



BEWERTUNG VON DERIVATEN IM BLACK-SCHOLES MODELL

BACHELORARBEIT

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:

PD Dr. Volkert Paulsen

Eingereicht von:

Sven Uppgang

Münster, 21. August 2012

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Sven Uppgang*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Münster, 21. August 2012

Sven Uppgang

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung und Motivation	1
2. Die Modellgrundlage	3
2.1. Motivation	3
2.2. Finanzmathematische Definitionen	4
2.3. Der Preisprozess für den Bond	6
2.4. Der Preisprozess für das risky asset	7
2.5. Kurze Zusammenfassung	17
3. Das Äquivalente Martingalmaß	19
3.1. Motivation	19
3.2. Herleitung des Äquivalenten Martingalmaßes	20
3.2.1. Der Satz von Girsanov	24
3.3. Kurze Zusammenfassung	33
4. Bewertung einer Call-Option	34
4.1. Bewertung im Finanzmarktmodell	34
4.2. Die Black-Scholes Formel	35
4.3. Fazit und Ausblick	40
5. Bewertung einer Barriere-Option	42
5.1. Barriere-Optionen	42
5.2. Reflexionsprinzip für den Wienerprozess	44
5.3. Der Preis eines Down-and-Out Calls	59
5.4. Fazit und Ausblick	63
Literaturverzeichnis	64
A. Anhang	65

1. Einführung und Motivation

Die internationalen Finanzmärkte haben sich in den letzten Jahrzehnten zu einem essentiellen Teil unserer Wirtschaftssysteme entwickelt. Nicht zuletzt durch die weltweite Finanzkrise seit 2007 wurde jedoch deutlich, dass die Risiken von Spekulationen an diesen Märkten nicht unterschätzt werden dürfen. Aber auch ohne gezielt an der Börse zu spekulieren, werden z.B. Unternehmen in ihren Handlungen durch die schwankenden Kurse beeinflusst. Betrachten wir dazu ein international tätiges Unternehmen aus Deutschland, welches Rohstoffe von einem Lieferanten aus den USA bezieht. Der Rechnungsbetrag muss in Dollar beglichen werden und es wird ein Zahlungsziel von 30 Tagen gewährt. Falls das Unternehmen keine Dollar vorrätig hält, kann die Rechnung unter Berücksichtigung des aktuellen Wechselkurses auch in Euro bezahlt werden. Die Gefahr für das Unternehmen besteht darin, dass sich der Kurswert für einen Dollar bis zum Ende des Zahlungsziels ungünstig entwickelt, wodurch die Kosten in die Höhe steigen. Um diesem Risiko schon beim Rechnungseingang entgegenzuwirken, kauft das Unternehmen an der Frankfurter Börse eine Call-Option auf den Dollarwert. So kann bei einem Strikepreis K gesichert werden, dass die Kosten für einen Dollar am Zahlungstag den Wert K nicht übersteigen. Wenn der Kurs am Zahlungstag sogar unterhalb von K liegt, ist es für das Unternehmen vorteilhafter die Option verstreichen zu lassen und den aktuellen Preis für einen Dollar zu bezahlen. Für diese Chance das Risiko zu mindern und dadurch die Höhe des möglichen Verlustes einzugrenzen, muss das Unternehmen einen Preis, die Optionsprämie, bezahlen. Nach dem Prinzip der Arbitragefreiheit kann eine Call-Option nicht kostenlos ausgegeben werden, da sonst ohne eingesetztes Kapital und ohne Eingehen von Risiko eine Chance auf Gewinn bestünde. Aber was ist der arbitragefreie Preis einer Call-Option? Bereits im Jahr 1900 hat sich Louis Bachelier mit diesem Thema auseinandergesetzt und auch in den nachfolgenden Jahren versuchten sich weitere Mathematiker daran, ein Modell aufzubauen mit dem es möglich ist Derivate zu bewerten. Diese Modelle wurden jedoch teilweise unter kritischen Annahmen, z.B. dass der Preis des Underlyings einem Prozess folgt, der auch negative Werte annimmt, hergeleitet oder sie beinhalteten Variablen, die in der Realität kaum zu quantifizieren sind, wie z.B. die persönliche Risikoeinstellung.

Fischer Black und Myron Samuel Scholes gelang es schließlich eine Bewertungsformel für eine Call-Option herzuleiten, die ausschließlich auf erfassbaren Parametern beruht. Das Ergebnis ist bekannt als Black-Scholes Formel und wurde von Black und Scholes in ihrer Arbeit mit dem Titel "The pricing of options and corporate liabilities." [01] im Jahr 1973 veröffentlicht. Die Händler an der Börse fingen in den darauffolgenden Jahren an, die Ergebnisse von Black und Scholes mittels speziell programmierter Taschenrechner für die Bewertung von Call-Optionen zu nutzen. Das finanzmathematische Modell in dem die Bewertungsformel hergeleitet wurde, wird als das Black-Scholes Modell bezeichnet.

Neben Fischer Black und Myron S. Scholes war außerdem Robert Carhart Merton an der Entwicklung des Modells beteiligt, jedoch veröffentlichte Merton eine eigene Publikation mit dem Titel "Theory of rational option pricing" [07]. Robert C. Merton und Myron S. Scholes wurden 1997 für ihre Arbeit mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Da die Regularien eine posthum Verleihung des Nobelpreises untersagen, blieb es Fischer Black (†1995) verwehrt die Auszeichnung ebenfalls verliehen zu bekommen.

Das Black-Scholes Modell ist das zentrale Thema der vorliegenden Bachelorarbeit. Im Folgenden wird selbiges hergeleitet, um anschließend zu untersuchen, wie sich in diesem Finanzmarktmodell bestimmte Derivate bewerten lassen. Dabei stellt Kapitel 2 die zentralen Bestandteile des Modells vor. Dazu gehören sowohl die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen, als auch die stochastischen Prozesse für ein risky asset und einen Bond. Mit diesen Ergebnissen wird im Anschluss das Äquivalente Martingalmaß (Kapitel 3) mit Hilfe des Satzes von Girsanov berechnet. Die beiden Kapitel 4 und 5 befassen sich mit den arbitragefreien Preisen für eine europäische Call-Option bzw. eine Barriere-Option (Down-and-Out europäische Call-Option). In der Bewertung der Barriere-Option wird dabei das Reflexionsprinzip für einen Wienerprozess bewiesen.

In dieser Bachelorarbeit werden Grundkenntnisse über Finanzmarktmodelle vorausgesetzt. Um einen guten Lesefluß zu ermöglichen, werden an den entsprechenden Stellen alle notwendigen Definitionen aufgeführt und erläutert.

2. Die Modellgrundlage

2.1. Motivation

Zu Beginn dieser Bachelorarbeit wird die Grundlage für die spätere Bewertung von Derivaten gelegt, indem wir einen vollkommenen Finanzmarkt in stetiger Zeit modellieren. Auf diesem Finanzmarkt werden Basisfinanzgüter gehandelt, deren Kurswerte als Underlying für die später zu bewertenden Derivate dienen. Um eine Aussage über die Preise von Derivaten treffen zu können, muss als erstes betrachtet werden, wie sich das Underlying in unserem Modell verhält. Wenn beispielsweise der faire Preis einer Call-Option auf eine Aktie gesucht wird, dann hängt dieser von den Eigenschaften des Kurswertes der Aktie ab. Welche Charakteristika der Aktie Einfluss auf den Preis einer Call-Option nehmen, werden wir später in der Black-Scholes Formel sehen. Es werden in dieser Arbeit nur Derivate bewertet, die auf einem risky asset beruhen und daher beschränkt sich das Finanzmarktmodell auf ein risky asset und einen Bond. Der Bond verfügt über eine deterministische Rendite, die über den gesamten Zeitraum als konstant angenommen wird. Die Rendite des risky assets und insbesondere die Kurswerte sollen stochastisch sein. Um die Stochastizität mit Instrumenten aus der Wahrscheinlichkeitstheorie darzustellen, werden wir als erstes die mathematischen Grundlagen schaffen. Hierauf aufbauend leiten wir eine konkrete mathematische Form der Kursverläufe her, die bestimmte von Black und Scholes geforderte Bedingungen erfüllt.

In dem Finanzmarktmodell sollen keine Steuern, Dividendenzahlungen oder Transaktionskosten betrachtet werden. Außerdem wird vorausgesetzt, dass es möglich ist in beliebiger Höhe long- und short-Positionen einzugehen ohne zusätzliche Kosten oder Gebühren zahlen zu müssen.

2.2. Finanzmathematische Definitionen

Dem Finanzmarktmodell von Black und Scholes liegt ein gegebener Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zu Grunde, über den wir keine näheren Informationen erhalten. Der Wahrscheinlichkeitsraum stellt den Rahmen des Modells dar, wobei ein $\omega \in \Omega$ eindeutig bestimmt, was zu jedem Zeitpunkt auf dem Finanzmarkt geschieht. Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} ist abstrakt gegeben und wird nicht näher definiert, weil später eine Annahme über die Verteilung der Kursverläufe des risky assets unter \mathbb{P} gemacht wird.

Wir betrachten den Finanzmarkt über einen endlichen Zeitraum und setzen dafür ein $T \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Das Black-Scholes Modell ist ein zeitstetiges Modell, d.h. ein Marktteilnehmer hat zu jeder Zeit die Möglichkeit am Markt zu handeln. Unsere Handelszeitpunkte werden somit über das endliche und abgeschlossene Intervall $[0, T]$ dargestellt. T ist demnach der letztmögliche Zeitpunkt zu dem Handel betrieben werden kann. Darüber hinaus ist T auch der Zeitpunkt, an dem die Derivate auslaufen und die Auszahlung fällig ist.

Der Handel am Finanzmarkt zeichnet sich dadurch aus, dass trotz vieler Informationen oft nicht bekannt ist, wie sich die Kurse zukünftig entwickeln werden. Welche Informationen zu den einzelnen Zeitpunkten vorliegen, wird über die Filtration abgebildet.

Definition 2.2.1 (Filtration).

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Indexmenge $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Familie von Unter- σ -Algebren, d.h. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle t aus I , mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für alle $s < t$ aus I .

Verwenden wir eine Filtration als Informationsverlauf, so interpretieren wir das Element \mathcal{F}_t als Informationsstand für den Zeitpunkt t . Das bedeutet, die σ -Algebra \mathcal{F}_t beinhaltet genau die Ereignisse, für die ein Marktteilnehmer im zugehörigen Zeitpunkt t weiß, ob sie eingetreten sind oder nicht. Die immer feiner werdenden σ -Algebren gewährleisten deshalb, dass die Marktteilnehmer keine Informationen verlieren, die zu einem vorherigen Zeitpunkten bereits bekannt waren.

Um später Derivate bewerten zu können, ist die nächste Aufgabe die Underlyings mathematisch zu modellieren. Hierbei muss sowohl die Stochastizität der Kurswerte als auch die Entwicklung in der Zeit berücksichtigt werden. Beides lässt sich in der Definition eines stochastischen Prozesses wiederfinden.

Definition 2.2.2 (Stochastischer Prozess).

Für einen Messraum (Ω, \mathcal{F}) und einer Indexmenge $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ein reellwertiger stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$ eine Familie von messbaren Funktionen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $t \in I$. Die Abbildung $X(\omega) : I \rightarrow \mathbb{R}$ für ein festes $\omega \in \Omega$ nennen wir einen Pfad von X . Bilden die Funktionen X_t in den \mathbb{R}^J ab, so nennen wir die Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ einen J -dimensionalen reellwertigen stochastischen Prozess.

Ein stochastischer Prozess kann als eine Zufallsvariable interpretiert werden, die nicht in die reellen Zahlen abbildet, sondern in eine Menge von Funktionen. Wir modellieren die Kurse der Basisfinanzgüter über stochastische Prozesse und daher bestimmt ein $\omega \in \Omega$ bereits die Kurse für jeden Zeitpunkt. Da sowohl Ω als auch \mathbb{P} nicht näher spezifiziert wurden, benötigen wir Annahmen über die Verteilung von X bzw. der einzelnen Elemente X_t . Wie diese Annahmen aussehen und zu welchen stochastischen Prozessen diese führen, wird in den nächsten beiden Abschnitten erläutert.

Reellwertige Zufallsvariablen stellen im Finanzmarktmodell die Kurswerte der Basisfinanzgüter, Handlungen von Marktteilnehmern oder die Auszahlungen der Derivate für einen festen Zeitpunkt t dar. Durch die Filtration wird angegeben, welche Realisierungen am Markt erkennbar sind. Die Werte aller \mathcal{F}_t -messbaren Abbildungen können zum Zeitpunkt t beobachtet werden. Stellt X_t den Kurs eines Basisfinanzgutes zum Zeitpunkt t dar, so soll dieser spätestens in t am Markt bekannt sein. Diese Forderung führt uns zu den adaptierten Prozessen.

Definition 2.2.3.

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$ ist adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, falls für alle $t \in I$ gilt, dass X_t eine \mathcal{F}_t -messbare Zufallsvariable ist.

Die Teilmengeninklusion in der Definition der Filtration sichert, dass die vorherigen Realisierungen weiterhin bekannt sind. Für $s \leq t$ ist X_s \mathcal{F}_s -messbar und durch $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ folgt, dass X_s auch \mathcal{F}_t -messbar ist. Bei der Herleitung des stochastischen Prozesses für das risky asset im Abschnitt 2.4, wird dann deutlich, wie zum Beispiel aus der Unabhängigkeit von X_t und \mathcal{F}_t bereits die Unabhängigkeit zwischen X_t und X_s für alle $s \leq t$ folgt. Wir fordern daher für die Darstellung der Kurswerte, dass ein adaptierten stochastischen Prozess verwendet wird.

Die bis hier vorgestellten Werkzeuge für die Modellierung eines Finanzmarktes sind in vielen Modellen wiederzufinden. Das Besondere am Modell von Black und Scholes ist die Wahl der Prozesse für die exogenen Preise der Basisfinanzgüter, vor allem der Prozess des risky assets. Diese stochastischen Prozesse werden in den beiden nachfolgenden Abschnitten hergeleitet und schließen somit das zu Grunde liegende Finanzmarktmodell ab.

2.3. Der Preisprozess für den Bond

Für den Bond wird der Preisprozess mit $(B_t)_{t \in [0, T]}$ bezeichnet und für diesen unterstellten Fischer Black und Samuel Scholes eine deterministische und konstante Verzinsung. In diskreten Finanzmarktmodellen wird ein Zinssatz für die festverzinslichen Wertpapiere verwendet. Da wir uns mit einem zeitstetigen Modell beschäftigen, wird die stetige Verzinsung verwendet, die aus der Grenzwertbetrachtung immer kleiner werdender Verzinsungszeiträume resultiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

Wir haben bei einer stetigen Verzinsung eine über den ganzen Zeitraum $[0, T]$ konstante Zinsrate $r > 0$ und können den stochastischen Prozess für den Bondpreis darstellen als $(B_t)_{t \in [0, T]} = (e^{rt})_{t \in [0, T]}$.

Der Bond stellt eine risikolose Anlage dar, d.h. der Verlauf des Prozesses ist unabhängig von dem eingetretenen $\omega \in \Omega$. Daher kennt jeder Marktteilnehmer bereits im Zeitpunkt 0 den ganzen Pfad des Prozesses. Mathematisch ist dies daran zu erkennen, dass für jedes $t \in [0, T]$ B_t bereits messbar bezüglich der trivialen σ -Algebra ist. Insbesondere ist der Prozess an jede Filtration adaptiert.

Wenn wir unsere Ergebnisse bis hierhin zusammenfassen, dann betrachten wir einen vollkommenen Finanzmarkt über einen Zeitraum $[0, T]$, der sich mathematisch als Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ darstellt. Außerdem wird der Bond über den stochastischen Prozess $(B_t)_{t \in [0, T]} = (e^{rt})_{t \in [0, T]}$ abgebildet. Als Letztes beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit dem stochastischen Prozess für das risky asset im Black-Scholes Modell.

2.4. Der Preisprozess für das risky asset

In der originalen Publikation aus dem Jahr 1973 haben Black und Scholes mit den folgenden stochastischen Differentialgleichungen die Prozesse für das risky asset und den Bond hergeleitet:

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\dB_t &= r B_t dt.\end{aligned}$$

Die Preisprozesse werden hier mit $(S_t)_{t \in [0, T]}$ für das risky asset und $(B_t)_{t \in [0, T]}$ für den Bond bezeichnet. $(W_t)_{t \in [0, T]}$ steht in diesem Zusammenhang für einen Wienerprozess, der in diesem Abschnitt definiert und näher untersucht wird. Aber sowohl bei dem Preisprozess des risky assets, als auch beim Äquivalenten Martingalmaß und dem Satz von Girsanov im Kapitel 3, soll auf die stochastische Integration verzichtet werden. Stattdessen werden Eigenschaften für den Prozess des risky assets gefordert, die implizit in der Differentialgleichung enthalten sind. Hiermit soll ein Kandidat für den Preisprozess hergeleitet werden. Die Eindeutigkeit dieses stochastischen Prozesses im Black-Scholes Modell bedarf einer genaueren Auseinandersetzung mit Lévy-Prozessen und wird hier nicht weiter betrachtet.

Die fünf charakterisierenden Eigenschaften für den gesuchten stochastischen Prozess werden nun aufgelistet und näher beleuchtet. Die einzelnen Forderungen leiten sich aus Beobachtungen oder idealisierten Annahmen für Finanzmärkte ab. Wir wollen also einen adaptierten stochastischen Prozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ finden, der Folgendes erfüllt:

- i.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat einen deterministischen Anfangswert $S_0 > 0$.

Der Wert S_0 entspricht dem Kurs bei dem der stochastische Prozess starten soll und wird durch die Beobachtung am realen Finanzmarkt vorgegeben.

- ii.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat stationäre Renditen, das bedeutet $\frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t} \sim \frac{S_{s+\Delta} - S_s}{S_s}$ für alle $t, s \in [0, T]$ und alle $\Delta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \Delta + t \leq T$, $0 \leq \Delta + s \leq T$.

Diese Eigenschaft bedeutet, dass die prozentuale Änderung des Preisprozesses in den beiden Zeitintervallen $[s, s+\Delta] \subset [0, T]$ und $[t, t+\Delta] \subset [0, T]$ der gleichen Verteilung unterliegt. Es ist somit irrelevant zu welchem Zeitpunkt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Rendite betrachtet wird. Der bestimmende Parameter ist hierbei der Zeitraum Δ , weil dieser bei den beiden Renditen als identisch vorausgesetzt wird. Wir können also an dieser Stelle schon sehen, dass es ausrei-

chend ist wenn wir Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die möglichen Zeiträume erhalten. Diese können dann unabhängig vom Zeitpunkt genutzt werden. Insgesamt unterscheiden sich zwei Zeitpunkte für einen Investor, in Bezug auf die Chance eine gute Rendite zu erreichen, nicht.

- iii.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat unabhängige Renditen, das bedeutet $\frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t}$ ist unabhängig von \mathcal{F}_t für alle $t \in [0, T]$, $0 \leq \Delta + t \leq T$.

\mathcal{F}_t ist die σ -Algebra, die den Informationsstand am Markt zum Zeitpunkt t widerspiegelt. $\frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t}$ stellt die Rendite des risky assets ab dem Zeitpunkt t über einen beliebigen Zeitraum Δ dar. Wenn gefordert wird, dass die Zufallsvariable der Rendite unabhängig ist zu \mathcal{F}_t , dann muss sich der Kurs des risky assets ab dem Zeitpunkt t unabhängig zu allen Ereignissen der vergangenen Zeit entwickeln. Für einen Aktienkurs der zuletzt stark gestiegen ist, kann also nicht gefolgert werden, dass dieser in der nächsten Zeit wieder fallen muss oder dass er die Entwicklung unverändert fortsetzt. Der Aktienkurs entwickelt sich durch diese Forderung zu jedem Zeitpunkt komplett autark von der vorherigen Entwicklung. Die Idee wird deutlicher, wenn man eine beliebige Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ und die entsprechenden Renditen betrachtet. Aus der obigen Eigenschaft folgt induktiv die Unabhängigkeit von $\frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}}, \dots, \frac{S_{t_n} - S_{t_{n-1}}}{S_{t_{n-1}}}$. Der Beweis läuft analog zu dem Beweis aus Anhang A.0.1. Demnach entwickeln sich die Renditen für disjunkte Zeiträume immer unabhängig voneinander.

- iv.) $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \sigma^2 t)$ für alle $t \in [0, T]$ mit Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Um die Idee dieser Forderung besser zu verstehen, kann man den Wert analog für den schon bekannten Bondpreisprozess berechnen: $\log\left(\frac{B_t}{B_0}\right) = \log(\exp(rt)) = rt$. Hieraus wird deutlich, dass beim Bond die Verzinsung über den Zeitraum $[0, t]$ durch die Konstante r festgelegt wurde. Im Gegensatz dazu, soll für das risky asset eine normalverteilte Zufallsvariable verwendet werden, welche die Zinsrate modelliert. Die Normalverteilung resultiert aus dem Zentralen Grenzwertsatz, weil man davon ausgeht, dass viele unabhängige und identisch verteilte Ereignisse Einfluss auf die Veränderung der Zinsrate nehmen. Es lässt sich leicht zeigen, dass durch die Bestimmung der Verteilung von $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ für alle $t \in [0, T]$, die Zinsraten über jeden beliebigen Zeitraum festgelegt sind. Möchte man alternativ die Verteilung für ein Zeitintervall $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ berechnen, so leitet sich diese

durch folgende Rechnung aus der geforderten Eigenschaft her:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{S_{t_2}}{S_0}\right) &= \log\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \cdot \frac{S_{t_1}}{S_0}\right) \\ &= \log\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}\right) + \log\left(\frac{S_{t_1}}{S_0}\right) \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}\right) &= \log\left(\frac{S_{t_2}}{S_0}\right) - \log\left(\frac{S_{t_1}}{S_0}\right). \end{aligned}$$

Für die Verteilung der rechten Seite bedarf es der Faltung von zwei normalverteilten Zufallsvariablen. Folglich unterliegt die Rendite für $[t_1, t_2]$ einer Normalverteilung mit den Parametern $\lambda(t_2 - t_1)$ und $\sigma^2(t_2 - t_1)$. Wie bereits bei den stationären Renditen gesehen, unterscheidet sich die Verteilung nur für unterschiedlich lange Zeitintervalle und ist unabhängig von dem Zeitpunkt, an dem sie betrachtet wird.

v.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ besitzt stetige Pfade.

In den Wirtschaftsnachrichten greift man zur Vereinfachung auf die graphische Veranschaulichung von Börsenkursen zurück. Dabei zeigen stetige Graphen die Werte einer Aktie für die letzten Wochen und Monate. Die Forderung von stetigen Pfaden für den stochastischen Prozess des risky assets scheint deshalb zunächst einmal nachvollziehbar. Diese sind aber durchaus ein Kritikpunkt im Black-Scholes Modell, da besonders Kurssprünge oder extreme Wertveränderungen durch die Stetigkeit nur sehr bedingt möglich sind. Auch bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird kritisiert, dass extremen Änderungen z.B. in „Crash“-Situationen zu wenig Beachtung geschenkt wird. Dieser Kritikpunkt soll uns aber nicht weiter beschäftigen.

Der vierten Eigenschaft entnehmen wir, dass eine normalverteilte Zufallsvariable benötigt wird, um die stetige Zinsrate für einen festen Zeitraum zu modellieren. Die geforderte Verteilung soll für alle $t \in [0, T]$ gelten und somit suchen wir einen stochastischen Prozess, der auf der Normalverteilung basiert. Diese Eigenschaft und auch Parallelen zu den anderen Anforderungen finden wir in der Definition eines Wienerprozesses wieder, den wir bereits in der stochastischen Differentialgleichung gesehen haben.

Definition 2.4.1 (Wienerprozess).

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ mit $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ wird ein adaptierter stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t \in I}$ als Standard Wienerprozess bezeichnet, wenn er folgende Eigenschaften aufweist:

- i.) $W_0 = 0$ \mathbb{P} -fast sicher,
- ii.) $W_t - W_s$ ist $\mathcal{N}(0, t - s)$ -verteilt für alle $s < t$ aus I ,
- iii.) $W_t - W_s$ ist stochastisch unabhängig von \mathcal{F}_s für alle $0 \leq s < t$ aus I ,
- iv.) W besitzt \mathbb{P} -fast sicher stetige Pfade.

Der Prozess $X = (X_t)_{t \in I} := (\sigma W_t + \mu \cdot t)_{t \in [0, T]}$ wird Wienerprozess mit Drift μ und Volatilität σ genannt, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist.

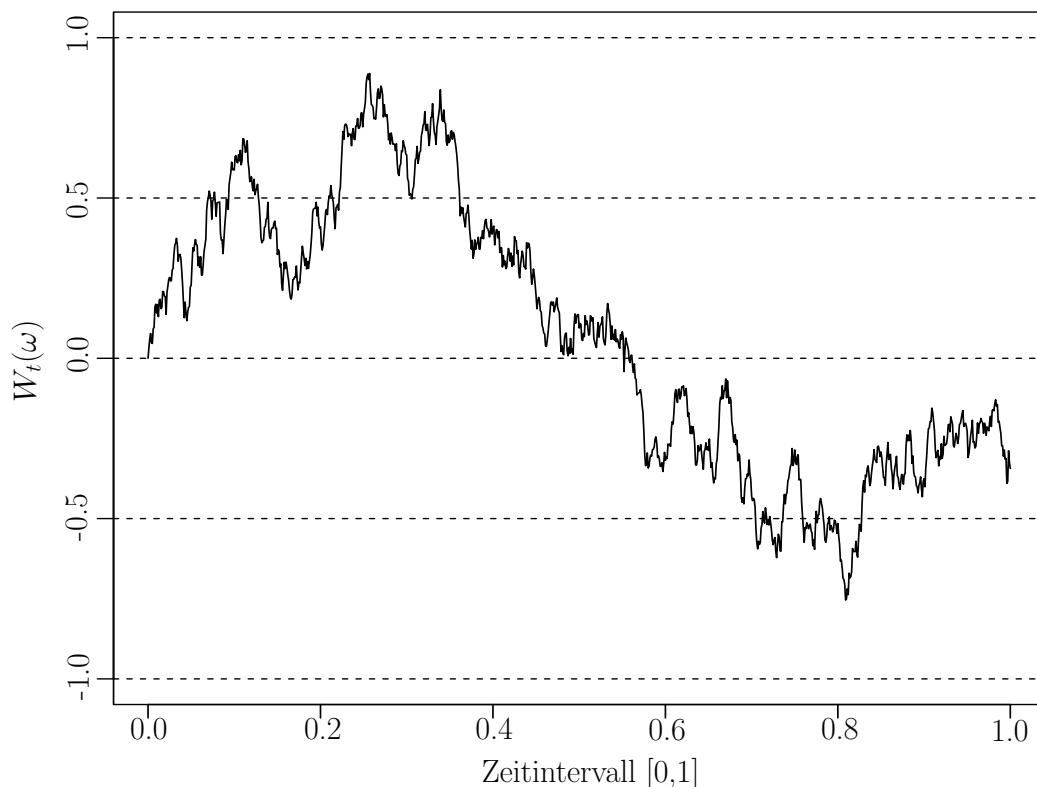


Abbildung 2.1.: Skizze eines Beispielpfades für einen Standard Wienerprozess

In Abbildung 2.1 wird veranschaulicht, wie ein Pfad eines Wienerprozesses aussehen könnte. Diese Abbildung und auch die Nachfolgenden wurden mit dem Statistikprogramm R, sowie dem Bildbearbeitungsprogramm Inkscape erzeugt. Die Befehle zur Erzeugung des Pfades in R sind im Anhang A.0.5 zu finden.

Zur Notation in dieser Arbeit sei erwähnt, dass der ganze Prozess über einen Großbuch-

staben ohne Index dargestellt wird und Variablen mit Indizes die einzelnen Elemente des Prozesses repräsentieren. Dabei wird durch den Buchstaben W bzw. W_t vorzugsweise ein Standard Wienerprozess, d.h. ohne Drift und mit Volatilität 1, bezeichnet. Durch X bzw. X_t soll dann ein Wienerprozess, der noch zusätzlich einen Driftparameter sowie Volatilität beinhaltet, symbolisiert werden. Da sich die Prozesse bei unterschiedlichen Maßen anders verhalten, soll dies jeweils für das Maß, unter dem der Prozess definiert wurde, gelten. Verschiedene Prozesse werden dann durch Akzente wie z.B. \widetilde{W} oder \widehat{W} gekennzeichnet.

Möchte man diesen Wienerprozess z.B. als Aktienpreisprozess verwenden, so entsteht kein realitätstreuere Modell. Das Ereignis $\{S_t < 0\}$, also dass der Aktienpreis negativ wird, ist keine Nullmenge unter dem Maß \mathbb{P} . Aus den ersten beiden Eigenschaften eines Wienerprozesses können direkt die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für weitere Zufallsgrößen abgeleitet werden:

$$W_t = W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t), \text{ sowie } W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s) \text{ für alle } s \leq t.$$

Eine Aktie kann, im für den Halter ungünstigsten Fall, wertlos werden. Es ist somit ausgeschlossen, dass der Wert einer Aktie einen negativen Wert annimmt. Falls der Aktienkurs zum Zeitpunkt t durch W_t dargestellt würde, wäre dieser Kurs durch die Normalverteilung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ im negativen Wertebereich.

In den vier Eigenschaften des Wienerprozesses finden sich bereits Unabhängigkeit, stetige Pfade und die Normalverteilung wieder. Wir versuchen daher mit diesem Wienerprozess weiter zu arbeiten und durch eine messbare Funktion, die nur vom Wienerprozess abhängt, diese Eigenschaften auf den Aktienpreisprozess zu übertragen.

Die Elemente eines Wienerprozess mit Drift λ und Volatilität σ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ besitzen unter \mathbb{P} die geforderte Verteilung aus Bedingung vier. Für einen Wienerprozess $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ ist W_t $\mathcal{N}(0, t)$ -verteilt und daher können wir folgern, dass $\sigma W_t + \lambda t$ $\mathcal{N}(\lambda t, \sigma^2 t)$ -verteilt ist. Deshalb setzen wir als stochastischen Prozess für die stetigen Zinsraten diesen Wienerprozess mit Drift μ und Volatilität σ ein. Daraus ergibt sich für jedes $t \in [0, T]$:

$$\log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) = \sigma W_t + \lambda t.$$

Diese Gleichung können wir umstellen und über den deterministischen Anfangswert S_0

erhalten wir eine explizite Darstellung des Aktienpreises zum Zeitpunkt t :

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= \sigma W_t + \lambda t \\ \Leftrightarrow S_t &= S_0 \cdot e^{\sigma W_t + \lambda t}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Durch die Normalverteilung aus dem Wienerprozess unterliegen die Zufallsgrößen des risky assets einer logarithmischen Normalverteilung.

Bemerkung 2.4.2.

Für eine Zufallsvariable X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die zu den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ normalverteilt ist, nennt man die Verteilung der Zufallsvariable $Y := e^X$ eine Logarithmische Normalverteilung zu den Parametern μ und σ und schreibt $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

In der Normalverteilung stellen unsere Parameter μ und σ^2 bereits den Erwartungswert und die Varianz dar. Für eine Logarithmische Normalverteilung wird der Erwartungswert im nächsten Satz berechnet, da dieser in späteren Beweisen wiederholt verwendet wird.

Satz 2.4.3.

Für eine Zufallsvariable $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ berechnet sich der Erwartungswert zu $\mathbb{E}[Y] = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}$.

Beweis.

Der Beweis beruht auf einfachen Umformungen und der Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, dass das Integral über die Dichte genau 1 ergibt.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^X] &= \int_{\Omega} e^{X(\omega)} d\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2x\sigma^2}{\sigma^2}\right)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2x(\mu + \sigma^2) + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 - 2\mu\sigma^2 + \sigma^4 - \sigma^4}{\sigma^2}\right)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{\sigma^2}\right)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(-2\mu\sigma^2 - \sigma^4)}{\sigma^2}} d\lambda(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{\sigma^2}} d\lambda(x)}_{\substack{\text{Dichte von } \mathcal{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2) \\ =1}} \\
&= e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}.
\end{aligned}$$

□

Betrachten wir den Erwartungswert des risky assets für einen festen Zeitpunkt, dann berechnet sich dieser durch den vorigen Satz 2.4.3 zu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}[S_0 \cdot e^{\sigma W_t + \lambda \cdot t}] \\
&= S_0 \cdot \mathbb{E}[e^{\sigma W_t + \lambda \cdot t}] \\
&= S_0 \cdot e^{\lambda \cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t}.
\end{aligned}$$

Mit der Umparametrisierung $\lambda = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ können wir eine bessere Interpretation des Parameters erreichen. Der Preisprozess des risky assets und deren Erwartungswert zu einem festen Zeitpunkt t lassen sich jetzt leichter mit dem Bond und deren Erwartungswert vergleichen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= S_0 \cdot e^{\lambda \cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t} \\
&= S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t} \\
&= S_0 \cdot e^{\mu \cdot t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_t &= S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t} & \mathbb{E}[S_t] &= S_0 \cdot e^{\mu t} \\
B_t &= 1 \cdot e^{rt} & \mathbb{E}[B_t] &= 1 \cdot e^{rt}.
\end{aligned}$$

In der Forderung an das risky asset waren die Parameter λ und σ jeweils Modellparameter, die von außen gegeben werden. Nach der Umparametrisierung benutzen wir μ und σ , weil beim Vergleich der beiden Erwartungswerte deutlich wird, dass μ den Drift des risky assets, also die erwartete Zinsrate, abbildet und somit besser interpretierbar ist als λ . Die Schwankung oder auch Volatilität des risky assets wird weiter durch σ dargestellt und in Kapitel 4 werden wir sehen, dass nur die Volatilität eine wichtige Rolle spielt.

Der stochastische Prozess aus Gleichung 2.1 wird als geometrischer Wienerprozess bezeichnet.

Definition 2.4.4 (Geometrischer Wienerprozess).

Für einen Standard Wienerprozess $W = (W_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ mit $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ nennen wir $(A_t)_{t \in I} = \left(A_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t} \right)_{t \in I}$ einen geometrischen Wienerprozess mit Drift μ , Volatilität σ und Anfangswert A_0 .

Ein geometrischer Wienerprozess mit Anfangswert S_0 stellt den Wertprozess für das risky asset im Black-Scholes Modell dar. Wir haben hauptsächlich die Annahmen über die Verteilung der Zinsraten benutzt, um zu einem geometrischen Wienerprozess zu gelangen. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die weiteren geforderten Eigenschaften von diesem Prozess erfüllt werden.

Satz 2.4.5.

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ des Black-Scholes Modells erfüllt ein geometrischer Wienerprozess mit Drift μ und Volatilität σ und festem Startwert $S_0 > 0$ die geforderten Bedingungen an den Wertprozess des risky assets:

- i.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat einen deterministischen Anfangswert $S_0 > 0$,
- ii.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat stationäre Renditen,
- iii.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat unabhängige Renditen,
- iv.) $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \sigma^2 t)$ für alle $t \in [0, T]$ mit Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$,
- v.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ besitzt stetige Pfade.

Beweis.

Mit dem Standard Wienerprozess $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ und den konstanten Werten $S_0 > 0$, $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ hat der geometrische Wienerprozess aus dem Satz die Form $(S_t)_{t \in [0, T]} = \left(S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t} \right)_{t \in [0, T]}$.

- i.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat einen deterministischen Anfangswert $S_0 > 0$.

Diese Eigenschaft wurde bereits in der Umformung benutzt und ist erfüllt:

$$S_0 \cdot e^{\sigma W_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot 0} = S_0 \cdot e^0 = S_0 > 0.$$

ii.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat stationäre Renditen.

Wähle $t, s \in [0, T]$ und $\Delta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \Delta + t \leq T$, $0 \leq \Delta + s \leq T$, dann gilt

$$\frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t} = \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} - 1 = e^{\sigma(W_{t+\Delta} - W_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \Delta} - 1$$

mit $W_{t+\Delta} - W_t \sim \mathcal{N}(0, t + \Delta - t) = \mathcal{N}(0, \Delta)$ und

$$\frac{S_{s+\Delta} - S_s}{S_s} = \frac{S_{s+\Delta}}{S_s} - 1 = e^{\sigma(W_{s+\Delta} - W_s) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \Delta} - 1$$

mit $W_{s+\Delta} - W_s \sim \mathcal{N}(0, s + \Delta - s) = \mathcal{N}(0, \Delta)$.

Die Verteilung der beiden Renditen hängt nur von der Verteilung des Standard Wienerprozesses ab, denn die restlichen Variablen bleiben für jedes $\omega \in \Omega$ konstant. Da bei einem Wienerprozess die Zuwächse $W_{t+\Delta} - W_t$ und $W_{s+\Delta} - W_s$ nach Definition 2.4.1 identisch verteilt sind, besitzen auch die beiden Renditen die selbe Wahrscheinlichkeitsverteilung. Möchte man die konkrete Verteilung berechnen, so erhält man eine um eins nach links verschobene, also auf dem Intervall $(-1, \infty)$ definierte, logarithmische Normalverteilung mit den Parametern $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta$ und $\sigma^2 \Delta$. Die stationären Renditen sind also bei unserem geometrischen Wienerprozess erfüllt

iii.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ hat unabhängige Renditen.

Um diese Eigenschaft zu zeigen, definieren wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } f(y) = e^{\sigma y + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta} - 1$$

und bemerken, dass aus der Stetigkeit die Borel-Messbarkeit von f gefolgt werden kann. Nun kann die Rendite, die im vorherigen Punkt schon untersucht wurde, als Komposition der messbaren Abbildung f und dem Zuwachs des Standard Wienerprozesses $W_{t+\Delta} - W_t$ dargestellt werden:

$$f \circ (W_{t+\Delta} - W_t) = e^{\sigma(W_{t+\Delta} - W_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \Delta} - 1 = \frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t}.$$

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, dass für eine Zufallsvariable X , die unabhängig ist zur σ -Algebra \mathcal{F} , auch für jede borel-messbare Abbildung f die Zufallsvariable $f \circ X$ unabhängig ist zu \mathcal{F} . Die Unabhängigkeit von $W_{t+\Delta} - W_t$ zu \mathcal{F}_t überträgt sich somit durch die messbare Abbildung auch auf die Rendite.

Damit ist gezeigt, dass $\frac{S_{t+\Delta}-S_t}{S_t}$ unabhängig ist zu \mathcal{F}_t für alle $t \in [0, T]$ und der geometrische Wienerprozess unabhängige Renditen besitzt.

iv.) $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \sigma^2 t)$ für alle $t \in [0, T]$ mit $\lambda \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Diese Eigenschaft hatten wir benutzt, um den geometrischen Wienerprozess herzuleiten. Durch die Wahl eines Wienerprozesses mit Drift μ und Volatilität σ konnten wir diese Verteilung modellieren. Es gilt

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Noch zu beachten ist, dass wir eine Umparametrisierung vorgenommen haben, um eine bessere Interpretierbarkeit zu gewährleisten. Führen wir diese Substitution über $\lambda = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ wieder zurück, so erhalten wir

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \sigma^2 t).$$

v.) $(S_t)_{t \in [0, T]}$ besitzt stetige Pfade.

Ein stochastischer Prozess besitzt stetige Pfade, wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung aus der Indexmenge in die reellen Zahlen stetig ist. In diesem Fall wählen wir $\omega \in \Omega$ fest und betrachten die Abbildung¹

$$S_t : \{\omega\} \times I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } S_t(\omega) = S_0 \cdot e^{\sigma W_t(\omega) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

In der vierten Bedingung des Wienerprozesses (Definition 2.4.1) wird gefordert, dass der Prozess stetige Pfade besitzt. Also wissen wir, dass

$$W_t(\omega) : \{\omega\} \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung darstellt. Unser Aktienpreis in Abhängigkeit der Zeit ist somit eine Komposition aus dem Element W_t des Wienerprozesses und der stetigen Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = S_0 \cdot e^{\sigma x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

und dadurch selbst eine stetige Abbildung. Dies gilt für alle $\omega \in \Omega$ und deshalb

¹Hier ist ω fest gewählt und die Abbildung ist abhängig von t , jedoch wird t weiterhin im Index geschrieben, um die Notation beizubehalten.

besitzt der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ stetige Pfade.

□

2.5. Kurze Zusammenfassung

Wir haben die Grundlagen des Black-Scholes Modell aus den Annahmen abgeleitet und konnten die stochastischen Prozesse für das risky asset und den Bond herleiten. Diese können angegeben werden mit

$$(B_t)_{t \in [0, T]} = B_0 \cdot e^{rt} \text{ mit } B_0 = 1$$

für den Bondpreisprozess, sowie mit

$$(S_t)_{t \in [0, T]} = S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \text{ mit } S_0 > 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

für den stochastischen Preisprozess für das risky asset. Der letzte Prozess wird auch als geometrischer Wienerprozess mit Drift μ und Volatilität σ bezeichnet. Als Modellparameter verwenden wir T für den Endzeitpunkt, r für die Zinsrate des Bonds und den Drift μ , so wie die Volatilität σ und Startwert S_0 für das risky asset.

Wir sind jetzt in der Lage mit dem Modell zu arbeiten und werden uns in den folgenden Kapiteln mit der Bewertung im Black-Scholes Modell beschäftigen. Dafür bedarf es zunächst einer genaueren Analyse des Äquivalenten Martingalmaßes, mit dem dann im Anschluß die Möglichkeit gegeben ist, den Preis eines Derivates zu berechnen.

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2.2 noch ein Beispiel für einen Pfad des geometrischen Wienerprozesses abgebildet. Hierbei wurde ein positiver Drift verwendet und der Startwert beträgt 100.

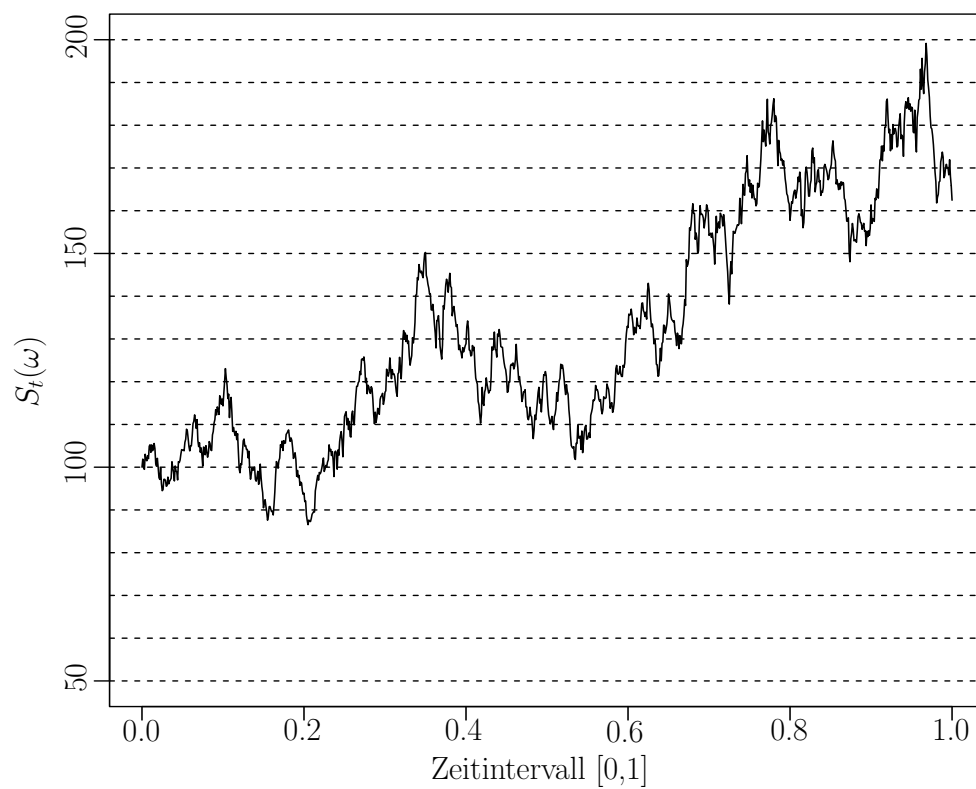


Abbildung 2.2.: Skizze eines Beispielpfades für einen geometrischen Wienerprozess mit positivem Drift

3. Das Äquivalente Martingalmaß

3.1. Motivation

In dieser Bachelorarbeit wird gezeigt, wie sich der Wert eines Derivates mit dem risky asset als Underlying im Black-Scholes Modell berechnen lässt. Bei der Analyse von Finanzmärkten ist der Begriff der Arbitragefreiheit von zentraler Bedeutung. Wie schon in der Einführung (Kapitel 1) erwähnt, bezeichnet eine Arbitragemöglichkeit die Chance ohne Kapitaleinsatz und ohne Risiko eine positive Auszahlung zu erreichen. Durch bestimmte Marktmechanismen sollten Arbitragemöglichkeiten auf realen Finanzmärkten nicht auftreten und daher möchten wir auch in den Modellen Arbitragefreiheit vorfinden. Im Black-Scholes Modell sind die Preise des Bonds und des risky assets exogen gegeben und die Preise für die Derivate müssen bestimmt werden. Je nachdem wie diese Preise gewählt werden, bieten sich Arbitragemöglichkeiten oder nicht. Es kann bewiesen werden, dass bei einer bestimmten Strategie zur Preisfestsetzung das Modell arbitragefrei ist. Diese Strategie greift auf ein Äquivalentes Martingalmaß zurück und bewertet die Derivate anhand ihrer Claims¹. Der Claim ist dabei eine \mathcal{F}_T messbare Abbildung $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem ω die Auszahlung des Derivates zum Zeitpunkt T zuordnet, die beim Eintreten des jeweiligen ω anfällt. Die Messbarkeit sichert, dass die Auszahlung zum Zeitpunkt T feststeht und nicht von späteren Zeitpunkten abhängig ist. Mit \mathbb{Q} als Äquivalentes Martingalmaß lässt sich der arbitragefreie oder faire Preis eines Derivates mit Claim C über die Form

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} \cdot C] \tag{3.1}$$

bestimmen.

¹Für den Beweis der Preisfestsetzungsformel wird auf das Buch „Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten“ von Albrecht Irlle [04] verwiesen.

3.2. Herleitung des Äquivalenten Martingalmaßes

Das Ziel dieses Kapitels ist es, ein Äquivalentes Martingalmaß zu finden, um den fairen Preis für ein Derivat berechnen zu können. Dafür ist es zuerst erforderlich den Begriff eines Martingals zu definieren.

Definition 3.2.1 (Martingal).

Es sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein adaptierter stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ mit $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \in I$. Der Prozess X wird als Martingal bezeichnet, wenn $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $s \leq t$ aus I erfüllt ist.

Martingale werden in der Spieltheorie für faire Glücksspiele und in der Finanzmathematik für faire Preise verwendet. Die Martingaleigenschaft $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ besagt, dass weder eine positive noch eine negative Entwicklung zu erwarten ist. Auf einem Finanzmarkt wird aber durch die Existenz der risikolosen Anlage eine positive Entwicklung des Wertes erwartet. In der Definition des Äquivalenten Martingalmaßes wird diese Erwartung durch das Abdiskontieren der Preisprozesse ausgeglichen. Hierfür wird der Bondpreisprozess verwendet und wenn der Wert in Einheiten des Bonds betrachtet wird, ist es möglich die verschiedenen Zeitpunkte zu vergleichen.

Definition 3.2.2 (Äquivalentes Martingalmaß).

Sei $(B_t, S_t^1, \dots, S_t^{J-1})_{t \in I}$ ein J -dimensionaler adaptierter Preisprozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$, wobei B_t den Bondpreis im Zeitpunkt t darstellt. Sind \mathbb{P} und \mathbb{Q} zwei äquivalente Maße, so wird \mathbb{Q} als äquivalentes Martingalmaß oder äquivalentes riskikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet, falls für alle $j \in \{1, \dots, J-1\}$

$$(\tilde{S}_t)_{t \in I} := (B_t^{-1} \cdot S_t^j)_{t \in I}$$

ein Martingal unter \mathbb{Q} bildet.

Die Preise der Basisfinanzgüter sind exogen, daher erscheint es sinnvoll, dass deren abdiskontierter Preisprozess ein Martingal bildet. Anhand der Bewertungsformel folgt dann, dass die Preise der Basisfinanzgüter immer arbitragefrei sein müssen.

Das stochastische Element unseres Preisprozesses für das risky asset ist ein Standard Wienerprozess, der uns eine gute Ausgangslage in Bezug auf Martingale bietet. Wir erhalten mit einem Standard Wienerprozess einen stochastischen Prozess, der gleichzeitig die Martingaleigenschaft erfüllt. Außerdem zeigt der folgende Satz, dass über einen Standard Wienerprozess noch zwei weitere Martingale gewonnen werden können.

Satz 3.2.3.

Sei $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein Wienerprozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$. Dann sind folgende stochastische Prozesse Martingale:

i.) $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$

ii.) $(W_t^2 - t)_{t \in [0, \infty)}$

iii.) $(e^{aW_t - 1/2a^2t})_{t \in [0, \infty)}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Der Prozess unter iii.) wird als Exponentialmartingal bezeichnet.

Beweis.

Für den Beweis müssen wir zeigen, dass der Erwartungswert vom Absolutbetrag der Zufallsvariablen endlich ist und dass der Prozess die Martingaleigenschaft erfüllt, also $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ ist.

- i.) Die Existenz aller Momente der Normalverteilung liefert die Endlichkeit des Erwartungswertes, sodass nur noch die Martingaleigenschaft gezeigt werden muss. In der Definition des Wienerprozesses (Definition 2.4.1) erhalten wir Eigenschaften über die Zuwächse $W_t - W_s$, die wir, über kleine Umformungen, an dieser Stelle ausnutzen können. Daher berechnen wir für $0 \leq s \leq t \leq \infty$ und \mathcal{F}_s den bedingten Erwartungswert und gelangen durch die Linearität zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass nach 2.4.1 iii.) $W_t - W_s$ unabhängig ist zu \mathcal{F}_s und durch den adaptierten Prozess ist W_s messbar bzgl. \mathcal{F}_s . Somit vereinfacht sich der erste Teil zu einem normalen Erwartungswert und der hintere Term zu W_s (siehe Appendix Satz A.0.3):

$$= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s.$$

Der Erwartungswert berechnet sich durch die Normalverteilung $\mathcal{N}(0, t - s)$ aus 2.4.1 ii.) zu 0 und es ergibt sich:

$$\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s.$$

- ii.) Die Existenz aller Momente resultiert auch hier aus der Normalverteilung von W_t . Genau wie zuvor möchten wir zunächst umformen, um die Eigenschaften der Zuwächse ausnutzen zu können. Jedoch betrachten wir zur besseren Übersicht zunächst nur den bedingten Erwartungswert von W_t^2 für $t \in [0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t^2 - 2W_sW_t + 2W_sW_t + W_s^2 + W_s^2 - 2W_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) + W_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[W_s(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2W_s\mathbb{E}[(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s] + W_s^2.\end{aligned}$$

Mit derselben Begründung wie zuvor haben wir W_s und W_s^2 wegen ihrer Messbarkeit zu \mathcal{F}_s bereits herausziehen können, denn bei Veränderungen durch eine borel-messbare Abbildung bleiben Messbarkeit und Unabhängigkeit erhalten. Im nächsten Schritt können wir deshalb wieder den bedingten Erwartungswert zu einem einfachen Erwartungswert umschreiben:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] + 2W_s\mathbb{E}[(W_t - W_s)] + W_s^2 \\ &= \mathbb{V}[(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[(W_t - W_s)]^2 + 2W_s\mathbb{E}[(W_t - W_s)] + W_s^2.\end{aligned}$$

Über $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ kennen wir die Varianz und den Erwartungswert bzw. das zweite Moment für den Zuwachs des Wienerprozesses und erhalten

$$\mathbb{E}[W_t^2|\mathcal{F}_s] = (t - s) + W_s^2.$$

Folglich ist die Martingaleigenschaft erfüllt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t^2|\mathcal{F}_s] - t \\ &= (t - s) + W_s^2 - t \\ &= W_s^2 - s.\end{aligned}$$

- iii.) Analog zu den Beweisschritten für die ersten beiden Punkte nutzen wir wieder

Messbarkeit (\star) bzw. Unabhängigkeit ($\star\star$) bzgl. \mathcal{F}_s aus. Es gilt für $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{aW_t} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{aW_t - aW_s + aW_s} | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[e^{a(W_t - W_s)} \cdot e^{aW_s} | \mathcal{F}_s] \\ &\stackrel{\star}{=} e^{aW_s} \cdot \mathbb{E}[e^{a(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] \\ &\stackrel{\star\star}{=} e^{aW_s} \cdot \mathbb{E}[e^{a(W_t - W_s)}].\end{aligned}$$

Im Erwartungswert steht eine Zufallsvariable mit logarithmischer Normalverteilung zu den Parametern 0 und $a^2(t-s)$, der sich mit Bezug auf Satz 2.4.3 berechnen lässt:

$$\mathbb{E}[e^{a(W_t - W_s)}] = e^{\frac{1}{2}a^2(t-s)}.$$

Nun folgt direkt die Martingaleigenschaft für das Exponentialmartingal:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{aW_t - \frac{1}{2}a^2t} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{aW_t} | \mathcal{F}_s] \cdot e^{-\frac{1}{2}a^2t} \\ &= e^{aW_s} \cdot \mathbb{E}[e^{a(W_t - W_s)}] \cdot e^{-\frac{1}{2}a^2t} \\ &= e^{aW_s} \cdot e^{\frac{1}{2}a^2(t-s)} \cdot e^{-\frac{1}{2}a^2t} \\ &= e^{aW_s - \frac{1}{2}a^2s}.\end{aligned}$$

□

Wie Beispiele für Martingale mit einem Wienerprozess aussehen können, ist jetzt bekannt. Wir haben gesehen, dass unter anderem ein geometrischer Wienerprozess ohne Driftterm ein Martingal bildet und als Exponentialmartingal bezeichnet wird. Dieser Prozess bleibt ein Martingal, wenn wir ihn mit einem konstanten Startwert versehen. Um eine Idee zu entwickeln, wie das Äquivalente Martingalmaß hergeleitet werden kann, betrachten wir den abdiskontierten Preisprozess unter dem ursprünglichen Maß \mathbb{P} . Dieser hat bereits Ähnlichkeiten zu dem Exponentialmartingal und berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_t &= B_t^{-1} \cdot S_t = e^{-rt} \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= e^{(\mu - r)t} \cdot e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2t}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Im Vergleich zu Satz 3.2.3 iii.) mit $a = \sigma$ erhalten wir beim abdiskontierten Preispro-

zess zusätzlich den Driftterm $e^{(\mu-r)t}$. Zur Modifikation dieses Prozesses steht uns nur die Möglichkeit einen Maßwechsel durchzuführen zur Verfügung. Die Frage ist, wie dieser Prozess durch den Wechsel auf ein neu definiertes Maß beeinflusst wird. Das einzige Element, das an das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} gekoppelt ist, ist der Wienerprozess. In der Definition 2.4.1 wird in Bedingung ii.) gefordert, dass das Bildmaß von W_t unter \mathbb{P} einer Normalverteilung entspricht. Diese Eigenschaft bleibt bei einem Maßwechsel allgemein nicht gültig. Es muss demnach deutlich unterschieden werden zwischen Wienerprozessen für zwei unterschiedliche Maße. Deshalb erfüllen die Prozesse im Satz 3.2.3 die Martingaleigenschaft nur unter dem Maß, unter dem der Wienerprozess definiert wurde. Diese vermeintliche Einschränkung auf die Kopplung von Wienerprozess und Maß, lässt sich vorteilhaft nutzen, um ein Äquivalentes Martingalmaß herzuleiten. Denn der Satz von Girsanov, auch als Girsanov-Transformation bezeichnet, erlaubt eine Aussage über den Zusammenhang von zwei Wienerprozessen unter verschiedenen Maßen. Wird die dort angegebene Dichte verwendet, um ein neues Maß \mathbb{Q} zu definieren, so ergibt sich ein neuer Standard Wienerprozess unter \mathbb{Q} , der sich vom ursprünglichen Wienerprozess unter \mathbb{P} ableitet.

3.2.1. Der Satz von Girsanov

Satz 3.2.4 (Girsanov).

Sei $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ ein Standard Wienerprozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ mit $T > 0$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$. Für $L_T := e^{(\vartheta W_T - \frac{1}{2} \vartheta^2 T)}$ wird durch $\mathbb{Q}(A) = \int_A L_T d\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{F}_T$ ein zu \mathbb{P} äquivalentes Maß \mathbb{Q} auf \mathcal{F}_T definiert, sodass $\widehat{W} = (W_t - \vartheta t)_{t \in [0, T]}$ ein Standard-Wienerprozess bzgl. \mathbb{Q} ist.

Bevor dieser Satz verwendet oder bewiesen wird, ist es wichtig auf einige Details näher einzugehen. Es wird ein neues Maß \mathbb{Q} durch Angabe der Dichte bezüglich $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ definiert. Als erstes sei erwähnt, dass $L_T \geq 0$ und \mathcal{F}_T -messbar ist und somit die Anforderung für eine Radon-Nikodym Dichte erfüllt sind. Der Grund für die Einschränkung auf die σ -Algebra \mathcal{F}_T ist die Messbarkeit von L_T . Diese resultiert aus der Adaptiertheit des Wienerprozesses und der \mathcal{F}_T -Messbarkeit von W_T . Die Messbarkeit kann allgemein nicht für feinere Elemente aus der Filtration sichergestellt werden. Aber eine Fortsetzung des Maßes \mathbb{Q} auf \mathcal{F} oder \mathcal{F}_t mit $t > T$ ist für unser Modell nicht notwendig, da wir nur Derivate betrachten, deren Auszahlung spätestens im Zeitpunkt T erfolgen. Desweiteren hat die Dichte die besondere Form von einem Element des Exponentialmartingals, welches wir schon im Satz 3.2.3 kennengelernt haben. Welche Vorteile wir aus dieser Martingaleigenschaft für die Dichte ziehen können und die Tatsache, dass

das neu definierte Maß \mathbb{Q} auf \mathcal{F}_T ein äquivalentes Maß zu \mathbb{P} ist, wird in dem nächsten Satz genauer erläutert.

Satz 3.2.5 (Martingale als Dichte).

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(L_t)_{t \in [0, T]}$ ein Martingal mit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t] = 1$ und $L_t > 0$ für alle $t \in [0, T]$, dann gilt Folgendes:

i.) Mit L_T als Dichte bzgl. \mathbb{P} wird auf \mathcal{F}_T ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} definiert.

ii.) Für eine \mathcal{F}_t -messbare, über \mathbb{Q} integrierbare Zufallsvariable Y gilt

$$\int_A Y d\mathbb{Q} = \int_A Y \cdot L_t d\mathbb{P}$$

für alle $A \in \mathcal{F}_t$.

iii.) Für eine \mathcal{F}_t -messbare, über \mathbb{Q} integrierbare Zufallsvariable Y und $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y | \mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t | \mathcal{F}_s]}{L_s}.$$

Beweis.

i.) **Zu zeigen:** \mathbb{Q} ist ein zu $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Durch $L_T > 0$ haben wir die Dichte von \mathbb{Q} bzgl. \mathbb{P} für alle $A \in \mathcal{F}_T$ definiert, dass bedeutet für ein $A \in \mathcal{F}_T$ gilt

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A L_T d\mathbb{P}.$$

Das Martingal ist ein adaptierter Prozess und damit ist L_T \mathcal{F}_T -messbar, außerdem ist L_T nicht negativ. Daher sind die Bedingungen für eine Radon-Nikodym Dichte erfüllt und es übertragen sich die Maßeigenschaften von \mathbb{P} auf \mathbb{Q} . Damit gezeigt ist, dass \mathbb{Q} auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss noch die Normierung auf 1 geprüft werden. Es gilt

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \int_{\Omega} L_T d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T] = 1.$$

Diese Eigenschaft wird in den Voraussetzungen gefordert. Bei der Äquivalenz der beiden Maße, also für alle $A \in \mathcal{F}_T$ soll $\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ sein, folgt die Hinrichtung aus der Tatsache, dass $L_T > 0$ ist und die Rückrichtung aus dem Satz von Radon-Nikodym.

ii.) **Zu zeigen:** $\int_A Y d\mathbb{Q} = \int_A Y \cdot L_t d\mathbb{P}$ für eine \mathcal{F}_t -messbar, über \mathbb{Q} integrierbare Zufallsvariable Y und alle $A \in \mathcal{F}_t$.

Sei Y eine \mathcal{F}_t -messbare, über \mathbb{Q} integrierbare Zufallsvariable und $A \in \mathcal{F}_t$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A Y d\mathbb{Q} &= \int_A Y \cdot L_T d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}[Y \cdot L_T | \mathcal{F}_t] d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung folgt aus den Eigenschaften, die bei der Definition des bedingten Erwartungswertes gefordert werden (siehe Anhang A.0.2 (ii)), da wir gerade A aus \mathcal{F}_t gewählt haben. Der Erwartungswert wird auf \mathcal{F}_t bedingt und durch die Messbarkeit von Y bzgl. dieser σ -Algebra können wir Y herausziehen (siehe Anhang A.0.3 (i)). Daher ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \int_A Y d\mathbb{Q} &= \int_A Y \cdot \mathbb{E}[L_T | \mathcal{F}_t] d\mathbb{P} \\ &= \int_A Y \cdot L_t d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt nutzen wir die Martingaleigenschaft aus, die für den stochastischen Prozess $(L_t)_{t \in [0, T]}$ vorausgesetzt wurde.

Desweiteren sei hier noch erwähnt, dass wir als Zufallsvariable auch $\mathbb{1}_\Omega$ wählen können und sich somit

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(A) &= \int_A \mathbb{1}_\Omega \cdot L_t d\mathbb{P} \\ &= \int_A L_t d\mathbb{P} \end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{F}_t$ berechnen lässt. Dies macht deutlich, dass wir für jedes $t \in [0, T]$ auf \mathcal{F}_t das Element L_t des Martingals als Dichte für \mathbb{Q} bzgl. \mathbb{P} verwenden können.

iii.) **Zu zeigen:** $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[Y | \mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y L_t | \mathcal{F}_s]}{L_s}$ für eine \mathcal{F}_t -messbare, über \mathbb{Q} integrierbare Zufallsvariable Y mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Sei Y eine \mathcal{F}_t -messbare, über \mathbb{Q} integrierbare Zufallsvariable, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Dann ist $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[Y | \mathcal{F}_s]$ die fast-sicher eindeutige \mathcal{F}_s -messbare Zufallsvariable für die gilt,

dass

$$\int_A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}_s] d\mathbb{Q} = \int_A Y d\mathbb{Q} \stackrel{\text{nach ii.)}}{=} \int_A Y \cdot L_t d\mathbb{P}$$

und $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t|\mathcal{F}_s]$ ist die fast-sicher eindeutige \mathcal{F}_s -messbare Zufallsvariable mit

$$\begin{aligned} \int_A Y \cdot L_t d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t|\mathcal{F}_s] d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t|\mathcal{F}_s] \cdot \frac{L_s}{L_s} d\mathbb{P} \\ &\stackrel{\star}{=} \int_A \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t|\mathcal{F}_s]}{L_s} d\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung (\star) greifen wir auf Teil ii.) zurück, denn wir integrieren über eine \mathcal{F}_s messbare Zufallsvariable und können deshalb durch L_s zu dem Maß \mathbb{Q} übergehen. Insgesamt folgt also für alle $A \in \mathcal{F}_s$

$$\int_A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}_s] d\mathbb{Q} = \int_A \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t|\mathcal{F}_s]}{L_s} d\mathbb{Q}$$

und beide Zufallsvariablen unter dem Integral sind \mathcal{F}_s -messbar. Daher können wir mit der fast-sicheren Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes folgern, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y L_t|\mathcal{F}_s]}{L_s}$$

ist. □

Den soeben bewiesenen Satz 3.2.5 werden wir für den Beweis des Satzes von Girsanov verwenden, denn er ermöglicht uns zwischen den beiden Maßen zu wechseln. So können aus Informationen, die nur unter einem Maß bekannt sind, auch Eigenschaften, die unter dem anderen Maß gelten, hergeleitet werden. Der erste Teil des Beweises von Satz 3.2.4 behandelt das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} und die Äquivalenz zu \mathbb{P} . Im zweiten Beweisteil wird dann die Aussage über den Wienerprozess bzgl. \mathbb{Q} gezeigt.

Beweis des Satzes von Girsanov (3.2.4).

Durch die Voraussetzungen aus dem Satz ist Folgendes für den Beweis gegeben:

- $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $T > 0$,
- $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ als Standard-Wienerprozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$
- $L_T := e^{(\vartheta W_T - \frac{1}{2} \vartheta^2 T)}$ als Dichte von \mathbb{Q} bzgl. $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$.

(i) **Zu zeigen:** \mathbb{Q} ist ein zu $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß

Der stochastische Prozess $(L_t)_{t \in [0, T]} = \left(e^{\vartheta W_t - \frac{1}{2} \vartheta^2 t} \right)_{t \in [0, T]}$ ist nach Satz 3.2.3 iii.) ein Martingal. Durch die Exponentialform ist für alle $t \in [0, T]$ erfüllt, dass $L_t > 0$ ist und außerdem berechnet sich der Erwartungswert für jedes Element des Martingals durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\vartheta W_t - \frac{1}{2} \vartheta^2 t}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\vartheta W_t}] \cdot e^{-\frac{1}{2} \vartheta^2 t} \\ &\stackrel{\star}{=} e^{\frac{1}{2} \vartheta^2 t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \vartheta^2 t} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung \star folgt dabei aus der Tatsache, dass $W_t \mathcal{N}(0, t)$ -verteilt und damit $e^{\vartheta W_t} \mathcal{LN}(0, \vartheta^2 t)$ -verteilt ist. Die Berechnung des Erwartungswertes erfolgte mit dem Satz 2.4.3. Es sind alle Voraussetzungen für den Satz 3.2.5 erfüllt und wir erhalten durch die Aussage in i.), dass \mathbb{Q} und \mathbb{P} zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathcal{F}_T sind.

(ii) **Zu zeigen:** $\widehat{W} = (W_t - \vartheta t)_{t \in [0, T]}$ ist ein Standard-Wienerprozess unter \mathbb{Q} .

Es sind alle vier definierenden Eigenschaften eines Standard Wienerprozesses aus 2.4.1 für den Prozess $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t \in [0, T]} = (W_t - \vartheta t)_{t \in [0, T]}$ unter dem Maß \mathbb{Q} nachzuweisen. Diese werden im Folgenden Schritt für Schritt behandelt. $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ bezeichnet weiterhin einen Standard Wienerprozess unter \mathbb{P} . Der Messraum (Ω, \mathcal{F}) sowie die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ sind für W und \widehat{W} identisch und so kann aus der Form von \widehat{W} leicht gefolgert werden, dass auch dieser Prozess adaptiert ist an $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

i.) $\widehat{W}_0 = W_0 - \vartheta \cdot 0 = 0$ \mathbb{P} -f.s. und durch die Äquivalenz der Maße auch \mathbb{Q} -f.s..

ii.) **Zu zeigen:** $W_t - W_s$ ist unter \mathbb{Q} $\mathcal{N}(0, t - s)$ -verteilt für $0 \leq s < t \leq T$.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass die Zuwächse von W unter \mathbb{Q} normalverteilt sind mit Erwartungswert $\vartheta(t - s)$ und Varianz $(t - s)$. Daraus kann anschließend die geforderte Verteilung von \widehat{W} unter \mathbb{Q} gefolgert werden. Die Verteilung von W

wird über die Verteilungsfunktion berechnet:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\{W_t - W_s \leq x\}) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) d\mathbb{Q} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot L_t d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Es wird Satz 3.2.5 ii.) verwendet mit $\mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}$ als \mathcal{F}_t -messbar Funktion, denn durch W_t und W_s als \mathcal{F}_t -messbare Funktionen ist $\{W_t - W_s \leq x\} \in \mathcal{F}_t$. Nun gilt weiter

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot L_t d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot e^{(\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} \cdot e^{\vartheta W_s - \vartheta W_s} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot e^{(\vartheta(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} \cdot e^{\vartheta W_s} d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit von $W_t - W_s$ zu \mathcal{F}_s impliziert die Unabhängigkeit von $W_t - W_s$ zu $W_s = W_s - W_0$ (siehe Anhang A.0.1), daher gilt

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot e^{(\vartheta(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} \cdot e^{\vartheta W_s} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot e^{(\vartheta(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} d\mathbb{P} \cdot \int_{\Omega} e^{\vartheta W_s} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t - W_s \leq x\}}(\omega) \cdot e^{(\vartheta(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} d\mathbb{P} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\vartheta W_s}].\end{aligned}$$

Das Problem, die Verteilung von $W_t - W_s$ zu ermitteln, hat sich also nun durch die Eigenschaft der Unabhängigkeit auf zwei leicht zu behandelnde Integrale vereinfacht. Das erste Integral können wir umformen indem wir den Zuwachs als eine Zufallsvariable betrachten, deren Verteilung bekannt ist, also $W_t - W_s =: Y \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Hier können wir mit Hilfe der Dichte für die Normalverteilung das Integral berechnen. Das zweite Integral kann, wie oben bereits geschehen, über die logarithmische Normalverteilung berechnet werden. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\{W_t - W_s \leq x\}) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{Y \leq x\}}(\omega) \cdot e^{(\vartheta Y - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} d\mathbb{P} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\vartheta W_s}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y \leq x\}}(y) \cdot e^{(\vartheta y - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} d\mathcal{N}(0, t - s)(y) \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 s} \\ &= \int_{-\infty}^x e^{(\vartheta y - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - s)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{(t - s)}} dy \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)^2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 s + \vartheta y - \frac{1}{2}\vartheta^2 t - \frac{1}{2}\frac{y^2}{(t-s)}} dy \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\vartheta^2(t-s) + \frac{y^2}{(t-s)} - 2\vartheta y\right)} dy \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2 - 2y\vartheta(t-s) + \vartheta^2(t-s)^2}{(t-s)}\right)} dy \\
&= \int_{-\infty}^x \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-\vartheta(t-s))^2}{(t-s)}\right)}}_{\text{Dichtefunktion für } \mathcal{N}(\vartheta(t-s), (t-s))} dy
\end{aligned}$$

Wir erhalten durch die Umformungen ein Integral über die Dichte einer Normalverteilung. Die Integrationsgrenzen sind unverändert geblieben, deshalb ergibt sich als Verteilungsfunktion für die Zuwächse von W unter \mathbb{Q} die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung zu $\vartheta(t-s)$ und $(t-s)$. Daher ist $W_t - W_s$ unter \mathbb{Q} $\mathcal{N}(\vartheta(t-s), (t-s))$ -verteilt und wir können folgern, dass $\widehat{W}_t - \widehat{W}_s = W_t - W_s - \vartheta(t-s)$ die geforderte $\mathcal{N}(0, (t-s))$ -Verteilung unter \mathbb{Q} besitzt.

iii.) **Zu zeigen:** $\widehat{W}_t - \widehat{W}_s$ ist stochastisch unabhängig von \mathcal{F}_s für alle $0 \leq s < t \leq T$.

Betrachte \mathcal{F}_s und $W_t - W_s$ für $0 \leq s < t \leq T$, dann werden folgende Eigenschaften für diesen Beweis genutzt:

- $W_t - W_s, W_s$ sind \mathcal{F}_t -messbar, damit sind auch $\widehat{W}_t - \widehat{W}_s, \widehat{W}_s$ \mathcal{F}_t -messbar,
- $W_t - W_s$ und \mathcal{F}_s sind unabhängig unter \mathbb{P} .

Es gilt für jede borel-messbare und beschränkte Abbildung $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Satz 3.2.5 iii.), dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[h(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s) \mid \mathcal{F}_s \right] &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[h(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s) \cdot L_t \mid \mathcal{F}_s \right]}{L_s} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[h(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s) \cdot \frac{L_t}{L_s} \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[h(W_t - W_s - \vartheta(t-s)) \cdot \frac{L_t}{L_s} \mid \mathcal{F}_s \right].
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt dürfen wir $\frac{1}{L_s}$ hineinziehen (Satz A.0.3), denn da $L_s > 0$

und messbar ist, ist auch $\frac{1}{L_s}$ messbar bzgl. \mathcal{F}_s . Desweiteren ist

$$\frac{L_t}{L_s} = e^{(\vartheta(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))} \quad (3.3)$$

und wir definieren $\tilde{h}(y) = h(y - \vartheta(t-s)) \cdot e^{(\vartheta y - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))}$. Dies ist eine borel-messbare Funktion, denn h ist borel-messbar und die Exponentialfunktion ist stetig und somit auch borel-messbar. Mit der Unabhängigkeit aus b) wird der bedingte Erwartungswert unter \mathbb{P} zu einem normalen Erwartungswert (siehe A.0.3 ii.) und wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[h(W_t - W_s - \vartheta(t-s)) \cdot \frac{L_t}{L_s} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\tilde{h}(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\tilde{h}(W_t - W_s) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[h(W_t - W_s - \vartheta(t-s)) \cdot \frac{L_t}{L_s} \right]. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert ist nur die Verteilung einer Zufallsvariablen relevant. Mit der identischen Verteilung bei $W_t - W_s$ und W_{t-s} , unterliegt auch $\frac{L_t}{L_s}$ der gleichen Verteilung wie L_{t-s} (siehe Gleichung 3.3). Im Erwartungswert können demnach $W_t - W_s$ durch W_{t-s} und $\frac{L_t}{L_s}$ durch L_{t-s} ausgetauscht werden. So ist es sehr leicht möglich wieder auf das Maß \mathbb{Q} zu wechseln:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[h(W_t - W_s - \vartheta(t-s)) \cdot \frac{L_t}{L_s} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [h(W_{t-s} - \vartheta(t-s)) \cdot L_{t-s}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(W_{t-s} - \vartheta(t-s))] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(W_t - W_s - \vartheta(t-s))] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s)]. \end{aligned}$$

Für den Wechsel zum Maß \mathbb{Q} wird hier die Dichte L_{t-s} verwendet, weil W_{t-s} nun \mathcal{F}_{t-s} -messbar ist (Satz 3.2.5 ii.). Auf Grundlage der vorherigen Begründung kann auch wieder zu $W_t - W_s$ zurücktransformiert werden und die Unabhängigkeit von $\widehat{W}_t - \widehat{W}_s$ zu \mathcal{F}_s unter \mathbb{Q} ist gezeigt.

iv.) **Zu zeigen:** $\widehat{W} = (W_t - \vartheta t)_{t \in [0, T]}$ besitzt stetige Pfade.

$(W_t)_{t \in [0, T]}$ besitzt stetige Pfade, daher ist auch $\widehat{W}_t : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ für ein festes $\omega \in \Omega$ eine stetige Abbildung als Addition von zwei stetigen Funktionen.

□

Der Satz von Girsanov wurde bewiesen und zeigt sowohl die verwendete Dichtefunktion, sowie die konkrete Veränderung des Wienerprozesses bei einem Maßwechsel. Wir wissen jetzt, dass sich ein Standard Wienerprozess durch den Maßwechsel zu einem Wienerprozess mit linearem Driftterm transformiert. Um wieder auf einen Standard Wienerprozess zu gelangen, muss dieser Driftterm eliminiert werden. Die Aufgabe besteht nun darin die konkrete Dichte festzulegen, welche unseren Wertprozess des risky assets in ein Martingal wandelt. Hierfür greifen wir auf die bereits gesehene Umformung aus Gleichung 3.2 und den Satz 3.2.3 zurück:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t &= B_t^{-1} \cdot S_t = e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t} \\ &= e^{\sigma(W_t - \frac{r - \mu}{\sigma} \cdot t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t}. \end{aligned}$$

Wenn wir ϑ aus dem Satz von Girsanov (Satz 3.2.4) als $\vartheta := \frac{r - \mu}{\sigma}$ definieren und infolgedessen auch das Maß \mathbb{Q} mit die Dichte $L_T := e^{\left(\frac{r - \mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right)^2 T\right)}$ bzgl. \mathbb{P} verwenden, so transformiert sich unser Standard-Wienerprozess unter \mathbb{P} zu einem Wienerprozess mit Drift $\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)$ unter \mathbb{Q} . Das bedeutet, der Prozess

$$\widehat{W} := (W_t - \frac{r - \mu}{\sigma} \cdot t)_{t \in [0, T]}$$

entspricht einem Standard Wienerprozess, also ohne Driftterm, unter \mathbb{Q} . Demnach erreichen wir unter \mathbb{Q} für den abdiskontieren Preisprozess

$$\widetilde{S}_t = B_t^{-1} \cdot S_t = e^{\sigma \widehat{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t},$$

genau die Form eines Exponentialmartingals aus Satz 3.2.3 mit dem Standard Wienerprozess \widehat{W} .

Zur Vereinfachung werden in der nachfolgenden Tabelle die unterschiedlichen Prozesse für das Maß \mathbb{P} aus dem Modell und das Äquivalente Martingalmaß \mathbb{Q} abgebildet.

	Maß \mathbb{P}	Maß \mathbb{Q}
Standard Wienerprozess	$W = (W_t)_{t \in [0, T]}$	$\widehat{W} = (W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} \cdot t)_{t \in [0, T]}$
$(S_t)_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t})_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t})_{t \in [0, T]}$
$(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t})_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t})_{t \in [0, T]}$

Tabelle 3.1.: Übersicht der Prozesse für die Maße \mathbb{P} und \mathbb{Q}

3.3. Kurze Zusammenfassung

Mit Hilfe der Girsanov-Transformation konnte in diesem Kapitel ein Äquivalentes Martingalmaß, bezeichnet mit \mathbb{Q} , für das Black-Scholes Modell hergeleitet werden. Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} wurde dabei auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ definiert und für die Derivate, die in dieser Arbeit bewertet werden, stellt dies keine Einschränkung dar. Für die zu bewertenden Derivate werden die jeweiligen Claims betrachtet und diese sind nach Voraussetzung immer \mathcal{F}_T -messbar. Die Existenz des Äquivalenten Martingalmaßes stellt sicher, dass wir arbitragefreie Preise im Black-Scholes Modell berechnen können. Für die Berechnung des fairen Preises wird die zu Beginn des Kapitels genannte Formel verwendet. Desweiteren wird der Satz von Girsanov auch bei späteren Beweisen ein sehr hilfreiches Instrument sein.

4. Bewertung einer Call-Option

4.1. Bewertung im Finanzmarktmodell

Das Äquivalente Martingalmaß steht uns jetzt zur Verfügung, um Derivate anhand ihrer Claims zu bewerten. Den Preis zum Zeitpunkt 0 eines Derivates mit Claim $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen wir über die Formel

$$P_0(C) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} \cdot C]. \quad (4.1)$$

Eine der interessantesten Folgerungen für Finanzmärkte, die aus dem Black-Scholes Modell gezogen werden können, zeigt sich anhand der Form der Preisprozesse unter dem Äquivalenten Martingalmaß. Bei Betrachtung der Tabelle 3.1 fällt auf, dass mit dem Übergang von \mathbb{P} zu \mathbb{Q} die Driftvariable μ aus dem stochastischen Prozess des risky assets komplett verschwindet. Der Prozess beinhaltet nur noch die Zinsrate r und die Volatilität σ als Modellparameter. Welche Aussagen können jedoch aus diesem Phänomen gezogen werden?

Im Bereich der Finanzmathematik stellt die Bewertung von Risiken eine anspruchsvolle Aufgabe dar, welche für tiefergehende Betrachtungen gelöst werden muss. Die Frage ist zunächst, wie das Risiko mathematisch definiert und gemessen wird und daraus resultierend welche Parameter zum Beispiel das Risiko der Investition in eine Aktie widerspiegeln. Die Bewertung von Risiken ist auch ein wesentlicher Bestandteil bei der Bewertung von Derivaten, weil insbesondere die Ungewissheit über die Auszahlung das Festlegen eines fairen Preises erschwert. Auch wenn an dieser Stelle Risiko nur in Bezug auf Derivate und deren Bewertung betrachtet werden soll, können wir durch den fehlenden Driftterm und die Bewertungsformel (4.1) schon eine Aussage für das Black-Scholes Modell treffen. Dadurch, dass der Drift nicht mehr in dem Prozess unter \mathbb{Q} enthalten ist, wird er auch bei der Bewertungsformel nicht mehr berücksichtigt. Der faire Preis eines Derivates berechnet sich daher unabhängig von der zu erwartenden Rendite μ . Das Risiko nimmt somit einzig über die Volatilität σ Einfluss auf die

Preise von Derivaten im Black-Scholes Modell. Auch ohne die explizite Berechnung kann bereits gefolgert werden, dass für Marktteilnehmer eines Finanzmarktes, die das Black-Scholes Modell unterstellen und unterschiedliche Ansichten über die erwartete Rendite eines risky assets besitzen, ein identischer Preis für das Derivat resultiert. Die persönliche Ansicht über die erwartete Rendite ist demnach für die Bewertung irrelevant. Unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß nimmt die Zinsrate, die am Markt zu beobachten ist, die Rolle des Drifts im geometrischen Wienerprozess für das risky asset ein.

Dieses Ergebnis sehen wir auch im nächsten Abschnitt, wenn wir eine Formel berechnen, die den Preis für eine europäische Call-Option angibt.

4.2. Die Black-Scholes Formel

In dem Black-Scholes Modell betrachten wir nun eine europäische Call-Option auf das risky asset. Eine Call-Option bietet dem Käufer das Recht, aber nicht die Pflicht, das risky asset zu einem Strikepreis K , der zum Zeitpunkt 0 festgelegt wird, zu kaufen. Da der Käufer nicht in der Pflicht steht, wird er die Option nur nutzen, wenn der Kurs bei Fälligkeit über dem Strikepreis liegt, also wenn $S_T > K$ ist. In diesem Fall bringt die Option eine Auszahlung in Höhe von $S_T - K$, denn der Besitzer der Option bezahlt den Strikepreis K und erhält die Aktie mit aktuellem Wert S_T . Im anderen Fall wird die Option verfallen und keine Auszahlung generieren. Wir erhalten somit den Claim $(S_T - K)^+ := \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$ für den europäischen Call mit Strikepreis K und Fälligkeit T . Diese Abbildung ist \mathcal{F}_T messbar, da wir den Preisprozess des risky assets als einen adaptierten Prozess gewählt haben und somit S_T \mathcal{F}_T -messbar ist. Der Strikepreis K ist nur eine Konstante und unabhängig von ω . In der Einführung (Kapitel 1) wurde bereits erwähnt, dass eine Arbitragemöglichkeit vorliegt, wenn die Call-Option kostenlos ausgegeben wird. Wir besitzen jetzt alle Informationen um den Preis einer europäischen Call-Option zu berechnen und die resultierende Formel ist bekannt als die Black-Scholes Formel.

Satz 4.2.1 (Black-Scholes Formel).

Im Black-Scholes Modell mit Zinsrate r ist der faire Preis einer europäischen Call-Option mit Strikepreis K und Laufzeit T auf ein risky asset mit Volatilität σ und Anfangswert S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} C_0(S_0, T, K) &= S_0 \cdot \Phi \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Ke^{-rT} \cdot \Phi \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mit Φ wird hier die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet.

Beweis.

Die Bewertung erfolgt nach Gleichung (4.1) mit dem Claim $(S_T - K)^+$. Für den Beweis des Satzes muss nachgewiesen werden, dass die genannte Formel (4.2) das Ergebnis des folgenden Erwartungswertes ist:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} \cdot (S_T - K)^+] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot (S_T - K)^+].$$

Um mit diesem Erwartungswert besser rechnen zu können, verwenden wir zur Darstellung eine Indikatorfunktion, denn für die Menge $\{S_T \leq K\}$ ist $\max\{0, S_T - K\} = 0$ und damit ist auch die Auszahlung sowie die abdiskontierte Auszahlung gleich 0. Der Term lässt sich daher schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot (S_T - K)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot S_T] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot K]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die beiden aufgeführten Erwartungswerte werden im Folgenden getrennt behandelt und die beiden Ergebnisse zum Schluss wieder zusammengefügt. Der vordere Teil kann mit Hilfe des Satzes von Girsanov (3.2.4) umgeformt werden. Es muss beachtet werden, dass wir den passenden stochastischen Prozess auswählen, also den Wienerprozess \widehat{W} unter \mathbb{Q} verwenden (siehe Tabelle 3.1).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot S_T] &= \int_{\Omega} e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot S_T \, d\mathbb{Q} \\ &= \int_{\Omega} e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot S_0 \cdot e^{\sigma\widehat{W}_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \, d\mathbb{Q} \\ &= \int_{\Omega} S_0 \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > k\}} \cdot e^{\sigma\widehat{W}_T - \frac{\sigma^2}{2}T} \, d\mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Exponentialfunktion aus S_T und die Exponentialfunktion, die wir durch den Bond erhalten haben, können zu einer Dichte zusammengefasst werden. Durch den Maßwechseln auf ein neu definiertes Maß ist es nicht mehr notwendig die Exponentialfunktion unter dem Integral weiter zu behandeln. Der große Vorteil den uns der Satz von Girsanov nun bietet ist, dass wir ohne zusätzliche Rechnungen wissen wie der Preisprozess des risky assets unter dem neuen Maß aussieht bzw. verteilt ist.

Wir definieren also ein neues Maß \mathbb{Q}^* auf \mathcal{F}_T durch die Dichte $e^{\sigma\widehat{W}_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ bzgl. \mathbb{Q} . Es ergeben sich somit folgende Prozesse, wobei $(\widetilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$ den Standard Wienerprozess unter \mathbb{Q}^* darstellt:

	Maß \mathbb{Q}	Maß \mathbb{Q}^*
Standard Wienerprozess	$\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t \in [0, T]}$	$\widetilde{W} = (\widehat{W}_t - \sigma \cdot t)_{t \in [0, T]}$
$(S_t)_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma\widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t})_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma\widetilde{W}_t + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t})_{t \in [0, T]}$
$(\widetilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma\widehat{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t})_{t \in [0, T]}$	$(S_0 \cdot e^{\sigma\widetilde{W}_t + \frac{\sigma^2}{2} \cdot t})_{t \in [0, T]}$

Tabelle 4.1.: Übersicht der Prozesse mit neuem Maß \mathbb{Q}^*

Der Preisprozess unter \mathbb{Q}^* resultiert dabei aus folgender kurzen Rechnung:

$$\begin{aligned}
 S_0 \cdot e^{\sigma\widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t} &= S_0 \cdot e^{\sigma\widehat{W}_t - \sigma^2 \cdot t + \sigma^2 \cdot t + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t} \\
 &= S_0 \cdot e^{\sigma \cdot \overbrace{(\widehat{W}_t - \sigma \cdot t)}^{=\widetilde{W}_t} + (\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t} \\
 &= S_0 \cdot e^{\sigma\widetilde{W}_t + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}.
 \end{aligned}$$

Transformiert man den Erwartungswert aus Gleichung 4.4 auf das neue Maß \mathbb{Q}^* , so vereinfacht sich die Rechnung zur Ermittlung einer einfachen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} S_0 \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot e^{\sigma\widehat{W}_T - \frac{\sigma^2}{2}T} d\mathbb{Q} &= \int_{\Omega} S_0 \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} d\mathbb{Q}^* \\
 &= S_0 \cdot \mathbb{Q}^*(\{S_T > K\}) \\
 &= S_0 \cdot [1 - \mathbb{Q}^*(\{S_T \leq K\})].
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

An dieser Stelle wird das Ereignis $\{S_T > K\}$ bzw. $\{S_T \leq K\}$, welches wir bis jetzt außer Acht gelassen haben, wichtig. Durch den Maßwechsel und den dadurch resultie-

renden neuen Wienerprozess \widetilde{W} , hat sich die Gestalt von S_T verändert. Mit dem Satz von Girsanov konnte die neue Form, wie in Tabelle 4.1 abgebildet, bereits hergeleitet werden. Formen wir die Menge mit den gewonnenen Erkenntnissen um und nutzen die bekannte Verteilung von \widetilde{W} unter \mathbb{Q}^* aus, so gelangen wir zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ .

$$\begin{aligned} \{S_T \leq K\} &= \left\{ S_0 \cdot e^{\sigma \widetilde{W}_T + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T} \leq K \right\} \\ &= \left\{ \sigma \widetilde{W}_T + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T \leq \log \left(\frac{K}{S_0} \right) \right\} \\ &= \left\{ \sigma \widetilde{W}_T \leq \log \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T \right\} \\ &= \left\{ \frac{\widetilde{W}_T}{\sqrt{T}} \leq \frac{\log \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right\}. \end{aligned}$$

Unter \mathbb{Q}^* ist \widetilde{W} unser Wienerprozess, und mit Eigenschaft ii.) aus Definition 2.4.1 bzw. der Umformulierung für \widetilde{W}_t ist klar, dass $\frac{\widetilde{W}_T}{\sqrt{T}}$ standardnormalverteilt ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{Q}^* (\{S_T \leq K\}) &= 1 - \mathbb{Q}^* \left(\left\{ \frac{\widetilde{W}_T}{\sqrt{T}} \leq \frac{\log \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right\} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \tag{4.6} \\ &= 1 - \Phi \left((-1) \cdot \frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

Durch die Symmetrie der Standardnormalverteilung zur Null, gilt für die Verteilungsfunktion Φ , dass $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ ist. Dies wird im letzten Schritt ausgenutzt und es folgt bereits der erste Teil der Black-Scholes Formel.

Der zweite Erwartungswert lässt sich analog umformen, daher soll nur kurz gezeigt werden, wie diese Gleichungen konkret aussehen.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot K] &= \int_{\Omega} e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot K \, d\mathbb{Q} \\ &= e^{-rT} \cdot K \cdot \mathbb{Q}(\{S_T < K\}).\end{aligned}$$

Der Einsatz der Girsanov-Transformation ist hier nicht notwendig, denn eine ähnliche Form wie in Gleichung 4.5 ist direkt gegeben. Unter dem Maß \mathbb{Q} hat der stochastische Prozess eine leicht veränderte Gestalt und dies wird bei der Umformung der Menge deutlich. So ist in diesem Fall

$$\begin{aligned}\{S_T \leq K\} &= \left\{ S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_T + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T} \leq K \right\} \\ &= \left\{ \frac{\widehat{W}_T}{\sqrt{T}} \leq \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right\}.\end{aligned}$$

Mit dem Argument aus Gleichung 4.6 kann die Wahrscheinlichkeit durch die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ausgedrückt werden:

$$1 - \mathbb{Q}(\{S_T \leq K\}) = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}}\right).$$

Mit der ersten Umformung aus Gleichung 4.3 können wir nun beide Teilergebnisse verwenden, um den Beweis für die Black-Scholes Formel abzuschließen. Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} \cdot (S_T - K)^+] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot S_T] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \cdot K] \\ &= S_0 \cdot \mathbb{Q}^*(\{S_T > K\}) + e^{-rT} \cdot K \cdot \mathbb{Q}(\{S_T > K\}) \\ &= S_0 \cdot \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}}\right) \\ &\quad + e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}}\right).\end{aligned}$$

□

4.3. Fazit und Ausblick

Mit der Black-Scholes Formel kann der arbitragefreie Preis bzw. Wert einer europäischen Call-Option im Black-Scholes Modell berechnet werden. Der Anfangskurs und die Volatilität des risky assets sowie die Zinsrate sind am Markt gegeben. Die Volatilität muss hierbei anhand von vergangenen Daten geschätzt werden. Der Preis einer Option kann daher nur über die Fälligkeitsdauer und den Strikepreis beeinflusst werden und wie am Anfang des Kapitels erwähnt, ist der Drift μ für die Bewertung irrelevant. Sollen die Einflüsse der verschiedenen Parameter genauer analysiert werden, so können hierfür die sogenannten Greeks betrachtet werden. Als Greeks werden die partiellen Ableitungen nach den verschiedenen Parametern der Black-Scholes Formel bezeichnet.

In der Publikation „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“ wurde die Black-Scholes Formel nicht nur hergeleitet, sondern zusätzlich empirisch überprüft. Es stellte sich heraus, dass die Käufer von Optionen durchweg höhere Preise zahlten und die Verkäufer der Optionen meistens Preise erhielten, die sehr nah an den errechneten Preisen lagen. Dies ist vermutlich auf die Transaktionskosten zurückzuführen, die von den Optionskäufern getragen werden müssen. Im Black-Scholes Modell werden Transaktionskosten, Steuern etc. nicht berücksichtigt.

Die Black-Scholes Formel kann nicht nur verwendet werden, um die europäische Call-Option zu bewerten, sondern auch den amerikanischen Call. Dieser erlaubt den Kauf des Underlying zu jedem Zeitpunkt, aber es kann gezeigt werden, dass der Preis für beide Optionen übereinstimmen müssen. Mit einer Call-Put Parität lässt sich auch der Preis der europäischen Put-Option bestimmen. Insgesamt ermöglicht die Black-Scholes Formel die Bewertung der bekanntesten Derivate und in Kapitel 5 wird ein weiteres Derivat analysiert, welches auch auf die Black-Scholes Formel zurückgreift.

In dem Beweis der Black-Scholes Formel wurde eine Strategie benutzt, die auch bei der Bewertung anderer Derivate hilfreich ist. Wir berechnen den fairen Preis wie in Gleichung 4.1 und können den Satz von Girsanov anwenden. Immer wenn wir den abdiskontierten Preisprozess für das risky asset unter dem Äquivalenten Martingalmaß betrachten, kann es hilfreich sein zu dem neuen Maß \mathbb{Q}^* aus dem Beweis überzugehen. In der nachfolgenden Tabelle sind daher alle drei Maße, die wir bis hier verwendet haben, mit ihrem Wienerprozess, dem Preisprozess sowie dem abdiskontierten Preisprozess abgebildet.

	Maß \mathbb{P}	Maß \mathbb{Q}	Maß \mathbb{Q}^*
Wienerprozess	W_t	$\widehat{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} \cdot t$	$\widetilde{W}_t = \widehat{W}_t - \sigma \cdot t$
Kurswert S_t	$S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}$	$S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}$	$S_0 \cdot e^{\sigma \widetilde{W}_t + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}$
Driftterm S_t	μ	r	$r + \sigma^2$
disk. Kurs \widetilde{S}_t	$S_0 \cdot e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}$	$S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t}$	$S_0 \cdot e^{\sigma \widetilde{W}_t + \frac{\sigma^2}{2} \cdot t}$
Driftterm \widetilde{S}_t	$\mu - r$	0	σ^2

Tabelle 4.2.: Übersicht der Wienerprozesse und Preisprozesse

5. Bewertung einer Barriere-Option

5.1. Barriere-Optionen

Eine leichte Abwandlung der normalen Call- und Put-Optionen sind die Barriere-Optionen, welche in diesem Kapitel bewertet werden sollen. Aus den verschiedenen Varianten von Barriere-Optionen wählen wir den Down-and-out Call und werden für diesen den fairen Preis berechnen. Die Barriere-Optionen haben eine Besonderheit, wodurch die Berechnung des fairen Preises schwieriger ist als zuvor bei der Black-Scholes Formel. Die Auszahlung hängt hier nicht nur von dem Kurswert zum Zeitpunkt T ab, sondern von dem kompletten Pfad des Prozesses. Für unseren Down-and-Out Call bedeutet dies, dass die Auszahlung identisch ist mit einer Call-Option unter der Voraussetzung, dass der Kurs des risky assets zu keinem Zeitpunkt unter der vorher festgelegten Barriere B sinkt. Liegt der Kurswert zu einem Zeitpunkt unterhalb oder auf der Barriere, so erfolgt, auch wenn der Kurs zum Schluss oberhalb des Strikepreises liegt, keine Auszahlung. Die Barriere B ist dabei kleiner als der Anfangskurs und auch kleiner als der Strikepreis, da sonst immer eine Auszahlung von 0 erfolgen würde. In Abbildung 5.1 sind zwei Varianten eines möglichen Kurspfads aufgezeichnet, die sich nur minimal unterscheiden und im Endzeitpunkt bei dem gleichen Kurswert enden. Für den blauen Pfad bringt die Down-and-Out Call-Option eine Auszahlung in Höhe von $S_T - K$, da der Kurs während des gesamten Zeitraums oberhalb der Barriere lag. Nimmt der Kurs den rot eingezeichneten Verlauf an, so erhält der Käufer der Option keine Auszahlung, weil die Barriere an einem Zeitpunkt durchbrochen wurde.

Mathematisch stellt man diese zusätzliche Bedingung über eine Indikatorfunktion dar. Wir haben bereits gesehen, dass eine Call-Option den Claim $(S_T - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$ besitzt. Fügen wir nun an diesen Claim multiplikativ einen zweiten Indikator für die Menge $\{\inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}$ an, so erhalten wir den Claim für unseren Down-and-Out Call. Genau dann wenn der kleinste Wert des risky assets über der Barriere liegt, muss auch der komplette Pfad oberhalb der Barriere sein. Das Infimum wird nur über Kurswerte vor dem Zeitpunkt der Auszahlung (T) gebildet, sodass wir auch folgern

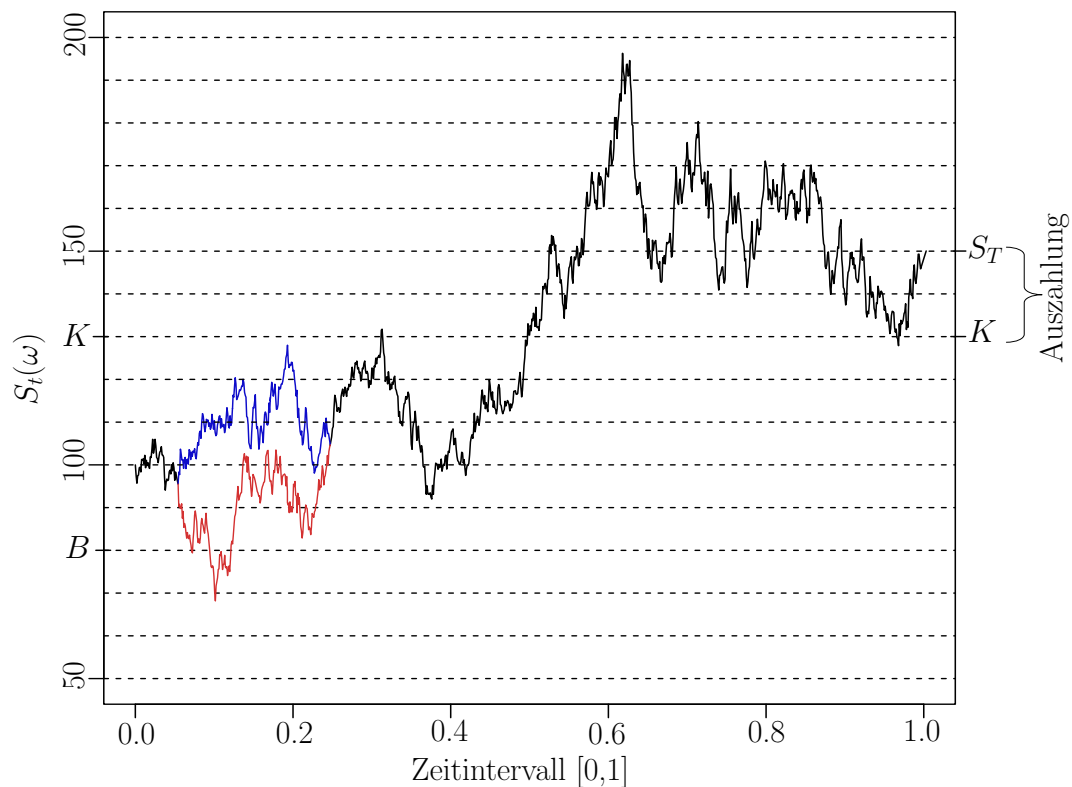


Abbildung 5.1.: Skizze eines Beispielpfades für einen geometrischen Wienerprozess mit positivem Drift

können, dass der Claim die Bedingung der \mathcal{F}_T -Messbarkeit erfüllt. Die Multiplikation der beiden Indikatoren kann zusammengefasst werden, sodass wir einen Indikator für die Schnittmenge von $\{S_T > K\}$ und $\{\inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}$ betrachten müssen. Wie auch schon im Beweis der Black-Scholes Formel, wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{S_T > K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B\}$ durch Mengenumformungen auf die Verteilung des Wienerprozesses zurückgeführt. Dabei konnten wir die Normalverteilung von W_t ausnutzen und den Preis einer Call-Option über Φ angeben. In diesem Fall ist jedoch problematisch, dass zusätzlich noch das Infimum des Wienerprozesses Einfluss nimmt und sich diese Wahrscheinlichkeit nicht ohne Weiteres berechnen lässt. Mit dem Ziel die Verteilung des Infimums bestimmen zu können, untersuchen wir den Wienerprozess im nächsten Abschnitt genauer.

5.2. Reflexionsprinzip für den Wienerprozess

In Kapitel 2 wurde der Wienerprozess definiert und im Anschluss zur Herleitung des Preisprozesses im Black-Scholes Modell verwendet. Ebenfalls konnte gezeigt werden, dass über einen Wienerprozess Martingale erzeugt werden können, die z.B. im Satz von Girsanov als Dichte fungierten. Die nächste hilfreiche Eigenschaft soll in diesem Kapitel hergeleitet werden. Wir möchten uns nun mit dem Reflexionsprinzip für Wienerprozesse beschäftigen, denn dieses liefert das noch fehlende Instrument, um später den Preis der Barriere-Option zu berechnen. Das Reflexionsprinzip besagt, dass ein Wienerprozess, der gespiegelt weiterverläuft sobald er z.B. einen bestimmten Wert zum ersten Mal erreicht, immer noch einen Wienerprozess darstellt. Anders als zuvor beschäftigen wir uns nun mit mehreren Wienerprozessen, die alle für das selbe Wahrscheinlichkeitsmaß definiert sind. Wir wollen damit einsteigen, dass wir aus einem Standard Wienerprozess zwei einfache Beispiele für weitere Wienerprozesse ableiten.

Satz 5.2.1.

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ mit einem Standard Wienerprozess $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ erfüllen auch die Prozesse

- i.) $(-W_t)_{t \in [0, \infty)}$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ und
- ii.) $(W_{t+h} - W_h)_{t \in [0, \infty)}$ bzgl. $(\mathcal{F}_{t+h})_{t \in [0, \infty)}$ für $h \geq 0$

alle Eigenschaften eines Standard Wienerprozesses.

Beweis.

Die Eigenschaften müssen für die neuen Prozesse geprüft werden und hierfür werden nur kurz die wichtigen Argumente genannt, die für den Nachweis notwendig sind.

- i.) $(-W_t)_{t \in [0, \infty)}$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x$ ist eine stetige und messbare Abbildung und daher lassen sich die stetigen Pfade und die Unabhängigkeit zu den Elementen der Filtration direkt aus dem ursprünglichen Wienerprozess folgern. Der Anfangswert 0 ist erfüllt und die Normalverteilung mit Erwartungswert 0 ist symmetrisch, daher gilt, dass auch $-(W_t - W_s) \mathcal{N}(0, t - s)$ -verteilt ist für alle $0 \leq s \leq t < \infty$.

- ii.) $(W_{t+h} - W_h)_{t \in [0, \infty)}$ bzgl. $(\mathcal{F}_{t+h})_{t \in [0, \infty)}$

Der Anfangswert wird durch das Subtrahieren des Wertes W_h auf 0 gebracht und die stetigen Pfade folgen aus den stetigen Pfaden von W . Bei der Unabhängigkeit

und der Verteilung muss beachtet werden, dass h hier einen festen Wert darstellt. Für $0 \leq s \leq t$ gilt:

$$(W_{t+h} - W_h) - (W_{s+h} - W_h) = W_{t+h} - W_{s+h} \sim \mathcal{N}(0, t + h - s - h) = \mathcal{N}(0, t - s).$$

Die Unabhängigkeit ist durch die abgeänderte Filtration (wir betrachten den Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_{t+h})_{t \in [0, \infty)}$), die ebenfalls erst im Zeitpunkt h startet über die Unabhängigkeit von $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ zu $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ erfüllt.

□

Bevor eine ähnliche Aussage für den gespiegelte Wienerprozess bewiesen werden kann, muss zunächst geklärt werden, wie dieser mathematisch dargestellt wird. Wenn der Prozess gespiegelt werden soll sobald er einen Wert zum ersten Mal erreicht, dann besteht das Problem darin, dass dies nicht zu einem konstanten Zeitpunkt geschieht. Durch die verschiedenen Pfade, die der Prozess annehmen kann, wird diese Höhe immer zu unterschiedlichen Zeiten erreicht. Dafür wird eine Stoppzeit verwendet, die in Abhängigkeit von ω an welchem Zeitpunkt ein festgelegtes Kriterium erfüllt ist.

Definition 5.2.2 (Stoppzeit).

Für eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Stoppzeit eine Abbildung $\tau : \Omega \rightarrow I^*$ für die gilt, dass $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$. Hierbei ist $I^* = I$, falls I beschränkt ist und sonst setzt man $I^* = I \cup \{\infty\}$.

Definition 5.2.3 (σ -Algebra der τ -Vergangenheit).

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist die σ -Algebra der τ -Vergangenheit für eine Stoppzeit τ und die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ definiert als

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t\}.$$

Eine Stoppzeit wird verwendet um Zeitpunkte anzugeben, die zu Beginn noch nicht bekannt sind, weil sie von ω abhängen. Als anschauliches Beispiel kann man sich die Stoppzeit als eine Strategie am Finanzmarkt vorstellen. Ein Investor möchte seine Aktie verkaufen, weiß aber nicht wie sich der Aktienkurs entwickeln wird. Setzt er zu Beginn schon willkürlich den Zeitpunkt fest an dem die Aktie verkauft werden soll, so besteht die Gefahr, dass der Aktienkurs zu dem Zeitpunkt sehr niedrig ist. Es scheint daher sinnvoller ein Kriterium festzumachen, welches sich an dem Aktienkurs orientiert. Zum Beispiel könnte der Investor die Aktie verkaufen, sobald der Kurs zum ersten Mal den Wert 100 erreicht. Dabei soll der Anfangswert der Aktie kleiner als

100 sein. Dies wird mit dem stochastischen Prozess $(S_t)_{t \in [0, \infty]}$ als Kurswert über die Stoppzeit $\tau = \inf\{t : S_t = 100\}$ abgebildet. τ ordnet dann jedem $\omega \in \Omega$ den Zeitpunkt zu, an dem der Kurs zum ersten mal den Wert 100 annimmt. Falls dies für ein ω nie geschehen sollte, nimmt τ den Wert ∞ an. Über die Bedingung $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ wird abgesichert, dass zu einem Zeitpunkt t alle Informationen vorliegen, die benötigt werden, um entscheiden zu können ob gestoppt werden muss. Für unser Beispiel kann die Menge umgeschrieben werden zu:

$$\{\tau \leq t\} = \left\{ \sup_{0 \leq r \leq t} S_r \geq 100 \right\}. \quad (5.1)$$

Sollte das Supremum über alle Aktienkurse bis zum Zeitpunkt t größer als 100 sein, so muss wegen der stetigen Pfade auch der Kurs 100 vor dem Zeitpunkt t einmal angenommen worden sein. Andererseits muss das Supremum mindestens den Wert 100 annehmen, wenn die Stoppzeit anzeigt, dass der Kurs 100 vor t bereits erreicht wurde. Der Preisprozess ist adaptiert an unsere Filtration und daher sind alle S_r mit $0 \leq r \leq t$ auch \mathcal{F}_t messbar. Deshalb ist auch das Supremum über diese Kurse messbar und insbesondere ist $\{\tau \leq t\}$ in \mathcal{F}_t enthalten.

Für unseren Fall wird es später ausreichend sein, wenn wir die Stoppzeit betrachten, die abbildet, zu welchem Zeitpunkt der Wienerprozess eine bestimmte konstante Höhe erreicht hat. Das Reflexionsprinzip hingegen gilt allgemein für beliebige Stoppzeiten. Dabei wird der Wienerprozess bis zur Stoppzeit unverändert beibehalten und danach reflektiert fortgeführt. Bevor wir uns anschauen wie der Prozess gespiegelt wird, beweisen wir eine Vorstufe des Reflexionsprinzip. In Anlehnung an Satz 5.2.1 ii.) soll zunächst bewiesen werden, dass ein Wienerprozess der erst ab einer Stoppzeit startet weiterhin ein Wienerprozess ist, unter der Voraussetzung, dass der Anfangswert sowie die Filtration angepasst werden. Der Zeitpunkt 0 des neuen Prozesses entspricht unterschiedlichen Zeitpunkten des ursprünglichen Wienerprozesses, je nachdem welches ω eintritt. Anders als im Reflexionsprinzip definieren wir für den Prozess keine Werte, die bis zur Stoppzeit angenommen werden. Ab der Stoppzeit verläuft der Prozess außerdem identisch wie der Wienerprozess, d.h. wir betrachten noch keine Spiegelung oder sonstige Manipulationen. Wenn die Stoppzeit den Wert ∞ annimmt, startet unser Prozess gar nicht, daher zeigt der folgende Satz, dass unter der Bedingung dass $\tau < \infty$ ist, die Eigenschaften für den Wienerprozess erfüllt werden.

Satz 5.2.4.

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ mit Standard Wienerprozess $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$. Der stochastische Prozess $\widetilde{W}^\tau = (W_{\tau+t} - W_\tau)_{t \in [0, \infty)}$ sei definiert unter $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ mit Stoppzeit τ . Die zugehörige Filtration ist $(\mathcal{F}_{\tau+t} |_{\{\tau < \infty\}})_{t \in [0, \infty)}$. Dann ist \widetilde{W}^τ ein Standard Wienerprozess bzgl. $(\mathcal{F}_{\tau+t} |_{\{\tau < \infty\}})_{t \in [0, \infty)}$ unter $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty)$.

Beweis.

Zu zeigen: \widetilde{W}^τ ist ein Standard Wienerprozess unter $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty)$ bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_{\tau+t} |_{\{\tau < \infty\}})_{t \in [0, \infty)}$.

i.) $\widetilde{W}_0^\tau = W_{\tau+0} - W_\tau = 0$

ii.) Wir zeigen in einer Rechnung, dass $\widetilde{W}_t^\tau - \widetilde{W}_s^\tau$ unter dem Maß $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty)$ die Verteilung $\mathcal{N}(0, t - s)$ besitzt und stochastisch unabhängig ist zu $\mathcal{F}_{\tau+s} |_{\{\tau < \infty\}}$. Hierfür sei $A \in \mathcal{F}_{\tau+s}$ mit $A \subset \{\tau < \infty\}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Abbildung. Es ist zu zeigen, dass

$$\int_A h(\widetilde{W}_t^\tau - \widetilde{W}_s^\tau) d\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty) = \mathbb{P}(A | \tau < \infty) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P}.$$

Diese Gleichung kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \int_A h(\widetilde{W}_t^\tau - \widetilde{W}_s^\tau) d\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty) &= \mathbb{P}(A | \tau < \infty) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P} \\ \Leftrightarrow \frac{\int_{\{\tau < \infty\}} \mathbb{1}_A \cdot h(\widetilde{W}_t^\tau - \widetilde{W}_s^\tau) d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(\tau < \infty)} &= \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\tau < \infty)} \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P} \\ \Leftrightarrow \int_{\{\tau < \infty\}} \mathbb{1}_A \cdot h(\widetilde{W}_t^\tau - \widetilde{W}_s^\tau) d\mathbb{P} &= \mathbb{P}(A) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P} \\ \stackrel{A \subset \{\tau < \infty\}}{\Leftrightarrow} \int_A h(W_{\tau+t} - W_{\tau+s}) d\mathbb{P} &= \mathbb{P}(A) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Daher können wir die Verteilung zeigen, indem wir die letzte Gleichung nachweisen. Der Wert W_τ kürzt sich dabei durch $\widetilde{W}_t^\tau - \widetilde{W}_s^\tau = (W_{\tau+t} - W_\tau) - (W_{\tau+s} - W_\tau)$ raus.

Wir möchten die Stoppzeit approximieren durch $\tau_n = \inf \left\{ \frac{k}{2^n} : \tau \leq \frac{k}{2^n} \text{ und } k \in \mathbb{N} \right\}$. In diesem Fall ist $\tau \leq \tau_n$ und $|\tau - \tau_n| < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir erhalten die

Konvergenz $\tau_n \searrow \tau$ für $n \rightarrow \infty$. Für ein $A \in \mathcal{F}_{\tau_n+s}$ mit $A \subset \{\tau < \infty\}$ gilt dann

$$\int_A h(W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n+s}) d\mathbb{P} = \int_A \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}} h(W_{\frac{k}{2^n}+t} - W_{\frac{k}{2^n}+s}) d\mathbb{P}$$

Nach Definition kann τ_n nur die Werte $\frac{k}{2^n}$ für $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Wir haben h als beschränkte Abbildung vorausgesetzt und bei \mathbb{P} handelt es sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, daher können wir eine integrierbare Majorante finden und über den Satz der majorisierten Konvergenz (siehe [05], Korollar 6.26 Seite 142) die Summe mit dem Integral vertauschen:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_A \mathbb{1}_{\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}} h(W_{\frac{k}{2^n}+t} - W_{\frac{k}{2^n}+s}) d\mathbb{P} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A \cap \{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}} h(W_{\frac{k}{2^n}+t} - W_{\frac{k}{2^n}+s}) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Es wurde A aus \mathcal{F}_{τ_n+s} gewählt und nach Definition 5.2.3 gilt daher, dass

$$A \cap \left\{ \tau_n + s \leq \frac{k}{2^n} + s \right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}+s}$$

ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Schnittmenge, das Komplement und die Vereinigung zweier Mengen sind jeweils wieder in der σ -Algebra enthalten, daher gilt

$$\left(A \cap \left\{ \tau_n + s \leq \frac{k-1}{2^n} + s \right\} \right)^c = A^c \cup \left\{ \tau_n + s > \frac{k-1}{2^n} + s \right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^n}+s}$$

Beachtet man außerdem, dass $\mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^n}+s} \subset \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}+s}$ ist, so wissen wir, dass folgende Menge in $\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}+s}$ enthalten ist:

$$\begin{aligned} &(A^c \cup \{\tau_n + s > \frac{k-1}{2^n} + s\}) \cap (A \cap \{\tau_n + s \leq \frac{k}{2^n} + s\}) \\ &= \underbrace{(A^c \cap A \cap \{\tau_n \leq \frac{k}{2^n}\})}_{= \emptyset} \cup (\{\tau_n > \frac{k-1}{2^n}\} \cap A \cap \{\tau_n \leq \frac{k}{2^n}\}) \\ &= A \cap \{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}. \end{aligned}$$

Nun handelt es sich um Elemente des ursprünglichen Wienerprozesses, weil wir die Stoppzeit durch konkrete Zeitpunkte ersetzt haben. Außerdem wurde gezeigt, dass $A \cap \{\tau_n = \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}+s}$ und über die Unabhängigkeit des Standard Wiener-

prozess W kann das Integral aufgeteilt werden:

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left(A \cap \left\{ \tau_n = \frac{k}{2^n} \right\} \right) \int h(W_{\frac{k}{2^n}+t} - W_{\frac{k}{2^n}+s}) d\mathbb{P}.$$

Nun kann im Integral, wie auch schon im Beweis vom Satz von Girsanov gesehen, $W_{\frac{k}{2^n}+t} - W_{\frac{k}{2^n}+s}$ durch $W_t - W_s$ ersetzt werden, da sie nach Definition der gleichen Verteilung unterliegen:

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left(A \cap \left\{ \tau_n = \frac{k}{2^n} \right\} \right) \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P}.$$

Desweiteren erhalten wir über die Mengen $\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine disjunkte Zerlegung der Menge $\{\tau < \infty\}$, denn die definierte Stoppzeit τ_n kann nur Werte der Form $\frac{k}{2^n}$ oder ∞ annehmen. Die Summe über die Wahrscheinlichkeiten kann somit zusammengefasst werden und wir erhalten mit $A \subset \{\tau < \infty\}$:

$$= \mathbb{P}(A) \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P}.$$

Wir haben gezeigt, dass unsere Gleichung für die approximierte Stoppzeit gilt, d.h.

$$\int_A h(W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n+s}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist unabhängig von n , somit können wir umformen zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A) \cdot \int h(W_t - W_s) d\mathbb{P} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h(W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n+s}) d\mathbb{P} \\ &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} h(W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n+s}) d\mathbb{P} \\ &= \int_A h(\lim_{n \rightarrow \infty} W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n+s}) d\mathbb{P} \\ &= \int_A h(W_{\tau+t} - W_{\tau+s}) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Weil die Abbildung h beschränkt ist, kann der Grenzwert über majorisierte Konvergenz ins Integral gezogen werden und über die Stetigkeit von h gelangt der

Grenzwert in das Funktionsargument hinein. Da $A \in \mathcal{F}_{\tau_n+s}$ gewählt wurde, muss noch angemerkt werden, dass $\mathcal{F}_{\tau+s} \subset \mathcal{F}_{\tau_n+s}$ ist und darüber die Gleichung auch für alle $A \in \mathcal{F}_{\tau+s}$ erfüllt ist. Dies ist erfüllt, weil zum einen τ eine Stoppzeit ist und dadurch folgt, dass $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle t . Zum anderen haben wir die Approximation so gewählt, dass $\tau_n \geq \tau$ ist und wir somit nun folgern können, dass $\{\tau \leq t\} \subset \{\tau_n \leq t\}$ für alle t gilt. Damit haben wir gezeigt, dass die Unabhängigkeit sowie die Verteilung für den Prozess \widetilde{W}_τ gegeben sind.

- iii.) W hat stetige Pfade und betrachten wir ein festes $\omega \in \Omega$, so ist $\tau(\omega)$ ein konstanter Wert. Die Pfade von \widetilde{W}_τ sind dann um einen festen Wert W_τ nach unten verschoben und stimmen mit einem späteren Abschnitt der Pfade von W überein. Insbesondere sind diese dann auch stetig.

□

Der Satz 5.2.4 wird hilfreich sein, um das Reflexionsprinzip zu zeigen. Was bis hierhin außer Acht gelassen wurde, ist die eigentliche Spiegelung des Prozesses. Unabhängig von der Wahl der Stoppzeit soll diese gemäß einer Achse, die parallel zur Abszisse verläuft, erfolgen. Die Höhe der Achse bestimmt sich dabei über den Wert, den der Wienerprozess am Anfang der Reflektion annimmt. Das heißt bei einer Stoppzeit τ und dem Wienerprozess W wird bezüglich der Achse $y = W_\tau$ gespiegelt. In Abbildung 5.2 sehen wir skizzenhaft wie der gespiegelte Pfad (rot) sich im Gegensatz zu dem normalen Pfad des Wienerprozesses W verhält. Der neue Prozess soll sich an dem ursprünglichen Wienerprozess orientieren und immer wenn die Pfade des Einen steigen, sollen die Pfade des Anderen Prozesses fallen. Mathematisch ausgedrückt werden also die Zuwächse des Wienerprozess bei dem neuen Prozess abgezogen. Bezeichnen wir den reflektierten Prozess mit $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t \in [0, \infty)}$ so ergibt sich für alle $t \geq \tau$:

$$W_\tau - (W_t - W_\tau) = 2W_\tau - W_t.$$

Für alle Zeitpunkte vor der Stoppzeit nimmt der Prozess \overline{W} denselben Verlauf wie der Wienerprozess W , also gilt insgesamt:

$$\overline{W}_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{für } t \leq \tau(\omega) \\ 2W_\tau(\omega) - W_t(\omega) & \text{für } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Über das Reflexionsprinzip beweisen wir die Wienerprozesseigenschaften des reflektierten Prozesses, die wir danach für die Berechnung der Verteilung des Supremums

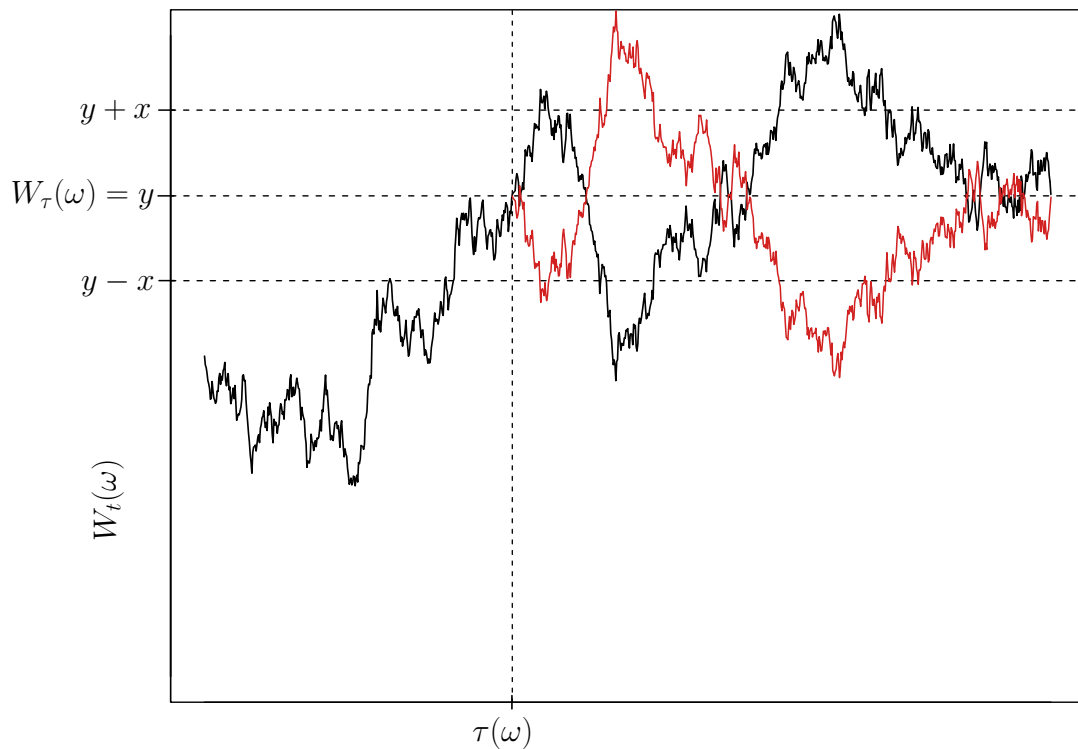


Abbildung 5.2.: Skizze für den gespiegelten Pfad eines Wienerprozesses

benötigen.

Satz 5.2.5 (Reflexionsprinzip).

Es seien W ein Wienerprozess und τ eine Stoppzeit. Der bei τ gespiegelte Prozess \bar{W} wird definiert durch

$$\bar{W}_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{für } t \leq \tau(\omega) \\ 2W_\tau(\omega) - W_t(\omega) & \text{für } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Dann ist der gespiegelte Prozess auch ein Wienerprozess unter \mathbb{P} .

Beweis.

Es genügt die Menge $\{\tau < \infty\}$ und darüber das Maß $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty)$ zu betrachten, da auf $\{\tau = \infty\}$ $W = \bar{W}$ gilt und somit nichts mehr zu zeigen ist. Der Anfangswert stimmt mit W überein und die stetigen Pfade sind eine Folgerungen der Stetigkeit der Pfade von W .

Um die erforderliche Verteilung von \bar{W} zu beweisen, definieren wir die messbare Ab-

bildung $H : \mathcal{C}[0, \infty) \times \mathcal{C}[0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}[0, \infty)$ durch

$$H(f, g, t) = \begin{cases} f(s) & 0 \leq s \leq t \\ f(t) + g(s - t) + g(0) & s > t \end{cases}$$

mit $\mathcal{C}[0, \infty)$ als Menge der stetigen Funktionen, die aus dem Intervall $[0, \infty)$ in die reellen Zahlen abbilden. Zusätzlich definieren wir die stochastischen Prozesse \widehat{W}^τ und \widetilde{W}^τ für die Stoppzeit τ und den Wienerprozess $W = (W_t)_{t \in [0, \infty)}$ durch

$$\widehat{W}_t^\tau = \begin{cases} W_t(\omega) & 0 \leq t \leq \tau(\omega) \\ W_\tau(\omega) & t > \tau(\omega) \end{cases}$$

$$\widetilde{W}_t^\tau = W_{\tau+t}(\omega) - W_\tau(\omega).$$

Der Prozess \widetilde{W}^τ wurde definiert wie in Satz 5.2.4. Bei der Definition von stochastischen Prozessen wurde bereits angemerkt, dass man diese auch als Zufallsvariablen auf (Ω, \mathbb{P}) sehen kann, die nicht in \mathbb{R} , sondern in eine Menge von Funktionen abbilden. Für die Wienerprozesse ist diese Menge $\mathcal{C}[0, \infty)$, da für die einzelnen Pfade die Stetigkeit vorausgesetzt wurde. Über den Satz 5.2.4 ist bekannt, dass \widetilde{W}^τ ein Wienerprozess ist und über Satz 5.2.1 erhalten wir diese Aussage auch für $-\widetilde{W}^\tau$. Daher haben $(\widehat{W}^\tau, \widetilde{W}^\tau, \tau)$ und $(\widehat{W}^\tau, -\widetilde{W}^\tau, \tau)$ dieselbe Verteilung und über die messbare Abbildung H erreichen wir

$$\begin{aligned} H(\widehat{W}^\tau, \widetilde{W}^\tau, \tau) &= \begin{cases} \widehat{W}_s^\tau & 0 \leq s \leq \tau(\omega) \\ \widehat{W}_\tau^\tau + \widetilde{W}_{s-\tau}^\tau - \widetilde{W}_0^\tau & s > \tau(\omega) \end{cases} \\ &= \begin{cases} W_s & 0 \leq s \leq \tau(\omega) \\ W_\tau + W_s - W_\tau & s > \tau(\omega) \end{cases} = W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\widehat{W}^\tau, -\widetilde{W}^\tau, \tau) &= \begin{cases} \widehat{W}_s^\tau & 0 \leq s \leq \tau(\omega) \\ \widehat{W}_\tau^\tau - \widetilde{W}_{s-\tau}^\tau + \widetilde{W}_0^\tau & s > \tau(\omega) \end{cases} \\ &= \begin{cases} W_s & 0 \leq s \leq \tau(\omega) \\ 2 \cdot W_\tau - W_s & s > \tau(\omega) \end{cases} = \overline{W}. \end{aligned}$$

Daher wissen wir, dass auch W und \overline{W} die selbe Verteilung haben und somit ist \overline{W} ein Wienerprozess. \square

Ein Wienerprozess, der an einer Stoppzeit reflektiert wird, besitzt also die gleiche Verteilung wie der unreflektierte Prozess. Mit dieser Aussage ist es nun möglich die Verteilung von einem Ereignis zu berechnen, bei dem sowohl das Supremum, als auch der Prozess selber oberhalb bzw. unterhalb einer Grenzen sein sollen.

Satz 5.2.6.

Für den Wienerprozess W definieren wir den Prozess M durch $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$. Mit $t > 0$, $y > 0$ und $x \geq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y - x) &= \mathbb{P}(W_t > y + x) \\ \mathbb{P}(M_t \geq y) &= 2\mathbb{P}(W_t \geq y).\end{aligned}$$

Beweis.

Es seien $t > 0$, $y > 0$ und $x \geq 0$. Wir möchten das Reflexionsprinzip ausnutzen und den Wienerprozess W an der Stoppzeit $\tau_y = \inf\{t : W_t = y\}$ reflektieren. Die Stoppzeit zeigt den ersten Zeitpunkt an, für den der Wienerprozess die Höhe y erreicht und ist schon aus dem Beispiel des Aktienverkaufs bekannt. Wir können daher wieder folgern, dass

$$\{\tau_y \leq t\} = \{M_t \geq y\} \tag{5.2}$$

gilt. Der reflektierte Prozess wird mit \overline{W} bezeichnet und wurde in Satz 5.2.5 definiert. Durch die Stoppzeit erhalten wir $W_\tau = y$ und daher können wir den Prozess vereinfachen zu

$$\overline{W}_t = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{für } t \leq \tau(\omega) \\ 2y - W_t(\omega) & \text{für } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit wird zuerst über die Mengengleichung 5.2 umgeschrieben:

$$\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y - x) = \mathbb{P}(\tau_y \leq t, W_t < y - x).$$

Nach dem Reflexionsprinzip wissen wir, dass \overline{W} ein Wienerprozess unter dem Maß \mathbb{P} ist und daher die gleiche Verteilung besitzt wie W . Außerdem können wir τ auch als eine Stoppzeit für \overline{W} auffassen, denn es gilt $\tau_y = \inf\{t : W_t = y\} = \inf\{t : \overline{W}_t = y\}$, weil sich beide Prozesse bis zur Stoppzeit nicht unterscheiden. Somit können wir in der

Wahrscheinlichkeit auch τ zusammen mit \bar{W} betrachten:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y - x) &= \mathbb{P}(\tau_y \leq t, W_t < y - x) \\ &= \mathbb{P}(\tau_y \leq t, \bar{W}_t < y - x).\end{aligned}$$

Das Ereignis $\{\tau_y \leq t, \bar{W}_t < y - x\}$ kann gut anhand der Abbildung 5.2 verdeutlicht werden. Betrachten wir zuerst einzeln das Ereignis $\{\bar{W}_t < y - x\}$, so möchten wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass der Pfad an einer bestimmten Stelle unter der gestrichelten Linie $y - x$ liegt. Nun muss gleichzeitig erfüllt sein, dass $\{\tau_y \leq t\}$ eintritt und das bedeutet, dass der Zeitpunkt den wir betrachten hinter der Stoppzeit τ liegen muss. Da der Prozess \bar{W} für $t > \tau$ nicht willkürlich weiterverläuft, sondern den gespiegelten Prozess von W abbildet, können wir das Ereignis $\{\bar{W}_t < y - x\}$ auch über W ausdrücken. Der Pfad von \bar{W} verläuft genau dann unterhalb der Linie $y - x$, wenn der ursprüngliche Wienerprozess W sich oberhalb von $y + x$ befindet. Es muss daher gelten, dass

$$\{\tau_y \leq t, \bar{W}_t < y - x\} = \{\tau_y \leq t, W_t > y + x\}$$

und dies ermöglicht uns die Berechnung der Wahrscheinlichkeit. τ ist sowohl die Stoppzeit für \bar{W} als auch für W und dadurch kann die Wahrscheinlichkeit weiter vereinfacht werden. Wenn W_t einen Wert oberhalb von $y + x$ annimmt, muss durch die stetigen Pfade auch der Wert y vorher schon angenommen worden sein und daraus folgt, dass die Stoppzeit $\tau \leq t$ sein muss. Dies liefert die Mengeninklusion $\{W_t > y + x\} \subset \{\tau_y \leq t\}$. An dieser Stelle ist es wichtig, dass $x \geq 0$ ist. Die erste Behauptung des Satzes ist gezeigt, denn es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y - x) &= \mathbb{P}(\tau_y \leq t, W_t > y + x) \\ &= \mathbb{P}(W_t > y + x).\end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist eine Folgerung, die wir erlangen, wenn die Menge $\{M_t \geq y\}$ in zwei disjunkte Teile gesplittet wird:

$$\mathbb{P}(M_t \geq y) = \mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y) + \mathbb{P}(M_t \geq y, W_t \geq y).$$

Dabei können wir den ersten Teil verwenden, indem wir $x = 0$ setzen. Desweiteren haben wir zuvor bereits gesehen, dass $\{W_t > y + x\} \subset \{\tau_y \leq t\} = \{M_t \geq y\}$ für alle

$x \geq 0$ ist. Wir erhalten mit $x = 0$ über den ersten Teil, nämlich

$$\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y) = \mathbb{P}(W_t > y),$$

die zweite Behauptung des Satzes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_t \geq y) &= \mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < y) + \mathbb{P}(M_t \geq y, W_t \geq y) \\ &= \mathbb{P}(W_t > y) + \mathbb{P}(W_t \geq y) \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}(W_t \geq y). \end{aligned}$$

□

Wir haben jetzt einen Satz bewiesen, der es ermöglicht die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu berechnen, welches das Supremum sowie auch ein einzelnes Element eines Wienerprozesses betrachtet. Über die Normalverteilung von W_t kann $\mathbb{P}(W_t \geq y)$ berechnet werden. Als letzte Aussage in diesem Abschnitt soll der Satz ein wenig verallgemeinert werden. Zum einen sollen die Grenzen aus der Ungleichung unabhängig gewählt werden können, also statt y und $y - x$ mit $y \in \mathbb{R}, x \geq 0$, allgemeiner x und z mit $x, z \in \mathbb{R}$. Viel wichtiger ist, dass wir einen Wienerprozess mit Drift betrachten wollen, denn dieser wird bei der Barriere-Option auftreten. Das Problem ist, dass wir den Term des Drifts nicht aus dem Supremum auf die andere Seite bringen können. Bei einem Wienerprozess mit Drift a , also $(X_t)_{t \in [0, \infty)} = (W_t + at)_{t \in [0, \infty)}$, kann $\sup_{0 \leq s \leq t} (W_s + as)$ nicht einfach aufgeteilt werden, sodass wir die Situation aus dem vorigen Satz erhalten würden.

Satz 5.2.7.

Sei $(X_t)_{t \in [0, T]}$ ein Wienerprozess mit Drift $a \in \mathbb{R}$ und Volatilität 1 auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ und $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ ist definiert durch $Z_t := \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$ für alle t aus $[0, T]$. Dann gilt für $z \geq x$:

$$\mathbb{P}(X_t \leq x, Z_t < z) = \Phi\left(\frac{x - at}{\sqrt{t}}\right) - e^{2az} \cdot \Phi\left(\frac{x - 2z - at}{\sqrt{t}}\right).$$

Beweis.

Für den Beweis benötigen wir einen Standard Wienerprozess $(W_t)_{t \in [0, T]}$ unter \mathbb{P} , sowie den Prozess $M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$. Damit wir den Drift von $(X_t)_{t \in [0, T]}$ besser behandeln können, verwenden wir den Satz von Girsanov und definieren ein neues Maß \mathbb{P}_a durch die Dichte $\frac{d\mathbb{P}_a}{d\mathbb{P}} := e^{aW_t - \frac{a^2}{2}t}$ auf \mathcal{F}_T . An dieser Stelle soll eine andere Richtung eingeschlagen werden, als in den vorherigen Anwendungen des Girsanov-Satzes. Dort wurde

der Wienerprozess immer durch einen Standard Wienerprozess des neuen Maßes ausgedrückt, wie es beispielsweise in Tabelle 4.1 der Fall war. Nun betrachten wir unter \mathbb{P}_a den ursprünglichen Prozess $(W_t)_{t \in [0, T]}$. Weil $(W_t - at)_{t \in [0, T]}$ nach Girsanov ein Standard Wienerprozess ist, kann gefolgert werden, dass nur $(W_t)_{t \in [0, T]}$ einen Wienerprozess mit Drift a unter \mathbb{P}_a abbildet. Der Prozess W unter dem neuen Maß \mathbb{P}_a besitzt demnach dieselbe Verteilung wie X unter \mathbb{P} . Insbesondere gilt dies auch für die zugehörigen Prozesse Z und M . Wir drücken die Wahrscheinlichkeit, die wir berechnen möchten, als Wahrscheinlichkeit unter dem Maß \mathbb{P}_a aus. Über die Dichte gelangen wir zurück zum Maß \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t \leq x, Z_t < z) &= \mathbb{P}_a(W_t \leq x, M_t < z) \\ &= \int_{\{W_t \leq x, M_t < z\}} e^{aW_t - \frac{a^2}{2}t} d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Durch diese Vorgehensweise erlangen wir den Vorteil, dass wir mit dem Standard Wienerprozess W unter \mathbb{P} arbeiten können. Dafür müssen wir die Exponentialfunktion der Dichte mitbehandeln. Für diesen Fall ist es hilfreich die Wahrscheinlichkeit als eine Zufallsvariable Y , die über das bedingte Maß $\mathbb{P}(W_t \in \cdot | M_t < z)$ integriert wird, zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t \leq x, Z_t < z) &= \int_{\{W_t \leq x, M_t < z\}} e^{aW_t - \frac{a^2}{2}t} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{M_t < z\}} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{W_t \leq x\}} \cdot e^{aW_t - \frac{a^2}{2}t}}_{=: Y(\omega)} d\mathbb{P} \cdot \frac{\mathbb{P}(M_t < z)}{\mathbb{P}(M_t < z)} \quad (5.3) \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t \leq x\}} \cdot e^{aW_t - \frac{a^2}{2}t} d\mathbb{P}(\cdot | M_t < z) \cdot \mathbb{P}(M_t < z). \end{aligned}$$

Über diese Darstellung können wir die Ergebnisse aus dem Satz 5.2.6 ausnutzen. Da wir nicht mehr mit den Prozessen X und Z arbeiten, sondern den Standard Wienerprozess W unter \mathbb{P} benutzen, kann eine Aussage über das Ereignis $\{W_t \leq x, M_t < z\}$ unter \mathbb{P} getroffen werden. Das Ziel ist eine Dichte für das Maß $\mathbb{P}(W_t \in \cdot | M_t < z)$ zu finden, sodass wir das Integral berechnen können. Hierfür betrachten wir das Ereignis als einen Teil einer disjunkten Zerlegung von $\{W_t \leq x\}$ und nutzen folgende Äquivalenz aus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_t \leq x) &= \mathbb{P}(W_t \leq x, M_t < z) + \mathbb{P}(W_t \leq x, M_t \geq z) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_t \leq x, M_t < z) &= \mathbb{P}(W_t \leq x) - \mathbb{P}(W_t \leq x, M_t \geq z). \quad (5.4) \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann zum einen über die Normalverteilung aus dem Wienerprozess

und zum anderen mit dem Satz 5.2.6 berechnet werden. Dieser Satz besagte für $t > 0$, $z > 0$ und $q \geq 0$, dass

$$\mathbb{P}(W_t < z - q, M_t \geq y) = \mathbb{P}(W_t > z + q)$$

ist. Gemäß den Voraussetzungen ist gegeben, dass $z \geq x$ ist und somit können wir $q = z - x \geq 0$ setzen und erhalten

$$\mathbb{P}(W_t < x, M_t \geq z) = \mathbb{P}(W_t > z + z - x) = \mathbb{P}(W_t > 2z - x).$$

Verwenden wir dies in der Gleichung 5.4, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_t \leq x, M_t < z) &= \mathbb{P}(W_t \leq x) - \mathbb{P}(W_t > 2z - x) \\ &= \mathbb{P}(W_t \leq x) - [1 - \mathbb{P}(W_t \leq 2z - x)] \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \mathbb{P}\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{2z - x}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2z - x}{\sqrt{t}}\right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei der Übergang zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ über $\frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ geschieht. Eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist gegeben als

$$\mathbb{P}(W_t \leq x | M_t < z) = \frac{\mathbb{P}(W_t \leq x, M_t < z)}{\mathbb{P}(M_t < z)}$$

und mit den Berechnungen für die Schnittmenge (Gleichung 5.5) kann die Verteilungsfunktion für das Maß $\mathbb{P}(W_t \in \cdot | M_t < z)$ angegeben werden über

$$\mathbb{P}(W_t \leq x | M_t < z) = \begin{cases} 1 & x > z \\ \frac{\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2z - x}{\sqrt{t}}\right)}{\mathbb{P}(M_t < z)} & x \leq z. \end{cases}$$

Leitet man diese Verteilungsfunktion nun nach x ab, so erhalten wir die Dichte des Maßes

$$h(y) = \begin{cases} 0 & y > z \\ \frac{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{2z - y}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{t} \cdot \mathbb{P}(M_t < z)} & y \leq z \end{cases}$$

mit φ als Dichte für die Standardnormalverteilung. Die Dichte kann also in unsere

Umformung aus 5.3 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{W_t \leq x\}} \cdot e^{aW_t - \frac{a^2}{2}t} d\mathbb{P}(\cdot | M_t < z) \cdot \mathbb{P}(M_t < z) \\
&= \int_{-\infty}^z \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(y) \cdot e^{ay - \frac{a^2}{2}t} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{2z-y}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{t} \cdot \mathbb{P}(M_t < z)} dy \cdot \mathbb{P}(M_t < z) \\
&= \int_{-\infty}^x e^{ay - \frac{a^2}{2}t} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{2z-y}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{t}} dy.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde außerdem ausgenutzt, dass nach Voraussetzung $z \geq x$ ist. Die Dichte der Standardnormalverteilung ist gegeben durch $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ und somit sind die letzten notwendigen Schritte für den Beweis der Behauptung Umformungen unter dem Integral:

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^x e^{ay - \frac{a^2}{2}t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \left(e^{-\frac{y^2}{2t}} - e^{-\frac{(2z-y)^2}{2t}} \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{ay - \frac{a^2}{2}t - \frac{y^2}{2t}} dy - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{ay - \frac{a^2}{2}t - \frac{(2z-y)^2}{2t}} e^{2az - 2az} dy \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 t^2 - 2ayt + y^2}{t} \right)} dy - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 t^2 - 2ayt + 4azt + (2z-y)^2}{t} \right)} \cdot e^{2az} dy \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-at}{\sqrt{t}} \right)^2} dy}_{\text{Verteilungsfunktion von } \mathcal{N}(at, t)} - e^{2az} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(y-2z)-at}{\sqrt{t}} \right)^2} dy}_{\text{Verteilungsfunktion von } \mathcal{N}(2z+at, t)}.
\end{aligned}$$

Die beiden Verteilungsfunktionen können über die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ausgedrückt werden, indem der Erwartungswert und die Varianz korrigiert werden und es ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$\mathbb{P}(X_t \leq x, Z_t < z) = \Phi\left(\frac{x-at}{\sqrt{t}}\right) - e^{2az} \cdot \Phi\left(\frac{x-2z-at}{\sqrt{t}}\right).$$

□

5.3. Der Preis eines Down-and-Out Calls

Die Strategie zur Berechnung des fairen Preises kennen wir aus Kapitel 4 und der Claim für den Down-and-Out Call wurde zu Beginn dieses Kapitels besprochen. Dieser ist für den Strikepreis K , die Laufzeit T und die Barriere B gegeben durch

$$C = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Über den Satz 5.2.7 verfügen wir über alle notwendigen Instrumente, um den Preis der Barriere-Option zu berechnen.

Satz 5.3.1 (Preis eines Down-and-Out Calls).

Für einen Down-and-Out Call auf das risky asset im Black-Scholes Modell mit den Parametern σ als Volatilität, S_0 als Anfangskurs, K als Strikepreis, B als Barriere und T als Endzeitpunkt berechnet sich der arbitragefreie Preis für den Zeitpunkt 0 zu:

$$B_0(S_0, T, K, B) = C_0(S_0, T, K) - \left(\frac{S_0}{B}\right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \cdot C_0(S_0, T, \gamma K)$$

mit $\beta = -\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}$ und $\gamma = \left(\frac{S_0}{B}\right)^2$. Für die Barriere gilt dabei, dass $B < K$ und $B < S_0$ ist. Dabei ist $C_0(S_0, T, L)$ der arbitragefreie Preis einer Call Option zu Anfangskurs S_0 , Laufzeit T und Strikepreis L .

Beweis.

Der faire Preis ist das Ergebnis von $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \cdot (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\}} \right]$ und dieser Erwartungswert lässt sich aufspalten zu:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\}} \right] \\ &= \int_{\Omega} e^{-rT} \cdot (S_T - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \cdot \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\}} d\mathbb{Q} \\ &= \int_{\Omega} e^{-rT} S_T \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \cdot \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\}} d\mathbb{Q} - \int_{\Omega} e^{-rT} K \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \cdot \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\}} d\mathbb{Q} \\ &= S_0 \cdot \mathbb{Q}^* \left(S_T \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right) - e^{-rT} \cdot K \cdot \mathbb{Q} \left(S_T \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right). \end{aligned}$$

Wie schon im Beweis der Black-Scholes Formel können wir den Erwartungswert so aufteilen und umformen, dass wir nur noch die Wahrscheinlichkeit der Menge aus dem

Indikator berechnen müssen. Über die Dichte $e^{-rT} \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} = e^{\sigma \widehat{W}_t + \frac{\sigma^2}{2}t}$ wurde ein Maßwechsel zu \mathbb{Q}^* durchgeführt. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten wurden im Abschnitt 5.2 weitere Eigenschaften des Wienerprozesses gezeigt und das Ergebnis in Form des Satzes 5.2.7 soll nun angewandt werden. Dafür ist es notwendig die Mengen umzuformen, damit ein Wienerprozess mit Drift zu erkennen ist. Fangen wir zunächst mit der Wahrscheinlichkeit unter \mathbb{Q} an. Gemäß Tabelle 4.1 ist $(\widehat{W}_t)_{t \in [0, T]}$ der Standard Wienerprozess und $(S_t)_{t \in [0, T]} = \left(S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} \right)_{t \in [0, T]}$ der Preisprozess des risky assets unter \mathbb{Q} . Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \left\{ S_T \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\} \\
&= \left\{ S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_0 \cdot e^{\sigma \widehat{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} > B \right\} \\
&= \left\{ \sigma \widehat{W}_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \geq \log \left(\frac{K}{S_0} \right), \inf_{0 \leq t \leq T} \sigma \widehat{W}_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t > \log \left(\frac{B}{S_0} \right) \right\} \\
&= \left\{ \widehat{W}_T + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) T \geq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{K}{S_0} \right), \inf_{0 \leq t \leq T} \widehat{W}_t + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) t > \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{B}{S_0} \right) \right\} \\
&= \left\{ -\widehat{W}_T + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) T \leq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right), \sup_{0 \leq t \leq T} -\widehat{W}_t + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) t < \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{B} \right) \right\} \\
&= \left\{ \widehat{X}_T \leq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right), \sup_{0 \leq t \leq T} \widehat{X}_t < \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{B} \right) \right\},
\end{aligned}$$

wobei wir den Prozess $\widehat{X} = (\widehat{X}_t)_{t \in [0, T]}$ durch $\widehat{X}_t = -\widehat{W}_t + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) t$ definieren. Satz 5.2.1 zeigt, dass $(-\widehat{W}_t)_{t \in [0, T]}$ ein Standard Wienerprozess ist und daher haben wir mit \widehat{X} einen Wienerprozess mit Drift $\alpha := \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right)$. Wir können den Satz 5.2.7 anwenden und bekommen das Ergebnis

$$\begin{aligned}
& \mathbb{Q} \left(\left\{ S_T \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) - \alpha \cdot T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\alpha \cdot \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{B} \right)} \cdot \Phi \left(\frac{\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) - 2\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{B} \right) - \alpha \cdot T}{\sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) - \alpha \cdot T}{\sqrt{T}} \right) - e^{\log \left(\left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma}} \right)} \cdot \Phi \left(\frac{\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \cdot \left(\frac{B}{S_0} \right)^2 \right) - \alpha \cdot T}{\sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right) - \alpha \cdot T}{\sqrt{T}} \right) - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma}} \cdot \Phi \left(\frac{\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) - \alpha \cdot T}{\sqrt{T}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma}} \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
&=: B.
\end{aligned}$$

Analog wird für das Maß \mathbb{Q}^* umgeformt. Wie in Tabelle 4.1 ersichtlich ist, verwenden wir unter \mathbb{Q}^* den Standard Wienerprozess $(\widetilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$ und den Preisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]} = (S_0 \cdot e^{\sigma \widetilde{W}_t + (r + \frac{\sigma^2}{2})t})_{t \in [0, T]}$. Die Mengenumformungen müssen für den Preisprozess angepasst werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\left\{ S_T \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\} \\
&= \left\{ -\widetilde{W}_T + \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) T \leq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right), \inf_{0 \leq t \leq T} -\widetilde{W}_t + \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) T < \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{B} \right) \right\} \\
&= \left\{ \widetilde{X}_T \leq \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{K} \right), \inf_{0 \leq t \leq T} \widetilde{X}_t < \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{S_0}{B} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Der Prozess $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t \in [0, T]}$ ist definiert durch $X_t = -\widetilde{W}_t + \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) t$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor ist \widetilde{X} ein Wienerprozess mit Drift $\beta := \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right)$.

Wir verwenden abermals Satz 5.2.7 und erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}^* \left(\left\{ S_T \geq K, \inf_{0 \leq t \leq T} S_t > B \right\} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
&=: A.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir einen sehr langen und unhandlichen Ausdruck für den fairen Preis einer Down-and-Out Call-Option:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \cdot (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{t \leq T} S_t > B \right\}} \right] = S_0 \cdot A - e^{-rT} \cdot K \cdot B \\
&= S_0 \left[\Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] \\
&\quad - e^{-rT} \cdot K \left[\Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma}} \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_0 \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
&\quad - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \cdot S_0 \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma}} \cdot e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right).
\end{aligned}$$

Durch die Umstellung der Terme ist leicht zu erkennen, dass es sich bei den ersten beiden Summanden um die Black-Scholes Formel (Satz 4.2.1) für einen Call mit Anfangskurs S_0 , Strikepreis K und Laufzeit T handelt. Für die restlichen beiden Summanden ist es hilfreich folgende Umformungen zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\frac{2\alpha}{\sigma} &= \frac{2 \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right)}{\sigma} = \frac{2 \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right) + 2\sigma - 2\sigma}{\sigma} = \frac{2 \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} - \sigma \right)}{\sigma} + 2 \\
&= \frac{2 \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right)}{\sigma} + 2 = \frac{2\beta}{\sigma} + 2.
\end{aligned}$$

Dies kann im zweiten Teil ausgenutzt werden und wir können dadurch wie folgt ausklammern:

$$\begin{aligned}
&- \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \cdot S_0 \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma}} \cdot e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
&= - \left(\frac{S_0}{B} \right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \left[S_0 \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-rT} \cdot \left(\frac{S_0}{B} \right)^2 \cdot K \cdot \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{B^2}{K \cdot S_0} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Es liegt in diesem Fall ebenfalls die Form der Black-Scholes Formel vor, allerdings für einen Call mit Anfangskurs S_0 , Strikepreis γK und Laufzeit T , wobei $\gamma := \left(\frac{S_0}{B} \right)^2$ ist. Der arbitragefreie Preis eines Down-and-Out Calls setzt sich demnach zusammen aus

zwei Call-Preisen mit unterschiedlichen Parametern:

$$B_0(S_0, T, K, B) = C_0(S_0, T, K) - \left(\frac{S_0}{B}\right)^{\frac{2\beta}{\sigma}} \cdot C_0(S_0, T, \gamma K).$$

□

5.4. Fazit und Ausblick

Die Ähnlichkeit des Down-and-Out Calls mit einer gewöhnlichen europäischen Call-Option spiegelt sich also auch in dem arbitragefreien Preis wider. Wir erhalten die gewichtete Summe der Preise von zwei Call-Optionen mit unterschiedlichen Parametern. Außerdem ist zu erkennen, dass der Preis der Barriere-Option immer niedriger ist, als die der Call-Option. Diese Beziehung wird bereits anhand der Claims ersichtlich, da der Down-and-Out Call immer eine Auszahlung generiert, die niedriger ist, als bei eine Call-Option mit den selben Parametern.

Mit diesen Ergebnissen ist es möglich den Einfluss der Parameter auf den arbitragefreien Preis der Barriere-Option zu untersuchen. Hierfür könnten wieder die Greeks hilfreich sein, die wir schon bei der Black-Scholes Formel kennengelernt haben. Weiterhin könnten andere Varianten der Barriere-Optionen bewertet werden.

Literaturverzeichnis

- [01] Black, Fischer und Scholes, Myron S.: *The pricing of options and corporate liabilities*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - June, 1973), pp. 637-654.
- [02] Dineen, Seán: *Probability Theory in Finance: A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formula*, 2005.
- [03] Elliott, Robert J.: *Mathematics of financial markets*, 2. Auflage, 2010.
- [04] Ilre, Albrecht: *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*, 3. Auflage, 2012.
- [05] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2. Auflage, 2008.
- [06] Löwe, Matthias: *Mitschriften zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie*, SS 2010.
- [07] Merton, Robert C.: *Theory of rational option pricing*, The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1 (Spring, 1973), pp. 141-183.
- [08] nobelprize.org: *Additional background material on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997*, 1997, abgerufen am 17. August 2012, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/advanced.html
- [09] Pascucci, Andrea: *PDE and martingale methods in option pricing*, 2011.
- [10] Paulsen, Volkert: *Mitschriften zur Vorlesung Finanzmathematik*, WS 2009/2010.
- [11] Shreve, Steven E.: *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, 1. Auflage, 2004.

A. Anhang

Satz A.0.1.

Auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)})$ sei $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein adaptierter stochastischer Prozess. Dann folgt aus der Unabhängigkeit von $X_t - X_s$ zu \mathcal{F}_s für alle $0 \leq s \leq t < \infty$, dass auch $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ für jede Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ unabhängig sind.

Beweis.

Wir führen einen Induktionsbeweis über n durch, also über die Anzahl der Elemente unserer Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$.

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsvariablen $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ mit Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ unabhängig, falls $X_t - X_s$ und \mathcal{F}_s für alle $0 \leq s \leq t < \infty$ unabhängig sind.

Induktionsanfang:

$n = 1$: $X_{t_1} - X_{t_0}$. Hier ist nichts zu zeigen.

$n = 2$: $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}$

Nach Voraussetzung ist $X_{t_2} - X_{t_1}$ unabhängig zu \mathcal{F}_{t_1} (\star).

Als adaptierter Prozess ist $X_{t_1} - X_{t_0}$ \mathcal{F}_{t_1} -messbar, da X_{t_1} \mathcal{F}_{t_1} -messbar ist und X_{t_0} \mathcal{F}_{t_0} -messbar, aber durch $\mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{F}_{t_1}$ auch \mathcal{F}_{t_1} -messbar ist.

Daher gilt $\sigma(X_{t_1} - X_{t_0}) \subset \mathcal{F}_{t_1}$ und somit sind $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}$ unabhängig durch (\star).

Induktionsvoraussetzung:

Für eine beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Behauptung.

Induktionsschritt:

$n \rightarrow n+1$: $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$
 $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sind unabhängig nach Induktionsvoraussetzung und $\sigma(X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \subset \mathcal{F}_{t_n}$ (folgt analog wie beim Induktionsanfang gezeigt) und da nach Voraussetzung $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ unabhängig ist von \mathcal{F}_{t_n} , folgt der Induktionsschritt mit Satz A.0.4.

□

Definition A.0.2 (Bedingter Erwartungswert). [04]

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ eine Unter- σ -Algebra. Sei Y eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert. Eine Zufallsvariable Z , die folgende Bedingungen erfüllt:

- i.) Z ist \mathcal{A} -messbar
- ii.) $\int_B Z \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P}$ für alle $B \in \mathcal{A}$

heißt bedingter Erwartungswert von Y unter \mathcal{A} . Wir schreiben $Z = \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$.

Satz A.0.3 (Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes). [02]

Seien X, Y integrierbare Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und \mathcal{G}, \mathcal{H} jeweils σ -Algebren mit $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Dann gelten folgende Aussagen:

- i.) Falls $X \cdot Y$ integrierbar und X \mathcal{G} -messbar ist, dann ist $\mathbb{E}[X \cdot Y|\mathcal{G}] = X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
- ii.) Falls X und G unabhängig sind gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- iii.) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.

Der Satz A.0.3 stammt aus "Probability Theory in Finance - A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formular" von Seán Dineen und für den Beweis sei ebenfalls auf die angegebene Literatur verwiesen.

Satz A.0.4 (06).

Eine endliche Menge von Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{n+1} mit Werten in messbaren Räumen $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ist genau dann unabhängig, wenn X_1, \dots, X_n unabhängig sind und X_{n+1} unabhängig ist von $\sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Für den Beweis sei auf das Skript "Wahrscheinlichkeitstheorie" von Prof. Löwe (S.90 Korollar 9.15) verwiesen.

Bemerkung A.0.5.

Die Abbildungen für den Wienerprozess bzw. geometrischen Wienerprozess wurden dem Statistikprogramm R über die folgenden Befehle erzeugt:

```
#Definition des Intervalls
a<-0
b<-1
#Definition der Anzahl der Diskretisierungspunkte
n<-1000
#Definition des Zeitvektors
t<-c(seq(a,b,1/n))
#Definition der Zuwächse des Wienerprozesses
W<-numeric(length(t))
#Funktion zur Erzeugung von Zufallszahlen für die Zuwächse
#gemäß Normalverteilung
Erz_Zufallsvektor<-function(t){z<-numeric(length(t))
z<-rnorm(length(t), mean=0, sd=sqrt((b-a)/n))
z[1]<-0
return(z)}
#Erzeugung der Zufallszahlen für die Zuwächse
W<-Erz_Zufallsvektor(t)
#Funktion zur Addition der Zuwächse
AdditionZuwächse<-function(W){z<-numeric(length(W))
for (i in 2:length(W)){z[i]<-sum(W[c(seq(1,i))])}
return(z)}
#Berechnung des Wienerprozesses
Wt<-AdditionZuwächse(W)
#Graphische Darstellung des Ergebnisses (ggf. Y-Achse anpassen)
plot(t,Wt,type="l", xlim=c(a, b), ylim=c(-1, 1), xlab="Zeitintervall [a,b]",
ylab="Standard Wienerprozess", main= "Beispielpfad")
abline(h=c(seq(-1,1,0.5)), lty=2)
#Festlegung der Parameter (Anfangskurs S0, Volatilität, Drift)
#für das risky asset
S0 = 100
sigma = 0.6
mu = 0.3
#Funktion für die Berechnung des Kurswertes
```

```
Geom_Wienerprozess<-function(S0, sigma, mu, t, Wt)
{z<-numeric(length(t)) z[1]<-S0
for (i in 2:length(t)){z[i]<-(exp(sigma*W[i]+(mu-1/2*sigma^2)*
(t[i]-t[i-1]))-1)*z[i-1]+z[i-1]}
return(z)}
#Bestimmung der Kurswerte
St<-numeric(length(t))
St<-Geom_Wienerprozess(S0, sigma, mu, t, W)
#Graphische Darstellung des Ergebnisses (ggf. Y-Achse anpassen)
plot(t,St,type="l", xlim=c(a, b), ylim=c(50, 200),
xlab="Zeitintervall [0,1]", ylab="Aktienpreis", main= "Beispielpfad")
abline(h=c(seq(0,1000,10)), lty=2)
```