussen, indem sie in die Funktion $C_3(n)$ einfließt, die jedoch für große n nur eine untergeordnete Rolle spielt, da sie lediglich subexponentiell wächst. Wie bereits in Satz 3.1 wird allerdings auch hier der große Einfluss der Korrelation κ deutlich. Weisen die Bonitäten der Kreditnehmer nur eine geringe Abhängigkeit voneinander auf, fällt $C_3(n) \exp(-n \frac{c^2}{2\kappa^2})$ für große n deutlich schneller gegen Null, als wenn sie in hohem Grade voneinander abhängen.

BEWEIS: Dieser Beweis orientiert sich am Beweis von Glasserman und Li (2005) (dort unter Theorem 4), ist aber dabei in möglichst großer Analogie zum Beweis von Satz 3.1 geführt.

Wir zeigen wieder zunächst die untere Schranke

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq] \geq -\frac{c^2}{2\kappa^2}.$$

Wie in Satz 3.1 sind die Y_i bedingt unter Z unabhängig und identisch Bernoulli-verteilt zum Parameter $p(Z)$. Hier hängt jedoch der Parameter von n ab, so dass wir besser $p_n(Z)$ schreiben:

$$p_n(Z) = \Phi\left(\frac{\kappa Z + \Phi^{-1}(p_n)}{\sqrt{1 - \kappa^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\kappa Z - c\sqrt{n}}{\sqrt{1 - \kappa^2}}\right).$$

Offensichtlich ist die Funktion p_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend. Wir definieren analog zu (19)

$$z_n := p_n^{-1}(q) = \frac{\sqrt{1 - \kappa^2}\Phi^{-1}(q) + c\sqrt{n}}{\kappa}$$

und bemerken, dass auch hier z_n für wachsendes n gegen unendlich konvergiert. Nun können wir mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von 3.1 (Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, Lemma von Slud) aus der Standardnormalverteilung von Z folgern

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 - \Phi(z_n)).$$

Benutzen wir wieder die Abschätzung von Feller (Satz 6.3) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 - \Phi(z_n)) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\varphi(z_n)}{z_n} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \kappa}{n} - \frac{\ln(\sqrt{1 - \kappa^2}\Phi^{-1}(q) + c\sqrt{n})}{n} - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2n} \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2}\Phi^{-1}(q) + c\sqrt{n}}{\kappa} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{c^2}{2\kappa^2} \end{aligned}$$

und damit die untere Schranke.

Jetzt zeigen wir die obere Schranke

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq] \leq -\frac{c^2}{2\kappa^2}.$$

Analog zum Beweis von 3.1 erhalten wir mit Hilfe der exponentiellen Chebyshev-Ungleichung für bedingte Wahrscheinlichkeiten die Abschätzung

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq] \leq \mathbb{E}[e^{F_n(Z)}].$$

Dabei ist

$$F_n(Z) = \exp \left(-n \sup_{t \geq 0} [tq - \psi_n(t, Z)] \right)$$

mit bedingter kumulantenerzeugender Funktion

$$\psi_n(t, Z) := \ln(1 - p_n(Z) + p_n(Z)e^t).$$

Die Eigenschaften von F_n auf Seite 26 bleiben erhalten. So können wir auch hier mittels exponentieller Maßtransformation weiter abschätzen

$$\mathbb{P}[L_n \geq nq] \leq e^{F_n(\mu_n) - \frac{1}{2}\mu_n^2},$$

wobei μ_n die Lösung der Fixpunktgleichung $F'_n(\mu) - \mu = 0$ ist.

Nun gilt es wieder $\mu_n \sim z_n$ zu zeigen, denn dann gilt wegen der Nichtpositivität von F_n

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} F_n(\mu_n) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2} \mu_n^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^2}{n} = -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n^2}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2} \Phi^{-1}(q) + c\sqrt{n}}{\kappa} \right)^2 \\ &= -\frac{c^2}{2\kappa^2}, \end{aligned}$$

womit Satz 3.3 gezeigt ist.

Um die asymptotische Äquivalenz von μ_n und z_n zu beweisen, genügt es - wie oben gesehen - zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$

$$F'_n(z_n(1 - \varepsilon)) - z_n(1 - \varepsilon) > 0 \quad (33)$$

$$\text{und } F'_n(z_n) - z_n < 0. \quad (34)$$

Die Ungleichung (34) ist erfüllt, da $F'_n(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Für die Ungleichung (33) zeigen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(z_n(1 - \varepsilon))}{n\sqrt{n}} = \text{const.} > 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n(1 - \varepsilon)}{n\sqrt{n}} = 0.$$

Es ist

$$F'_n(z_n(1-\varepsilon)) = n \left(\frac{q}{p_n(z_n(1-\varepsilon))} - \frac{1-q}{1-p_n(z_n(1-\varepsilon))} \right) \varphi \left(\frac{\kappa z_n(1-\varepsilon) - c\sqrt{n}}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right) \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}.$$

Wir setzen nun $b_n := \frac{\kappa z_n(1-\varepsilon) - c\sqrt{n}}{\sqrt{1-\kappa^2}}$ und berechnen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1-\kappa^2}\Phi^{-1}(q) + c\sqrt{n})(1-\varepsilon) - c\sqrt{n}}{\sqrt{1-\kappa^2}} = -\infty. \quad (35)$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q}{1-p_n(z_n(1-\varepsilon))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q}{1-\Phi(b_n)} = 1-q.$$

Aus der Abschätzung von Feller (Satz 6.3) folgt wegen der Symmetrie von φ für $x \rightarrow \infty$

$$\frac{\varphi(-x)}{\Phi(-x)} \sim x.$$

Auf Grund von (35) und wegen des Grenzverhaltens von φ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(z_n(1-\varepsilon))}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \left(\frac{q}{\Phi(b_n)} \varphi(b_n) - (1-q) \varphi(b_n) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} (-b_n q) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -q \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} \frac{(\sqrt{1-\kappa^2}\Phi^{-1}(q) + c\sqrt{n})(1-\varepsilon) - c\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\kappa^2}} \\ &= qc\varepsilon \frac{\kappa}{1-\kappa^2} \\ &= \text{const.} > 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n(1-\varepsilon)}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1-\kappa^2}\Phi^{-1}(q)(1-\varepsilon)}{\kappa n\sqrt{n}} + \frac{c\sqrt{n}(1-\varepsilon)}{\kappa n\sqrt{n}} \right) = 0.$$

Damit ist die Ungleichung (33) gezeigt und somit der letzte Schritt zum Beweis von Satz 3.3 getan. \square

Wir haben nun insgesamt drei Resultate, die uns Auskunft über die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ geben, wenn die Zufallsvariable L_n die Anzahl an Ausfällen in einem homogenen Portfolio aus abhängigen Krediten mit asset-Korrelation κ^2 zählt:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[L_n \geq nq] = \mathbb{P}[p(Z) \geq q] = 1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{1-\kappa^2}\Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p)}{\kappa} \right)$,
wobei p die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredits ist.
2. $\mathbb{P}[L_n \geq nq_n] \sim C_2(n) n^{-\frac{c^2(1-\kappa^2)}{2}}$ für $n \rightarrow \infty$, wobei $q_n := \Phi(c\sqrt{\ln n})$ und $0 < c < \sqrt{2}$.
Zudem ist p die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredits
und C_2 eine subpolynomiale Funktion.

3. $\mathbb{P}[L_n \geq nq] \sim C_3(n) e^{-n \frac{c^2}{2\kappa^2}}$ für $n \rightarrow \infty$,
 wobei $p_n := \Phi(-c\sqrt{n})$ und $c > 0$. Zudem ist C_3 eine subexponentielle Funktion.

Diese Resultate sind jedoch alle asymptotisch, was bedeutet, dass wir, wenn wir sie zur Berechnung von $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für eine feste Portfoliogröße n heranziehen, immer einen Approximationsfehler machen, dessen Größe uns nicht bekannt ist. In 1 stellt sich das Problem, dass wir nicht wissen, wie schnell $\frac{L_n}{n}$ gegen $p(Z)$ konvergiert. In 2 und 3 stoßen wir vor allem auf die Schwierigkeit, dass wir die Funktion C nicht kennen, die gerade in kleineren Portfolios einen nicht zu unterschätzenden Einfluss haben kann. Zudem kennen wir auch hier die Konvergenzgeschwindigkeit nicht. Im folgenden Kapitel werden wir eine weitere Möglichkeit kennenlernen, wie wir $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ approximativ bestimmen können.

4 Schätzung von Wahrscheinlichkeiten mit Monte Carlo Methoden

Wir werden in diesem Kapitel in Anlehnung an Glasserman und Li (2005) und Kapitel 8.5 von McNeil *et al.* (2005) eine Möglichkeit besprechen, wie man mittels Monte Carlo Methoden die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ schätzen kann. Unsere Schätzungen beruhen auf Simulationen von Zufallsvariablen. Wir haben das Anliegen, ein möglichst genaues Schätzergebnis bei möglichst wenigen Simulationen zu erzielen. Die Anzahl der für eine gewisse Genauigkeit nötigen Simulationen kann man unter anderem durch Importance Sampling senken. In Abschnitt 4.3 werden wir sehen, wie man im Zusammenhang mit Importance Sampling die Ergebnisse aus Kapitel 3 nutzen kann, um möglichst „gute“ (d.h. bei möglichst wenigen Simulationen möglichst genaue) Schätzer zu konstruieren. Erst geben wir aber eine kurze Einführung in die Methoden.

4.1 Importance Sampling - die Idee

Wir stellen uns hier zunächst der allgemeineren Aufgabe, einen Schätzer für die Wahrscheinlichkeit $\gamma := \mathbb{P}[L \geq x]$ zu bestimmen, wenn L eine reelle Zufallsvariable ist, die mit Verteilung \mathbb{P}^L verteilt ist. Wir nehmen an, dass der Erwartungswert von L existiert und dass die Varianz von L endlich ist. Ein sinnvoller Ansatz scheint es zu sein, $\mathbb{P}[L \geq x]$ über die relative Häufigkeit zu schätzen, mit der Werte $L_i \geq x$ in einer großen Stichprobe L_1, \dots, L_N auftauchen, die unabhängig gemäß der Verteilung von L simuliert wird. Dieser Standard Monte Carlo Schätzer hat dann die Form

$$\hat{\gamma}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{L_i \geq x\}}.$$

Er ist offensichtlich erwartungstreu und aus dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich zudem, dass er mit wachsender Stichprobengröße N \mathbb{P} -fast sicher gegen γ konvergiert. Besonders dann, wenn $\{L \geq x\}$ ein seltenes Ereignis ist, benötigt man jedoch recht viele Simulationen, um mit $\hat{\gamma}_N$ eine brauchbare Schätzung für γ zu erhalten. Natürlich treten nämlich seltene Ereignisse auch in Simulationen selten auf. Man braucht aber eine gewisse Anzahl von Beobachtungen eines seltenen Ereignisses in einer Simulation, um zuverlässige Aussagen über seine Wahrscheinlichkeit treffen zu können (vgl. Sandmann (2004, S. 35)). Es kann beispielsweise geschehen - und ist sogar nicht unwahrscheinlich -, dass unter 10000 simulierten Variablen keine einzige ist, die im Intervall $[x, \infty)$ liegt, wenn $\mathbb{P}[L \geq x] = 10^{-6}$ ist. Es wäre dennoch ein fataler Fehler, $\mathbb{P}[L \geq x] = 0$ zu schätzen.

Wir verdeutlichen diesen Zusammenhang weiter, indem wir mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes abschätzen, welchen Wert der relative Fehler $\frac{|\hat{\gamma}_N - \gamma|}{\gamma}$ mit einer Konfidenzwahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha)$ nicht überschreitet. Der zentrale Grenzwertsatz gibt uns für jedes $a \geq 0$

$$\mathbb{P} \left[\frac{|\hat{\gamma}_N - \gamma|}{\gamma} \leq \frac{a}{\sqrt{N}} \right] \rightarrow 2\Phi \left(\frac{\gamma a}{\sqrt{v}} \right) - 1 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Dabei ist v die Varianz der Zufallsvariable $\mathbb{1}_{\{L_i \geq x\}}$, die man zu $v = \gamma(1 - \gamma)$ errechnet. Setzen wir $a := \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}{\gamma}$ erhalten wir so

$$\mathbb{P}\left[\frac{|\hat{\gamma}_N - \gamma|}{\gamma} \leq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{N}\gamma}\right] \rightarrow 1 - \alpha. \quad (36)$$

Folglich überschreitet der relative Fehler $\frac{|\hat{\gamma}_N - \gamma|}{\gamma}$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ nicht den Wert $\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}{\sqrt{N}\gamma}$. Da $\frac{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}{\gamma}$ gegen unendlich konvergiert, wenn man γ gegen Null laufen lässt, muss man also, wenn das Ereignis $\{L \geq x\}$ selten ist, eine verhältnismäßig große Zahl N an Simulationen zu Grunde legen, um den relativen Fehler - zumindest zur Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ - in Grenzen zu halten.

Die Fehlerschranke in (36) ist für jedes $\alpha \in (0, 1)$ proportional zu $\frac{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}{\sqrt{N}\gamma}$. Daher können wir diese Größe, den sogenannten Variationskoeffizienten, als Maß für die Güte eines erwartungstreuen Schätzers nutzen. Der Variationskoeffizient des Schätzers $\hat{\gamma}_N$ ist allgemein definiert als

$$\delta_{rel} := \frac{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\gamma}_N]}}{\mathbb{E}[\hat{\gamma}_N]}.$$

4.2 Importance Sampling

Die Durchführung vieler Simulationen ist sehr aufwendig. Ein anderer Weg, den Variationskoeffizienten in Grenzen zu halten, ist die Varianz des Schätzers $\hat{\gamma}_N$ durch Importance Sampling zu verringern, ohne dabei N , die Anzahl der Simulationen, zu erhöhen, oder den Erwartungswert von $\hat{\gamma}_N$ zu verändern. Diesen Weg werden wir nun verfolgen. Dabei nutzen wir die Methode der exponentiellen Maßtransformation, die wir in Kapitel 2 bereits kennengelernt haben. Wie in (9) definieren wir uns auch hier eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}^{D(t)}$ durch

$$\mathbb{P}^{D(t)}(dy) := \frac{e^{ty}}{\phi_L(t)} \mathbb{P}^L(dy). \quad (37)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbb{E}[\hat{\gamma}_N] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L_i \geq x\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x, \infty)}(y) \mathbb{P}^L(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x, \infty)}(y) e^{-ty} \phi_L(t) \mathbb{P}^{D(t)}(dy) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D(t) \geq x\}} e^{-tD(t)} \phi_L(t)], \end{aligned}$$

Wir erhalten also auch einen erwartungstreuen Schätzer für γ , wenn wir statt einer Stichprobe L_1, \dots, L_N eine Stichprobe $D_1^{(t)}, \dots, D_n^{(t)}$, die nach der Verteilung $\mathbb{P}^{D(t)}$ simuliert wird, zugrunde legen und dann γ durch

$$\bar{\gamma}_N^{(t)} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{D_i^{(t)} \geq x\}} e^{-tD_i^{(t)}} \phi_L(t) \quad (38)$$

schätzen. Für $t = 0$ ist offensichtlich $\bar{\gamma}_N^{(t)} = \hat{\gamma}_N$. Wir versuchen nun aber den Parameter t so zu wählen, dass die Varianz von $\bar{\gamma}_N^{(t)}$ möglichst klein und insbesondere kleiner als die Varianz von $\hat{\gamma}_N$ ist. Die Varianzen errechnen sich folgendermaßen:

$$\mathbb{V}[\hat{\gamma}_N] = \frac{1}{N}(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}^2] - \gamma^2) = \gamma(1 - \gamma) \quad (39)$$

$$\mathbb{V}[\bar{\gamma}_N^{(t)}] = \frac{1}{N}(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D^{(t)} \geq x\}}^2 (e^{-tD^{(t)}} \phi_L(t))^2] - \gamma^2) = \frac{1}{N}(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D^{(t)} \geq x\}} (e^{-tD^{(t)}} \phi_L(t))^2] - \gamma^2). \quad (40)$$

Eine Minimierung der Varianz von $\bar{\gamma}_N^{(t)}$ ist also gleichbedeutend mit einer Minimierung des zweiten Moments von $\mathbb{1}_{\{D^{(t)} \geq x\}} \exp(-tD^{(t)}) \phi_L(t)$, das wir im Folgenden mit $M^2(t, x)$ bezeichnen. Wir sollten demnach versuchen, t so zu wählen, dass $e^{-ty} \phi_L(t)$ für $y \geq x$ möglichst klein ist. Das bedeutet, dass wir das Ereignis $\{D^{(t)} \geq x\}$ wahrscheinlicher machen als das Ereignis $\{L \geq x\}$, was schnell klar wird, wenn man sich an die Definition von $\mathbb{P}^{D^{(t)}}$ in (37) erinnert. Beim Importance Sampling gewichten wir also durch einen Maßwechsel die für uns wichtigen Werte $y \geq x$ höher und gleichen dies durch einen Korrekturterm (hier $e^{-ty} \phi_L(t)$) wieder aus, so dass der Schätzer, den wir so gewinnen, erwartungstreu bleibt, aber eine geringere Varianz besitzt.

Bevor wir uns damit beschäftigen, wie wir in unserem Modell aus Kapitel 3 einen möglichst guten Schätzer für $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ gewinnen, wollen wir noch kurz anmerken, dass es theoretisch sogar möglich ist, die Varianz eines Schätzers auf Null zu reduzieren. Dafür ändert man die Verteilung von L nicht mit exponentieller Maßtransformation, sondern man setzt

$$\mathbb{P}^D(dy) := \frac{\mathbb{1}_{[x, \infty)}(y)}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}]} \mathbb{P}^L(dy).$$

Dann erzeugt man eine unabhängige Stichprobe D_1, \dots, D_N nach der Verteilung \mathbb{P}^D und schätzt γ durch

$$\tilde{\gamma}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{D_i \geq x\}} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D_i \geq x\}}]} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}] = \gamma.$$

Der Schätzer $\tilde{\gamma}_N$ liefert also immer, selbst wenn man nur eine einelementige Stichprobe simuliert, das richtige Ergebnis und hat somit die Varianz $\mathbb{V}[\tilde{\gamma}_N] = 0$. Man kann ihn jedoch in der Praxis nicht nutzen, weil er nur unter Kenntnis von $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}]$ konstruiert werden kann, und genau das ja der Wert ist, den man eigentlich schätzen möchte.

Interessant wäre es, herauszufinden, ob es auch zu einer wesentlichen Varianzreduktion kommt, wenn man in $\tilde{\gamma}_N$ den unbekannten Wert $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L \geq x\}}]$ durch eine erste grobe Schätzung ersetzt, wie man sie beispielsweise aus der Theorie der großen Abweichungen erhalten kann. Wollen wir $\mathbb{P}[L_n \geq nq] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{L_n \geq nq\}}]$ in unserem Modell aus Kapitel 3 schätzen, könnten wir zum Beispiel die Approximation aus dem Satz von Cramér für den unabhängigen Fall nutzen und die Approximationen, die auf Seite 33 zusammengefasst sind, für den abhängigen Fall. Diese sind zwar als alleinige Approximationen der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ insbesondere für kleine Werte von n sehr ungenau, könnten aber so im Zusammenhang mit Importance Sampling gegebenenfalls dazu beitragen, einen Schätzer mit kleiner Varianz für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ zu konstruieren, der auch bei einer geringen Anzahl an Simulationen brauchbare Ergebnisse liefert. Es

wäre lohnenswert, dies durch eine Simulationsstudie zu überprüfen.

4.3 Konstruktion asymptotisch optimaler Importance Sampling Schätzer

Wir gehen nun weiter auf die Schätzung von $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ in unserem Kreditrisikomodell aus Kapitel 3 ein. Insbesondere sind wir daran interessiert, die Wahrscheinlichkeiten für seltene Ereignisse genau schätzen zu können, also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall sehr vieler Kredite (d.h. $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für eine sehr große Schwelle q) oder die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall überdurchschnittlich vieler sehr hoch gerateter Kredite (d.h. $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für eine sehr kleine Ausfallwahrscheinlichkeit $p = \mathbb{P}[Y_1 = 1]$). Wir werden dafür die oben vorgestellte Importance Sampling Methode mit exponentieller Maßtransformation nutzen. Von einem guten Schätzer verlangen wir zum einen, dass er erwartungstreu ist, und zum anderen, dass er eine möglichst kleine Varianz besitzt. Möchten wir die Wahrscheinlichkeit eines seltenen Ereignisses schätzen, sind asymptotisch optimale Schätzer in dieser Hinsicht besonders geeignet.¹² Sie zeichnen sich dadurch aus, dass bei ihnen $M^2(t, nq)$ (definiert wie oben) unter allen erwartungstreuen Schätzern mit der schnellsten Rate fällt, wenn die Wahrscheinlichkeit, die man mit ihnen schätzen möchte, gegen Null konvergiert.

4.3.1 Anwendung auf ein unabhängiges Kreditportfolio

Wir versuchen zunächst für den Fall eines unabhängigen Kreditportfolios einen asymptotisch optimalen Schätzer für $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ mit $p < q < 1$ zu konstruieren. Dabei orientieren wir uns an Remark 2.3 in Pham (2010). Eigentlich ist hier eine Schätzung gar nicht nötig, da man $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ auch direkt berechnen kann. Wir werden aber dennoch näher darauf eingehen, da dieser Fall, in dem der korrekte Wert $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ bekannt ist, die Möglichkeit bietet, in einer Simulation festzustellen, inwieweit die Nutzung eines asymptotisch optimalen Schätzers das Schätzergebnis auch für realistische Portfoliogrößen im Vergleich zum Standard Monte Carlo Schätzer verbessert.

Durch exponentielle Maßtransformation, wie in (38) beschrieben, erhalten wir den Schätzer

$$\bar{\gamma}_N^{(t)} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{D_i^{(n,t)} \geq nq\}} e^{-tD_i^{(n,t)}} \phi_{L_n}(t),$$

für $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$. Dabei sind $D_1^{(n,t)}, \dots, D_N^{(n,t)}$ unabhängig voneinander nach der Verteilung $\mathbb{P}^{D^{(n,t)}}$ simuliert, die durch

$$\mathbb{P}[D^{(n,t)} = y] = \frac{e^{ty}}{\phi_{L_n}(t)} \mathbb{P}[L_n = y]$$

definiert ist. Wegen der Unabhängigkeit und identischen Bernoulli-Verteilung der Ausfallindikatoren Y_i gilt $\phi_{L_n}(t) = (\phi_{Y_1})^n = (1 - p + pe^t)^n$. $D^{(n,t)}$ ist also binomialverteilt zu den Parametern n und $\frac{pe^t}{1-p+pe^t}$.

¹² Vgl. Glasserman und Li (2005, S. 6).

Nun suchen wir einen Parameter t , für den $M^2(t, nq) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D^{(n,t)} \geq nq\}} (e^{-tD^{(n,t)}} \phi_{L_n}(t))^2]$ möglichst klein ist. Einerseits haben die Abschätzung

$$M^2(t, nq) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D^{(n,t)} \geq nq\}} (e^{-tD^{(n,t)}} \phi_{L_n}(t))^2] \leq (e^{-tnq} (\phi_{Y_1}(t))^n)^2 = \exp(-2n(tq - \ln \phi_{Y_1}(t))).$$

Andererseits können wir aus der Jensenschen Ungleichung und dem Satz von Cramér folgern, dass für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$M^2(t, nq) \geq (\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D^{(n,t)} \geq nq\}} e^{-tD^{(n,t)}} \phi_{L_n}(t)])^2 = \mathbb{P}[L_n \geq nq]^2 \rightsquigarrow C(n) \exp(-2n \sup_{t \in \mathbb{R}} [tq - \ln \phi_{Y_1}(t)]).$$

Damit ist die schnellstmögliche Rate, mit der $M^2(t, nq)$ fallen kann, gerade doppelt so groß wie die Rate, mit der die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ fällt. Wir erhalten also einen asymptotisch optimalen Schätzer, wenn wir $t = t_q = \ln \left(\frac{q-pq}{p-pq} \right)$ wählen. Dieser Wert maximiert nämlich $tq - \ln \phi_{Y_1}(t)$ (vgl. Beispiel 2.7). So gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M^2(t_q, nq) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq]. \quad (41)$$

Resultate zur asymptotischen Optimalität werden oft in der Form (41) angegeben.

4.3.2 Anwendung auf ein abhängiges Kreditportfolio

Wir möchten nun in Anlehnung an Glasserman und Li (2005) auch für den Fall eines abhängigen Kreditportfolios einen asymptotisch optimalen Schätzer für $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ herleiten. Ein erste Möglichkeit, $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ im abhängigen Fall zu schätzen, ist die folgende: Wir generieren zunächst N_1 Werte Z_1, \dots, Z_{N_1} für Z nach der Standardnormalverteilung. Dann berechnen wir für jeden dieser Werte die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $p(Z_j)$ wie in (12). Bedingt unter $Z = Z_j$ ist L_n binomialverteilt zu den Parametern n und $p(Z_j)$. Ist $p(Z_j) < q$, konstruieren daher den Schätzer

$$\tilde{\gamma}_{N_2}^{(t_q(Z_j))} := \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbb{1}_{\{D_i^{(n,t_q(Z_j))} \geq nq\}} \exp\left(-t_q(Z_j) D_i^{(n,t_q(Z_j))}\right) \phi_{L_n}(t_q(Z_j), Z_j)$$

für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq | Z = Z_j]$, wobei $t_q(Z_j)$ die Maximalstelle t_q für den Fall $p = p(Z_j)$ bezeichnet und $\phi_{L_n}(t, z) := \mathbb{E}[e^{tL_n} | Z = z]$ die bedingte momenterzeugende Funktion von L_n ist. $D_1^{(n,t_q(Z_j))}, \dots, D_{N_2}^{(n,t_q(Z_j))}$ sind analog zum unabhängigen Fall nach einer Binomialverteilung mit den Parametern n und $\frac{p(Z_j)e^{t_q(Z_j)}}{1-p(Z_j)+p(Z_j)e^{t_q(Z_j)}}$ generiert. Diesen Schätzer für $\mathbb{P}[L_n \geq nq | Z = Z_j]$ haben wir im vorigen Abschnitt als asymptotisch optimal nachgewiesen. Ist $p(Z_j) \geq q$, gehen wir genauso vor, transformieren aber die Verteilung von $D^{(n,t_q(Z_j))}$ nicht, d.h. wir setzen $t_q(Z_j) = 0$. Den Schätzer für den abhängigen Fall erhalten wir schließlich, wenn wir das arithmetische Mittel der Schätzer $\tilde{\gamma}_{N_2}^{(t_q(Z_1))}, \dots, \tilde{\gamma}_{N_2}^{(t_q(Z_{N_1}))}$ bilden, also

$$\bar{\gamma}_{(N_1, N_2)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\gamma}_{N_2}^{(t_q(Z_j))}.$$

Ist die Korrelation κ^2 der Bonitäten der Kreditnehmer klein, ist dieser Schätzer ziemlich gut. Wenn die Bonitäten der Kreditnehmer aber stark korrelieren, ist er weniger effektiv, da der systematische Risikofaktor Z , auf dessen Verteilung wir noch kein Importance Sampling angewendet haben, in diesem Fall einen großen Einfluss hat. Glasserman und Li (2005) führen diesen Punkt in Kapitel 4 ihres Papers weiter aus.

Wir werden also im Folgenden versuchen, den oben konstruierten Schätzer effektiver zu machen, indem wir Importance Sampling auf die Verteilung von Z anwenden. In Beispiel 2.13 haben wir gesehen, dass wir durch Anwendung von exponentieller Maßtransformation den Erwartungswert einer standardnormalverteilten Zufallsvariable auf jeden beliebigen Wert $\mu \in \mathbb{R}$ verschieben können.

Nutzen wir diese Möglichkeit, können wir $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ folgendermaßen erwartungstreus schätzen:

Zunächst generieren wir N_1 Werte $T_1^{(\mu)}, \dots, T_{N_1}^{(\mu)}$ einer Zufallsvariablen $T^{(\mu)}$, die nach der $N(\mu, 1)$ -Verteilung verteilt ist. Dann berechnen wir für jeden dieser Werte die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $p(T_j^{(\mu)})$ wie in (12). Wie im oben geschilderten Fall konstruieren wir für jedes $1 \leq j \leq N_1$ den Schätzer

$$\bar{\gamma}_{N_2}^{(t_q(T_j^{(\mu)}))} := \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbb{1}_{\left\{ D_i^{(n, t_q(T_j^{(\mu)}))} \geq nq \right\}} \exp \left(-t_q(T_j^{(\mu)}) D_i^{(n, t_q(T_j^{(\mu)}))} \right) \phi_{L_n}(t_q(T_j^{(\mu)}), T_j^{(\mu)}),$$

wobei $t_q(T_j^{(\mu)}) = \mathbb{1}_{[0, q]}(p(T_j^{(\mu)})) \ln \left(\frac{q - p(T_j^{(\mu)})q}{p(T_j^{(\mu)}) - p(T_j^{(\mu)})q} \right)$ ist und $D_1^{(n, t_q(T_j^{(\mu)}))}, \dots, D_{N_2}^{(n, t_q(T_j^{(\mu)}))}$ nach einer Binomialverteilung mit den Parametern n und $\frac{p(T_j^{(\mu)})e^{t_q(T_j^{(\mu)})}}{1 - p(T_j^{(\mu)}) + p(T_j^{(\mu)})e^{t_q(T_j^{(\mu)})}}$ generiert

sind. Im Schätzer für $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ müssen wir dann schließlich die Verschiebung des Erwartungswerts von Z wieder ausgleichen, indem wir für jedes $1 \leq j \leq N_1$ den Schätzer $\bar{\gamma}_{N_2}^{(t_q(T_j^{(\mu)}))}$ mit $\exp \left(-\mu T_j^{(\mu)} + \frac{1}{2} \mu^2 \right)$ multiplizieren. Wir erhalten somit insgesamt den Schätzer

$$\bar{\gamma}_{N_1, N_2}^{(\mu)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \bar{\gamma}_{N_2}^{(t_q(T_j^{(\mu)}))} e^{-\mu T_j^{(\mu)} + \frac{1}{2} \mu^2}.$$

Die Frage ist nun, ob wir einen Wert μ finden, für den der Schätzer asymptotisch optimal ist.

Zunächst einmal muss die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren, wenn wir sie durch einen asymptotisch optimalen Schätzer schätzen möchten. Wir wissen aus Kapitel 3 jedoch, dass $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ im abhängigen Fall gegen eine echt positive Konstante konvergiert. Daher setzen wir wie in Satz 3.1 $q = q_n = \Phi(c\sqrt{\ln n})$ mit $0 < c < \sqrt{2}$ und lassen so $\mathbb{P}[L_n \geq nq_n]$ gegen Null laufen. Alternativ könnten wir auch wie in Satz 3.3 die Ausfallwahrscheinlichkeit p von n abhängig wählen und gegen Null laufen lassen.

Der Schätzer $\bar{\gamma}_{(N_1, N_2)}^{(\mu)}$ ist für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ erwartungstreu. Unser Ziel ist ein $\mu \in \mathbb{R}$ zu finden, für welches das zweite Moment

$$M^2(\mu, nq_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\left\{ D^{(n, t_{q_n}(T^{(\mu)}))} \geq nq_n \right\}} \left(\exp(-t_{q_n}(T^{(\mu)}) D^{(n, t_{q_n}(T^{(\mu)}))}) \phi_{L_n}(t_{q_n}(T^{(\mu)}), T^{(\mu)}) e^{-\mu T^{(\mu)} + \frac{1}{2} \mu^2} \right)^2]$$

mit der schnellstmöglichen Rate fällt, mit der es für einen erwartungstreuen Schätzer fallen kann. Die Jensensche Ungleichung gibt uns die Abschätzung

$$M^2(\mu, nq_n) \geq \mathbb{P}[L_n \geq nq_n]^2. \quad (42)$$

Die Rate, mit der $M^2(\mu, nq_n)$ fällt, muss also mindestens doppelt so groß sein wie die, mit der die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq_n]$ fällt. Für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq_n]$ haben wir in Satz 3.1 berechnet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \mathbb{P}[L_n \geq nq_n] = -\frac{c^2}{2} \frac{1-\kappa^2}{\kappa^2}$$

Sie fällt also mit der polynomiellen Rate $\frac{c^2}{2} \frac{1-\kappa^2}{\kappa^2}$. Finden wir ein $\mu \in \mathbb{R}$, für das $M^2(\mu, nq_n)$ genau mit der polynomiellen Rate $c^2 \frac{1-\kappa^2}{\kappa^2}$ fällt, so ist unser Schätzer $\bar{\gamma}_{(N_1, N_2)}^{(\mu)}$ für dieses μ asymptotisch optimal. Wir werden gleich sehen, dass μ_n aus dem Beweis von Satz 3.1 diese Bedingung erfüllt.

$M^2(\mu, nq_n)$ können wir folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} M^2(\mu, nq_n) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D^{(n, t_{q_n}(T^{(\mu)})}) \geq nq_n\}} \exp(-2t_{q_n}(T^{(\mu)}) D^{(n, t_{q_n}(T^{(\mu)}))}) \\ &\quad + 2n \ln \phi_{Y_1}(t_{q_n}(T^{(\mu)}), T^{(\mu)}) \exp(-2\mu T^{(\mu)} + \mu^2)] \\ &\leq \mathbb{E}[\exp(-2nt_{q_n}(T^{(\mu)}) D^{(n, t_{q_n}(T^{(\mu)}))}) + 2n \ln \phi_{Y_1}(t_{q_n}(T^{(\mu)}), T^{(\mu)}) \exp(-2\mu T^{(\mu)} + \mu^2)] \\ &= \mathbb{E}[\exp(-2\mu T^{(\mu)} + \mu^2 + 2F_n(T^{(\mu)})]. \end{aligned}$$

Dabei ist F_n wie im Beweis von Satz 3.1 definiert als

$$F_n(z) = -n \sup_{t \geq 0} [tq_n - \ln \phi_{Y_1}(t, z)].$$

Das Supremum in der Definition von F_n ist in unserem Fall ein Maximum und wird genau an der Stelle $t_{q_n}(T^{(\mu)})$ angenommen, denn genau so hatten wir $t_{q_n}(T^{(\mu)})$ definiert. Wegen der Konkavität von F_n erhalten wir wie in (25)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(-2\mu T^{(\mu)} + \mu^2 + 2F_n(T^{(\mu)})] \\ \leq \mathbb{E}[\exp(-2\mu T^{(\mu)} + \mu^2 + 2F_n(\mu) + 2F'_n(\mu)(T^{(\mu)} - \mu))]. \end{aligned} \quad (43)$$

Wählen wir dann wie im Beweis von Satz 3.1 $\mu = \mu_n$ als Fixpunkt von F'_n , hängt der Term, dessen Erwartungswert in (43) berechnet werden soll, nicht mehr von $T^{(\mu)}$ ab und wir erhalten insgesamt

$$M^2(\mu_n, nq_n) \leq \exp(2F_n(\mu_n) - \mu_n^2).$$

Da F_n nichtpositiv ist, ergibt sich weiter

$$M^2(\mu_n, nq_n) \leq \exp(-\mu_n^2).$$

Benutzen wir dann unser Resultat aus (28), haben wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln M^2(\mu_n, nq_n) \geq \frac{\mu_n^2}{\ln n} = -c^2 \frac{1-\kappa^2}{\kappa^2}.$$

Zusammen mit der Abschätzung (42) haben wir also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \ln M^2(\mu_n, nq_n) = -c^2 \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}.$$

Somit fällt $M^2(\mu, nq_n)$ für $\mu = \mu_n$ genau mit der polynomiellen Rate $c^2 \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2}$ und ist asymptotisch optimal. Pham (2010, S. 45) weist darauf hin, dass auch die Wahl $\mu = z_n$ (z_n definiert wie in Satz 3.1) zu einem asymptotisch optimalen Schätzer führt.

Wir haben hiermit einen asymptotisch optimalen Schätzer gefunden, den wir nutzen können, um in einem großen Portfolio die Wahrscheinlichkeit für $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$ für eine große Schwelle q approximativ zu berechnen. Mit Satz 3.3 erhalten wir ein ähnliches Resultat für eine kleine Ausfallwahrscheinlichkeit p : Ist $p = p_n = \Phi(-c\sqrt{n})$ für ≥ 0 wie in Satz 3.3, konstruieren wir folgendermaßen einen asymptotisch optimalen Schätzer für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$:

Wir generieren Werte T_1, \dots, T_{N_1} nach einer Normalverteilung mit den Parametern $\mu = \mu_n$ und $\sigma = 1$. μ_n ist dabei Fixpunkt der ersten Ableitung der Funktion

$$F_n(z) = \exp \left(-n \sup_{t \geq 0} [tq - \psi_n(t, z)] \right),$$

wobei $\psi_n(t, z) := \ln(1 - p_n(z) + p_n(z)e^t)$ die bedingte kumulantenerzeugende Funktion der Ausfallindikatoren Y_i ist. Danach berechnen wir für jeden Wert T_j die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $p_n(T_j)$ wie in (12). Anschließend konstruieren wir wie oben für jedes $1 \leq j \leq N_1$ den Schätzer

$$\bar{\gamma}_{N_2}^{(t_q(T_j))} := \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbb{1}_{\{D_i^{(n, t_q(T_j))} \geq nq\}} \exp(-t_q(T_j) D_i^{(n, t_q(T_j))}) \phi_{L_n}(t_q(T_j), T_j),$$

wobei $t_q(T_j) = \mathbb{1}_{[0, q]}(p_n(T_j)) \ln \left(\frac{q - p(T_j)q}{p_n(T_j) - p_n(T_j)q} \right)$ ist und $D_1^{(n, t_q(T_j))}, \dots, D_{N_2}^{(n, t_q(T_j))}$ nach einer Binomialverteilung mit den Parametern n und $\frac{p_n(T_j)e^{t_q(T_j)}}{1 - p_n(T_j) + p_n(T_j)e^{t_q(T_j)}}$ generiert sind. Daraus ergibt sich dann schließlich der Schätzer

$$\bar{\gamma}_{(N_1, N_2)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \bar{\gamma}_{N_2}^{(t_q(T_j))} e^{-\mu_n T_j + \frac{1}{2} \mu_n^2}$$

für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[L_n \geq nq]$.

Die Schätzer für Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse, die wir in diesem Abschnitt hergeleitet haben, sind alle nur asymptotisch optimal. Trotzdem zeigen Simulationen, dass sie auch für realistische Portfoliogrößen, wie zum Beispiel $n = 1000$, die Präzision bei der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse deutlich erhöhen (vgl. Glasserman und Li (2005)). Glasserman und Li (2005) zeigen anhand numerischer Beispiele, dass das hier aufgezeigte Vorgehen auch in Mehrfaktormodellen zur effektiven

Schätzung von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse eingesetzt werden kann. Man muss jedoch bedenken, dass das vorgestellte Importance Sampling Verfahren etwa doppelt so lange dauert wie das Standard Monte Carlo Verfahren, selbst wenn man die Zeit, die zur Berechnung des Parameters μ_n benötigt wird, nicht einrechnet. Dieser Mehraufwand zahlt sich aber durch den deutlichen Präzisionsgewinn bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse aus (vgl. Glasserman und Li (2005, S. 16f.)).

Z. Li (2009) führt die Überlegungen von Glasserman und J. Li (2005) fort, indem er zeigt, wie man im Gauß-Copula-Modell mit Hilfe von Importance Sampling effizient Risikomaße wie Value at Risk und Expected Shortfall schätzen kann.

5 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde beispielhaft gezeigt, wie man die Theorie großer Abweichungen im Kreditrisikomanagement nutzen kann. Hauptinteresse war es, gute Schätzungen für Wahrscheinlichkeiten unerwartet hoher Verluste in einem Kreditportfolio zu erhalten. Die Abhängigkeit der Ausfälle in einem Kreditportfolio haben wir mit einem Einfaktormodell modelliert. In diesem Modell konnten wir ausgehend vom Satz von Cramér asymptotische Resultate herleiten, die uns helfen können, Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse in großen Kreditportfolios zu approximativ zu berechnen. Wir haben gesehen, dass die Anwendung dieser Resultate vor allem im Zusammenhang mit Importance Sampling großen Nutzen für die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse hat. In der Praxis sind die Abhängigkeiten, die einem Portfolio unterliegen, natürlich komplexer. Wie Glasserman und Li (2005) an numerischen Resultaten zeigen, lassen sich die Beobachtungen, die wir zum Importance Sampling gemacht haben, jedoch auch auf Mehrfaktormodelle übertragen. Interessant wäre es herauszufinden, inwiefern sich unsere Beobachtungen auch auf Modelle übertragen lassen, in denen die Abhängigkeit der Kredite nicht wie bei uns mit der Gauß-Copula modelliert wird, die momentan herber Kritik ausgesetzt ist, da sie asymptotische Unabhängigkeit erzeugt.

6 Anhang

6.1 Satz (Die exponentielle Chebyshev-Ungleichung)

Sei X eine reelle Zufallsvariable. Dann gilt für alle $t \geq 0$ die folgende Ungleichung:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq e^{-ta} \mathbb{E}[e^{tX}]$$

BEWEIS: Für alle $t \geq 0$ gilt

$$X \geq a \implies e^{t(X-a)} \geq e^0 = 1.$$

Wegen der Positivität der e-Funktion und wegen Linearität und Monotonie des Erwartungswerts gilt dann insgesamt

$$\mathbb{P}[X \geq a] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq a}] \leq \mathbb{E}[e^{t(X-a)}] = e^{-ta} \mathbb{E}[e^{tX}].$$

□

Diese Ungleichung ist genau die Markov-Ungleichung für die monoton wachsende Funktion $g(t) = e^t$.

6.2 Bemerkung

Da der bedingte Erwartungswert \mathbb{P} -fast sicher linear und monoton ist, gilt die exponentielle Chebyshev-Ungleichung \mathbb{P} -fast sicher auch in einer bedingten Form.

$$\mathbb{P}[X \geq a \mid Z] \leq e^{-ta} \mathbb{E}[e^{tX} \mid Z] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Dabei ist Z eine weitere Zufallsvariable, die auf dem gleichen Raum definiert ist wie X .

6.3 Satz

Für $x \rightarrow \infty$ gilt

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x} \varphi(x).$$

Genauer gesagt gilt für alle $x > 0$ die folgende Ungleichung:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \varphi(x).$$

BEWEIS:¹³ Man verifiziert leicht, dass der rechte und linke Term auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar sind und dass für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \varphi(x) \right) &= \left(-1 + 3 \frac{1}{x^4} \right) \varphi(x) \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \varphi(x) \right) &= \left(-1 - \frac{1}{x^2} \right) \varphi(x). \end{aligned} \tag{44}$$

Offensichtlich gilt für alle $x > 0$ die Ungleichung

$$\left(1 - 3 \frac{1}{x^4} \right) \varphi(x) < \varphi(x) < \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \varphi(x).$$

¹³ Vgl. Feller (1968, S. 175f.).

Da $\int_x^\infty \varphi(y)dy = 1 - \Phi(x)$, folgt daraus mit der Monotonie des Integrals unter Zurhilfenahme von (44) für $x > 0$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \varphi(x) = \int_x^\infty \left(1 - 3\frac{1}{y^4}\right) \varphi(y)dy < 1 - \Phi(x) < \int_x^\infty \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \varphi(y)dy = \frac{1}{x} \varphi(x).$$

□

7 Literaturverzeichnis

- BLUHM, Christian/OVERBECK, Ludger/WAGNER, Christoph (2010): *Introduction to Credit Risk Modeling*. 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- BUCKLEW, James A. (2004): *Introduction to Rare Event Simulation*. Springer-Verlag.
- COTTIN, Claudia/DÖHLER, Sebastian (2009): *Risikoanalyse. Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*. Vieweg+Teubner.
- FELLER, William (1968): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3rd Edition, John Wiley and Sons.
- GEBENNUS, Sebastian (2006): *Das asymptotische Verhalten der gewichteten Höhe des zweifach gewichteten Verzweigungsprozesses*. Diplomarbeit, WWU Münster, Download als pdf-Datei unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/alsmeyer/Diplomarbeiten/Gebennus.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).
- GLASSERMAN, Paul/LI, Jingyi (2005): *Importance Sampling for Portfolio Credit Risk*. Download als pdf-Datei unter http://finmath.stanford.edu/seminars/documents/Glasserman_IS_CreditRisk.pdf (abgerufen am 02.10.2012).
- KLENKE, Achim (2008): *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2. korrigierte Auflage, Springer-Verlag.
- KÖNIG, Wolfgang (2006): *Große Abweichungen, Techniken und Anwendungen*. Vorlesungsskript, Universität Leipzig, Download als pdf-Datei unter <http://www.wias-berlin.de/people/koenig/www/GA.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).
- LI, Zhao (2009): *Importance Sampling for Estimating Risk Measures in Portfolio Credit Risk Models*. Download als pdf-Datei unter <http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb09/091102b.pdf> (abgerufen am 08.10.2012).
- LÖWE, Matthias: *Wahrscheinlichkeitstheorie II*. Vorlesungsskript, WWU Münster, Download als pdf-Datei unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/loewe/skript.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).
- MCNEIL, Alexander J./ FREY, Rüdiger/ EMBRECHTS, Paul (2005): *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- PAULSEN, Volkert (2009): *Credit Metrics: Eine Einführung*. Download als pdf-Datei unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/WeiterePublikationen/CreditMetrics.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).
- PHAM, Huyêñ (2010): *Large deviations in mathematical finance*. Based on Natixis lectures, Fall 2008, and Master course at University Paris Diderot and ENSAE, Download als pdf-Datei unter <http://felix.proba.jussieu.fr/pageperso/pham/GD-finance.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).
- SALMON, Felix (2009): *Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street*. Wired, 23.02.2009, http://www.wired.com/techbiz/it/magazine/17-03/wp_quant?currentPage=all.
- SANDMANN, Werner (2004): *Simulation seltener Ereignisse mittels Importance Sampling unter besonderer Berücksichtigung Markovscher Modelle*. Dissertation, FWU Bonn, Download als pdf-Datei unter <http://hss.ulb.uni-bonn.de/2004/0360/0360.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).

SLUD, Eric V. (1977): *Distribution Inequalities for the Binomial Law*. In: The Annals of Probability, 5(3):404-412.

WINTER, Anita (2009): *Die Theorie der großen Abweichungen und Anwendungen. Basiert auf dem gleichnamigen Skript von Wolfgang König*. Vorlesungsskript, TU München, Download als pdf-Datei unter <http://www-m5.ma.tum.de/pers/winter/1d01.pdf> (abgerufen am 02.10.2012).

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig, ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen wurden, habe ich als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Münster, den 09.10.2012

Maren Urner