Portfoliooptimierung in diskreten Finanzmarktmodellen

Portfolio Optimization in discrete models of Finance

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
am Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Westfälische Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Katharina Hasow

Matrikelnummer: 347532

Erstprüfer: PD.Dr.Paulsen

Münster, den 11. August 2010

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Münster, den 11. August 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die vorliegende Bachelorarbeit befasst sich mit dem Thema der Portfoliooptimierung in diskreten, arbitragefreien Finanzmarktmodellen. Das heißt für ein gegebenes Anfangskapital x möchte man eine optimale selbstfinanzierende Handelsstrategie bestimmen, so dass der erwartete Nutzen zum Zeipunkt T maximal ist. Dieses dynamische Optimierungsproblem kann man in zwei Schritten lösen. Zuerst löst man das statische Optimierungsproblem, indem man die optimale Endauszahlung bestimmt, die den erwarteten Nutzen maximiert. Dann kann man in einem vollständigen Fall ein Hedge für diese Auszahlung konstruieren. In einem unvollständigen Modell muss diese Endauszahlung nicht hedgebar sein, das heißt man muss auf die Methoden der Bestimmung der Superhedges zurückgreifen.

Im ersten Kapitel wird die Nutzenfunktion definiert und die Formulierung des dynamischen Portfoliooptimierungsproblems aufgestellt. Das zweite Kapitel befasst sich mit dem vollständigen Finanzmarktmodell. Zuerst wird die Äquivalenz zwischen dem dynamischen und dem statischen Optimierungsproblem gezeigt und dann eine Methode zur Lösung des statischen Portfoliooptimierungsproblems hergeleitet. Als Anwendungsbeispiel für die entwickelte Methode betrachtet man dann zuerst das Einperioden CRR-Modell. Die erhaltenen Ergebnisse kann man dann auf das N-Perioden CRR-Modell ausweiten.

Im dritten Kapitel wird dann die Methode für ein unvollständiges Finanzmarktmodell hergeleitet. Als Beispiel für ein unvollständiges Modell betrachtet man dann zuerst das Einperioden und dann das N-Perioden Trinomialmodell. An einigen Beispielen wird gezeigt wie der optimale erwartete Nutzen numerisch bestimmt werden kann.

1.1 Nutzenfunktion

Definition 1.1 Die Nutzenfunktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ stellt den Nutzen eines Endvermögens zum Zeitpunkt T dar und erfüllt die *Inada Bedingung*, d.h. es gilt:

- U ist monoton steigend auf $\mathbb{R}$, stetig differenzierbar und strikt konkav in $\{U > -\infty\} = \{x \in \mathbb{R} \mid U(x) > -\infty\}$,

- $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$

- Ferner gilt entweder:
  1. $U(x) > -\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$.

  oder:

  2. Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid U(x) = -\infty\}$.

  Dann ist $U(x) = -\infty$ für $x < a$ und $U(x) > -\infty$ für $x > a$ und es gilt $\lim_{x\searrow a} U'(x) = \infty$.

  Im Folgenden schränkt man sich auf den Spezialfall $a = 0$ ein, dieser hat wirtschaftlich gesehen eine größere Bedeutung.

Beispiele: In Abhängigkeit von dem Definitionsbereich $\{U > -\infty\}$ kann man folgende Beispiele für die Nutzenfunktion betrachten:

1. Für $\{U > -\infty\} = \mathbb{R}$: $\qquad U(x) = -e^{-\alpha x} \quad \alpha > 0,\ x \in \mathbb{R}$

2. Für $\{U > -\infty\} = (0, \infty)$: $\quad U(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{für } x > 0 \\ -\infty, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$.

1.2 Formulierung des Portfoliooptimierungsproblems

Man betrachtet ein arbitragefreies, diskretes Finanzmarktmodell mit einem abdiskontierten Preisprozeß $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Wobei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ ein endlicher Zustandsraum ist und $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ ist.

Man kann nun das Maximierungsproblem für den Erwartungswert der Nutzenfunktion mit Anfangskapital x unter allen selbstfinanzierenden Handelsstrategien definieren:

$$u(x) := \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P(U(x + (H \cdot S)_T)), \tag{1}$$

wobei $\mathcal{H}$ der Raum der selbstfinanzierenden Handelsstrategien ist.
$u(x)$ heißt *indirekte Nutzenfunktion*, sie gibt den optimalen erwarteten Nutzen des Handelns mit Anfangskapital x an.
Dies ist ein einfaches Beispiel für ein Portfoliooptimierungsproblem. Die hierfür hergeleitete Methode lässt sich aber auf komplexere Modelle, die zum Beispiel Entnahmen berücksichtigen, erweitern.
Das Ziel ist es nun die optimale Handelsstrategie $\hat{H}(x) \in \mathcal{H}$ zum Anfangskapital x zu bestimmen.

2 Maximierungsproblem in einem vollständigen Modell

2.1 Methode zur Lösung des Maximierungsproblems

Man betrachtet ein vollständiges Finanzmarktmodell. Nach dem 2. Fundamentalsatz der Preistheorie existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß Q.
Für die weiteren Überlegungen ist der folgende Satz von großer Bedeutung.

Satz 2.1 *Das Portfoliooptimierungsproblem (1) ist äquivalent zum folgenden Maximierungsproblem:*

$$\mathbb{E}_P U(X_T) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \to max! \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbb{E}_Q X_T = \sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n \leq x, \tag{3}$$

wobei $X_T = (X_T(\omega_n))_{1\leq n\leq N} = (\xi_n)_{1\leq n\leq N}$ *eine beliebige* $\mathcal{F}_T$*-meßbare Zufallsvariable ist.*

Beweis: Es ist also zu zeigen:

$$\begin{aligned} u(x) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P(U(x+(H\cdot S)_T)) &= \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N,\ \sum_{n=1}^{N} q_n\xi_n\leq x} \ \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \\ &= \sup_{X_T\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T), \end{aligned}$$

mit $C(x) = \{X_T : X_T \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-meßbar und } \mathbb{E}_Q X_T \leq x\}$.

($\geq$): Sei $X_T = (X_T(\omega_n))_{1\leq n\leq N} = (\xi_n)_{1\leq n\leq N} \in C(x)$. Dies entspricht einer Auszahlung zum Zeitpunkt T mit dem Anfangspreis $y = \sum_{n=1}^{N} q_n\xi_n \leq x$.
Da das Modell vollständig ist, ist X_T hedgebar. Das heißt, es existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit $X_T = y + (H\cdot S)_T$.
Da U monoton steigend ist und $y \leq x$, gilt:
$\mathbb{E}_P U(X_T) = \mathbb{E}_P U(y+(H\cdot S)_T) \leq \mathbb{E}_P U(x+(H\cdot S)_T) \leq \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P U(x+(H\cdot S)_T)$.
Daraus folgt: $\sup_{X_T\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T) \leq u(x)$.

($\leq$): Sei $H \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann ist X_T, definiert durch $X_T = x + (H\cdot S)_T$, ein Endvermögen mit Anfangskapital $\mathbb{E}_Q X_T = x$, also ist $X_T \in C(x)$.
Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P U(x+(H\cdot S)_T) = \mathbb{E}_P U(X_T) &\leq \sup_{X_T\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T) \\ \Rightarrow u(x) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P U(x+(H\cdot S)_T) &\leq \sup_{X_T\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T). \end{aligned}$$

$\square$

Somit kann man das ursprüngliche dynamische Maximierungsproblem durch ein statisches mit einer Nebenbedingung erstetzen. Das heißt, statt in (1) unter allen selbstfinanzierenden Handelsstrategien zu maximieren, deren Zusammensetzung man für jede Periode bestimmen muss, maximiert man unter allen Endauszahlungen X_T zum Zeitpunkt T mit $\mathbb{E}_Q X_T = x$.

Weiter kann man jetzt das Maximierungsproblem mit einer Nebenbedingung aus dem Satz 2.1 in eins ohne eine Nebenbedingung mithilfe des Lagrange-Ansatzes umformulieren. Die dazugehörige Langrange-Funktion lautet:

$$\begin{aligned} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y) &= \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - y \left(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right) + yx, \end{aligned} \tag{4}$$

dabei ist $y \geq 0$ der Lagrange-Multiplikator.
Man betrachtet nun folgende Funktion:

$$\Psi(y) = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_N} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y), \quad y \geq 0 \tag{5}$$

Durch das Einsetzen der Formulierung (4) in (5) wird das Maximierungsproblem über $\mathbb{R}^N$ in der Gleichung (5) in N Maximierungsprobleme über $\mathbb{R}$ überführt:

$$\sup_{\xi_n} \left(U(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right), \quad 1 \leq n \leq N. \tag{6}$$

Um dieses Maximierungsproblem zu lösen braucht man die Definition der dual konjugierten Funktion.

Definition 2.2 Ist $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ konkav, dann ist

$$V(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [U(y) - yx], \quad y > 0 \tag{7}$$

die dual konjugierte Funktion von U.

Die Eigenschaften von V werden im folgenden Satz beschrieben.

Satz 2.3 *U erfülle die Inada Bedingung. Dann besitzt die dual konjugierte Funktion $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ y \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - yx]$ folgende Eigenschaften.*

1. *V hat einen endlichen Wertebereich und ist stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$,*
2. *es gilt $-V' = (U')^{-1}$ und V ist strikt konvex auf $(0, \infty)$,*
3. *$\lim_{y\searrow 0} V'(y) = -\infty$,*
4. *$\lim_{y\to\infty} V'(y) = \begin{cases} \infty, & \textit{falls } \{U > -\infty\} = \mathbb{R} \\ 0, & \textit{falls } \{U > -\infty\} = (0, \infty) \end{cases}$,*
5. *$U(x) = \inf_{y\geq 0}[V(y) + yx], \quad x \in \{U > -\infty\}$.*

Beweis: $V(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - yx]$ für $y > 0$.
$U(x)$ ist strikt konkav und $(-yx)$ ist konkav, also ist $U(x) - yx$ auch strikt konkav. Eine strikt konkave Funktion f besitzt ein globales Maximum an der Stelle $\hat{x}$ genau dann, wenn $f'(\hat{x}) = 0$ ist. Sei $f(x) = U(x) - yx$, dann gilt
$f'(\hat{x}) = U'(\hat{x}) - y = 0 \ \Leftrightarrow\ U'(\hat{x}) = y$.
U' ist stetig und streng monoton fallend, da U stetig differenzierbar und strikt konkav ist. Ferner ist $U'(\{U > -\infty\}) = (0, \infty)$. Also ist $U' : \{U > -\infty\} \to (0, \infty)$ bijektiv und somit existiert eine Umkehrfunktion $(U')^{-1}$ von U'.
Also wird das Maximum an der Stelle $\hat{x}(y) = (U')^{-1}(y)$ angenommen und die Funktion V ist gegeben durch $V(y) = U(\hat{x}(y)) - y\hat{x}(y)$.

zu 1: V ist stetig differenzierbar, da U stetig differenzierbar ist.
Für alle $y \in (0, \infty)$ gilt $\hat{x}(y) = (U')^{-1}(y) \in \{U > -\infty\} \subseteq \mathbb{R}$, und somit auch $U(\hat{x}(y)) \in \mathbb{R}$. Also ist $V(y) \in \mathbb{R}$ für alle $y \in (0, \infty)$. Somit hat V einen endlichen Wertebereich.

zu 2:
$$\begin{aligned} V'(y) &= U'((U')^{-1}(y)) \left((U')^{-1}\right)'(y) - \left((U')^{-1}(y) + y((U')^{-1})'(y)\right) \\ &= y((U')^{-1})'(y) - ((U')^{-1}(y) + y((U')^{-1})'(y)) = -(U')^{-1}(y). \end{aligned}$$

V ist genau dann strikt konvex, wenn V' streng monoton wachsend ist.

Es gilt: U ist streng konkav, also ist U' streng monoton fallend. Daraus folgt, dass $(U')^{-1}$ streng monoton fallend ist. Also ist $V'(y) = -(U')^{-1}(y)$ streng monoton wachsend. Also ist V strikt konvex.

zu 3: Es gilt $\lim_{y \searrow 0} V'(y) = -\lim_{y \searrow 0}(U')^{-1}(y) = -\infty$, denn $U'(x) = 0$ genau dann, wenn x gegen ∞ läuft. Also ist $(U')^{-1}(y) \to \infty$ für $y \to 0$.

zu 4: Sei $\{U > -\infty\} = \mathbb{R}$, dann gilt:
$\lim_{y\to\infty} V'(y) = -\lim_{y\to\infty}(U')^{-1}(y) = \infty$, denn
$U'(x) = \infty \Leftrightarrow x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to\infty}(U')^{-1}(y) = -\infty$.
Für $\{U > -\infty\} = (0, \infty)$ gilt:
$\lim_{y\to\infty} V'(y) = -\lim_{y\to\infty}(U')^{-1}(y) = 0$, denn
$U'(x) = \infty \Leftrightarrow x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to\infty}(U')^{-1}(y) = 0$.

zu 5: Die Funktion $f(y) = V(y)+yx$ ist strikt konvex, besitzt also ein globales Minimum an der Stelle y genau dann, wenn $f'(y) = 0$. Es gilt also:
$V'(y) = -x \;\Leftrightarrow\; (U')^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = U'(x)$.
Also folgt aus $V(y) = U((U')^{-1}(y)) - y(U')^{-1}(y)$:

$$
\begin{aligned}
\inf_y [V(y) + yx] &= V(U'(x)) + xU'(x) \\
&= U((U')^{-1}(U'(x))) - U'(x)(U')^{-1}(U'(x)) + xU'(x) \\
&= U(x) - U'(x)x + xU'(x) = U(x).
\end{aligned}
$$

□

Die folgende Bemerkung ist auch für die kommenden Überlegungen wichtig.

Bemerkung 2.4 Erfüllt V die Eigenschaften 1 bis 4 aus dem Satz 2.3, so erfüllt $U(x) = \inf_y[V(y) + yx]$ für $x \in \{U > -\infty\}$ die Inada Bedingung.

Beweis: Sei $U(x) = \inf_y[V(y) + yx]$ für $x \in \{U > -\infty\}$. $V(y) + yx$ ist strikt konvex, somit existiert ein globales Minimum an der Stelle y, definiert durch $V'(y) = -x$. V' ist streng monoton wachsend und stetig auf $(0, \infty)$, da V strikt

konvex und stetig differenzierbar ist. Ferner ist $\lim_{y\to 0} V'(y) = -\infty$.
Falls $\lim_{y\to\infty} V'(y) = 0$, so ist $V' : (0,\infty) \to (-\infty, 0)$ bijektiv. Somit existiert eine stetige Umkehrfunktion von $(V')^{-1} : (-\infty, 0) \to (0,\infty)$ und $\hat{y}$ ist eindeutig bestimmt durch $\hat{y} = (V')^{-1}(-x)$. Also ist die Funktion U gegeben durch:
$U(x) = V((V')^{-1}(-x)) + x(V')^{-1}(-x)$ für $x > 0$. Somit ist $U(x) > -\infty$ für $x > 0$, ferner ist U stetig differenzierbar, da V stetig differenzierbar ist.
Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} U'(x) &= -V'((V')^{-1}(-x)) \cdot \left((V')^{-1}\right)'(-x) + (V')^{-1}(-x) - x\left((V')^{-1}\right)'(-x) \\ &= (V')^{-1}(-x). \end{aligned}$$

Daraus folgt:
$\lim_{x\to\infty} U'(x) = \lim_{x\to\infty}(V')^{-1}(-x) = 0$, denn
$V'(y) \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad y \to 0$ und
$\lim_{x\to 0} U'(x) = \lim_{x\to 0}(V')^{-1}(-x) = \infty$, denn
$V'(y) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \to \infty$.
Falls aber $\lim_{y\to\infty} V'(y) = \infty$ ist, so ist die Funktion $V' : (0,\infty) \to (-\infty, +\infty)$ bijektiv und es existiert eine stetige Umkehrfunktion $(V')^{-1} : (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$.
Dann ist U wieder gegeben durch $U(x) = V((V')^{-1}(-x)) + x(V')^{-1}(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist $U(x) > -\infty$ und stetig differenzierbar für $x \in \mathbb{R}$. Ferner gilt:
$\lim_{x\to-\infty} U'(x) = \lim_{x\to-\infty}(V')^{-1}(-x) = \infty$, denn $V'(y) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad y \to \infty$.
Außerdem ist U monoton steigend, da $U'(x) = (V')^{-1}(-x) > 0$ für alle $x \in \{U > -\infty\}$ ist. Ferner ist U strikt konkav auf $\{U > -\infty\}$. Denn wegen der strikten Konvexität von V ist $(V')^{-1}$ monoton wachsend. Also ist $(V')^{-1}(-x)$ monoton fallend in x.
Also erfüllt U die Inada Bedingung.

□

Die folgenden drei Beispiele veranschaulichen, wie man für eine Nutzenfunktion U die dazugehörige dual konjugierte Funktion V bestimmen kann.

Beispiele: Für eine Nutzenfunktion U ist die dual konjugierte Funktion V definiert durch $V(y) = \sup_x (U(x) - yx)$. Das heißt um V zu bestimmen muss man zuerst ein einfaches Maximierungsproblem für die Funktion $f(x) = U(x) - yx$ lösen. Da f strikt konkav und differenzierbar ist, ist die Extremstelle $\hat{x}(y)$ eindeutig bestimmt durch $f'(\hat{x}(y)) = 0$. Also hat V folgende Gestalt: $V(y) = U(\hat{x}(y)) - y\hat{x}(y)$.

1. Sei nun $U(x) = \ln(x)$ für $x > 0$. Dann ist $f(x) = \ln(x) - yx$ für ein $y > 0$ und $f'(x) = \frac{1}{x} - y$. Also ist $f'(\hat{x}(y)) = 0$ genau dann, wenn $\hat{x}(y) = \frac{1}{y}$.
   Somit erhält man: $V(y) = f(\hat{x}(y)) = \ln(\frac{1}{y}) - y\frac{1}{y} = -\ln(y) - 1$.

2. Sei $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$ eine Nutzenfunktion.
   Dann ist $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} - yx$ für ein festes $y > 0$ und $f'(x) = x^{\alpha-1} - y$.
   Es folgt: $f'(\hat{x}(y)) = 0 \Leftrightarrow \hat{x}(y) = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$.
   Somit erhält man: $V(y) = f(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = \frac{1-\alpha}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$.

3. Sei $U(x) = -\frac{\exp(-\alpha x)}{\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ eine Nutzenfunktion.
   $f(x) = -\frac{\exp(-\alpha x)}{\alpha} - yx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \exp(-\alpha x) - y$ und
   $f'(\hat{x}(y)) = 0 \Leftrightarrow \hat{x}(y) = -\frac{\ln(y)}{\alpha}$.
   Also ist $V(y) = f(\hat{x}(y)) = -\exp(\frac{-\alpha \ln(y)}{-\alpha}) \cdot \frac{1}{\alpha} - y \cdot \frac{\ln(y)}{-\alpha} = \frac{y}{\alpha} \cdot (\ln(y) - 1)$.

Nun zurück zu dem Maximierungsproblem.

Aus dem Satz 2.3 ist ersichtlich, dass für die Nutzenfunktion U die konjugierte Funktion V nur endliche Werte annehmen kann. Das heißt, dass das Maximierungsproblem in (6) und damit auch in (5) eine Lösung besitzt. Somit erhält man mit Hilfe von (4) und (7) folgende Gleichung für Ψ:

$$\begin{aligned}
\Psi(y) &= \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y) \\
&= \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + yx \\
&= \sum_{n=1}^{N} p_n \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + yx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) + yx \\
&= \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) + yx.
\end{aligned}
$$

Sei nun die Funktion v definiert durch:

$$
v(y) := \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) = \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right), \quad y > 0.
$$

Bemerkung 2.5 Die Funktion v besitzt die gleichen qualitativen Eigenschaften wie V im Satz 2.3 .

Beweis: v ist eine konvexe Kombination von V ausgewertet auf linear skalierten Werten. Somit hat v einen endlichen Wertebereich und ist stetig differenzierbar und strikt konvex, da V diese Eigenschaften erfüllt.

Es gilt $v'(y) = \sum_{n=1}^{N} q_n V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right)$. Somit folgt aus $\lim_{y\to 0} V'\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) = -\infty$, dass $\lim_{y\to 0} v'(y) = -\infty$.

Analog gilt:

$$
\lim_{y\to\infty} v'(y) = \begin{cases} \infty, & \text{für } \{U > -\infty\} = \mathbb{R}, \text{ da } \lim_{y\to\infty} V'(y) = \infty, \\ 0, & \text{für } \{U > -\infty\} = (0,\infty), \text{ da } \lim_{y\to\infty} V'(y) = 0. \end{cases}
$$

□

Die Funktion $\Psi(y) = v(y) + yx$ ist strikt konvex. Ψ besitzt also ein globales Minimum an der Stelle $\hat{y}$, wenn folgendes gilt: $\Psi'(\hat{y}) = 0$. Also ist $\hat{y}$ definiert durch $v'(\hat{y}) = -x$.

Aus der Bemerkung (2.5) folgt, dass v' stetig und strikt monoton steigend ist. Ferner gilt für $\{U > -\infty\} = (0,\infty)$: $\lim_{y\searrow 0} v'(y) = -\infty$ und $\lim_{y\to\infty} v'(y) = 0$. Somit ist $v' : (0,\infty) \to (-\infty, 0)$ bijektiv. Das heißt, dass für jedes $x > 0$ genau ein $\hat{y}(x) \in (0,\infty)$ existiert mit $v'(\hat{y}(x)) = -x$.

Für $\{U > -\infty\} = \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{y\searrow 0} v'(y) = -\infty$ und $\lim_{y\to\infty} v'(y) = \infty$.

Dann ist $v' : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ bijektiv und für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutiges $\hat{y}(x) \in (0,\infty)$ mit $v'(\hat{y}(x)) = -x$.
Somit existiert für alle $x \in \{U > -\infty\}$ ein eindeutiges $\hat{y}(x)$, so dass

$$\inf_{y>0} \Psi(y) = \Psi(\hat{y}(x)).$$

Nun hält man $\hat{y}(x)$ fest und betrachtet die strikt konkave Funktion

$$\begin{aligned}(\xi_1,\dots,\xi_N) \mapsto L(\xi_1,\dots,\xi_N,\hat{y}(x))\\ = \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - \hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + \hat{y}(x)x\end{aligned}$$

Analog zu oben kann man sich überlegen, dass aufgrund der strikten Konkavität ein eindeutiger Maximierer $(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_N)$ dieser Funktion existiert und es gilt

$$U'(\hat{\xi}_n) = \hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\xi}_n = -V'\left(\hat{y}(x)\frac{q_n}{p_n}\right) \quad \text{für alle} \quad n = 1,\dots,N.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}\inf_{y>0} \Psi(y) &= \inf_{y>0}(v(y) + xy) = v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) = \Psi(\hat{y}(x)) \\ &= \sup_{\xi_1,\dots,\xi_N} L(\xi_1,\dots,\xi_N,\hat{y}(x)) = L(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x)).\end{aligned} \tag{8}$$

L ist stetig differenzierbar an der Stelle $(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x))$, da $\hat{\xi}_n \in \{U > -\infty\}$ für alle $1 \le n \le N$. Somit ist $\nabla L(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x)) = 0$.
Insbesondere ist

$$\begin{aligned}0 &= \partial_y L(\xi_1,\dots,\xi_N,y)|_{(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x))} \\ &= \partial_y \left(\sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - y \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x \right) \right) |_{(\hat{\xi}_1,\dots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x))} = \sum_{n=1}^{N} q_n \hat{\xi}_n - x.\end{aligned}$$

Also ist die Nebenbedingung (3) erfüllt, denn $\sum_{n=1}^N q_n\hat{\xi}_n = x$. Also gilt:

$$L(\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n) \tag{9}$$

Somit gilt

$$u(x) = \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n). \tag{10}$$

Denn $u(x) \geq \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n)$ folgt aus

$$u(x) = \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N,\ \sum_{n=1}^N q_n\xi_n \leq x} \sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n) \geq \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n),$$

da für $(\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N)$ die Nebenbedingung erfüllt ist.
$u(x) \leq \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n)$ erhält man aus der Tatsache, dass für alle $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$, die die Nebenbedingung erfüllen, gilt:

$$\sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n) \leq L(\xi_1,\ldots,\xi_N,\hat{y}(x)) \leq L(\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n).$$

Mithilfe von (10),(9) und (8) erhält man nun für $x \in \{U > -\infty\}$:

$$\inf_{y>0} \Psi(y) = \inf_{y>0}(v(y) + xy) = L(\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^N p_n U(\hat{\xi}_n) = u(x).$$

Aus der Bemerkung 2.4 und der Tatsache, dass v die gleichen qualitativen Eigenschaften wie V in 2.3 besitzt, folgt nun:
v ist die dual konjugierte Funktion von u und u erfüllt die Inada Bedingung.
Somit kann man $\hat{y}(x)$, definiert durch $v'(\hat{y}(x)) = -x$, berechnen durch

$$\hat{y}(x) = u'(x), \text{ für } x \in \{U > -\infty\}.$$

Der folgende Satz fasst die bisheringen Ergebnisse zusammen.

Man bezeichne mit $\hat{X}_T \in C(x)$ den Optimierer $\hat{X}_T(\omega_n) = \hat{\xi}_n$ für $n = 1, \ldots, N$.

Satz 2.6 *Gegeben sei ein diskretes, arbitragefreies und vollständiges Finanzmarktmodell mit einem abdiskontierten Preisprozess $(S_t)_{0\le t\le T}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, wobei $(S_t)_{0\le t\le T}$ adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ ist. Sei Q das äquivatente Martingalmaß und U eine Nutzenfunktion mit Inada Bedingung.*

Seien $u(x)$ und $v(x)$ definiert durch

$$u(x) = \sup_{X_T(x)\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T(x)), \quad x \in \{U > -\infty\}, \tag{11}$$
$$v(y) = \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right), \quad y > 0.$$

Dann gilt:

1. *Die Funktion v ist die dual konjugierte Funktion von u, und u erfüllt die Inada Bedingung.*
2. *Der Optimierer $\hat{X}_T(x)$ von (11) existiert und ist eindeutig. Es gilt* $\hat{X}_T(x) = -V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)$ *oder auch* $y\frac{dQ}{dP} = U'(\hat{X}_T(x))$ *wobei $x \in \{U > -\infty\}$, $y > 0$ und $y = u'(x)$ bzw. $x = -v'(y)$.*
3. *Für u' und v' gilt:*

$$u'(x) = \mathbb{E}_P(U'(\hat{X}_T(x))), \qquad v'(y) = \mathbb{E}_Q\left(V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right)$$
$$xu'(x) = \mathbb{E}_P(\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))), \; yv'(y) = \mathbb{E}_P\left(y\frac{dQ}{dP}V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right).$$

Beweis: 1. und 2. wurden in den oberen Überlegungen gezeigt.

Es bleibt also 3. zu zeigen.

$v'(y) = \left(\mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right)' = \mathbb{E}_P\left(\frac{dQ}{dP}V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right) = \mathbb{E}_Q\left(V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right)$ und

$yv'(y) = y\mathbb{E}_P\left(\frac{dQ}{dP}V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right) = \mathbb{E}_P\left(y\frac{dQ}{dP}V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right)$.

Aus 2. folgt:

$u'(x) = y = \mathbb{E}_P\left(y\frac{dQ}{dP}\right) = \mathbb{E}_P(U'(\hat{X}_T(x)))$ und

$$\begin{aligned} xu'(x) &= -yv'(y) = -\mathbb{E}_P\left(y\frac{dQ}{dP}V'\left(y\frac{dQ}{dP}\right)\right) = -\mathbb{E}_P\left(-U'(\hat{X}_T(x))\hat{X}_T(x)\right) \\ &= \mathbb{E}_P(\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))). \end{aligned}$$

□

Mithilfe von Satz 2.6 ist es nun möglich den Optimierer $\hat{X}_T(x)$ zu bestimmen. Da der Markt vollständig ist, existiert ein Hedge für $\hat{X}_T(x)$, damit ist dann auch die optimale Handelsstrategie festgelegt.

Im Folgenden wird als Anwendungsbeispiel, der oben hergeleiteten Methode, die optimale Handelsstrategie für ein Anfangskapital x in einem CRR-Modell bestimmt. Zunächst betrachtet man das Einperioden CRR-Modell. Hier ist die optimale Handelsstrategie durch den optimalen Anteil des Anfangskapitals, das am Anfang der Periode in die Aktie investiert werden muss, bestimmt. Im nächsten Schritt kann man dann das Einperioden-Modell auf das N-Perioden CRR-Modell ausweiten.

2.2 Anwendung in einem Einperioden CRR-Modell

Man betrachtet nun ein arbitragefreies Einperioden CRR-Modell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(\{\omega_1\}) = p$ und $P(\{\omega_2\}) = 1 - p$.

Sei $\hat{S}_0^0$=1 der Preis der festverzinslichen Anleihe zum Zeitpunkt 0 und $\hat{S}_1^0 = 1 + r$ der Preis zum Zeitpunkt 1 für ein $r > -1$. Für den Preis der risikobehafteten Anleihe gilt:

$$\hat{S}_0^1 = 1, \quad \hat{S}_1^1 = \begin{cases} 1 + u, \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ 1 + d, \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt.} \end{cases}$$

Da das Modell arbitragefrei ist, gilt $d < r < u$. Ferner soll $d > -1$ sein.
Für die abdiskontierte Preisentwicklung gilt:

$$
\begin{aligned}
S_0^0 &= 1, \quad S_1^0 = 1, \\
S_1^0 &= 1, \quad S_1^1 = \begin{cases} 1 + \tilde{u}, \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt}, \\ 1 + \tilde{d}, \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt} \end{cases}
\end{aligned}
$$

mit $1 + \tilde{u} = \frac{1+u}{1+r} > 1$ und $1 + \tilde{d} = \frac{1+d}{1+r} < 1$.
Man nimmt o.B.d.A an, dass $\tilde{u} \geq -\tilde{d}$. Denn dann gilt $\mathbb{E}_P S_1^1 \geq S_0^1$, d.h. die optimale Handelsstrategie wird eine Long-Position in der Aktie haben. Für $\tilde{u} < -\tilde{d}$ führt man die unteren Berechnungen analog durch, dann ist aber eine Short-Position in der Aktie möglich.
Für den äquivalenten Martingalmaß Q gilt:

$$
Q(\{\omega_1\}) = q = \frac{r-d}{u-d} = \frac{-\tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}} \text{ und entsprechend } Q(\{\omega_2\}) = 1 - q = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u} - \tilde{d}}.
$$

Nun ist das Ziel für eine Nutzenfunktion U die optimale Handelsstrategie mithilfe des Satzes 2.6 zu bestimmen. Man nehme die drei Nutzenfunktionen, für die im Kapitel 1.2 die dual konjugierten Funktionen berechnet wurden, als Beispiel.

1. Sei $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\},\ x > 0$ eine Nutzenfunktion. Dann ist $V(y) = -\frac{y^\beta}{\beta}$ mit $\alpha - 1 = (\beta - 1)^{-1}$ die dual konjugierte Funktion von U.
Nach dem Satz 2.6 gilt:

$$
\begin{aligned}
v(y) &= \mathbb{E}_p V\left(y \cdot \frac{dQ}{dP}\right) \\
&= pV\left(y \cdot \frac{q}{p}\right) + (1-p)V\left(y \cdot \frac{1-q}{1-p}\right) \\
&= p\left(-\frac{y^\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^\beta\right) + (1-p)\left(-\frac{y^\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^\beta\right)
\end{aligned}
$$

$$= c_V V(y), \quad \text{mit } c_V = p\left(\frac{q}{p}\right)^{\beta} + (1-p)\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\beta}$$

Folgende Bemerkung ist für die Berechnung der indirekten Nutzenfunktion u hilfreich.

Bemerkung: Seien $V(y)$ die dual konjugierte Funktion von $U(x)$ und $c > 0$ eine Konstante, dann ist $cV(y)$ die dual konjugierte Funktion von $cU\left(\frac{x}{c}\right)$.

Beweis: Setze $\tilde{U}(x) = cU\left(\frac{x}{c}\right)$. Das heißt es ist zu zeigen, dass $cV(y) = \sup_x(\tilde{U}(x) - yx)$.

Setze $\tilde{x} = \frac{x}{c}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sup_x(\tilde{U}(x) - yx) &= \sup_{\tilde{x}}(cU(\tilde{x}) - cy\tilde{x}) \\ &= c\sup_{\tilde{x}}(U(\tilde{x}) - y\tilde{x}) = cV(y).\end{aligned}$$

□

Da $v = c_V V$ die dual konjugierte Funktion von u ist, folgt:

$$u(x) = c_V U\left(\frac{x}{c_V}\right) = c_V^{1-\alpha}U(x) = c_U U(x), \text{ mit}$$

$$c_U = c_V^{1-\alpha} = \left(p\left(\frac{q}{p}\right)^{\beta} + (1-p)\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\beta}\right)^{1-\alpha}.$$

Für ein $x > 0$ kann man nun zuerst $\hat{y}(x)$ ausrechnen: $\hat{y}(x) = u'(x) = c_U U'(x)$. Somit gilt dann nach Satz 2.6:

$$\begin{aligned}\hat{X}_1(x) &= -V'\left(\hat{y}(x)\frac{dQ}{dP}\right) \\ &= -V'(U'(x))c_U^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \text{da } V'(y) = -y^{\frac{1}{\alpha-1}}\end{aligned}$$

$$= xc_V^{-1}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \text{da } -V' = (U')^{-1}$$

Folglich gilt:

$$\hat{X}_1(x) = \begin{cases} xc_V^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & = xc_V^{-1}\left(\frac{-\tilde{d}}{p(\tilde{u}-\tilde{d})}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt} \\ xc_V^{-1}\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & = xc_V^{-1}\left(\frac{\tilde{u}}{(1-p)(\tilde{u}-\tilde{d})}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt.} \end{cases} \tag{12}$$

Da das Modell vollständig ist, existiert ein Hedge für $\hat{X}_1(x)$. Nach dem 2. Fundamentalsatz der Preistheorie existieren also $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit
$\hat{X}_1(x) = x + \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta S_0^1 \\ \Delta S_1^1 \end{pmatrix} \right\rangle.$
Setze $\hat{h} = x_2$, dann gilt

$$\hat{X}_1(x) = x + \hat{h}\Delta S_1^1, \quad \text{da } \Delta S_0^1 = 0 \text{ ist.} \tag{13}$$

Mithilfe von (12) und (13) kann man $\hat{h}$ ausrechnen.
Falls ω_1 eintritt, dann gilt:

$$\begin{aligned} x + \hat{h}\tilde{u} &= xc_V^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \Rightarrow \quad \hat{h} &= x\left(c_V^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right)\tilde{u}^{-1} = \hat{k}x. \end{aligned}$$

Das heißt, dass man um den maximalen erwarteten Nutzen zu erreichen, $\hat{k}x$ Aktien am Anfang der Periode kaufen muss. Dabei kann $\hat{k}$ in Abhängigkeit von $\tilde{u}$, $\tilde{d}$ und α genau berechnet werden und es gilt $0 < \hat{k} < \infty$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$. Man beachte, dass $\hat{k}$ größer als 1 sein kann, d.h. es ist eine Short-Position in der risikolosen Anleihe möglich.

2. Nimmt man nun $U(x) = \ln(x)$ als Nutzenfunktion, so ist $V(y) = -\ln(y) - 1$

die dual Konjugierte von U und es gilt nach Satz 2.6 :

$$\begin{aligned}
v(y) &= \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) \\
&= p\left(-\ln\left(y\cdot\frac{q}{p}\right)-1\right)+(1-p)\left(-\ln\left(y\cdot\frac{1-q}{1-p}\right)-1\right) \\
&= p\left(-\ln(y)-\ln\left(\frac{q}{p}\right)-1\right)+(1-p)\left(-\ln(y)-\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)-1\right) \\
&= -\ln(y)-p\ln\left(\frac{q}{p}\right)-(1-p)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)-1.
\end{aligned}$$

Da v die dual konjugierte Funktion von u ist, gilt nach Satz 2.3:

$u(x) = \inf_{y\geq 0}(v(y)+yx)$.

Um nun u zu bestimmen muss man $(v(y)+yx)$ nach y ableiten und dann die Ableitung gleich 0 setzen. Wegen der strikten Konvexität von v ist dies hinreichend für ein Minimum. Es gilt also:

$(v(y)+yx)' = -\frac{1}{y}+x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow u(x) = v(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\cdot x = \ln(x)-p\ln\left(\frac{q}{p}\right)-(1-p)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)$.

Weiter ist nach Satz 2.6 $\hat{y}(x) = u'(x) = \frac{1}{x}$ und

$$\hat{X}_1(x) = -V'\left(\hat{y}(x)\frac{dQ}{dP}\right) = \begin{cases} -V'\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{q}{p}\right) = \frac{p}{q}\cdot x, & \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ -V'\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{(1-q)}{(1-p)}\right) = \frac{(1-p)}{(1-q)}\cdot x, & \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt.} \end{cases}$$

Aufgrund der Vollständigkeit des Marktmodells existiert nun wieder ein $\hat{h}\in\mathbb{R}$ mit $\hat{X}_1(x) = x+\hat{h}\Delta S_1^1$.

Somit folgt aus $x+\hat{h}\tilde{u} = \hat{X}_1(x)(\omega_1) = \frac{p}{q}\cdot x$, dass

$$\hat{h} = \left(\frac{p}{q}-1\right)\frac{x}{\tilde{u}} = \left(\frac{p(\tilde{u}-\tilde{d})}{-\tilde{d}}-1\right)\frac{x}{\tilde{u}} = \left(\frac{p(\tilde{u}-\tilde{d})+\tilde{d}}{-\tilde{u}\tilde{d}}\right)x =: \hat{k}x.$$

Somit ist die Anzahl der Aktien $\hat{h}$, die gehalten werden müssen, um den maximalen erwarteten Nutzen zu erhalten, bestimmt.

3. Sei $U(x) = -\exp(-x)$ die Nutzenfunktion, dann ist $V(y) = y(\ln(y) - 1)$ die dual konjugierte Funktion von U. Es gilt:

$$\begin{aligned}
v(y) &= \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) \\
&= p\left(y\frac{q}{p} \cdot \left(\ln\left(y\frac{q}{p}\right) - 1\right)\right) + (1-p)\left(y \cdot \frac{1-q}{1-p} \cdot \left(\ln\left(y \cdot \frac{1-q}{1-p}\right) - 1\right)\right) \\
&= yq\left(\ln(y) - 1 + \ln\left(\frac{q}{p}\right)\right) + y(1-q)\left(\ln(y) - 1 + \ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right) \\
&= y(\ln(y) - 1) + y \cdot q \ln\left(\frac{q}{p}\right) + y \cdot (1-q)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \\
&= V(y) + cy \quad \text{mit} \quad c = q\ln\left(\frac{q}{p}\right) + (1-q)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right).
\end{aligned}$$

Die indirekte Nutzenfunktion u bestimmt man nun wieder mithilfe der ersten Ableitung von $(v(y) + yx)$ nach y.
$(v(y) + yx))' = V'(y) + c + x = \ln(y) - 1 + y\frac{1}{y} + c + x = 0$
$\Leftrightarrow \ln(y) = -x - c \Leftrightarrow y = \exp(-x - c)$.
Also ist

$$\begin{aligned}
u(x) &= V(\exp(-x-c)) + c\exp(-x-c) + x\exp(-x-c) \\
&= \exp(-x-c)(-x-c-1) + c\exp(-x-c) + x\exp(-x-c) \\
&= -\exp(-x-c) \quad \text{und} \\
\hat{y}(x) &= u'(x) = \exp(-x-c).
\end{aligned}$$

Nun kann man wieder $\hat{X}_1(x)$ bestimmen

$$\hat{X}_1(x) = -V'\left(\hat{y}(x)\frac{dQ}{dP}\right) = \begin{cases} -\ln\left(\exp(-x-c)\frac{q}{p}\right) = x + c - \ln\left(\frac{q}{p}\right), & \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ x + c - \ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right), & \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt.} \end{cases}$$

Weiter gilt $\hat{X}_1(x) = x + \hat{h}\Delta S_1^1$, für ein $\hat{h} \in \mathbb{R}$.

Somit folgt aus $x + \tilde{u}\hat{h} = \hat{X}_1(x)(\omega_1) = x + c - \ln\left(\frac{q}{p}\right)$, dass

$$\hat{h} = \frac{c - \ln\left(\frac{q}{p}\right)}{\tilde{u}} = \frac{1-q}{\tilde{u}} \ln\left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q}\right) = \frac{1}{\tilde{u} - \tilde{d}} \ln\left(\frac{\tilde{u}}{-\tilde{d}} \cdot \frac{p}{1-p}\right).$$

Somit ist die optimale Handelsstrategie durch die Parameter des Modells eindeutig bestimmt. Bei diesem Beispiel ist bemerkenswert, dass $\hat{h}$ nicht von x abhängt.

2.3 Übertragung auf das N-Perioden CRR-Modell

Sei $(\varepsilon_t)_{t=1}^N$ eine Familie von identisch verteilten, stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sodass $P(\varepsilon_t = 1) = p$ und $P(\varepsilon_t = 0) = 1 - p$ für $1 \leq t \leq N$. Ferner sei $(\mathcal{F}_t)_{t=1}^N$ eine Filtration, wobei $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_n : 1 \leq n \leq t)$ die von $(\varepsilon_n)_{n=1}^t$ erzeugte σ-Algebra ist.

Sei der Zinssatz r der festverzinslichen Anleihe gleich 0. Der Aktienpreisprozess S ist definiert durch: S_0=1 und für $t = 1, \ldots, N$ ist

$$\begin{aligned} S_t &= \begin{cases} S_{t-1}(1+u), & \text{falls } \varepsilon_t = 1 \\ S_{t-1}(1+d), & \text{falls } \varepsilon_t = 0 \end{cases} \\ &= S_{t-1}(1+u)^{\varepsilon_t}(1+d)^{1-\varepsilon_t} \quad \text{mit} \quad -1 < d < 0 < u. \end{aligned}$$

Das Ziel ist nun wieder das Maximierungsproblem
$\mathbb{E}\left[U\left(x + \sum_{n=1}^N h_n \Delta S_n\right)\right] \to \max!$
für eine Nutzenfunktion U zu lösen, wobei $(h_n)_{n=1}^N \in \mathcal{H}$.
Im folgenden werden die Nutzenfunktionen $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$ und $U(x) = \ln(x)$ untersucht.

1. Man betrachte zuerst die Nutzenfunktion $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$.

Durch

$$u_t(x) := \sup \left\{ \mathbb{E} \left[U \left(x + \sum_{n=t+1}^{N} h_n \Delta S_n \right) |\mathcal{F}_t \right] \right\} \tag{14}$$

sind bedingte Nutzenfunktionen für $t = 0, \ldots, N$ definiert, dabei wird über die $(\mathcal{F}_{n-1})_{n=t+1}^N$-meßbare Zufallsvariablen $(h_n)_{n=t+1}^N$ maximiert.
Für die bedingte Nutzenfunktion gilt folgender Satz.

Satz 2.7 *Für die bedingte Nutzenfunktion definiert durch (14) gilt:*

$$u_t(x) = c_U^{N-t} U(x) \quad \text{für } t = 0, \ldots, N \quad \text{und}$$
$$\hat{h}_t = \frac{\hat{h}}{S_{t-1}} \qquad \text{für } t = 1, \ldots, N,$$

wobei $\hat{h}$ der optimalen Handelsstrategie in einem Einperioden CRR-Modell entspricht.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Rückwärtsinduktion.

IA: Es gilt per Definition: $u_N(x) = U(x)$.
Für $t = N - 1$ betrachtet man nur eine Periode von $N - 1$ bis N. Man befindet sich also in einem Einperioden Modell, dabei ist zu beachten, dass der Aktienpreis zum Zeitpunkt $N - 1$ eine $\mathcal{F}_{N-1}$-meßbare Zufallsvariable ist.
In einem Einperioden Modell ist $\hat{h}$ die Anzahl der Aktien, die man halten sollte um den maximalen erwarteten Nutzen zu erreichen, dabei ist der Aktienanfangspreis $S_0^1 = 1$. Dementsprechend ist dann $\hat{h}_N = \frac{\hat{h}}{S_{N-1}}$ die optimale Anzahl der Aktien für S_{N-1} als Anfangspreis. Zu beachten ist, dass $\hat{h}_N$ $\mathcal{F}_{N-1}$-meßbar ist.
Auf diese Weise erhält man:

$$\begin{aligned} u_{N-1}(x) &= \sup \left\{ \mathbb{E} \left[U \left(x + h_N \Delta S_N \right) |\mathcal{F}_{N-1} \right] \ : \ h_N \text{ ist } \mathcal{F}_{N-1}\text{-meßbar} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left[U \left(x + \hat{h}_N \Delta S_N \right) |\mathcal{F}_{N-1} \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[U\left(x+\frac{\hat{h}}{S_{N-1}}S_{N-1}((1+u)^{\varepsilon_N}(1+d)^{1-\varepsilon_N}-1)\right)|\mathcal{F}_{N-1}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[U\left(x+\hat{h}((1+u)^{\varepsilon_N}(1+d)^{1-\varepsilon_N}-1)\right)|\mathcal{F}_{N-1}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[U\left(x+\hat{h}((1+u)^{\varepsilon_1}(1+d)^{1-\varepsilon_1}-1)\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[U\left(x+\hat{h}\Delta S_1\right)\right].
\end{aligned}
$$

Bei dem fünften Gleichheitszeichen ist zu beachten, dass $(\varepsilon_t)_{t=1}^N$ identisch verteilte, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind und somit von $\mathcal{F}_{N-1}$ unabhängig sind. Außerdem ist U eine stetige Funktion, also meßbar. Die Gleichheit folgt also aus den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte.

Also ist u_{N-1} unabhängig von $\mathcal{F}_{N-1}$ und das Maximierungsproblem entspricht dem in einem Einperioden-Modell. Das heißt, man kann die Ergebnisse aus Kapitel 2.1 anwenden:

$$
u_{N-1}(x) = c_U U(x) \quad \text{mit} \quad c_U = \left(p\left(\frac{q}{p}\right)^\beta + (1-p)\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^\beta\right)^{1-\alpha}.
$$

IV: Es gelte für ein beliebiges t aus $\{0,\dots,N\}$:

$$
\begin{aligned}
u_{N-t}(x) &= c_U^t U(x) \quad \text{und}\\
\hat{h}_{N-s} &= \frac{\hat{h}}{S_{N-s-1}} \qquad \text{für } 0 \le s \le t-1.
\end{aligned}
$$

IS: $N-t \to N-t-1$.

Für den Induktionsschritt benötigt man das folgende Lemma aus Finanzmathematik 1.

Lemma: Seien $(M_1,\mathcal{M}_1)$,$(M_2,\mathcal{M}_2)$ meßbare Räume, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Seien $X_1:\Omega\to M_1$ und $X_2:\Omega\to M_2$ meßbare Abbildungen und $h:(M_1\times M_2,\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2)\to(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ meßbar. Es gelte ferner: X_1 ist unabhängig von $\mathcal{G}$, X_2 ist meßbar bezüglich $\mathcal{G}$ und $\mathbb{E}h(X_1,X_2)$

existiert.

Dann gilt: $\mathbb{E}(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_2) = \mathbb{E}(h(X_1, \cdot)) \circ X_2$ P-fast sicher.

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
u_{N-t-1}(x) &= \sup\left\{\mathbb{E}\left[U\left(x + \sum_{n=N-t}^{N} h_n \Delta S_n\right)|\mathcal{F}_{N-t-1}\right]\right\} \\
&= \sup\left\{\mathbb{E}\left[U\left(x + h_{N-t}\Delta S_{N-t} + t\cdot \hat{h}\Delta S_1\right)|\mathcal{F}_{N-t-1}\right]\right\} \\
&= \sup\left\{\mathbb{E}\left[U\left(x + h_{N-t}S_{N-t-1}((1+u)^{\varepsilon_{N-t}}(1+d)^{1-\varepsilon_{N-t}} - 1) + t\cdot \hat{h}\Delta S_1\right)|\mathcal{F}_{N-t-1}\right]\right\} \\
&= \sup\left\{\mathbb{E}\left[U\left(x + h_{N-t}\Delta S_{N-t} + t\cdot \hat{h}\Delta S_1\right)\right]\right\} \\
&= \sup\left\{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[U\left(x + h_{N-t}\Delta S_{N-t} + t\cdot \hat{h}\Delta S_1\right)|\mathcal{F}_{N-t}\right]\right]\right\} \\
&= \sup\left\{\mathbb{E}\left[u_{N-t}(x + h_{N-t}\Delta S_{N-t})\right]\right\} \\
&= c_U^t \sup\left\{\mathbb{E}\left[U\left(x + h_{N-t}\Delta S_{N-t}\right)\right]\right\} \\
&= c_U^t \cdot \mathbb{E}\left[U\left(x + \hat{h}\Delta S_1\right)\right] = c_U^t \cdot c_U U(x) = c_U^{t+1}U(x)
\end{aligned}$$

Hier ist zubeachten, dass sich das Supremum in jeder Gleichung auf die Komponenten der Handelsstrategie $(h_n)_{n=1}^N$ beziehen. Bei dem zweiten Gleichheitszeichen wurde die Induktionsvoraussetzung für die Komponenten der Handelsstragtegie benutzt.

Bei dem vierten Gleichheitszeichen wird das Lemma benutzt, denn es gilt:

- $(\xi_n)_{n=1}^N$ sind i.i.d, also unabhängig von $\mathcal{F}_{N-t-1}$,
  $\Delta S_1^1 = S_1^0((1+u)^{\varepsilon_1}(1+d)^{1-\varepsilon_1} - 1)$, $h_{N-t}S_{N-t-1}$ ist $\mathcal{F}_{N-t-1}$ -meßbar,

- setzt man
  $f(h_{N-t}S_{N-t-1}, \varepsilon_1) = x + h_{N-t}S_{N-t-1}((1+\tilde{u})^{\varepsilon_1}(1+\tilde{d})^{1-\varepsilon_1} - 1) + t\cdot\hat{h}\Delta S_1$, dann ist $U \circ f$ eine Verknüpfung von stetigen Funktionen und somit insbesondere meßbar.

- ferner gilt $\mathbb{E}(U \circ f)(h_{N-t}S_{N-t-1}, \varepsilon_1) < \infty$, da $f(h_{N-t}S_{N-t-1}, \varepsilon_1) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$.

Also sind alle Voraussetzungen erfüllt und das Lemma liefert die Gleichung.
Das fünfte Gleichheitszeichen folgt aus den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte, und bei dem siebten wird die Induktionsvoraussetzung benutzt. Schließlich erhält man das achte Gleichheitszeichen durch analoge Argumentation wie im Induktionsanfang, da wieder ein Einperioden-Maximierungsproblem mit Aktienanfangskurs S_{N-t-1} vorliegt und somit $\hat{h}_{N-t} = \frac{\hat{h}}{S_{N-t-1}}$ ist.

□

Insbesondere gilt nun: $u(x) = u_0(x) = c_U^N U(x)$.
Für den Optimierer $(\hat{X}_t(x))_{1\leq t\leq T}$ mit dem Anfangskapital $x > 0$ gilt:
$\hat{X}_t(x) = x + \sum_{n=1}^{t} \hat{h}_t \Delta S_t$ mit $\hat{h}_t = \frac{\hat{h}}{S_{t-1}}$ für $1 \leq t \leq T$.
Im Einperioden-Modell ist $\hat{h} = x \cdot \hat{k}$, wobei x das zur Verfügung stehende Kapital ist. Also ist die optimale Handelsstrategie im Mehrperioden-Modell definiert durch $\hat{h}_t = \frac{\hat{X}_{t-1}(x)}{S_{t-1}} \cdot \hat{k}$, da zum Zeitpunkt t $\hat{X}_{t-1}(x)$ als Kapital zur Verfügung steht. $\hat{k}$ kann wieder in Abhängigkeit von dem Modell eindeutig bestimmt werden.

2. Sei nun $U(x) = \ln(x)$ die Nutzenfunktion, dann ist $V(y) = -\ln(y) - 1$ die dual konjugierte Funktion von U. Um hier die optimale Handelsstrategie zu bestimmen bittet es sich an direkt den Satz 2.6 anzuwenden.
Das heißt, man bestimmt zuerst die Funktion $v(y) = \mathbb{E}_P V(y\frac{dQ}{dP})$.
Sei $(L_t)_{t=1}^N$ definiert durch

$$L_t = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{1}_{\{\xi_i=1\}} = \sum_{i=1}^{t} \xi_i \ , \ \text{ dann ist}$$
$$P(L_N = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \quad \text{für } n = 0, \dots, N.$$

Es gilt also:

$$S_t = S_0(1+u)^{L_t}(1+d)^{t-L_t} \text{ für } t = 1, \dots, N.$$

Sei Q der äquivalente Martingalmaß mit $q = Q(\{\xi_t = 1\})$, dann gilt $q = \frac{-d}{u-d}$ und

$$\frac{dQ}{dP}\, |_{\mathcal{F}_N} = \left(\frac{q}{p}\right)^{L_N} \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-L_N}.$$

Nun kann man v berechnen, es gilt:

$$\begin{aligned}
v(y) &= \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \cdot \left(-\ln(y) - \ln\left(\left(\frac{q}{p}\right)^i \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-i}\right) - 1\right) \\
&= -\ln(y) - 1 - \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \ln\left(\left(\frac{q}{p}\right)^i \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-i}\right) \\
&= -\ln(y) - 1 - c, \\
\text{mit } c &= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \ln\left(\left(\frac{q}{p}\right)^i \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-i}\right).
\end{aligned}$$

Nun gilt $u(x) = \inf_{y \geq 0}\ (v(y) + yx)$.

Die Lösung dieses Minimierungsproblems für eine strikt konvexe Funktion erhält man mithilfe der ersten Ableitung: $(v(y) + yx)' = -\frac{1}{y} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x}$.

Es gilt also:

$$u(x) = v\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot x = \ln(x) - c.$$

Weiter gilt nach dem Satz 2.6, dass

$$\hat{y}(x) = u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \hat{X}_N(x) = -V'\left(\hat{y}(x)\frac{dQ}{dP}\right) = x \cdot \frac{dP}{dQ} = x \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{L_N} \cdot \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{N-L_N}.$$

Auf diese Weise ist also die optimale Auszahlung $\hat{X}_N(x)$ bestimmt. Da das N-Perioden CRR-Modell vollständig ist, kann man für $\hat{X}_N(x)$ ein Hedge konstruieren. Dieser entspricht dann der optimalen Handelsstratgie.

3 Maximierungsproblem in einem unvollständigen Finanzmarktmodell

3.1 Methode zur Lösung des Maximierungsproblems

Man betrachtet nun ein arbitragefreies, diskretes, unvollständiges Finanzmarktmodell. Nach dem 2. Fundamentalsatz der Preistheorie ist in diesem Fall das äquivalente Martingalmaß nicht eindeutig, d.h. die Menge der äquivanten Martingalmaße $\tilde{\mathcal{P}}$ ist nicht einelementig. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Martingalmaße.
Man möchte nun wieder das dynamische Maximierungsproblem (1) in ein statisches für das unvollständige Finanzmarktmodell überführen.

Satz 3.1 *Das Maximierungsproblem (1) ist äquivalent zu dem Maximierungsproblem*
$\sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T)$ *mit*
$C(x) = \{X_T \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) | \ \mathbb{E}_Q X_T \leq x$ *für alle* $Q \in \mathcal{P}\}$.

Beweis: Es ist also zu zeigen
$u(x) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(U(x + (H \cdot S)_T)) = \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}(U(X_T))$.

($\geq$): Sei $X_T \in C(x)$. X_T entspricht einer Auszahlung zum Zeitpunkt T, wobei der arbitragefreie Preis y von X_T in der Menge $\Pi(X_T) = \{\mathbb{E}_Q X_T : Q \in \mathcal{P}\}$ liegt. Aus Finanzmathematik 1 ist außerdem bekannt, dass $\Pi(X_T)$ ein offenes, nicht leeres Intervall $\Pi(X_T) = (p_-(X_T), p_+(X_T))$ mit
$p_-(X_T) := \sup\{z : z + (H \cdot S)_T \leq X_T \text{ mit } H \in \mathcal{H}\}$ und
$p_+(X_T) := \inf\{z : z + (H \cdot S)_T \geq X_T \text{ mit } H \in \mathcal{H}\}$ ist.
Da $X_T \in C(x)$, ist $\mathbb{E}_Q X_T \leq x$ für alle $Q \in \mathcal{P}$. Somit liegt x nicht in $\Pi(X_T)$, genauer $x \geq p_+(X_T)$. Das heißt es existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit $x + (H \cdot S)_T \geq X_T$.
Da U monoton steigend ist, gilt
$\mathbb{E}(U(X_T)) \leq \mathbb{E}(U(x+(H \cdot S)_T)) \leq \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(U(x+(H \cdot S)_T))$ für alle $X_T \in C(x)$.
$\Rightarrow \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}(U(X_T)) \leq \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}(U(x + (H \cdot S)_T))$.

($\leq$): Diese Richtung geht analog zum Satz (2.1). Denn für ein $H \in \mathcal{H}$ ist $X_T = x + (H \cdot S)_T$ ein Element in $C(x)$, weil $\mathbb{E}_Q X_T = \mathbb{E}_Q(x + (H \cdot S)_T)) = x$ für alle $Q \in \mathcal{P}$ ist. Also gilt:
$\mathbb{E}_P U(x + (H \cdot S)_T)) = \mathbb{E}_P U(X_T)) \leq \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T))$
$\Rightarrow u(x) \leq \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T))$.

$\square$

Nun erhält man wieder ein statisches Maximierungsproblem mit der Nebenbedingung $X_T(x) \in C(x)$. Um diese Nebenbedingung genauer charakterisieren zu können ist die folgende Bemerkung über den Raum $\mathcal{P}$ hilfreich.

Bemerkung 3.2 Die Menge der Martingalmaße $\mathcal{P}$ ist eine kompakte, konvexe Hülle, erzeugt von endlich vielen $Q^m \in \mathcal{P}$ für $m = 1, \ldots, M$. Das heißt für alle $P \in \mathcal{P}$ existieren $(\mu_1, \ldots, \mu_M) \in \mathbb{R}_+^M$ mit $\sum_{i=1}^M \mu_i = 1$ und $P = \sum_{i=1}^M \mu_i Q^i$.

Beweis: Aufgrund der Endlichkeit von Ω ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{Q}$ ein kompakter, konvexer Polygon mit N Ecken in $\mathbb{R}^N$. $\mathcal{P}$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{Q}$.
Man betrachtet nun den Raum $\mathcal{G} = \{(H \cdot S)_T : H \in \mathcal{H}\}$ aller Endvermögen der hedgebaren Claims. Dann gilt für $P \in \mathcal{P}$ und $Y \in \mathcal{G}$ mit $Y = (H \cdot S)_T$ für ein $H \in \mathcal{H}:$ $\mathbb{E}_P(x + (H \cdot S)_T) = x$. Daraus folgt $\mathbb{E}_P((H \cdot S)_T) = \langle P, Y \rangle = 0$. Also sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{P}$ orthogonal zueinander. Sei nun $\mathcal{C}$ die zu $\mathcal{G}$ orthogonale Hyperebene in $\mathbb{R}^N$, dann ist $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$. Somit existieren endlich viele $Q^m \in \mathcal{P}$, $m = 1, \ldots, M$, sodass $\mathcal{P}$ die von $\{Q^1, \ldots, Q^M\}$ erzeugte konvexe Hülle ist, da $\mathcal{Q}$ ein Polygon ist.
In der Abbildung 1 ist der Fall für 2 Basisfinanzgüter und ein dreielementiges Ω abgebildet.

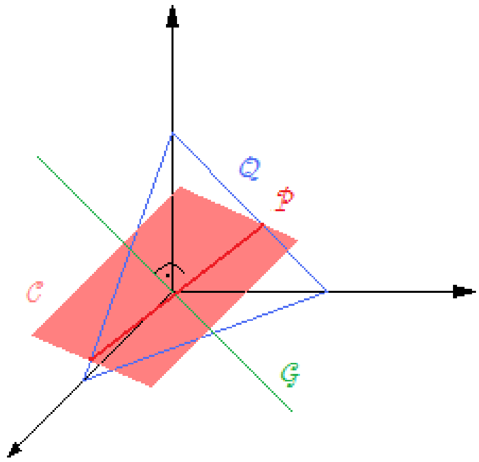

Abbildung 1.

Außerdem ist $\mathcal{P}$ abgeschlossen in $\mathcal{Q}$. Denn sei $(Q^n = (q_1^n, \ldots, q_N^n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathcal{P}$ mit dem Grenzwert $Q = (q_1, \ldots, q_N)$, dann gilt

$$\mathbb{E}_Q S_l = \sum_{n=1}^N q_n S_l(\omega_n) = \sum_{n=1}^N \lim_{k\to\infty} q_n^k S_l(w_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^N q_n^k S_l(\omega_n)$$
$$= \lim_{k\to\infty} S_0 = S_0 \quad \text{für alle} \quad l \geq 0.$$

Bei dem dritten Gleichheitszeichen ist zu beachten, dass die Summe endlich ist und somit der Limes aus der Summe rausgezogen werden darf. Und das fünfte Gleichheitszeichen folgt aus der Martingaleigenschaft von $(S_t)_{t\geq 0}$ bezüglich äquivalenter Martingalmaße.

Also ist $Q \in \mathcal{P}$ und somit ist $\mathcal{P}$ eine abgeschlossene Teilmenge von einer kompakten Menge. Also ist $\mathcal{P}$ selbst kompakt.

□

Sei nun $Q \in \mathcal{P}$. Dann existiert $(\mu_1, \ldots, \mu_M) \in \mathbb{R}_+^M$ mit $\sum_{i=1}^M \mu_i = 1$ und $Q = \sum_{i=1}^M \mu_i Q^i$. Also ist

$C(x) = \{X_T \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) |\ \mathbb{E}_{Q^m} X_T \leq x \text{ für alle } m = 1, \ldots, M\}.$

Somit ist das Maximierungsproblem (1) äquivalent zu dem statischen Maximierungsproblem

$\sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T)$ mit M Nebenbedingungen

$\mathbb{E}_{Q^m} X_T \leq x$ für $m = 1, \ldots, M$.

Um dieses zu lösen wählt man nun den Lagrange-Ansatz für mehrere Nebenbedingungen. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\begin{aligned} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \eta_1, \ldots, \eta_M) &= \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - \sum_{m=1}^{M} \eta_m \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^m \xi_n - x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n} \xi_n \right) + \sum_{m=1}^{M} \eta_m x, \end{aligned}$$

für $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \{U > -\infty\}^N$ und $(\eta_1, \ldots, \eta_M) \in \mathbb{R}_+^M$.

Setzt man jetzt $y = \eta_1 + \cdots + \eta_M$ und $\mu_m = \frac{\eta_m}{y}$ für $1 \leq m \leq M$, dann ist $y \geq 0$, $Q := \sum_{m=1}^{M} \mu_m Q^m \in \mathcal{P}$ und

$$\begin{aligned} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \eta_1, \ldots, \eta_M) &= L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y, Q) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - y \cdot \sum_{m=1}^{M} \mu_m \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^m \xi_n - x \right) \\ &= \mathbb{E}_P U(X_T) - y \left(\mathbb{E}_Q (X_T - x) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - \frac{y q_n}{p_n} \xi_n \right) + yx, \end{aligned} \tag{15}$$

für $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \{U > -\infty\}^N$, $y > 0$ und $Q = (q_1, \ldots, q_N) \in \mathcal{P}$. Also ist die Lagrange-Funktion im unvollständigen Finanzmarktmodell zusätzlich von einem Martingalmaß Q abhängig, ansonsten entspricht die Formulierung (15) der Formulierung (4) im vollständigen Modell.

Man definiert nun:

$\Psi(y, Q) = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_N} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y, Q)$.

Sei nun V die dual konjugierte Funktion von U, dann erhält man analog zum vollständigen Fall

$\Psi(y,Q) = \sum_{n=1}^N p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) + yx$ für $y > 0$ und $Q \in \mathcal{P}$.
Die Minimierung von Ψ geschieht nun in zwei Schritten. Für ein festes $y > 0$ minimiert man zunächst Ψ in Q. Für ein festes $y > 0$ ist $\Psi(y,Q)$ stetig in Q, da V stetig ist. Da $\mathcal{P}$ kompakt und V strikt konvex ist, existiert ein eindeutiger Minimierer $\hat{Q}(y) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N)$ von Ψ. Es gilt nun folgende Bemerkung für $\hat{Q}(y)$.

Bemerkung 3.3 $\hat{Q}(y)$ ist ein äquivalentes Martingalmaß, d.h. $\hat{Q}(y) \in \tilde{\mathcal{P}}$.

Beweis: Sei $\hat{Q}(y) \in \mathcal{P}$ der Minimierer von $\Psi(y,Q)$ für ein festes $y > 0$, also gilt
$\partial_Q \Psi(y, Q(y))|_{(y,\hat{Q}(y))} = 0$.
Angenommen $\hat{Q}(y)$ liegt nicht in $\tilde{\mathcal{P}}$. Dann existiert ein $n_0 \in \{1,\dots,N\}$ mit $\hat{q}_{n_0} = 0$. Es gelte o.E.d.A $n_0 = 1$ und $\hat{q}_n > 0$ für $n \in \{2,\dots,N\}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\partial_Q \Psi(y, Q(y))|_{(y,\hat{Q}(y))} = \sum_{n=1}^N yV'\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right) &= yV'\left(y\frac{\hat{q}_1}{p_1}\right) + \sum_{n=2}^N yV'\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right)\\ &= yV'(0) + \sum_{n=2}^N yV'\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right).\end{aligned}$$

Es gilt aber $V'(0) = -\infty$ und $yV'\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right) < \infty$ für $n \in \{2,\dots,N\}$.
Also ist $\sum_{n=2}^N yV'\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right) < \infty$ und somit $\partial_Q \Psi(y, Q(y))|_{(y,\hat{Q}(y))} \neq 0$.
Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Sei die Funktion v definiert durch

$$v := \inf_{Q \in \mathcal{P}} \sum_{n=1}^N p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n}\right) = \sum_{n=1}^N p_n V\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right).$$

Nun kann man analog zum vollständigen Fall zeigen, dass
$\Psi(y) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \Psi(y,Q) = \sum_{n=1}^N p_n V\left(y\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right) + yx$
einen eindeutigen Minimierer $\hat{y}(x)$, definiert durch $v'(\hat{y}(x)) = -x$, besitzt.
Für $\hat{Q}(y)$ und $\hat{y}(x)$ kann man dann zeigen, dass ein eindeutiger Maximierer

$(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N)$ von der Funktion $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \to L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \hat{y}(x), \hat{Q}(y))$ existiert und es $\hat{\xi}_n = -V'\left(\hat{y}(x)\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right)$ gilt.

Somit gilt $\nabla L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x), \hat{Q}(y)) = 0$.

Daraus kann man folgern, dass v die dual konjugierte Funktion von u ist und somit u die Inada Bedingung erfüllt.

Folgender Satz dient als Zusammenfassung der Erkenntnisse über das Maximierungsproblem im unvollständigen Finanzmarktmodell.

Satz 3.4 *Gegeben sei ein diskretes, arbitragefreies und unvollständiges Finanzmarktmodell mit einem abdiskontierten Preisprozess $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, wobei $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ ist. Sei U eine Nutzenfunktion und erfülle die Inada Bedingung. Ferner sei $\mathcal{P}$ die Menge der Martingalmaße und $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße, wegen der Arbitragefreiheit gilt $\tilde{\mathcal{P}} \neq \emptyset$. Seien $u(x)$ und $v(y)$ definiert durch*

$$u(x) = \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T(x)), \quad x \in \{U > -\infty\}, \tag{16}$$

$$v(y) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right), \quad y > 0. \tag{17}$$

Dann gilt:

1. *Die Funktion v ist die dual konjugierte Funktion von u, und u erfüllt die Inada Bedingung.*

2. *Die Optimierer $\hat{X}_T(x)$ und $\hat{Q}(y)$ von (16) und (17) existieren und sind eindeutig. Es gilt $\hat{Q}(y) \in \tilde{\mathcal{P}}$ und*

$$\hat{X}_T(x) = -V'\left(y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP}\right) \quad \text{beziehungsweise} \quad y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP} = U'(\hat{X}_T(x)),$$

wobei $x \in \{U > -\infty\}$, $y > 0$ *und*

$$y = u'(x) \text{ bzw. } x = -v'(y).$$

3. *Für* u' *und* v' *gilt:*

$$u'(x) = \mathbb{E}_P(U'(\hat{X}_T(x))), \qquad v'(y) = \mathbb{E}_{\hat{Q}(y)}\left(V'\left(y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP}\right)\right)$$
$$xu'(x) = \mathbb{E}_P(\hat{X}_T(x)U'(\hat{X}_T(x))),\ yv'(y) = \mathbb{E}_P\left(y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP}V'\left(y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP}\right)\right).$$

Dieser Satz stellt eine Methode zur Lösung des statischen Maximierungsproblems in einem unvollständigen Finanzmarktmodell dar. Man geht zunächst wie in dem vollständigen Fall vor. Wählt man eine Nutzenfunktion U, so kann man die dual Konjugierte V berechnen.
Zur Bestimmung der Funktion v muss man aber in diesem Fall zuerst das Minimierungsproblem (17) lösen. Danach kann man wie im vollständigen Finanzmarktmodell fortfahren und die optimale Auszahlung $\hat{X}_T(x)$ bestimmen. Aufgrund der Unvollständigkeit des Modells entspricht der Superhedge von $\hat{X}_T(x)$ der optimalen Handelsstrategie.

Als Anwendungsbeispiel zur Bestimmung des maximalen erwarteten Nutzens $u(x)$ in einem unvollständigen Finanzmarktmodell betrachtet man zunächst das Einperioden Trinomialmodell.

3.2 Anwendung in einem Einperioden Trinomialmodell

Man betrachtet nun ein arbitragefreies Einperioden Modell mit einem Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.
Das heißt der Aktienkurs S_1 kann nach dem Ablauf der Periode drei mögliche

Werte annehmen. Sei $S_0 = 1$ der Anfangsaktienpreis, dann ist

$$S_1 = \begin{cases} 1+u & \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ 1+m & \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt,} \\ 1+d & \text{falls } \omega_3 \text{ eintritt,} \end{cases}$$

mit $1 + u > 1 + m > 1 + d > 0$ eine Zufallsvariable, die den Aktienkurs am Ende der Periode beschreibt. Außerdem setzt man wieder $u \geq -d$ um eine Long-Position in der Aktie zu erhalten. Man nehme weiter an, dass der Zinssatz r der festverzinslichen Anleihe gleich 0 ist.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß P ist definiert durch:

$P(\{\omega_1\}) = p_1$, $P(\{\omega_2\}) = p_2$ und $P(\{\omega_3\}) = p_3$.

Nun betrachtet man wieder die Nutzenfunktionen $U(x) = \ln(x)$ und $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $\alpha \in (0, 1)$. Mithilfe des Satzes 3.4 kann man nun den optimalen erwarteten Nutzen $u(x)$, sowie die optimale Auszahlung $\hat{X}_1(x)$ in Abhängigkeit von dem Anfangskapital x ausrechnen. Da das Modell nicht vollständig ist, ist diese Auszahlung nicht unbedingt hedgebar. In solchen Fällen ist es aber möglich ein Superhedge zu konstruieren.

3.2.1 Beispiel 1

Sei also $U(x) = \ln(x)$ die Nutzenfunktion mit der dual konjugierten Funktion $V(y) = -\ln(y) - 1$.

Das Ziel ist es nun den optimalen erwarteten Nutzen und die optimale Auszahlung in Abhängigkeit von dem Anfangskapital und den Parametern des Modells numerisch zu bestimmen.

Im ersten Schritt ist der Optimierer $\hat{Q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3) \in \tilde{\mathcal{P}}$ von (17) zu bestimmen, d.h es ist das Minimierungsproblem

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) \quad \text{mit den Nebenbedingungen}$$
$$q_1+q_2+q_3=1 \;\text{ und }\; \mathbb{E}_Q S_1 = S_0 \;\text{ zu lösen.}$$

Unter der Berücksichtigung der ersten Nebenbedingung kann man die zweite Bedingung umformulieren, denn es gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_Q S_1 = (1+u)q_1+(1+m)q_2+(1+d)q_3 = S_0 = 1\\ \Leftrightarrow\quad & uq_1+mq_2+dq_3=0.\end{aligned}$$

Nun kann man wieder den Lagrange-Ansatz wählen, um dieses Minimierungsproblem mit zwei Nebenbedingungen zu lösen, die dazugehörige Lagrange-Funktion ist

$$\begin{aligned}L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) =&\mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) - \lambda_1(q_1+q_2+q_3-1) - \lambda_2(uq_1+mq_2+dq_3)\\ =&p_1(-\ln\left(y\frac{q_1}{p_1}\right)-1)+p_2(-\ln\left(y\frac{q_2}{p_2}\right)-1)+p_3(-\ln\left(y\frac{q_3}{p_3}\right)-1)\\ &-\lambda_1(q_1+q_2+q_3-1)-\lambda_2(uq_1+mq_2+dq_3).\end{aligned}$$

Für den Optimierer $(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{q}_3,\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2)$ muss nun $\nabla L(\hat{q}_1,\hat{q}_2,\hat{q}_3,\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2)=0$ gelten. Somit erhält man ein Gleichungssystem aus fünf Gleichungen und Unbekannten:

$$\begin{aligned}\partial_{q_1} L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) &= -\frac{p_1}{q_1}-\lambda_1-\lambda_2 u = 0\\ \partial_{q_2} L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) &= -\frac{p_2}{q_2}-\lambda_1-\lambda_2 m = 0\\ \partial_{q_3} L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) &= -\frac{p_3}{q_3}-\lambda_1-\lambda_2 d = 0\end{aligned}$$

$$\partial_{\lambda_1} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = -(q_1 + q_2 + q_3 - 1) = 0$$
$$\partial_{\lambda_2} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = -uq_1 - mq_2 - dq_3 = 0$$

Man erkennt, dass für diese Nutzenfunktion der Optimierer $\hat{Q}$ von y unabhängig ist.

Nun kann man mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle von ∇L numerisch bestimmen. Hierfür bestimmt man die Hesse-Matrix $Hess_L$ von L:

$$Hess_L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{q_1^2} & 0 & 0 & -1 & -u \\ 0 & \frac{p_2}{q_2^2} & 0 & -1 & -m \\ 0 & 0 & \frac{p_3}{q_3^2} & -1 & -d \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -u & -m & -d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wählt man nun die Startwerte $z_0 = (q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2)$, so kann man sich iterativ durch $\quad z_n = z_{n-1} - Hess_L(z_{n-1})^{-1} \cdot \nabla L(z_{n-1}) \quad$ einer Nullstelle von ∇L nähern. Hierbei sind die Startwerte so geschickt zu wählen, dass z_n gegen die Nullstelle mit $0 < q_i < 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ konvergiert. Wie die oberen Überlegungen gezeigt haben ist der Optimierer $\hat{Q}$ eindeutig bestimmt, d.h. es existiert genau eine Nullstelle von ∇L, die diese Eigenschaft erfüllt.

Dann kann man die Funktion v bestimmen

$$v(y) = \mathbb{E}_P V\left(y\frac{d\hat{Q}}{dP}\right) = -\sum_{i=1}^{3} p_i \ln\left(y\frac{\hat{q}_i}{p_i}\right) - 1.$$

Nun kann man die Funktion für den optimalen erwarteten Nutzen in Abhängigkeit von dem Anfangskapital bestimmen, es gilt: $\quad u(x) = \inf_{y \geq 0}(v(y) + yx)$ und

$$(v(y) + yx)' = -\sum_{i=1}^{3} \frac{p_i}{y} + x = -\frac{1}{y} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x}.$$

Also ist $\quad u(x) = v\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = -\sum_{i=1}^{3} p_i \ln\left(\frac{\hat{q}_i}{p_i \cdot x}\right).$

Weiter ist die optimale Auszahlung $\hat{X}_1(x)$ in Abhängigkeit von x interessant. Nach dem Satz 3.4 gilt

$$\hat{y}(x) = u'(x) = \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{und}$$

$$\hat{X}_1(x) = -V'\left(\hat{y}(x)\frac{d\hat{Q}}{dP}\right) = x\frac{dP}{d\hat{Q}}.$$

Das Programm 1 enthält die numerische Umsetzung des Newton-Verfahrens und liefert die Ausgabe von dem optimalen äquivalenten Martingalmaß $\hat{Q}$ und erwarteten Nutzen $u(x)$, sowie die optimale Auszahlung $\hat{X}_1(x)$ in Abhängigkeit von dem Anfangskapital x und den Parametern des Trinomial-Modells.

3.2.2 Beispiel 2

Betrachtet man nun wieder ein Einperioden Trinomialmodell mit der Nutzenfunktion $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $\alpha \in (0,1)$, so kann man anolog wie im Beispiel 1 vorgehen. Zuerst ist also $\mathbb{E}_P V(y\frac{dQ}{dP})$ unter allen Martingalmaßen zu minimieren. Es gilt:

$$\begin{aligned}\inf_{Q\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P V(y\frac{dQ}{dP}) &= \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{3} \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot p_i \left(y\frac{q_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ &= V(y) \cdot \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Das heißt der Optimierer $\hat{Q}$ ist von y unabhängig und man muss nun das Minimierungsproblem

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad \text{mit den Nebenbedingungen}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1 \quad \text{und} \quad uq_1 + mq_2 + dq_3 = 0 \quad \text{lösen.}$$

Die dazugehörige Lagrange-Funktion ist

$$L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \lambda_1(q_1 + q_2 + q_3 - 1) - \lambda_2(uq_1 + mq_2 + dq_3)$$

Also ist

$$\nabla L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \lambda_1 - u\lambda_2 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \lambda_1 - m\lambda_2 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \lambda_1 - d\lambda_2 \\ -(q_1 + q_2 + q_3 - 1) \\ -(uq_1 + mq_2 + dq_3) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$Hess_L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{q_1^{2-\alpha}}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & 0 & 0 & -1 & -u \\ 0 & \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{q_2^{2-\alpha}}{p_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & 0 & -1 & -m \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{q_3^{2-\alpha}}{p_3}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & -1 & -d \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -u & -m & -d & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man wieder für geschickt gewählte Startwerte den Optimierer $\hat{Q}$ mit dem Newton-Verfahren bestimmen. Dann ist

$$\begin{aligned} v(y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot p_i \left(y\frac{\hat{q}_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad \text{und} \\ v'(y) &= -y^{\frac{1}{\alpha-1}} \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\frac{\hat{q}_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ &= -y^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot c \ \text{ mit } \ c = \sum_{i=1}^{3} p_i \left(\frac{\hat{q}_i}{p_i}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Also gilt: $v'(y) + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{x}{c}\right)^{\alpha-1}$.

Und somit $u(x) = v(y) + x \cdot y$.

Das Programm 2 enthält die numerische Umsetzung und liefert die Ausgabe von dem optimalen äquivalenten Martingalmaß $\hat{Q}$ und optimalen erwarteten Nutzen. Hierbei ist zu beachten, dass die Startwerte mit dem Parameter α zusammenhängen und somit für bestimmte $\alpha \in (0,1)$ neu gewählt werden müssen.

3.2.3 Beispiel 3

Der folgende Spezialfall des Einperioden Trinomialmodells mit $m = 0$ ist auch interessant zu untersuchen, da man hier, statt Satz 3.4 anzuwenden, die Erkenntisse aus dem CRR-Modell nutzen kann und sogar die optimale Handelsstrategie direkt angeben kann.

Man nimmt also an, dass der Aktienkurs folgende Werte nach dem Ablauf der Periode annehmen kann:

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \begin{cases} 1+u & \text{, falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ 1 & \text{, falls } \omega_2 \text{ eintritt,} \\ 1+d & \text{, falls } \omega_3 \text{ eintritt,} \end{cases}$$

und dass der Zinssatz $r = 0$ ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P ist besimmt durch:

$P(\{\omega_2\}) = p_2$ für ein $p_2 \in (0,1)$ und $P(\{\omega_1\}) = (1-p_2)p_1$, $P(\{\omega_3\}) = (1-p_2)p_3$ für $p_1, p_3 \in (0,1)$ mit $p_1 + p_3 = 1$.

Wegen der Arbitragefreiheit gilt weiter $1+u > 1 > 1+d > 0$. Ferner nimmt man wieder an, dass $u \geq -d$, um eine Long-Position in der Aktie zu erhalten.

Nun berechnet man die optimale Handelsstrategie mithilfe des Einperioden CRR-Modells. Falls nötig, kann man dann auch den optimalen äquivalenten Martingalmaß bestimmen.

Das Ziel ist es ein $\hat{h}^{tri} \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, sodass

$\mathbb{E}_P U(x+\hat{h}^{tri}\Delta S_1) = \sup_{h\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_P U(x+h\Delta S_1) =: u^{tri}(x)$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u^{tri}(x) &= \sup_{h\in\mathbb{R}} \left(p_2 U(x-h\Delta S_1(\omega_2)) + (1-p_2)p_1 U(x-h\Delta S_1(\omega_1)) + (1-p_2)p_3 U(x-h\Delta S_1(\omega_3))\right) \\
&= p_2 U(x) + (1-p_2)\sup_{h\in\mathbb{R}} \left(p_1 U(x+hu) + p_3 U(x+hd)\right) \\
&= p_2 U(x) + (1-p_2)u^{bi}(x) = p_2 U(x) + (1-p_2)\left(p_1 U(x+\hat{h}u) + p_3 U(x+\hat{h}d)\right) \\
&= p_2 U(x) + (1-p_2)c_U U(x) =: c_U^{tri} U(x) \quad \text{mit} \quad c_U^{tri} = p_2 + (1-p_2)c_U.
\end{aligned}
$$

Bei dem zweiten Gleichheitszeichen ist zu beachten, dass $\Delta S_1(\omega_2) = 0$ ist. Und bei dem dritten, dass $p_1 U(x+hu)+p_3 U(x+hd)$ dem $\mathbb{E}_P(U(x+\Delta S_1))$ im Einperioden CRR-Modell entspricht.

Hieraus folgt, dass der Optimierer $\hat{h}^{tri}$ für dieses Einperioden Trinomialmodell mit dem $\hat{h}$ aus dem Einperioden CRR-Modell überbestimmt. Das heißt $\hat{h}^{tri} = x(c_V^{-1}(\frac{q}{p_1})^{\beta-1} - 1)u^{-1})$ für $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Dabei ist q durch das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß des Einperioden CRR-Models gegeben.

Nun kann man Satz 3.4 anwenden um $\hat{Q}$ zu berechnen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(x) &= \left(u^{tri}\right)'(x) = c_U^{tri} U'(x) \\
\frac{d\hat{Q}}{dP}(\omega_2) &= \frac{U'(\hat{X}_1(x)(\omega_2))}{\hat{y}(x)} = \frac{U'(x)}{\hat{y}(x)} = \frac{1}{c_U^{tri}}. \\
\Rightarrow \hat{Q}(\omega_2) &= \frac{d\hat{Q}}{dP}(\omega_2)P(\{\omega_2\}) = \frac{p_2}{c_U^{tri}}.
\end{aligned}
$$

$\hat{Q}(\omega_1)$ und $\hat{Q}(\omega_3)$ erhält man durch Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}(\omega_1) + \hat{Q}(\omega_2) + \hat{Q}(\omega_3) &= 1 \\
\mathbb{E}_{\hat{Q}}(S_1 - S_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \; \hat{Q}(\omega_1) = \frac{\left(\frac{p_2}{c_U^{tri}} - 1\right)d}{u-d} \quad \text{und} \quad \hat{Q}(\omega_3) = \frac{\left(1 - \frac{p_2}{c_U^{tri}}\right)u}{u-d}.
$$

Somit ist auf diese Weise die optimale Handelsstrategie und der dazugehörige optimale äquivalente Martingalmaß für dieses Einperioden Trinomialmodell eindeutig bestimmt.

3.3 Anwendung in einem N-Perioden Trinomialmodell

Man möchte nun das Trinomialmodell auf N Perioden ausweiten. Dafür betrachtet man eine Familie von identisch verteilten , stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $(\xi_t)_{t=1}^N$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sodass $P(\xi_t = 1) = p_1$, $P(\xi_t = 0) = p_2$ und $P(\xi_t = -1) = p_3$ für $1 \leq t \leq N$. Ferner sei $(\mathcal{F}_t)_{t=1}^N$ die Filtration, der von $(\xi_n)_{n=1}^t$ erzeugten σ-Algebren.
Sei $S_0 = 1$ der Anfangsaktienkurs. Dann ist der Preis der Aktie zum Zeitpunkt $t \in \{1, \ldots, N\}$ rekursiv definiert durch:

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1}(1+u), & \text{falls } \ \xi_t = 1 \\ S_{t-1}(1+m), & \text{falls } \ \xi_t = 0 \\ S_{t-1}(1+d), & \text{falls } \ \xi_t = -1. \end{cases}$$

mit $1 + u > 1 + m > 1 + d > 0$.
Setzt man jetzt

$$L_t = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{1}_{\{\xi_i = 1\}} \quad \text{und} \quad M_t = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{1}_{\{\xi_i = 0\}},$$

dann gilt $\quad S_t = S_0(1+u)^{L_t}(1+m)^{M_t}(1+d)^{t-L_t-M_t}$ für $1 \leq t \leq N$.
Außerdem gilt

$$P(L_t = n,\ M_t = m) = \begin{cases} \binom{t}{n}\binom{t-n}{m} p_1^n \cdot p_2^m \cdot p_3^{t-n-m}, & \text{falls } \ n + m \leq t \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$P(L_t = n) = \sum_{i=0}^{t-n} \binom{t}{n}\binom{t-n}{i} p_1^n \cdot p_2^i \cdot p_3^{t-n-i},$$

$$P(M_t = n) = \sum_{i=0}^{t-n} \binom{t}{n} \binom{t-n}{i} p_1^i \cdot p_2^n \cdot p_3^{t-n-i},$$
$$\text{für} \;\; 1 \leq t \leq N \;\; \text{und} \;\; 0 \leq n \leq t.$$

Ferner gilt für ein Martingalmaß Q

$$\frac{dQ}{dP} \mid_{\mathcal{F}_N} = \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{L_N} \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{M_N} \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-L_N-M_N}.$$

3.3.1 Beispiel 1

Man nehme $U(x) = \ln(x)$ als Nutzenfunktion. Das Ziel ist den optimalen erwarteten Nutzen $u(x)$ in Abhängigkeit von einem Startkapital x zu bestimmen. Nun wendet man wieder Satz 3.4 an und verwendet den Lagrange-Ansatz zur Bestimmung des Optimierers $\hat{Q}$. Es gilt

$$L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) - \lambda_1(q_1 + q_2 + q_3 - 1) - \lambda_2(uq_1 + mq_2 + dq_3)$$

mit

$$\mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\; M_N = m) \cdot V\left(y\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} \binom{N}{n}\binom{N-n}{m} p_1^n \cdot p_2^m \cdot p_3^{N-n-m} \cdot \left(-\ln\left(y\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right) - 1\right).$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_{q_1}\mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) &= -\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} \binom{N}{n}\binom{N-n}{m} p_1^n \cdot p_2^m \cdot p_3^{N-n-m} \cdot \frac{n}{q_1} \\
&= -\frac{1}{q_1}\sum_{n=0}^{N} n \sum_{m=0}^{N-n} \binom{N}{n}\binom{N-n}{m} p_1^n \cdot p_2^m \cdot p_3^{N-n-m} \\
&= -\frac{1}{q_1}\sum_{n=0}^{N} nP(L_N = n) = -\frac{1}{q_1} \cdot \mathbb{E}_P L_N = -\frac{N \cdot p_1}{q_1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{q_2}\mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) &= -\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n}\binom{N}{n}\binom{N-n}{m}p_1^n\cdot p_2^m\cdot p_3^{N-n-m}\cdot\frac{m}{q_2}\\
&= -\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N-m}\binom{N}{n}\binom{N-n}{m}p_1^n\cdot p_2^m\cdot p_3^{N-n-m}\cdot\frac{m}{q_2}\\
&= -\frac{1}{q_2}\cdot\mathbb{E}_P M_N = -\frac{N\cdot p_2}{q_2},\\
\partial_{q_3}\mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) &= -\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n}\binom{N}{n}\binom{N-n}{m}p_1^n\cdot p_2^m\cdot p_3^{N-n-m}\cdot\frac{N-n-m}{q_3}\\
&= -\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n}P(L_N=n,\ M_N=m)\cdot\frac{N-n-m}{q_3}\\
&= -\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N-k}P(L_N=n,\ M_N=N-k-n)\cdot\frac{k}{q_3}\\
&= -\sum_{k=0}^{N}P(N-L_N-M_N=k)\cdot\frac{k}{q_3}\\
&= -\frac{1}{q_3}\cdot\mathbb{E}_P(N-L_N-M_N) = -\frac{N\cdot p_3}{q_3}.
\end{aligned}
$$

Es gilt also:

$$
\nabla L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} -\frac{N\cdot p_1}{q_1}-\lambda_1-u\lambda_2\\ -\frac{N\cdot p_2}{q_2}-\lambda_1-m\lambda_2\\ -\frac{N\cdot p_3}{q_3}-\lambda_1-d\lambda_2\\ -(q_1+q_2+q_3-1)\\ -(uq_1+mq_2+dq_3)\end{pmatrix}
$$

Um die Nullstellen von ∇L zu bestimmen verwendet man erneut das Newton-Verfahren. Die Hesse-Matrix von L ist

$$Hess_L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{N \cdot p_1}{q_1^2} & 0 & 0 & -1 & -u \\ 0 & \frac{N \cdot p_2}{q_2^2} & 0 & -1 & -m \\ 0 & 0 & \frac{N \cdot p_3}{q_3^2} & -1 & -d \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -u & -m & -d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wählt man nun ein Startwert $z_0 = (q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2)$, so nähert sich $z_n = z_{n-1} - Hess_L^{-1}(z_{n-1}) \cdot \nabla L(z_{n-1})$ einer Nullstelle von ∇L. Wieder sind die Startwerte so zu wählen, dass die Nullstelle $(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$ $0 < \hat{q}_i < 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ erfüllt. Dann ist der optimale äquivalente Martingalmaß $\hat{Q}$ gegeben durch $(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)$.

Nun ist die Funktion v bestimmt durch

$$v(y) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot V\left(y \left(\frac{\hat{q}_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{\hat{q}_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{\hat{q}_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right)$$

Also gilt:

$$v'(y) + x = -\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{1}{y} + x = -\frac{1}{y} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \inf_{y \geq 0}(v(y) + yx) = v\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\left(\frac{\hat{q}_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{\hat{q}_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{\hat{q}_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right) - 1\right) + 1 \\ &= \ln(x) - \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \ln\left(\left(\frac{\hat{q}_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{\hat{q}_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{\hat{q}_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right). \end{aligned}$$

Das Programm 3 rechnet $\hat{Q}$ sowie $u(x)$ in Abhängigkeit von den Parametern des Modells und des Anfangskapitals x aus.

3.3.2 Beispiel 2

Sei nun $U(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot x^{\alpha}$ für $\alpha \in (0,1)$ die Nutzenfunktion. $V(y) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ ist die dual konjugierte Funktion von U, somit gilt:

$$\begin{aligned}
v(y) &= \inf_{Q\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&=: \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \inf_{Q\in\mathcal{P}} f(q_1,q_2,q_3) \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$f(q_1,q_2,q_3) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m)\cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.
Somit ist das Minimierungsproblem von y unabhängig. Zur Lösung des Minimierungsproblems $\inf_{Q\in\mathcal{P}} f(q_1,q_2,q_3)$ wählt man erneut den Lagrange-Ansatz
$L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) = f(q_1,q_2,q_3) - \lambda_1(q_1+q_2+q_3-1) - \lambda_2(uq_1+mq_2+dq_3)$.
Mithilfe des Newton-Verfahrens bestimmt man die Nullstellen von ∇L. Das heißt zuerst sind die partiellen Ableitungen von L bis zur zweiten Ordnung zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\partial_{q1}L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{n\alpha}{\alpha-1} \cdot q_1^{\frac{n\alpha}{\alpha-1}-1} \\
&\quad \cdot \left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \lambda_1 - u\lambda_2 \\
&=: c_1 - \lambda_1 - u\lambda_2, \\
\partial_{q2}L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) &= c_2 - \lambda_1 - m\lambda_2 \quad \text{und} \\
\partial_{q3}L(q_1,q_2,q_3,\lambda_1,\lambda_2) &= c_3 - \lambda_1 - d\lambda_2 \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$c_2 = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{m\alpha}{\alpha-1} \cdot q_2^{\frac{m\alpha}{\alpha-1}-1} \cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{1}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$c_3 = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1} \cdot q_3^{\frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1}-1} \cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Ferner gilt

$$c_{11} := \partial_{q_1}\partial_{q_1} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{n\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{n\alpha}{\alpha-1}-1\right) \cdot q_1^{\frac{n\alpha}{\alpha-1}-2} \cdot \left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$c_{22} := \partial_{q_2}\partial_{q_2} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{m\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{m\alpha}{\alpha-1}-1\right) \cdot q_2^{\frac{m\alpha}{\alpha-1}-2} \cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{1}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$c_{33} := \partial_{q_3}\partial_{q_3} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1}-1\right) \cdot q_3^{\frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1}-2} \cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$c_{12} := \partial_{q_2}\partial_{q_1} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \partial_{q_1}\partial_{q_2} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{n\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{m\alpha}{\alpha-1} \cdot q_1^{\frac{n\alpha}{\alpha-1}-1} q_2^{\frac{m\alpha}{\alpha-1}-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^n \left(\frac{1}{p_2}\right)^m \left(\frac{q_3}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$
\begin{aligned}
c_{13} &:= \partial_{q_3}\partial_{q_1} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \partial_{q_1}\partial_{q_3} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{n\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha - 1} \cdot q_1^{\frac{n\alpha}{\alpha-1}-1} \\
&\quad \cdot q_3^{\frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1}-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \\
c_{23} &:= \partial_{q_3}\partial_{q_2} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \partial_{q_2}\partial_{q_3} L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \frac{m\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha - 1} \cdot q_2^{\frac{m\alpha}{\alpha-1}-1} \\
&\quad \cdot q_3^{\frac{(N-n-m)\alpha}{\alpha-1}-1} \cdot \left(\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{1}{p_2}\right)^m \left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-n-m} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.
\end{aligned}
$$

So erhält man $\nabla L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2)$ und $Hess_L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2)$

$$
\nabla L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} c_1 - \lambda_1 - u\lambda_2 \\ c_2 - \lambda_1 - m\lambda_2 \\ c_3 - \lambda_1 - d\lambda_2 \\ -(q_1 + q_2 + q_3 - 1) \\ -(uq_1 + mq_2 + dq_3) \end{pmatrix},
$$

$$
Hess_L(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -1 & -u \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & -1 & -m \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & -1 & -d \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -u & -m & -d & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Das Newton-Verfahren liefert dann für geeignete Startwerte das optimale äquivalenten Martingalmaß $\hat{Q}$.

Weiter folgt aus

$$\begin{aligned}
v(y) &= \mathbb{E}_P V\left(y\frac{d\hat{Q}}{dP}\right) \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} P(L_N = n,\ M_N = m) \cdot \left(\left(\frac{\hat{q}_1}{p_1}\right)^n \left(\frac{\hat{q}_2}{p_2}\right)^m \left(\frac{\hat{q}_3}{p_3}\right)^{N-n-m}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&=: \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot c, \quad \text{dass} \quad v'(y) = -y^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot c \quad \text{ist.}
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
v'(\hat{y}(x)) + x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{y}(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^{\alpha-1} \quad \text{und} \\
u(x) =& v(\hat{y}(x)) + \hat{y}(x)x.
\end{aligned}$$

Das Programm 4 liefert die entsprechenden Ausgaben. Hier sind die Startwerte λ_1 und λ_2 für das Newton-Verfahren von dem Parameter α und der Anzahl der Perioden abhängig.

3.3.3 Beispiel 3

Man betrachte nun wieder den Spezialfall des Trinomiallmodells mit $m = 0$ für die Nutzenfunktion $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ mit $\alpha \in (0, 1)$.
Der Preis der Aktie zum Zeitpunkt $t \in \{1, \ldots, N\}$ ist gegeben durch:

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1}(1+\tilde{u}), & \text{falls } \xi_t = 1 \\ S_{t-1}, & \text{falls } \xi_t = 0 \\ S_{t-1}(1+\tilde{d}), & \text{falls } \xi_t = -1. \end{cases}$$

Das Ziel ist es das folgende Maximierungsproblem zu lösen

$$\begin{aligned}u(x) &:= \sup\left\{\mathbb{E}U\left(x+\sum_{n=1}^{N} h_n \Delta S_n\right) \mid \ (h_n)_{n=1}^{N} \in \mathcal{H}\right\} \\ &=: \mathbb{E}U\left(x+\sum_{n=1}^{N} \hat{h}_n \Delta S_n\right) =: \mathbb{E}U(\hat{X}_N(x)).\end{aligned}$$

Man betrachtet wieder die bedingte Nutzenfunktionen

$$u_t(x) = \sup\left\{\mathbb{E}(U(x+\sum_{n=t+1}^{N} h_n \Delta S_n) \mid \ \mathcal{F}_t)\right\},$$

wobei jeweils unter $(h_n)_{n=t+1}^{N}$ maximiert wird.
Analog zum N-Perioden CRR-Modell kann man sich überlegen, dass $u_{N-1}(x) = \mathbb{E}(U(x + \hat{h}_N^{tri} \Delta S_1))$ ist, und somit dem Maximierungsproblem im Einperioden Trinomialmodell entspricht.
Mit Rückwärtsinduktion sieht man dann, dass für alle $t \in \{1,\dots,N-1\}$ $u_{N-t}(x)$ dem Einperioden Maximierungsproblem entspricht. Ferner gilt dann
$u_t(x) = (c_U^{tri})^{N-t} U(x)$, also insbesondere $u(x) = u_0(x) = (c_U^{tri})^N U(x)$.
Außerdem ist $\hat{h}_t = \frac{\hat{h}^{tri}}{S_{t-1}}$. Nach Kapitel 3.1 ist $\hat{h}^{tri} = \hat{h}$, also ist $\hat{h}^{tri} = \frac{\hat{X}_{t-1}\hat{k}}{S_{t-1}}$.

4 Literaturverzeichnis

Freddy Delbaen, Walter Schachermayer:

The Mathematics of Arbitrage; Springer.

5 Anhang

Der Anhang beinhaltet die MATLAB-Programme 1 bis 4, sowie die Funktion `binomial`. Diese Funktion wird im Programm 3 und 4 verwendet und berechnet den Binomialkoeffizienten. Die m-Files der Programme befinden sich auf der beigefügten CD.

```
function [ x ] = binomial( n,k )
%Diese Funktion berechnet den Binomialkoeffizienten n über k.
  x = 1;
  for m = 1:k
     x = x * (n+1-m) / m;
  end
end
```

5.1 Programm 1

```
%Dieses Programm berechnet für ein Einperioden Trinomialmodell und die
%Nutzenfunktion U(x)=log(x) das optimale äquivalente Martingalmaß Q,
%den maximalen erwarteten Nutzen u(x), sowie die optimale Auszahlung X.

% Parameter des Einperioden Trinomialmodells:
u=0.5;
m=0.2;
d=-0.3;
p1=0.3; % W'keit, dass S1=1+u
p2=0.3; % W'keit, dass S1=1+m
p3=0.4; % W'keit, dass S1=1+d
x=10;   % Anfangskapital

%Startwerte für das Newton-Verfahren:
q1=1/3;
q2=1/3;
q3=1/3;
y1=2;
y2=3;
z=[q1,q2,q3,y1,y2]';
N=100; %Anzahl der Iterationen

for i=1:N
 % f entspricht dem Gradienten von L.
 f=[-p1/z(1)-z(4)-u*z(5),...
     -p2/z(2)-z(4)-m*z(5),...
```

```
     -p3/z(3)-z(4)-d*z(5),...
     -(z(1)+z(2)+z(3)-1),...
     -(u*z(1)+m*z(2)+d*z(3))] ;
 % df ist die Hesse-Matrix von L.
 df=[p1/(z(1)^2), 0, 0, -1, -u;
    0, p2/(z(2)^2), 0, -1, -d;
    0, 0, p3/(z(3)^2), -1, -d,;
    -1, -1, -1,0,0;
    -u, -m, -d, 0,0];

% Der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens
z=z-df\f';
q1=z(1);
q2=z(2);
q3=z(3);
end
z
disp('Das optimale äquivalente Martingalmaß Q ist gegeben durch:')
q1=z(1)
q2=z(2)
q3=z(3)
disp('Der optimale erwartete Nutzen ist:')
u= -p1*log(q1/(p1*x))-p2*log(q2/(p2*x))-p3*log(q3/(p3*x))
disp('Und die optimale Auszahlung nimmt folgende Werte an:')
X=[x*p1/q1;x*p2/q2;x*p3/q3]
```

5.2 Programm 2

```
%Dieses Programm berechnet für ein Einperioden Trinomialmodell und die
%Nutzenfunktion U(x)=(x^a)/a das optimale äquivalente Maringalmaß Q und
%den maximalen erwarteten Nutzen u(x).

% Parameter des Einperioden Trinomialmodells:
u=0.5;
m=0.2;
d=-0.3; % u,m,d sind die möglichen Aktienkursänderungen
p1=0.3; % W'keit, dass S1=1+u
p2=0.3; % W'keit, dass S1=1+m
p3=0.4; % W'keit, dass S1=1+d
a=0.1;
x=100;

% Startwerte für das Newton-Verfahren
```

```
q1=1/3;
q2=1/3;
q3=1/3;
y1=0;
y2=0;
z=[q1,q2,q3,y1,y2]';
N=100; % Anzahl der Iterationen

for i=1:N
 % f entspricht dem Gradienten von L
 f=[(a/(a-1))*(z(1)/p1)^(1/(a-1))-z(4)-u*z(5),...
     (a/(a-1))*(z(2)/p2)^(1/(a-1))-z(4)-m*z(5),...
     (a/(a-1))*(z(3)/p3)^(1/(a-1))-z(4)-d*z(5),...
     -(z(1)+z(2)+z(3)-1),...
     -(u*z(1)+m*z(2)+d*z(3))] ;
 % df entspricht der Hesse-Matrix von L
 df=[(a/(a-1)^2)*((z(1)^(2-a))/p1)^(1/(a-1)), 0, 0, -1, -u;
    0, (a/(a-1)^2)*((z(2)^(2-a))/p2)^(1/(a-1)), 0, -1, -d;
    0, 0, (a/(a-1)^2)*((z(3)^(2-a))/p3)^(1/(a-1)), -1, -d,;
    -1, -1, -1,0,0;
    -u, -m, -d, 0,0];

% Der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens
z=z-df\f';
q1=z(1);
q2=z(2);
q3=z(3);
end

disp('Das ausgezeichnete äquivalente Martingalmaß Q ist gegeben durch:')
q1=z(1)
q2=z(2)
q3=z(3)
c=p1*(q1/p1)^(a/(a-1))+p2*(q2/p2)^(a/(a-1))+p3*(q3/p3)^(a/(a-1));
y=(x/c)^(a-1);
disp('Der optimale erwartete Nutzen ist:')
u=c*((1-a)/a)*y^(a/(a-1))+x*y
```

5.3 Programm 3

```
%Dieses Programm berechnet für ein N-Perioden Trinomialmodell und die
%Nutzenfunktion U(x)=log(x) das optimale äquivalente Martingalmaß
```

```
%Q und den maximalen erwarteten Nutzen u(x).

% Parameter des N-Perioden Trinomialmodells:
N=100; %Anzahl der Perioden
u=0.5;
m=0.2;
d=-0.3;
p1=0.3; % W'keit, dass S1=1+u
p2=0.3; % W'keit, dass S1=1+m
p3=0.4; % W'keit, dass S1=1+d
x=100;   % Anfangskapital

% Startwerte für das Newton-Verfahren:
q1=1/3;
q2=1/3;
q3=1/3;
y1=2;
y2=3;
z=[q1,q2,q3,y1,y2]';
n=100; %Anzahl der Iterationen

for i=1:n
 % f entspricht dem Gradienten von L
 f=[-N*p1/z(1)-z(4)-u*z(5),...
     -N*p2/z(2)-z(4)-m*z(5),...
     -N*p3/z(3)-z(4)-d*z(5),...
     -(z(1)+z(2)+z(3)-1),...
     -(u*z(1)+m*z(2)+d*z(3))] ;
 % df entspricht der Hesse-Matrix von L
 df=[N*p1/(z(1)^2), 0, 0, -1, -u;
    0, N*p2/(z(2)^2), 0, -1, -d;
    0, 0, N*p3/(z(3)^2), -1, -d,;
    -1, -1, -1,0,0
    -u, -m, -d, 0,0];

% Der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens:
z=z-df\f';
q1=z(1);
q2=z(2);
q3=z(3);
end
disp('Das optimale äquivalente Martingalmaß Q ist gegeben durch:')
q1=z(1)
```

```
q2=z(2)
q3=z(3)

% Berechnung des optimalen erwarteten Nutzens:
y=zeros(N+1,1);
for i=0:N
    z=zeros(N-i+1,1);
    for k=0:(N-i)
        z(k+1)=binomial(N,i)*binomial(N-i,k)*p1^i*p2^k*p3^(N-i-k)...
            *log((q1/p1)^i*(q2/p2)^k*(q3/p3)^(N-i-k));
    end
    y(i+1)=sum(z);
end
c=sum(y);
disp('Der optimale erwartete Nutzen ist:')
u=log(x)-c
```

5.4 Programm 4

```
%Dieses Programm berechnet für ein N-Perioden Trinomialmodell und
%Nutzenfunktion U(x)=(x^a)/a das optimale äquivalente Maringalmaß Q
%und den maximalen erwarteten Nutzen u(x).

% Parameter des N-Perioden Trinomialmodells:
u=0.5;
m=0.2;
d=-0.3;
p1=0.3; % W'keit, dass S1=1+u
p2=0.3; % W'keit, dass S1=1+m
p3=0.4; % W'keit, dass S1=1+d
a=0.5;  % für a=0.001 setze y1=0, y2=0
x=10;   % Startkapital
N=10;   % Anzahl der Perioden

% Startwerte für das Newton-Verfahren
q1=1/3;
q2=1/3;
q3=1/3;
y1=-100;
y2=-100;
n=100; %Anzahl der Iterationen
z=[q1,q2,q3,y1,y2]';
```

```
% Berechnung des Gradienten
for i=1:n
y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *j*z(1)^((j*a)/(a-1)-1)*((1/p1)^j*(z(2)/p2)^k...
            *(z(3)/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c1=(a/(a-1))*sum(y);

y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=k*z(2)^((k*a)/(a-1)-1)*binomial(N,j)...
            *binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((z(1)/p1)^j*(1/p2)^k*(z(3)/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c2=a/(a-1)*sum(y);

y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=(N-j-k)*z(3)^(((N-j-k)*a)/(a-1)-1)...
            *binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((z(1)/p1)^j*(z(2)/p2)^k*(1/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c3=a/(a-1)*sum(y);

% f ist der Gradient von L
 f=[c1-z(4)-u*z(5),...
     (c2-z(4)-m*z(5)),...
     (c3-z(4)-d*z(5)),...
     -(z(1)+z(2)+z(3)-1),...
```

```
     -(u*z(1)+m*z(2)+d*z(3))] ;

 % Berechnung der Hesse-Matrix
 % c11
 y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((1/p1)^j*(z(2)/p2)^k*(z(3)/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=((j*a)/(a-1)-1)*j*z(1)^((j*a)/(a-1)-2)*sum(w);
end
c11=a/(a-1)*sum(y);

% c22
y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=((k*a)/(a-1)-1)*k*z(2)^((k*a)/(a-1)-2)*binomial(N,j)...
            *binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((z(1)/p1)^j*(1/p2)^k*(z(3)/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c22=a/(a-1)*sum(y);

% c33
y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=(((N-j-k)*a)/(a-1)-1)*(N-j-k)*z(3)^(((N-j-k)*a)/(a-1)-2)...
            *binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((z(1)/p1)^j*(z(2)/p2)^k*(1/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c33=a/(a-1)*sum(y);

 % c12
 y=zeros(N+1,1);
```

```
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=j*z(1)^((j*a)/(a-1)-1)*k*z(2)^((k*a)/(a-1)-1)...
            *binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((1/p1)^j*(1/p2)^k*(z(3)/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c12=((a/(a-1))^2)*sum(y);

% c23
y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=(N-j-k)*z(3)^(((N-j-k)*a)/(a-1)-1)*k*z(2)^((k*a)/(a-1)-1)...
            *binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((z(1)/p1)^j*(1/p2)^k*(1/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c23=((a/(a-1))^2)*sum(y);

% c31
y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=j*z(1)^((j*a)/(a-1)-1)*(N-j-k)*z(3)^(((N-j-k)*a)/(a-1)-1)...
            *binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((1/p1)^j*(z(2)/p2)^k*(1/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c31=((a/(a-1))^2)*sum(y);

% df ist die Hesse-Matrix von L
 df=[c11, c12, c31, -1, -u;
    c12, c22, c23, -1, -d;
    c31, c23, c33, -1, -d,;
    -1, -1, -1,0,0;
    -u, -m, -d, 0,0];
```

```
% Der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens
z=z-df\f';

q1=z(1);
q2=z(2);
q3=z(3);
end

disp('Das optimale äquivalente Martingalmaß Q ist gegeben durch:')
q1=z(1)
q2=z(2)
q3=z(3)

% Berechnung des optimalen erwarteten Nutzens:
y=zeros(N+1,1);
for j=0:N
    w=zeros(N-j+1,1);
    for k=0:(N-j)
        w(k+1)=binomial(N,j)*binomial(N-j,k)*p1^j*p2^k*p3^(N-j-k)...
            *((q1/p1)^j*(q2/p2)^k*(q3/p3)^(N-j-k))^(a/(a-1));
    end
    y(j+1)=sum(w);
end
c=sum(y);
y=(x/c)^(a-1);
disp('Der optimale erwartete Nutzen ist:')
u=c*((1-a)/a)*y^(a/(a-1))+x*y
```