Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich Mathematik/Informatik

Bachelorarbeit Finanzmathematik

Sommersemester 2011
Betreuer: Dr. Nicolae Surulescu

Approximation des Black-Scholes Modells

Dirk Stöppel

Stargarder Straße 22

48161 Münster

Matrikelnummer 357269

Datum: 08.08.2011

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das Black-Scholes Modell ist heutzutage eines der wichtigsten finanzmathematischen Modelle zur Bewertung von Finanzoptionen. In dieser Arbeit wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen zeitdiskrete Modelle ein Black-Scholes Modell approximieren. Da sich die Optionspreise im Black-Scholes Modell in der Regel recht einfach analytisch bestimmen lassen, ist das Approximieren des Black-Scholes Modells durch diskrete Modelle in der Praxis kaum relevant. Allerdings lassen sich die im Folgenden aufgeführten Methoden auf kompliziertere stochastische Modelle übertragen, in denen man den Optionspreis nicht explizit angeben kann und daher auf numerische Bestimmung des Optionspreises in approximierenden diskreten Modellen angewiesen ist.

2. Voraussetzungen

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit einem Basisfinanzgut, also einem risky asset, und einem Geldmarktkonto. Wir bezeichnen mit T die Laufzeit, mit σ die Volatilität und mit r die Zinsrate.

Um das Black-Scholes Modell durch ein diskretes Modell zu approximieren, unterteilen wir das Zeitintervall $[0,T]$ in N gleich große Perioden. Später werden wir dann N gegen unendlich laufen lassen (also wird die Unterteilung immer feiner) und erwarten, dass sich das diskrete Modell dem Black-Scholes Modell auf eine bestimmte Weise annähert. In einem diskreten Modell bezeichnen wir mit $S^{(N)}$ allgemein das risky asset (abhängig von der Periodenanzahl N), und mit $S_k^{(N)}$ den Kurs nach k Perioden (im Modell mit N Perioden). Die $S_k^{(N)}$ sind Zufallsvariablen auf einem zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_N, \mathscr{F}^{(N)}, P_N^*)$, wobei P_N^* ein Martingalmaß ist. δ_N sei die Zinsrate des Bankkontos.

Wir stellen folgende Bedingungen an das diskrete Modell (aus Quelle [1] des Literaturverzeichnisses):

1. Bedingungen an die Zinsrate δ_N:
   Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei δ_N konstant über alle N Perioden. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gelte
   $\delta_N > -1$ (damit ist gewährleistet, dass der Preis einer Einheit auf dem Geldmarktkonto stets positiv ist).
   Da der Preis einer Einheit auf dem Geldmarktkonto zum Zeitpunkt T im diskreten Modell gleich dem Preis im Black-Scholes Modell sein soll, fordern wir
   $\lim_{N\to\infty} (1+\delta_N)^N = e^{rT}$
   Durch Anwenden des Logarithmus und mit Hilfe der Taylorentwicklung des Logarithmus erkennt man, dass diese Forderung äquivalent ist zu
   $\lim_{N\to\infty} N\delta_N = rT$
2. Der Anfangskurs des risky assets ist unabhängig von N, d.h. es existiert ein $S_0 > 0$ mit $S_0^{(N)} = S_0$ für alle $N \in \mathbb{N}$

3. Wie oben bereits genannt soll P_N^* ein Martingalmaß sein, d.h.
   ${S_k^{(N)}}^* := \frac{S_k^{(N)}}{(1+\delta_N)^k}$ $\quad ,k = 0,\ldots,N$, ist ein P_N^*-Martingal.

4. Die Zuwächse $R_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$ $\quad ,k = 1,\ldots,N$, auch Returns genannt, sollen unabhängig sein.

Dies ist äquivalent dazu, dass $Y_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}} = R_k^{(N)} + 1 \quad , k = 1, ..., N$ unabhängig sind.

5. Es existieren Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ und
   $-1 < \alpha_N \leq R_k^{(N)} \leq \beta_N \quad \forall\, N \in \mathbb{N}, k = 1, ..., N$
   Bemerkung: Aus $R_k^{(N)} > -1$ folgt aus der Definition der $R_k^{(N)}$ sofort $\frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}} > 0$ und damit induktiv und mit $S_0 > 0 : S_k^{(N)} > 0 \quad \forall\, k = 0, ..., N$

6. Die letzte Bedingung bezweckt, dass sich die Varianzen der Returns auf eine bestimmte Art der Volatilität im Black-Scholes Modell annähern, genauer
   $\sigma_N^2 := \frac{1}{T} \sum\limits_{k=1}^{N} var_N(R_k^{(N)}) \to \sigma^2$

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass unter diesen Bedingungen $S_N^{(N)}$ in Verteilung gegen den Kurs S_T eines Black-Scholes Modells konvergiert.

3. Konvergenz von $S_N^{(N)}$

3.1. Konvergenzsatz

Bevor wir zum zentralen Satz dieses Abschnittes kommen, zunächst noch eine kleine Folgerung aus dem dritten Punkt der obigen Bedingungen:

Lemma 1: $\mathbb{E}_N^* R_k^{(N)} = \delta_N \quad \forall\, k = 1, ..., N$

Beweis:
Da δ_N konstant über alle Perioden ist, ist δ_N insbesondere $\mathscr{F}_k^{(N)}$-messbar für alle $k = 0, ..., N$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{(1+\delta_N)^k}\mathbb{E}_N^*(S_k^{(N)}|\mathscr{F}_{k-1}^{(N)}) &= \mathbb{E}_N^*(\tfrac{S_k^{(N)}}{(1+\delta_N)^k}|\mathscr{F}_{k-1}^{(N)}) = \tfrac{S_{k-1}^{(N)}}{(1+\delta_N)^{k-1}} \\
\Rightarrow \mathbb{E}_N^*(S_k^{(N)}|\mathscr{F}_{k-1}^{(N)}) &= (1+\delta_N)\cdot S_{k-1}^{(N)} \\
\Rightarrow \mathbb{E}_N^* R_k^{(N)} &= \mathbb{E}_N^*(\tfrac{S_k^{(N)}-S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}) = \mathbb{E}_N^*(\tfrac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}) - 1 \\
&= \mathbb{E}_N^*(\mathbb{E}_N^*(\tfrac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}|\mathscr{F}_{k-1}^{(N)})) - 1 \\
&= \mathbb{E}_N^*(\tfrac{1}{S_{k-1}^{(N)}}\cdot \mathbb{E}_N^*(S_k^{(N)}|\mathscr{F}_{k-1}^{(N)})) - 1 \\
&= \mathbb{E}_N^*(\tfrac{1}{S_{k-1}^{(N)}}\cdot (1+\delta_N)\cdot S_{k-1}^{(N)}) - 1 \\
&= \mathbb{E}_N^*(1+\delta_N) - 1 = \delta_N
\end{aligned}$$

□

Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 2: Unter den Bedingungen aus Kapitel 2 konvergiert die Folge $(S_N^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ unter P_N^* in Verteilung gegen $S_T := S_0 \exp(\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)$, wobei W_T ein Wiener Prozess ist. (aus [1])

Beweis: (aus [1])
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S_0 = 1$ (sonst gehe über zu $\frac{S_N^{(N)}}{S_0}$ statt $S_N^{(N)}$).
Es gilt:
$1 + R_k^{(N)} = 1 + \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}} = \frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$

$$\Rightarrow S_N^{(N)} = \underbrace{S_0}_{1} \prod_{k=1}^{N} \frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}} = \prod_{k=1}^{N} (1+R_k^{(N)})$$

Entwickelt man $\ln(1+x)$ nach Taylor an der Stelle x=0, so erhält man
$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \mathscr{O}(x^3)$
Somit folgt

$$\begin{aligned}\ln S_N^{(N)} &= \ln \prod_{k=1}^{N} (1+R_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^{N} \ln(1+R_k^{(N)}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)} - \tfrac{1}{2}(R_k^{(N)})^2 + \Delta_{k,N}) \\ &\quad \text{mit geeigneten Resttermen } \Delta_{k,N}\end{aligned}$$

Für $\Delta_N := \sum_{k=1}^{N} \Delta_{k,N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_N^*|\Delta_N| &\le \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*|\Delta_{k,N}| \le \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*|c \cdot (R_k^{(N)})^3| \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*|R_k^{(N)}|^3 \\ &\le c \cdot \max\{|\alpha_N|,|\beta_N|\} \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^2 \\ &= c \cdot \max\{|\alpha_N|,|\beta_N|\} \cdot \sum_{k=1}^{N} (var_N R_k^{(N)} + (\mathbb{E}_N^* R_k^{(N)})^2) \\ &= c \cdot \underbrace{\max\{|\alpha_N|,|\beta_N|\}}_{\to 0} \cdot (T \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} var_N(R_k^{(N)})}_{\to \sigma^2} + \underbrace{N \cdot (\delta_N)^2}_{=\frac{1}{N}\underbrace{(N\delta_N)^2}_{\to (rT)^2}}) \\ &\to 0\end{aligned}$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt:
$P_N^*(|\Delta_N| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\{|\Delta_N| \ge \varepsilon\}} |\Delta_N| dP_N^* \le \frac{1}{\varepsilon} \int |\Delta_N| dP_N^* = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}_N^*|\Delta_N| \to 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$
Also konvergiert Δ_N in Wahrscheinlichkeit gegen 0.
Es reicht nun zu zeigen, dass die Verteilungen von $\sum_{k=1}^{N} Z_k^{(N)} := \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2)$ schwach gegen die Normalverteilung mit Parametern $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ und $\sigma^2 T$ konvergieren. Dann folgt nämlich mit dem Satz von Slutsky, dass $\ln S_N^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} Z_k^{(N)} + \Delta_N$ in Verteilung gegen $\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ konvergiert; und durch Anwenden der Exponentialfunktion folgt die Behauptung.
Um zu zeigen, dass die Verteilungen von $\sum_{k=1}^{N} Z_k^{(N)}$ schwach gegen die Normalverteilung $\mathscr{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$ konvergiert, benutzen wir den zentralen Grenzwertsatz (A.1), dessen Voraussetzungen wir nun noch überprüfen müssen.

1. Setze $\gamma'_N := \max\{|\alpha_N|,|\beta_N|\}$ und $\gamma_N := \gamma'_N + \frac{1}{2}(\gamma'_N)^2$.
   Wegen $\lim\limits_{N\to\infty} \alpha_N = \lim\limits_{N\to\infty} \beta_N = 0$ gilt auch $\lim\limits_{N\to\infty} \gamma_N = 0$.
   Außerdem gilt $|Z_k^{(N)}| = |R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2| \le \gamma'_N + \frac{1}{2}(\gamma'_N)^2 = \gamma_N$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*(Z_k^{(N)}) = \sum\limits_{k=1}^{N} (\delta_N - \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^2}_{=var_N(R_k^{(N)})+(\mathbb{E}_N^* R_k^{(N)})^2})$

$$= \underbrace{N\delta_N}_{\to rT} - \frac{1}{2}(T\sigma_N^2 + \underbrace{N\delta_N^2}_{=\frac{1}{N}(N\delta_N)^2 \to 0})$$

$$\to rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

3. Da für p>2 gilt $\sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*(|R_k^{(N)}|^p) \leq \underbrace{(\gamma_N')^{p-2}}_{\to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*((R_k^{(N)})^2)}_{\to T\sigma^2} \to 0$, folgt (mit p=3 bzw. p=4):

$$\sum_{k=1}^{N} var_N Z_k^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)} - \tfrac{1}{2}(R_k^{(N)})^2)^2 - (\mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)} - \tfrac{1}{2}(R_k^{(N)})^2))^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^3}_{\to 0} + \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^4}_{\to 0} - \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}_N^* R_k^{(N)})^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (\underbrace{\mathbb{E}_N^* R_k^{(N)}}_{\leq \gamma_n' \to 0} \cdot \mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^2) - \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}_N^*(R_k^{(N)})^2)^2}_{\to 0}$$

$$\to \sigma^2 T \qquad \square$$

3.2. Beispiele

Wir wollen nun ein paar Beispiele für diskrete Modelle geben, die im Sinne von Satz 2 das Black-Scholes Modell approximieren.

3.2.1. CRR-Modell

(aus [1])

Wir betrachten ein CRR-Modell mit N Perioden. Wir müssen nun die Parameter so wählen (in Abhängigkeit von N), dass die Bedingungen aus Abschnitt 2 erfüllt sind, damit das CRR-Modell für $N \to \infty$ das Black-Scholes Modell approximiert.

Setze $\delta_N = \frac{rT}{N}$, dann ist Bedingung 1 erfüllt. Definiere $Y_k^{(N)}$ durch

$Y_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}} = R_k^{(N)} + 1 \in \{u_N, d_N\} \quad \forall\, k = 1, ..., N$

Setze $u_N = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$ und $d_N = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$ für ein gegebenes $\sigma > 0$, welches die Volatilität aus dem Black-Scholes Modell darstellt. Setze $u_N' = u_N - 1$, $d_N' = d_N - 1$, dies sind die möglichen Zustände von $R_k^{(N)}$.

Es gilt:
$\sqrt{N}\delta_N = \sqrt{N} \cdot \frac{rT}{N} = \frac{rT}{\sqrt{N}} \to 0$
(Mit der Taylorentwicklung gilt: $e^x = 1 + x + \mathscr{O}(x^2)$)
$\sqrt{N}u'_N = \sqrt{N}(e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1) = \sqrt{N} \cdot (\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \mathscr{O}(\frac{1}{N})) = \sigma\sqrt{T} + \mathscr{O}(\frac{1}{\sqrt{N}}) \to \sigma\sqrt{T}$
$\sqrt{N}d'_N = \sqrt{N}(-e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1) = \sqrt{N} \cdot (-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \mathscr{O}(\frac{1}{N})) = -\sigma\sqrt{T} + \mathscr{O}(\frac{1}{\sqrt{N}}) \to -\sigma\sqrt{T}$
$\Rightarrow d'_N < \delta_N < u'_N$ für ausreichend große N
$\Rightarrow$ Für N groß genug ist das N-Perioden CRR-Modell arbitragefrei.
$\Rightarrow$ Nach dem 1. Fundamentalsatz der Preistheorie existiert ein äquivalentes Martingalmaß P^*_N.
Für P^*_N gilt:

$$
\begin{aligned}
p^*_N &:= P^*_N(Y_k^{(N)} = u_N) = \frac{1+\delta_N - d_N}{u_N - d_N} \\
&= \frac{\delta_N - (d_N - 1)}{(u_N - 1) - (d_N - 1)} = \frac{\delta_N - d'_N}{u'_N - d'_N} = \frac{\sqrt{N}\delta_N - \sqrt{N}d'_N}{\sqrt{N}u'_N - \sqrt{N}d'_N} \\
&\to \frac{0 - (-\sigma\sqrt{T})}{\sigma\sqrt{T} - (-\sigma\sqrt{T})} = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{T}} = \frac{1}{2} \qquad (\Rightarrow \text{Bedingung 3 erfüllt})
\end{aligned}
$$

(Für niedrige N kann es passieren, dass das Modell nicht arbitragefrei ist, also p^*_N nicht im Intervall $(0,1)$ liegt. Wähle hier p einfach anders, für die Konvergenz von $S_N^{(N)}$ ist es egal, was bei endlich vielen $N \in \mathbb{N}$ passiert.)
Bedingung 5 ist erfüllt, wähle einfach $\alpha_N = d'_N$ und $\beta_N = u'_N$. Aus der obigen Rechnung folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} var_N R_k^{(N)} &= \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}^*_N (R_k^{(N)})^2 - (\mathbb{E}^*_N R_k^{(N)})^2) \\
&= \sum_{k=1}^{N} (p^*_N (u'_N)^2 + (1 - p^*_n) \cdot (d'_N)^2 - \delta_N^2) \\
&= N \cdot (p^*_N (u'_N)^2 + (1 - p^*_n) \cdot (d'_N)^2 - \delta_N^2) \\
&= p^*_N \cdot (\sqrt{N}u'_N)^2 + (1 - p^*_N) \cdot (\sqrt{N}d'_N)^2 - (\sqrt{N}\delta_N)^2 \\
&\to \tfrac{1}{2}(\sigma\sqrt{T})^2 + \tfrac{1}{2}(-\sigma\sqrt{T})^2 - 0^2 = \sigma^2 T
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \sigma_N^2 := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} var_N R_k^{(N)} \to \frac{1}{T} \cdot \sigma^2 T = \sigma^2$
$\Rightarrow$ Bedingung 6 ist erfüllt
Somit sind alle Bedingungen erfüllt (bei Bedingung 2 und 4 ist nichts zu zeigen), im CRR-Modell mit den obigen Parametern konvergiert also $S_N^{(N)}$ in Verteilung gegen den Kurs S_T des Black-Scholes Modells.

3.2.2. Trinomialmodell

Im Trinomialmodell, bei dem die $R_k^{(N)}$ bzw. die wie in 3.2.1 definierten $Y_k^{(N)}$ 3 verschiedene Werte annehmen können, konvergiert $S_N^{(N)}$ bei passender Wahl der Parameter auch in Verteilung gegen den Kurs S_T des Black-Scholes Modells. Da das Trinomialmodell als Spezialfall des im nächsten Abschnitt behandelten K-Nomialmodell zu sehen ist, wird hier auf einen Beweis verzichtet.

3.2.3. K-Nomialmodell

Beim K-Nomialmodell können die $Y_k^{(N)}$ K verschiedene Werte annehmen. Es ist somit eine Verallgemeinerung des CRR-Modells und des Trinomialmodells. Daher werden wir hier so ähnlich vorgehen wie beim CRR-Modell. Zur Vereinfachung sei $K = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$, für gerade K kann man aber analog vorgehen.
Sei wie beim CRR-Modell $\delta_N = \frac{rT}{N}$, womit die erste Bedingung des zweiten Abschnittes wieder erfüllt ist.
Setze $p_i^* := P_N^*(Y_l = a_i^N) > 0 \quad \forall\, i = 1,...,K$, l beliebig
Notation: Um die Indizes im Rahmen zu halten, schreiben wir ab jetzt a_i für a_i^N.
Wähle $a_i = e^{c\cdot\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\cdot(m+1-i)}$
mit $c = \sqrt{\frac{3}{m\cdot(m+1)}}$ (der genaue Grund dieser Wahl wird erst am Ende ersichtlich).
Setze ähnlich wie beim CRR-Modell $a_i' := a_i - 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{N}a_i' &= \sqrt{N}(e^{c\cdot\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\cdot(m+1-i)} - 1)\\ &= \sqrt{N}(c\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\cdot(m+1-i) + \mathscr{O}(\tfrac{1}{N}))\\ &= c\sigma\sqrt{T}\cdot(m+1-i) + \mathscr{O}(\tfrac{1}{\sqrt{N}})\\ &\to c\sigma\sqrt{T}\cdot(m+1-i)\end{aligned}$$

Damit ist die 5. Bedingung erfüllt (da $\lim\limits_{N\to\infty} a_1' = \lim\limits_{N\to\infty} a_K' = 0$).
Anders als beim CRR-Modell gibt es nun kein eindeutiges Martingalmaß mehr. Wir setzen $p_i^* = \frac{1}{K}$ für alle i=2,...,K-1. Mit Bedingung 3 können wir dann ausrechnen, wie p_1^* und p_K^* lauten müssen. Ist $p_1^* \in (0, \frac{2}{K})$, so haben wir ein gültiges K-Nomialmodell.
Es muss gelten:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_N^* Y_l = 1 + \delta_N\\ &\Rightarrow p_1^*\cdot a_1 + (1 - \tfrac{K-2}{K} - p_1^*)\cdot a_K + \sum_{i=2}^{K-1}\tfrac{1}{K}\cdot a_i = 1 + \delta_N\\ &\Rightarrow p_1^*\cdot a_1 - p_1^*\cdot a_K = 1 + \delta_N - \tfrac{1}{K}\sum_{i=2}^{K-1} a_i - \tfrac{2}{K}a_K\\ &\Rightarrow p_1^* = \frac{1+\delta_N - \frac{1}{K}\sum_{i=2}^{K-1} a_i - \frac{2}{K}a_K}{a_1 - a_K}\\ &\qquad = \frac{\delta_N - \frac{1}{K}\sum_{i=2}^{K-1}(a_i-1) - \frac{2}{K}\cdot(a_K-1)}{(a_1-1)-(a_K-1)}\\ &\qquad = \frac{\sqrt{N}\delta_N - \frac{1}{K}\sum_{i=2}^{K-1}(\sqrt{N}a_i') - \frac{2}{K}\cdot(\sqrt{N}a_K')}{\sqrt{N}a_1' - \sqrt{N}a_K'}\\ &\qquad \to \frac{0 - \frac{1}{K}\sum_{i=2}^{K-1} c\sigma\sqrt{T}\cdot(m+1-i) - \frac{2}{K}c\sigma\sqrt{T}\cdot(-m)}{c\sigma\sqrt{T}\cdot(m-(-m))} \quad = \quad \frac{1}{K}\\ &\qquad , \text{da} \sum_{i=2}^{K-1}(m+1-i) = 0\end{aligned}$$

Es folgt also, dass für N groß genug p_1^* in $(0, \frac{2}{K})$ liegt. Es bleibt nun noch die 6. Bedingung zu zeigen.

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N} var_N(R_l^{(N)}) &= \sum_{l=1}^{N} \mathbb{E}_N^*((R_l^{(N)})^2) - \delta_N^2 \\
&= \sum_{l=1}^{N} (\sum_{i=1}^{K} p_i^* \cdot (a_i')^2 - \delta_N^2) \\
&= N \cdot (\sum_{i=1}^{K} p_i^* \cdot (a_i')^2 - \delta_N^2) \\
&= \sum_{i=1}^{K} (p_i^* \cdot (\sqrt{N} a_i')^2 - (\sqrt{N}\delta_N)^2) \\
&\xrightarrow{N\to\infty} \sum_{i=1}^{K} (\tfrac{1}{K} \cdot (c\sigma\sqrt{T} \cdot (m+1-i))^2 - 0^2) \\
&= \tfrac{1}{K} \cdot c^2\sigma^2 T \cdot \sum_{i=1}^{2m+1} (m+1-i)^2 \\
&= \tfrac{1}{K} \cdot c^2\sigma^2 T \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} i^2 \\
&= \tfrac{1}{K} \cdot c^2\sigma^2 T \cdot 2 \cdot (\tfrac{1}{3}m^3 + \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{6}m) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{m+\frac{1}{2}} \cdot c^2\sigma^2 T \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{3}m \cdot (m+\tfrac{1}{2}) \cdot (m+1) \\
&= c^2 \cdot \sigma^2 T \cdot \tfrac{1}{3}m \cdot (m+1) = \sigma^2 T
\end{aligned}
$$

Also konvergiert im K-Nomialmodell mit den obigen Parametern $S_N^{(N)}$ gegen den Kurs S_T des Black-Scholes Modells.

4. Konvergenz von Preisen

Aus der in Satz 2 gezeigten Konvergenz in Verteilung folgt noch nicht, dass auch der Preis eines Derivats im diskreten Modell gegen des Preis im Black-Scholes Modell konvergiert. Unter zusätzlichen Annahmen ist aber auch diese Konvergenz nachweisbar.
Sei der Preis des Derivats lediglich abhängig vom Kurs des risky assets zum Zeitpunkt T, d.h. er sei von der Form $f(S_N^{(N)})$ im diskreten Modell bzw. $f(S_T)$ im BS-Modell mit einer Funktion $f \geq 0$. Eine erste Aussage zur Konvergenz des Preises lässt sich direkt aus Satz 2 folgern:

Corollar 3: Wenn f stetig und beschränkt ist, so konvergiert der arbitragefreie Preis von $f(S_N^{(N)})$ unter P_N^* gegen den abdiskontierten Preis im Black-Scholes Modell, d.h.
$\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{E}_N^*(\frac{f(S_N^{(N)})}{(1+\delta_N)^N}) = e^{-rT}\mathbb{E}^*(f(S_T)) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y+rT-\sigma^2\frac{T}{2}})e^{-\frac{y^2}{2}}dy$
(aus [1])

Beweis: (aus [1])
Satz 2 $\Rightarrow S_N^{(N)} \xrightarrow{d} S_T := S_0 \exp(\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)$
$S_N^{(N)} \xrightarrow{d} S_T$ bedeutet, dass $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{E}_N^* g(S_N^{(N)}) = \mathbb{E}^* g(S_T)$ für alle stetige und beschränkte g, also insbesondere für f. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_N^*\left(\frac{f(S_N^{(N)})}{(1+\delta_N)^N}\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(1+\delta_N)^N} \cdot \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_N^*(f(S_N^{(N)})) \\
&= e^{-rT} \cdot \mathbb{E}^*(f(S_T)) \\
&= e^{-rT} \cdot \mathbb{E}^*(f(S_0 \exp(\sigma W_T + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T))) \\
&= e^{-rT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 \exp(\sigma\sqrt{T}y + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 \exp(\sigma\sqrt{T}y + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T)) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy \qquad \square
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass f nicht stetig und/oder beschränkt ist, liefert der folgende Satz unter einer zusätzlichen Bedingung ebenfalls die Konvergenz des Preises:

Satz 4: Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ messbar und fast überall stetig. Es gelte außerdem
$|f(x)| \leq c(1+x)^q$ für ein $c \geq 0$ und $0 \leq q < 2$. Dann gilt
$\mathbb{E}_N^*(f(S_N^{(N)})) \to \mathbb{E}^*(f(S_T))$
(aus [1])

Beweis: (aus [1])
Für q=0 ist f beschränkt und die Aussage folgt mit Corollar 3 und dem Portmanteau-Theorem (siehe Anhang A.2, $(c) \Rightarrow (b)$). Sei deshalb $q > 0$.
Wir wissen bereits aus dem Beweis von Satz 2: $S_N^{(N)} = \prod_{k=1}^{N} (1+R_k^{(N)})$
Es gilt:

$$\ln(\mathbb{E}_N^*((S_N^{(N)})^2)) = \ln(\mathbb{E}_N^*((\prod_{k=1}^{N}(1+R_k^{(N)}))^2)) = \ln(\mathbb{E}_N^*(\prod_{k=1}^{N}(1+R_k^{(N)})^2))$$

Da die $R_k^{(N)}$, und damit auch $(1+R_k^{(N)})^2$, k=1,...,N unabhängig sind, folgt:

$$= \ln(\prod_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N^*((1+R_k^{(N)})^2))$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \ln \mathbb{E}_N^*((1+R_k^{(N)})^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \ln(var_N(1+R_k^{(N)}) + (\mathbb{E}_N^*(1+R_k^{(N)}))^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \ln(var_N(R_k^{(N)}) + (1+\delta_N)^2)$$

, da $var(X+1) = var(X)$ für jede bel. Zufallsvariable X. Mit der Taylorentwicklung $\ln(1+x) = x + \mathscr{O}(x^2)$ folgt (mit einer endlichen Konstanten $\tilde{c}$)

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (var_N(R_k^{(N)}) + 2\delta_N + \delta_N^2 + \tilde{c}\cdot(var_N(R_k^{(N)}) + 2|\delta_N| + \delta_N^2)^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (var_N(R_k^{(N)})) + 2N\delta_N + N\delta_N^2 + \tilde{c}\cdot \sum_{k=1}^{N} (var_N(R_k^{(N)}) + 2|\delta_N| + \delta_N^2)^2$$

$$\leq \underbrace{\sigma_N^2 T}_{\to \sigma^2 T} + 2\underbrace{N\delta_N}_{rT} + \underbrace{N\delta_N^2}_{\to 0} + \tilde{c}\cdot \underbrace{(\sum_{k=1}^{N} (var_N(R_k^{(N)}) + 2|\delta_N| + \delta_N^2))^2}_{\to \sigma^2 T + 2rT}$$

$$\to d < \infty$$

Durch großzügiges Abschätzen des letzten Terms haben wir also herausbekommen, dass $\ln(\mathbb{E}_N^*((S_N^{(N)})^2))$ endlich ist. Damit ist auch $\mathbb{E}_N^*((S_N^{(N)})^2)$ endlich und, da der Grenzwert d unabhängig von N ist, folgt auch:

$$\sup_N \mathbb{E}_N^*((S_N^{(N)})^2) \leq d < \infty$$

Wir setzen $p := \frac{2}{q} > 1$ (wegen $q \neq 0$ ist dies wohldefiniert). Wegen $pq = 2$ gilt dann:

$$\sup_N \mathbb{E}_N^*(|f(S_N^{(N)})|^p) \leq \sup_N \mathbb{E}_N^*((c(1+S_N^{(N)})^q)^p) = c^p \sup_N \mathbb{E}_N^*((1+S_N^{(N)})^2) < \infty$$

Die Behauptung folgt nun mit dem folgenden Lemma (setze $\mu = (P^*)^{S_T}$ und $\mu_N = (P_N^*)^{S_N^{(N)}}$. Wende den Transformationssatz an).

Lemma 5: Sei $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$, die schwach gegen μ konvergiert. Ist f eine messbare und μ-fast überall stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, sodass gilt:

$c := \sup_{N\in\mathbb{N}} \int |f|^p d\mu_N < \infty$ für ein $p > 1$, dann gilt: $\int f d\mu_N \to \int f d\mu$.
(aus [1])

Beweis: (aus[1])

Sei o.B.d.A. $f \geq 0$ (der allgemeine Fall folgt dann durch Aufspalten von f in Positiv- und Negativteil). Definiere $f_k := \min\{f, k\}$. Dann ist f_k beschränkt (durch k) und genauso wie f μ-fast überall stetig. Es gilt:

$\int f d\mu_N = \int f_k d\mu_N + \int (f-k)^+ d\mu_N$

Das Portmanteau-Theorem (siehe Anhang A.2, (a) $\Rightarrow$ (b)) liefert, dass $\int f_k d\mu_N$ gegen $\int f_k d\mu$ konvergiert. Betrachten wir nun den zweiten Summanden auf der rechten Seite. Es gilt:

$$\int (f-k)^+ d\mu_N = \int\limits_{\{f>k\}} (f-k) d\mu_N \leq \int\limits_{\{f>k\}} f d\mu_N \leq \int\limits_{\{f>k\}} \frac{f^{p-1}}{k^{p-1}} f d\mu_N = \frac{1}{k^{p-1}} \int f^{p-1} f d\mu_N$$
$$\leq \frac{c}{k^{p-1}} \quad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

Damit gilt:

$$\int f_k d\mu \overset{Portmanteau}{=} \lim_{N\to\infty} \int f_k d\mu_N \leq \liminf_{N\to\infty} \int f d\mu_N \leq \limsup_{N\to\infty} \int f_k d\mu_N \leq \int f_k d\mu + \frac{c}{k^{p-1}}$$

Für $k \to \infty$ konvergiert der Term ganz rechts gegen den Term ganz links, sodass wir also erhalten:

$$\lim_{N\to\infty} \int f d\mu_N = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu$$

Da $f_k = \min\{f, k\}$, gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$

$\Rightarrow$ Behauptung $\square$

5. Trinomialmodell

In diesem Kapitel wird die Frage geklärt, ob das Optionspreisintervall in einem Trinomialmodell konvergiert. In Abschnitt 3.2.3 wurde bereits auf ein spezielles Trinomialmodell (für K=3) eingegangen, dort wurde allerdings nur ein bestimmtes Martingalmaß ausgewählt. Hier soll nun die gesamte Menge der äquivalenten Martingalmaße (im Folgenden mit $\mathscr{P}^*$ bezeichnet) betrachtet werden.

Als erstes beschäftigen wir uns mit der Frage, ob bei einem Trinomialmodell die Verteilungen von $S_N^{(N)}$ unter den verschiedenen äquivalenten Martingalmaßen die gleiche Grenzverteilung besitzen. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

Gegeben sei eine Laufzeit $T > 0$ sowie eine (stetige) Zinsrate $r > -1$. Außerdem sei ein 1-Perioden-Trinomialmodell gegeben, in dem $Y_1^{(1)} := \frac{S_1^{(1)}}{S_0^{(1)}}$ die Zustände u, m und d annehmen kann. Es gelte

$$u > m > d$$
$$\text{sowie} \quad u > e^{rT} > d$$

Somit ist das 1-Perioden-Trinomialmodell arbitragefrei. Da wir die Menge aller äquivalenten Martingalmaße betrachten, ist das Angeben von Wahrscheinlichkeiten für die Annahme eines bestimmten Zustandes überflüssig. Wir konstruieren uns jetzt für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein N-Perioden-Modell, indem wir die möglichen Zustände der $Y_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$ wie folgt wählen:

$$u^{(N)} := e^{\frac{rT}{N}} \quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot (u - e^{rT})$$
$$m^{(N)} := e^{\frac{rT}{N}} \quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot (m - e^{rT})$$
$$d^{(N)} := e^{\frac{rT}{N}} \quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot (d - e^{rT})$$

Sei $P^* \in \mathscr{P}^*$ ein festes Martingalmaß für das 1-Perioden-Modell. Es existieren also $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$ mit:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$P^*(Y_1^{(N)} = u) = p_1$$
$$P^*(Y_1^{(N)} = m) = p_2$$
$$P^*(Y_1^{(N)} = d) = p_3$$
$$p_1 \cdot u + p_2 \cdot m + p_3 \cdot d = e^{rT}$$

Satz 6: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist das N-Perioden-Modell mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 risikoneutral und die Summe der Varianzen der $Y_k^{(N)}$ ist konstant.

Beweis:
Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig.
1) Für $1 \leq k \leq N$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_k^{(N)}) &= p_1 \cdot u^{(N)} + p_2 \cdot m^{(N)} + p_3 \cdot d^{(N)} \\
&= p_1 \cdot (e^{\frac{rT}{N}} + \tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (u - e^{rT})) + p_2 \cdot (e^{\frac{rT}{N}} + \tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (m - e^{rT})) \\
&\quad + p_3 \cdot (e^{\frac{rT}{N}} + \tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (d - e^{rT})) \\
&= \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3)}_{=1} \cdot e^{\frac{rT}{N}} + \tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (p_1 \cdot (u - e^{rT}) + p_2 \cdot (m - e^{rT}) + p_3 \cdot (d - e^{rT})) \\
&= e^{\frac{rT}{N}} + \tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (\underbrace{p_1 \cdot u + p_2 \cdot m + p_3 \cdot d}_{=\mathbb{E}(Y_1^{(1)}) = e^{rT}} + (p_1 + p_2 + p_3) \cdot (-e^{rT})) \\
&= e^{\frac{rT}{N}} + \tfrac{1}{\sqrt{N}} (e^{rT} - e^{rT}) \\
&= e^{\frac{rT}{N}}
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$\mathbb{E}(S_N^{(N)}) = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^{N} Y_k^{(N)}) = \prod_{k=1}^{N} \mathbb{E}(Y_k^{(N)}) = (\mathbb{E}(Y_1^{(N)}))^N = (e^{\frac{rT}{N}})^N = e^{rT}$$

Damit ist das N-Perioden-Modell risikoneutral.

2)
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} var(Y_k^{(N)}) &= N \cdot var(Y_1^{(N)}) \\
&= N \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(N)} - \mathbb{E}(Y_1^{(N)}))^2 \\
&= N \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(N)} - e^{\frac{rT}{N}})^2 \\
&= N \cdot (p_1 \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (u - e^{rT}))^2 + p_2 \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (m - e^{rT}))^2 + p_3 \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{N}} \cdot (d - e^{rT}))^2) \\
&= N \cdot (\tfrac{1}{N} \underbrace{(p_1 \cdot (u - e^{rT})^2 + p_2 \cdot (m - e^{rT})^2 + p_3 \cdot (d - e^{rT})^2)}_{=var(Y_1^{(1)})}) \\
&= var(Y_1^{(1)})
\end{aligned}
$$

Also ist die Summe der N Varianzen im N-Perioden-Modell unabhängig von N. □

Wir fixieren weiterhin ein Martingalmaß im 1-Perioden-Modell und behalten die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 für alle N-Perioden-Modelle bei. Wir überprüfen nun die 6 Voraussetzungen aus Kapitel 2:

1. Wir haben implizit bereits $\delta_N = e^{\frac{rT}{N}}$ gewählt, sodass diese Voraussetzung automatisch erfüllt ist.

2. Nach Wahl ist dies erfüllt.

3. Da wir als Wahrscheinlichkeitsmaß ein Martingalmaß gewählt haben, ist dies erfüllt.

4. Dies ist erfüllt, da es eine Eigenschaft des Trinomialmodells ist.

5. $R_k^{(N)}$ kann nur die Werte $u^{(N)}-1, m^{(N)}-1$ und $d^{(N)}-1$ annehmen. Es gilt:
$$u^{(N)}-1 = e^{\frac{rT}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot (u - e^{rT}) - 1$$
$$= 1 + \frac{rT}{N} + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2}) + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot (u - e^{rT}) - 1$$
$$= \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$$
Analog gilt:
$$d^{(N)}-1 = 1 + \frac{rT}{N} + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2}) + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot (d - e^{rT}) - 1$$
$$= \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$$
Damit ist diese Bedingung erfüllt.

6. Wir haben bereits im zweiten Teil des Beweises der obigen Behauptung nachgerechnet, dass gilt:
$$\sigma_N^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} var(R_k^{(N)})$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} var(Y_k^{(N)})$$
$$= \frac{1}{T} var(Y_1^{(1)})$$
Die Folge $(\sigma_N^2)_{N \in \mathbb{N}}$ ist also sogar konstant, insbesondere dann natürlich auch konvergent.

Nach Satz 2 folgt, dass $(S_N^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $S_T := S_0 \exp(\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)$ mit $\sigma^2 = \frac{1}{T} var(Y_1^{(1)})$ konvergiert.
Sei nun ein Claim C gegeben, der die Auszahlung eines Derivats beschreibt, und der nur vom Endwert $S_N^{(N)}$ abhängt, d.h. es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $C = f(S_N^{(N)})$. Diese Funktion f erfülle die Voraussetzungen des Satzes 4. Dann konvergiert nach genau diesem Satz der Preis des Derivats im Trinomialmodell gegen den Preis des Derivats im Black-Scholes Modells mit den Parametern $\mu = r$ und $\sigma^2 = \frac{1}{T} var(Y_1^{(1)})$.
Nun haben wir ja am Anfang ein bestimmtes Martingalmaß für das 1-Perioden-Modell ausgewählt. Genauso gut können wir ein beliebiges anderes, äquivalentes Martingalmaß auswählen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten wieder über alle N-Perioden-Modelle festhalten. Der Preis des Derivats in diesem neuen Trinomialmodell konvergiert wieder gegen den Preis in einem Black-Scholes Modell, nur ist das σ^2 in diesem Black-Scholes Modell ein anderes, weil sich die Varianz von $Y_1^{(1)}$ ändert. Da die Preise eines Derivats im Black-Scholes Modell im Allgemeinen von der Volatilität des Black-Scholes Modells abhängen, sind diese Preise also in der Regel nicht gleich. Folglich gilt für das Optionspreisintervall, das definiert ist als
$$\pi(C) := \{\mathbb{E}^*(\frac{f(S_N^{(N)})}{e^{rT}}) \mid P^* \in \mathcal{P}^*\} \quad ,$$
dass dieses nicht auf einen Punkt zusammenschrumpft, also nicht konvergiert.
Dies ist ein entscheidender Unterschied zwischen dem Binomialmodell und dem Trinomialmodell. Während im Trinomialmodell das Optionspreisintervall nicht konvergiert, ist dies in einem Binomialmodell, das die Voraussetzungen aus Kapitel 2 erfüllt, trivialerweise der Fall, denn: Es gibt im Binomialmodell nur ein Martingalmaß, und damit

besteht das Optionspreisintervall auch nur aus einem Punkt. Dass die Folge dieser Preise wirklich konvergiert, gewährt uns Satz 4.

6. Abhängige Returns

In diesem Kapitel werden wir den Fall behandeln, dass die Returns im diskreten Modell abhängig ist, die Bedingung 4 aus Kapitel 2 also nicht erfüllt ist. Wir werden uns dabei auf eine bestimmte Abhängigkeit beschränken, und zwar werden wir annehmen, dass $(\ln(1+R_k^{(N)}))_{k=1,...,N}$ ein autoregressiver Prozess 1. Ordnung ist. Dazu erfolgt nun eine kleine Einführung in die Theorie autoregressiver Prozesse.

6.1. Autoregressive Prozesse

Definition 7: Ein stochastischer Prozess $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ heißt autoregressiver Prozess der Ordnung p (AR(p)-Prozess), wenn gilt
$X_k = \alpha_1 \cdot X_{k-1} + \alpha_2 \cdot X_{k-2} + ... + \alpha_p \cdot X_{k-p} + \varepsilon_k = (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot X_{k-i}) + \varepsilon_k$
mit $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$.
Dabei ist $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein White-Noise-Prozess, d.h. die ε_k sind unabhängig und identisch verteilt, außerdem gilt $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$ und $var(\varepsilon_k) = \sigma_\varepsilon^2 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$ (aus [2])

Wir werden im Folgenden einen autoregressiven Prozess betrachten, der nur für $k \in \mathbb{N}$ definiert ist. In diesem Fall müssen wir natürlich noch Anfangsbedingungen berücksichtigen. Zudem beschränken wir uns auf autoregressive Prozesse 1. Ordnung, weil sich hierbei eine recht einfache explizite Darstellung der einzelnen Folgenglieder durch den White-Noise-Prozess finden lässt.
Sei also $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein AR(1)-Prozess, d.h. es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit
$X_1 = \alpha \cdot X_0 + \varepsilon_1$
$X_k = \alpha \cdot X_{k-1} + \varepsilon_k \quad \forall\, k \geq 2$
Dabei ist X_0 eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X_0) = 0$ und endlicher Varianz, die hier als Startwert dient. X_0 soll zudem unabhängig von allen ε_k sein.
Für die X_k existiert nun eine explizite Darstellung durch die ε_k:

$$\begin{aligned} X_k &= \alpha \cdot X_{k-1} + \varepsilon_k \\ &= \alpha \cdot (\alpha \cdot X_{k-2} + \varepsilon_{k-1}) + \varepsilon_k = \alpha^2 \cdot X_{k-2} + \alpha \cdot \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k \\ &\overset{induktiv}{=} \alpha^k \cdot X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \cdot \varepsilon_{k-j} \end{aligned}$$

(aus [2])

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} var(X_k) &= var(\alpha^k \cdot X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \cdot \varepsilon_{k-i}) \\ &= \alpha^{2k} \cdot var(X_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{2i} \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \alpha^{2k} \cdot var(X_0) + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{2i} \\ &= \alpha^{2k} \cdot var(X_0) + \frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Die Folge der Varianzen $(var(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist also genau dann beschränkt, wenn $|\alpha| < 1$ gilt. Wir werden daher fortan $|\alpha| < 1$ voraussetzen. (Anmerkung: Gilt $var(X_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}$, so ist der Prozess $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sogar schwach stationär, denn dann gilt $var(X_k) = var(X_0)\ \forall\ k \in \mathbb{N}$)

6.2. Approximation durch abhängige Returns

Wir nehmen an, dass für alle natürlichen Zahlen N der Prozess $(\ln(1+R_k^{(N)}))_{k=1,\ldots,N}$ ein AR(1)-Prozess im obigen Sinne ist. Die Koeffizienten $\alpha^{(N)}$ seien gleich, also $\alpha^{(N)} = \alpha$. Zudem setzen wir voraus, dass alle Momente der $\varepsilon_k^{(N)}$ existieren. Dies ist zum Beispiel bei beschränkten White-Noise-Prozessen sowie bei normalverteilten $\varepsilon_k^{(N)}$ der Fall. Für die Momente gelte:

$\mathbb{E}(\varepsilon_k^{(N)}) = 0$

$\mathbb{E}((\varepsilon_k^{(N)})^2) = \frac{1}{N}(\sigma_{\varepsilon_1^{(1)}})^2 =: \frac{1}{N}\sigma_\varepsilon^2$

$|\mathbb{E}((\varepsilon_k^{(N)})^l)| \le (\frac{d}{\sqrt{N}})^l \quad \forall\ l \ge 3$

Man beachte, dass das $d \in \mathbb{R}$ unabhängig von l ist.

Für jedes N sei die als Startwert dienende Zufallsvariable $R_0^{(N)}$ analog zu X_0 in Abschnitt 5.1 gewählt, d.h. $R_0^{(N)}$ sei unabhängig von allen $\varepsilon_k^{(N)}$, der Erwartungswert sei 0, die Varianz ist endlich und es gilt:

$\ln(1+R_1^{(N)}) = \alpha \cdot R_0^{(N)} + \varepsilon_1^{(N)}$

Außerdem gelte:

$|\mathbb{E}((R_0^{(N)})^l)| \le c \cdot \frac{1}{N} \quad \forall\ l \in \mathbb{N}$

Analog zu oben sei $c \in \mathbb{R}$ unabhängig von l.

Zudem sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S_0^{(N)} = S_0 = 1$ für alle N.

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass unter diesen Bedingungen $(S_N^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ wieder in Verteilung gegen den Kurs S_T des Black-Scholes Modells konvergiert. Dies lässt sich leider nicht analog zum Beweis von Satz 2 zeigen, weil ein grundlegendes Hilfsmittel dieses Beweises der zentrale Grenzwertsatz war, der aber nur für unabhängige Returns anwendbar ist. Deshalb müssen wir uns mit der Theorie der charakteristischen Funktionen beschäftigen.

Definition 8: Für eine reellwertige Zufallsgröße X ist die charakteristische Funktion φ_X definiert durch

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \text{(aus [3])}$$

Wegen
$|\mathbb{E}(e^{itX})| \leq \mathbb{E}(|e^{itX}|) = \mathbb{E}(1) = 1$
existiert dieser Erwartungswert für alle Zufallsgrößen X und für alle t.
Sind alle Momente von X endlich, so kann man mithilfe der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion die charakteristische Funktion wie folgt darstellen:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n) \qquad \text{(aus [3])}$$

Diese Reihendarstellung werden wir später noch brauchen, um die charakteristische Funktion der ε_k als Reihe zu schreiben (daher die Forderung, dass alle Momente der ε_k existieren sollen).
Eine wichtige Eigenschaft der charakteristischen Funktion gibt uns der folgende Satz:

Stetigkeitssatz von Lévy-Cramér 9: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X, wenn für alle reellen t gilt: $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$
(aus [3])

Um also zu zeigen, dass $(S_N^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $S_T = S_0 \exp(\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)$ konvergiert, was genau dann der Fall ist, wenn $(\ln(S_N^{(N)}))_{N\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $\ln(S_T)$ konvergiert, müssen wir zeigen, dass die Folge der charakteristischen Funktionen von $\ln(S_N^{(N)})$ punktweise gegen die charakteristische Funktion von $\ln(S_T)$ konvergiert, also gegen die charakteristische Funktion einer normalverteilten Zufallsvariable. Die charakteristische Funktion einer normalverteilten Zufallsvariablen lässt sich folgendermaßen bestimmen:
Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_\Omega e^{itX} dP \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP^X \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{x^2 - 2x(\mu + it\sigma^2) + \mu^2}{2\sigma^2}\Big) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{x^2 - 2x(\mu + it\sigma^2) + (\mu^2 + 2\mu it\sigma^2 + i^2t^2\sigma^4) - 2\mu it\sigma^2 - i^2t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\Big) dx
\end{aligned}$$

$$= \exp(\mu it - \tfrac{t^2\sigma^2}{2}) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-(\mu+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2})}_{\text{Dichte einer } \mathcal{N}(\mu+it\sigma^2,\sigma^2)\text{-verteilten ZV}} dx$$

$$= \exp(\mu it - \tfrac{t^2\sigma^2}{2})$$

Um die charakteristische Funktion von $\ln(S_N^{(N)})$ ausrechnen, werden wir zunächst $\ln(S_N^{(N)})$ geeignet umformen. Dabei verwenden wir, dass $(\ln(1+R_k^{(N)}))_{k=1,\dots,N}$ ein Ar(1)-Prozess ist.

$$\ln(S_N^{(N)}) = \ln(\prod_{k=1}^N (1+R_k^{(N)})) = \sum_{k=1}^N \ln(1+R_k^{(N)})$$
$$= \sum_{k=1}^N (\alpha^k R_0^{(N)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \varepsilon_{k-j}^{(N)})$$
$$= (\alpha \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k) R_0^{(N)} + \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^{N-l} \alpha^m \varepsilon_l^{(N)}$$
$$= \alpha \tfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} R_0^{(N)} + \sum_{l=1}^N \tfrac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha} \varepsilon_l^{(N)}$$

Da $R_0^{(N)}$ und alle $\varepsilon_k^{(N)}$ unabhängig sind, lässt sich die charakteristische Funktion von $\ln(S_N^{(N)})$ aufspalten in ein Produkt von charakteristischen Funktionen:

$$\varphi_{\ln S_N^{(N)}}(t) = \mathbb{E}(e^{it \ln S_N^{(N)}})$$
$$= \mathbb{E}(e^{it\alpha \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} R_0^{(N)}} \cdot \prod_{l=1}^N e^{it \frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha} \varepsilon_l^{(N)}})$$
$$= \mathbb{E}(e^{it\alpha \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} R_0^{(N)}}) \cdot \prod_{l=1}^N \mathbb{E}(e^{it \frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha} \varepsilon_l^{(N)}})$$

Für den ersten Faktor gilt:

$$|\mathbb{E}(e^{it\alpha \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} R_0^{(N)}}) - 1|$$
$$= |\sum_{n=0}^\infty \tfrac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}((R_0^{(N)})^n) - 1|$$
$$= |\sum_{n=1}^\infty \tfrac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}((R_0^{(N)})^n)|$$
$$\leq \sum_{n=1}^\infty |\tfrac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}((R_0^{(N)})^n)|$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \tfrac{t^n}{n!} |\mathbb{E}((R_0^{(N)})^n)|$$
$$\leq \sum_{n=1}^\infty \tfrac{t^n}{n!} c \cdot \tfrac{1}{N}$$
$$= c \cdot \tfrac{1}{N}(-1 + \sum_{n=0}^\infty \tfrac{t^n}{n!})$$
$$= c \cdot \tfrac{1}{N}(e^t - 1) \qquad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Also konvergiert der erste Faktor für jedes $t \in \mathbb{R}$ gegen 1.

Für den zweiten Faktor gilt:

$$\prod_{l=1}^N \mathbb{E}(e^{it \frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha} \varepsilon_l^{(N)}})$$
$$= \prod_{l=1}^N (\sum_{j=0}^\infty \frac{(it \frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^j}{j!} \mathbb{E}((\varepsilon_l^{(N)})^j))$$

$$= \prod_{l=1}^{N} \left(\sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l}) \cdot t^{j_l} \right) \tag{$*$}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(N)} t^m$$

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Formel für die $a_m^{(N)}$ zu bestimmen. Man sieht recht schnell, dass sich beim Ausmultiplizieren von (*) nur für $j_1 = j_2 = ... = j_N = 0$ ein Term der Ordnung t^0 ergibt. Folglich gilt:

$$a_0^{(N)} = \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^0}{0!} = 1$$

Des Weiteren ergeben sich beim Ausmultiplizieren N Terme der Ordnung t^1. Es gilt:

$$a_1^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{(i\frac{1-\alpha^{N-k+1}}{1-\alpha})^1}{1!} \mathbb{E}(\varepsilon_1^{(N)}) \cdot \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^0}{0!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^0) \right)$$
$$= 0$$

,da $\mathbb{E}(\varepsilon_1^{(N)}) = 0$. Aus diesem Grund fallen auch die meisten Terme der Ordnung t^2 weg und es bleibt übrig:

$$a_2^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{(i\frac{1-\alpha^{N-k+1}}{1-\alpha})^2}{2!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^2) \cdot \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^0}{0!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^0) \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} -\frac{1}{2} \left(\frac{1-\alpha^{N-k+1}}{1-\alpha}\right)^2 \frac{1}{N} \sigma_\varepsilon^2$$
$$= -\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\cdot(1-\alpha)^2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{(1-\alpha^{N-k+1})^2}{N}}_{=:\beta^{(N)}}$$

Für $\beta^{(N)}$ gilt jedoch:

$$|\beta^{(N)} - 1| = \left|\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(1-\alpha^{N-k+1})^2}{N}\right) - 1\right|$$
$$= \left|\left(\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N} - \frac{2\alpha^{N-k+1}}{N} + \frac{\alpha^{2\cdot(N-k+1)}}{N}\right)\right) - 1\right|$$
$$= \left|\frac{1}{N}\left(-2\sum_{k=1}^{N} \alpha^k + \sum_{k=1}^{N} (\alpha^k)^2\right)\right|$$
$$= \frac{1}{N}\left| -2\alpha\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} + \alpha^2 \frac{1-\alpha^2)^N}{1-\alpha^2}\right|$$
$$\leq \frac{1}{N}\left(2\alpha\frac{1}{1-\alpha} + \alpha^2\frac{1}{1-\alpha^2}\right)$$
$$\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Also konvergiert $\beta^{(N)}$ gegen 1 für N gegen unendlich. Damit konvergiert $a_2^{(N)}$ gegen $-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\cdot(1-\alpha)^2}$ für N gegen unendlich.

Die Berechnung der weiteren Koeffizienten erfordert die Berücksichtigung von immer mehr Termen, sodass eine einfache explizite Formel für diese Koeffizienten nicht existiert. Man kann die Terme aber geeignet zusammenfassen, sodass sich dann ein Grenzwert für die Koeffizienten bestimmen lässt.

1. Fall: Sei $m \geq 3$ ungerade, also $m = 2M + 1$ für ein $M \in \mathbb{N}$. Beim Ausmultiplizieren von (*) ergeben sich für alle $j_1, ..., j_N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{N} j_k = m$ Terme der Ordnung t^m. Alle

Kombinationen, in denen mindestens ein j_k gleich 1 ist, können wir vernachlässigen, weil die zugehörigen Terme ein $\mathbb{E}(\varepsilon_1^{(N)})$ enthalten. Es bleiben also nur Kombinationen übrig, bei denen alle bis auf höchstens M der $j_1,...,j_N$ gleich 0 sind. Es gibt (für N groß genug, sonst sind es noch weniger) genau $\binom{N}{M}$ Möglichkeiten, M verschiedene Indizes der $j_1,...,j_N$ auszuwählen. Dies sind weniger als $\frac{N^M}{M!}$ Möglichkeiten. Die Anzahl der Indexkombinationen, bei denen genau $1 \leq p < M$ der $j_1,...,j_N$ gleich 0 sind, ist $\binom{N}{p}$, was für hinreichend große N ($N \geq m$) kleiner als $\binom{N}{M}$, also auch wieder kleiner als $\frac{N^M}{M!}$ ist.
Für jedes $1 \leq p \leq M$ und feste $j_{b_1},...,j_{b_p}$ gibt es mehrere Möglichkeiten, die $j_{b_1},...,j_{b_p}$ so zu wählen, dass deren Summe m ist. Da jedes j_{b_k} größer oder gleich 2 sein soll, bleiben noch $m-2p$ übrig, die beliebig auf die p Indizes verteilt werden können. Dazu gibt es $\binom{(m-2p)+p-1}{m-2p} = \binom{m-p-1}{m-2p}$ Möglichkeiten. Dies lässt sich für alle p abschätzen durch
$\binom{m-p-1}{m-2p} \leq \binom{m-3}{\frac{m-3}{2}} = \binom{2(M-1)}{M-1} \leq 2(M-1)!$
Insgesamt ergibt sich also:

$$
\begin{aligned}
|a_m^{(N)}| &\leq M\frac{N^M}{M!}2(M-1)! \max_{\sum\limits_{k=1}^{N} j_k=m} \{|\prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})|\} \\
&\leq 2N^M \max_{\sum\limits_{k=1}^{N} j_k=m} \{\prod_{l=1}^{N} \frac{(\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}|\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})|\} \\
&\leq 2N^M \max_{\sum\limits_{k=1}^{N} j_k=m} \{\prod_{l=1}^{N} \frac{(\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}(\frac{d}{\sqrt{N}})^{j_l}\} \\
&\leq 2N^M \max_{\sum\limits_{k=1}^{N} j_k=m} \{\prod_{l=1}^{N} \frac{(\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}\}\frac{d^m}{N^{\frac{m}{2}}} \\
&\leq 2N^M \frac{1}{(1-\alpha)^m}\frac{d^m}{N^{M+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}2d^m\frac{1}{(1-\alpha)^m} \\
&\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

Also konvergiert $a_m^{(N)}$ für alle ungeraden m gegen 0.

2. Fall: Sei $m > 2$ gerade, also $m = 2M$ für ein $M \in \mathbb{N}$. Wie im ersten Fall suchen wir nach allen Kombinationen mit $\sum\limits_{k=1}^{N} j_k = m$ und $j_k \neq 1$ für alle k=1,...,N. Ähnlich wie im ersten Fall lassen sich alle Terme, bei denen höchstens $M-1$ der Indizes ungleich 0 sind, zu einer Summe zusammenfassen, die gegen 0 konvergiert: Für jedes $1 \leq p \leq M-1$ gibt es wieder $\binom{N}{p}$ Möglichkeiten, p verschiedene Indizes auszuwählen und dann jeweils $\binom{m-p-1}{m-2p}$ verschiedene Kombinationen, bei denen die Summe der $j_1,...,j_N$ gleich m ist und alle $j_{b_1},...,j_{b_p}$ größer oder gleich 2 sind. Diese beiden Faktoren lassen sich wieder (für N genügend groß) durch

$\frac{N^{M-1}}{(M-1)!}$ bzw. $2(M-1)!$ abschätzen. Damit gilt (mit $\sqrt{N} \geq M$):

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l = m \\ |\{l: j_l \neq 0\}| < M}} \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})| \\
&\leq (M-1)\frac{N^{M-1}}{(M-1)!} 2(M-1)! \max_{\sum_{k=1}^{N} j_k = m} \{|\prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})|\} \\
&\leq (M-1)\frac{N^{M-\frac{1}{2}}}{M!} 2(M-1)! \max_{\sum_{k=1}^{N} j_k = m} \{\prod_{l=1}^{N} \frac{(\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} |\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})|\} \\
&\leq 2N^{M-\frac{1}{2}} \max_{\sum_{k=1}^{N} j_k = m} \{\prod_{l=1}^{N} \frac{(\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} (\frac{d}{\sqrt{N}})^{j_l}\} \\
&\leq 2N^{M-\frac{1}{2}} \max_{\sum_{k=1}^{N} j_k = m} \{\prod_{l=1}^{N} \frac{(\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}\} \frac{d^m}{N^{\frac{m}{2}}} \\
&\leq 2N^{M-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-\alpha)^m} \frac{d^m}{N^M} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} 2d^m \frac{1}{(1-\alpha)^m} \\
&\xrightarrow{N\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

Somit bleiben nur noch die Kombinationen übrig, bei denen genau M der $j_1, ..., j_N$ ungleich 0 sind. In diesem Fall müssen diejenigen Indizes gleich 2 sein, weil wir den Fall, dass ein Index gleich 1 ist, ausgeschlossen haben, und im Falle eines Indexes größer als 2 die Summe der Indizes größer als m wäre. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l = m \\ |\{l: j_l \neq 0\}| = M \\ j_l \neq 1 \quad \forall\, l = 1,...,N}} \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} \mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l}) \\
&= (\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^2))^M \sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l = m \\ |\{l: j_l \neq 0\}| = M \\ j_l \neq 1 \quad \forall\, l = 1,...,N}} \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!} \\
&= (\frac{1}{N}\sigma_\varepsilon^2)^M \cdot \frac{1}{2^M} \sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l = m \\ |\{l: j_l \neq 0\}| = M \\ j_l \neq 1 \quad \forall\, l = 1,...,N}} \prod_{l=1}^{N} (i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l} \\
&= (\frac{1}{N}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2})^M \cdot i^{2M} \frac{1}{(1-\alpha)^{2M}} \sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l = m \\ |\{l: j_l \neq 0\}| = M \\ j_l \neq 1 \quad \forall\, l = 1,...,N}} \prod_{l=1}^{N} (1-\alpha^{N-l+1})^{j_l} \\
&= (-\frac{1}{N}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \sum_{1 \leq l_1 < ... < l_M \leq N} \prod_{k=1}^{M} (1-\alpha^{N-l_k+1})^2
\end{aligned}
$$

$$= (-\tfrac{1}{N}\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!} \sum_{\substack{1\le l_1,\dots,l_M\le N \\ l_k\ne l_{k'} \quad \forall\, k\ne k'}} \prod_{k=1}^{M} (1-\alpha^{N-l_k+1})^2$$

Die Summe ist leichter umzuformen, wenn man die Bedingung ($l_k \neq l_{k'} \quad \forall\, k \neq k'$) weglässt. Die Anzahl der Summanden, die in diesem Fall hinzukommen, ist von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{M-1})$. Da die Summanden selber immer betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sind, ist also die Summe der hinzugefügten Terme ebenfalls $\mathcal{O}(N^{M-1})$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
&= (-\tfrac{1}{N}\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}((\sum_{1\le l_1,\dots,l_M\le N} \prod_{k=1}^{M}(1-\alpha^{N-l_k+1})^2) \quad + \quad \mathcal{O}(N^{M-1}))\\
&= (-\tfrac{1}{N}\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}\prod_{k=1}^{M}(\sum_{l_k=1}^{N}(1-\alpha^{N-l_k+1})^2) \quad + \quad \mathcal{O}(\tfrac{1}{N})\\
&= (-\tfrac{1}{N}\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}(\sum_{l=1}^{N}(1-\alpha^{N-l+1})^2)^M \quad + \quad \mathcal{O}(\tfrac{1}{N})\\
&= (-\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}\underbrace{(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}(1-\alpha^{N-l+1})^2)^M}_{=\beta^{(N)}} \quad + \quad \mathcal{O}(\tfrac{1}{N})
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $a_2^{(N)}$ haben wir bereits gesehen, dass $\beta^{(N)}$ gegen 1 konvergiert. Damit können wir nun einen Grenzwert für a_m bestimmen:

$$\begin{aligned}
a_m &= \sum_{\sum_{l=1}^{N} j_l=m} \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})\\
&= \sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l=m \\ |\{l: j_l\neq 0\}|<M \\ j_l\neq 1 \quad \forall\, l=1,\dots,N}} \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l}) + \sum_{\substack{\sum_{l=1}^{N} j_l=m \\ |\{l: j_l\neq 0\}|=M \\ j_l\neq 1 \quad \forall\, l=1,\dots,N}} \prod_{l=1}^{N} \frac{(i\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha})^{j_l}}{j_l!}\mathbb{E}((\varepsilon_1^{(N)})^{j_l})\\
&= \mathcal{O}(\tfrac{1}{\sqrt{N}}) \quad + (-\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}(\beta^{(N)})^M \quad + \mathcal{O}(\tfrac{1}{N})\\
&\xrightarrow{N\to\infty} (-\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}
\end{aligned}$$

Nachdem wir nun die Grenzwerte für die Koeffizienten bestimmt haben, können wir den Grenzwert für die charakteristische Funktion von $\ln(S_N^{(N)})$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\ln S_N^{(N)}}(t)\\
&= \mathbb{E}(e^{it\alpha\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}R_0^{(N)}}) \cdot \prod_{l=1}^{N}\mathbb{E}(e^{it\frac{1-\alpha^{N-l+1}}{1-\alpha}\varepsilon_l^{(N)}})\\
&= \mathbb{E}(e^{it\alpha\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}R_0^{(N)}}) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(N)} t^m\\
&\xrightarrow{N\to\infty} 1 \cdot \sum_{M=0}^{\infty}(-\tfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2})^M \cdot \tfrac{1}{M!}\cdot t^{2M}\\
&= \sum_{M=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2}\cdot t^2)^M}{M!}
\end{aligned}$$

$= e^{-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2} \cdot t^2}$

Die charakteristische Funktion von $\ln(S_N^{(N)})$ konvergiert also gegen die charakteristische Funktion einer normalverteilten Zufallsvariablen mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2}$. Nach dem Stetigkeitssatz von Lévy-Cramér konvergiert also $\ln(S_N^{(N)})$ in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit den genannten Parametern.

Nun stellt sich die Frage, welche Parameter das Black-Scholes Modell hat, gegen dessen Kurs S_T die Folge$(S_N^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert. In einem Black-Scholes Modell mit den Parametern μ und σ^2 gilt

$$\ln S_T = (\mu T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T) + \sigma W_T$$

mit einem Wiener Prozess W_T. Also ist $\ln S_T$ normalverteilt mit den Parametern $\mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ und $\sigma^2 T$. Um die Frage von eben zu beantworten, muss man nur das folgende Gleichungssystem lösen:

$$1)\ 0 = \mu T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T$$

$$2) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2} = \sigma^2 T$$

Löst man dies nach μ und σ^2 auf, ergibt sich:

$$\mu = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2T(1-\alpha)^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T(1-\alpha)^2}$$

Folglich gilt:

Satz 10: Unter den obigen Voraussetzungen konvergiert $(S_N^{(N)})$ in Verteilung gegen den Kurs S_T eines Black-Scholes Modells mit den Parametern $\mu = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2T(1-\alpha)^2}$ und $\sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T(1-\alpha)^2}$.

Wie leicht zu sehen, lässt sich mit der bisherigen Methode nur einer der beiden Parameter μ und σ^2 durch die Parameter σ_ε^2 und α regulieren. Um auch den Kurs S_T eines Black-Scholes Modells mit beliebigen μ und ^{2} approximieren zu können, müssen wir die am Anfang dieses Kapitels gewählten Voraussetzungen etwas modifizieren:

Corollar 11: Für alle $N \in \mathbb{N}$ sei $(\ln(1+R_k^{(N)}) - z^{(N)})_{k=1,\dots,N}$ ein autoregressiver Prozess erster Ordnung, d.h. für festes N gelte:

$$\ln(1+R_1^{(N)}) - z^{(N)} = \alpha \cdot R_0^{(N)}$$

$$\ln(1+R_k^{(N)}) - z^{(N)} = \alpha \cdot \ln(1+R_{k-1}^{(N)}) + \varepsilon_k^{(N)} \quad \forall\, k > 1$$

Dabei sei $(z^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim\limits_{N \to \infty} N \cdot z^{(N)} = r$ für eine reelle Konstante r. Alle weiteren Voraussetzungen seien wie vorhin (insbesondere $|\alpha| < 1$, $\mathbb{E}(R_0^{(N)}) = 0$). Dann konvergiert $(S_N^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen den Kurs S_T eines Black-Scholes Modells mit den Parametern

$\mu = \frac{r}{T} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2T(1-\alpha)^2}$ und

$\sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T(1-\alpha)^2}$

Anmerkung: Dass $(\ln(1+R_k^{(N)})-z^{(N)})_{k=1,\dots,N}$ ein AR(1)-Prozess ist, bedeutet, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\ln(1+R_k^{(N)}) &= \alpha\cdot(\ln(1+R_{k-1}^{(N)})-z^{(N)})+\varepsilon_k^{(N)}+z^{(N)}\\ &= \alpha\cdot\ln(1+R_{k-1}^{(N)})+\varepsilon_k^{(N)}+(1-\alpha)\cdot z^{(N)}\end{aligned}$$

Beweis von Corollar 11:

$$\begin{aligned}\ln S_N^{(N)} &= \sum_{k=1}^{N}\ln(1+R_k^{(N)})\\ &= \sum_{k=1}^{N}(z^{(N)}+\ln(1+R_k^{(N)})-z^{(N)})\\ &= \underbrace{N\cdot z^{(N)}}_{\to r} \quad +\sum_{k=1}^{N}(\ln(1+r_k^{(N)})-z^{(N)})\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert nach Voraussetzung gegen r, der zweite Summand konvergiert, wie wir bereits wissen, in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern $\mu=0$ und $\sigma^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2}$. Damit konvergiert die Summe in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu=r$ und gleicher Varianz. Wie vorhin ergibt sich ein Gleichungssystem für die Parameter des Black-Scholes Modells:

1) $r=\mu T-\frac{1}{2}\sigma^2 T$

2) $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2}=\sigma^2 T$

Löst man dies nach μ und σ^2 auf, so ergibt sich:

$\mu=\frac{r}{T}+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2T(1-\alpha)^2}$

$\sigma^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{T(1-\alpha)^2}$ □

Hat man andersherum ein Black-Scholes Modell mit den Parametern μ und σ^2 gegeben und möchte ein approximierendes Modell nach obigem Schema konstruieren, so wählt man die die Parameter σ_ε^2 und α so, dass gilt

$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2}=\sigma^2 T$

und den Grenzwert r als

$r=\mu T-\frac{1}{2}\sigma^2 T$

(Beweis: siehe vorangegangene Rechnungen)

7. Zusammenfassung/Ausblick

Wir haben gesehen, dass man den Kurs eines Black-Scholes Modells zum Endzeitpunkt durch zeitdiskrete Modelle mit unabhängigen Returns approximieren kann, sofern diese Modelle die Voraussetzungen aus Kapitel 2 erfüllen. Ferner wurde gezeigt, dass sogar bestimmte Modelle mit abhängigen Returns die gleiche approximierende Eigenschaft besitzen, weil sich der Einfluss der Abhängigkeit mit größer werdendem N immer weiter abschwächt. Dem Effekt, dass sich der Einfluss der Abhängigkeit immer weiter verkleinert, kann man entgegentreten, indem man das α ebenfalls von N abhängig macht, z.B. in der Form $\alpha = e^{-c\frac{1}{N}}$ mit einer positiven Konstante c. Ob, und wenn ja, gegen welche Verteilung $S_N^{(N)}$ in diesem Fall konvergiert, ist eine Aufgabe, die ich in Zukunft noch untersuchen kann. Desweiteren wäre es interessant zu erforschen, welche Abhängigkeiten der Returns außer den bereits behandelten AR(1)-Prozessen ebenfalls eine Approximation des Black-Scholes Modells ermöglichen.

In der gesamten Arbeit wurde als Approximationsmerkmal nur die Konvergenz der eindimensionalen Randverteilung zum Zeitpunkt T betrachtet. Unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen an die einzelnen $R_k^{(N)}$ (z.B. dass die Varianzen von $R_k^{(N)}$ und $R_l^{(N)}$ für beliebige k und l gleich sind, eventuell gehen auch schwächere Bedingungen) lässt sich mit Hilfe des Invarianzprinzips von Donsker relativ leicht auch zeigen, dass der gesamte Prozess im diskreten Modell mit unabhängigen Returns gegen das Black-Scholes Modell konvergiert. Zu untersuchen wäre nun, wie weit man diese zusätzlichen Bedingungen abschwächen kann und ob auch diskrete Modelle mit abhängigen Returns gegen ein Black-Scholes Modell konvergieren können.

A. Anhang

A.1. Zentraler Grenzwertsatz

(aus [1])
Satz A.1: Für alle $N \in \mathbb{N}$ seien $Z_1^{(N)},...,Z_N^{(N)}$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_N, \mathscr{F}_N, P_N)$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert eine reelle Folge $(\gamma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $\gamma_N \to 0$ und $|Z_k^{(N)}| \leq \gamma_N \quad P_N$-fast sicher
- $\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_N Z_k^{(N)} \to m$
- $\sum_{k=1}^{N} var_N(Z_k^{(N)}) \to \sigma^2$

Dann konvergieren die Verteilungen von $\sum_{k=1}^{N} Z_k^{(N)}$ schwach gegen die Normalverteilung mit den Parametern m und σ^2.

A.2. Portmanteau-Theorem

(aus [1])
Für den Beweis von Satz 4 (und Lemma 5) werden Teile des Portmanteau-Theorems benötigt. Diese hier aufgeführten Teilaussagen wurden aus dem Buch Stochastical Finance von Föllmer/Schied, Theorem A.39, entnommen.
A.2 Portmanteau-Theorem (Auszug): Für nichtnegative, endliche Maße $\mu, \mu_1, \mu_2, ...$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(a) Die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ.
(b) $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ für jede beschränkte, messbare und μ-fast überall
stetige Funktion f.
(c) $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ für jede beschränkte und (überall) stetige Funktion f.

B. Literaturverzeichnis

[1] Hans Föllmer/Alexander Schied: Stochastic Finance. 3. Auflage. Berlin: De Gruyter, 2011 (Seiten 302-309; Anhang Seiten 498-500)

[2] Technische Universität Dortmund: http://www.statistik.tu-dortmund.de/~fried/Zeitreihen/Kapitel4-AR_Prozesse.pdf (Seite 65) [Stand: 31.07.2011]

[3] Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Charakteristische_Funktion_(Stochastik) [Stand: 31.07.2011]

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig, ohne fremde Hilfe angefertigt worden ist. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen worden sind, wurden als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum Unterschrift