

# Portfoliooptimierung nach dem Markowitz-Ansatz

## Bachelorarbeit

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für mathematische Statistik

vorgelegt von: Benjamin Kraska  
Matrikelnummer: 366457  
Betreuer: PD. Dr. Paulsen  
Abgabedatum: 5. September 2012

---

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Bachelorarbeit wird der Markowitz-Ansatz zur Portfoliooptimierung in Ein-Perioden-Finanzmarktmodellen behandelt. Unter Benutzung der Lagrange-Methode leiten wir eine explizite Lösung für das Varianz-Minimierungs-Problem her. Unterschieden wird dabei zwischen Finanzmarktmodellen mit ausschließlich risikobehafteten, paarweise nicht vollständig gleich- oder gegenläufigen Finanzinstrumenten, und Finanzmarktmodellen, die zusätzlich zu derartigen Finanzinstrumenten genau eine festverzinsliche, risikolose Kapitalanlage beinhalten. Im ersten Fall geben wir zusätzlich eine Lösung des Rendite-Maximierungs-Problems an und führen diese auf das Varianz-Minimierungs-Problem zurück. Darüber hinaus beschäftigen wir uns mit dem Diversifikationseffekt und zeigen, dass die durch Diversifikation erzielte Risikominderung antiton von der Kovarianz der beteiligten Finanzinstrumente abhängt.

## Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Diversifikation	10
3	Minimum-Varianz-Portfolioanalyse ohne festverzinsliche Kapitalanlage	17
4	Minimum-Varianz-Portfolioanalyse unter Einbeziehung einer festverzinslichen Kapitalanlage	31
5	Fazit	41
6	Anhang	43

## Einleitung

Für einen Investor, der ein Portfolio, das heißt Besitzanteile an verschiedenen Finanzinstrumenten<sup>1</sup> zusammenstellen möchte, ergibt sich folgendes Problem: Er möchte in die gegebenen Finanzinstrumente so investieren, dass das durch diese Investition gegebene Portfolio einerseits eine möglichst hohe Rendite besitzt, andererseits aber ein möglichst geringes Verlustrisiko aufweist. Theoretisch kann er eine beliebig hohe erwartete Rendite dadurch erreichen, dass er einen Leerverkauf eines Finanzinstruments mit niedriger erwarteter Rendite durchführt und die erhaltene Leihe in ein Finanzinstrument mit hoher erwarteter Rendite investiert. Allerdings wächst mit der erwarteten Rendite zugleich das Verlustrisiko seiner Anlagestrategie und ist theoretisch unbeschränkt. Umgekehrt versprechen besonders risikoarme Portfolios meist nur eine relativ geringe erwartete Rendite. Die Ansprüche Risikominimierung und Renditemaximierung sind damit nicht simultan erfüllbar.

In Ermangelung eines global besten Portfolios bietet der *Markowitz-Ansatz*, auch *Erwartungswert-Varianz-Ansatz* genannt, einen Kompromiss zwischen den Ansprüchen Renditemaximierung und Risikominimierung. Er tritt im Wesentlichen in zwei Ausprägungen auf, die darin bestehen,

1. zu vorgegebenem  $m \in \mathbb{R}$  ein Portfolio zu bestimmen, welches eine erwartete Mindestrendite  $m$  besitzt und das Risiko unter all jenen Portfolios minimiert, welche ebenfalls eine erwartete Rendite von mindestens  $m$  besitzen (*Varianz-Minimierungs-Problem*), bzw.
2. zu vorgegebener Risikoschranke  $\sigma \geq 0$  ein Portfolio zu bestimmen, dessen Risiko diese Schranke nicht überschreitet und dessen erwartete Rendite maximal ist unter allen Portfolios, welche ebenfalls die Risikoschranke  $\sigma$  einhalten (*Renditen-Maximierungs-Problem*).

Namensgeber dieses Ansatzes ist Harry M. Markowitz, der mit einem entsprechenden Artikel<sup>2</sup> 1952 den Grundstein für die Portfoliotheorie legte und dafür 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt.<sup>3</sup> Die vorliegende Ausarbeitung legt einen Schwerpunkt auf die explizite Lösung und beispielhafte Berechnung des Varianz-Minimierungs-Problems. Sie ist in vier Abschnitte gegliedert: Nach der Einführung grundlegender Begriffe in Abschnitt 1 untersuchen wir in Abschnitt 2 den sogenannten *Diversifikationseffekt*, der das Phänomen der Risikominderung durch Mischung nicht vollständig korrelierter Finanzinstrumente bezeichnet. Er impliziert einige geometrische

---

<sup>1</sup>Wir werden im Folgenden stets den Begriff 'Finanzinstrument' oder 'Kapitalanlage' für eine handelbare Einheit benutzen. Beispiele für Finanzinstrumente sind Unternehmensaktien, Staatsanleihen, festverzinsliche Kapitalanlagen, Fonds, Optionen, Forward-Kontrakte sowie Portfolios.

<sup>2</sup>zum Beispiel: Harry M. Markowitz: Portfolio Selection - Die Grundlagen der optimalen Portfolio-Auswahl. FinanzBuch Verlag, München 2007.

<sup>3</sup>Nach: [KIS84], S. 11.

Eigenschaften des Opportunitätsbereiches, der Menge aller Repräsentationen von Portfolios im Rendite-Risiko-Diagramm. Diese Eigenschaften werden sich für das Verständnis der expliziten Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems, wie wir sie in Abschnitt 3 vornehmen, als hilfreich erweisen. Die Lösung steht dabei unter der Prämisse eines Finanzmarktmodells mit ausschließlich risikobehafteten, paarweise nicht vollständig gleich- oder gegenläufigen Finanzinstrumenten. Die Lösung wird einerseits mithilfe des Lagrange-Formalismus bestimmt, andererseits unter Zuhilfenahme sogenannter *quasi-effizienter* Portfolios, welche das Risiko minimieren unter allen Portfolios mit identischer Rendite. Enthält das Finanzmarktmodell zusätzlich eine festverzinsliche, risikolose Kapitalanlage, so vereinfachen sich die Gestalt des Opportunitätsbereiches und die Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems, wie wir in Abschnitt 4 darlegen werden.

Die Abschnitte 1,2 und 4 orientieren sich dabei im Wesentlichen an [KRE11], während Abschnitt 3 an [OER01] angelehnt ist. Abschnitt 3 und 4 enthalten Beispiele für die numerische Berechnung effizienter Portfolios mittels MATLAB am Beispiel eines aus [DEU05] stammenden Datensatzes.<sup>4</sup> Der Datensatz befindet sich in Form einer Excel-Arbeitsmappe sowie einer MATLAB-Datei auf der Daten-CD, welche der Ausarbeitung beiliegt. Dort sind auch das MATLAB-Skript sowie der MATLAB-Workspace gespeichert, mit denen die Abbildungen 3.2 und 4.4 erstellt wurden.

---

<sup>4</sup>Es handelt sich dabei um die Datei *Portfolios2002* auf der bei [DEU05] beiliegenden Daten-CD.

# 1 Einführung

Im folgenden Abschnitt werden wir ein Modell für das Problem der Portfoliooptimierung vorstellen und einige grundlegende Begriffe einführen, welche sich für die Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems als wesentlich erweisen werden. Wir orientieren uns dabei im Wesentlichen an [KRE11], Abschnitt 1 & 2, und [OER01]. Bei der Portfoliooptimierung im Rahmen des Markowitz-Ansatzes legen wir vereinfachend folgende informelle Annahmen zugrunde:

## Annahmen 1.1.<sup>5</sup>

1. Es wird lediglich eine einzige Handelsperiode betrachtet, die beim gegenwärtigen Zeitpunkt 0 beginnt und bei einem zukünftigen Zeitpunkt 1 endet. Am Anfang der Handelsperiode stellt der Investor sein Portfolio zusammen und behält dieses während der gesamten Handelsperiode bei.
2. Investoren können sowohl positive, als auch negative Bestände von Kapitalanlagen halten. Ein negativer Aktienbestand entsteht durch Leerverkauf: Ein Anleger verkauft ausgeliehene Finanzinstrumente, obwohl er nicht in deren Besitz ist. Am Ende der Handelsperiode müssen diese Aktien jedoch wieder an den Gläubiger zurückgegeben werden.
3. Sowohl der Leihe als auch der Verleihe eines Finanzinstrumentes liegen derselbe Zinssatz zugrunde.
4. Wertpapiere sind beliebig teilbar. Auch Bruchstücke können gehandelt werden.
5. Bei Kauf und Verkauf von Finanzinstrumenten entstehen keine Steuern und Transaktionskosten.
6. Die Kurse der Aktien werden durch einzelne Aufträge der Investoren nicht beeinflusst.
7. Gleiche Aktien haben gleiche Preise. Es gibt keine Mengenrabatte.

Als Träger der Finanzinstrumente führen wir den Begriff eines Finanzmarktmodells ein. Unter Berücksichtigung von Annahme 1.1, 1. definieren wir dieses wie folgt:

## Definition 1.2.<sup>6</sup>

- Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein **Ein-Perioden-Finanzmarktmodell**, kurz **Finanzmarktmodell**, ist ein Tripel  $(S_0, S_1, \mathbb{P})$ , bestehend aus
  - einem Vektor  $S_0 \in \mathbb{R}^N$  mit  $S_0^i \neq 0$  für  $i = 1, \dots, N$ ,

---

<sup>5</sup>Annahmen 2, 4, 5, 6 und 7 sind aus [OER01], S. 1 f., Annahme 1 nach [KRE11], S. 4.

<sup>6</sup>Nach: [KRE11], S. 4.

- einem Zufallsvektor  $S_1 = (S_1^1, \dots, S_1^N)$  mit quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen  $S_1^i \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sowie
  - dem zu  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$ .
- Für  $i \in \{1, \dots, N\}$  heißt  $S^i := (S_0^i, S_1^i)$  das  **$i$ -te Finanzinstrument** des Finanzmarktes  $(S_0, S_1, \mathbb{P})$ .

Die Definition eines Finanzmarktmodells  $(S_0, S_1, \mathbb{P})$  erlaubt vereinfachend nur die Betrachtung zweier Zeitpunkte, des gegenwärtigen Zeitpunktes 0 und eines zukünftigen Zeitpunktes 1. Dabei repräsentiert  $S_0$  die aktuellen, bekannten Kurse der  $N$  Finanzinstrumente, wobei die Voraussetzung  $S_0^i \neq 0$  die Existenz der noch zu definierenden Rendite sichert und außerdem eine realistische Annahme darstellt. Als Zufallsvektor repräsentiert  $S_1$  die ungewissen, zum zukünftigen Zeitpunkt 1 vorliegenden Kurse der  $N$  Finanzinstrumente. Zu diesem Zeitpunkt wird der Finanzmarkt in genau einen Zustand  $\omega \in \Omega$  übergehen, von dem der Wert von  $S_1$  abhängt. Dementsprechend definieren wir  $S_1$  als Zufallsvektor auf  $\Omega$ . Aus  $S^1$  und  $S^0$  können wir die Rendite eines Finanzinstruments berechnen, die durch folgende Definition erklärt ist:

**Definition 1.3.** <sup>7</sup>

- Die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} R_i : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto \frac{S_1^i(\omega) - S_0^i}{S_0^i} \end{aligned} \quad (1.1)$$

heißt die **Rendite** des  $i$ -ten Finanzinstruments. Da  $S_1^i$  quadratisch integrierbar ist, ist dies auch  $R_i$ .

- Den Erwartungswert der Rendite des  $i$ -ten Finanzinstruments,  $\mu_i := \mathbb{E}[R_i]$ , bezeichnen wir als die **erwartete Rendite** des Finanzinstruments  $S^i$ .
- Das **Risiko** oder die **Volatilität**  $\sigma_i$  des  $i$ -ten Finanzinstruments ist die Standardabweichung der zugehörigen Rendite,  $\sigma_i := \sqrt{\mathbb{V}[R_i]}$ .

Gemäß (1.1) entspricht die Rendite eines Finanzinstruments  $S^i$  dem Verhältnis seiner Wertänderung zum Zeitpunkt 1 zum Anfangswert  $S_0^i$ . Wegen  $S_0^i \neq 0$  kann die Zuordnung (1.1) dabei äquivalent ausgedrückt werden durch

$$S_1^i(\omega) = S_0^i \cdot (1 + R_i(\omega)).$$

Der Kurs des  $i$ -ten Finanzinstruments ergibt sich also als dessen verzinsten Anfangskurs  $S_0^i$  mit einem variablen Zinssatz  $R_i(\omega)$ , der vom eintretenden Marktzustand  $\omega \in \Omega$  abhängt.

---

<sup>7</sup>Nach: [KRE11], S. 73.

Da nicht nur die alleinige Investition in eine einzige Kapitalanlage möglich ist, wollen wir als nächstes ein Portfolio definieren. Informell haben wir dieses zu Beginn als Zusammenstellung von Besitzanteilen an verschiedenen Finanzinstrumenten charakterisiert. Dies formalisieren wir in der folgenden Definition. Dabei führen wir die Bezeichnungen  $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_N)$  und  $e := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$  ein.

**Definition 1.4.** <sup>8</sup>

- Ein **Portfolio** ist ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^N$  mit  $\langle x, e \rangle = \sum_{i=1}^N x_i = 1$ .
- Die **Rendite** eines Portfolios  $x$  ist die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} R_x : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto \sum_{i=1}^N x_i R_i(\omega). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Anstelle von  $R_x$  schreiben wir auch  $R(x)$ .

- Da die  $R_i$  quadratisch integrierbar sind, ist auch  $R_x$  quadratisch integrierbar. Entsprechend heißt  $\mu_x := \mathbb{E}[R_x] = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i = \langle x, \mu \rangle$  die **erwartete Rendite** von  $x$ .
- Für ein Portfolio  $x$  heißt die Standardabweichung seiner Rendite,  $\sigma_x := \sqrt{\mathbb{V}[R_x]}$ , das **Risiko** oder die **Volatilität** von  $x$ .

Der im Rahmen dieser Ausarbeitung benutzte Begriff eines Portfolios sollte als der eines *Anteilsvektors* verstanden werden, das heißt, die Komponente  $x_i, i = 1, \dots, N$ , gibt den Anteil des Investitionskapitals an, welcher in das Finanzinstrument  $S^i$  investiert wird. Die absolute Höhe des eingesetzten Kapitals, sofern nicht verschwindend, ist für diesen Begriff des Portfolios offenbar unerheblich.

Entsprechend dem Konzept des Anteilsvektors ist die Rendite  $R_x$  eines Portfolios  $x$  nach (1.2) das gemäß Besitzanteilen gewichtete Mittel der Einzelrenditen  $R_i$ . Jedes Portfolio  $x$  entsteht durch Kombination der  $N$  Finanzinstrumente,  $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ , wobei  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor bezeichnet. Die Rendite von  $x$  ist dann definitionsgemäß eine Linearkombination der Einzelrenditen,  $R(x) = \sum_{i=1}^N x_i R_i$ . Wir werden dieses Resultat im folgenden Lemma verallgemeinern, dessen Aussage wir im Laufe der Ausarbeitung noch einige Male benötigen werden:

**Lemma 1.5.** Seien  $y_1, \dots, y_M \in \mathbb{R}^N$  Portfolios,  $\alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{m=1}^M \alpha_m = 1$ . Dann ist auch  $x := \sum_{m=1}^M \alpha_m y_m$  ein Portfolio, und für die Rendite von  $x$  gilt

$$R(x) = \sum_{m=1}^M \alpha_m R(y_m). \quad (1.3)$$

---

<sup>8</sup>Nach: [OER01], S. 2.



Insbesondere gilt

$$\mu_x = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mu_{y_m}. \quad (1.4)$$

*Beweis.* Dass  $x$  ein Portfolio ist, folgt aus

$$\left\langle \sum_{m=1}^M \alpha_m y_m, e \right\rangle = \sum_{m=1}^M \alpha_m \langle y_m, e \rangle = \sum_{m=1}^M \alpha_m = 1,$$

da  $y_1, \dots, y_m$  Portfolios sind. Die Gleichungen (1.3) und (1.4) folgen mit (1.2) aus

$$\begin{aligned} R \left( \sum_{m=1}^M \alpha_m y_m \right) &= R \left( \left( \sum_{m=1}^M \alpha_m (y_m)_i \right)_{i=1, \dots, N} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \alpha_m (y_m)_i R_i \\ &= \sum_{m=1}^M \alpha_m \sum_{i=1}^N (y_m)_i R_i \\ &= \sum_{m=1}^M \alpha_m R(y_m). \end{aligned}$$

□

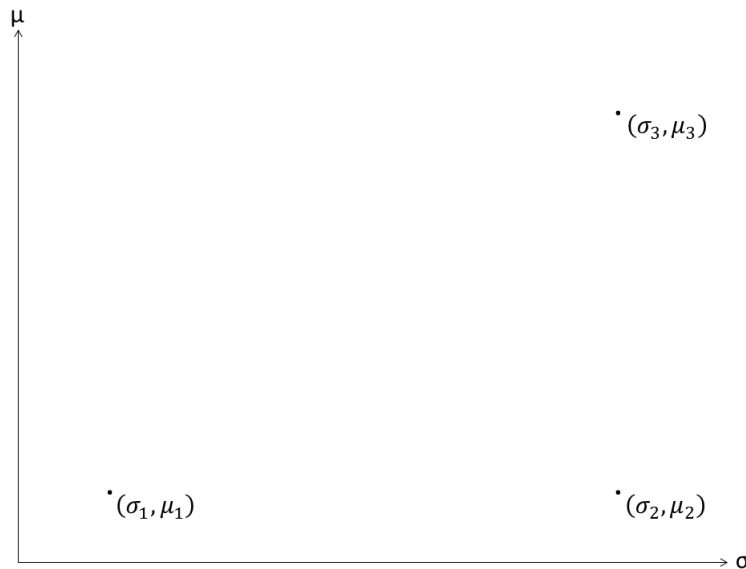


Abbildung 1.1: Das  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm mit Repräsentationen  $(\sigma_1, \mu_1)$  bis  $(\sigma_3, \mu_3)$  dreier Finanzinstrumente  $S^1, S^2, S^3$ . (Nach [KRE11], S. 77.)

Der auf Markowitz zurückgehende *Erwartungswert-Varianz-Ansatz* zieht bei der Optimierung von Portfolios ausschließlich deren erwartete Rendite sowie deren Risiko in Betracht. Diese Tatsache ermöglicht eine grafische Darstellung der Portfolios im soge-

nannten  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm (auch:  $\mu$ - $\sigma$ -Ebene, Rendite-Risiko-Diagramm), in welchem wir erwartete Rendite und Risiko von Portfolios abtragen. Abbildung 1.1 zeigt ein Beispiel für drei Finanzinstrumente  $S^1, S^2, S^3$  mit  $\sigma_3 = \sigma_2$  und  $\mu_1 = \mu_2$ . Die zugehörigen Portfolios sind  $e_1$  bis  $e_3$ . Ein rationaler Investor würde sich bei Wahl zwischen  $e_1$  und  $e_2$  für  $e_1$  entscheiden, bei Wahl zwischen  $e_2$  und  $e_3$  hingegen für  $e_3$ . Das Beispiel zeigt, dass die zu Beginn erwähnten Ansprüche von Risikominimierung und Renditemaximierung nicht simultan erfüllbar sind. In diesem Sinne sind Portfolios anhand von erwarteter Rendite und Risiko nicht universell vergleichbar. Im gegenteiligen Fall bedienen wir uns für zwei Portfolios  $x$  und  $y$  jedoch der folgenden Sprechweise: Wir sagen,  $x$  **dominiert**  $y$  genau dann, wenn

$$\mu_x > \mu_y \text{ und } \sigma_x \leq \sigma_y$$

oder

$$\mu_x \geq \mu_y \text{ und } \sigma_x < \sigma_y$$

gilt, wenn also  $x$  hinsichtlich erwarteter Rendite oder Risiko eine echte Verbesserung gegenüber  $y$  darstellt, aber in keiner der beiden Größen eine Verschlechterung. In Abbildung 1.1 wird  $e_2$  dominiert von  $e_1$  und  $e_3$ , aber weder dominiert  $e_1$  das Portfolio  $e_3$ , noch umgekehrt.

Der zu Beginn informell beschriebene Markowitz-Ansatz zur Portfoliooptimierung soll nun mathematisch formalisiert werden. Dazu benötigen wir die Begriffe der Effizienz und der Effizienzgrenze.

**Definition 1.6.** <sup>9</sup>

- Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Ein Portfolio  $x^*$  heißt  **$m$ -effizient** genau dann, wenn es den Bedingungen  $\mu_{x^*} \geq m$  und

$$\sigma_{x^*} = \min \{ \sigma_x \mid x \text{ ist Portfolio mit } \mu_x \geq m \}$$

genügt. Ein Portfolio  $x^*$  heißt **effizient** genau dann, wenn es  $m$ -effizient für ein  $m \in \mathbb{R}$  ist.

- Der **Opportunitätsbereich** ist definiert als

$$\mathcal{O} := \{ (\sigma_x, \mu_x) \mid x \text{ ist Portfolio} \}.$$

- Die **Effizienzgrenze**  $\mathcal{E}$  (auch: **Effizienzlinie**, **Pareto-Rand**) ist definiert als

$$\mathcal{E} := \{ (\sigma_x, \mu_x) \mid x \text{ ist effizientes Portfolio} \}.$$

Ein  $m$ -effizientes Portfolio minimiert also das Risiko bzw. die Varianz unter allen Portfolios mit Mindestrendite  $m$ . Der Markowitz-Ansatz besteht nun darin,

<sup>9</sup>Nach: [OER01], S.2 und [KRE11], S. 92 ff.

- zu vorgegebenem  $m \in \mathbb{R}$  ein  $m$ -effizientes Portfolio zu bestimmen (*Varianz-Minimierungs-Problem*), bzw.
- zu vorgegebenem  $\sigma \geq 0$  ein Portfolio  $x^*$  zu bestimmen, welches den Bedingungen  $\sigma_{x^*} \leq \sigma$  sowie

$$\mu_{x^*} = \max \{ \mu_x \mid x \text{ ist Portfolio mit } \sigma_x \leq \sigma \}$$

genügt (*Renditen-Maximierungs-Problem*).

Der Vollständigkeit halber wollen wir eine weitere Variante erwähnen, die darin besteht,

- ein Portfolio mit dem größten gewichteten Abstand zwischen Risiko und erwarteter Rendite zu bestimmen: Ein in diesem Sinne optimales Portfolio ist Maximalstelle von

$$x \mapsto \mu_x - A \cdot \sigma_x$$

mit  $A > 0$ .<sup>10</sup>

Wir werden uns in dieser Ausarbeitung im Wesentlichen mit dem Varianz-Minimierungs-Problem beschäftigen. Abbildung 1.2 veranschaulicht die gegebenen Begriffe in einem Finanzmarktmodell mit vier Finanzinstrumenten  $S^1$  bis  $S^4$ .

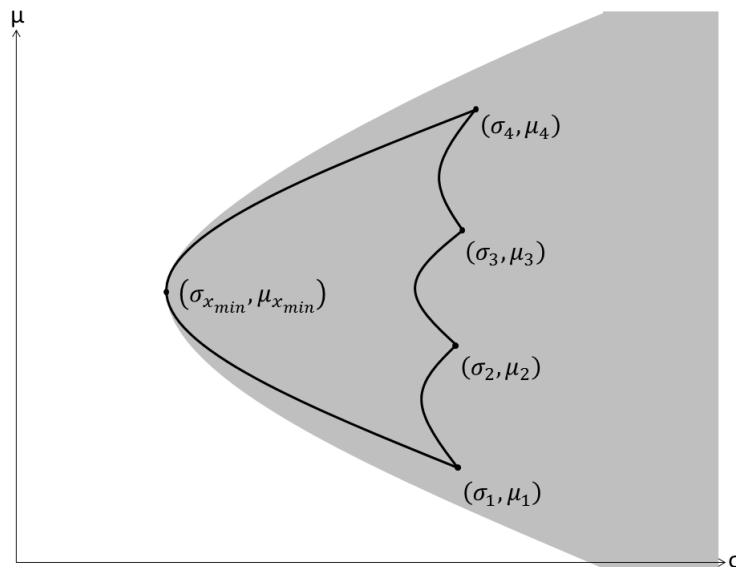


Abbildung 1.2: Der Opportunitätsbereich im Fall von vier Wertpapieren. Sind keine Leerverkäufe zugelassen, so besteht dieser nur aus dem Inneren des 'Regenschirms', andernfalls aus dem grauen Bereich. (Frei nach [KRE11], S. 93.)

Durch Mischung von  $S^i$  mit  $S^j$ ,  $i \neq j$ , entstehen die Verbindungslinien zwischen den Punkten  $(\sigma_i, \mu_i)$ . Jeder Punkt auf einer solchen Verbindungslinie entspricht einem Portfolio, welches sich wiederum mit jedem anderen Portfolio mischen lässt, so

<sup>10</sup>Nach: [KIS84], S. 42 und [KOR], S.142.

dass ein ausgefüllter Bereich der  $\mu$ - $\sigma$ -Ebene entsteht, nämlich der Opportunitätsbereich  $\mathcal{O}$ . Der ausgefüllte, regenschirmförmige Bereich innerhalb der Verbindungslinien repräsentiert all jene Portfolios, welche keine Leerverkäufe beinhalten. In diesem Falle ist die Effizienzgrenze durch die gekrümmte Verbindungslinie zwischen  $(\sigma_4, \mu_4)$  und dem Portfolio mit minimaler Varianz  $(\sigma_{x_{\min}}, \mu_{x_{\min}})$  gegeben, weil die zugehörigen Portfolios durch keine anderen dominiert werden.<sup>11</sup> Sind Leerverkäufe zugelassen, so setzen sich die Verbindungslinien beliebig weit nach rechts fort, und wir erhalten zusätzlich zum 'Regenschirm' den grauen rechtsoffenen Ellipsoid als Opportunitätsbereich. Die Krümmung der Linien ist dabei auf den sogenannten *Diversifikationseffekt* zurückzuführen, welcher in Abschnitt 2 erläutert wird.

---

<sup>11</sup>Dies wird in Abschnitt 3 genauer ausgeführt.

## 2 Diversifikation

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [KRE11], Kapitel 2. Diversifikation bezeichnet die Streuung des Investitionskapitals auf verschiedene Finanzinstrumente. Intuitiv erscheint es sinnvoll, nicht nur in eine einzelne Kapitalanlage zu investieren, da bei Streuung auf verschiedene Anlagemöglichkeiten Kursverluste in einem Finanzinstrument durch Kursgewinne in einem anderen ausgeglichen werden können. In welchem Ausmaß dies der Fall ist, hängt vom Maß der Gleich- oder Gegenläufigkeit zwischen den Anlagen ab, welchen wir durch den Korrelationskoeffizienten der Renditen,  $\mathbf{Corr}[R_i, R_j], i, j = 1, \dots, N$ ,<sup>12</sup> ausdrücken. Sind zwei Finanzinstrumente  $S^i, S^j$  stark gleichläufig, so gehen Kursgewinne in  $S^i$  'häufig' mit Kursgewinnen in  $S^j$  einher. Analoges gilt für Kursverluste, so dass der in der Kovarianz auftretende Term  $(R_i(\omega) - \mathbb{E}[R_i])(R_j(\omega) - \mathbb{E}[R_j])$  'häufig' positiv ist, und damit auch Kovarianz und Korrelationskoeffizient positiv sind. Sind  $S^i, S^j$  umgekehrt stark gegenläufig, so treten Kursgewinne in  $S^i$  'häufig' gemeinsam mit Kursverlusten in  $S^j$  auf und umgekehrt, so dass der Term  $(R_i(\omega) - \mathbb{E}[R_i])(R_j(\omega) - \mathbb{E}[R_j])$  für 'viele'  $\omega \in \Omega$  negativ ist, und damit auch Kovarianz und Korrelationskoeffizient. Dies lässt nach zuvor Festgestelltem auf eine starke Risikominderung schließen. Der Nenner  $\sigma_i \sigma_j$  in  $\mathbf{Corr}[R_i, R_j]$  dient dabei lediglich der Normierung der Kovarianz auf einen Wert innerhalb von  $[-1, 1]$ .

Wenn wir bei kleinem Korrelationskoeffizienten der im Portfolio enthaltenen Finanzinstrumente aber von starker Gegenläufigkeit ausgehen, so liegt andererseits der Schluss nahe, dass Kursgewinne im einen Finanzinstrument durch Kursverluste im anderen zu nichte gemacht werden. Das diversifizierte Portfolio hat im Allgemeinen also kleinere erwartete Rendite als die alleinige Investition in das profitabelste Finanzinstrument. Dies ist in der Tat so, allerdings - und dies ist ein zentrales Ergebnis dieses Abschnitts - ist durch Diversifikation eine im Vergleich zur Renditeminderung *überdurchschnittliche* Risikosenkung möglich. Darüber hinaus ist durch Diversifikation eines Portfolios innerhalb gewisser Grenzen eine Risikominderung bei *gleichzeitiger* Steigerung der erwarteten Rendite möglich. Damit spielt Diversifikation für die Konstruktion effizienter Portfolios eine entscheidende Rolle. Die genannten Ergebnisse werden im Folgenden formalisiert und in Satz 2.3 zusammengefasst.

Anstatt zwischen verschiedenen Finanzinstrumenten zu diversifizieren, können wir das Investitionskapital auch zwischen verschiedenen Portfolios, etwa  $x$  und  $y$ , aufteilen. Entsprechend werden wir als Maß für Gleich- oder Gegenlauf den Korrelationskoeffizienten  $\mathbf{Corr}[R(x), R(y)]$  der Portfoliorenditen betrachten. Zur Motivation betrachten wir zunächst den Fall einer Diversifikation zwischen zwei Portfolios.

**Beispiel.** Setzen wir zwei risikobehaftete, nicht vollständig korrelierte Portfolios  $x, y$  voraus, das heißt  $\sigma_x, \sigma_y > 0$  und  $\mathbf{Corr}[R(x), R(y)] \neq 1$ , also  $\mathbf{Cov}[R(x), R(y)] <$

---

<sup>12</sup>Für zwei Zufallsvariablen  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit existierenden Standardabweichungen  $\sigma_X, \sigma_Y > 0$  ist der Korrelationskoeffizient als  $\mathbf{Corr}[X, Y] := \frac{\mathbf{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$  definiert.

$\sigma_x \cdot \sigma_y$ . Betrachten wir ein Portfolio  $z$ , das durch Mischung von  $x$  und  $y$  wie folgt hervorgeht: Der Anteil  $\alpha \in (0, 1)$  des Kapitals wird in  $x$  investiert, der Rest  $1 - \alpha$  in  $y$ , das heißt

$$z = \alpha x + (1 - \alpha) y.$$

Für die erwartete Rendite von  $z$  gilt mit Lemma 1.5

$$\mu_z = \alpha \mu_x + (1 - \alpha) \mu_y. \quad (2.1)$$

Für das Risiko von  $z$  gilt wegen  $\alpha \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \alpha^2 \sigma_x^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_y^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \mathbf{Cov}[R(x), R(y)] \\ &< \alpha^2 \sigma_x^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_y^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_x \sigma_y \\ &= (\alpha \sigma_x + (1 - \alpha) \sigma_y)^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

wegen  $\alpha, 1 - \alpha > 0$  sowie  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \geq 0$  also

$$\sigma_z < \alpha \sigma_x + (1 - \alpha) \sigma_y. \quad (2.3)$$

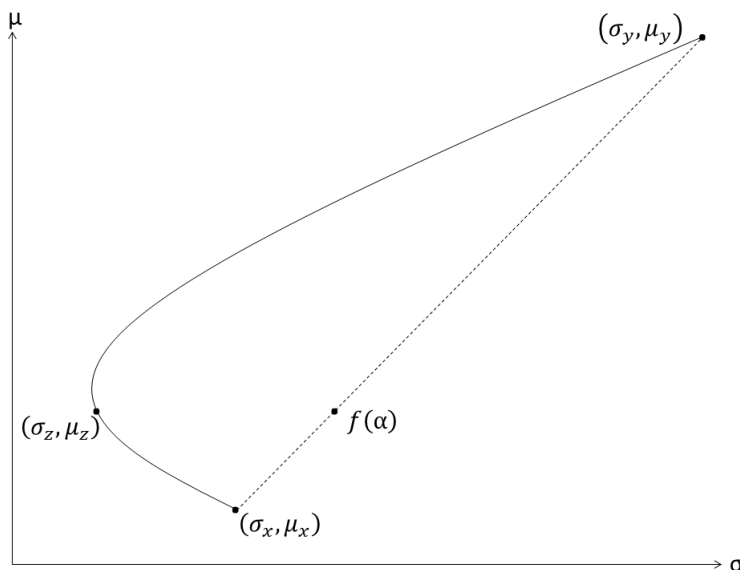


Abbildung 2.1: Die Repräsentationen  $(\sigma_x, \mu_x)$ ,  $(\sigma_y, \mu_y)$  der Portfolios  $x, y$  sind im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm durch eine linksgekrümmte Linie verbunden. (Frei nach [KRE11], S. 89.)

Während die erwartete Rendite des diversifizierten Portfolios  $z$  gemäß (2.1) also stets linear von  $\mu_x, \mu_y$  bzw.  $\alpha$  abhängt, ist das Risiko von  $z$  stets *kleiner* als die entsprechende Linearkombination. Diese Tatsache erlaubt uns folgende geometrische Deutung. Die beiden Portfolios  $x, y$  werden im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm repräsentiert durch die Punkte  $(\sigma_x, \mu_x)$

und  $(\sigma_y, \mu_y)$ . Deren Verbindungsstrecke ist gegeben durch

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \alpha \mapsto \alpha \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \mu_x \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \mu_y \end{pmatrix}.$$

Durch stetige Umschichtung des Investitionskapitals auf die beiden Portfolios  $x, y$ , also durch Variation von  $\alpha \in (0, 1)$ , erhalten wir ebenfalls eine Verbindungslinie zwischen  $(\sigma_x, \mu_x)$  und  $(\sigma_y, \mu_y)$  im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm. Ungleichung (2.3) bedeutet nun, dass diese Verbindungslinie *links* der durch  $f$  vermittelten Verbindungsstrecke liegt bzw. *linksgekrümmt* ist. Abbildung 2.1 illustriert dies. Sie zeigt auch, dass bei entsprechender Wahl von  $\alpha$  und genügend starker Krümmung der Verbindungslinie eine Risikominderung bei *gleichzeitiger* Erhöhung der erwarteten Rendite möglich ist, die Diversifikation bezüglich  $x, y$  sich also als besonders vorteilhaft erweist. Das Maß der Linkskrümmung der Verbindungslinie hängt dabei vom Wert der Kovarianz bzw. des Korrelationskoeffizienten ab, wie (2.2) zeigt.

Legen wir ein Finanzmarktmodell mit  $N$  risikobehafteten, paarweise nicht vollständig korrelierten Finanzinstrumenten zugrunde, so können wir (2.3) auf alle möglichen Portfolios anwenden. Wir erhalten damit, dass die durch Portfoliomischung gegebenen Verbindungslinien zweier Punkte im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm stets linksgekrümmt sind. Diese geometrische Tatsache wird als *Linkskonvexität* des Opportunitätsbereiches bezeichnet.<sup>13</sup> Damit ergibt sich für den Opportunitätsbereich eine ausgefüllte, regenschirmartige Gestalt, falls keine Leerverkäufe zugelassen sind, und sonst einen nach rechts unbeschränkten Ellipsoid. Dies wird durch die bereits bekannte Abbildung 1.2 in Abschnitt 1 illustriert.

Die genannten Ergebnisse für zwei Portfolios werden in Satz 2.3 verallgemeinert. Für dessen technische Vorbereitung werden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwenden, angewandt auf die Zuordnung

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ (X, Y) \mapsto \mathbf{Cov}[X, Y].$$

Da diese im Allgemeinen jedoch nur eine positiv semidefinite Bilinearform definiert, aber kein Skalarprodukt, muss zunächst gezeigt werden, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auch in diesem Fall gilt. Dies liefert das folgende Lemma:

**Lemma 2.1.** <sup>14</sup>Seien  $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dann gilt

$$|\mathbf{Cov}[X, Y]| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y. \quad (2.4)$$

---

<sup>13</sup>Nach: [KRE11], S. 93.

<sup>14</sup>[KRE11], S. 85.

*Beweis.* Gilt  $\sigma_X = 0$  oder  $\sigma_Y = 0$ , so folgt  $X \equiv \mathbb{E}[X]$   $\mathbb{P}$ -fast sicher bzw.  $Y \equiv \mathbb{E}[Y]$   $\mathbb{P}$ -fast sicher, und folglich  $\mathbf{Cov}[X, Y] = 0$ . Insbesondere gilt (2.4).

Gilt  $\sigma_X \neq 0$  und  $\sigma_Y \neq 0$ , so definieren wir  $e := \frac{X}{\sigma_X}$  und  $f := \frac{Y}{\sigma_Y}$ . Offenbar gilt  $\sigma_e^2 = \sigma_f^2 = 1$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_{e \pm f}^2 &= \sigma_e^2 \pm 2\mathbf{Cov}[e, f] + \sigma_f^2 \\ &= 2(1 \pm \mathbf{Cov}[e, f]). \end{aligned}$$

Also  $-1 \leq \mathbf{Cov}[e, f] = \frac{\mathbf{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \leq 1$ . Insbesondere  $|\mathbf{Cov}[X, Y]| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$ .  $\square$

Ein auch für die weiteren Abschnitte nützliches Resultat ist die positive Definitheit der Kovarianzmatrix.

**Lemma 2.2.** Bezeichne  $C := (c_{ij})_{i,j=1,\dots,N} := (\mathbf{Cov}[R_i, R_j])_{i,j=1,\dots,N}$  die **Kovarianzmatrix**. Dann gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$\mathbf{Cov}[R(x), R(y)] = \langle x, Cy \rangle = x^\top Cy. \quad (2.5)$$

Wegen  $0 \leq \mathbb{V}[R(x)] = \langle x, Cx \rangle$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^N$  ist  $C$  insbesondere eine positiv semidefinite, symmetrische  $n \times n$ -Matrix.

Enthält das Finanzmarktmodell  $(S_0, S_1, \mathbb{P})$  ausschließlich risikobehaftete Finanzinstrumente  $S^1, \dots, S^N$  mit Korrelationskoeffizienten  $\mathbf{Corr}[R_i, R_j] \notin \{-1, 1\}$ , so ist die Kovarianzmatrix  $C$  positiv definit. Insbesondere existiert kein Portfolio mit Risiko 0.

*Beweis.* Gleichung (2.5) folgt aus

$$\begin{aligned} \langle x, Cy \rangle &= \left\langle x, \left( \sum_{j=1}^N c_{ij} y_j \right)_{i=1,\dots,N} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j=1}^N c_{ij} y_j \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \mathbf{Cov}[R_i, R_j] \\ &= \mathbf{Cov} \left[ \sum_{i=1}^N x_i R_i, \sum_{j=1}^N y_j R_j \right] \\ &= \mathbf{Cov}[R(x), R(y)], \end{aligned}$$

weil  $\mathbf{Cov}(\cdot, \cdot)$  bilinear ist. Die Symmetrie und positive Semidefinitheit von  $C$  sind wegen  $\mathbb{V}[R(x)] \geq 0$  offensichtlich.

Setzen wir nun ein Finanzmarktmodell mit ausschließlich risikobehafteten Finanzinstrumenten voraus, deren Korrelationskoeffizienten innerhalb von  $(-1, 1)$  liegen. Zu-



nächst zur positiven Definitheit: Sei  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$\mathbb{V}[R(x)] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^N x_i R_i\right] = \sum_{i=1}^M x_i^2 \mathbb{V}[R_i] + \sum_{i \neq j} x_i x_j \mathbf{Cov}[R_i, R_j]. \quad (2.6)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:** Es gibt ein  $k \in \{1, \dots, N\}$  mit  $x_k \neq 0$  und  $x_i = 0$  für alle  $i \neq k$ . Dann gilt mit (2.6)

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^N x_i R_i\right] = x_k^2 \sigma_k^2 > 0,$$

da  $\sigma_k > 0$  vorausgesetzt war.

**Fall 2:** Es gibt  $k \neq l \in \{1, \dots, N\}$  mit  $x_k, x_l \neq 0$ . Dann gilt  $x_k x_l \neq 0$ , und wie sich durch Vergleich mit (2.6) ergibt, ist  $\mathbb{V}[R(x)]$  als Funktion von  $\mathbf{Cov}[R_k, R_l]$  strikt isoton oder antiton, je nachdem, ob  $x_k x_l > 0$  oder  $x_k x_l < 0$  gilt. Da  $\mathbf{Corr}[R_k, R_l] \in (-1, 1)$  vorausgesetzt wurde, gilt aber  $\mathbf{Cov}[R_k, R_l] \in (-\sigma_k \sigma_l, \sigma_k \sigma_l)$ , und deswegen nimmt die Varianz  $\mathbb{V}[R(x)]$  als strikt iso- bzw. antitone Funktion von  $\mathbf{Cov}[R_k, R_l]$  ihr Minimum nicht an, das heißt es gilt  $\sigma_x^2 > 0$ .  $\square$

Der folgende Satz schließlich liefert die angekündigte Verallgemeinerung des Diversifikationseffekts:

**Satz 2.3.** Seien  $x^1, \dots, x^M \in \mathbb{R}^N$  Portfolios,  $\alpha_1, \dots, \alpha_M \geq 0$  mit  $\sum_{m=1}^M \alpha_m = 1$ . Wir setzen  $x := \sum_{m=1}^M \alpha_m x^m$ .

1. Es gilt

$$\sigma_x \leq \sum_{m=1}^M \alpha_m \sigma_{x^m}. \quad (2.7)$$

Das Risiko des durch Mischung der  $M$  Portfolios  $x^1, \dots, x^M$  entstehenden Portfolios  $x$  ist also stets beschränkt durch das gewichtete Mittel der Einzelportfolio-Risiken, wobei die Gewichte den in die Portfolios  $x^m$  investierten Kapitalanteilen  $\alpha_m$  entsprechen. Weiter ist der Ausdruck  $\sigma_x$  isoton in  $\mathbf{Cov}[R(x^k), R(x^l)]$  für alle  $k \neq l \in \{1, \dots, M\}$  und somit wegen Lemma 2.1 minimal für  $\mathbf{Cov}[R(x^k), R(x^l)] = -\sigma_{x^k} \sigma_{x^l}$ .

2. Existieren  $k \neq l \in \{1, \dots, M\}$  mit  $\alpha_k, \alpha_l > 0$  und  $\mathbf{Corr}[R(x^k), R(x^l)] \neq 1$ , so gilt in (2.7) sogar strikte Ungleichheit, und  $\sigma_x$  ist strikt isoton in  $\mathbf{Cov}[R(x^k), R(x^l)]$ .

3. Für jedes Portfolio  $x$  mit nichtnegativen Komponenten gilt

$$\sigma_x \leq \sum_{m=1}^M x_m \sigma_i. \quad (2.8)$$

Insbesondere gilt

$$\sigma_x \leq \max\{\sigma_i \mid i \in \{1, \dots, N\}\}. \quad (2.9)$$

*Beweis.*

1. Mit Lemma 1.5 gilt

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \mathbb{V} \left[ R \left( \sum_{m=1}^M \alpha_m x^m \right) \right] \\ &= \mathbb{V} \left[ \sum_{m=1}^M \alpha_m R(x^m) \right]\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$= \sum_{m=1}^M \alpha_m^2 \sigma_{x^m}^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \mathbf{Cov} [R(x^i), R(x^j)]\tag{2.11}$$

$$\leq \sum_{m=1}^M \alpha_m^2 \sigma_{x^m}^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \sigma_{x^i} \sigma_{x^j}\tag{2.12}$$

$$= \left( \sum_{m=1}^M \alpha_m \sigma_{x^m} \right)^2,\tag{2.13}$$

wobei die Umformung (2.10) aus Lemma 1.5 folgt. Bei (2.12) geht die Voraussetzung  $\alpha_i \geq 0$  ein. Aus selbiger folgt außerdem unmittelbar Ungleichung (2.7). Die Isotonie in  $\mathbf{Cov} [R(x^k), R(x^l)]$  für alle  $k \neq l \in \{1, \dots, N\}$  folgt unmittelbar aus (2.11).

2. Setzen wir weiter voraus, dass  $k \neq l \in \{1, \dots, N\}$  existieren mit  $\sigma_{x^k}, \sigma_{x^l} > 0$  und  $\mathbf{Corr} [R(x^k), R(x^l)] \neq 1$  sowie  $\alpha_k, \alpha_l > 0$ , so folgt  $\mathbf{Cov} [R(x^k), R(x^l)] < \sigma_{x^k} \sigma_{x^l}$  und  $\alpha_k \alpha_l > 0$ , so dass in (2.12) strikte Ungleichheit vorliegt. (2.11) zeigt in diesem Fall auch, dass  $\sigma_x^2$  als Funktion von  $\mathbf{Cov} [R(x^k), R(x^l)]$  strikt isoton ist.

3. Sei  $x \in \mathbb{R}^N$  ein Portfolio mit nichtnegativen Komponenten. Dann gilt mit  $\alpha_i = x_i \geq 0$  und  $x^i = e_i$  offenbar  $\sum_{m=1}^M \alpha_i x^i = \sum_{m=1}^M x_i e_i = x$ . Mit (2.7) folgt daher

$$\sigma_x \leq \sum_{m=1}^M x_i \sigma_i,$$

also (2.8). Ungleichung (2.9) folgt unmittelbar aus  $x_i \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  sowie  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ .  $\square$

Satz 2.3 kennzeichnet den *Diversifikationseffekt*: Die erwartete Rendite des diversifizierten Portfolios  $x$  hängt *linear* von den erwarteten Einzelportfoliorenditen ab, das heißt

$$\mu_x = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mu_{x^m}.\tag{2.14}$$

Sie ist demnach das gemäß Kapitalanteilen gewichtete Mittel dieser Renditen. Die erwartete Rendite ist insbesondere *unabhängig* von der Korrelation zwischen den beteiligten

Portfoliorenditen. Für das Risiko von  $x$  gilt hingegen

$$\sigma_x \leq \sum_{m=1}^M \alpha_m \sigma_{x^m} \quad (2.15)$$

sowie

$$\sigma_x \leq \max \{ \sigma_{x^m} \mid m \in \{1, \dots, M\} \}, \quad (2.16)$$

mit strikter Ungleichheit unter den in Satz 2.3 genannten Voraussetzungen, zu denen auch  $\text{Corr} [R(x^k), R(x^l)] \neq 1$  gehört. Letzteres ist in der Praxis so gut wie immer erfüllt. Das Risiko von  $x$  ist demnach stets durch das gewichtete Mittel der Einzelportfoliorenditen beschränkt. Erhöht man die Anteile der stärker risikobehafteten Portfolios an  $x$ , so wächst das Risiko von  $x$  also im Allgemeinen 'in geringerem Maße' als die erwartete Rendite.

Die oben getroffene Voraussetzung  $\alpha_m \geq 0$  ist in vielen Fällen notwendig für die Gültigkeit von (2.15) und (2.16). Sie entspricht dem Verbot von Leerverkäufen bezüglich der Portfolios  $x^m$ .<sup>15</sup> Tatsächlich ist bei Erlaubnis von Leerverkäufen das Risiko von  $x$  im Allgemeinen sogar unbeschränkt, wie Abbildung 1.2 nahelegt. Sofern es zumindest zwei Kapitalanlagen mit voneinander verschiedenen erwarteten Renditen gibt, so zeigt (2.14) allerdings, dass nur durch Einsatz von Leerverkäufen jede beliebige erwartete Rendite erzielt werden kann.

Die genannten Ergebnisse legen zum einen die Bedeutung des Diversifikationseffekts bei der Zusammenstellung eines optimalen Portfolios dar. Andererseits erlauben sie, wie zu Beginn des Abschnitts ausgeführt und in Abbildung 1.2 illustriert, eine anschauliche geometrische Darstellung des Opportunitätsbereiches. In den Abschnitten 3 und 4 wird diese die Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems motivieren.

---

<sup>15</sup>Die Portfolios  $x^m$  hingegen dürfen durchaus negative Komponenten, also Leerverkäufe bezüglich der Finanzinstrumente  $S^i$  beinhalten. Somit kann auch  $x$  negative Komponenten enthalten, also Leerverkäufe bezüglich der einzelnen Finanzinstrumente  $S^i$  aufweisen.

### 3 Minimum-Varianz-Portfolioanalyse ohne festverzinsliche Kapitalanlage

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [OER01]. In ihm werden wir eine explizite Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems herleiten, und das Rendite-Maximierungs-Problem darauf zurückführen. Das weitere Vorgehen steht dabei unter der Prämisse eines Finanzmarktmodells  $(S_0, S_1, \mathbb{P})$  mit ausschließlich risikobehafteten, paarweise nicht vollständig gleich- oder gegenläufigen Finanzinstrumenten  $S^1, \dots, S^N$ . Wir fordern also

$$\sigma_1, \dots, \sigma_N > 0$$

und

$$\text{Corr}[R_i, R_j] \in (-1, 1) \text{ für alle } i \neq j \in \{1, \dots, N\}.$$

Bei der Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems ist sicherlich auch die Frage von Interesse, ob ein Portfolio mit minimalem Risiko unter *allen* Portfolios existiert, bzw. welche Gestalt dieses hat. Ein solches Portfolio wollen wir **Minimalvarianzportfolio** nennen. Ohne damit die Allgemeingültigkeit unserer Lösung wesentlich einzuschränken, treffen wir zusätzlich folgende Annahme:

**Annahme.** Mindestens zwei Finanzinstrumente haben voneinander verschiedene erwartete Renditen. Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  und  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$  linear unabhängig sind.

Zur Motivation des nachfolgenden Lösungswegs betrachten wir Abbildung 3.1, welche den Opportunitätsbereich im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm darstellt. Da das Finanzmarktmodell ausschließlich risikobehaftete, paarweise nicht vollständig gleich- oder gegenläufige Finanzinstrumente enthält, entspricht die Gestalt des Opportunitätsbereichs gemäß Abschnitt 2 einem linkskonvexen, nach rechts unbeschränkten Ellipsoid. Die schwarz gezeichnete Linie  $\mathcal{Q}$  repräsentiert dabei die Menge all jener Portfolios  $x$ , welche das Risiko minimieren unter allen Portfolios mit identischer erwarteter Rendite. Sie ist durch

$$\mathcal{Q} = \{(\min\{\sigma_y \mid y \text{ ist Portfolio mit } \mu_y = \mu\}, \mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

gegeben und heißt *Quasi-Effizienzgrenze*. Der am Scheitelpunkt befindliche Punkt  $(\sigma_{x_{\min}}, \mu_{x_{\min}})$  repräsentiert das Minimalvarianzportfolio. Sei nun  $m \in \mathbb{R}$  eine beliebige vorgegebene Mindestrendite. Seine Existenz vorausgesetzt, wo würden wir die Position eines  $m$ -effizienten Portfolios vermuten? Ist  $m \leq \mu_{x_{\min}}$ , so ist das Minimalvarianzportfolio offenbar  $m$ -effizient, weil es in diesem Fall die vorgegebene Mindestrendite einhält und das Risiko unter *allen* Portfolios minimiert. Gilt hingegen  $m > \mu_{x_{\min}}$ , so wird das  $m$ -effiziente Portfolio repräsentiert durch den Schnittpunkt von  $\mathcal{Q}$  mit einer durch  $(0, m)$  verlaufenden Parallelen zur Abszisse. Im dargestellten Diagramm wird dieser mit  $(\sigma_{x^*(m)}, \mu_{x^*(m)})$  bezeichnet. Da  $m$  beliebig gewählt war, erhalten wir als Effizienzgrenze

$\mathcal{E}$  demnach genau den oberhalb von  $(\sigma_{x_{\min}}, \mu_{x_{\min}})$  gelegenen Teil von  $\mathcal{Q}$ .

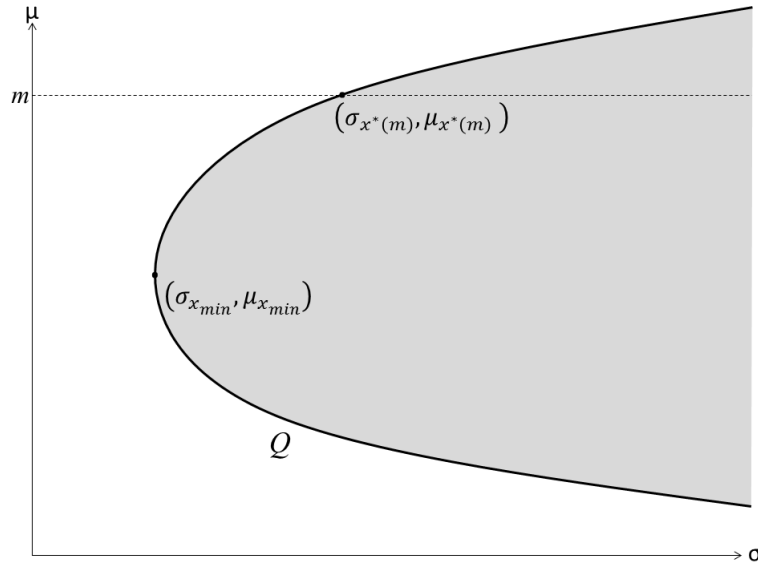


Abbildung 3.1: Der Opportunitätsbereich als rechtsöffener, linkskonvexer Ellipsoid. Sein Rand  $\mathcal{Q}$ , als schwarze Kurve dargestellt, repräsentiert alle quasi-effizienten Portfolios. Alle effizienten Portfolios entsprechen den Punkten auf dem oberhalb von  $(\sigma_{x_{\min}}, \mu_{x_{\min}})$  befindlichen Teil von  $\mathcal{Q}$ .

Diese intuitive Herleitung effizienter Portfolios wird durch Satz 3.5 bestätigt. Als bedeutsames Hilfsmittel dafür werden sich die zu  $\mathcal{Q}$  gehörigen Portfolios erweisen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie das Risiko unter allen Portfolios mit gleicher erwarteter Rendite minimieren. Sie werden als *quasi-effizient* bezeichnet und sind formal wie folgt definiert:

**Definition 3.1.** Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Ein Portfolio  $x^*$  heißt  **$m$ -quasi-effizient** genau dann, wenn  $\mu_{x^*} = m$  und

$$\sigma_{R(x^*)} = \min \{ \sigma_{R(x)} \mid x \text{ ist Portfolio mit } \mu_x = m \}$$

gilt, das heißt,  $x^*$  minimiert das Risiko unter allen Portfolios mit erwarteter Rendite  $m$ . Ein Portfolio  $x^*$  heißt **quasi-effizient** genau dann, wenn ein  $m \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $x^*$   $m$ -quasi-effizient ist.

Wir werden zunächst eine abgeschwächte Version des Varianz-Minimierungs-Problems lösen, indem wir für jedes  $m \in \mathbb{R}$  ein  $m$ -quasi-effizientes Portfolio bestimmen. Daraus lässt sich dann in einfacher Weise ein  $m$ -effizientes Portfolio ableiten. Die technischen Vorbereitungen liefern die folgenden Lemmata:

**Lemma 3.2.** <sup>16</sup>Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^N$  eine nichtleere abgeschlossene Menge. Dann existiert ein Element  $x^* \in B$  mit

$$\|x^*\|_C = \inf \{\|x\|_C \mid x \in B\}$$

wobei  $\|x\|_C := \langle x, Cx \rangle$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung und mittels Lemma 2.2 ist die Kovarianzmatrix positiv definit und induziert damit durch

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_C : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, Cy \rangle = x^\top Cy$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^N$ . Daher ist die Abbildung  $\|\cdot\|_C : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x \mid x \rangle_C$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^N$ . Da  $B$  nichtleer ist, existiert ein  $\epsilon > 0$  derart, dass gilt  $A := \overline{B_\epsilon^C(0)} \cap B \neq \emptyset$ , wobei  $B_\epsilon^C := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\|_C < \epsilon\}$ . Ferner ist  $A$  offenkundig abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Daher nimmt die Norm  $\|\cdot\|_C$  ein Minimum auf  $A$  an, da sie trivialerweise stetig bezüglich  $\|\cdot\|_C$  bzw. bezüglich jeder anderen Norm auf dem  $\mathbb{R}^N$  ist. Bezeichne  $x^*$  eine Minimalstelle in  $A$ . Da für alle  $x \in A, y \in B \setminus A$  gilt  $\|x\|_C \leq \epsilon < \|y\|_C$ , erhalten wir

$$\|x^*\|_C = \inf \{\|x\|_C \mid x \in A\} \leq \inf \{\|x\|_C \mid x \in B\}.$$

Andererseits gilt

$$\|x^*\|_C = \inf \{\|x\|_C \mid x \in A\} \geq \inf \{\|x\|_C \mid x \in B\}$$

wegen  $A \subseteq B$ . Insgesamt folgt: Es existiert ein Element  $x^* \in B$  mit

$$\|x^*\|_C = \inf \{\|x\|_C \mid x \in B\},$$

also die Behauptung. □

**Lemma 3.3.** <sup>17</sup>Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1. Es gibt ein  $m$ -quasi-effizientes Portfolio.
2. Es gibt ein  $m$ -effizientes Portfolio.

*Beweis.* Setzen wir

$$B_m := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, \mu \rangle \geq m\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, e \rangle = 1\}$$

und

$$\tilde{B}_m := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, \mu \rangle = m\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, e \rangle = 1\}$$

---

<sup>16</sup>Nach: [OER01], S. 3f.

<sup>17</sup>Nach: [OER01], S. 3f.

so sind  $B_m, \tilde{B}_m$  abgeschlossen. Denn die Abbildungen

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}, & g_2(x) &:= m - \langle x, \mu \rangle, \\ g_2 : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}, & g_2(x) &:= \langle x, e \rangle - 1 \end{aligned}$$

sind stetig und es gilt

$$B_m = g_1^{-1}((-\infty, 0]) \cap g_2^{-1}(\{0\})$$

bzw.

$$\tilde{B}_m = g_1^{-1}(\{0\}) \cap g_2^{-1}(\{0\}).$$

Damit sind  $B_m$  und  $\tilde{B}_m$  als Schnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen selbst abgeschlossen. Weiter sind  $B_m, \tilde{B}_m$  nichtleer, denn: Die  $2 \times N$ -Matrix

$$G := \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_N \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2, da  $\mu$  und  $e$  nach Annahme linear unabhängig sind. Weiter gilt

$$B_m \supseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid Gx = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \tilde{B}_m$$

und da  $G$  vollen Rang hat, ist das Gleichungssystem  $Gx = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$  universell lösbar, so dass  $B_m, \tilde{B}_m$  nichtleer sind. Wendet man nun Lemma 3.2 auf  $B = B_m$  oder  $B = \tilde{B}_m$  an, so erhält man ein  $m$ -effizientes bzw.  $m$ -quasi-effizientes Portfolio.  $\square$

Die Existenz quasi-effizienter und effizienter Portfolios ist damit nachgewiesen. Das folgende Lemma spezifiziert unter anderem die Gestalt quasi-effizienter Portfolios:

**Lemma 3.4.** Mit  $a := \langle C^{-1}e, e \rangle, b := \langle C^{-1}\mu, e \rangle = \langle C^{-1}e, \mu \rangle, c := \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle$  und  $\Delta := ac - b^2$  gilt:

1. Das Portfolio  $x_{\min}^* := \frac{1}{a}C^{-1}e$  minimiert die Varianz unter allen quasi-effizienten Portfolios.
2. Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Sei  $x^*$  ein gemäß Lemma 3.3 existentes  $m$ -quasi-effizientes Portfolio. Dann gilt mit  $z^* := C^{-1}\mu - \frac{b}{a}C^{-1}e$

$$x^* = x_{\min}^* + \frac{am - b}{\Delta}z^*.$$

Insbesondere ist  $x^*$  eindeutig bestimmt, so dass wir im Folgenden  $x^*(m)$  für das  $m$ -quasi-effiziente Portfolio schreiben werden.

*Beweis.* Sei  $x^*$  ein gemäß Lemma 3.3 existentes  $m$ -quasi-effizientes Portfolio. Die im Beweis von 3.3 definierten Funktionen  $g_1, g_2$  sind offenbar glatt, ebenso die Funktion  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \langle x, Cx \rangle$  und es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= 2Cx, \\ \nabla g_1(x) &= -\mu, \\ \nabla g_2(x) &= e,\end{aligned}$$

wie sich durch elementare partielle Ableitung ergibt.  $\nabla g_1(x) = -\mu$  und  $\nabla g_2(x) = e$  sind nach Annahme linear unabhängig. Weiter ist  $x^*$  trivialerweise ein innerer Punkt des Definitionsbereiches von  $f, g_1, g_2$ , da dieser ganz  $\mathbb{R}^N$  umfasst. Dies ermöglicht die Anwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel, so dass wir folgern können: Es existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit

$$\nabla f(x^*) + \alpha \nabla g_1(x^*) + \beta \nabla g_2(x^*) = 0.$$

Mit den oben berechneten Gradienten von  $f, g_1, g_2$  gilt also

$$2Cx^* - \alpha\mu + \beta e = 0.$$

Da  $C$  als positiv definit vorausgesetzt wurde, existiert  $C^{-1}$  und daher gilt

$$2x^* - \alpha C^{-1}\mu + \beta C^{-1}e = 0,$$

also

$$2x^* = \alpha C^{-1}\mu - \beta C^{-1}e. \tag{3.1}$$

Da  $x^*$  die Nebenbedingung  $\langle x^*, \mu \rangle = m$  erfüllt, gilt damit

$$2m = \langle 2x^*, \mu \rangle = \langle \alpha C^{-1}\mu - \beta C^{-1}e, \mu \rangle = \alpha \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle - \beta \langle C^{-1}e, \mu \rangle.$$

Da  $x^*$  auch die Nebenbedingung  $\langle x^*, e \rangle = 1$  erfüllt, gilt außerdem

$$2 = \langle 2x^*, e \rangle = \langle \alpha C^{-1}\mu - \beta C^{-1}e, e \rangle = \alpha \langle C^{-1}\mu, e \rangle - \beta \langle C^{-1}e, e \rangle.$$

Mit den oben definierten  $a := \langle C^{-1}e, e \rangle, b := \langle C^{-1}\mu, e \rangle = \langle C^{-1}e, \mu \rangle$  und  $c := \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle$  erhalten wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha c - \beta b &= 2m \\ \alpha b - \beta a &= 2,\end{aligned}$$



bzw.

$$\begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\Delta := ac - b^2 = \det \left[ \begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix} \right] > 0$ , vergleiche Anhang 6.1. Insbesondere ist obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar und die Lösung lautet

$$\alpha = \left( \frac{2am - 2b}{\Delta} \right), \beta = \frac{2bm - 2c}{\Delta},$$

vergleiche Anhang 6.3. Mit (3.1) folgt für das  $m$ -effiziente Portfolio  $x^*$

$$x^* = \frac{am - b}{\Delta} C^{-1} \mu + \frac{c - bm}{\Delta} C^{-1} e. \quad (3.2)$$

Insbesondere ist diese Darstellung eindeutig. Nach einiger Rechnung folgt für die Varianz der zugehörigen Rendite

$$\mathbb{V}[R(x^*(m))] = \langle x^*(m), Cx^*(m) \rangle = \frac{1}{\Delta a} (am - b)^2 + \frac{1}{a},$$

vergleiche Anhang 6.4. Nach Lemma 6.1 gilt  $a, c, \Delta > 0$ , so dass die Funktion  $m \mapsto \mathbb{V}[R(x^*(m))]$  einer nach oben geöffneten Parabel mit einzigem und globalem Minimum in  $m = \frac{b}{a}$  entspricht. Setzen wir diesen Wert in (3.2) ein, erhalten wir

$$x_{\min}^* := x^* \left( \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{a} C^{-1} e,$$

und dies ist jenes eindeutig bestimmte Portfolio, welches die Varianz der Rendite unter allen quasi-effizienten Portfolios minimiert, das heißt

$$\mathbb{V}[R(x_{\min}^*)] = \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\Delta a} (am - b)^2 + \frac{1}{a} = \mathbb{V}[R(x^*(m))]$$

für alle  $m \in \mathbb{R}$ .

Durch Einsetzung von  $x_{\min}^*$  in (3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{am-b}{\Delta}C^{-1}\mu + \frac{c-bm}{\Delta}C^{-1}e \\
&= \frac{am-b}{\Delta}C^{-1}\mu + \frac{ac-abm}{\Delta}\frac{1}{a}C^{-1}e \\
&= \frac{am-b}{\Delta}C^{-1}\mu + \frac{ac-abm}{\Delta}x_{\min}^* \\
&= \left(\frac{ac-b^2}{\Delta} + \frac{b^2-abm}{\Delta}\right)x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta}C^{-1}\mu \\
&= x_{\min}^* + \frac{b-am}{\Delta}b \cdot x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta}C^{-1}\mu \\
&= x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta}(C^{-1}\mu - b \cdot x_{\min}^*) \\
&= x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta}z^* \tag{3.3}
\end{aligned}$$

mit  $z^* := C^{-1}\mu - bx_{\min}^* = C^{-1}\mu - \frac{b}{a}C^{-1}e$ , also Aussage 2.  $\square$

Mit diesen Vorbereitungen können wir schließlich die Lösung des Varianz-Minimierungs-Problem formulieren:

**Satz 3.5.** <sup>18</sup>Mit  $a := \langle C^{-1}e, e \rangle$ ,  $b := \langle C^{-1}\mu, e \rangle = \langle C^{-1}e, \mu \rangle$ ,  $c := \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle$  und  $\Delta := ac - b^2$  gilt:

1. Das Minimalvarianzportfolio ist durch

$$x_{\min}^* := x^* \left( \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{a}C^{-1}e \tag{3.4}$$

gegeben.

2. Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Dann ist das eindeutig bestimmte  $m$ -effiziente Portfolio gegeben durch

$$\tilde{x}(m) = \begin{cases} x^*(m) = x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta} \cdot z^* & , \text{ falls } m \geq \frac{b}{a}, \\ x^*\left(\frac{b}{a}\right) = x_{\min}^* & , \text{ sonst.} \end{cases} \tag{3.5}$$

3. Für die Effizienzgrenze  $\mathcal{E}$  gilt

$$\mathcal{E} = \left\{ \left( \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a} (am-b)^2}, m \right) \mid m \geq \frac{b}{a} \right\}. \tag{3.6}$$

4. Die Menge aller effizienten Portfolios  $\Gamma$  ist durch die Halbgerade

$$\Gamma := \{x_{\min}^* + \tau z^* \mid \tau \geq 0\} \subset \mathbb{R}^N \tag{3.7}$$

gegeben.

---

<sup>18</sup>Nach: [OER01], S. 4f.

*Beweis.* Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Nach Lemma 3.4 gilt für das  $m$ -quasi-effiziente Portfolio

$$x^*(m) = x_{\min}^* + \frac{am - b}{\Delta} z^*$$

mit  $z^* := C^{-1}\mu - \frac{b}{a}C^{-1}e$  sowie  $x_{\min}^* := \frac{1}{a}C^{-1}e$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $m \geq \frac{b}{a}$ . Wir behaupten, dass dann  $x^*(m)$  sogar  $m$ -effizient ist. Trivialerweise hat das Portfolio  $x^*(m)$  Mindestrendite  $m$ , da es  $m$ -quasi-effizient ist. Daher genügt es zu zeigen, dass  $x^*(m)$  die Renditenvarianz minimiert unter allen Portfolios mit Mindestrendite  $m$ . Sei also  $x$  ein beliebiges Portfolio mit erwarteter Rendite  $\mu_x = \mathbb{E}[R(x)] \geq m$ . Per Definition des  $\mu_x$ -quasi-effizienten Portfolios gilt dann

$$\mathbb{V}[R(x^*(\mu_x))] \leq \mathbb{V}[R(x)].$$

Andererseits gilt für die Varianz der Renditen von  $x^*(m)$  und  $x^*(\mu_x)$

$$\mathbb{V}[R(x^*(m))] = \frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a} (am - b^2) \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a} (a\mu_x - b^2) = \mathbb{V}[R(x^*(\mu_x))]$$

wegen  $\mu_x \geq m \geq \frac{b}{a}$ . Insgesamt erhalten wir also

$$\mathbb{V}[R(x^*(m))] \leq \mathbb{V}[R(x)]$$

bzw.

$$\sigma_{x^*(m)} \leq \sigma_x,$$

was die  $m$ -Effizienz von  $x^*(m)$  beweist.

**Fall 2:**  $m < \frac{b}{a}$ . Wir behaupten, dass dann das in Lemma 3.4 definierte Portfolio  $x_{\min}^* = \frac{1}{a}C^{-1}e$  selbst  $m$ -effizient ist. Zunächst ist  $x_{\min}^*$  wegen  $x_{\min}^* = x^*(\frac{b}{a})$  selbst  $\frac{b}{a}$ -quasi-effizient, also hält  $x_{\min}^*$  wegen  $\mathbb{E}[R(x_{\min}^*)] = \frac{b}{a} > m$  die vorgegebene Mindestrendite  $m$  ein. Weiter gilt für  $x_{\min}^*$  gemäß genanntem Lemma 3.4

$$\mathbb{V}[R(x_{\min}^*)] \leq \mathbb{V}[R(x^*(m))]$$

für alle  $m \in \mathbb{R}$ . Mit einer ähnlichen Argumentation wie zuvor ( $\mathbb{V}[R(x^*(\mu_x))] \leq \mathbb{V}[R(x)]$  für alle Portfolios  $x$ ) wie bei Fall 1 folgt, dass  $x_{\min}^*$   $m$ -effizient ist, sowie dass  $x_{\min}^*$  Minimalvarianzportfolio ist, also Aussage 1. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass das Portfolio  $\tilde{x}(m)$ , definiert durch

$$\tilde{x}(m) := \begin{cases} x^*(m) = x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta} \cdot z^* & , \text{ falls } m \geq \frac{b}{a}, \\ x^*(\frac{b}{a}) = x_{\min}^* & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

$m$ -effizient ist.

Aussage 3 ergibt sich folgt: Nach dem oben Gezeigten gilt für das Risiko eines  $m$ -effizienten Portfolios

$$\sigma_{\tilde{x}(m)}^2 = \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a} (am - b)^2 & , \text{ falls } m \geq \frac{b}{a}, \\ \frac{1}{a} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(\sigma_x, \mu_x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ ist effizientes Portfolio}\} \\ &= \left\{ \left( \sigma_{\tilde{x}(m)}, \mu_{\tilde{x}(m)} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid m \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left( \sigma_{\tilde{x}(m)}, \mu_{\tilde{x}(m)} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid m \geq \frac{b}{a} \right\} \\ &= \left\{ \left( \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{\Delta a} (am - b)^2}, m \right) \in \mathbb{R}^2 \mid m \geq \frac{b}{a} \right\}, \end{aligned}$$

wie in 3. behauptet.

Die Eindeutigkeit des  $m$ -effizienten Portfolios zeigt sich wie folgt: Sei  $x^*$  ein  $m$ -effizientes Portfolio für vorgegebene Mindestrendite  $m \in \mathbb{R}$ . Aus der Lagrangeschen Multiplikatorenregel folgt dann: Es gibt  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ , so dass

$$\nabla f(x^*) + \alpha \nabla g_1(x^*) + \beta \nabla g_2(x^*) = 0, \quad (3.8)$$

sowie außerdem

$$\alpha g_1(x^*) = 0.$$

Letztere Bedingung ist äquivalent zu

$$\alpha = 0 \text{ oder } \langle x^*, \mu \rangle = m. \quad (3.9)$$

Genau wie im Beweis von Lemma 3.4 können wir aus (3.8) folgern

$$2x^* = \alpha C^{-1} \mu - \beta C^{-1} e. \quad (3.10)$$

In Hinblick auf (3.12) unterscheiden wir zwei Fälle:

**Fall 1:**  $\langle x^*, \mu \rangle = m$ . In völliger Analogie zum Beweis von Lemma 3.4 können wir schließen

$$\alpha = \frac{2am - 2b}{\Delta}, \beta = \frac{2bm - 2c}{\Delta},$$

sowie

$$x^* = \frac{c - bm}{\Delta} C^{-1} e + \frac{am - b}{\Delta} C^{-1} \mu = x_{\min}^* + \frac{am - b}{\Delta} \cdot z^*. \quad (3.11)$$

Wegen  $0 \leq \alpha = \frac{2am-2b}{\Delta}$  können wir außerdem in Verbindung mit  $a, \Delta > 0$  folgern

$$m \geq \frac{b}{a}.$$

**Fall 2:**  $\langle x^*, \mu \rangle \neq m$ . Da  $x^*$  die Nebenbedingung  $\langle x^*, \mu \rangle \geq m$  erfüllt, gilt also  $\langle x^*, \mu \rangle > m$ . Wegen (3.12) folgt weiter  $\alpha = 0$ . In Verbindung mit  $\langle x^*, e \rangle = 1$  und (3.10) folgt also

$$2x^* = -\beta C^{-1}e \quad (3.12)$$

sowie

$$2 = \langle 2x^*, e \rangle = \langle -\beta C^{-1}e, e \rangle = -\beta a,$$

also  $\beta = -\frac{2}{a}$ . Dies eingesetzt in (3.12) ergibt

$$x^* = \frac{1}{a}C^{-1}e = x_{\min}^*. \quad (3.13)$$

$x_{\min}^*$  ist  $\frac{b}{a}$ -quasi-effizient, besitzt also insbesondere erwartete Rendite  $\frac{b}{a}$ . Nach (3.13) ist  $x_{\min}^*$  aber  $m$ -effizient, also  $\mu_{x_{\min}^*} = \frac{b}{a} \geq m$ . Insgesamt haben wir also gezeigt:

$$\langle x^*, \mu \rangle = m \implies m \geq \frac{b}{a} \quad (3.14)$$

und

$$\langle x^*, \mu \rangle \neq m \implies m \leq \frac{b}{a}. \quad (3.15)$$

Wir können nun erneut eine Fallunterscheidung durchführen:

**Fall 1:**  $m > \frac{b}{a}$ . Mit (3.15) folgt dann  $\langle x^*, \mu \rangle = m$ , unter Verwendung von (3.11) also

$$x^* = x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta} \cdot z^* = \tilde{x}(m).$$

**Fall 2:**  $m < \frac{b}{a}$ . Mit (3.14) gilt dann  $\langle x^*, \mu \rangle \neq m$ , und also  $x^* = x_{\min}^* = \tilde{x}(m)$ .

**Fall 3:**  $m = \frac{b}{a}$ . In diesem Fall gilt

$$x^* = \begin{cases} x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta} \cdot z^* & , \text{ falls } \langle x^*, \mu \rangle = m, \\ x_{\min}^* & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Aber wegen  $m = \frac{b}{a}$  gilt

$$x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta} \cdot z^* = x_{\min}^*,$$

also  $x^* = x_{\min}^* = \tilde{x}(m)$ . In jedem Fall gilt also  $x^* = \tilde{x}(m)$ , und dies beweist die Eindeutigkeit des  $m$ -effizienten Portfolios.

Schließlich wollen wir 4. zeigen: Für jedes  $m$ -effiziente Portfolio  $x^*$  gilt gemäß 2.

$$x^* = x_{\min}^* + \tau \cdot z^* \text{ mit } \tau = \begin{cases} \frac{am-b}{\Delta} & , \text{ falls } m \geq \frac{b}{a}, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen  $a, \Delta > 0$  gilt dabei stets  $\tau \geq 0$ . Somit liegt  $x^*$  auf der durch  $x_{\min}^*$  verlaufenden Halbgeraden

$$\Gamma := \{x_{\min}^* + \tau \cdot z^* \mid \tau \geq 0\}.$$

Andererseits ist die Zuordnung

$$\begin{aligned} \left[\frac{b}{a}, \infty\right) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ m &\mapsto \frac{am-b}{\Delta} \end{aligned}$$

surjektiv auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und daher ist auch die Zuordnung

$$\begin{aligned} \left[\frac{b}{a}, \infty\right) &\rightarrow \mathbb{R}^N, \\ m &\mapsto x_{\min}^* + \frac{am-b}{\Delta} \cdot z^* \end{aligned}$$

surjektiv auf  $\Gamma$ , was

$$\Gamma = \{x_{\min}^* + \tau \cdot z^* \mid \tau \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \text{ ist effizientes Portfolio}\}$$

beweist. □

Satz 3.5 präsentiert mehrere interessante Ergebnisse: Zunächst bestätigt er die zu Beginn des Abschnitts ausgeführte, geometrisch motivierte Vermutung, dass das  $m$ -effiziente Portfolio für  $m < \frac{b}{a}$  dem Minimalvarianzportfolio entspricht, und sonst dem quasi-effizienten Portfolio mit erwarteter Rendite  $m$ . Neben einer geschlossenen Form für das  $m$ -effiziente Portfolio legt er dessen Eindeutigkeit dar. Letztere ist a priori nicht klar, da im Allgemeinen unterschiedliche Portfolios identische erwartete Renditen und Risiken besitzen können. Darüber hinaus ist aber die durch Satz 3.5 dargelegte Gestalt der Quasi-Effizienzgrenze im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm von Interesse: Die Zuordnung  $m \mapsto \sigma_{x^*(m)}^2$  entspricht einer Parabel mit Minimalstelle  $m = \frac{b}{a}$ . Entsprechend wird die Menge der quasi-effizienten Portfolios in der  $\sigma$ - $\mu$ -Ebene durch eine 'gekippte' Parabel repräsentiert. Schließlich ist von Interesse, dass gemäß (3.7) alle effizienten Portfolios auf einer besonders einfachen Gestalt im  $\mathbb{R}^N$  anzutreffen sind, nämlich auf der Halbgeraden, die in  $x_{\min}^*$  ihren Ausgang nimmt und in Richtung  $z^*$  zeigt.

**Beispiel.** Die Daten-CD enthält den Datensatz `DJStoxx600.csv` mit den Kursdaten und täglichen Renditen des Aktienindex DJ Stoxx 600 vom 2.1.2002 bis zum 2.1.2003,

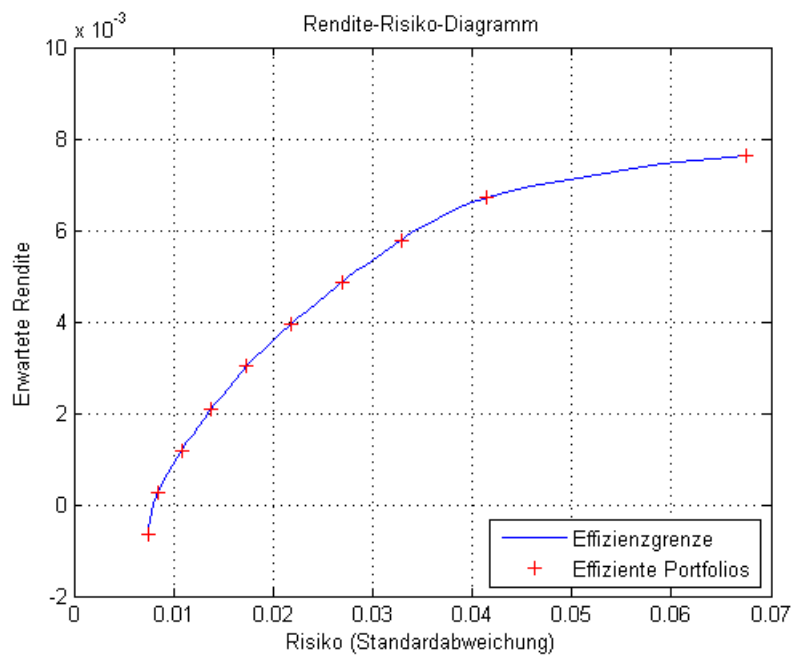


Abbildung 3.2: Blau gezeichnet ist die Effizienzgrenze, rot die berechneten effizienten Portfolios.

aufgeteilt in 18 Sektoren.<sup>19</sup> Auf Grundlage einer entsprechenden MATLAB-Datei haben wir mithilfe der Funktionen `portcons`, `ewstats` und `portopt` aus der Financial Toolbox von MATLAB zehn effiziente Portfolios berechnet, die in Abbildung 3.2 grafisch dargestellt sind. Die Portfoliooptimierung unterlag dabei den Beschränkungen, dass sowohl Kauf als auch Leerverkauf einer Anlage maximal in Höhe von 100% des Investitionskapitals zulässig ist, das heißt, es sind nur Portfolios  $x$  mit  $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, N$  zulässig.

Bei der numerischen Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems ist zu beachten, dass es nicht ratsam ist, die in Satz 3.5 vorgestellte geschlossene Form (3.5) des effizienten Portfolios für die numerische Berechnung zu benutzen, weil sie die Inverse der Kovarianzmatrix beinhaltet. Deswegen benutzen die in MATLAB vertretenen Algorithmen andere Verfahren zur Bestimmung effizienter Portfolios, namentlich `lcprog` sowie `quadprog`, wobei erstgenannter sich des Lemke-Algorithmus bedient.<sup>20</sup> Der gesamte benutzte MATLAB-Code ist in der Datei `Portfoliooptimierung (Skript).m` auf der beiliegenden Daten-CD oder im Anhang 6.2 nachzulesen.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Ausblick auf die Lösung des in Abschnitt 1 erwähnten Renditen-Maximierungs-Problems beenden. Dieses bestand darin, zu vorgegebenem  $\sigma^* \geq 0$  ein Portfolio  $x$  zu bestimmen, welches die erwartete Rendite maximiert

<sup>19</sup>Quelle: [DEU05].

<sup>20</sup>Man vergleiche hierzu den MATLAB-Code, welcher mittels `helpwin <Befehlsname> -> 'View Code'` eingesehen werden kann.

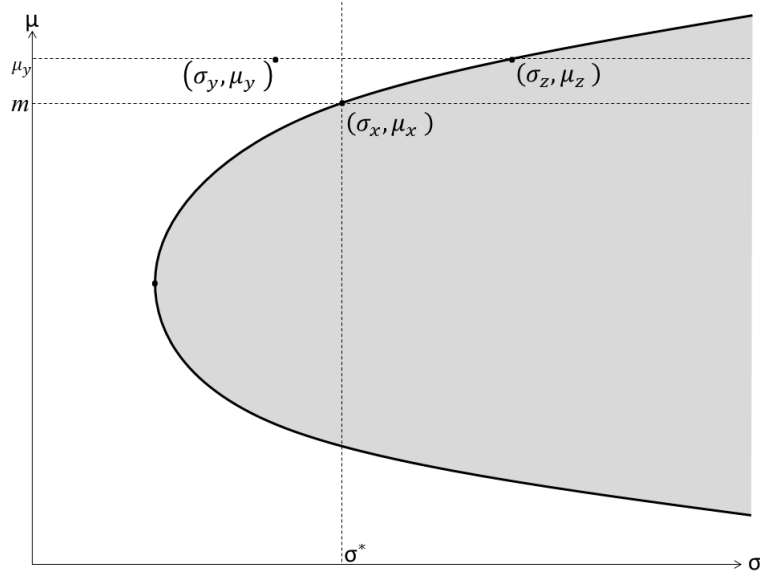


Abbildung 3.3: Die Existenz eines Portfolios  $y$  mit  $\mu_y > \mu_x = m$  und  $\sigma_y \leq \sigma$  würde zum Widerspruch führen.

unter allen Portfolios  $y$  mit  $\sigma_y \leq \sigma^*$ . Zunächst ist das Problem nach Satz 3.5 offenbar unlösbar, falls  $\sigma^* < \sqrt{\frac{1}{a}}$  gilt, weil das Minimalvarianzportfolio Risiko  $\sqrt{\frac{1}{a}}$  besitzt. Setzen wir  $\sigma^* \geq \sqrt{\frac{1}{a}}$  voraus, so liegt es gemäß Abbildung 3.3 nahe, dasjenige effiziente Portfolio  $x := \tilde{x}(m)$  mit  $\sigma_x = \sigma^*$  zu wählen. Wie durch Vergleich mit (3.6) und kurze Rechnung folgt, ist dies für

$$m = \frac{b}{a} + \sqrt{\Delta (\sigma^*)^2 - \frac{\Delta}{a}} \quad (3.16)$$

der Fall. Für dieses gilt definitionsgemäß  $\mu_x = m \geq \frac{b}{a} = \mu_{x_{\min}}$ . Wir behaupten nun, dass das Portfolio  $x$  Lösung des Rendite-Maximierungs-Problems ist. Im gegenteiligen Fall gäbe es nämlich ein Portfolio  $y$  mit  $\sigma_y \leq \sigma^*$  und  $\mu_y > m = \mu_x$ . Betrachten wir das Portfolio  $z := \tilde{x}(\mu_y)$ , für welches definitionsgemäß

$$\sigma_z \leq \sigma_y \leq \sigma^* \quad (3.17)$$

gilt. Andererseits gilt aber

$$\mu_y > m \Rightarrow \mu_y - \frac{b}{a} > m - \frac{b}{a} \Rightarrow \left(\mu_y - \frac{b}{a}\right)^2 > \left(m - \frac{b}{a}\right)^2 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{a} + \left(\mu_y - \frac{b}{a}\right)^2} > \sqrt{\frac{1}{a} + \left(m - \frac{b}{a}\right)^2}, \quad (3.19)$$

wobei die letzte Ungleichung in (3.18) aus  $\mu_y \geq m = \mu_{\tilde{x}(m)} \geq \frac{b}{a}$  folgt. Die beiden



Terme in (3.19) sind gemäß (3.6) aber gerade die Risiken von  $z$  respektive  $x$ , es gilt also  $\sigma_z > \sigma_x = \sigma^*$ . Dies aber widerspricht (3.17). Also muss  $x = \tilde{x}(m)$  Lösung des Rendite-Maximierungs-Problems sein. In ähnlicher Weise lässt sich die Eindeutigkeit der Lösung zeigen.

Damit haben wir das Rendite-Maximierungs-Problem in geometrisch anschaulicher Weise auf das Varianz-Minimierungs-Problems zurückgeführt. Für die Berechnung der Lösung ist diese Tatsache folgendermaßen von Bedeutung: Bei vorgegebener Risikoschranke  $\sigma^* \geq 0$  erhalten wir die Lösung des Rendite-Maximierungs-Problems durch dasjenige effiziente Portfolio  $\tilde{x}(m)$ , welches Risiko  $\sigma^*$  besitzt. Durch Einsetzen von (3.16) in die Formel für  $\tilde{x}(m)$  in (3.5) ergibt sich, dass bei vorgegebener Risikoschranke  $\sigma^*$  das Portfolio

$$\tilde{x} \left( \frac{b}{a} + \sqrt{\Delta (\sigma^*)^2 - \frac{\Delta}{a}} \right) = x_{\min}^* + \sqrt{\frac{1}{\Delta} \left( (\sigma^*)^2 - \frac{1}{a} \right)} \cdot z^*$$

Lösung des Rendite-Maximierungs-Problems ist.

## 4 Minimum-Varianz-Portfolioanalyse unter Einbeziehung einer festverzinslichen Kapitalanlage

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [KRE11], Kapitel 2. Im Unterschied zu Abschnitt 3 legen wir nun ein Finanzmarktmodell zugrunde, welches auch die Investition in eine festverzinsliche Kapitalanlage erlaubt. Wir gehen also zu einem Finanzmarktmodell  $(S_0, S_1, \mathbb{P})$  mit  $N > 1$  Finanzinstrumenten über, von denen genau eines, etwa  $S^1$ , einem festverzinslichen Wertpapier entspricht. Dies bedeutet  $R_1 \equiv r$  für ein  $r \in \mathbb{R}$ , und insbesondere  $\mu_1 = r, \sigma_1 = 0$  sowie  $\mathbf{Cov}[R_1, R_i] = 0$  für alle  $i \in \{2, \dots, N\}$ . Die restlichen Finanzinstrumente  $S^2, \dots, S^N$  setzen wir als risikobehaftet und paarweise nicht vollständig gleich- oder gegenläufig voraus, also

$$\sigma_2, \dots, \sigma_N > 0$$

und

$$\mathbf{Corr}[R_i, R_j] \in (-1, 1) \text{ für alle } i \neq j \in \{1, \dots, N\}.$$

Wie sich zeigen wird, vereinfacht sich die Gestalt des Opportunitätsbereiches durch Einbeziehung einer risikolosen Kapitalanlage erheblich und entspricht geometrisch einem Fächer oder Kegel. Um dies einzusehen, betrachten wir ein beliebiges Portfolio  $x \in \mathbb{R}^N$  und betrachten all jene Portfolios, die durch stetige Umschichtung des Kapitals von  $S^1$  nach  $x$  entstehen. Diese sind gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \alpha &\mapsto (\alpha x + (1 - \alpha) e_1). \end{aligned}$$

$f_x(\alpha)$  ist für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  dasjenige Portfolio, das dadurch entsteht, dass der Anteil  $\alpha$  des Kapitals in  $x$  investiert wird, und der restliche Anteil  $1 - \alpha$  in  $e_1$ . Negative Anteile  $\alpha < 0$  bzw.  $1 - \alpha < 0$  repräsentieren die entsprechende Leihe der jeweiligen Kapitalanlage. Für  $\alpha = 0$  nimmt  $f_x$  das Portfolio  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$  an, welches einer vollständigen Investition des Kapitals in die risikolose Anlage  $S^1$  entspricht. Für  $\alpha = 1$  hingegen nimmt  $f_x$  das Portfolio  $x$  an. Für die erwartete Rendite von  $f_x(\alpha)$  gilt mit Lemma 1.5

$$\mu_{f_x(\alpha)} = \alpha \mu_x + (1 - \alpha) \mu_1 = \alpha \mu_x + (1 - \alpha) r = r + \alpha (\mu_x - r). \quad (4.1)$$

Für die Varianz von  $R(f_x(\alpha))$  gilt wegen  $\mathbf{Cov}[R_1, R_x] = \sum_{m=1}^M x_m \mathbf{Cov}[R_1, R_m] = 0$  für alle  $i = 1, \dots, N$

$$\sigma_{f_x(\alpha)}^2 = \alpha^2 \sigma_x^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \mathbf{Cov}[R_1, R_x] = \alpha^2 \sigma_x^2,$$

für das Risiko von  $f_x(\alpha)$  gilt also

$$\sigma_{f_x(\alpha)} = \begin{cases} \alpha\sigma_x & , \text{ falls } \alpha \geq 0, \\ -\alpha\sigma_x & , \text{ falls } \alpha \leq 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

bzw. für alle  $\alpha \geq 0$

$$\sigma_{f_x(\alpha)} = \alpha\sigma_x = \alpha\sigma_x + (1 - \alpha)\sigma_1. \quad (4.3)$$

Gleichung (4.2) bedeutet, dass das Risiko des durch Mischung mit  $S^1$  entstehenden Portfolios  $f_x(\alpha)$  linear von dem in  $x$  investierten Kapital  $\alpha$  bzw. von dem Risiko des Portfolios  $x$  abhängt. Insbesondere tritt *kein* Diversifikationseffekt auf, wie (4.3) zeigt. Andererseits bezeugt (4.2), dass durch geeignete Wahl von  $\alpha$  ein beliebig kleines Portfoliorisiko erreicht werden kann. Dies ist in einem Finanzmarktmodell, das nur risikobehaftete Kapitalanlagen mit Korrelationskoeffizienten innerhalb von  $(-1, 1)$  enthält, im Allgemeinen nicht möglich. Dort wird nämlich gemäß Satz 3.5 das minimale Risiko realisiert durch das Minimalvarianzportfolio  $x_{\min}^*$  und beträgt  $\sqrt{\frac{1}{a}} > 0$ , wobei  $a = \langle C^{-1}e, e \rangle$ . Mit (4.1) und (4.2) folgt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{f_x(\alpha)} \\ \mu_{f_x(\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \mu_x - r \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \mu_x \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} & , \text{ falls } \alpha \geq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ \mu_x - r \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\sigma_x \\ \mu_x \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} & , \text{ falls } \alpha \leq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

und dies entspricht zwei Halbgeradengleichungen. Für  $\alpha \geq 0$  verbindet die durch  $\alpha \mapsto (\sigma_{f_x(\alpha)}, \mu_{f_x(\alpha)})$  gegebene Halbgerade die Punkte  $(0, r) = (\sigma_{f_x(0)}, \mu_{f_x(0)})$  und  $(\sigma_x, \mu_x) = (\sigma_{f_x(1)}, \mu_{f_x(1)})$ . Für  $\alpha \leq 0$  verbindet die Halbgerade hingegen die Punkte  $(0, r)$  und  $(\sigma_x, -\mu_x + 2r) = (\sigma_{f_x(-1)}, \mu_{f_x(-1)})$ . Wegen  $\mu_x - r = r - (-\mu_x + 2r)$  liegen die beiden Halbgeraden achsensymmetrisch um eine Parallele zur Abszisse durch  $(0, r)$ . Abbildung 4.1 veranschaulicht dies.

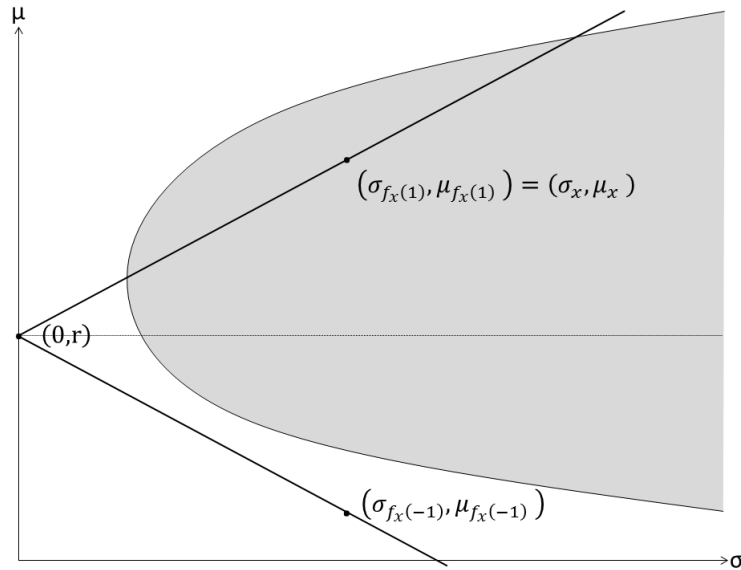


Abbildung 4.1: Durch Mischung eines Portfolios  $x$  entstehen zwei zueinander achsensymmetrische Halbgeraden im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm. Der graue ellipsoide Bereich entsteht dabei durch Portfolios, die ausschließlich Anteile an den risikobehafteten Kapitalanlagen  $S^2, \dots, S^N$  beinhalten.

Damit besitzt jeder Punkt des 'alten' Opportunitätsbereiches, welcher durch alleinige Investition in  $S^2, \dots, S^N$  hervorgeht, eine an der durch  $(0, r)$  verlaufenden Parallelen zur Abszisse gespiegelte Entsprechung im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm. Betrachten wir überdies die durch (4.4) vermittelten Halbgeraden für beliebige Portfolios  $x$ , so ergibt sich für den Opportunitätsbereich im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm die Form eines um die genannte Parallele achsensymmetrischen Kegels, wie Abbildung 4.2 illustriert.

Der Ausdruck  $\mu_x - r$  in (4.1) wird als **Risikoprämie** von  $x$  bezeichnet. Betrachten wir dazu ein Portfolio  $x \neq e_1$  mit  $\mu_x > r$ .<sup>21</sup> Welches Portfolio  $x$  sollten wir wählen, um das Anfangskapital anteilig in  $x$  und in  $S^1$  zu investieren? Intuitiv würden wir ein Portfolio  $x$  dann als besonders vorteilhaft betrachten, wenn das zu tragende Risiko  $\sigma_x$  relativ gering im Verhältnis zur Risikoprämie  $\mu_x - r$  ausfällt. Als Maßzahl für diese Beziehung wählen wir die Zahl

$$\frac{\mu_x - r}{\sigma_x} \tag{4.5}$$

und nennen diese die **Sharpe-Ratio von  $x$**  oder den **Marktpreis des Risikos von  $x$** .<sup>22</sup> Dieser Ausdruck ist strikt isoton in der erwarteten Rendite  $\mu_x$  und strikt antiton im zu tragenden Risiko  $\sigma_x$ . Betrachten wir das durch anteilige Investition in  $x$  und  $S^1$  hervorgehende Portfolio  $f_x(\alpha)$ . Wie die Halbgeradengleichungen (4.4) bereits vermuten

<sup>21</sup>Gilt  $\mu_x < r$ , so können wir als neues Portfolio  $f_x(-1)$  wählen, welches durch Leerverkauf von  $x$  in Höhe des Investitionskapitals und entsprechende Investition in  $S^1$  hervorgeht. Wegen (4.1) gilt  $\mu_{f_x(-1)} = 2r - \mu_x$ , und die Risikoprämie von  $f_x(-1)$  beträgt folglich  $\mu_{f_x(-1)} - r = r - \mu_x > 0$ . Gilt  $\mu_x = r$ , so ist nur die vollständige Investition in  $S^1$  sinnvoll.

<sup>22</sup>Der Ausdruck  $\frac{\mu_x - r}{\sigma_x}$  ist für  $x \neq e_1$  wegen  $\sigma_x > 0$  stets definiert, wie Lemma 4.2 zeigen wird.

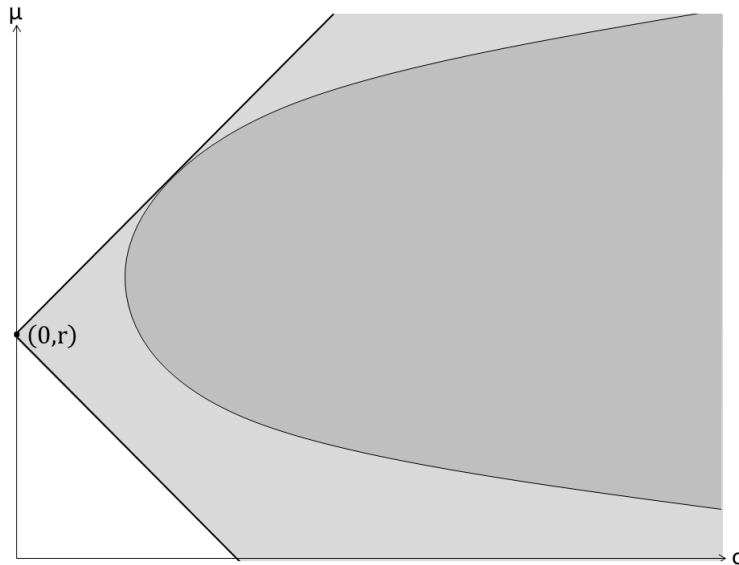


Abbildung 4.2: Der Opportunitätsbereich als Kegel in der  $\sigma$ - $\mu$ -Ebene. Der dunkelgraue ellipsoide Bereich repräsentiert all jene Portfolios, die durch ausschließliche Investition in die risikobehafteten Finanzinstrumente  $S^2, \dots, S^N$  entstehen.

lassen, hängt die Sharpe-Ratio von  $f_x(\alpha)$  dann bis auf Vorzeichen nicht von dem in  $x$  investierten Kapitalanteil  $\alpha$  ab, sofern dieser nicht verschwindet. Denn unter Verwendung von (4.1) und (4.2) gilt für  $\alpha > 0$

$$\frac{\mu_{f_x(\alpha)} - r}{\sigma_{f_x(\alpha)}} = \frac{r + \alpha(\mu_x - r) - r}{\alpha\sigma_x} = \frac{\mu_x - r}{\sigma_x}. \quad (4.6)$$

Im Falle  $\alpha < 0$  zeigt eine ähnliche Rechnung

$$\frac{\mu_{f_x(\alpha)} - r}{\sigma_{f_x(\alpha)}} = -\frac{\mu_x - r}{\sigma_x}. \quad (4.7)$$

Geometrisch entspricht die Sharpe-Ratio von  $x$  im Fall  $\alpha \geq 0$  damit der Steigung der durch (4.4) gegebenen Halbgeraden. Wie die vorangehenden Überlegungen nahelegen, ist ein Portfolio  $x$  mit hoher Sharpe-Ratio besonders geeignet für die anteilige Investition in  $S^1$  und  $x$ . Ein Portfolio  $x$ , welches die Sharpe-Ratio maximiert, für das also gilt:

$$\frac{\mu_x - r}{\sigma_x} \geq \frac{\mu_y - r}{\sigma_y} \quad \text{für alle Portfolios } y \text{ mit } \sigma_y > 0, \quad (4.8)$$

heißt **Marktportfolio**.<sup>23</sup> Im Folgenden werden wir die Lösung des Minimum-Varianz-Problems für das vorgestellte Finanzmarktmodell mit festverzinslicher Kapitalanlage herleiten. Dazu treffen wir folgende Annahmen:

<sup>23</sup>Die Bedingung  $\sigma_y > 0$  ist dabei äquivalent zu  $y \neq e_1$ , vergleiche Lemma 4.2.

#### Annahmen 4.1.

- Es existiert ein Marktportfolio.<sup>24</sup> Wir bezeichnen dieses mit  $M$ .
- Es existiert ein Finanzinstrument  $S^i$  mit erwarteter Rendite  $\mu_i \neq r$ . Im gegenteiligen Fall sieht man durch Vergleich mit Lemma 1.5 sowie mit (4.1) leicht ein, dass das Varianz-Minimierungs-Problem mit vorgegebener Mindestrendite  $m$  unlösbar ist für  $m > r$  und dass die Lösung im Falle  $m \leq r$  stets durch  $e_1$  gegeben ist.

Wir werden im Folgenden oft von *dem* Marktportfolio sprechen und meinen damit  $M$ . Ein Marktportfolio ist aber niemals eindeutig bestimmt, da jedes Mischportfolio  $f_M(\alpha)$  mit  $\alpha > 0$  gemäß (4.6) identische Sharpe-Ratio besitzt, also wiederum Marktportfolio ist.

Die Sharpe-Ratio von  $M$  wird auch als **Marktpreis des Risikos** bezeichnet. Da dem Marktportfolio für die weitere Analyse und Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems eine besondere Bedeutung zukommt, verdient die durch  $(0, r)$  und  $(\sigma_M, \mu_M)$  verlaufende Halbgerade eine besondere Bezeichnung. Sie heißt **Kapitalmarktlinie** und ist durch

$$\mathcal{K} := \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \sigma_M \\ \mu_M \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \mid \alpha \geq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_{f_M(\alpha)} \\ \mu_{f_M(\alpha)} \end{pmatrix} \mid \alpha \geq 0 \right\}$$

gegeben, wobei  $f_M$  wie üblich durch

$$\begin{aligned} f_M : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \alpha &\mapsto \alpha M + (1 - \alpha) e_1, \end{aligned}$$

definiert ist. Abbildung 4.3 legt nahe, dass  $\mathcal{K}$  der Effizienzgrenze entspricht, und dass wir jedes effiziente Portfolio durch anteilige Investition in  $S^1$  und  $M$  erhalten. Dies ist die Aussage von Satz 4.5. Für dessen Vorbereitung benötigen wir den folgenden, bereits angekündigten Hilfssatz:

**Lemma 4.2.**  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$  ist das einzige Portfolio mit Risiko 0. Insbesondere ist die Sharpe-Ratio für jedes Portfolio  $x \neq e_1$  definiert.

*Beweis.* Sei  $x$  ein Portfolio mit  $x \neq e_1$ . Wir müssen  $\sigma_x > 0$  nachweisen. Wegen  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$  muss ein  $j \in \{2, \dots, N\}$  existieren mit  $x_j \neq 0$ . Für das Risiko von  $x$  gilt wie üblich

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{k \neq l} x_k x_l \mathbf{Cov}[R_k, R_l]. \quad (4.9)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

---

<sup>24</sup>Für Existenzbedingungen und Gestalt des Marktportfolios vergleiche [SZE80], S. 78f.

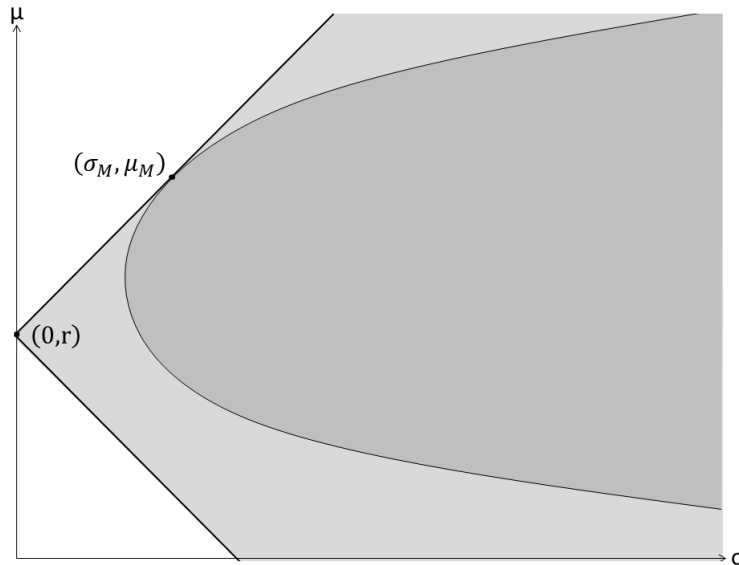


Abbildung 4.3: Die Kapitalmarktlinie entspricht der durch der  $(0, r)$  und  $(\sigma_M, \mu_M)$  verlaufenden Halbgerade.

**Fall 1:** Es existiert ein  $k \in \{2, \dots, N\}, k \neq j$  mit  $x_k \neq 0$ . Dann ist  $x_j x_k \neq 0$ , und ähnlich wie im Beweis von Satz 2.3 können wir wie folgt argumentieren: Als Funktion von  $\mathbf{Cov}[R_j, R_k]$  ist  $\sigma_x^2$  strikt isoton oder antiton, je nachdem ob  $x_j x_k > 0$  oder  $x_j x_k < 0$  gilt. Da aber nach Voraussetzung  $\mathbf{Cov}[R_j, R_k] \in (-1, 1)$  gilt, nimmt  $\sigma_x^2$  das Minimum 0 nicht an, es gilt also  $\sigma_x > 0$ .

**Fall 2:** Für alle  $k \neq j, k \in \{2, \dots, N\}$  gilt  $x_k = 0$ . Damit gilt  $x_1 \neq 1$ . Ferner ist  $x$  darstellbar als Linearkombination von  $e_1$  und  $e_j$ , es gilt also

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_j \cdot e_j = x_1 e_1 + (1 - x_1) e_j = f_{e_j} (1 - x_1).$$

Gemäß (4.9) gilt für das Risiko von  $x$  dann

$$\sigma_x^2 = (1 - x_1)^2 \sigma_j^2 > 0.$$

□

Bevor wir das Varianz-Minimierungs-Problem im vorliegenden Fall mit Satz 4.5 lösen, benötigen wir noch zwei weitere Lemmata.

**Lemma 4.3.** Zu jedem  $m \in \mathbb{R}$  existiert ein Portfolio  $y$  mit  $\mu_y = m$ . Jede beliebige erwartete Rendite wird also durch ein Portfolio realisiert. Insbesondere ist der Opportunitätsbereich nach oben und unten unbeschränkt.

*Beweis.* Nach Annahme existiert ein Portfolio  $x$  mit  $\mu_x \neq m$ . Betrachten wir das durch

Mischung von  $S^1$  und  $x$  entstehende Portfolio  $f_x(\alpha)$ , so gilt gemäß (4.1)

$$\mu_{f_x(\alpha)} = r + \alpha(\mu_x - r),$$

und für  $\alpha = \frac{m-r}{\mu_x-r}$  gilt offenbar  $\mu_{f_x(\alpha)} = m$ .  $\square$

**Lemma 4.4.** Die erwartete Rendite des Marktportfolios  $M$  ist strikt größer als die der festverzinslichen Kapitalanlage  $S^1$ .

*Beweis.* Im gegenteiligen Fall würde für die Sharpe-Ratio von  $M$  gelten

$$\frac{\mu_M - r}{\sigma_M} \leq 0.$$

Gemäß Lemma 4.3 existiert aber zu jedem  $m \in \mathbb{R}$  ein Portfolio  $y$  mit  $\mu_y = m$ . Speziell für  $\mu_y = m > r$  würde folglich für die Sharpe-Ratio von  $y$  gelten

$$\frac{\mu_y - r}{\sigma_y} > 0 \geq \frac{\mu_M - r}{\sigma_M},$$

im Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft (4.8) des Marktportfolios. Also gilt  $\mu_M > r$ .  $\square$

Der folgende Satz schließlich gibt die Lösung des Varianz-Minimierungs-Problems an und bestätigt die durch Abbildung 4.3 motivierte Vermutung, dass die Kapitalmarktklinie der Effizienzgrenze entspricht.

**Satz 4.5.** Die Kapitalmarktklinie  $\mathcal{K}$  ist identisch mit der Effizienzgrenze  $\mathcal{E}$ . Zu vorgegebener Mindestrendite  $m \in \mathbb{R}$  ist ein  $m$ -effizientes Portfolio gegeben durch

$$\bar{x}(m) := \begin{cases} f_M\left(\frac{m-r}{\mu_M-r}\right) = e_1 + \frac{m-r}{\mu_M-r}(M - e_1) & , \text{ falls } m > r, \\ e_1 & , \text{ falls } m \leq r. \end{cases} \quad (4.10)$$

Setzen wir weiter voraus, dass das Marktportfolio  $M$  im folgenden Sinne eindeutig bestimmt ist: Es existiert kein Portfolio  $x$ , das die Sharpe-Ratio von  $M$  besitzt und nicht Linearkombination von  $e_1$  und  $M$  ist. Dann ist auch das  $m$ -effiziente Portfolio eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} = \left\{ \left( \sigma_{f_M(\alpha)}, \mu_{f_M(\alpha)} \right) \mid \alpha \geq 0 \right\}$ . Sei dazu  $x \in \mathcal{E}$  ein  $m$ -effizientes Portfolio, wobei  $m \in \mathbb{R}$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $m \leq r$ . Dann ist wegen  $\sigma_1 = 0$  offenbar  $e_1$  selbst  $m$ -effizient. Da  $e_1$  gemäß Lemma 4.2 das einzige Portfolio mit Risiko 0 ist, muss daher  $x = e_1$  gelten. Wegen  $f_M(0) = e_1 = x$  gilt daher  $(\sigma_x, \mu_x) = (0, r) \in \mathcal{K}$ .

**Fall 2:**  $m > r$ . Gemäß Lemma 4.4 gilt  $\mu_M - r > 0$ , also  $\frac{m-r}{\mu_M-r} > 0$ . Daher liegt die Repräsentation des Portfolios  $\bar{x}(m) := f_M\left(\frac{m-r}{\mu_M-r}\right)$  auf der Kapitalmarktklinie. Offenbar



gilt  $\mu_{\bar{x}(m)} = m$  sowie

$$\mu_x \geq \mu_{\bar{x}(m)} = m \text{ und } \sigma_x \leq \sigma_{\bar{x}(m)}, \quad (4.11)$$

da  $x$   $m$ -effizient ist. Darüber hinaus muss  $\mu_{\bar{x}(m)} = \mu_x$  und  $\sigma_{\bar{x}(m)} = \sigma_x$  gelten. Im gegenteiligen Fall würde wegen (4.11) nämlich  $\mu_x > \mu_{\bar{x}(m)} = m$  oder  $\sigma_x < \sigma_{\bar{x}(m)}$  gilt. In Verbindung mit (4.11) und wegen  $m > r$  würde für die Sharpe-Ratio von  $x$  dann gelten

$$\frac{\mu_x - r}{\sigma_x} > \frac{\mu_{\bar{x}(m)} - r}{\sigma_{\bar{x}(m)}} = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M}. \quad (4.12)$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus  $\bar{x}(m) \in f_M([0, \infty))$ , vergleiche (4.6). Ungleichung (4.12) jedenfalls widerspricht der Tatsache, dass das Marktportfolio  $M$  maximale Sharpe-Ratio besitzt. Folglich gilt  $(\sigma_x, \mu_x) = (\sigma_{\bar{x}(m)}, \mu_{\bar{x}(m)}) \in \mathcal{K}$ . Damit haben wir nachgewiesen, dass die Repräsentation  $(\sigma_x, \mu_x)$  eines beliebigen effizienten Portfolios  $x$  im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm auf der Kapitalmarktlinie liegt, also  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K}$ .

Zeigen wir nun  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$ : Sei  $(\sigma, \mu) \in \mathcal{K}$  beliebig, also  $(\sigma, \mu) = (\sigma_{f_M(\alpha)}, \mu_{f_M(\alpha)})$  für ein  $\alpha \geq 0$ . Zunächst nehmen wir ohne Einschränkung  $\alpha > 0$  an. Betrachten wir das Portfolio  $f_M(\alpha)$ , welches diesen Punkt im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm repräsentiert. Zunächst gilt  $\mu_{f_M(\alpha)} > r$  wegen (4.1) und Lemma 4.4. Weiter behaupten wir, dass  $f_M(\alpha)$  auch  $\mu_{f_M(\alpha)}$ -effizient ist. Trivialerweise besitzt es erwartete Mindestrendite  $\mu_{f_M(\alpha)}$ . Dass  $f_M(\alpha)$  das Risiko minimiert unter allen Portfolios mit erwarteter Mindestrendite  $\mu_{f_M(\alpha)}$ , folgt mit dem gleichen Argument wie im ersten Teil des Beweises. Würde nämlich ein anderes Portfolio  $x$  mit erwarteter Rendite  $\mu_x \geq \mu_{f_M(\alpha)}$  existieren, das kleineres Risiko besitzt, so würde (4.12) gelten. Man beachte dabei, dass die Voraussetzung  $\mu_{f_M(\alpha)} > r$  eingeht. Dann jedenfalls besäße  $x$  eine größere Sharpe-Ratio als das Marktportfolio. Da dies nicht möglich ist, kann ein solches Portfolio  $x$  nicht existieren, und  $f_M(\alpha)$  ist  $\mu_{f_M(\alpha)}$ -effizient. Insbesondere gilt  $(\sigma_{f_M(\alpha)}, \mu_{f_M(\alpha)}) \in \mathcal{E}$ , so dass insgesamt  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$  folgt. Damit haben wir die Identität von Effizienzgrenze  $\mathcal{E}$  und Kapitalmarktlinie  $\mathcal{K}$  gezeigt.

Setzen wir weiter die Eindeutigkeit des Marktportfolios  $M$  in dem Sinne voraus, dass jedes Portfolio  $x$  mit identischer Sharpe-Ratio Linearkombination von  $e_1$  und  $M$  ist. Letzteres ist offenbar äquivalent zu  $x \in f_M([0, \infty))$ . (Die Möglichkeit  $x \in f_M((-\infty, 0))$  können wir ausschließen, weil dann die Sharpe-Ratio von  $x$  negativ und damit kleiner als die von  $M$  wäre, vgl. (4.7) und Lemma 4.4.) Sei  $m \in \mathbb{R}$ . Wir behaupten, dass das durch (4.10) definierte,  $m$ -effiziente Portfolio dann eindeutig bestimmt ist. Im Fall  $m \leq r$  ist dies klar, da das Portfolio  $e_1 = \bar{x}(m)$  gemäß Lemma 4.2 das einzige Portfolio mit Risiko 0 und damit das einzige  $m$ -effiziente Portfolio ist. Setzen wir also  $m > r$  voraus. Das Portfolio  $\bar{x}(m) \in f_M([0, \infty))$ ,  $\bar{x}(m) \neq e_1$ , besitzt erwartete Rendite  $\mu_{\bar{x}(m)} = m$  und Risiko  $\sigma_{\bar{x}(m)} > 0$ , und ist nach dem ersten Beweisteil  $m$ -effizient. Angenommen, es würde nun ein weiteres  $m$ -effizientes Portfolio  $x$  mit  $x \notin f_M([0, \infty))$  existieren. Für dieses würde insbesondere  $x \neq \bar{x}(m)$  gelten und außerdem  $\mu_x \geq m = \mu_{\bar{x}(m)}$  und  $\sigma_x = \sigma_{\bar{x}(m)} > 0$ , da sowohl  $x$  als auch  $\bar{x}(m)$   $m$ -effizient wären. Da die Annahme  $\mu_x > m = \mu_{\bar{x}(m)}$

wie im ersten Teil des Beweises der Maximalität der Sharpe-Ratio des Marktportfolios widersprechen würde, muss  $\mu_x = m = \mu_{\bar{x}(m)}$  gelten und folglich

$$\frac{\mu_x - r}{\sigma_x} = \frac{\mu_{\bar{x}(m)} - r}{\sigma_{\bar{x}(m)}}.$$

Die Sharpe-Ratios von  $x$  und  $\bar{x}(m)$  würden also übereinstimmen und somit beide maximal unter allen Portfolios sein. Aber wegen  $x \notin f_M([0, \infty))$  widerspricht dies der Eindeutigkeit des Marktportfolios im oben genannten Sinne. Somit ist das  $m$ -effiziente Portfolio  $\bar{x}(m)$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Vorausgesetzt, das Marktportfolio ist bekannt, ist die explizite Lösung  $\bar{x}(m)$  des Varianz-Minimierungs-Problems im Falle eines Finanzmarktmodells mit genau einer festverzinslichen Kapitalanlage also von deutlich einfacherer Gestalt als in dem in Abschnitt 3 behandelten Fall. Das  $m$ -effiziente Portfolio ergibt sich als geeignete Mischung von risikoloser Anlage  $e_1$  und Marktportfolio  $M$ . 'Geeignet' meint dabei, dass die Aufteilung des Investitionskapitals so gewählt wird, dass das Mischportfolio  $\bar{x}(m)$  exakt erwartete Rendite  $m$  besitzt. Das Portfolio  $\bar{x}(m)$  entspricht damit der Auswertung einer Halbgeradengleichung an der Stelle  $\frac{m-r}{\mu_M-r}$ , wie die Zuordnung (4.10) zeigt. Die Berechnung eines Marktportfolios ist allerdings ein Problem, welches wir hier umgangen haben. Eine geschlossene Form für das Marktportfolio findet sich etwa in [SZE80], S. 78f.

**Beispiel.** Betrachte Abbildung 4.4. Mit dem bereits an früherer Stelle verwendeten Datensatz `DJStoxx600.mat` bestimmen wir mittels MATLAB ein Marktportfolio unter der Annahme einer hypothetischen festverzinslichen Kapitalanlage  $S^1$  mit  $\mu_1 = 0.003$ . Festverzinsliche Kapitalanlage, Marktportfolio und Kapitalmarktlinie werden zusammen mit der bereits in Abschnitt 3 berechneten Effizienzgrenze in Abbildung 4.4 gezeigt. Grundlage für die Bestimmung des Marktportfolios mittels MATLAB ist der Befehl `portalloc`.

Insgesamt haben wir neben einer Lösung für das Varianz-Minimierungs-Problem erkannt, dass der Opportunitätsbereich eines Finanzmarktmodells mit festverzinslicher Kapitalanlage von bemerkenswert einfacher Gestalt ist: Er entspricht einem nach rechts unbeschränkten Kegel mit Ausgangspunkt  $(0, r)$ , der symmetrisch um die durch diesen Punkt verlaufende Abszissenparallele liegt. Die Begrenzungslinien des Kegels sind gerade durch die Kapitalmarktlinie  $\mathcal{K}$ , respektive deren Spiegelung an der genannten Parallelen gegeben. Dabei entspricht  $\mathcal{K}$  der Menge aller Repräsentationen von Portfolios, welche durch Mischung der risikolosen Anlage  $S^1$  und dem Marktportfolio  $M$  entstehen und durch die Abbildung  $f_M$  vermittelt werden. Die aus Abbildung 4.2 gewonnene Anschauung des so entstandenen Opportunitätsbereiches hat uns nahegelegt, dass die Kapitalmarktlinie der Effizienzgrenze entspricht. Dies wurde in geometrisch anschaulicher Weise durch Satz 4.5 bestätigt.

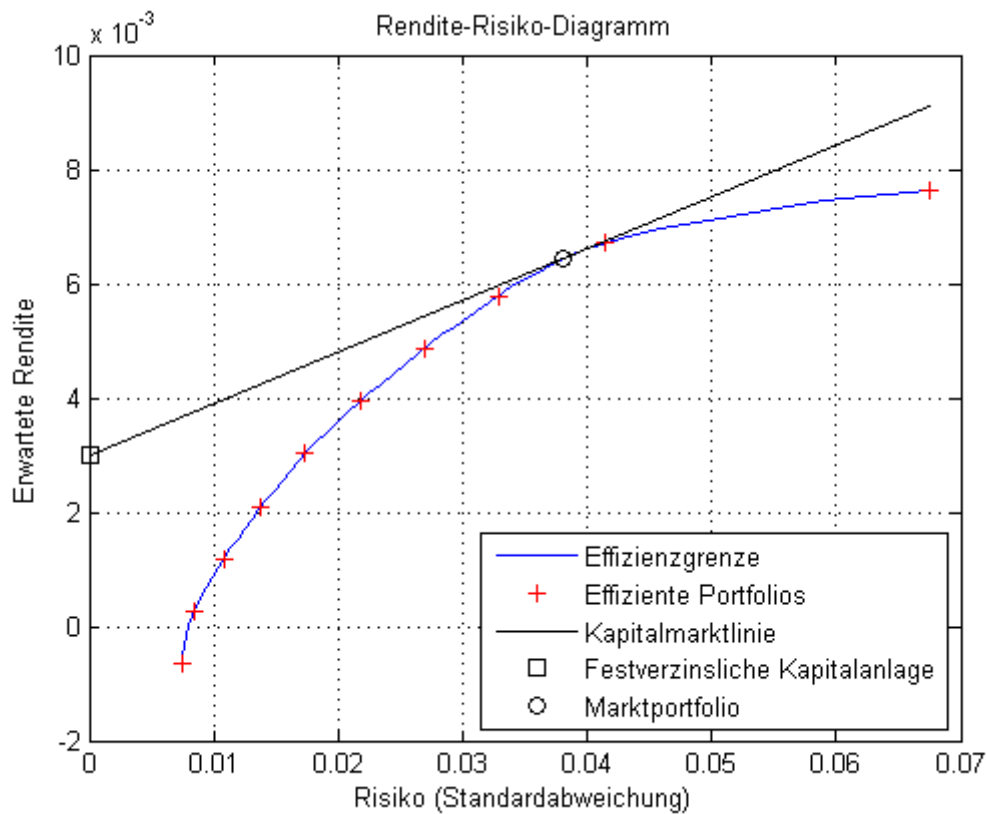


Abbildung 4.4: Die Kapitalmarktlinie tangiert die Effizienzgrenze und besitzt als Schnittpunkt mit ihr den durch das Marktportfolio gegebenen Punkt. Deswegen wird es auch als Tangentialportfolio bezeichnet.

Im vorliegenden Abschnitt haben wir uns auf den Fall beschränkt, dass genau eine risikolose Anlage existiert, in die unbegrenzt investiert werden kann, und dass ihr Haben- und Sollzins identisch sind. Als Erweiterungen kommen daher Modelle in Betracht, die mehrere festverzinsliche Kapitalanlagen mit unterschiedlichen Zinssätzen beinhalten, und in die nur begrenzt viel Kapital investiert bzw. geliehen werden darf. Auch eine Unterscheidung von Haben- und Sollzins würde eine realistische Annahme darstellen.

## 5 Fazit

Die vorliegende Ausarbeitung hat mit dem Markowitz-Ansatz eine plausible Herangehensweise für die systematische Portfoliooptimierung und -analyse vorgestellt. Sinnvoll erscheint vor allem, wie der Markowitz-Ansatz der Ermangelung eines global besten Portfolios begegnet: Der Ansatz ist seinem Wesen nach ein Kompromiss zwischen Renditemaximierung und Risikominimierung. Darüber hinaus vereinfacht er die komplexen Eigenschaften von Finanzinstrumenten und Portfolios drastisch, indem er sie ausschließlich anhand zweier Verteilungsparameter ihrer Renditen beurteilt: Erwartungswert und Standardabweichung.

Diese extreme Vereinfachung ist aber auch ein wesentlicher Kritikpunkt am Markowitz-Ansatz. Besonders die Wahl der Standardabweichung als Maß für das Verlustrisiko ist kritisch zu sehen: Bei ihrer Minimierung werden auch diejenigen Portfolios benachteiligt, welche sich durch positive, also erwünschte Abweichungen von ihrer erwarteten Rendite auszeichnen.<sup>25</sup> Andererseits liegt folgende Heuristik nahe: Ein Portfolio mit wenig negativen Abweichungen vom Erwartungswert kann nicht unverhältnismäßig viele positive Abweichungen aufweisen. Dies liegt daran, dass der Erwartungswert den  $\mathcal{L}^2$ -Abstand zur Portfoliorendite minimiert. Welcher Art das Verhältnis zwischen negativen und positiven Abweichungen ist, ist daher ein möglicher Gegenstand weiterer mathematischer Untersuchung, ebenso die Wahl eines geeigneten Risikomaßes. Als Beispiel für ein alternatives Risikomaß ist etwa das Value-at-Risk zu nennen, ein Quantil der Rendite auf vorgegebenem Niveau.<sup>26</sup> Der Vorteil der Standardabweichung bzw. der Varianz ist allerdings ihre leichtere mathematische Handhabbarkeit, wie ihre einfache Darstellung mittels einer positiv definiten Matrix in Lemma 2.2 zeigt.

Ein weiteres Problem ergibt sich dadurch, dass Erwartungswert und Standardabweichung in der Praxis geschätzt werden müssen, etwa aus den Kursen vergangener Handelstage.<sup>27</sup> Der Markowitz-Ansatz in der vorgestellten Form ignoriert dabei jedoch die Güte und die Verlässlichkeit der Schätzung völlig, obwohl diese Einfluss haben können auf das Risiko der Investitionsentscheidungen: Eine Investitionsentscheidung auf ungenügender statistischer Basis kann berechtigterweise als besonders riskant betrachtet werden.<sup>28</sup>

Eine Schätzung der Parameter ausschließlich auf Basis vergangenen Kursdaten hat zur Folge, dass die resultierende Portfoliowahl ausschließlich vergangene Marktentwicklungen widerspiegelt. Dieser 'Konservatismus' ist aber unberechtigt, wenn sich etwa Rahmenbedingungen des Marktes wesentlich ändern, oder wenn Finanzinstrumente eine neuartige Entwicklung aufweisen. Ein Beispiel für ersteres ist die europäische Finanzkrise, ein Beispiel für letzteres ist ein Unternehmen, welches in einen neuen Marktsektor

---

<sup>25</sup>Nach: [KOR], S. 150.

<sup>26</sup>[KOR], S. 150.

<sup>27</sup>vgl. [KRE11], S. 6.

<sup>28</sup>vgl. [KIS84], S. 38 f.

expandiert. Besonders letztere Entwicklung und ihre Auswirkungen lassen sich aus den vergangenen Kursdaten der Unternehmensaktie - jedenfalls den weiter zurückliegenden - nur eingeschränkt entnehmen. Investoren haben aber durchaus Einschätzungen über diese Entwicklungen. Diese gewinnen sie jedoch nicht nur aus den Kursdaten vergangener Handelstage, sondern aufgrund allgemeinerer Erfahrungen, ökonomischer Theorien, und sicherlich auch aufgrund von irrationalen Meinungen. Ebenso ist die subjektive Sicherheit über das Eintreten eigener Erwartungen von Bedeutung, da unsichere Investoren sich im Allgemeinen stärker risikoavers verhalten. Beziehen wir diese subjektiven Faktoren in unsere Modellbildung mit ein, so dürfen wir nicht nur auf bessere Investitionsentscheidungen hoffen, sondern auch auf eine adäquatere Modellierung des realen Verhaltens von Finanzmarktteilnehmern. Um diese subjektiven Aspekte mathematisch zu modellieren, kommen a-priori-Verteilungen auf dem Parameterraum in Betracht, welche die Verlässlichkeit der Schätzung bzw. subjektive Einschätzungen widerspiegeln.<sup>29</sup>

Die vereinfachende Beschränkung auf erwartete Rendite und Risiko entspricht im Übrigen, ebenso wie die Einschränkung auf eine einzige Handelsperiode, einer *statischen* Betrachtungsweise: Das Modell ignoriert zeitliche Kursverläufe und insbesondere deren Zusammenhang mit äußeren Ereignissen oder mit den Kursverläufen der übrigen Finanzinstrumente. Realistischer als Ein-Perioden-Finanzmarktmodelle sind daher Mehr-Perioden- oder sogar zeitstetige Modelle, beispielsweise das Black-Scholes-Modell.<sup>30</sup>

Von diesen Kritikpunkten unberührt bleiben aber die grundlegenden Ideen, prinzipiell ungewisse Kursentwicklungen durch Zufallsvariablen zu modellieren, Finanzinstrumente anhand ihrer Rendite und ihres Verlustrisikos zu beurteilen, sowie einen Kompromiss zwischen der Optimierung beider Größen anzustreben. Der Wert des Markowitz-Ansatzes ist auch darin zu sehen, dass er ein mathematisches Modell für die Portfolioanalyse und -optimierung zur Verfügung stellt, innerhalb dessen Beurteilungen und Investitionsentscheidungen systematisch, nachvollziehbar und formal begründet werden.

---

<sup>29</sup>Nach: [KIS84], S. 40 ff.

<sup>30</sup>vgl. [KOR], S. 151.

## 6 Anhang

**Ergänzung 6.1.** <sup>31</sup>Mit  $a := \langle C^{-1}e, e \rangle, b := \langle C^{-1}\mu, e \rangle, c := \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle$  sowie  $\Delta := ac - b^2$  gilt:

1.  $b = \langle C^{-1}e, \mu \rangle$ .
2.  $a, c > 0$ .
3.  $\Delta > 0$ .

*Beweis.*

1. Da  $C$  symmetrisch ist, ist auch  $C^{-1}$  symmetrisch. Daher gilt  $b = \langle C^{-1}\mu, e \rangle = \langle C^{-1}e, \mu \rangle$ .
2.  $C$  ist positiv definit, also gilt  $\langle x, Cx \rangle > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Mit  $x = C^{-1}e \neq 0$  folgt  $a = \langle C^{-1}e, e \rangle = \langle x, Cx \rangle > 0$ . Mit  $x = C^{-1}\mu \neq 0$  folgt  $c = \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle = \langle x, Cx \rangle > 0$ .
3. Da  $C$  positiv definit ist, definiert die Abbildung  $(x, y) \mapsto \langle x, Cy \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^N$ . Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, angewandt auf  $x := C^{-1}\mu, y := C^{-1}e$  folgt daher

$$b^2 = \langle C^{-1}\mu, e \rangle \leq \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle \cdot \langle C^{-1}e, e \rangle = c \cdot a$$

Also  $ac - b^2 \geq 0$ . Es gilt aber sogar strikte Ungleichheit, da andernfalls  $C^{-1}\mu, C^{-1}e$  linear abhängig wären. Dann gäbe es  $\gamma, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $\gamma \neq 0$  oder  $\tau \neq 0$  und

$$\gamma C^{-1}\mu + \tau C^{-1}e = 0$$

also durch Anwendung von  $C$

$$\gamma\mu + \tau e = 0$$

mit  $\gamma \neq 0$  oder  $\tau \neq 0$ , im Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von  $\mu, e$ . Also gilt  $\Delta = ac - b^2 > 0$ .  $\square$

**Ergänzung 6.2. (MATLAB-Skript)** Mit dem gezeigten MATLAB-Code wurden zehn effiziente Portfolios und ein Marktportfolio auf Basis des Datensatzes `Portfolios2002` berechnet. Dieser enthält tägliche Kurse des DJ Stoxx 600 innerhalb des Zeitraums 02.01.2002 - 02.01.2003. Weitere Erläuterungen zum gezeigten MATLAB-Code befinden sich in der Datei `Portfoliooptimierung (Skript).m`, welche sich auf der beiliegenden Daten-CD befindet.

---

<sup>31</sup>[OER01], Seite 5.

Zu den Variablen: `RetSeries` enthält die täglichen Renditen der einzelnen Indizes. `NASSETS` ist die Anzahl der Indizes (19). `AssetMin` und `AssetMax` kodieren Kaufs- und Leerverkaufsbeschränkungen (hier: 100% des Investitionskapitals pro Index bzw. Asset).

```
%Teil I: Berechnung effizienter Portfolios
```

```
%Kodierung der Kaufs- / Leerverkaufsbeschränkungen
```

```
ConSet=portcons('PortValue',1,NASSETS,'AssetLims',AssetMin,AssetMax);
```

```
%Erwartete Renditen und Kovarianzen aus Tagesrenditen schätzen
```

```
[ExpReturn,ExpCovariance]=ewstats(RetSeries);
```

```
%Berechnung zehn effizienter Portfolios, die in PortWts gespeichert werden.
```

```
[PortRisk, PortReturn, PortWts] = portopt(ExpReturn, ExpCovariance, 10, [],  
ConSet)
```

```
%Ausgabe der Effizienzgrenze bzw. der effizienten Portfolios als Plot; Wir  
berechnen 50 Portfolios, damit die Effizienzgrenze im Plot glatter erscheint.
```

```
portopt(ExpReturn, ExpCovariance, 50, [], ConSet)
```

```
hold on
```

```
plot(PortRisk,PortReturn,'r')
```

```
%Teil II: Berechnung eines Marktportfolios.
```

```
%Ein Marktportfolio wird in RiskyWts gespeichert.
```

```
[RiskyRisk,RiskyReturn,RiskyWts,RiskyFraction,OverallRisk,OverallReturn]=  
portalloc(PortRisk,PortReturn,PortWts,RisklessRate)
```

```
%Plot von Marktportfolio respektive Kapitalmarktlinie
```

```
plot([0,PortRisk(end)], [RisklessRate,((RiskyReturn-RisklessRate)/RiskyRisk)*  
PortRisk(end)+RisklessRate], 'k-')
```

```
plot(0,RisklessRate,'ks')
```

```
plot(RiskyRisk,RiskyReturn,'ko')
```

```
%Achsenbeschriftung und Legende
```

```
xlabel('Risiko (Standardabweichung)')
```

```
ylabel('Erwartete Rendite')
```

```
title('Rendite-Risiko-Diagramm')
```

```
legend('Effizienzgrenze','Effiziente Portfolios','Kapitalmarktlinie',
```

'Festverzinsliche Kapitalanlage', 'Marktportfolio', 4)

**Ergänzung 6.3.** (Lösung des LGS aus Lemma 3.4) Mit  $a, c, ac - b^2 > 0$  gilt

$$\begin{array}{rclcl} \alpha c - \beta b & = & 2m & | \cdot \frac{-b}{c} & -\alpha b + \beta \frac{b^2}{c} = -\frac{2bm}{c} & | \text{ I+II} \\ & & & \implies & & \\ \alpha b - \beta a & = & 2 & & \alpha b - \beta a = 2 & \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rclcl} \alpha c - \beta b & = & 2m & & \alpha = \frac{2m + \beta b}{c} \\ & & & \implies & \\ \beta \left( \frac{b^2 - ac}{c} \right) & = & \frac{2c - 2bm}{c} & & \beta = \frac{2bm - 2c}{ac - b^2} \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rclcl} \alpha & = & \frac{1}{c} \left( 2m + \frac{2mb^2 - 2bc}{ac - b^2} \right) & & \alpha = \frac{1}{c} \left( \frac{2acm - 2mb^2 + 2mb^2 - 2bc}{\Delta} \right) \\ & & & \implies & \\ \beta & = & \frac{2bm - 2c}{\Delta} & & \beta = \frac{2bm - 2c}{\Delta} \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \left( \frac{2am - 2b}{\Delta} \right) \\ \beta & = & \frac{2bm - 2c}{\Delta} \end{array}$$



**Ergänzung 6.4. (Varianz von  $x^*(m)$ )**

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}[R(x^*(m))] \\ &= \langle x^*(m), Cx^*(m) \rangle \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} &= x^*(m)^\top Cx^*(m) \\ &= \left( \frac{am-b}{\Delta} C^{-1}\mu + \frac{c-bm}{\Delta} C^{-1}e \right)^\top C \left( \frac{am-b}{\Delta} C^{-1}\mu + \frac{c-bm}{\Delta} C^{-1}e \right) \\ &= \left( \frac{am-b}{\Delta} C^{-1}\mu + \frac{c-bm}{\Delta} C^{-1}e \right)^\top \left( \frac{am-b}{\Delta} \mu + \frac{c-bm}{\Delta} e \right) \\ &= \left\langle \frac{am-b}{\Delta} C^{-1}\mu + \frac{c-bm}{\Delta} C^{-1}e, \frac{am-b}{\Delta} \mu + \frac{c-bm}{\Delta} e \right\rangle \\ &= \frac{(am-b)^2}{\Delta^2} \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle + \frac{(am-b)(c-bm)}{\Delta^2} \langle C^{-1}\mu, e \rangle \\ &\quad + \frac{(c-bm)(am-b)}{\Delta^2} \langle C^{-1}e, \mu \rangle + \frac{(c-bm)^2}{\Delta^2} \langle C^{-1}e, e \rangle \\ &= \frac{(am-b)^2}{\Delta^2} c + 2 \frac{(am-b)(c-bm)}{\Delta^2} b + \frac{(c-bm)^2}{\Delta^2} a \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta^2} (a^2 cm^2 - 2abcm + b^2 c + 2abcm - 2ab^2 m^2 - \\ &\quad 2b^2 c + 2b^3 m + ac^2 - 2abcm + ab^2 m^2) \\ &= \frac{1}{\Delta^2} (a^2 cm^2 - ab^2 m^2 + 2b^3 m - 2abcm - b^2 c + ac^2) \\ &= \frac{a(ac-b^2)}{\Delta^2} m^2 - \frac{2b(ac-b^2)}{\Delta^2} m + \frac{c(ac-b^2)}{\Delta^2} \\ &= \frac{a}{\Delta} m^2 - \frac{2b}{\Delta} m + \frac{c}{\Delta} \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$= \frac{1}{\Delta a} (am-b)^2 + \frac{1}{a} \tag{6.4}$$

Bei (6.2) geht die Definition von  $c := \langle C^{-1}\mu, \mu \rangle$ ,  $b := \langle C^{-1}\mu, e \rangle = \langle C^{-1}e, \mu \rangle$ ,  $a := \langle C^{-1}e, e \rangle$  ein, bei (6.3) die Definition von  $\Delta := ac - b^2$ . Bei (6.4) schließlich haben wir verwendet:  $\frac{b^2}{\Delta a} + \frac{1}{a} = \frac{\Delta + b^2}{\Delta a} = \frac{ac}{\Delta a} = \frac{c}{\Delta}$ .

□

## Literatur

- [KRE11] Kremer, Jürgen: Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2011.
- [OER01] Oertel, Frank: Das Markowitz-Modell zur Bestimmung optimaler Aktienportfolios. Zürcher Hochschule Winterthur, Departement T - Mathematik und Physik, 2001. <http://frank-oertel-math.de/markowitz.pdf>
- [SZE80] Szegö, Giorgio P.: Portfolio theory with application to bank asset management. Kapitel 6. Academic Press Inc., New York 1980.
- [DEU05] Deutsch, Hans-Peter: Quantitative Portfoliosteuerung. Konzepte, Methoden, Beispielrechnungen. Teil III, Kapitel 6. Schäffer-Poeschel, Stuttgart 2005.
- [KIS84] Kischka, Peter: Bestimmung optimaler Portfolios bei Ungewissheit. Verlagsgruppe Athenäum/Hain/Henstein 1984.
- [MAR52] Harry M. Markowitz: Portfolio Selection - Die Grundlagen der optimalen Portfolio-Auswahl. FinanzBuch Verlag, München 2007.
- [KOR] Korn, Elke & Ralf: Portfolio-Optimierung mit dem Erwartungswert-Varianz-Ansatz. Technische Universität Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik, Finanzmathematik.

## Daten-CD