



# PDE METHODEN ZUR BEWERTUNG VON FINANZDERIVATEN

BACHELORARBEIT

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:  
*PD Dr. Volkert Paulsen*

Eingereicht von:  
*Erik Santen*

Münster, 8. August 2011

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Erik Santen, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst programmiert worden.

Münster, 08. August 2011

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Stochastische Analysis</b>	<b>6</b>
2.1	Das stochastische Integral und die Itô Formel . . . . .	6
2.2	Grundlagen stochastischer Prozesse . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Zusammenhang zwischen stochastischen Prozessen und partiellen Differentialgleichungen</b>	<b>12</b>
3.1	Die Feynman-Kac Formel . . . . .	12
3.2	Klassifikation von PDEs . . . . .	15
3.3	Transformation der Black-Scholes PDE in die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Numerische Approximation</b>	<b>19</b>
4.1	Diskretisierung . . . . .	19
4.2	Finite Differenzen . . . . .	19
4.3	Gitter/Raster . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Methoden zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen</b>	<b>22</b>
5.1	Explizite Methode . . . . .	22
5.2	Implizite Methode . . . . .	23
5.3	Crank-Nicolson Methode . . . . .	25
5.4	Eigenschaften der Methoden . . . . .	26
5.5	Finite Differenzen für generelle parabolische PDEs . . . . .	27
5.6	Anwendung der Methoden auf die Black-Scholes PDE . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Asiatische Optionen</b>	<b>33</b>
6.1	Hintergrund . . . . .	33
6.2	Herleitung der PDE für Asiatische Optionen . . . . .	34
6.3	Bewertung einer Asiatischen Option unter zeitstetiger Beobachtung	35
6.4	Bewertung einer Asiatischen Option unter zeitdiskreter Beobachtung	42
6.5	Ergebnisse und Vergleich mit anderen Methoden . . . . .	44
6.6	Put-Call Parität Asiatischer Optionen . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>48</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>49</b>
8.1	Quellcodes ausgewählter Programme zur Bewertung Asiatischer Optionen . . . . .	49
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>57</b>

# 1 Einleitung

Nicht erst seit der Finanzkrise ab 2007 wird deutlich, dass ein genaues Verständnis komplexer Finanzprodukte von großer Bedeutung ist und es zu großen Schwierigkeiten bei falschem spekulativen Einsatz komplexer Finanzobjekte kommen kann. Finanzderivate sind in den letzten Jahren zu einem wichtigen Werkzeug zur Minderung und Absicherung von Risiken in der Finanzwelt geworden. Das große Problem besteht dabei in der fairen Bewertung der Finanzinstrumente, die auf moderne mathematische Methoden zurückgreift.

Basierend auf den Ideen von Black und Scholes wird durch stochastische Methoden die Untersuchung von finanzwirtschaftlichen Problemen in zeitstetigen Märkten modelliert. Aktienpreisentwicklungen können mit Hilfe von so genannter Brownscher Bewegung und damit zusammenhängenden stochastischen Prozessen dargestellt und simuliert werden. Im Black-Scholes Modell sind einige Finanzderivate explizit bewertbar. Für komplexere Modelle existieren jedoch keine konkreten Lösungen und die entstandenen Gleichungen zur Ermittlung einer Bewertung des Objektes müssen numerisch gelöst werden. Für die Bewertung solcher Finanzobjekte gibt es grob aufgeteilt drei Klassen von Methoden: Binomialmethoden, Monte-Carlo Simulationen sowie numerische Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Bewertung von Finanzderivaten unter Benutzung partieller Differentialgleichungen. Zur Herleitung und zum Verständnis der auftretenden Probleme bedarf es einiger Vorbereitung und Erklärung der wichtigen Eigenschaften von Itô-Integralen und der Itô-Formel. Dazu werden wichtige Objekte wie Brownsche Bewegung, oft auch Wiener Prozess genannt, Martingale und grundlegende Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie mit zugehörigen Begriffen wie Filtration oder adaptierten Prozessen als bekannt vorausgesetzt. Des Weiteren werden einige Aspekte der Martingalthorie zur Untersuchung von stochastischen Prozessen in stetiger Zeit benötigt. Daher werden in den ersten Kapiteln der Arbeit einige Grundlagen der stochastischen Analysis und Martingalthorie gegeben, die zum weiteren Verständnis vonnöten sind.

Versucht man Derivate in zeitstetigen Finanzmarktmodellen zu bewerten, so führt dies mit Hilfe der Feynman-Kac Formel auf eine partielle Differentialgleichung. Daher werden aufbauend auf die zu Beginn in den ersten Kapiteln gegebenen Grundlagen der stochastischen Analysis, zunächst wichtige Hilfsmittel und Zusammenhänge vorgestellt, um dann im Anschluss daran die Feynman-Kac Formel anzugeben und zu beweisen.

So entstandene partielle Differentialgleichungen werden dann im Lichte der Finanzmathematik dargestellt und es wird deutlich gemacht, wie diese partielle Differentialgleichung im Black-Scholes Kontext auf die bekannte Wärmeleitungsgleichung zurückgeführt werden kann.

Da die auftretende partielle Differentialgleichung in komplexern Modellen oftmals nur numerisch lösbar ist, werden im Weiteren ausgehend von der Wärmeleitungsgleichung einige numerische Methoden vorgestellt, mit deren Hilfe das auftretende Problem approximativ gelöst werden kann. Diese Methoden werden bezüglich der Vor- und Nachteile miteinander verglichen und so ein Fazit gewonnen. Es wird

dargestellt wie diese numerischen Verfahren auf allgemeine parabolische partielle Differentialgleichungen angewandt werden können.

Eine nicht explizit bewertbare Option ist die Asiatische Option. Bei diesem Finanzderivat handelt es sich um eine Option, die nicht nur abhängig ist vom Kurs des Underlyings zum Zeitpunkt der Maturity, sondern einen Mittelwert über alle erreichten Aktienkurse in einem bestimmten Zeitraum berücksichtigt. Die Auszahlung bei Ausübung hängt somit von der Differenz zwischen dem errechneten Mittelwert und dem Strike Preis ab. Die Methode der partiellen Differentialgleichungen ist in der in der Arbeit dargestellten Form bei solchen pfadabhängigen Optionen nicht anwendbar und es bedarf einer Modifikation. Durch Einführung einer neuen Variablen kann man durch Vorgehensweise wie in der Feynman-Kac Formel eine partielle Differentialgleichung zur Bewertung dieser Option erhalten. Jedoch ist diese partielle Differentialgleichung in der Form abhängig von drei Variablen und die dargestellten numerischen Methoden zur Lösung eines solchen Problems sind nicht anwendbar. Durch einen Wechsel des Numéraires kann man jedoch bei Betrachtung Asiatischer Optionen eine zweidimensionale partielle Differentialgleichung mit Randbedingungen herleiten und diese dann mit den in dieser Arbeit dargestellten numerischen Methoden lösen. Die Herleitung dieser partiellen Differentialgleichung wird sowohl für die Betrachtung Asiatischer Optionen bei stetiger Mittelwertbildung, als auch im Fall eines diskret berechneten Mittelwertes dargestellt und es werden Preise verschiedener Asiatischer Optionen berechnet und mit denen anderer Methoden verglichen.

In einem letzten Kapitel wird ein kurzer Ausblick über offen gebliebene Fragestellungen und weitere Vertiefungsmöglichkeiten gegeben und ein Fazit über gewonnene Ergebnisse der Arbeit dargestellt.

## 2 Stochastische Analysis

### 2.1 Das stochastische Integral und die Itô Formel

Um Finanzmärkte in stetiger Zeit modellieren zu können, bedient man sich der Brownschen Bewegung und damit zusammenhängenden stochastischen Differentialgleichungen (im Folgenden abgekürzt mit SDE), durch die der Verlauf des Aktienpreises beschrieben wird. Zur Behandlung und Untersuchung von Modellen dieser Art, wurden von Itô einige Regeln und Gesetze entwickelt, die im Weiteren als bekannt vorausgesetzt werden und daher an dieser Stelle noch einmal ohne Beweis genannt werden. Dabei wird mit  $W_t$  immer eine Brownsche Bewegung bezeichnet und  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  sei die vom Prozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  erzeugte Filtration. Des Weiteren setzen wir voraus, dass ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vorhanden ist. Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \geq 0}$  definiert auf diesem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum. Hierbei ist für jedes feste  $t \geq 0$  die Zufallsvariable  $X_t(\omega)$  mit  $\omega \in \Omega$  definiert. Statt  $(X_t)_{t \geq 0}$  werden wir für einen Prozess oftmals verkürzend nur  $(X_t)_t$  oder einfach  $X_t$  schreiben. Auch werden wir statt  $X_t$  oftmals die Schreibweise  $X(t)$  verwenden.

#### **Definition 2.1.** Der Raum $\mathcal{L}^2$

Mit  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2[a, b]$  bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

für die gilt:

- (i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  ist  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$  messbar
- (ii)  $f(t, \omega)$  ist  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert
- (iii)  $\mathbb{E} \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt < \infty$

#### **Definition 2.2.** Elementarfunktion

Eine Funktion  $g$  aus  $\mathcal{L}^2$  wird Elementarfunktion genannt, wenn für sie gilt:

$$g(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

Hierbei gilt  $e_j(\omega) = e(t_j, \omega)$  und es existieren Zeitpunkte  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , so dass für fest gewähltes  $\omega \in \Omega$  die Funktion  $e(t, \omega)$  konstant ist in jedem Intervall  $[t_k, t_{k+1})$ .

Für diese Funktionen ist ein Integral bezüglich  $dW_t(\omega)$ , wobei  $W_t$  eine Brownsche Bewegung ist, wie folgt definiert:

$$\int_a^b g(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega),$$

wobei  $e_j \mathcal{F}_{t_j}$ -messbar ist.

Im Folgenden werden wir statt  $dW_t(\omega)$  nur noch  $dW_t$  schreiben. Es werden einige Grundlagen vorausgesetzt, die wir daher im Folgenden angeben wollen. Für eine genauere Herleitung verweisen wir auf [4], Kapitel 3.

**Definition 2.3.** Das Itô Integral

Sei  $f$  aus  $\mathcal{L}^2[a, b]$ . Dann ist das Ito Integral von  $f$  definiert durch:

$$\int_a^b f(t, \omega) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t, \omega) dW_t,$$

wobei  $g_n$  eine Folge von Elementarfunktionen ist, so dass  $\mathbb{E}[\int_a^b (f(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt] \rightarrow 0$  wenn  $n \rightarrow \infty$ .

Neben dem Itô Integral ist vor allem die Itô Formel ein zentraler Gegenstand in der stochastischen Analysis. Wir werden diese daher allgemein angeben. Zunächst einmal benötigen wir jedoch eine im weiteren Verlauf verwendete spezielle Art von stochastischen Prozessen. Bevor wir diese angeben können, benötigen wir jedoch noch eine Klasse von Prozessen.

**Definition 2.4.** Mit  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$  bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen  $f(t, \omega)$  in  $\mathbb{R}$ , die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  ist  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$  messbar, wobei  $\mathcal{B}$  die Borel  $\sigma$ -Algebra auf  $[0, \infty]$  bezeichnet.
- (ii) es existiert eine wachsende Familie von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{H}_t, t \geq 0$ , so dass
  - (a)  $W_t$  ist ein Martingal im Bezug auf  $\mathcal{H}_t$
  - (b)  $f_t$  ist  $\mathcal{H}_t$ -adaptiert
- (iii)  $P[\int_S^T f(s, \omega)^2 ds < \infty] = 1$

Weiterhin definieren wir  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \bigcap_{T \geq 0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$ .

**Definition 2.5.** Itô-Prozess

Sei  $W_t, t \geq 0$  eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Ein eindimensionaler Itô-Prozess ist ein stochastischer Prozess  $(X_t)_t$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s.$$

In Differentialschreibweise wird diese Gleichung oftmals geschrieben als:

$$dX_t = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dW_t$$

Hierbei ist  $v$  aus dem Raum  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ , so dass

$$P[\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \quad \forall t \geq 0] = 1.$$

Weiterhin sei angenommen, dass  $u$   $\mathcal{H}_t$ -adaptiert ist und es gilt

$$P[\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \quad \forall t \geq 0] = 1.$$

Um nun im Folgenden die Itô-Formel angeben zu können, benötigen wir zunächst die Begriffe der quadratischen Variation und der quadratischen Kovariation. Wir werden dabei auf Beweise verzichten und verweisen auf [9] und [10].

**Definition 2.6.** Quadratische Variation und quadratische Kovariation

Sei  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiger stochastischer Prozess für den der im Folgenden definierte Limes existiert. Dann ist der quadratische Variationsprozess  $\langle X, X \rangle_t$  des Prozesses  $X_t$  definiert durch

$$\langle X, X \rangle_t(\omega) = \lim_{\delta_{t_k} \rightarrow 0} \sum_{t_k < t} |X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)|^2.$$

Mit dem Limes ist hier der Limes in Wahrscheinlichkeit gemeint und es gelte  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$  und  $\delta_{t_k} = t_{k+1} - t_k$ .

Für zwei stochastische Prozesse  $X_i(t)$  und  $X_j(t)$  ist der quadratische Kovariationsprozess  $\langle X_i, X_j \rangle_t$  definiert durch

$$\langle X_i, X_j \rangle_t(\omega) = \lim_{\delta_{t_k} \rightarrow 0} \sum_{t_k < t} (|X_i(t_{k+1})(\omega) - X_i(t_k)(\omega)|)(|X_j(t_{k+1})(\omega) - X_j(t_k)(\omega)|).$$

Es gilt der Zusammenhang

$$\langle X_i, X_j \rangle_t = \frac{1}{4} [\langle X_i + X_j, X_i + X_j \rangle_t - \langle X_i - X_j, X_i - X_j \rangle_t]$$

Für die Brownsche Bewegung ergeben sich einige wichtige Eigenschaften im Bezug auf quadratische Variation und Kovariation.

**Theorem 2.7.** Für Brownsche Bewegungen  $W_i(t)$  und  $W_j(t)$  gelten die Eigenschaften:

- (i)  $\langle W_i, W_i \rangle_t = t$  fast sicher
- (ii)  $\langle W_i, W_j \rangle_t = \delta_{ij}t$  fast sicher

Hierbei bezeichnet  $\delta_{i,j}$  das Kronecker-Delta. Für einen Itô-Prozess wie er in 2.5 definiert ist, gilt:

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t v(s, \omega)^2 ds$$

Hieraus ergibt sich

$$d\langle X, X \rangle_t = v(t, \omega)^2 dt.$$

Weiterhin gilt für Prozesse  $Y_t$  mit beschränkter Variation und wie man zeigen kann daher auch für alle stetig differenzierbaren Funktionen:  $\langle W, Y \rangle_t = 0$  und  $\langle Y, Y \rangle_t = 0$ .

Kommen wir nun aufbauend auf diese Eigenschaften zur bekannten Itô Formel.

**Theorem 2.8.** Die Itô Formel

Sei  $X_t, t \geq 0$  ein Itô-Prozess gegeben durch

$$dX_t = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t.$$

Sei  $g(t, x)$  aus  $\mathcal{C}^{1,2}$ . Dann ist der Prozess  $Y_t = g(t, X_t)$  wieder ein Itô-Prozess und es gilt

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X, X \rangle_t$$

wobei  $\langle X, X \rangle_t$  die quadratische Variation von  $X_t$  angibt.



Die mehrdimensionale Version dieser Formel lautet:

**Theorem 2.9. Mehrdimensionale Itô Formel**

Sei  $X_t$  ein  $n$ -dimensionaler Itô-Prozess. Die  $i$ -te Komponente von  $X_t$  sei gegeben durch  $dX_i(t) = u_i(t, \omega)dt + \sum_{j=1}^m v_{i,j}(t, \omega)dW_j(t)$  mit  $X_t = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}$ ,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix} \text{ und } dW_t = \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{pmatrix}, \text{ wobei } u \text{ und } v$$

die Bedingungen aus 2.8 erfüllen. Sei weiter  $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x)) \in \mathcal{C}^{1,2}$  eine Abbildung von  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^p$ . Dann ist der Prozess  $Y(t, \omega) = g(t, X_t)$  wieder ein Itô-Prozess, dessen  $k$ -te Komponente  $Y_k$  gegeben ist durch

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)d\langle X_i, X_j \rangle_t$$

Ausgehend von diesen Grundlagen folgt nun eine kurze Anwendung, die wir in einem späteren Beweis noch benötigen werden.

**Anwendung 2.10. Produktregel von Itô**

Betrachten wir zwei Itô-Prozesse  $X_t$  und  $Y_t$ . Wir wollen nun die SDE finden dessen Lösung das Produkt  $X_t Y_t$  dieser beiden stochastischen Prozesse ist.

**Lösung.** Wir wenden die mehrdimensionale Itô Formel auf die Funktion  $f(t, X_t, Y_t) = X_t Y_t$  an und bemerken, dass die partiellen Ableitungen nach  $t$  immer 0 sind. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{\partial f}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} d\langle Y, Y \rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d\langle X, Y \rangle_t \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle X, Y \rangle_t \end{aligned}$$

Somit ist das Produkt der Prozesse  $X_t$  und  $Y_t$  Lösung der SDE

$$d(X_t Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle X, Y \rangle_t$$

**2.2 Grundlagen stochastischer Prozesse**

Aufbauend auf diesen Voraussetzungen, können wir nun einige weitere wichtige Grundlagen darstellen.

Wie auch in diskreten Modellen wird der Preis einer Option unter Benutzung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatzes wieder in Form eines diskontierten

bedingten Erwartungswertes der Auszahlungen zur Maturity  $T$  unter einem risikoneutralen Martingalmaß angegeben. Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Preis als Lösung einer partiellen Differentialgleichung (im Folgenden immer abgekürzt mit PDE) auszudrücken und diese PDE dann zu lösen. Der Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert und der zugehörigen PDE geht auf die Verbindung zwischen stochastischen Differentialgleichungen und partiellen Differentialgleichungen zurück und wird durch die Feynman-Kac Formel hergestellt. Daher werden im Folgenden einige weitere Grundlagen des Finanzmarktmodelles in stetiger Zeit dargestellt, um dann darauf aufbauend die Feynman-Kac Formel genauer zu beleuchten.

Zunächst geben wir einige wichtige Eigenschaften ohne Beweis an, für eine genauere Herleitung dieser Eigenschaften verweisen wir auf [4], Kapitel 3 und [7], Kapitel 4.

**Korollar 2.11.** Sei  $f(t, w)$  aus  $\mathcal{L}^2$ . Dann gilt:

- (i)  $\mathbb{E}[\int_a^b f(s, w)dW_s] = 0$
- (ii)  $\mathbb{E}[(\int_a^b f(s, w)dW_s)^2] = \mathbb{E}[\int_a^b f(s, w)^2 ds]$  (Itô-Isometrie)
- (iii)  $\int_a^b f(s, w)dW_s$  ist  $\mathcal{F}_b$ -messbar
- (iv)  $\mathbb{E}[\int_a^b f(s, w)dW_s \mid \mathcal{F}_a] = 0$

Hieraus ergibt sich dann eine weitere wichtige Eigenschaft.

**Korollar 2.12.** Sei  $f \in \mathcal{L}^2$ , dann ist der Prozess  $X_t$ , definiert durch  $X_t = \int_0^t f(s, w)dW_s$  ein  $\mathcal{F}_t$ -Martingal.

**Beweis.** Fixiere  $s$  und  $t$  mit  $s < t$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\int_0^t f(z, w)dW_z \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[\int_0^s f(z, w)dW_z \mid \mathcal{F}_s]}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{E}[\int_s^t f(z, w)dW_z \mid \mathcal{F}_s]}_{(2)} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass (1)  $\mathcal{F}_s$ -messbar ist und somit gilt  $\mathbb{E}[\int_0^s f(z, w)dW_z \mid \mathcal{F}_s] = \int_0^s f(z, w)dW_z$ . Weiterhin wissen wir nach dem vorherigen Korollar, dass für (2) gilt  $\mathbb{E}[\int_s^t f(z, w)dW_z \mid \mathcal{F}_s] = 0$ .

Daraus ergibt sich dann:

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \int_0^s f(z, w)dW_z = X_s.$$

□

Deutlich aufwändiger lässt sich folgendes Lemma zeigen. Wir verzichten daher an dieser Stelle auf einen Beweis und verweisen auf [7], Lemma 4.9 an:

**Lemma 2.13.** Sei  $f \in \mathcal{L}^2$ . Dann gilt:

Der Prozess  $(X_t)_t$  ist genau dann ein Martingal, wenn die zugehörige SDE von der Form  $dX_t = f(t, w)dW_t$  ist.

**Proposition 2.14.** Im Weiteren betrachten wir nun SDEs der Form

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit gegebenem Startwert  $X_0 = x_0$ .

Nach [7], Proposition 5.1 existiert eine eindeutige Lösung einer SDE der angegebenen Form, wenn es eine Konstante  $K$  gibt, so dass für alle  $t$  und für alle  $x, y$  gilt

$$\begin{aligned} \|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| &\leq K \|x - y\|, \\ \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| &\leq K \|x - y\|, \\ \|\mu(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| &\leq K(1 + \|x\|). \end{aligned}$$

Für die Lösung gelten dann die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $X_t$  ist  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert
- (ii)  $X_t$  hat stetige Pfade
- (iii)  $X_t$  ist ein Markov-Prozess

Kommen wir nun zurück zur Martingaleigenschaft eines Prozesses. Wie in Lemma 2.13 dargestellt, ist also ein Itô-Prozess genau dann ein Martingal, wenn er keinen  $dt$ -Term enthält. Dies wird auch in der partiellen Differentialgleichung, die wir mit Hilfe der Feynman-Kac Formel erhalten, deutlich. Für viele Anwendungen ist es dabei wichtig, einen partiellen Differentialoperator  $\mathcal{A}$  mit einem stochastischen Prozess  $X_t$  assoziieren zu können. Der Beweis für diesen Zusammenhang ist zu finden in [4], Lemma 7.3.2.

**Theorem 2.15.** Infinitesimaler Erzeuger eines Prozesses

Sei  $X_t$  ein Itô-Prozess der die SDE

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

erfüllt und sei  $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist der infinitesimale Erzeuger  $\mathcal{A}$  von  $X_t$  für eine Funktion  $f$  aus  $\mathcal{C}^{1,2}$  definiert durch

$$\mathcal{A}f(t, x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_i(t, x) \sigma_j(t, x)^T \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x).$$

Diesen infinitesimalen Erzeuger werden wir im Folgenden bei der schon erwähnten Feynman-Kac Formel, die einen Zusammenhang zwischen stochastischen Prozessen und PDEs herstellt, benutzen, wollen aber zunächst noch ein Beispiel angeben.

**Beispiel 2.16.** Betrachten wir die  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Sie genügt der SDE  $dX_t = dW_t$ . Somit gilt, dass  $\mu = 0$  und  $\sigma = I_n$  ( $n$ -dimensionale Einheitsmatrix) und man erhält:

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

wobei gilt, dass  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ .

Kommen wir aufbauend auf diesen Grundlagen nun im folgenden Kapitel zum Zusammenhang zwischen stochastischen Differentialgleichungen und zugehörigen partiellen Differentialgleichungen.

### 3 Zusammenhang zwischen stochastischen Prozessen und partiellen Differentialgleichungen

#### 3.1 Die Feynman-Kac Formel

Wie wir bereits wissen, ist der Preis eines europäischen Claims immer als bedingter Erwartungswert des diskontierten Payoffs unter dem risikoneutralen Maß  $P^*$  gegeben:

$$V(t) = \mathbb{E}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds} V(T) \mid \mathcal{F}_t]$$

Hierbei ist  $r(t)$  der risikolose Zinssatz zur Zeit  $t$ .

Wir wollen im Folgenden die Feynman-Kac Formel angeben und beweisen. Sie liefert eine PDE deren Lösung solch ein bedingter Erwartungswert ist und die somit den Preis eines Claims beschreibt. Danach werden wir die Feynman-Kac Formel explizit auf das Black-Scholes Modell anwenden.

Zunächst benötigen wir noch eine Definition, auf die in der Feynman-Kac Formel zurückgegriffen wird.

**Definition 3.1.** Betrachte einen Itô-Prozess gegeben durch die SDE

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Sei  $0 \leq t \leq T$  gegeben und sei  $\Phi(y)$  eine Borel-messbare Funktion. Mit

$$F(t, x) = \mathbb{E}^{t,x}[\Phi(X_T)]$$

bezeichnen wir den Erwartungswert von  $\Phi(X_T)$ , wobei  $X_T$  die Lösung der SDE mit Anfangsbedingung  $X_t = x$  ist. Wir nehmen hierbei an, dass  $\mathbb{E}^{t,x} |\Phi(X_T)| < \infty$ .

Weiterhin gilt nach [8], Kapitel 6.3 aufgrund der Markov Eigenschaft der Lösung einer wie in der vorherigen Definition angegebenen SDE:

**Theorem 3.2.** Sei  $X_u, u \geq 0$  eine Lösung der gegebenen SDE mit Anfangswert  $x_0$  gegeben zum Zeitpunkt 0. Dann gilt für  $0 \leq t \leq T$ :

$$\mathbb{E}[\Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = F(t, X_t).$$

Kommen wir nun zur Feynman-Kac Formel und dem zugehörigen Beweis.

**Theorem 3.3.** Feynman-Kac Formel

Sei  $X_t$  die stetige Lösung der SDE  $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$  mit  $0 \leq t \leq T$  und sei  $\mathcal{A}$  der zugehörige infinitesimale Erzeuger. Weiterhin sei  $\Phi(x)$  Borel-messbar und  $r(t)$  sei stetig und beschränkt. Dann genügt

$$F(t, x) = \mathbb{E}^{t,x}[e^{-\int_t^T r(u)du} \Phi(X_T)]$$

(wobei wir annehmen, dass  $\mathbb{E}^{t,x} |\Phi(X_T)| < \infty$  für alle  $t$  und  $x$ ) der PDE

$$-\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}F(t, x) - r(t)F(t, x) \quad , t \geq 0$$

mit

$$F(T, x) = \Phi(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis.** Sei  $X_t$  Lösung der SDE startend in  $t = 0$ . Dann gilt:

$$F(t, X_t) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r(u)du} \Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

Umgeformt ergibt dies die Gleichung

$$e^{-\int_0^t r(u)du} F(t, X_t) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r(u)du} \Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

Wir definieren nun

$$Z_t = e^{-\int_0^t r(u)du} F(t, X_t) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r(u)du} \Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

und können zeigen, dass dieser Prozess ein Martingal ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{-\int_0^t r(u)du} F(t, X_t) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-\int_0^T r(u)du} \Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] \\ &\stackrel{*}{=} \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r(u)du} \Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= e^{-\int_0^s r(u)du} F(s, X_s) \\ &= Z_s \end{aligned}$$

Hierbei wurde in \* die Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswertes benutzt. Wir wollen nun die SDE finden, die der Prozess  $Z_t$  erfüllt. Dieser Prozess ist ein Produkt der beiden Prozesse  $e^{-\int_0^t r(u)du}$  und  $F(t, X_t)$ . Durch Anwendung der Produktregel von Itô (siehe 2.10) erhält man:

$$dZ_t = (de^{-\int_0^t r(u)du})F(t, X_t) + e^{-\int_0^t r(u)du} dF(t, X_t)$$

Der Term mit der quadratischen Kovariation ist in diesem Fall 0, da es sich bei  $e^{-\int_0^t r(u)du}$  um eine stetig differenzierbare Funktion handelt. Weiterhin gilt:

$$(de^{-\int_0^t r(u)du})F(s, X_s) = -r(t)e^{-\int_0^t r(u)du} F(s, X_s)dt$$

Unter Anwendung der Itô-Formel ergibt sich zudem:

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X, X \rangle_t \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \mu(t, X_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt \\ &\quad + \sigma(t, X_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dW_t \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit insgesamt:

$$\begin{aligned}
dZ_t &= de^{-\int_0^t r(u)du} F(t, X_t) + e^{-\int_0^t r(u)du} dF(t, X_t) \\
&= e^{-\int_0^t r(u)du} [(-r(t)F(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \mu(t, X_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)) ds + \sigma(t, X_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dW_t] \\
&= e^{-\int_0^t r(u)du} [(-r(t)F(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \mathcal{A}F(t, X_t)) dt \\
&\quad + \sigma(t, X_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dW_t]
\end{aligned}$$

Damit der Prozess  $Z_t$  nun ein Martingal ist, muss nach 2.13 der  $dt$ -Term wegfallen und man erhält daher die Bedingung:

$$-r(t)F(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \mathcal{A}F(t, X_t) = 0.$$

Dafür muss also in jedem Punkt  $(t, x)$ , der durch  $(t, X_t)$  erreicht werden kann, gelten:

$$-\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}F(t, x) - r(t)F(t, x)$$

Weiterhin gilt für den Wert in der Maturity  $T$ :

$$\begin{aligned}
F(T, x) &= \mathbb{E}^{T,x} [e^{-\int_T^T r(u)du} \Phi(X_T)] \\
&= \mathbb{E}^{T,x} [\Phi(X_T)] = \Phi(x)
\end{aligned}$$

□

Wir haben so also durch die Feynman-Kac Formel einen Zusammenhang zwischen stochastischen Prozessen und PDEs hergestellt, der im Folgenden ausgenutzt wird, wobei wir die sich ergebende PDE genauer untersuchen werden.

Wir erhalten also letztendlich durch die Feynman-Kac Formel eine zu lösende partielle Differentialgleichung. Für einen europäischen Call mit Maturity  $T$ , Strike Preis  $K$ , konstanter Zinsrate  $r$  und zugrundeliegendem Prozess  $X_t$  gegeben durch  $dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t)$  erhalten wir zum Beispiel:

$$\partial_t F(t, x) + \mu x \partial_x F(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} F(t, x) - rF(t, x) = 0$$

mit zugehöriger Payoff Bedingung  $F(T, x) = \max(0, x - K)$  wobei sich dies unter einem risikoneutralen Maß ergibt zu

$$\partial_t F(t, x) + rx \partial_x F(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} F(t, x) - rF(t, x) = 0$$

Dieses Problem ist als klassische Black-Scholes PDE bekannt und explizit lösbar. In komplexeren Modellen, in denen zum Beispiel nicht von einem konstanten

Zinssatz und konstanter Volatilität ausgegangen wird, ist jedoch eine analytische Lösung der hergeleiteten PDE nicht möglich und man greift daher auf Mittel der Numerik zurück um das Problem zu lösen. Diese Vorgehensweise wollen wir im Folgenden anhand der obigen PDE beschreiben und durchführen. Um eine Lösung einer PDE zu finden, bedient man sich oft einiger Umformungen und Vereinfachungen, die das Problem leichter handhaben lassen. Daher werden wir im folgenden Kapitel zunächst eine kurze Darstellung der in der Finanzmathematik wichtigen PDEs vornehmen um dann eine solche PDE auf die Wärmeleitungsgleichung zurückzuführen.

### 3.2 Klassifikation von PDEs

Durch die Feynman-Kac Formel erhält man, je nachdem welches Modell dem stochastischen Prozess  $X_t$  zugrunde liegt, eine bestimmte partielle Differentialgleichung. Die in der PDE relevanten Variablen sind in der Finanzmathematik immer die Zeit  $t$  und eine Variable  $x$ , die den Preis des Underlyings beschreibt.

Im Bereich der Finanzmathematik gebräuchlich sind parabolische PDEs der Form

$$\partial_t F(t, x) + A(t, x)\partial_{xx}F(t, x) + D(t, x)\partial_x F(t, x) + H(t, x)F(t, x) = G(t, x).$$

Hierbei ist  $F(t, x)$  die Funktion die es zu bestimmen gilt. Die Funktionen  $A, D, H$  und  $G$  hingegen sind bekannte Funktionen, welche reelle Werte annehmen. Die Funktionen sind abhängig von  $t$  und  $x$ . Ist  $G(t, x) = 0$  so spricht man von einer homogenen PDE. Trifft dies nicht zu so nennt man die PDE inhomogen.

Damit eine PDE eine komplette Beschreibung der finanzmathematischen Zusammenhänge liefert, sind weiterhin einige wichtige Aussagen über die PDE vonnöten: Die PDE muss den arbitragefreien Zusammenhang zwischen dem Preis des Underlyings und dem Preis des Derivates beschreiben. Weiterhin müssen Randbedingungen, die die Eigenschaften des Kontraktes an Randwerten beschreiben, gegeben werden und vor allem sind terminale Bedingungen zu geben, das heißt Bedingungen die angeben wie genau sich die Auszahlung zur Maturity verhält. Die terminalen Bedingungen ergeben sich durch die Auszahlung zur Maturity, und für die Randwerte gilt bei Calloptionen zum Beispiel, dass sich die Werte im Bereich  $[0, \infty]$  bewegen. Man schränkt dieses Intervall jedoch ein auf  $[0, M]$ , wobei der Wert am unteren Rand dann 0 ist. Beim oberen Randwert geht man davon aus, dass es sehr wahrscheinlich ist, dass der Call ausgeübt wird. Somit wird der Randwert zum Zeitpunkt  $t$  approximiert durch  $M - Ke^{-r(T-t)}$ . Eine alternative Bedingung für den oberen Randwert ist, dass die Ableitung nach dem Underlying  $\partial_x F(t, x)$  an dem Randwert  $x = M$  gleich 1 ist, dies verdeutlicht die Annahme, dass für große Werte für  $x$  die Ableitung  $\partial_x F$  gegen 1 geht. Für weitere Beispiele verschiedener Randbedingungen verweisen wir auf [1], Kapitel 4.1.2 und [2] Kapitel 10.5-10.7.

Die genauen Eigenschaften werden im Folgenden dargestellt und die PDE wird, wie schon angekündigt auf die bekannte Wärmeleitungsgleichung zurückgeführt. Wir werden dies anhand der Black-Scholes PDE

$$\partial_t F(t, x) + rx\partial_x F(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} F(t, x) - rF(t, x) = 0$$

mit der Auszahlungsbedingung für einen Call

$$F(T, x) = \max(0, x - K)$$

darstellen.

### 3.3 Transformation der Black-Scholes PDE in die Wärmeleitungsgleichung

Die Black-Scholes PDE wurde von Black und Scholes gelöst, indem sie diese auf die schon aus der Physik bekannte Wärmeleitungsgleichung zurückführten. Im Folgenden werden wir also genau diese Umformungen durchführen um dann anhand der Wärmeleitungsgleichung verschiedene numerische Methoden vorzustellen, die auch auf andere PDEs anwendbar sind. Dies wird in einem späteren Kapitel der Arbeit dargestellt. Um unsere durch die Feynman-Kac Formel entstandene PDE einfacher lösen zu können, bedienen wir uns nun also einiger Umformungen: Zunächst wird die Variable  $t$ , die den derzeitigen Zeitpunkt angibt, geändert in eine Variable  $\tau$ , die nun die Zeit bis zur Maturity angibt. Dazu wird  $\tau$  definiert als  $T - t$ . Somit wird eine Funktion  $f$  definiert, für die dann gilt:

$$F(t, x) = f(\tau, x), \text{ mit } \tau = T - t$$

Hieraus folgt nun, dass  $\partial_t F(t, x) = -\partial_\tau f(\tau, x)$ , was somit zu folgender PDE führt:

$$-\partial_\tau f(\tau, x) + rx\partial_x f(\tau, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f(\tau, x) - rf(\tau, x) = 0$$

Der gegebene Endwert in  $F(T, x)$  wurde somit umgewandelt in einen Anfangswert  $f(0, x)$  und mit diesem gegebenen Wert und der PDE liegt nun ein sogenanntes Anfangswertproblem vor.

Die zweite Umformung ist die, dass wir nun undiskontierte Preise betrachten. Dazu definieren wir  $g(\tau, x) = e^{r\tau} f(\tau, x)$ . Mit der Produktregel folgt dann:

$$\begin{aligned} \partial_\tau g(\tau, x) &= re^{r\tau} f(\tau, x) + e^{r\tau} \partial_\tau f(\tau, x) \\ \partial_x g(\tau, x) &= e^{r\tau} \partial_x f(\tau, x) \\ \partial_{xx} g(\tau, x) &= e^{r\tau} \partial_{xx} f(\tau, x) \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich nun für die zu lösende PDE:

$$\begin{aligned} &-\partial_\tau f(\tau, x) + rx\partial_x f(\tau, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f(\tau, x) - rf(\tau, x) = 0 \\ \Leftrightarrow &e^{r\tau}(-\partial_\tau f(\tau, x) + rx\partial_x f(\tau, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f(\tau, x) - rf(\tau, x)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\underbrace{-e^{r\tau} \partial_\tau f(\tau, x) - re^{r\tau} f(\tau, x)}_{-\partial_\tau g(\tau, x)} + \underbrace{e^{r\tau} rx\partial_x f(\tau, x)}_{rx\partial_x g(\tau, x)} + \underbrace{e^{r\tau} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f(\tau, x)}_{\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} g(\tau, x)} = 0 \\ \Leftrightarrow &-\partial_\tau g(\tau, x) + rx\partial_x g(\tau, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} g(\tau, x) = 0 \end{aligned}$$



Die dritte wichtige Umformung führt auf eine PDE mit konstanten Koeffizienten. Diese Form der Umwandlung ist nur dann möglich, wenn dem Prozess  $X_t$  eine geometrische Brownsche Bewegungen zugrunde liegt, also gilt  $dX_t = X_t(rdt + \sigma dW_t^*)$ . Wir betrachten den natürlichen Logarithmus von  $X_t$ . Mit dem Lemma von Itô ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\ln(X_t) &= \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2}dX_t^2 \\ &= rdt + \sigma dW_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t^* \end{aligned}$$

Definieren wir uns nun  $g(\tau, x) = G(\tau, z = \ln(x))$ , so erhalten wir unter Benutzung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \partial_x g(\tau, x) &= \frac{1}{x} \partial_z G(\tau, z) \\ \partial_{xx} g(\tau, x) &= -\frac{1}{x^2} \partial_z G(\tau, z) + \frac{1}{x^2} \partial_{zz} G(\tau, z) \end{aligned}$$

Für die PDE ergibt sich somit durch Einsetzen und nach einigen leichten Umformungen:

$$-\partial_\tau G(\tau, z) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \partial_z G(\tau, z) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{zz} G(\tau, z) = 0$$

Wir sehen also, dass die Koeffizienten der partiellen Ableitungen zu konstanten Werten geworden sind. Außerdem wurde durch die Umwandlung auf Rückzahlungen der Preis-Bereich, der ursprünglich  $[0, \infty)$  betrug, umgewandelt in einen Return-Bereich  $(-\infty, \infty)$ .

Eine letzte Transformation bringt uns auf die bekannte Wärmeleitungsgleichung. Dazu definieren wir  $G(\tau, z) = e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z)$  und erhalten damit:

$$\begin{aligned} \partial_z G(\tau, z) &= \alpha e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z) + e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_z u(\tau, z) \\ \partial_{zz} G(\tau, z) &= \alpha^2 e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z) + 2\alpha e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_z u(\tau, z) + e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_{zz} u(\tau, z) \\ \partial_\tau G(\tau, z) &= \beta e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z) + e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_\tau u(\tau, z) \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Transformationen in die PDE ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -\partial_\tau G(\tau, z) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \partial_z G(\tau, z) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{zz} G(\tau, z) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(\beta e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z) + e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_\tau u(\tau, z)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\alpha e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z) + e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_z u(\tau, z)) \\ + \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha^2 e^{\alpha z + \beta \tau} u(\tau, z) + 2\alpha e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_z u(\tau, z) + e^{\alpha z + \beta \tau} \partial_{zz} u(\tau, z)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\beta + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2)u(\tau, z) - \partial_\tau u(\tau, z) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 2\alpha)\partial_z u(\tau, z) \\ + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{zz} u(\tau, z) &= 0. \end{aligned}$$

Wählen wir  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass die Terme  $\partial_z u(\tau, z)$  und  $u(\tau, z)$  eliminiert werden, erhalten wir:

$$(1) \quad -\partial_\tau u(\tau, z) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz} u(\tau, z) = 0$$

Hierfür muss gelten:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$$
$$\beta = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2$$

Die Gleichung (1) stellt eine Form der bekannten Wärmeleitungsgleichung dar. Im folgenden Kapitel werden wir anhand der entstandenen Gleichung darstellen, wie genau sich eine numerische Approximation für partielle Differentialgleichungen durchführen lässt und welche unterschiedlichen numerischen Methoden der finiten Differenzen es zur Lösung der PDE gibt. Da die logarithmische Transformation  $z = \ln(x)$  nur unter Verwendung der geometrischen Brownschen Bewegung möglich ist, kann die entstehende PDE bei Zugrundelegen eines andere Modells nicht in die Wärmeleitungsgleichung umgewandelt werden und muss direkt numerisch gelöst werden. Auf diesen Aspekt werden wir wie schon angekündigt im darauf folgenden Kapitel eingehen.

## 4 Numerische Approximation

### 4.1 Diskretisierung

Wir behandeln nun also eine PDE der Form

$$-\partial_\tau u(\tau, z) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz} u(\tau, z) = 0$$

mit Anfangswert

$$u(0, z) = \phi(z)$$

und Randwerten

$$u(\tau, z_L) = \psi_L(\tau),$$

$$u(\tau, z_U) = \psi_U(\tau),$$

wobei  $z_L$  und  $z_U$  zunächst einmal nicht genau festgelegte Punkte sind.  $\phi$  sei eine Funktion, die den Anfangswert beschreibt und  $\psi_L$  und  $\psi_U$  seien Funktionen, die das Verhalten auf dem Rand beschreiben.

Um dieses Problem lösen zu können, gehen wir nun wie folgt vor:

Zuerst approximieren wir die auftretenden partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten und erzeugen dann ein Zeit-Raum-Gitter auf dem diese Approximationen durchgeführt werden sollen. Dann ersetzen wir die partiellen Ableitungen in der PDE durch die Approximationen an den Gitterpunkten und erarbeiten so eine rekursive Formel um eine numerische Lösung der PDE zu erhalten.

### 4.2 Finite Differenzen

Die Idee der Methode der finiten Differenzen besteht darin, dass man auftretende partielle Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt. Dies werden wir wie schon angekündigt anhand der in (1) dargestellten Wärmeleitungsgleichung illustrieren. Betrachten wir nun eine Funktion  $f(z)$  die ausreichend oft stetig differenzierbar ist. Mit der Taylor Formel folgt sofort:

$$(2) \quad f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{1}{2}h^2 f''(z) + \frac{1}{6}h^3 f'''(z) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$(3) \quad f(z-h) = f(z) - hf'(z) + \frac{1}{2}h^2 f''(z) - \frac{1}{6}h^3 f'''(z) + \mathcal{O}(h^4)$$

Wobei  $\mathcal{O}(h^k)$  bedeutet, dass dieser Term mindestens genau so schnell wie  $h^k$  gegen 0 strebt, falls  $h \rightarrow 0$ .

Aus (2) und (3) ergeben sich nun verschiedene Möglichkeiten, um die erste Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z$  zu approximieren:

$$(4) \quad f'(z) \approx \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} \quad (\text{Zentraler Differenzenquotient})$$

$$(5) \quad f'(z) \approx \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\text{Vorwärtsdifferenzenquotient})$$

$$(6) \quad f'(z) \approx \frac{f(z) - f(z-h)}{h} \quad (\text{Rückwärtsdifferenzenquotient})$$

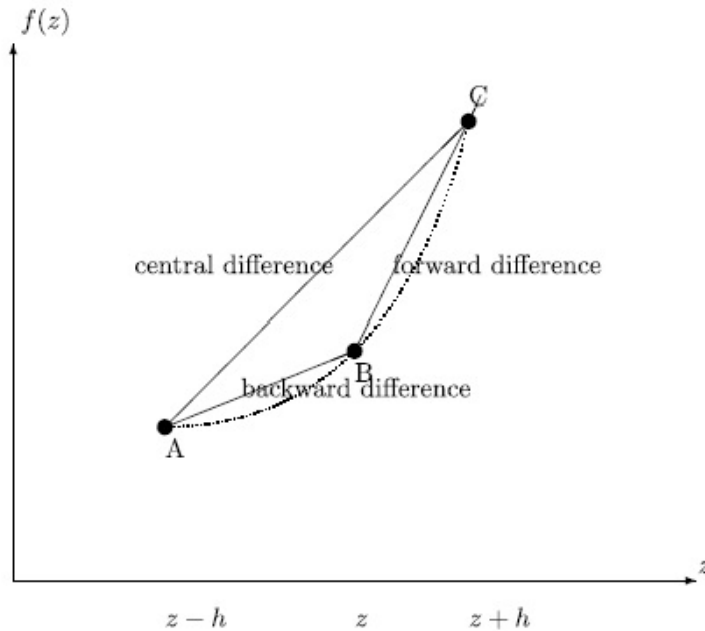


Abbildung 1: Finite Differenzen Approximationen der ersten Ableitung (Grafik aus [1])

Die Approximation (4) ergibt sich aus der Differenz der beiden Taylor-Annäherungen und hat einen Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ . Die Approximationen (5) und (6) ergeben sich direkt aus den Formeln und führen zu einem Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(h)$ .

Grafisch lassen sich diese drei unterschiedlichen Annäherungen wie oben angegeben interpretieren.

Summiert man (2) und (3) auf, so kann man auch eine Annäherung für die zweite Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z$  erhalten, wobei diese einen Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$  besitzt:

$$(7) \quad f''(z) \approx \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2}$$

Die partiellen Ableitungen, die wir approximieren wollen, werden später durch Ausdrücke dieser Art ersetzt.

### 4.3 Gitter/Raster

Um die finite Differenzen Approximation durchführen zu können, wird ein Raum-Zeit-Gitter angelegt, sodass man Rasterpunkte erhält auf denen die Ableitungen dann approximiert werden können.

Die Zeitachse ist das Intervall  $[0, T]$ . Für die Variable  $z$  wird vorher ein festgelegter Bereich ausgewählt:  $[z_L, z_U]$ . Bei Barrieroptionen entsprechen  $z_L$  und  $z_U$  der unteren beziehungsweise oberen Barriere. Bei Optionen ohne Barrieren oder mit

nur einer Barriere wird, obwohl  $z$  eigentlich  $-\infty$  oder  $\infty$  erreichen könnte, der Bereich immer eingeschränkt um eine gewisse Genauigkeit in der Approximation beibehalten zu können. Oftmals werden  $z_L$  und  $z_U$  ein Vielfaches der Standardabweichung des Prozesses vom Startwert entfernt gewählt. Für die meisten Anwendungen setzt man laut [1], Kapitel 4.3.2  $z_L = z_0 - 6\sigma\sqrt{T}$  und  $z_U = z_0 + 6\sigma\sqrt{T}$ , wobei  $z_0$  den Startwert des Prozesses angibt. Wir betrachten jedoch die Wärmeleitungsgleichung und somit gilt  $z_0 = \ln(S(0))$ , wobei  $S(0)$  den Aktienkurs zum Zeitpunkt 0 angibt. Das heißt bei Betrachtung von Aktienkursen ohne vorher auf den Logarithmus überzugehen, bedeutet dies, dass für den oberen Randwert  $S_U = S(0) \cdot \exp(6\sigma\sqrt{T})$  gewählt wird, für den unteren Randwert entsprechend  $S_L = S(0) \cdot \exp(-6\sigma\sqrt{T})$ .

Zur Vereinfachung nehmen wir immer eine gleichmäßige Aufteilung an, unterteilen das Gitter also in gleichmäßige Zeit- beziehungsweise Raumintervalle.

Um  $m$  Punkte zwischen  $z_U$  und  $z_L$  zu erhalten, wählen wir also die Schrittweite

$$\delta_z = \frac{z_U - z_L}{m + 1}.$$

Für die Zeit wählen wir den Abstand

$$\delta_\tau = \frac{T}{n + 1}$$

und erhalten somit  $n$  Punkte zwischen 0 und  $T$ .

Die Lösung der PDE an den Gitterpunkten  $(i\delta_\tau; z_L + j\delta_z)$  nennen wir  $u_{i,j}$  und erhalten somit:

$$u_{i,j} = u(i\delta_\tau; z_L + j\delta_z) \forall i = 1, \dots, n + 1 \text{ und } \forall j = 1, \dots, m$$

Für den Anfangswert ( $i = 0$ ) erhalten wir

$$u_{0,j} = u(0; z_L + j\delta_z)$$

und für die Randwerte ergibt sich

$$u_{i,0} = u(i\delta_\tau; z_L) = \psi_L(i\delta_\tau)$$

und

$$u_{i,m+1} = u(i\delta_\tau; z_U) = \psi_U(i\delta_\tau)$$

Kommen wir nun aufbauend auf diesen einheitlichen Vorgaben zu drei verschiedenen Methoden der finiten Differenzen.

## 5 Methoden zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen

Aus den drei Möglichkeiten die erste Ableitung zu approximieren, ergeben sich auch drei Methoden, die zur numerischen Lösung der PDE verwendet werden können. Diese werden im Folgenden anhand der gegebenen Wärmeleitungsgleichung

$$-\partial_\tau u(\tau, z) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz} u(\tau, z) = 0$$

dargestellt.

### 5.1 Explizite Methode

Bei der expliziten Methode wird die Ableitung nach  $\tau$  durch den zugehörigen Vorwärtsdifferenzenquotienten approximiert. Für die zweite Ableitung nach  $z$  benutzen wir die finiten Differenzen für die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} \partial_\tau u(\tau, z) &= \frac{u(\tau + \delta_\tau, z) - u(\tau, z)}{\delta_\tau} + \mathcal{O}(\delta_\tau) \\ \partial_{zz} u(\tau, z) &= \frac{u(\tau, z + \delta_z) - 2u(\tau, z) + u(\tau, z - \delta_z)}{\delta_z^2} + \mathcal{O}(\delta_z^2) \end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Approximationen in die zu lösende Wärmeleitungsgleichung ein und betrachten nur die Gitterpunkte, so erhalten wir:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\delta_\tau} + \mathcal{O}(\delta_\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta_z^2} + \mathcal{O}(\delta_z^2)$$

Vernachlässigen wir die Fehlerterme und nennen die approximierte Lösung  $v_{i,j}$ , so erhalten wir:

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\delta_\tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\delta_z^2}$$

Somit ist also  $u_{i,j}$  die wirkliche Lösung der PDE an den Gitterpunkten, sowie  $v_{i,j}$  die Lösung der gerade gegebenen Differenzgleichung, die die PDE approximiert. Man kann somit also rekursiv eine Lösung für die  $v_{i+1,j}$  in Abhängigkeit der schon bekannten Werte  $v_{i,j}, v_{i,j-1}, v_{i,j+1}$  finden (siehe Abbildung 2):

$$v_{i+1,j} = \frac{\sigma^2}{2} \alpha v_{i,j+1} + (1 - \sigma^2 \alpha) v_{i,j} + \frac{\sigma^2}{2} \alpha v_{i,j-1} \quad \text{mit } \alpha = \frac{\delta_\tau}{\delta_z^2}$$

Es lässt sich leicht erkennen was der Name der Methode schon sagt: Der nächste Wert lässt sich explizit aus den vorausgegangenen Werten berechnen und die rekursive Formel lässt sich so auf das komplette Gitter anwenden. Die Vorgehensweise ist anschaulich mit einem Trinomialmodell zu vergleichen, bei dem es verschiedene Wahrscheinlichkeiten für ein Steigen, Fallen oder Gleichbleiben des vorausgehenden Wertes gibt. Diese Ansichtweise ist jedoch nur sinnvoll, wenn alle Koeffizienten sich wie Wahrscheinlichkeiten verhalten, also positiv sind und sich

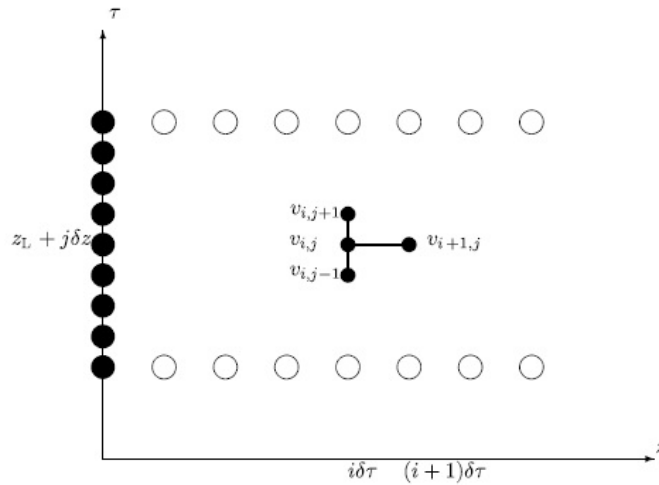


Abbildung 2: Schema der expliziten Methode (Grafik aus [1])

zu 1 aufsummieren. Für das angegebene Schema der expliziten Methode bedeuten diese Bedingungen, dass  $\alpha < \frac{1}{\sigma^2}$  und  $\alpha > 0$  gelten muss. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so wird bei fortschreitender Zeit der Rundungsfehler die Qualität der Lösung senken und es kommt zu Oszillationen in der numerischen Lösung. Man sagt auch, dass die explizite Methode nicht stabil ist. Dies bedeutet, wenn die Zeitintervalle zu groß gewählt werden, kann es zu Oszillationen oder größeren Abweichungen der numerischen Lösung zur wirklichen Lösung der PDE kommen. Die genauen Gründe hierfür gehen jedoch auf einige in der Numerik untersuchte Phänomene zurück, die wir hier nicht weiter beleuchten wollen. Es ist auf jeden Fall festzustellen, dass die in Anlehnung an das Trinomialmodell angegebenen Bedingungen zur Vermeidung dieser Abweichungen einzuhalten sind.

Das Problem der Stabilität kann aber durch Verwendung anderer Methoden wie zum Beispiel der impliziten Methode gelöst werden. Daher beleuchten wir diese im Folgenden. Ein weiterer Nachteil der expliziten Methode besteht darin, dass es aufgrund der ersten Ableitung nach  $\tau$  immer einen Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_\tau, \delta_z^2)$  gibt. Dies bedeutet, dass der Fehler bei der Ableitung nach  $\tau$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_\tau)$  ist und er Fehler bei der Ableitung nach  $z$  die Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_z^2)$  besitzt.

## 5.2 Implizite Methode

Bei der impliziten Methode wird im Grunde genau so vorgegangen wie bei der im Voraus dargestellten expliziten Methode. Der einzige Unterschied besteht darin, dass nun die Ableitung nach  $\tau$  durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten angenähert wird. Also durch

$$\partial_\tau u(\tau, z) = \frac{u(\tau, z) - u(\tau - \delta_\tau, z)}{\delta_\tau} + \mathcal{O}(\delta_\tau).$$

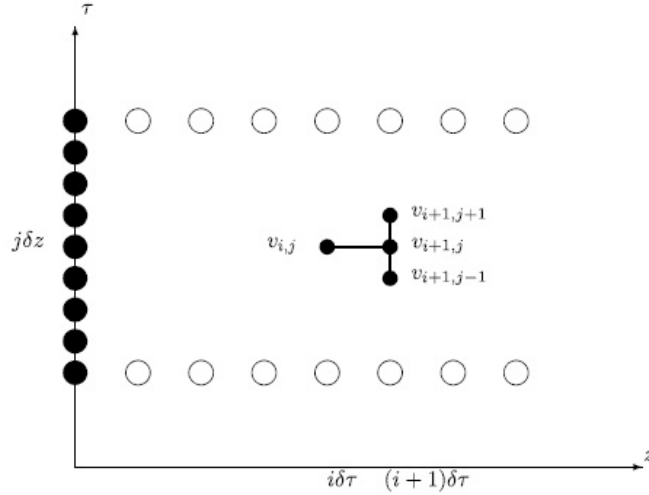


Abbildung 3: Schema der impliziten Methode (Grafik aus [1])

Die Ableitung nach  $z$  wird wie in der expliziten Methode durch finite Differenzen für die zweite Ableitung approximiert.

Damit ergibt sich also an den Gitterpunkten:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\delta\tau} + \mathcal{O}(\delta\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta_z^2} + \mathcal{O}(\delta_z^2)$$

Für die approximierte Lösung  $v_{i,j}$  heißt das:

$$\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\delta\tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\delta_z^2}$$

Dies führt durch leichte Umformungen auf

$$-\frac{\sigma^2}{2}\alpha v_{i,j-1} + (1 + \sigma^2\alpha)v_{i,j} - \frac{\sigma^2}{2}\alpha v_{i,j+1} = v_{i-1,j}$$

wobei  $\alpha$  wie in der expliziten Methode als  $\frac{\delta\tau}{\delta_z^2}$  definiert ist. Wie man also sieht, besteht diese Gleichung aus drei Unbekannten  $v_{i,j+1}$ ,  $v_{i,j}$ , und  $v_{i,j-1}$  im Gegensatz zu nur einem bekannten Wert  $v_{i-1,j}$ . Das bedeutet für uns, dass wir um einen neuen Wert zu erhalten und so rekursiv fortfahren zu können, immer ein lineares Gleichungssystem lösen müssen. Dies Gleichungssystem wird im Kapitel 5.5 ausführlicher dargestellt. Der Name der impliziten Methode ergibt sich somit aus der Notwendigkeit in jedem Schritt erst durch Lösen des Gleichungssystems die nächsten Werte zu erhalten. Wie auch beim expliziten Verfahren ist der Fehler wieder von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta\tau, \delta_z^2)$ , jedoch gibt es bei diesem Verfahren keine einschränkende Bedingung für Stabilität; die Schrittweite ist also beliebig wählbar. Kommen wir nun zu einem Verfahren dessen Approximationen etwas genauer sind.



### 5.3 Crank-Nicolson Methode

Die Crank-Nicolson Methode basiert darauf, dass die partiellen Ableitungen genau in der Mitte zwischen den Gitterpunkten approximiert werden, also an Punkten  $(i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}, z_L + j\delta_z)$ . Für die Ableitung nach  $\tau$  verwendet man also den zentralen Differenzenquotienten, wie er in (4) angegeben ist, um so die Ableitung am Mittelpunkt zwischen zwei Gitterpunkten anzunähern. Für die zweite Ableitung nach  $z$  wird der Mittelwert aus den finiten Differenzen an zwei benachbarten Gitterpunkten gewählt:

$$\begin{aligned} \partial_\tau u(\tau, z) \Big|_{\tau=i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}} &= \frac{u(\tau + \delta_\tau, z) - u(\tau, z)}{\delta_\tau} + \mathcal{O}(\delta_\tau^2) \\ \partial_{zz} u(\tau, z) \Big|_{\tau=i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{u(\tau + \delta_\tau, z + \delta_z) - 2u(\tau + \delta_\tau, z) + u(\tau + \delta_\tau, z - \delta_z)}{\delta_z^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{u(\tau, z + \delta_z) - 2u(\tau, z) + u(\tau, z - \delta_z)}{\delta_z^2} + \mathcal{O}(\delta_z^2) \end{aligned}$$

Die Fehler hierbei sind somit von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_\tau^2)$  und  $\mathcal{O}(\delta_z^2)$ .

Es ergibt sich durch Ersetzen der partiellen Ableitungen in der PDE an den Gitterpunkten:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\delta_\tau} + \mathcal{O}(\delta_\tau^2) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\delta_z^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta_z^2} \right) + \mathcal{O}(\delta_z^2) \end{aligned}$$

Für die approximierte Lösung ergibt sich somit:

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\delta_\tau} = \frac{1}{2} \frac{v_{i+1,j+1} - 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1}}{\delta_z^2} + \frac{1}{2} \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\delta_z^2}$$

Umgeformt und unter Benutzung von  $\alpha = \frac{\delta_\tau}{\delta_z^2}$  folgt:

$$\begin{aligned} &-\frac{\sigma^2 \alpha}{4} v_{i+1,j-1} + \left(1 + \frac{\sigma^2 \alpha}{2}\right) v_{i+1,j} - \frac{\sigma^2 \alpha}{4} v_{i+1,j+1} \\ &= \frac{\sigma^2 \alpha}{4} v_{i,j-1} + \left(1 - \frac{\sigma^2 \alpha}{2}\right) v_{i,j} + \frac{\sigma^2 \alpha}{4} v_{i,j+1} \end{aligned}$$

Somit ist bei jedem Rekursionsschritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Der Vorteil besteht jedoch darin, dass der Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_\tau^2, \delta_z^2)$  ist und wie bei der impliziten Methode keine Begrenzung für die Größe der Zeitintervalle vonnöten ist, damit die Methode konvergiert. In Abbildung 4 lässt sich erkennen, dass man bei dieser Methode aus den drei gegebenen Werten  $v_{i,j+1}$ ,  $v_{i,j}$ , und  $v_{i,j-1}$  die drei neuen Werte  $v_{i+1,j+1}$ ,  $v_{i+1,j}$ , und  $v_{i+1,j-1}$  bestimmen kann.

Im folgenden Kapitel werden noch einmal kurz die Eigenschaften der drei Methoden beleuchtet und verglichen.

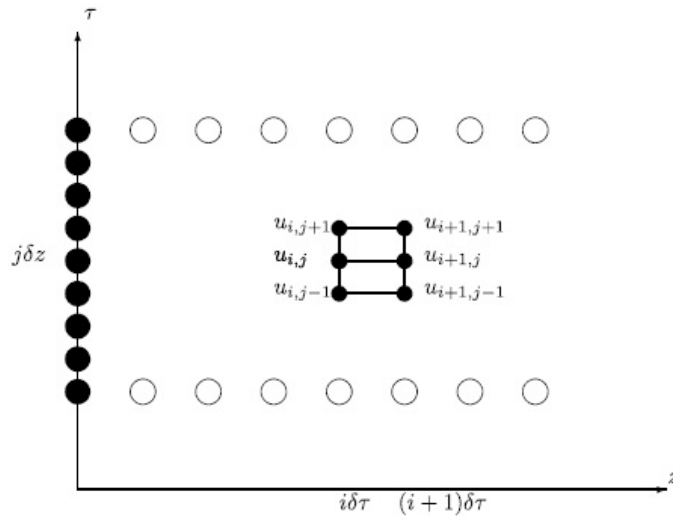


Abbildung 4: Schema der Crank-Nicolson Methode (Grafik aus [1])

#### 5.4 Eigenschaften der Methoden

Wie bereits schon in den einzelnen Abschnitten erwähnt, unterscheiden sich die drei Methoden in Bezug auf Konvergenz gegen die wirkliche Lösung, Genauigkeit und Stabilität. Eine vollständige Untersuchung und Herleitung der genauen Eigenschaften ist in der numerischen Mathematik zu finden, und daher werden im Folgenden nur die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst dargestellt. Für genauere Ausführungen zu diesem Thema verweisen wir auf [1], Kapitel 4.

Zunächst einmal ist zu erkennen, dass die drei Methoden sich in der Größe der Abweichung unterscheiden. Die Abweichung zur wirklichen Lösung ist sowohl bei der expliziten als auch bei der impliziten Methode von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_\tau, \delta_z^2)$ , bei der Crank-Nicolson Methode hingegen von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_\tau^2, \delta_z^2)$ . Ein Vorteil der expliziten Methode liegt aber darin, dass hier jeder Rekursionsschritt direkt durchgeführt werden kann und nicht wie bei den anderen Methoden ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Dagegen ist die explizite Methode jedoch nur unter gewissen Bedingungen stabil. Bei der untersuchten Wärmeleitungsgleichung ist diese Bedingung  $\alpha \leq \frac{1}{\sigma^2}$  (nach [1] (S.114)). Im Gegensatz dazu sind sowohl die implizite Methode als auch das Crank-Nicolson Verfahren stabil, es gibt also keine Bedingung für die zu wählenden Schrittweiten. Als Folge hieraus sind die implizite und die Crank-Nicolson Methode beide, im Gegensatz zur expliziten Methode, ohne Bedingung konvergent. Der Preis dafür ist jedoch, dass in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Bei von der Zeit unabhängigen Koeffizienten vor den partiellen Ableitungen genügt es oftmals nur ein einziges Mal die Inverse einer Matrix zu bestimmen, so dass nicht in jedem Schritt dieses lineare Gleichungssystem neu gelöst werden muss. Dies wird in den gegebenen Matrizendarstellungen im folgenden Kapitel deutlich.

An einem Beispiel wollen wir die auftretenden Oszillationen in der Lösung aufgrund von zu großen Zeitabständen in der expliziten Methode darstellen.

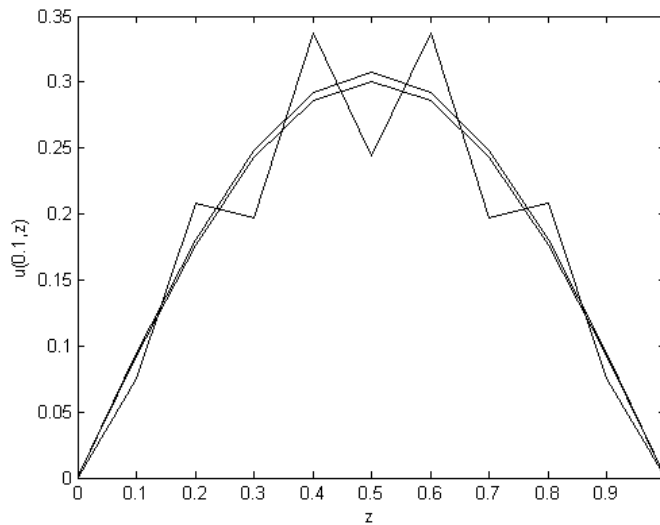


Abbildung 5: Numerische Lösungen zum Zeitpunkt  $t = 0.1$  mit der expliziten Methode bei  $\alpha = 0.45$  und  $\alpha = 0.55$ , sowie mit der Crank-Nicolson Methode bei  $\alpha = 0.55$

**Beispiel 5.1.** Betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung für den Fall  $\sigma = \sqrt{2}$  mit  $z \in [0, 1]$ :

$$-\partial_\tau u(\tau, z) + \partial_{zz} u(\tau, z) = 0$$

mit Anfangsbedingung

$$u(0, z) = \begin{cases} 2z & 0 \leq z < \frac{1}{2} \\ 2(1-z) & \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

und Randbedingungen

$$u(\tau, 1) = u(\tau, 0) = 0.$$

Die dargestellte Bedingung für Stabilität ist somit in diesem Fall  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Anhand der numerischen Lösungen zum Zeitpunkt  $t = 0.1$  bei verschiedenen Werten von  $\alpha$  lassen sich sehr deutlich die Oszillationen nachweisen, sobald die Restriktion für den Wert von  $\alpha$  nicht eingehalten wird (siehe Abbildung 5).

## 5.5 Finite Differenzen für generelle parabolische PDEs

In den vorherigen Abschnitten haben wir zur Vereinfachung nur die bekannte Wärmeleitungsgleichung betrachtet und die verschiedenen numerischen Methoden zur Approximation auf diese PDE angewandt. Da es jedoch in der Finanzmathematik oftmals nicht so leicht oder gar nicht, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, möglich ist eine PDE auf die Wärmeleitungsgleichung zurückzuführen, wird nun ein kleiner Einblick gegeben, inwiefern sich die Methoden auch auf generelle lineare parabolische PDEs der Form

$$(8) \quad -\partial_\tau u(\tau, z) + a(\tau, z)\partial_{zz} u(\tau, z) + b(\tau, z)\partial_z u(\tau, z) + c(\tau, z)u(\tau, z) + d(\tau, z) = 0$$

mit gegebenem Anfangswert  $u(0, z)$  und Randwerten  $u(\tau, z_L)$  und  $u(\tau, z_U)$  anwenden lassen.

Im Allgemeinen lässt sich zum Lösen solcher PDEs sagen, dass die drei vorgestellten Methoden sich auch hier wieder auf die Art der Approximation der partiellen Ableitung nach  $\tau$  beziehen. Für die zweimalige Ableitung nach  $z$  werden wieder die finiten Differenzen von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_z^2)$  verwendet, wie es auch bei der Wärmeleitungsgleichung schon der Fall war. Für die erste Ableitung nach  $z$  wird bei der expliziten und der impliziten Methode der zentrale Differenzenquotient verwendet, so dass es bei dieser Annäherung selbst nur eine Abweichung von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta_z^2)$  gibt:

$$\partial_z u(\tau, z) \approx \frac{u(\tau, z + \delta_z) - u(\tau, z - \delta_z)}{2\delta_z}$$

Bei der Crank-Nicolson Methode verwendet man man diesen zentralen Differenzenquotienten um die Ableitung in dem Punkt  $(i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}, z_L + j\delta_z)$  zu approximieren. Es ergibt sich also

$$\partial_z u(\tau, z) \Big|_{\tau=i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}} \approx \frac{u(\tau, z + \delta_z) - u(\tau, z - \delta_z) + u(\tau + \delta_\tau, z + \delta_z) - u(\tau + \delta_\tau, z - \delta_z)}{4\delta_z}$$

Ansonsten wird genau wie bei der Wärmeleitungsgleichung verfahren: Zunächst wird ein Raster angelegt, so dass die PDE an den Gitterpunkten gelöst werden kann und die partiellen Ableitungen werden durch die angegebenen Approximationen ersetzt. Dann wird ausgehend vom Anfangswert über das gesamte Gitter die PDE gelöst, indem man eine rekursive Vorschrift erarbeitet, nach der dann sukzessive vorgegangen werden kann.

In komplexeren Modellen werden wir die implizite Methode und die Crank-Nicolson Methode benutzen, da die Bedingungen für Stabilität bei der expliziten Methode bei Wahl von zeitabhängigen Funktionen für  $a$ ,  $b$  oder  $c$  oftmals sehr schwierig einzuhalten sind. Es gelten nach [1] die Bedingungen

$$\begin{aligned} \delta_z &< 2 \frac{a_{i,j}}{|b_{i,j}|} \\ \text{und} \\ \delta_\tau &< \left( \frac{2}{\delta_z^2} a_{i,j} - c_{i,j} \right)^{-1} \end{aligned}$$

für die Wahl der Schrittweite. Hierbei und im Folgenden geben wir die Funktion  $a$  zum Zeitpunkt  $(i\delta_\tau, z_L + j\delta_z)$  mit  $a_{i,j}$  an und verfahren genau so für  $b$ ,  $c$ , und  $d$ . Da wie gesagt nur implizite Methode und Crank-Nicolson Verfahren untersucht werden, sind die zu lösenden linearen Gleichungssysteme dieser Verfahren in Matrixschreibweise angegeben.

Setzen wir die Approximationen in die PDE (8) ein, so ergibt sich für das implizite Verfahren nach einigen Umformungen das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} & - (\alpha a_{i,j} - \beta \frac{b_{i,j}}{2}) v_{i,j-1} + (1 + 2\alpha a_{i,j} - \delta_\tau c_{i,j}) v_{i,j} - (\alpha a_{i,j} + \beta \frac{b_{i,j}}{2}) v_{i,j+1} \\ & = v_{i-1,j} + d_{i,j} \delta_\tau \end{aligned}$$

für  $j = 1, \dots, m$  und  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $v_{i,j} = v(i\delta_\tau, z_L + j\delta_z)$ . Hierbei und im Weiteren gilt  $\alpha = \frac{\delta_\tau}{\delta_z^2}$  und  $\beta = \frac{\delta_\tau}{\delta_z}$ .

Zu jedem Zeitpunkt  $i\delta_\tau$  ist also ein lineares Gleichungssystem zu lösen, was sich schreiben lässt als

$$B_i v_{i+1} = v_i + b_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Hierbei sind  $v_{i+1}$  und  $v_i$  Vektoren, wobei  $v_i$  die Werte  $v_{i,1}$  bis  $v_{i,m}$  enthält und  $v_{i+1}$  mit den vorhandenen Werten ausgerechnet wird.  $B_i$  ist eine Tridiagonalmatrix der Größe  $m \times m$  mit folgender Gestalt:

$$B_i = \text{tridiag}[-(\alpha a_{i,j} - \beta \frac{b_{i,j}}{2}), 1 + 2\alpha a_{i,j} - \delta_\tau c_{i,j}, -(\alpha a_{i,j} + \beta \frac{b_{i,j}}{2})]$$

Der Vektor  $b_i$  hat  $m$  Einträge und ist von der Form

$$b_i = \begin{bmatrix} (\alpha a_{i,1} - \beta \frac{b_{i,1}}{2})v_{i+1,0} + d_{i,1}\delta_\tau \\ d_{i,2}\delta_\tau \\ \vdots \\ d_{i,m-1}\delta_\tau \\ (\alpha a_{i,m} + \beta \frac{b_{i,m}}{2})v_{i+1,m+1} + d_{i,m}\delta_\tau \end{bmatrix}$$

Hierbei sind die Werte in  $v_{i+1,0}$  und  $v_{i+1,m+1}$  entsprechend der Randbedingungen in den Punkten  $z_L$  und  $z_U$  gesetzt. Bei der impliziten Methode wird dieses Gleichungssystem in jedem Schritt gelöst um so rekursiv alle Werte an den Gitterpunkten zu erhalten.

Für die Crank-Nicolson Methode wird eine Approximation in den Punkten  $(i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}, z_L + j\delta_z)$  durchgeführt. Man erhält nach einigen Umformungen die Gleichung

$$\begin{aligned} & (\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} - \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4})v_{i+1,j-1} - (1 + \alpha \tilde{a}_{i,j} - \frac{\tilde{c}_{i,j}}{2}\delta_\tau)v_{i+1,j} + (\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4})v_{i+1,j+1} \\ & = (-\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4})v_{i,j-1} - (1 - \alpha \tilde{a}_{i,j} + \frac{\tilde{c}_{i,j}}{2}\delta_\tau)v_{i,j} - (\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4})v_{i+1,j+1} - \tilde{d}_{i,j}\delta_\tau \end{aligned}$$

für  $j = 1, \dots, m$  und  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $v_{i,j} = v(i\delta_\tau, z_L + j\delta_z)$ . Hierbei gibt  $\tilde{a}_{i,j}$  den Wert von  $a$  an der Stelle  $(i\delta_\tau + \frac{\delta_\tau}{2}, z_L + j\delta_z)$  an. Gleiches gilt für den Zusammenhang zwischen  $\tilde{b}_{i,j}$ ,  $\tilde{c}_{i,j}$ ,  $\tilde{d}_{i,j}$  und den Funktionen  $b, c, d$ . Man erhält somit also ein Gleichungssystem, welches in jedem Iterationsschritt gelöst werden muss. Dies lässt sich auch schreiben als

$$C_i v_{i+1} = D_i v_i + b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Hierbei ist  $v_i$ , wie auch in der impliziten Methode, ein Vektor, der die Werte  $v_{i,1}$  bis  $v_{i,m}$  enthält. Die Matrizen  $C_i$  und  $D_i$  sind Tridiagonalmatrizen der Größe  $m \times m$  und definiert durch

$$\begin{aligned} C_i &= \text{tridiag}[(\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} - \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4}), -1 - \alpha \tilde{a}_{i,j} + \delta_\tau \frac{\tilde{c}_{i,j}}{2}, (\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4})], \\ D_i &= \text{tridiag}[-(\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} - \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4}), -1 + \alpha \tilde{a}_{i,j} - \delta_\tau \frac{\tilde{c}_{i,j}}{2}, -(\alpha \frac{\tilde{a}_{i,j}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,j}}{4})]. \end{aligned}$$

Der Vektor  $b_i$  hat  $m$  Einträge und ist in diesem Fall gegeben durch

$$b_i = \begin{bmatrix} -(\alpha \frac{\tilde{a}_{i,1}}{2} - \beta \frac{\tilde{b}_{i,1}}{4})v_{i+1,0} + (-\alpha \frac{\tilde{a}_{i,1}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,1}}{4})v_{i,0} - \tilde{d}_{i,1}\delta_\tau \\ -\tilde{d}_{i,2}\delta_\tau \\ \vdots \\ -\tilde{d}_{i,m-1}\delta_\tau \\ -(\alpha \frac{\tilde{a}_{i,m}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,m}}{4})v_{i+1,m+1} - (\alpha \frac{\tilde{a}_{i,m}}{2} + \beta \frac{\tilde{b}_{i,m}}{4})v_{i,m+1} - \tilde{d}_{i,m}\delta_\tau \end{bmatrix}$$

In den genutzten Programmen, wovon einige im Anhang 8.1 zu finden sind, wurde jede Methode anhand dieser gegebenen Schemata implementiert.

## 5.6 Anwendung der Methoden auf die Black-Scholes PDE

Um eine kurze Übersicht über die Genauigkeit dieser beiden angegebenen Methoden zu erhalten, werden wir die Black-Scholes PDE numerisch lösen und die Ergebnisse mit den exakt berechneten Werten vergleichen.

Betrachten wir also die Black-Scholes PDE

$$-\partial_\tau f(\tau, x) + rx\partial_x f(\tau, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f(\tau, x) - rf(\tau, x) = 0$$

mit der Bedingung für eine Calloption

$$f(0, x) = \max(0, x - K).$$

Wir berechnen nun für verschiedenen Werte des risikolosen Zinssatzes  $r$ , der Volatilität  $\sigma$ , des Preises des Underlyings zum Startzeitpunkt  $S(0)$ , der Zeit bis zur Maturity  $T$  und des Strike Preises  $K$  den Preis einer Call Option im Black-Scholes Modell.

Wir benutzen zur Berechnung die Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(\tau, z_U) &= z_U - Ke^{-r\tau} \\ f(\tau, z_L) &= 0 \end{aligned}$$

und wählen einheitliche Randwerte  $z_U$  und  $z_L$  angelehnt an die in Kapitel 4.3 gegebenen Werten.

Man erhält unter Benutzung der angegebenen numerischen Verfahren so insgesamt zu jedem Zeitpunkt  $i\delta_\tau$  einen Vektor mit  $m+2$  Einträgen, wobei jedem Eintrag ein Preis des Underlyings zugeordnet werden kann. Durch Interpolation erhält man nun eine Funktion, die den Wert einer Option in Abhängigkeit vom Preis des Underlyings zu einem fest gewählten Zeitpunkt angibt. Für diese Interpolation haben wir ein in Matlab schon gegebenes Programm verwendet. Dies wird auch im Anhang in den Matlab Codes deutlich. Im Folgenden wird so der Preis eines Calls zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Abhängigkeit des Aktienpreises  $S(0)$  ermittelt.

Dabei ergeben sich für die verschiedenen Methoden und bei unterschiedlichen Wahlen für die Anzahl der Zeit- beziehungsweise Raumintervalle die folgenden Ergebnisse, wobei „Black-Scholes“ die sich mit der Black-Scholes Gleichung ergebenden Preise angibt.

Bei einem Strike Preis  $K = 2$ , Randwerten  $z_U = 20, z_L = 0$  und der Anzahl an Zeitintervallen  $n = 500$  und Raumintervallen  $m = 500$  ergibt sich:

$r$	$\sigma$	$T$	$S(0)$	Crank-Nicolson	Implizit	Black-Scholes
0.05	0.5	1	1.9	0.3741	0.3740	0.3741
0.05	0.5	1	2.0	0.4357	0.4356	0.4359
0.05	0.5	1	2.1	0.5012	0.5011	0.5014
0.1	0.4	2	1.9	0.5370	0.5368	0.5383
0.1	0.4	2	2.0	0.6086	0.6084	0.6106
0.1	0.4	2	2.1	0.6830	0.6827	0.6858

Für eine geringere Anzahl an Zeit- und Raumintervallen ( $n = 200, m = 200$ ) ergibt sich:

$r$	$\sigma$	$T$	$S(0)$	Crank-Nicolson	Implizit	Black-Scholes
0.1	0.4	2	1.9	0.5366	0.5361	0.5383
0.1	0.4	2	2.0	0.6083	0.6077	0.6106
0.1	0.4	2	2.1	0.6826	0.6819	0.6858

Man kann also eine Verbesserung der Genauigkeit der Ergebnisse durch Verringern von  $\delta_\tau$  und  $\delta_x$  erzielen. Dies erfordert jedoch zusätzlichen Rechenaufwand, da die Iterationen dementsprechend häufiger durchgeführt werden müssen. Es lässt sich außerdem erkennen, dass wenn die obere Grenze nicht in etwa entsprechend den im Kapitel 4.3 gemachten Angaben gewählt wurde, es zu größeren Abweichungen kommt. Dies ist erkennbar zum Beispiel in der Crank-Nicolson Methode für  $n = 500, m = 500, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 2, S(0) = 2.1$ . Wählt man hier  $z_U = 50$ , so ergibt sich statt eines Call Preises von 0.6830 ein Call Preis von 0.6854, was gemessen an dem mit der Black-Scholes Formel sich ergebendem Wert von 0.6858 eine deutliche Verbesserung ist.

Bei einem Strike Preis  $K = 100$ , Randwerten  $z_U = 1000, z_L = 0$  und der Anzahl an Zeitintervallen  $n = 500$  und Raumintervallen  $m = 500$  ergibt sich:

$r$	$\sigma$	$T$	$S(0)$	Crank-Nicolson	Implizit	Black-Scholes
0.05	0.5	1	90	15.8160	15.8111	15.8209
0.05	0.5	1	100	21.7856	21.7797	21.7926
0.05	0.5	1	110	28.5029	28.4966	28.5152
0.05	0.3	2	90	14.9152	14.9110	14.9196
0.05	0.3	2	100	21.1893	21.1843	21.1937
0.05	0.3	2	110	28.3147	28.3095	28.3189

Für eine geringere Anzahl an Zeit- und Raumintervallen ( $n = 200, m = 200$ ) ergibt sich:

$r$	$\sigma$	$T$	$S(0)$	Crank-Nicolson	Implizit	Black-Scholes
0.05	0.3	2	90	14.8919	14.8815	14.9196
0.05	0.3	2	100	21.1667	21.1540	21.1937
0.05	0.3	2	110	28.2943	28.2812	28.3189

Auch bei Betrachtung von Call-Optionen mit höheren Strike und unterschiedlichen Startwerten des Underlyings sind also die oben angesprochenen Phänomene zu beobachten. Eine Erhöhung der Anzahl der Intervalle bei gleichbleibendem Raum auf dem die Approximation stattfindet, erhöht auch hier wieder die Genauigkeit. Diese Beobachtungen sollten jedoch nicht weiter überraschen und dienen lediglich der Überprüfung unserer Methoden zur Lösung der PDE. Im folgenden Kapitel werden wir die dargestellten numerischen Methoden auf Asiatische Optionen anwenden. Der Preis einer Asiatischen Option ist im Gegensatz zu dem hier behandelten Preis im Black-Scholes Modell nicht explizit berechenbar und muss daher numerisch approximiert werden.



## 6 Asiatische Optionen

### 6.1 Hintergrund

Da es im Black-Scholes Modell für europäische Optionen eine analytisch herleitbare Funktion gibt, die den Preis einer Option zu einem gewissen Zeitpunkt  $t$  angibt, ist es nicht von Interesse diese Funktion auch numerisch zu approximieren. Es gibt jedoch einige andere Optionen, deren Preis nicht explizit anzugeben ist und für die eine numerische Annäherung des Preises Sinn macht. Ein Beispiel hierfür sind Asiatische Optionen. Daher werden wir diese im Weiteren zunächst einmal kurz darstellen, um dann eine geeignete PDE, die den Preis beschreibt, anzugeben und numerisch zu lösen.

Eine Asiatische Option ist eine pfadabhängige Option. Dies bedeutet, dass die Auszahlung zur Maturity  $T$  nicht nur den Wert des Underlyings zum Zeitpunkt  $T$  berücksichtigt. Es werden auch die Werte des Underlyings, die zwischen Startzeitpunkt und Maturity  $T$  erreicht wurden, in die Berechnung mit aufgenommen. Asiatische Optionen enthalten so in der Auszahlung einen Durchschnitt über den Preis des Underlyings. Dieser Durchschnitt kann über den gesamten Zeitraum von Aktivierung der Option bis zum Fälligkeitsdatum, oder nur über einen Teil dieser Zeit, der erst nach der Aktivierung beginnt und mit dem Fälligkeitsdatum endet, gebildet werden. Der Hauptgrund den Durchschnitt über den Verlauf des Underlyings zugrunde zu legen, ist der, dass es so schwieriger wird die Auszahlung zur Maturity  $T$  stark durch eine Art der Manipulation des Preises des Underlyings zu beeinflussen.

Im Weiteren wollen wir uns darauf beschränken den Durchschnitt über den gesamten Zeitraum  $[0, T]$  zu bilden und einen europäischen Typ zugrunde legen. Dies bedeutet, dass eine Ausübung der Option nur zum Fälligkeitsdatum  $T$  möglich ist. Für die Bildung dieses Durchschnitts werden wir zunächst ein Modell mit zeitstetigen Beobachtungen betrachten:

$$\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

Im weiteren Verlauf werden wir aber auch zur Bewertung von Asiatischen Optionen auf Grundlage eines Modelles mit zeitdiskreten Beobachtungen übergehen. Dafür wird der angegebene Durchschnitt wie folgt gebildet:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j)$$

wobei  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ . Hierbei entspricht  $S(t)$  dem Preis des Underlyings zum Zeitpunkt  $t$ .

Wir nehmen an, dass der Prozess  $(S(t))_t$  gegeben ist durch die geometrische Brownsche Bewegung

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t),$$

wobei  $W^*(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß  $P^*$  und  $r$  der risikolose Zinssatz ist, der im Folgenden konstant sein soll. Weiterhin

betrachten wir einen Asiatischen Call, dessen Auszahlung zur Zeit  $T$

$$V(T) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K\right)^+$$

beträgt. Hierbei ist der Strike Preis  $K$  eine nichtnegative Konstante. Der Preis eines Asiatischen Puts ergibt sich dann über die Put-Call Parität, die zu einem späteren Zeitpunkt angegeben wird. Der Preis dieses Calls zu einem Zeitpunkt  $t < T$  ist gegeben durch die Formel

$$V(t) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}V(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Man kann leicht zeigen, dass der diskontierte Preis

$$e^{-rt}V(t) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}V(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T$$

ein Martingal unter  $\mathbb{P}^*$  ist. Genau diesen Preis wollen wir im Weiteren versuchen zu bestimmen.

## 6.2 Herleitung der PDE für Asiatische Optionen

Wie erwähnt, ist die Asiatische Option pfadabhängig. Der Preis zum Zeitpunkt  $t$  ist also nicht nur von  $t$  und  $S(t)$  abhängig. Man kann daher eine neue Variable  $Y(t) = \int_0^t S(u) du$  einführen. Das Paar  $(S(t), Y(t))$  bildet einen zweidimensionalen Markov Prozess und es gilt für die Auszahlung des Calls zur Maturity die Formel

$$V(T) = \left(\frac{1}{T}Y(T) - K\right)^+.$$

Somit muss es eine Funktion  $v(t, x, y)$  geben, so dass der Preis eines Asiatischen Calls gegeben ist durch

$$\begin{aligned} v(t, S(t), Y(t)) &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{T}Y(T) - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}\frac{1}{T}V(T) \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Durch ähnliche Vorgehensweise wie in der Feynman-Kac Formel kann man nun auf eine PDE kommen, die die Funktion  $v(t, x, y)$  erfüllt. Die Herleitung der PDE wird in Kapitel 7.5.2 in [8] dargestellt. Man erhält so die folgende PDE

$$v_t(t, x, y) + rxv_x(t, x, y) + xv_y(t, x, y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t, x, y) = rv(t, x, y),$$

mit

$$0 \leq t < T, x \geq 0, y \in \mathbb{R}$$

und dazugehörigen Randbedingungen. Jedoch treten in dieser PDE partielle Ableitungen nach drei verschiedenen Variablen auf und die Methode der finiten Differenzen ist so wie wir sie dargestellt haben nicht anwendbar. Daher wird im weiteren Verlauf keine genaue Herleitung dieser PDE angeben. Stattdessen wird

eine andere Herangehensweise an Asiatische Optionen dargestellt, bei der sich eine PDE abhängig von zwei Variablen ergibt und somit auch die Methode der finiten Differenzen angewendet werden kann. Diese Herleitung ist im Wesentlichen angelehnt an [8], Kapitel 7.5.3 und an [11], die beide den selben Ansatz verfolgen. Eine andere PDE zur Bestimmung des Wertes Asiatischer Optionen ist zu finden in [12]. Diese PDE liefert in der angegebenen Form nach [13] jedoch keine genauen Lösungen und wird daher nicht weiter behandelt.

### 6.3 Bewertung einer Asiatischen Option unter zeitstetiger Beobachtung

Betrachten wir nun einen Asiatischen Call mit Auszahlung

$$V(T) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K\right)^+,$$

wobei  $K$  eine nichtnegative Konstante ist.

Um den Preis dieses Calls bestimmen zu können, wollen wir ein Portfolio erstellen, dessen Wert zur Maturity gegeben ist durch

$$X(T) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(u) du - K\right).$$

Sei dazu nun  $\gamma(t)$  eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  mit  $0 \leq t \leq T$ , die keine Zufälligkeit, also keine Brownsche Bewegung enthält. Das heißt es gilt dann auch  $d\langle\gamma, \gamma\rangle_t = 0$  und  $d\langle\gamma, S\rangle_t = 0$ . Es gilt somit also

$$d(\gamma(t)S(t)) = \gamma(t)dS(t) + S(t)d\gamma(t).$$

Dies impliziert dann:

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)) &= e^{r(T-t)}d(\gamma(t)S(t)) - re^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)dt \\ &= e^{r(T-t)}\gamma(t)dS(t) + e^{r(T-t)}S(t)d\gamma(t) - re^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)dt \end{aligned}$$

Umgeformt führt dies auf die Gleichung

$$(9) \quad e^{r(T-t)}\gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt) = d(e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)) - e^{r(T-t)}S(t)d\gamma(t).$$

Betrachten wir nun den Fall, dass jemand, der  $\gamma(t)$  Anteile des risky assets zu jedem Zeitpunkt  $t$  hält, dies finanziert durch Anlegen oder Leihen zum risikolosen Zinssatz  $r$ . Wir haben also ein selbstfinanzierendes Portfolio, dessen Wert sich nach der Gleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= \gamma(t)dS(t) + r(X(t) - \gamma(t)S(t))dt \\ (10) \quad &= rX(t)dt + \gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt) \end{aligned}$$

entwickelt.

Aus den Gleichungen (9) und (10) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
d(e^{r(T-t)}X(t)) &= -re^{r(T-t)}X(t)dt + e^{r(T-t)}dX(t) \\
&= -re^{r(T-t)}X(t)dt + e^{r(T-t)}(rX(t)dt + \gamma(t)(dS(t) \\
&\quad - rS(t)dt)) \\
&= e^{r(T-t)}\gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt) \\
(11) \qquad \qquad &= d(e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)) - e^{r(T-t)}S(t)d\gamma(t)
\end{aligned}$$

Um den Asiatischen Call mit Auszahlung

$$V(T) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt - K\right)^+$$

zu betrachten, wählen wir  $\gamma(t)$  von der Form

$$(12) \qquad \qquad \gamma(t) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Das Anfangskapital soll

$$(13) \qquad \qquad X(0) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S_0 - e^{-rT}K$$

betragen.

So erhalten wir  $d\gamma(t) = -\frac{1}{T}e^{-r(T-t)}dt$  und können nun  $X(t)$  berechnen. Dafür wird zunächst die Gleichung (11) von 0 bis  $t$  integriert. Darauf folgend werden die Bedingung (13) und die Gleichung für  $d\gamma(t)$  benutzt. Die dritte Umformung ergibt sich unter Benutzung von Gleichung (12). Es ergibt sich somit insgesamt:

$$\begin{aligned}
&e^{r(T-t)}X(t) \\
&= e^{rT}X(0) + \int_0^t d(e^{r(T-s)}\gamma(s)S(s)) - \int_0^t e^{r(T-u)}S(u)d\gamma(u) \\
&= e^{rT}\left(\frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S(0) - e^{-rT}K\right) + e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t) - e^{rT}\gamma(0)S(0) \\
&\quad - \int_0^t e^{r(T-u)}S(u)\left(-\frac{1}{T}e^{-r(T-u)}\right)du \\
&= e^{rT}\frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S(0) - K + e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t) - e^{rT}\frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S(0) \\
&\quad + \frac{1}{T}\int_0^t S(u)du \\
&= -K + e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t) + \frac{1}{T}\int_0^t S(u)du
\end{aligned}$$

Es ergibt sich somit insgesamt für  $X(t)$ :

$$\begin{aligned}
X(t) &= -Ke^{-r(T-t)} + \gamma(t)S(t) + e^{-r(T-t)}\frac{1}{T}\int_0^t S(u)du \\
&= -Ke^{-r(T-t)} + \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)})S(t) + e^{-r(T-t)}\frac{1}{T}\int_0^t S(u)du
\end{aligned}$$

Dies gilt für  $0 \leq t \leq T$ .

Zum Zeitpunkt  $T$  ergibt sich somit

$$X(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du - K$$

und es gilt

$$V(T) = X^+(T) = \max(X(T), 0).$$

Der Preis eines Asiatischen Calls zu einem Zeitpunkt  $t$  noch vor der Maturity  $T$  ergibt sich somit als

$$(14) \quad V(t) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}V(T) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}X^+(T) \mid \mathcal{F}_t].$$

Zur Berechnung der rechten Seite dieser Gleichung wird ein Wechsel des Numéraires benutzt. Der Numéraire ist ein Wertmaß. Dies bedeutet, dass Preise unterschiedlicher Güter in Einheiten des Numéraires ausgedrückt werden. Normalerweise drückt man Preise in einer Geldwährung aus. Ein Wechsel des Numéraires ist dann zum Beispiel der Wechsel in eine andere Geldwährung. Alle Preise können in diese neue Einheit umgerechnet werden. Aber nicht nur Währungen können als Numéraire dienen, wie wir auch in diesem Fall sehen werden. Für weitere Informationen über den Wechsel des Numéraires in der Finanzmathematik verweisen wir auf [8], Kapitel 9, wo dieses Thema explizit behandelt wird.

Definieren wir nun

$$Y(t) = \frac{X(t)}{S(t)} = \frac{e^{-rt}X(t)}{e^{-rt}S(t)}$$

Der Prozess  $(Y(t))_t$  gibt dann den Wert des Portfolios in Einheiten des risky assets an. Der Numéraire wurde also von Geldeinheiten hin zu risky assets gewechselt.

Definieren wir nun  $U(t) = e^{-rt}S(t)$  und betrachten den Prozess  $(U(t))_t$ . Hierbei ist  $(S(t))_t$  wie angegeben eine Brownsche Bewegung und es gilt

$$(15) \quad \begin{aligned} d(U(t)) &= -rU(t)dt + e^{-rt}dS(t) \\ &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}(rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t)) \\ &= e^{-rt}\sigma S(t)dW^*(t). \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich weiterhin nach Itô und den in 2.7 auf Seite 8 angegebenen Eigenschaften der quadratischen Variation, dass gilt

$$\begin{aligned} d((U(t))^{-1}) &= -(U(t))^{-2}d(U(t)) + \frac{1}{2}2(U(t))^{-3}d\langle U, U \rangle_t \\ &= -(e^{-rt}S(t))^{-2}e^{-rt}\sigma S(t)dW^*(t) + (e^{-rt}S(t))^{-3}(e^{-rt}S(t))^2\sigma^2dt \\ &= -\sigma(e^{-rt}S(t))^{-1}dW^*(t) + (e^{-rt}S(t))^{-1}\sigma^2dt. \end{aligned}$$

Für den Prozess  $(e^{-rt}X(t))_t$  gilt unter der Benutzung der Gleichung (10), die  $dX(t)$  angibt:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}X(t)) &= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) \\
&= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}(rX(t)dt + \gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt)) \\
&= e^{-rt}\gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt) \\
&= e^{-rt}\gamma(t)(rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t) - rS(t)dt) \\
&= \gamma(t)e^{-rt}\sigma S(t)dW^*(t)
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der hergeleiteten SDEs für  $e^{-rt}X(t)$  und  $U(t)^{-1} = (e^{-rt}S(t))^{-1}$ , der Definition des Prozesses  $(Y(t))_t$  und mit der Produktregel von Itô, die in (2.10) auf Seite 9 angegeben worden ist, ergibt sich so:

$$\begin{aligned}
dY(t) &= d((e^{-rt}X(t))(e^{-rt}S(t))^{-1}) \\
&= e^{-rt}X(t)d(U(t))^{-1} + (U(t))^{-1}d(e^{-rt}X(t)) \\
&\quad + \underbrace{d\langle e^{-rt}X, U^{-1} \rangle_t}_{-\gamma(t)\sigma^2 dt} \\
&= e^{-rt}X(t)(-\sigma(e^{-rt}S(t))^{-1}dW^*(t) + (e^{-rt}S(t))^{-1}\sigma^2 dt) \\
&\quad + (e^{-rt}S(t))^{-1}(\gamma(t)e^{-rt}\sigma S(t)dW^*(t)) - \gamma(t)\sigma^2 dt \\
&= -\sigma Y(t)dW^*(t) + Y(t)\sigma^2 dt + \gamma(t)\sigma dW^*(t) - \gamma(t)\sigma^2 dt \\
&= \sigma(\gamma(t) - Y(t))(dW^*(t) - \sigma dt)
\end{aligned}$$

Wie man anhand des vorhandenen  $dt$ -Terms in dieser SDE sieht, ist der Prozess  $(Y(t))_t$  kein Martingal unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^*$ . Wir können jedoch einen Maßwechsel in ein Maß, unter dem  $(Y(t))_t$  ein Martingal ist, vollziehen. Dazu setzen wir

$$\widetilde{W}^*(t) = W^*(t) - \sigma t$$

und erhalten

$$dY(t) = \sigma(\gamma(t) - Y(t))d\widetilde{W}^*(t).$$

Wie man mit Hilfe des Theorems von Girsanov (siehe zum Beispiel [8], 5.2.3 oder ausführlicher in [9], Kapitel 3, 3.5) zeigen kann, ist es möglich das Maß zu wechseln, so dass  $\widetilde{W}^*$  unter dem zu  $\mathbb{P}^*$  äquivalenten Maß  $\widetilde{\mathbb{P}}^*$  für alle  $0 \leq t \leq T$  eine Brownsche Bewegung ist. Es existiert nun eine Zufallsvariable  $Z$ , die so genannte Radon-Nikodým-Dichte

$$Z = \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}^*}{d\mathbb{P}^*}$$

und der Prozess der Radon-Nikodým-Dichte wird definiert durch

$$Z(t) = \mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T$$

und ist ein Martingal unter dem Maß  $\mathbb{P}^*$ , da für  $0 \leq s \leq t \leq T$  gilt

$$\mathbb{E}^*[Z(t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_s] = Z(s).$$

Nach [8], Theorem 5.2.3 hat die Radon-Nykodým-Dichte die Form

$$Z(t) = \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t).$$

Da wir den Prozess  $(S(t))_t$  gegeben haben durch

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t),$$

folgt hieraus, dass gilt

$$S(t) = S(0) \cdot \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^*(t))$$

und somit

$$Z(t) = \frac{e^{-rt}S(t)}{S(0)}.$$

Kommen wir nun zu einigen Eigenschaften der Radon-Nikodým-Dichte und den Zusammenhängen bei einem Wechsel des Maßes.

Für die Radon-Nikodým-Dichte  $Z$  gilt nach [8], Kapitel 5.2, die Eigenschaft

$$\tilde{\mathbb{E}}^*[X] = \mathbb{E}^*[XZ]$$

für alle Zufallsvariablen  $X$ .

Hieraus ergibt sich, dass für alle  $0 \leq t \leq T$  und jede  $\mathcal{F}_t$ -messbare Zufallsgröße  $Y$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}^*[Y] &= \mathbb{E}^*[YZ] = \mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[YZ | \mathcal{F}_t]] \\ (16) \quad &= \mathbb{E}^*[Y\mathbb{E}^*[Z | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^*[YZ(t)] \end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft, die im weiteren Verlauf zum Tragen kommt, ist die Eigenschaft, dass für  $0 \leq s \leq t \leq T$  und eine  $\mathcal{F}_t$ -messbare Zufallsgröße  $Y$  gilt

$$(17) \quad \tilde{\mathbb{E}}^*[Y | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^*[YZ(t) | \mathcal{F}_s].$$

**Beweis.** Es ist offensichtlich, dass  $\frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^*[YZ(t) | \mathcal{F}_s]$   $\mathcal{F}_s$ -messbar ist. Damit dies nun eine Form des bedingten Erwartungswertes  $\tilde{\mathbb{E}}^*[Y | \mathcal{F}_s]$  ist, muss weiterhin für alle  $A$  aus  $\mathcal{F}_s$  gelten

$$\int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^*[YZ(t) | \mathcal{F}_s]d\tilde{\mathbb{P}}^* = \int_A Yd\tilde{\mathbb{P}}^*.$$

mit den oben genannten Eigenschaften und unter Ausnutzung einiger Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int_A \frac{1}{Z(s)} \mathbb{E}^*[YZ(t) \mid \mathcal{F}_s] d\tilde{\mathbb{P}}^* \\
&= \tilde{\mathbb{E}}^* \left[ \mathbb{1}_A \frac{1}{Z(s)} \mathbb{E}^*[YZ(t) \mid \mathcal{F}_s] \right] \\
&\stackrel{(16)}{=} \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_A \mathbb{E}^*[YZ(t) \mid \mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[\mathbb{1}_A YZ(t) \mid \mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_A YZ(t)] \\
&\stackrel{(16)}{=} \tilde{\mathbb{E}}^*[\mathbb{1}_A Y] \\
&= \int_A Y d\tilde{\mathbb{P}}^*.
\end{aligned}$$

Somit gilt die oben genannte Gleichheit und wir werden diese im Folgenden verwenden. □

Kommen wir nun zurück zum betrachteten Maßwechsel. Unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathbb{P}}^*$  ist nun also  $\tilde{W}^*(t)$  eine Brownsche Bewegung und der Prozess  $(Y(t))_t$  ein Martingal.  $Y(t)$  ist festgelegt durch

$$dY(t) = \sigma(\gamma(t) - Y(t)) d\tilde{W}^*(t)$$

Da  $\gamma(t)$  die Form  $\gamma(t) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)})$  besitzt, ist  $Y(t)$  also durch eine SDE der Form

$$dY(t) = a(t, Y(t)) d\tilde{W}^*(t)$$

mit  $a(t, Y(t)) = \sigma(\gamma(t) - Y(t))$  gegeben. Die Lösung  $Y(t)$  dieser SDE ist somit ein Markov Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathbb{P}}^*$ .

Kommen wir nun zum eigentlichen Problem zurück. Wir wollen den Preis eines Asiatischen Calls berechnen, wie er in (14) gegeben ist. Durch die Definitionen von  $Y(t)$  und  $Z(t)$  und die Eigenschaften (17) der Radon-Nikodým-Dichte erhält man

$$\begin{aligned}
V(t) &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} X^+(T) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{S(t)}{e^{-rt} S(t)} \mathbb{E}^*[e^{-rT} S(T) \left( \frac{e^{-rT} X(T)}{e^{-rT} S(T)} \right)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{S(t)}{Z(t)} \mathbb{E}^*[Z(T) Y^+(T) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= S(t) \tilde{\mathbb{E}}^*[Y^+(T) \mid \mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

Da  $(Y(t))_t$  ein Markov Prozess unter dem Maß  $\tilde{\mathbb{P}}^*$  ist, gibt es eine Funktion  $g(t, y)$ , für die gilt

$$g(t, Y(t)) = \tilde{\mathbb{E}}^*[Y^+(T) \mid \mathcal{F}_t].$$

Hieraus lässt sich direkt ablesen, dass

$$g(T, Y(T)) = \tilde{\mathbb{E}}^*[Y^+(T) \mid \mathcal{F}_T] = Y^+(T)$$



gilt.  $Y(T)$  ist gegeben durch  $Y(T) = \frac{X(T)}{S(T)}$ . Somit kann es sowohl positive als auch negative Werte annehmen, da  $X(T)$  sowohl positiv als auch negativ sein kann und  $S(T)$  eine positive Zahl ist. Es ergibt sich die Bedingung für die Maturity  $T$ :

$$g(T, y) = y^+ \quad y \in \mathbb{R}$$

$g(t, Y(t)) = \tilde{\mathbb{E}}^*[Y^+(T) | \mathcal{F}_t]$  ist ein Martingal unter dem Maß  $\tilde{\mathbb{P}}^*$ . Wir bilden also nun die zu  $g(t, Y(t))$  gehörige SDE und setzen dann den  $dt$ -Term gleich Null, um so eine partielle Differentialgleichung zu erhalten, die die Funktion  $g(t, Y(t))$  erfüllt. Mit Itô ergibt sich:

$$\begin{aligned} dg(t, Y(t)) &= \partial_t g(t, Y(t))dt + \partial_y g(t, Y(t))dY(t) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g(t, Y(t)) \underbrace{d\langle Y, Y \rangle_t}_{\sigma^2(\gamma(t) - Y(t))^2 dt} \\ &= \partial_t g(t, Y(t))dt + \partial_y g(t, Y(t))(\sigma(\gamma(t) - Y(t))d\tilde{W}^*(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_{yy} g(t, Y(t))(\sigma^2(\gamma(t) - Y(t))^2 dt) \\ &= (\partial_t g(t, Y(t)) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g(t, Y(t))\sigma^2(\gamma(t) - Y(t))^2)dt \\ &\quad + \partial_y g(t, Y(t))(\sigma(\gamma(t) - Y(t))d\tilde{W}^*(t)) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass gelten muss

$$\partial_t g(t, Y(t)) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g(t, Y(t))\sigma^2(\gamma(t) - Y(t))^2 = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt ergibt sich also für den Preis eines Asiatischen Calls:

**Theorem 6.1.** Der Preis  $V(t)$  zum Zeitpunkt  $t$ , wobei  $0 \leq t \leq T$ , eines Asiatischen Calls ergibt sich als

$$V(t) = S(t)g(t, \frac{X(t)}{S(t)}).$$

Die Auszahlung zum Zeitpunkt  $T$  beträgt hierbei

$$V(T) = (\frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt - K)^+$$

und  $g(t, y)$  ist gegeben durch

$$\partial_t g(t, Y(t)) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g(t, Y(t))\sigma^2(\gamma(t) - Y(t))^2 = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Für  $X(t)$  gilt

$$X(t) = -Ke^{-r(T-t)} + \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)})S(t) + e^{-r(T-t)}\frac{1}{T} \int_0^t S(u)du,$$

für  $0 \leq t \leq T$ . Weiterhin gilt für die Funktion  $g$  zum Zeitpunkt  $T$

$$g(T, y) = y^+, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Um diese partielle Differentialgleichung lösen zu können, bedarf es noch zweier weiterer Randbedingungen, die nun angegeben werden.

Für die erste Bedingung betrachten wir den Fall  $y \rightarrow -\infty$ . Ist für einen gegebenen Zeitpunkt  $t$  mit  $0 \leq t \leq T$   $Y(t)$  eine vom Betrag große negative Zahl, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit auch  $Y(T)$  negativ. Daraus lässt sich erschließen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass  $Y^+(T) = 0$  ist, nahe an Eins ist. Wegen  $g(t, Y(t)) = \tilde{\mathbb{E}}^*[Y^+(T) | \mathcal{F}_t]$  ergibt sich dann, dass auch  $g(t, Y(t))$  nahezu Null ist. Somit ergibt sich insgesamt

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g(t, y) = 0.$$

Betrachtet man nun den Fall  $y \rightarrow \infty$ , so ergibt sich, wenn  $Y(t)$  sehr groß ist, dass die Wahrscheinlichkeit, dass auch  $Y(T) > 0$  ist, nahezu Eins ist. Dies bedeutet, dass man dann statt  $Y^+(T)$  auch  $Y(T)$  betrachten kann. Dies führt zu  $g(t, Y(t)) = \tilde{\mathbb{E}}^*[Y^+(T) | \mathcal{F}_t] \approx \tilde{\mathbb{E}}^*[Y(T) | \mathcal{F}_t]$ . Aufgrund der Martingaleigenschaft von  $Y(T)$  entspricht der rechte bedingte Erwartungswert  $Y(t)$ . Insgesamt ließt sich dies also zu:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (g(t, y) - y) = 0$$

Man hat also nun eine zu lösende PDE mit zugehörigen Randbedingungen und einer Bedingung für den Zeitpunkt  $T$  gefunden. Diese PDE werden wir im nächsten Kapitel mit der Methode der finiten Differenzen lösen und einige Ergebnisse für den Preis eines Asiatischen Calls angeben.

Kommen wir nun jedoch zunächst zur Untersuchung einer anderen Art von Asiatischen Optionen.

## 6.4 Bewertung einer Asiatischen Option unter zeitdiskreter Beobachtung

Wir wollen nun in Anlehnung an [8], Kapitel 7.5.3 eine Herleitung der Formel für die Bewertung eines zeitdiskreten Asiatischen Calls geben. Für die Auszahlung im Zeitpunkt  $T$  gilt

$$V(T) = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j) - K \right)^+$$

wobei  $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_m = T$ . Wie in der schon dargestellten stetigen Variante eines Asiatischen Calls, versuchen wir wieder eine Gleichung  $X(t)$  zu finden, die diese Auszahlung berücksichtigt und die für jedes  $t$  aus  $[0, T]$  den Wert des Portfolios angibt. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $T$  soll sich ergeben als

$$X(T) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j) - K.$$

Die Funktion  $\gamma(t)$ , die die Anzahl von Anteilen des risky assets in unserem Portfolio angibt, definieren wir in diesem Fall als

$$\gamma(t_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=j}^m e^{-r(T-t_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

wobei wir weiterhin festlegen, dass gilt

$$\gamma(t) = \gamma(t_j), \quad t_{j-1} < t \leq t_j.$$

Somit wird  $\gamma(t)$  für alle  $t$  aus dem Intervall  $[0, T]$  definiert. Man kann sehen, dass für diese Funktion

$$(18) \quad \gamma(t_j) = \gamma(t_{j-1}) - \frac{1}{m} e^{-r(T-t_{j-1})}, \quad j = 1, \dots, m,$$

und  $\gamma(T) = \gamma(t_m) = \frac{1}{m}$  gilt.

Es gilt weiterhin, wie auch im stetigen Fall der Zusammenhang

$$d(e^{r(T-t)} X(t)) = d(e^{r(T-t)} \gamma(t) S(t)) - e^{r(T-t)} S(t) d\gamma(t),$$

jedoch ist in der jetzigen Situation  $d\gamma(t) = 0$  in jedem Intervall  $(t_{j-1}, t_j)$ . Durch Integrieren dieser Gleichung von  $t_{j-1}$  bis  $t_j$  erhält man

$$\begin{aligned} & e^{r(T-t_j)} X(t_j) - e^{r(T-t_{j-1})} X(t_{j-1}) \\ &= \gamma(t_j) (e^{r(T-t_j)} S(t_j) - e^{r(T-t_{j-1})} S(t_{j-1})) \\ &= \gamma(t_j) e^{r(T-t_j)} S(t_j) - \left( \gamma(t_{j-1}) - \frac{1}{m} e^{-r(T-t_{j-1})} \right) e^{r(T-t_{j-1})} S(t_{j-1}) \\ &= \gamma(t_j) e^{r(T-t_j)} S(t_j) - \gamma(t_{j-1}) e^{r(T-t_{j-1})} S(t_{j-1}) + \frac{1}{m} S(t_{j-1}). \end{aligned}$$

Hierbei ergibt sich die erste Gleichheit unter Benutzung der Eigenschaft  $\gamma(t) = \gamma(t_j)$  für  $t$  aus  $(t_{j-1}, t_j]$ . Die zweite Gleichheit erfolgt aufgrund von Gleichung (18).

Summiert man nun diese Gleichung von  $j = 1$  bis  $j = k$  auf, so kann man sehen, dass gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k e^{r(T-t_j)} X(t_j) - e^{r(T-t_{j-1})} X(t_{j-1}) \\ &= e^{r(T-t_k)} X(t_k) - e^{rT} X(0) \\ &= \gamma(t_k) e^{r(T-t_k)} S(t_k) - \gamma(0) e^{rT} S(0) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k S(t_{j-1}) \\ &= \gamma(t_k) e^{r(T-t_k)} S(t_k) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - \left( \gamma(0) e^{rT} - \frac{1}{m} \right) S(0). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$X(0) = e^{-rT} \left( \gamma(0) e^{rT} - \frac{1}{m} \right) S(0) - e^{-rT} K.$$

Setzt man dies in die davor erhaltene Gleichung ein, so ergibt sich dann

$$e^{r(T-t_k)} X(t_k) = \gamma(t_k) e^{r(T-t_k)} S(t_k) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - K,$$

was äquivalent ist zu

$$X(t_k) = \gamma(t_k)S(t_k) + e^{-r(T-t_k)} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - e^{-r(T-t_k)} K.$$

Für die Maturity  $T$  ergibt sich somit wie gewünscht die Bedingung

$$X(T) = X(t_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i) - K.$$

Um nun  $X(t)$  für  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  zu erhalten, wird die Gleichung

$$d(e^{r(T-t)} X(t)) = d(e^{r(T-t)} \gamma(t) S(t)) - e^{r(T-t)} S(t) d\gamma(t)$$

von  $t_k$  bis  $t$  integriert und es ergibt sich mit der obigen Gleichung für  $X(t_k)$  und unter Benutzung der Gleichung (18)

$$\begin{aligned} & e^{r(T-t)} X(t) \\ &= e^{r(T-t_k)} X(t_k) + \gamma(t_{k+1}) (e^{r(T-t)} S(t) - e^{r(T-t_k)} S(t_k)) \\ &= \gamma(t_k) e^{r(T-t_k)} S(t_k) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - K + \gamma(t_{k+1}) e^{r(T-t)} S(t) \\ &\quad - \left( \gamma(t_k) - \frac{1}{m} e^{-r(T-t_k)} \right) e^{r(T-t_k)} S(t_k) \\ &= \gamma(t_{k+1}) e^{r(T-t)} S(t) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k S(t_i) - K. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung für den Prozess  $X(t)$ :

$$X(t) = \gamma(t_{k+1}) S(t) + e^{-r(T-t)} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k S(t_i) - e^{-r(T-t)} K, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

Nach Durchführung eines Wechsel des Numéraires wie im stetigen Fall auf Seite 37 beschrieben, ergibt sich die in Theorem 6.1 angegebene zu lösende PDE mit entsprechenden Funktionen für  $X(t)$  und  $\gamma(t)$ , die für den diskreten Fall hergeleitet wurden.

Auch im diskreten Modell kann man die Preise asiatischer Optionen berechnen und die so gewonnenen Ergebnisse mit denen anderer Methoden vergleichen. Dies werden wir wie auch für den stetigen Fall im nächsten Kapitel angeben.

## 6.5 Ergebnisse und Vergleich mit anderen Methoden

Neben der Methode der finiten Differenzen angewandt auf die in Anlehnung an [8] hergeleitete PDE gibt es noch weitere Möglichkeiten Asiatische Optionen zu bewerten. Eine Möglichkeit ist die Benutzung von Monte Carlo Simulationen, eine andere ist die numerische Inversion der Laplace Transformierten eines Asiatischen Optionspreises. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Herleitung einer anderen

PDE nach [12] oder die Benutzung einiger Approximationen mit sogenanntem "moment matching" wie es in [14] gemacht wird.

In einer Tabelle geben wir die Preise verschiedener Asiatischer Calls bei einem Strike Preis von  $K = 2$  für die stetige Methode an. „TW“ gibt die von Turnbull und Wakeman berechneten Preise mit der Methode aus [14] an. „Vecer,GE“ enthält die von Geman-Eydeland berechneten Preise unter Benutzung der Inversion der Laplace Transformierten, die mit denen von Vecer beim Lösen einer PDE übereinstimmen. „MC“ zeigt die mit der Monte Carlo Methode berechneten Werte an. Diese Werte sind auch zu finden in [11]. Des Weiteren werden die mit der Crank-Nicolson (C-N) sowie die mit der impliziten Methode (Impl.) berechneten Werte angegeben. Für den unteren Randwert wird gewählt  $z_L = -2$  und für den oberen Randwert  $z_U = 2$ . Es werden sowohl auf der Zeitachse als auch auf der  $z$ -Achse 500 Intervalle gebildet.

Die Ergebnisse sehen dann wie folgt aus:

$r$	$\sigma$	$T$	$S(0)$	Vecer,GE	TW	MC	C-N	Impl.
0.05	0.5	1	1.9	0.1932	0.195	0.196	0.1932	0.1921
0.05	0.5	1	2.0	0.2464	0.250	0.249	0.2464	0.0.2453
0.05	0.5	1	2.1	0.3062	0.311	0.309	0.3062	0.3052
0.02	0.1	1	2.0	0.0560	0.0568	0.0565	0.0560	0.0558
0.18	0.3	1	2.0	0.2184	0.220	0.220	0.2184	0.2177
0.0125	0.25	2	2.0	0.1723	0.173	0.172	0.1723	0.1715
0.05	0.5	2	2.0	0.3501	0.359	0.348	0.3501	0.3486

Wie man sehen kann, stimmen die Ergebnisse der Methoden der finiten Differenzen sowohl bei Anwendung des impliziten Schemas, als auch bei Verwendung des Crank-Nicolson Schemas mit den anderen angegebenen Verfahren ziemlich genau überein.

Ein Vorteil der vorgestellten Methode liegt darin, dass man sie auch verwenden kann um den diskreten Fall einer Asiatischen Option zu behandeln. Auch hier erhalten wir, wie in der folgenden Tabelle ersichtlich, Ergebnisse die mit denen anderer Methoden verträglich sind. Zum Vergleich betrachten wir die nach [12] gewonnene PDE versehen mit Sprüngen, die von Tavella und Randall berechnet wurden. Ein weiterer Vergleichswert ergibt sich durch Annäherungen mit geometrischen Bedingungen, wie sie von Curran gemacht wurden. Wir wollen nicht näher auf diese Verfahren eingehen, sondern lediglich die durch diese Verfahren berechneten Werte zum Vergleich betrachten. Die Werte sind auch zu finden in [11], wobei auch die bei der dort angegebenen PDE erhaltenen Werte zum Vergleich dargestellt werden unter Vecer. Wir berechnen die Werte wie auch im stetigen Fall wieder mit der impliziten Methode und mit dem Crank-Nicolson Verfahren. Dabei werden wir verschiedene Anzahlen an Sprungstellen untersuchen. Als feste Werte werden gewählt:  $r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, K = 100$ . Der obere Randwert ist  $z_U = 2$ , der untere Wert ist  $z_L = -2$  und es werden in beiden Gitterrichtungen jeweils 500 Intervalle genommen.

$S(0)$	Sprungst.	Vecer	Tavella-Randall	Curran	C-N	Impl.
95	25	8.7080	8.6974	8.7053	8.7078	8.6818
95	50	8.5367	8.5383	8.5340	8.5359	8.5089
95	125	8.4339	8.4304	8.4314	8.4334	8.4085
100	10	12.0420	12.0348	12.0390	12.0425	12.0190
100	125	11.1967	11.1929	11.1940	11.1961	11.1708
100	250	11.1600	11.1573	11.1572	11.1594	11.1341
105	50	14.4601	14.4519	14.4575	14.4607	14.4344
105	125	14.3455	14.3424	14.3430	14.3459	14.3218

## 6.6 Put-Call Parität Asiatischer Optionen

Um nicht nur die Preise Asiatischer Calls, sondern auch die der entsprechenden Put Optionen berechnen zu können, bedient man sich der Put-Call Parität für Asiatische Optionen. Wir betrachten zunächst die Put-Call Parität im stetigen Fall und den in der Arbeit untersuchten Preis zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Für einen Asiatischen Call gilt zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$C(0) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(\frac{1}{T} \int_0^T S(u)du - K)^+ | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^*[e^{-rT} X^+(T) | \mathcal{F}_0]$$

Für einen Asiatischen Put gilt zu einem Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$P(0) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(K - \frac{1}{T} \int_0^T S(u)du)^+ | \mathcal{F}_0] = -\mathbb{E}^*[e^{-rT} X^-(T) | \mathcal{F}_0].$$

Hierbei ist  $X^-(T) := \min(X(T), 0)$ .

Im stetigen Fall gilt

$$X(t) = -Ke^{-r(T-t)} + \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)})S(t) + e^{-r(T-t)} \frac{1}{T} \int_0^t S(u)du$$

und somit

$$X(0) = -Ke^{-rT} + \frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S(0).$$

Hiermit und aufgrund der Martingaleigenschaft von

$$e^{-rt} X(t) = \mathbb{E}^*[e^{-rT} X(T) | \mathcal{F}_t]$$

unter dem Maß  $\mathbb{P}^*$  ergibt sich

$$\begin{aligned} C(0) - P(0) &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}(\frac{1}{T} \int_0^T S(u)du - K)^+ | \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}^*[e^{-rT}(K - \frac{1}{T} \int_0^T S(u)du)^+ | \mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}(\frac{1}{T} \int_0^T S(u)du - K) | \mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rT} X(T) | \mathcal{F}_0] \\ &= X(0) \\ &= -Ke^{-rT} + \frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S(0). \end{aligned}$$

Für den Fall  $t = 0$ , den wir in unseren Berechnungen immer betrachtet haben, ergibt sich dann somit die Put-Call Parität

$$C(0) - P(0) = -Ke^{-rT} + \frac{1}{rT}(1 - e^{-rT})S(0).$$

Betrachten wir nun den diskreten Fall zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Für einen Asiatischen Call gilt in  $t = 0$ :

$$C(0) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}X^+(T) | \mathcal{F}_0]$$

Für einen Asiatischen Put gilt in  $t = 0$

$$P(0) = -\mathbb{E}^*[e^{-rT}X^-(T) | \mathcal{F}_0]$$

wobei  $X(t)$  gegeben ist durch

$$X(t) = \gamma(t_{k+1})S(t) + e^{-r(T-t)} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k S(t_i) - e^{-r(T-t)}K, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

Für den Anfangswert  $X(0)$  ergibt sich unter Benutzung der Definition von  $\gamma$  im diskreten Fall, der Eigenschaft, dass  $t_i = \Delta_t i$  und mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} X(0) &= e^{-rT}(\gamma(0)e^{rT} - \frac{1}{m})S(0) - e^{-rT}K \\ &= S(0)\gamma(0) - \frac{1}{m}e^{-rT}S(0) - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0) \sum_{i=0}^m e^{-r(T-t_i)} - \frac{1}{m}e^{-rT}S(0) - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0)e^{-rT}(\sum_{i=0}^m e^{rt_i} - 1) - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0)e^{-rT}(\sum_{i=0}^m e^{r\Delta_t i} - 1) - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0)e^{-rT}(\frac{e^{r\Delta_t(m+1)} - 1}{e^{r\Delta_t} - 1} - 1) - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0)e^{-rT} \frac{e^{r\Delta_t(m+1)} - e^{r\Delta_t}}{e^{r\Delta_t} - 1} - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0) \frac{e^{r\Delta_t} - e^{r\Delta_t}e^{-rT}}{e^{r\Delta_t} - 1} - e^{-rT}K \\ &= \frac{1}{m}S(0) \frac{1 - e^{-rT}}{1 - e^{-r\Delta_t}} - e^{-rT}K. \end{aligned}$$

Es folgt somit durch analoge Herleitung wie im stetigen Fall:

$$C(0) - P(0) = \frac{1}{m}S(0) \frac{1 - e^{-rT}}{1 - e^{-r\Delta_t}} - e^{-rT}K$$

## 7 Fazit und Ausblick

Wie diese Arbeit zeigt, ist es möglich mit der dargestellten Methode der finiten Differenzen den Preis eines Asiatischen Calls beziehungsweise Puts bei einem betrachteten Underlying zu berechnen. Diese Methode stimmt mit anderen Approximationen bis auf geringe Abweichungen überein und es ist daher möglich in wenigen Sekunden Berechnungszeit einen genauen Wert für den Preis einer solchen Option anzugeben. Dies ist sowohl für den Fall einer zeitdiskreten Mittelwertbildung, als auch für den Fall eines zeitstetigen Mittelwertes anwendbar.

Die in Kapitel 5 dargestellten Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen sind in dieser Arbeit nur im Falle zweier auftretender Variablen, der Zeit und einer weiteren auftretenden Raumvariablen, durchgeführt und angewandt worden. Um etwa partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung von Optionspreisen in Modellen mit stochastischer Volatilität behandeln zu können, bedarf es der Einführung einer weiteren Variablen und so der Anwendung der finiten Differenzen in einem dreidimensionalen Raster. So ist es, wie zum Beispiel in [15] dargestellt, auch möglich Asiatische Optionen unter Annahme eines Modells mit stochastischer Volatilität mit Methoden der finiten Differenzen zu bewerten. In umfangreicheren Arbeiten und Untersuchungen wäre es von Interesse eine dreidimensionale Benutzung der dargestellten numerischen Approximationen zu verwenden und so die in komplexeren Modellen auftretenden partiellen Differentialgleichungen lösen zu können.

Des Weiteren ist die Betrachtung und Anwendung der finiten Differenzen nur auf den Fall eines einzigen Underlyings angewendet worden. Nach [2], Kapitel 10 ist die Anwendung auch bei Modellen mit mehreren Underlyings, zum Beispiel bei der Betrachtung von Basket-Optionen, möglich. Eine starke Beeinträchtigung besteht jedoch, wie bei der Verwendung von Binomialmodellen, im Rechenaufwand. Die Berechnungszeit bei Verwendung mehrerer Underlyings wächst exponentiell mit der Anzahl der Underlyings. Bei Betrachtung sehr weniger oder, wie in der Arbeit geschehen, nur eines einzigen Underlyings ist die Verwendung von PDE Methoden jedoch sehr schnell und sehr genau und wird daher oftmals anderen Methoden vorgezogen.

Insgesamt betrachtet sind in der Arbeit erste Einblicke und Anwendungen der Bewertung von Finanzderivaten unter Benutzung partieller Differentialgleichungen und deren numerischer Lösung gegeben worden. Eine in komplexen Finanzmodellen oft notwendige Verknüpfung der Finanzmathematik mit der Numerischen Mathematik kann so hergestellt werden.



## 8 Anhang

### 8.1 Quellcodes ausgewählter Programme zur Bewertung Asiatischer Optionen

Um die Berechnung des Preises eines Asiatischen Calls durchzuführen, sind sowohl die vorgestellte implizite Methode als auch der Crank-Nicolson Algorithmus verwendet worden. Diese beiden Algorithmen werden im Folgenden angegeben. Weitere Algorithmen die in dieser Arbeit verwendet wurden, sind auf der beige-fügten CD zu finden.

Matlab Implementierung des Crank-Nicolson Verfahrens:

```
%% Dies ist der allgemeine Crank–Nicolson Algorithmus. Benötigt werden die
%% Werte für die Maturity T, oberen und unteren Rand (zu und zl), Anzahl
%% der Schritte in Zeit– bzw. Raumrichtung (n,m). Es werden Funktionen
%% benötigt, die das Verhalten zur Maturity beschreiben (f), die das
%% Verhalten auf oberem Rand (u) und unterem Rand (l) beschreiben, sowie
%% Funktionen, die wie in der Bachelorarbeit angegeben in parabolischen
%% PDEs auftauchen können (a,b,c,d).
```

```
function [v] = crankallg2(T,zu,zl,m,n,f,l,u,a,b,c,d)
    %Parameter der die Länge eines Schrittes in Zeitrichtung angibt:
    dt=T/(n);

    %Parameter der die Länge eines Schrittes in Raumrichtung angibt:
    dz=(zu-zl)/(m);

    %Feste Werte, die auch so in der Bachelorarbeit definiert wurden:
    alpha=dt/(dz^2);
    beta=dt/dz;

    %Matrix die später alle auf den Gitterpunkten auftretenden Werte der
    %Funktion enthält:
    v=zeros(m+1,n+1);

    %Matrix, die mit den folgenden Werten multipliziert wird in der
    %Crank–Nicolson Methode:
    C=zeros(m-1,m-1);

    %Matrix, die mit aktuellen Funktionswerten multipliziert wird:
    D=zeros(m-1,m-1);

    %Enthält die beiden Randwerte und weitere Werte, die nicht mit Vektoren
    %multipliziert werden müssen:
    g=zeros(m-1,n);
```

```

%Berechnen der Werte eines Calls zur Maturity:
for j =2:(m)
    v(j,1)=max(f(zl+(j-1)*dz,0),0);
end
%Berechnen der Randwerte mit den gegebenen Funktionen:
for i =1:(n+1)
    v(1,i)=l(zl+(1)*dz,(i-1)*dt);
    v(m+1,i)=u(zl+(m)*dz,(i-1)*dt);
end
%Setzen der Werte für g:
for i=1:n
    g(1,i)=(-(alpha/2*a(zl+1*dz,i*dt-dt/2)- beta/4* b(zl+1*dz,i*dt-
        dt/2))*v(1,i+1)-(alpha/2*a(zl+1*dz,i*dt-dt/2)- beta/4* b(zl
        +1*dz,i*dt-dt/2))*v(1,i))-dt*d(zl+1*dz,(i-1)*dt);
    g(m-1,i)=(-(alpha/2*a(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2)+ beta/4* b(zl+(m-1)
        *dz,i*dt-dt/2))*v(m+1,i+1)-(alpha/2*a(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2)
        + beta/4* b(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2))*v(m+1,i))-dt*d(zl+(m-1)*
        dz,(i-1)*dt);
    for j=2:m-2
        g(j,i)= -d(zl+j*dz,(i-1)*dt);
    end
end
end

%Definieren der Tridiagonalmatrizen C und D wie im Algorithmus
%vorgeschrieben
for i=1:(n)
    for j=2:(m-2)
        C(1,1)=-1-alpha *a(zl+1*dz,i*dt-dt/2)+dt*c(zl+1*dz,i*dt-dt/2)/2;
        C(1,2)=(alpha/2*a(zl+1*dz,i*dt-dt/2)+ beta/4* b(zl+1*dz,i*dt-dt
            /2));
        C(j,j+1)=(alpha/2*a(zl+j*dz,i*dt-dt/2)+ beta/4* b(zl+j*dz,i*dt-
            dt/2));
        C(j,j)=-1-alpha *a(zl+j*dz,i*dt-dt/2)+dt*c(zl+j*dz,i*dt-dt/2)/2;
        C(j,j-1)=(alpha/2*a(zl+j*dz,i*dt-dt/2)- beta/4* b(zl+j*dz,i*dt-
            dt/2));
        C(m-1,m-1)=-1-alpha *a(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2)+dt*c(zl+(m-1)*dz,i
            *dt-dt/2)/2;
        C(m-1,m-2)=(alpha*1/2*a(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2)- beta/4* b(zl+(m
            -1)*dz,i*dt-dt/2));
        D(1,1)=-1+alpha *a(zl+1*dz,i*dt-dt/2)-dt*c(zl+1*dz,i*dt-dt/2)/2;
    end
end

```

```

D(1,2)=-(alpha*1/2*a(zl+1*dz,i*dt-dt/2)+ beta/4* b(zl+1*dz,i*dt-
dt/2));
D(j,j+1)=-(alpha*1/2*a(zl+j*dz,i*dt-dt/2)+ beta/4* b(zl+j*dz,i*
dt-dt/2));
D(j,j)=-1+alpha *a(zl+j*dz,i*dt-dt/2)-dt*c(zl+j*dz,i*dt-dt/2)/2;
D(j,j-1)=-(alpha*1/2*a(zl+j*dz,i*dt-dt/2)- beta/4* b(zl+j*dz,i*
dt-dt/2));
D(m-1,m-1)=-1+alpha *a(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2)-dt*c(zl+(m-1)*dz,i
*dt-dt/2)/2;
D(m-1,m-2)=-(alpha*1/2*a(zl+(m-1)*dz,i*dt-dt/2)- beta/4* b(zl+(m
-1)*dz,i*dt-dt/2));

end
%Lösen des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der nächsten
%Einträge von v:
v(2:m,i+1)=C\D*(v(2:m,i)+g(1:m-1,i));
end

```

end

Die Matlab Implementierung des impliziten Verfahrens sieht wie folgt aus:

```

%% Dies ist der allgemeine Implizite Algorithmus. Benötigt werden die
%% Werte für die Maturity T, oberen und unteren Rand (zu und zl), Anzahl
%% der Schritte in Zeit– bzw. Raumrichtung (n,m). Es werden Funktionen
%% benötigt, die das Verhalten zur Maturity beschreiben (f), die das
%% Verhalten auf oberem Rand (u) und unterem Rand (l) beschreiben, sowie
%% Funktionen, die wie in der Bachelorarbeit angegeben in parabolischen
%% PDEs auftauchen können (a,b,c,d).

```

```

function [v] = implizitalg2(T,zu,zl,m,n,f,l,u,a,b,c,d)

```

```

%Parameter der die Länge eines Schrittes in Zeitrichtung angibt:
dt=T/(n);

```

```

%Parameter der die Länge eines Schrittes in Raumrichtung angibt:
dz=(zu-zl)/(m);

```

```

%Feste Werte, die auch so in der Bachelorarbeit definiert wurden:
alpha=dt/(dz^2);
beta=dt/dz;

```

```

%Matrix die später alle auf den Gitterpunkten auftretenden Werte der
%Funktion enthält:
v=zeros(m+1,n+1);
%Matrix, die mit den folgenden Werten multipliziert wird in der
%Impliziten Methode:
B=zeros(m-1,m-1);

%Enthält die beiden Randwerte und weitere Werte, die nicht mit Vektoren
%multipliziert werden müssen:
g=zeros(m-1,n);

%Berechnen der Werte eines Calls zur Maturity:
for j =2:(m)
    v(j,1)=max(f(zl+(j-1)*dz,0),0);
end

%Berechnen der Randwerte mit den gegebenen Funktionen:

for i =1:(n+1)
    v(1,i)=l(zl+(j-1)*dz,(i-1)*dt);
    v(m+1,i)=u(zl+(j-1)*dz,(i-1)*dt);
end

%Setzen der Werte für g:
for i=1:n
    g(1,i)=(alpha*a(zl+1*dz,(i-1)*dt)- beta/2* b(zl+1*dz,(i-1)*dt))*
        v(1,i+1)+dt*d(zl+1*dz,(i-1)*dt);
    g(m-1,i)=(alpha*a(zl+(m-1)*dz,(i-1)*dt)+ beta/2* b(zl+(m-1)*dz,(
        i-1)*dt))*v(m+1,i+1)+dt*d(zl+(m-1)*dz,(i-1)*dt);
    for j=2:m-2
        g(j,i)= d(zl+j*dz,(i-1)*dt);
    end
end

%Definieren der Tridiagonalmatrix B wie im Algorithmus vorgeschrieben
for i=1:(n)
    for j=2:(m-2)
        B(1,1)=1+2*alpha *a(zl+1*dz,(i-1)*dt)-dt*c(zl+1*dz,(i-1)*dt);
        B(1,2)=- (alpha*a(zl+1*dz,(i-1)*dt)+ beta/2* b(zl+1*dz,(i-1)*dt)
        );
    end
end

```

```

B(j,j+1)=-(alpha*a(zl+j*dz, (i-1)*dt)+ beta/2* b(zl+j*dz,(i-1)*
dt ));
B(j,j)=1+2*alpha *a(zl+j*dz, (i-1)*dt)-dt*c(zl+j*dz,(i-1)*dt);
B(j,j-1)=-(alpha*a(zl+j*dz,(i-1)*dt)- beta/2* b(zl+j*dz, (i-1)*
dt));
B(m-1,m-1)=1+2*alpha *a(zl+(m-1)*dz, (i-1)*dt)-dt*c(zl+(m-1)*dz
,(i-1)*dt);
B(m-1,m-2)=-(alpha*a(zl+(m-1)*dz,(i-1)*dt)- beta/2* b(zl+(m-1)*
dz, (i-1)*dt));
end
%Lösen des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der nächsten
%Einträge von v:
v(2:m,i+1)=B\v(2:m,i)+g(1:m-1,i);
end

```

end

Um nun den Wert eines Asiatischen Calls bei gegebenem Startwert  $S(0)$  zu berechnen, wird bei stetiger Berechnung des Mittelwertes das folgende Programm verwendet:

```

%% Dies ist die Funktion zur Berechnung des Preises eines Asiatischen
%% Calls. Es wird der Crank–Nicolson Algorithmus verwendet. Einzugeben
%% sind der Startwert (S0), die Maturity (T), der Strike Preis (K), sowie
%% die Volatilität sigma und der Zinssatz r. Dieses Programm dient der
%% Berechnung des Preises im stetigen Asiatischen Modell.

```

```

function [price]=testasian(S0,K,r,sigma,T)
%Definition der Funktion die den Wert zur Maturity angibt:
f = @(x,y)x;
%Definition der Funktion die das Verhalten am unteren Rand angibt:
l= @(x,y) 0;
%Definition der Funktion die das Verhalten am oberen Rand angibt:
u=@(x,y) x;
%Oberer Randpunkt:
zu=2;
%Unterer Randpunkt:
zl=-2;
%Anzahl an Raumintervallen:
m=200;
%Anzahl an Zeitintervallen
n=200;

```

```

%Abstände im Gitter:
dt=T/(n);
dz=(zu-zl)/(m);
%Die sich aus den Abständen ergebenden Konstanten:
alpha=dt/(dz^2);
beta=dt/dz;
%Definition der Koeffizienten der PDE:
a=@(x,y) sigma^2/2*(1/(r*T)*(1-exp(-r*y))-x)^2;
b=@(x,y) 0;
c=@(x,y) 0;
d=@(x,y) 0;
%Aufrufen des Crank–Nicolson Algorithmus:
v=cranknlg2(T,zu,zl,m,n,f,l,u,a,b,c,d);
%Setzen eines Vektors der alle Raumwerte enthält:
z=zeros(m+1,1);
for j=0:m
    z(j+1)=zl+j*dz;
end
%Setzen eines Vektors der alle Raumwerte enthält:
time=zeros(n+1,1);
for i=0:n
    time(i+1)=i*dt;
end

%Bestimmung von X0 bei Asiatischen Optionen

X_0 = (1-exp(-r*T))*S0/r/T - exp(-r*T)*K;

%Bestimmung des Wertes, an dem die Funktion ausgewertet werden soll:
x0 = X_0/S0;

%Auswerten der aus der PDE erhaltenen Funktion bei Startwert x0:
uout = pdeval(0,z,v(:,n+1),x0);
%Berechnung des Preises:
price = uout*S0;

end

```

Für die implizite Methode wird genauso vorgegangen, es wird dann jedoch das Programm mit dem impliziten Algorithmus aufgerufen. Im Fall eines Mittelwertes berechnet über diskrete Zeitpunkte, wird bei Berechnung mit dem Crank-Nicolson Algorithmus das folgende Verfahren verwendet:

```

%% Dies ist die Funktion zur Berechnung des Preises eines Asiatischen
%% Calls. Es wird der Crank–Nicolson Algorithmus verwendet. Einzugeben
%% sind der Startwert (S0), die Maturity (T), der Strike Preis (K), sowie
%% die Volatilität sigma und der Zinssatz r. Weiterhin wird die Anzahl der
%% Stützstellen M angegeben. Dieses Programm dient der

```

%% Berechnung des Preises im diskreten Asiatischen Modell.

```
function [price]=testasian2(S0,K,r,sigma,T,M)

%Definition der Funktion die den Wert zur Maturity angibt:
f = @(x,y)x;
%Definition der Funktion die das Verhalten am unteren Rand angibt:
l= @(x,y) 0;
%Definition der Funktion die das Verhalten am oberen Rand angibt:
u=@(x,y) x;
%Oberer Randpunkt:
zu=2;
%Unterer Randpunkt:
z1=-2;
%Anzahl an Raumintervallen:
m=500;
%Anzahl an Zeitintervallen
n=500;
%Abstände im Gitter:
dt=T/(n);
dz=(zu-z1)/(m);
%Die sich aus den Abständen ergebenden Konstanten:
alpha=dt/(dz^2);
beta=dt/dz;

p=zeros(1,M+1);
%Bestimmung der für die Funktion Gamma später aufzusummierenden Werte:
for i=1:M+1
    p(i)=1/M * exp(-r*(T-(i-1)*T/M));
end

%Berechnung der einzelnen Funktionswerte der späteren Funktion Gamma:
gamma=zeros(1,M+1);
for i=1:M+1
    gamma(M+2-i) = ( sum(p(i+1:M+1))) ;
end

%Definition der Funktion Gamma, so wie diese hergeleitet wurde:
Gamma = @(y) gamma(ceil(y*M)+1);
%Definition der Koeffizienten der PDE:
a= @(x,y) sigma^2/2*(Gamma(y)-x)^2;
```

```

b=@(x,y) 0;
c=@(x,y) 0;
d=@(x,y) 0;
%Aufrufen des Crank–Nicolson Algorithmus:
v=crankallg2(T,zu,zl,m,n,f,l,u,a,b,c,d);
%Setzen eines Vektors der alle Raumwerte enthält:
z=zeros(m+1,1);
for j=0:m
    z(j+1)=zl+j*dz;
end
%Setzen eines Vektors der alle Raumwerte enthält:
time=zeros(n+1,1);
for i=0:n
    time(i+1)=i*dt;
end
%Bestimmung von X0 bei Asiatischen Optionen
X_0 = S0/M*(1-exp(-r*T))/(1-exp(-r*T/M)) - exp(-r*T)*K;

%Bestimmung des Wertes, an dem die Funktion ausgewertet werden soll:
x0 = X_0/S0;

%Auswerten der aus der PDE erhaltenen Funktion bei Startwert x0:
uout = pdeval(0,z,v(:,n+1),x0);
%Berechnung des Preises:
price = uout*S0;

end

```

Für das implizite Verfahren wird entsprechend der implizite Algorithmus aufgerufen.

Weitere Algorithmen und alle genutzten Programme sind auf der beigefügten CD zu finden.



## Literatur

- [1] G. FUSAI, A. RONCORONI: *Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and Cases*. Springer-Verlag, 2008
- [2] K. BACK: *A Course in Derivative Securities*. Springer-Verlag, 2005
- [3] A. IRLE: *Finanzmathematik (2. Auflage)*. Teubner-Verlag, 2003
- [4] B. OKSENDAL: *Stochastic Differential Equations (6. Edition)*. Springer-Verlag, 2003
- [5] H. H. KUO: *Introduction to Stochastic Integration*. Springer-Verlag 2006
- [6] A. ETHERIDGE: *A Course in Financial Calculus*. Cambridge, 2002
- [7] T. BJORK: *Arbitrage Theory in Continuous Time (3. Edition)*. Oxford, 2009
- [8] S. E. SHREVE: *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer-Verlag, 2004
- [9] I. KARATZAS, S. E. SHREVE: *Brownian Motion and Stochastic Calculus (2. Edition)*. Springer-Verlag, 1997
- [10] G. KALLIANPUR, R. L. KARANDIKAR: *Introduction to Option Pricing Theory*. Birkhäuser, 2000
- [11] J. VECER: *Unified Asian pricing*. Risk Magazine (Vol. 15, No. 6, pp. 113-116), 2002
- [12] L. C. G. ROGERS, Z. SHI: *The value of an Asian option*. Journal of Applied Probability (Vol. 32, pp. 1077-1088), 1995
- [13] F. DUBOIS, T. LELIEVRE: *Efficient Pricing of Asian Options by the PDE Approach*. Journal of Computational Finance (Vol. 8, No. 2, pp. 55-64), 2005
- [14] S. TURNBULL, L. WAKEMAN: *A quick algorithm for pricing European average options*. Journal of Financial and Quantitative Analysis (Vol. 26, pp. 377-389), 1992
- [15] J.-P. FOUQUE, C.-H. HAN: *Pricing Asian Options with Stochastic Volatility*. Quantitative Finance (Vol. 3, pp. 353-362), 2003
- [16] M. GÜNTHER, A. JÜNGEL: *Finanzderivate mit Matlab (2. Auflage)*. Vieweg+Teubner, 2010