Bachelorarbeit

zum Thema

Die Kunita-Watanabe Zerlegung und ihre Anwendungen in der Finanzmathematik

The Kunita-Watanabe decomposition and its applications in Finance

von

Sven Gohlke
Matrikelnummer: 356033

zur Erlangung des akademischen Grades: Bachelor of Science
am Institut für Mathematische Statistik
der Mathematisch- Naturwissenschaftliche Fakultät
der Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Datum:	15. August 2011
Erstgutachter:	PD Dr. Volkert Paulsen

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

Die Kunita-Watanabe Zerlegung und ihre Anwendungen in der Finanzmathematik (The Kunita-Watanabe decomposition and its applications in Finance)

selbständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe.
Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

....

Ort, Datum Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung / Motivation

In dieser Bachelorarbeit geht es um die Kunita-Watanabe Zerlegung und ihre Anwendungen in der Finanzmathematik. Wir befinden uns dafür in unvollständigen Finanzmarktmodellen, sodass wir gegebene Claims mit den klassischen Handelsstrategien nicht hedgen können. Das bedeutet, dass die Anfangspreise solcher Claims nicht eindeutig bestimmt werden können. Wir werden daher das Konzept der verallgemeinerten Handelsstrategien kennenlernen, mit deren Hilfe man auch in unvollständigen Modellen, sofern sie gewissen Bedingungen genügen, Claims vollständig hedgen kann, sodass ihr Anfangspreis eindeutig bestimmbar wird. Wir werden für den Fall eines eindimensionalen risky assets auch ein rekursiven Verfahren erarbeiten, dass uns Hedgingstrategie und Anfangspreis für gegeben Claim H ausgibt.
Die Kunita-Watanabe Zerlegung von Martingalen unter Martingalmaßen, die wir daraufhin ausarbeiten werden, liefert uns dann die Existenz einer solchen verallgemeinerten Handelsstrategie in dem Fall, dass das zugrunde liegende Maß ein Martingalmaß ist. Ist das in einem unvollständigen Modell nicht der Fall, so kann man sich überlegen, ob nicht ein äquivalentes Martingalmaß $\hat{P}$ aus der nicht-trivialen Menge der äquivalenten Martingalmaße existiert, unter dem der arbitragefreie Anfangspreis eines Claims eindeutig via $\hat{\mathbb{E}}\,[H] = V_0$ bestimmbar ist. Dieses Maß heißt Minimales Martingalmaß und existiert, falls das Finanzmarktmodell bestimmte Bedingungen erfüllt, und wir werden sehen, dass dessen Dichte im eindimensionalen recht einfach bestimmbar ist, sodass auch der Erwartungswert eines Claims unter diesem Maß bestimmbar ist. Diese beiden Möglichkeiten, Anfangspreise im unvollständigen Modell zu berechnen, werden dann abschließend am Beispiel des Trinomialmodells verglichen.

Kapitel 2

Erste Defintionen

Wir wollen zuerst ein paar wichtige Definitionen vornehmen, die im Laufe des Vortrags benötigt werden:

Definition. Seien X,Y Zufallsvariablen bzgl. P. Dann ist die *bedingte Kovarianz* von X und Y definiert durch

$$cov(X, Y|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[XY|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_t\right] \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{F}_t\right],$$

wenn die bedingten Erwartungswerte definiert sind.
Die *bedingte Varianz* einer Zufallsvariablen X bzgl. P ist analog zur nicht bedingten Varianz wie folgt definiert:

$$var(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[X^2|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_t\right]^2, \quad \text{was auch } cov(W, W|\mathcal{F}_t) \text{ entspricht}$$

Definition. Seien W und Z zwei adaptierte Prozesse. Ist

$$cov(W_{t+1} - W_t, Z_{t+1} - Z_t|\mathcal{F}_t) \quad \forall\ t = 0, \ldots, T-1 \quad \text{definiert und}$$

$$cov(W_{t+1} - W_t, Z_{t+1} - Z_t|\mathcal{F}_t) = 0 \qquad P-\text{fast sicher},$$

so heißen W und Z *stark orthogonal.* Im Folgenden ist einer der beiden Prozesse immer ein P-Martingal. Dadurch reduziert sich die Bedingung auf:

$$cov(W_{t+1} - W_t, Z_{t+1} - Z_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[(W_{t+1} - W_t)(Z_{t+1} - Z_t)|\mathcal{F}_t\right] = 0,$$

denn wenn Z ein Martingal ist, gilt:

$$\begin{aligned} & cov(W_{t+1} - W_t, Z_{t+1} - Z_t | \mathcal{F}_t) \\ = \; & \mathbb{E}\left[(W_{t+1} - W_t)(Z_{t+1} - Z_t) | \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[W_{t+1} - W_t | \mathcal{F}_t\right] \mathbb{E}\left[Z_{t+1} - Z_t | \mathcal{F}_t\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[(W_{t+1} - W_t)(Z_{t+1} - Z_t) | \mathcal{F}_t\right] = 0 \end{aligned}$$

Des Weiteren gehen wir ab jetzt von einem festen Claim $H \in \mathcal{L}^2(P)$ und einem Aktienpreisprozess X aus mit

$$X_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^d) \;\; \forall \; t$$

Kapitel 3

Verallgemeinerte Handelsstrategien

In diesem Kapitel wollen wir das Konzept der verallgemeinerten Handelsstrategien kennenlernen. Diese brauchen nicht mehr selbstfinanzierend sein, sondern sie erlauben, den Wert eines Claims durch Investition in das numeraire asset zu berichtigen. Der Claim besteht dann nicht mehr nur aus einer Anfangszahlung und einer Endzahlung, sondern auch aus Zahlungsströmen zu den einzelnen Perioden $t \leq T$. Wir werden sehen, wie ein quadratischer Hedgefehler für eine solche Strategie aussieht und dann die Handelsstrategie herausfiltern, die diesen Fahler minimiert. Solche lokal risikominimierenden Handelsstrategien existieren allerdings nicht immer, also werden wir auch Kriterien ermittelt, unter welchen Bedingungen sie einsetzbar sind.

Beginnen wir mit der Definition für die allgemeineren Handelsstrategien, die wir im Folgenden betrachten wollen:

Definition. Ein Paar (ξ^0, ξ) bestehend aus einem adaptierten Prozess $\xi^0 = (\xi^0_t)_{t=0,\ldots,T}$ und einem d-dimensionalen vorhersehbaren Prozess $\xi = (\xi_t)_{t=0,\ldots,T}$ heißt *verallgemeinerte Handelsstrategie*. Mit

$$V_0 := \xi^0_0 \text{ und } V_t := \xi^0_t + \xi_t \cdot X_t \quad \forall\, t \geq 1$$

wird dann der *diskontierte Werteprozess* V von (ξ^0, ξ) bezeichnet.
Die kumulierten Gewinne und Verluste einer solchen verallgemeinerten Handelsstrategie bis zum Zeitpunkt t, die man beim Investieren in das risky asset

erhält, sind dann durch

$$\sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})$$

gegeben und die kumulierten Kosten bis t durch

$$V_t - \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}).$$

Wir erhalten dadurch folgende

Definition. Zu einer verallgemeinerten Handelsstrategie (ξ^0, ξ) existiert immer ein *Gewinnprozess* G und ein *Kostenprozess* C. Diese sind definiert durch

$$G_0 := 0 \text{ und } G_t := \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \quad \text{für } t = 1, \dots, T$$

bzw

$$C_t := V_t - G_t \quad \text{für } t = 1, \dots, T$$

Definition. Eine verallgemeinerte Handelsstrategie (ξ^0, ξ) heißt $\mathcal{L}^2$*-zulässige Handelsstrategie* für einen Claim $H \in \mathcal{L}^2(P)$, wenn für ihren Werteprozess V und ihren Gewinnprozess G folgendes gilt:

$$V_T = H \quad P-\text{f.s. und } V_t \in \mathcal{L}^2(P) \quad \forall t$$

$$\text{und} \qquad G_t \in \mathcal{L}^2(P) \quad \forall t.$$

Kommen wir nun zu der lokalen Version eines quadratischen Hedgefehlers für eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie.

Definition. Der *lokale Risikoprozess* für eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie (ξ^0, ξ) ist definiert durch:

$$R_t^{loc}(\xi^0, \xi) := \mathbb{E}\left[(C_{t+1} - C_t)^2 | \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Eine *risikominimierende Handelsstrategie* ist eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$, für die für alle t gilt:

$$R_t^{loc}(\hat{\xi}^0, \hat{\xi}) \leq R_t^{loc}(\xi^0, \xi) \quad P-\text{f.s}$$

für jede $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie (ξ^0, ξ), deren Werteprozess $V_{t+1} = \hat{V}_{t+1}$ erfüllt.

Die Notwendigkeit der letzten Bedingung wird deutlich, wenn wir uns eine solche risikominimierende Handelsstrategie vom Zeitpunkt T an rückwärts konstruieren. Um in T eine solche für R^{loc}_{T-1} zu finden, müssen wir $\hat{\xi}^0_{T-1}$, $\hat{\xi}^0_T$,$\hat{\xi}_{T-1}$ und $\hat{\xi}_T$ bestimmen. Im Beweis den nächsten Satzes werden wir sehen, dass $\hat{\xi}^0_T, \hat{\xi}_T$ und $\hat{V}_{T-1}$ durch die Minimalität von R^{loc}_{T-1} bereits festgelegt sind. Es bleiben also nur noch $\hat{\xi}^0_{T-1}$ und $\hat{\xi}_{T-1}$ zu wählen. Diese müssen aus allen ξ^0_{T-1}, ξ_{T-1} mit $\xi^0_{T-1} + \xi_{T-1} \cdot X_{T-1} = V_{T-1}$ gewählt werden.

Wir halten nun den Claim $H \in \mathcal{L}^2(P)$ für den Rest des Vortrags fest und versuchen unter der Bedingung $V_T = H$ den quadratischen Hedgefehler zu minimieren. Dadurch liegen wir mit unserer verallgemeinerten Handelsstrategie recht nahe an einer Hedgingstrategie, die keine Investitionen in das numeraire asset benötigt.
Kommen wir erst zu einer Defintion, die einen passenden Ersatz für selbstfinanzierende Handelsstrategien bietet:

Definition. Eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie, deren Kostenprozess C ein P-Martingal ist, d.h. für die gilt

$$\mathbb{E}\left[C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t\right] = 0 \quad P-\text{f.s.} \quad \forall t,$$

heißt *durchschnittlich selbstfinanzierend.*

Mithilfe der dieser Eigenschaft und der starken Ortogonalität aus Kapitel 2 können wir nun folgenden wichtigen Satz formulieren, der uns Auskunft gibt, wann eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie risikominimierend ist.

Satz 1. *Eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie ist genau dann lokal risikominimierend, wenn sie durchschnittlich selbstfinanzierend und ihr Kostenprozess stark orthogonal zu X ist.*

Beweis. Sei (ξ^0, ξ) eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie. Dann gilt mit dem Verschiebungssatz für die (bedingte) Varianz:

$$R^{loc}_t(\xi^0, \xi) = var(C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}\left[C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t\right]^2$$

Zerlegen wir nun die rechte Seite, so fällt auf, dass:

$$
\begin{aligned}
& var(C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t) \\
= \quad & var(V_{t+1} - \sum_{k=1}^{t+1} \xi_k (X_k - X_{k-1}) - V_t + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_t) \\
= \quad & var(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t) - V_t|\mathcal{F}_t) \\
= \quad & var(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t) \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\,[C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t]^2 \\
= \quad & (\mathbb{E}\,[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \xi_{t+1}\mathbb{E}\,[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] - V_t)^2 \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Halten wir nun vorerst t und V_{t+1} fest und betrachten ξ_{t+1} und V_t als Parameter. Nun sollten wir konstatieren, dass man ξ_t^0 und ξ_t so abändern kann, dass V_t jeden gegebenen Wert annehmen kann, dass wir es dann immernoch mit einer $\mathcal{L}^2$-zulässigen Handelsstrategie zu tun haben und dass ξ_{t+1} und V_{t+1} beibehalten werden können. Das bedeutet, dass (3.1) durch eine etwaige Veränderung erhalten bleibt und damit, dass V_t notwendigerweise (3.2) minimieren muss, damit wir das optimale $\mathbb{R}_t^{loc}(\xi^0, \xi)$ bekommen. Da (3.2) als Funtion von V_t den Grad 2 besitzt und V_t^2 positives Vorzeichen hat, müssen wir also nur die Ableitung von (3.2) nach V_t annulieren, um (3.2) zu minimieren:

$$
\begin{aligned}
& ((\mathbb{E}\,[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \xi_{t+1} \cdot \mathbb{E}\,[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] - V_t)^2)' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 \cdot (\mathbb{E}\,[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \xi_{t+1} \cdot \mathbb{E}\,[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] - V_t) \cdot (-1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & V_t = \mathbb{E}\,[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \xi_{t+1} \cdot \mathbb{E}\,[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t]. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Analog ist (3.1) genau dann minimal, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
& (var(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t))' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\mathbb{E}\,[(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t))^2|\mathcal{F}_t] \\
& -\mathbb{E}\,[V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t]^2)' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}\,[2(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)) \cdot (-(X_{t+1} - X_t))|\mathcal{F}_t] \\
- \quad & 2 \cdot \mathbb{E}\,[V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)|F_t] \cdot (-1) \cdot \mathbb{E}\,[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & cov(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t), X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t) = 0. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

(3.3) ist nun äquivalent zu

$$
\mathbb{E}\,[C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\,[V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t] - V_t = 0
$$

((ξ^0, ξ) ist durchschnittlich selbstfinanzierend) Ist jetzt (3.3) gegeben, so ist

(3.4) äquivalent zu:

$$\mathbb{E}\left[(C_{t+1}-C_t)(X_{t+1}-X_t)|\mathcal{F}_t\right]=0 \quad \text{, denn}$$

$$\begin{aligned}
& cov(V_{t+1}-\xi_{t+1}\cdot(X_{t+1}-X_t), X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & cov(V_{t+1}-\xi_{t+1}\cdot(X_{t+1}-X_t)-V_t, X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & cov(C_{t+1}-C_t, X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[(C_{t+1}-C_t)(X_{t+1}-X_t)|\mathcal{F}_t\right]-\mathbb{E}\left[C_{t+1}-C_t|\mathcal{F}_t\right]\mathbb{E}\left[X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t\right]=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[(C_{t+1}-C_t)(X_{t+1}-X_t)|\mathcal{F}_t\right]=0
\end{aligned}$$

Also ist der Kostenprozess stark orthogonal zu X. Via Rückwärtsinduktion bzgl. t folgt nun die Behauptung. □

Dieser Beweis liefert uns eine Anleitung, wie wir eine risikominimierende Handelsstrategie konstruieren können:
Ist V_{t+1} gegeben, so minimieren wir

$$\mathbb{E}\left[(C_{t+1}-C_t)^2|\mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}\left[(V_{t+1}-(V_t+\xi_{t+1}\cdot(X_{t+1}-X_t)))^2|\mathcal{F}_t\right]$$

bzgl V_t und ξ_{t+1}.
Nehmen wir an, wir befinden uns in einem Marktmodell mit nur einem risky asset. Dann liefert folgendes rekursives Schema eine mögliche lokal risikominimierende Handelsstrategie:

$$\begin{aligned}
\hat{V_T} &:= H \\
\hat{\xi}_{t+1} &:= \frac{cov(\hat{V}_{t+1}, X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)}{var(X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)}\cdot 1_{\{var(X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)\neq 0\}} \\
\hat{V_t} &:= \mathbb{E}\left[\hat{V_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right]-\hat{\xi}_{t+1}\cdot\mathbb{E}\left[X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Warum ist das so? Die minimierende Bedingung (3.4) aus dem Beweis ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& cov(V_{t+1}, X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)-cov(\xi_{t+1}(X_{t+1}-X_t),(X_{t+1}-X_t)|\mathcal{F}_t)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & cov(V_{t+1}, X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)-\xi_{t+1}\cdot var(X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \xi_{t+1}=\frac{cov(V_{t+1}, X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)}{var(X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)}\cdot 1_{\{var(X_{t+1}-X_t|\mathcal{F}_t)\neq 0\}}
\end{aligned}$$

Die Definition von V_t folgt direkt aus (3.3)

Definieren wir uns außerdem noch ein $\hat{\xi}^0_t := \hat{V}_t-\hat{\xi}_t\cdot X_t$ erhalten wir eine verallgemeinerte Handelsstrategie $(\hat{\xi}^0,\hat{\xi})$ für dessen Endwert $\hat{V}_T=H$ gilt. Wir benötigen jetzt aber noch eine weitere Bedingung, die sicherstellt, dass diese Konstruktion eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie liefert. Das führt uns zu:

Satz 2. *In einem Marktmodell mit nur einem risky asset, in dem eine Konstante C existiert mit*

$$(\mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq C \cdot var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_t) \quad P-f.s.\ \forall\ t$$

definiert obige Rekursion eine lokal risikominimierende Handelsstrategie $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$. Diese Bedingung heißt die Bedingung des Bounded mean-variance trade-off.

Beweis. Wie bereits erwähnt ist nur noch zu zeigen, dass $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Handelsstrategie ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ [(\hat{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1}))^2] \\
= \ & \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2} \cdot \mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}] \cdot 1_{\{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0\}}] \\
= \ & \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})} \cdot \frac{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}]}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})} \cdot 1_{\{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0\}}] \\
= \ & \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})} \cdot 1_{\{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0\}} \\
\cdot \ & \frac{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}]}{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]^2}] \\
= \ & \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})} \cdot 1_{\{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0\}} \\
\cdot \ & (1 + \frac{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}]}{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]^2} \\
- \ & \frac{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]^2}{\mathbb{E}\ [(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]^2})] \\
= \ & \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})} \cdot (1 + \frac{\mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]^2}{var((X_t - X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}])}) \\
\cdot \ & 1_{\{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_t) \neq 0\}}] \\
\leq \ & \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})} \cdot (1 + C)] \\
= \ & (1 + C) \cdot \mathbb{E}\ [\frac{cov(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})^2}{var(X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_{t-1})}] \\
\leq \ & (1 + C) \cdot \mathbb{E}\ [var(\hat{V}_t|\mathcal{F}_{t-1})].
\end{aligned}$$

Ist $\hat{V}_t$ quadratintegrierbar so ist der letzte Ausdruck endlich und damit ist $\hat{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P)$ und damit dann $\hat{V}_{t-1} \in \mathcal{L}^2(P)$. Durch Rückwärtsinduktion folgt die $\mathcal{L}^2$-Zulässigkeit und aus der Konstruktion direkt die Risikominierung und die Eindeutigkeit. □

Kehren wir nun zurück zum Fall eines Marktmodells mit mehreren risky assets. Also $X = (X^1, \dots, X^d)$.
Wann existiert eine lokal risikominimierende Handelsstrategie?
Wir bringen nun die Existenz einer Risikominimierenden Handelsstrategie in Verbindung mit einer Zerlegung für den Claim H.

Korollar 1. Zu einem Claim H existiert genau dann eine lokal risikominimierende Handelsstrategie, wenn folgendes gilt: H besitzt eine Zerlegung

$$H = c + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + L_T \quad P - \text{f.s.} \quad \text{mit}$$

c ist eine Konstante,
ξ ist ein d-dimensionaler previsibler Prozess mit

$$\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P) \quad \forall t$$

und L ist ein quadratintegrierbares P-Martingal und stark orthogonal zu X mit $L_0 = 0$
Wenn dies der Fall ist, ist die risikominimierende Handelsstrategie $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ gegeben durch $\hat{\xi} = \xi$ und einen adaptierten Prozess $\hat{\xi}^0$ mit

$$\hat{\xi}_0^0 = c \quad \text{und} \quad \hat{\xi}_t^0 = c + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t - \xi_t \cdot X_t \quad \text{für} \quad t = 1, \dots, T$$

Weiter ist die Zerlegung eindeutig, d.h. c und L sind eindeutig bestimmt.

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ eine risikominimierende Handelsstrategie mit Kostenprozess $\hat{C}$. Dann folgt aus Satz 1, dass $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ durchschnittlich selbstfinanzierend (also $\hat{C}$ ein P-Martingal) ist und $\hat{C}$ stark orthogonal zu X ist. Nun ist $L_T := \hat{C}_t - \hat{C}_0$ ebenfalls stark orthogonal zu X und es gilt:

$$\mathbb{E}\left[L_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\hat{C}_t - \hat{C}_0|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\hat{C}_t|\mathcal{F}_s\right] - \hat{C}_0 = \hat{C}_s - \hat{C}_0 = L_s$$

Also ist L ein P-Martingal.

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{V}_T = \hat{C}_T + \hat{G}_T = L_T + \hat{C}_0 + \hat{G}_T = \hat{C}_0 + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + L_T$$

" $\Leftarrow$ " $\exists$ eine Zerlegung $H = c + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + L_T$

Betrachte $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$. Der Kostenprozess ist dann:

$$\begin{aligned} &\hat{C}_t = V_t - G_t \\ = \quad & \hat{\xi}^0_t + \hat{\xi}_t \cdot X_t - G_t \\ = \quad & c + \sum_{s=1}^{t} \hat{\xi}_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t - \hat{\xi}_t \cdot X_t + \hat{\xi}_t \cdot X_t - \sum_{s=1}^{t} \hat{\xi}_s \cdot (X_s - X_{s-1}) \\ = \quad & c + L_t \end{aligned}$$

Da L ein P-Martingal und stark orthogonal zu X ist, gilt dies auch für $\hat{C} = c+L$. Mit Satz 1 folgt dann, dass $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ lokal risikominimierende Handelsstrategie ist. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen:
Sei dafür durch $\tilde{\xi}$, $\tilde{c}$ und $\tilde{L}$ eine weitere Zerlegung von H gegeben:

$$H = \tilde{c} + \sum_{t=1}^{T} \tilde{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + \tilde{L}_T$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} N_t \quad := \quad & \hat{C} - \tilde{\hat{C}} = c - \tilde{c} + L_t - \tilde{L}_t \\ = \quad & H - \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) - (H - \sum_{s=1}^{t} \tilde{\xi}_s (X_s - X_{s-1})) \\ = \quad & \sum_{s=1}^{t} (\tilde{\xi}_s - \xi_s)(X_s - X_{s-1}) \end{aligned}$$

ist quadratintegrierbares P-Martingal und stark orthogonal zu X und kann als stochastisches Integral aufgefasst werden. Starke Orthogonalität heißt dann:

$$0 = \mathbb{E}\left[(\tilde{\xi}_t - \xi_t)(X_t - X_{t-1})(X_t - X_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \mathbb{E}\left[((\tilde{\xi}_t - \xi_t)(X_t - X_{t-1}))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

Also ist

$$\begin{aligned} N_t - N_{t-1} \quad = \quad & \sum_{s=1}^{t} (\tilde{\xi}_s - \xi_s)(X_s - X_{s-1}) - \sum_{s=1}^{t-1} (\tilde{\xi}_s - \xi_s)(X_s - X_{s-1}) \\ = \quad & (\tilde{\xi}_t - \xi_t)(X_t - X_{t-1}) \quad P - \text{f.s.} \end{aligned}$$

Es gilt also: $N_t = N_{t-1} \quad P-$f.s.

$$\Leftrightarrow c - \tilde{c} + L_t - \tilde{L}_t = c - \tilde{c} + L_{t-1} - \tilde{L}_{t-1} \quad P-\text{f.s.}$$

$$\Leftrightarrow L_t - \tilde{L}_t = L_{t-1} - \tilde{L}_{t-1} \quad P-\text{f.s.}$$

Da $\tilde{L}_0 = 0 = L_0$, folgt induktiv $L = \tilde{L}$ und dann auch $c = \tilde{c}$ $\square$

Kapitel 4

Die Kunita-Watanabe Zerlegung

Kommen wir nun zur Kunita-Watanabe Zerlegung. Diese liefert uns eine Zerlegung für Martingale in ähnlicher Form wie Korollar 1 für den Fall, dass das zugrunde liegende Maß P ein Mrtingalmaß ist. Doch zuerst ein paar einleitende Definitionen.

Definition. Wir bezeichnen nun den Raum aller quadratintegrierbaren P-Martingale mit $\mathcal{H}^2$. Jedes $M \in \mathcal{H}^2$ kann jetzt durch $M_t = \mathbb{E}\left[M_T | \mathcal{F}_t\right]$ mit seinem Endewert $M_T \in \mathcal{L}^2(P)$ identifiziert werden. Wenn wir nun P-f.s. gleiche Zufallsvariablen identifizieren, wird $\mathcal{H}^2$ zu einem Hilbertraum, der zu $L^2(P)$ isomorph ist. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}^2$ wird definiert durch:

$$(M, N)_{\mathcal{H}^2} := \mathbb{E}\left[M_T N_T\right], \quad M, N \in \mathcal{H}^2$$

Definition. Sein $\mathcal{S} \in \mathcal{H}^2$ ein Unterraum, dann heißt $\mathcal{S}$ stabil, wenn für jedes $M \in \mathcal{S}$ und jede Stopzeit τ gilt: $M^\tau \in \mathcal{S}$.
Hierbei bezeichnet $M_t^\tau := M_{\min(\tau,t)}, \quad t = 0, \ldots, T$

Korollar 2. Sei $\mathcal{S}$ stabiler Unterraum von $\mathcal{H}^2$ und $L \in \mathcal{H}^2$ mit $L_0 = 0$. Dann sind äquivalent:

(i) L ist orthogonal zu $\mathcal{S}$, also

$$(L, M)_{\mathcal{H}^2} = 0 \quad \forall\ M \in \mathcal{S}$$

(ii) L ist stark orthogonal zu $\mathcal{S}$, also es gilt $\forall\ M \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{E}\left[(L_{t+1} - L_t)(M_{t+1} - M_t)|\mathcal{F}_t\right] = 0 \quad P-\text{f.s.} \forall\ t$$

(iii) $\forall\ M \in \mathcal{S}$ ist LM ein Martingal.

Beweis. Aus

$$\mathbb{E}\left[(M_{t+1} - M_t)(N_{t+1} - N_t)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[M_{t+1}N_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] - M_t N_t$$

folgt direkt die Äquivalenz von (ii) und (iii) sogar unabhängig vom Unterraum. Für (i) $\Leftrightarrow$ (iii) zeigen wir, dass LM für festes $M \in \mathcal{S}$ genau dann ein Martingal ist , wenn $(L, M^\tau)_{\mathcal{H}^2} = 0$ für alle Stopzeiten $\tau \leq T$. Mit Lemma 7 (im Anhang) folgt dann:

$$(L, M^\tau)_{\mathcal{H}^2} = \mathbb{E}\left[L_T M_T^\tau\right] = \mathbb{E}\left[L_T M_\tau\right] = \mathbb{E}\left[L_\tau M_\tau\right]$$

Nun gilt mit Lemma 8:

$$\begin{aligned} & LM \text{ Martingal} \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[LM_{\min(T,\tau)}\right] = L_0 M_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (L, M^\tau)_{\mathcal{H}^2} = \mathbb{E}\left[L_\tau M_\tau\right] = 0 \quad \forall\ \tau \leq T \end{aligned}$$

□

Jetzt sind wir bereit für den Beweis der Existenz der *Kunita-Watanabe Zerlegung* für diskrete Zeit:

Satz 3. *Sei X ein quadratintegrierbares P-Martingal, also P ein Martingalmaß. Dann lässt sich jedes Martingal $M \in \mathcal{H}^2$ darstellen als:*

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t \quad ,$$

wobei ξ ein d-dimensionaler vorhersehbarer Prozess ist mit $\xi \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P)\ \forall\ t$, L ein quadratintegrierbares P-Martingal und stark orthogonal zu X ist und $L_0 = 0$ genügt.
Dieses Zerlegung ist eindeutig, d.h. L ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei

$$\chi := \{ \xi \mid \xi \text{ ist } d\text{-dim. vorhersehb. Prozess mit } \xi_t(X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P) \ \forall\ t\}$$

und als entsprechender Gewinnprozess

$$G_t(\xi) := \sum_{s=1}^{t} \xi_s(X_s - X_{s-1}) \quad t = 0, \ldots, T$$

Dann ist für $\xi \in \chi$ $G(\xi)$ quadratintegrierbares P-Martingal, denn nach Defintion gilt $\xi_t(X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P)$ und nach Voraussetzung ist $(X_t - X_{t-1})$ ein P-Martingal, was uns liefert:

$$\mathbb{E}\ [G_t(\xi) - G_{t-1}(\xi)|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}\ [\xi_t(X_t - X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}] = \xi_t \cdot \mathbb{E}\ [X_t - X_{t-1}|F_{t-1}] = 0$$

Damit ist $\mathcal{G}$ als der Raum aller dieser Gewinnprozessen linaerer Teilraum von $\mathcal{H}^2$ (Linearität ist klar). Da $\mathcal{H}^2$ isomorph zu $L^2(P)$ ist, in dem die Gewinnprozesse einen abgeschlossenen Unterraum darstellen, ist auch $\mathcal{G}$ abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}^2$. Die wichtigste Eigenschaft ist aber, dass $\mathcal{G}$ stabil ist:
Sei $\xi \in \chi, \tau$ eine Stopzeit. Dann gilt:

$$G_{min(t,\tau)}(\xi) = \sum_{s=1}^{min(t,\tau)} \xi_s(X_x - X_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot I_{\{s \leq \tau\}}(X_s - X_{s-1}) = G_t(\tilde{\xi}_s) \in \mathcal{G}$$

für $\tilde{\xi}_s := \xi_s \cdot I_{\{s\leq\tau\}}$ $\tilde{\xi}$ ist $\in \chi$, weil gilt:

$$\mathbb{E}\ [(\tilde{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1}))^2] \leq \mathbb{E}\ [(\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}))^2] < \infty$$

Nun machen wir uns diese Reihe von Eigenschaften von $\mathcal{G}$ zunutze: Da $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist, könne wir mit den üblichen Verfahren im Hilbertraum orthogonale Projektionen auf $\mathcal{G}$ bilden. Sei nun also N das Ergebnis der orthogonalen Projektion von $M - M_0$ auf $\mathcal{G}$ für $M \in \mathcal{H}^2$. Dann ist $N \in \mathcal{G}$ und $L := M - M_0 - N$ ist orthogonal zu $\mathcal{G}$.
Korollar 2 sagt uns nun, dass in stabilen Unterräumen Orthogonalität im hilbertschen Sinne mit starker Orthogonalität übereinstimmt, dass also L stark orthogonal zu $\mathcal{G}$ ist. Dann gilt $\forall\ G(\xi) \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ [(L_{t+1} - L_t)(G_{t+1}(\xi) - G_t(\xi))|\mathcal{F}_t] = 0 \ \forall\ t \\
\Rightarrow\ & \mathbb{E}\ [(L_{t+1} - L_t)(\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t))|\mathcal{F}_t] = 0 \ \forall\ t \\
\Rightarrow\ & \xi_{t+1} \cdot \mathbb{E}\ [(L_{t+1} - L_t)(X_{t+1} - X_t)|\mathcal{F}_t] = 0 \ \forall\ t, \text{ da } \xi_{t+1} \ \ \mathcal{F}_t - \text{messbar ist} \\
\Rightarrow\ & L \text{ stark orthogonal zu } X
\end{aligned}$$

Damit ist $M = M_0 + N + L$ die gesuchte Zerlegung. Die Eindeutigkeit folgt analog zu der in Korollar 1. $\square$

Das bedeutet nun, dass, wenn wir unter einem Martingalmaß arbeiten, für jeden Claim eine eindeutige lokal risikominimierende Handelsstrategie existiert und wir sogar wissen, wie diese aussieht.
Für den Werteprozess $\hat{V}$ gilt eindeutig $V_t = \mathbb{E}\left[H|\mathcal{F}_t\right] \forall\, t$ und der Kostenprozess ist gegeben durch:

$$C_t = V_t - G_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t - \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1} = V_0 - L_t$$

Aus der Darstellung des Werteprozesses wird deutlich, dass dieser den arbitragefreien Preisprozess für den Claim darstellt.
Was tun wir aber, wenn jetzt P kein Martingalmaß ist? Existiert dann ein äquivalentes Martingalmaß $\hat{P}$, sodass

$$\hat{\mathbb{E}}\left[H|\mathcal{F}_t\right] = V_t \ ?$$

Und wie könnte dieses aussehen? Diesen Fragen widmen wir uns im nächsten Kapitel.

Kapitel 5

Das Minimale Martingalmaß

Definition. Ein *minimales Martingalmaß* ist ein äquivalentes Martingalmaß $\hat{P} \in \mathcal{P}$ für das folgende 2 Bedingungen gelten:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\hat{P}}{dP}\right)^2\right] < \infty$$

$$\forall\ M \in \mathcal{H}^2 \text{ und } M \text{ stark orthogonal zu } X \text{ gilt} : P \text{ ist } \hat{P} - \text{Martingal.}$$

Woher wissen wir nun, dass die vorher gestellte Bedingung für dieses minimale Martingalmaß zutrifft, sofern es überhaupt existiert? Gilt also für ein minimales Martingalmaß $\hat{P}$ und den Werteprozess $\hat{V}$ einer lokal risikominimierenden Handelsstrategie

$$\hat{V}_t = \hat{\mathbb{E}}\ [H|\mathcal{F}_t]\ \forall\ t = 0, \ldots, T.\ ?$$

Antwort: Ja, denn: Benutzen wir Korollar 1 für unseren Claim H, so erhalten wir:

$$H = c + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + L_T$$

und damit

$$\hat{V}_t = c + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t.$$

$\xi_s \cdot (X_s - X_{s-1})$ und $\frac{d\hat{P}}{dP}$ sind bzgl P quadratintegrierbar, also gilt: $\xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) \in \mathcal{L}^1(\hat{P})$ Wir wissen außerdem von dem Prozess L, dass er laut Definition der Zerlegungen ein zu X stark orthogonales quadratintegrierbares P-Martingal ist. Da $\hat{P}$ minimales Martingalmaß ist, ist L auch ein $\hat{P}$-Martingal.

$\hat{V}$ ist also auch $\hat{P}$-Martingal und mit $\hat{V}_T = H$ folgt, dass das oben definierte Maß die Bedingung, für die es definiert wurde, erfüllt, sofern es existiert.

5.1 Martingale unter Maßwechseln

Wir wollen nun die Eigenschaften und Charakteristiken solcher minimalen Martingalmaße näher betrachten, um Voraussetzungen für dessen Existenz zu erlangen. Dazu müssen wir uns zunächst ansehen, wie sich äquivalente Maßwechsel auf Martingale auswirken:

Lemma 4. *Sei $\tilde{P}$ ein zu P äquivaltes Wahrscheinlichkeitsmaß und $\tilde{M}$ ein adaptierter Prozess bzgl $\tilde{P}$. Dann gilt:*
$\tilde{M}$ ist ein $\tilde{P}$-Martingal $\Leftrightarrow \tilde{M}_t \cdot \mathbb{E}\ \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right], t = 0, \ldots, T$ ist ein P-Martingal

Beweis. Für den Beweis des Lemmas benötigen wir ein weiteres Lemma, welches wir hier aber nicht beweisen wollen:

Lemma 5 (Lemma*)**.** *Für zwei Maße P und Q gelte $Q << P$ bzgl einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ mit der Dichte μ. Für jedes $\mathcal{F}$-messbare $M \geq 0$ gilt dann:*

$$\mathbb{E}_P\ [\mu|\mathcal{F}_0] \cdot \mathbb{E}_Q\ [M|F_0] = \mathbb{E}\ [M \cdot \mu|\mathcal{F}_0] Q - f.s.$$

Nun zum Beweis obigen Lemmas: Definieren wir zuerst den bedingten Erwartungsprozess der Dichte von $\tilde{P}$ bzgl P:

$$\mathbb{E}\ \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right] =: Z_t.$$

Dieser Prozess Z ist P-f.s. strikt positiv, da $\tilde{P}$ äquivalent zu P ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P\ [\tilde{M} \cdot Z_t] = \mathbb{E}_P\ \left[\tilde{M} \cdot \mathbb{E}\ \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}_P\ [\tilde{M}] \cdot \mathbb{E}_P\ \left[\mathbb{E}\ \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right]\right] \\ = \mathbb{E}_P\ \left[\tilde{M} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dP}\right] = \mathbb{E}_{\tilde{P}}\ [\tilde{M}] \end{aligned}$$

Also: $\tilde{M}_t \in \mathcal{L}^1(\tilde{P}) \Leftrightarrow \tilde{M}_t Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$. Nun können wir Lemma* anwenden, welches folgendes Resultat liefert:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_P \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right] \cdot \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|F_t\right] = \mathbb{E}_P \left[\tilde{M}_{t+1} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{Z}_t \cdot \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|F_t\right] = \mathbb{E}_P \left[\tilde{M}_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] \cdot \mathbb{E}_P \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{Z}_t \cdot \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|F_t\right] = \mathbb{E}_P \left[\tilde{M}_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] \cdot \mathbb{E}_P \left[\mathbb{E}_P \left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_{t+1}\right]|\mathcal{F}_t\right] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{Z}_t \cdot \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|F_t\right] = \mathbb{E}_P \left[\tilde{M}_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] \cdot \mathbb{E}_P \left[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{Z}_t \cdot \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|F_t\right] = \mathbb{E}_P \left[\tilde{M}_{t+1} \cdot Z_{t+1}|\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = \tilde{M}_t \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{Z}_t \cdot \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{Z}_t \cdot \tilde{M}_t \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\tilde{M}_{t+1} Z_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{Z}_t \cdot \tilde{M}_t
\end{aligned}$$

□

Lernen wir nun ein Martingal kennen, welches im Folgenden noch sehr wichtig ist, da es eine Zerlegung für den erwarteten Dichteprozess von zwei zueinander äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen liefert:

Korollar 3. Sei $\tilde{P}$ ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann existiert ein P-Martingal Λ mit

$$\Lambda_0 = 1 \tag{5.1}$$

$$\Lambda_{t+1} - \Lambda_t > -1 \ P - \text{f.s.} \ \ \forall \ t \tag{5.2}$$

und derart, dass für das Dichte-Martingal $Z_t = \mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right], \ t = 0, \ldots, T$ auch folgende Darstellung existiert:

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t}(1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}), t = 0, \ldots, T$$

Diese Darstellung bezeichnen wir im Folgenden als die "$*$-Darstellung".
Es gilt auch die Umkehrung, d.h. erfüllt ein P-Martingal Λ (5.1) und (5.2) und liefert für das P-Martingal Z die $*$-Darstellung , so definiert $d\tilde{P} := Z_T \ dP$ ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis. "$\Rightarrow$"
Sei $\tilde{P}$ äquivalent zu P. Dann definieren wir Λ wie vorgegeben mit $\Lambda_0 = 1$ und ansonsten durch

$$\Lambda_t := \Lambda_{t-1} + \frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}} \text{ für } t = 1, \dots, T.$$

Gelten nun auch (5.2) und die $*$-Darstellung?
$*$-Darstellung:

$$\begin{aligned}
& Z_t = (\Lambda_t - \Lambda_{t-1}) \cdot Z_{t-1} + Z_{t-1} \\
\Rightarrow \quad & Z_t = (1 + \Lambda_t - \Lambda_{t-1}) \cdot Z_{t-1} \\
\Rightarrow \quad & Z_t = (1 + \Lambda_t - \Lambda_{t-1})(1 + \Lambda_{t-1} - \Lambda_{t-2}) \cdot Z_{t-2} \\
\dots & \\
\Rightarrow \quad & Z_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}) \cdot Z_0 \\
\Rightarrow \quad & Z_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1})
\end{aligned}$$

(5.2):
Da $\tilde{P}$ und P äquivalent sind, gilt für die erwartete Dichte $Z_t > 0 \ \forall \ t$ und mit der $*$-Darstellung:

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=1}^{t} (1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}) > 0 \ \forall \ t \\
\Rightarrow \quad & 1 + \Lambda_t - \Lambda_{t-1} > 0 \ \forall \ t \\
\Rightarrow \quad & \Lambda_t - \Lambda_{t-1} > -1
\end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir noch zeigen, dass Λ ein Martingal ist. Also zuerst, dass $\Lambda_t \in \mathcal{L}^1(P)$.
Beweis per Induktion:
I.A.: $t = 0$: Folgt aus Definition
I.V.: Sei $\Lambda_t \in \mathcal{L}^1(P)$.
I.S.: Da $Z \geq 0$ existiert $\mathbb{E}\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t} | F_t\right]$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t} | F_t\right] = \frac{1}{Z_t} \cdot \mathbb{E}\left[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t\right] = 1, \text{ da } Z \text{ Martingal} \\
\Rightarrow \quad & \frac{Z_{t+1}}{Z_t} \in \mathcal{L}^1(P) \\
\Rightarrow \quad & \Lambda_{t+1} = \Lambda_t + \frac{Z_{t+1} - Z_t}{Z_t} = \Lambda_t + \frac{Z_{t+1}}{Z_t} - 1 \in \mathcal{L}^1(P)
\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass Λ die Martingalseigenschaft erfüllt:
Da Z ein Martingal ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = Z_t &\Leftrightarrow \frac{1}{Z_t}\cdot\mathbb{E}\left[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = 1,\ \text{da } Z_t > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t} - 1|\mathcal{F}_t\right] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\Lambda_{t+1} - \Lambda_t|\mathcal{F}_t\right] = 0. \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"
Es existiere ein solches P-Martingal Λ. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}\right] = \mathbb{E}\ \mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[Z_t\right] = Z_0 = 1$$

Also sind P und $\tilde{P}$ äquivalent. □

Schauen wir uns nun an, was mit einem Martingal M geschieht, wenn wir vom zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß P zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ wechseln.
Im Allgemeinen wird M unter $\tilde{P}$ kein Martingal mehr sein, sodass wir, wenn wir M mithilfe der Doob-Zerlegung darstellen, einen nicht-trivialen vorhersehbaren Prozess $(A_t)_{t=1,\dots,T}$ erhalten:

$$M = \tilde{M} + A \quad \text{bzw} \quad \tilde{M} = M - A$$

für ein eindeutig festgelegtes $\tilde{P}$-Martingal $\tilde{M}$.
Das folgende Korollar erlaubt uns, diesen Prozess A mit dem in der $*$-Darstellung auftretenden Prozess Λ darzustellen.

Korollar 4. Seien P und $\tilde{P}$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße und sei weiter Λ das in der $*$-Darstellung des Dichteprozesses $Z_t = \mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t\right]$ auftretende P-Martingal. Dann gilt:
Ist $\tilde{M}$ ein $\tilde{P}$-Martingal, sodass $\tilde{M}_t$ integrierbar ist für alle t, so ist

$$M_t := \tilde{M}_t + \sum_{s=1}^{t}\mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(\tilde{M}_s - \tilde{M}_{t-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right]$$

ein P-Martingal.

Beweis. Zu allererst sollten wir bemerken, dass

$$(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) = \left(\frac{\prod_{s=1}^{t} (1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1})}{\prod_{s=1}^{t-1} (1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}} - 1 \right) (\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1})$$

$$= \left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}} - 1 \right) (\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1})$$

$$= \frac{1}{Z_{t-1}} \cdot (Z_t \cdot (\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1})) - (\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) \tag{5.3}$$

Nach Lemma 4 ist nun aber $Z_t \cdot (\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1})$ ein Martingalzuwachs und integrierbar.
Definieren wir nun $\tau_n := min(\ inf\{ \ t \ | \ Z_t < \frac{1}{n}\} \ , \ T \ )$ für n$\geq$ 2, so gilt $(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) \cdot I_{\{\tau_n \geq t\}} \ \in \ \mathcal{L}^1(P)$. Speziell sind alle bedingten Erwartungswerte, die im Laufe dieses Korollars auftreten P-f.s. wohldefiniert.
Mit (5.3) gilt nun mit unserer Schlussfolgerung zu Beginn des Beweises auf $\{\tau_n \geq t\}$ P-f.s. die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ [\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] \\
= \ & \mathbb{E}\ \left[\frac{1}{Z_{t-1}} Z_t(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) - (\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
= \ & \frac{1}{Z_{t-1}} \cdot \mathbb{E}\ [Z_t(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}\ [(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] \\
= \ & -\mathbb{E}\ [(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}], \\
& \text{da } Z_t(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) \text{ Martingalzuwachs ist.}
\end{aligned}$$

Zeigen wir nun damit, dass M ein P-Martingal ist:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ [M_t - M_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] \\
= \ & \mathbb{E}\ [[(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) + \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\ [(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | F_{s-1}] \\
& - \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{E}\ [(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{s-1}] \ | \mathcal{F}_{t-1}] \\
= \ & \mathbb{E}\ [\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] + \mathbb{E}\ [\mathbb{E}\ [(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] \ | \mathcal{F}_{t-1}] \\
= \ & -\mathbb{E}\ [(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] + \mathbb{E}\ [(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\tilde{M}_t - \tilde{M}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}] \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

□

Da wir gerade nicht notwendigerweise unter Martingalmaßen arbeiten, ist auch der diskontierte Preisprozess X kein Martingal. Daher macht es durchaus Sinn, sich die Doob-Zerlegung des Aktienpreisprozesses X unter P anzusehen. Diese ist

$$X = Y + B,$$

wobei $(B_t)_{t=1,\dots,T}$ ein d-dimensionaler vorhersehbarer Prozess und Y ein d-dimensionales P-Martingal ist.
Führen wir nun einen äquivalenten Maßwechsel von P nach P^* durch, so können wir mit Korollar 4 an der Form des Prozesses B feststellen, ob X ein P^*-Martingal ist, also ob P^* ein Martingalmaß ist. Also:

Korollar 5. Seien P^* und P äquivalent, sodass für jedes t $\mathbb{E}^* [|X_t|] < \infty$ gilt. Sei weiter Λ wie bisher der aus der $*$-Darstellung von Z bekannte Prozess.
Dann ist P^* genau dann ein äquivalentes Martingalmaß, wenn für den Prozess B aus obiger Doob-Zerlegung von X bzgl P gilt:

$$B_t = -\sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(Y_s - Y_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right] = -\sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(X_s - X_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right]$$

P-f.s. für alle $t = 0, \dots, T$.

Beweis. "$\Rightarrow$"
Sei also P^* ein äquivalentes Martingalmaß, so folgt mit Korollar 4 aus

$$Y_t = X_t + \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(X_s - X_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right] \text{ und } X_t = Y_t + B_t$$

direkt

$$B_t = -\sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(X_s - X_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right]$$

und analog

$$B_t = -\sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(Y_s - Y_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right]$$

"$\Leftarrow$"
Betrachten wir zuerst mit $X = Y^* + B^*$ die Doob-Zerlegung von X bzgl P^* mit dem P^*-Martingal Y^* und dem vorhersehbaren Prozess $(B_t^*)_{t=1,\dots,T}$. Bemühen wir wieder Korollar 4, so bildet nun

$$\tilde{Y}_t^* := Y_t^* + \tilde{B}_t^*$$

mit $\tilde{B}_t^* := \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(Y_s - Y_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right] = -B_t$ ein P-Martingal.

Es ist $Y = X - B = Y^* + B^* - B$ ein P-Martingal. Mit der Doob-Zerlegung von Y^* bzgl. P folgt $Y^* = Y + B - B^*$. Also

$$Y + B - B^* = Y^* = \tilde{Y}^* - \tilde{B}^* = \tilde{Y}^* + B$$

Da die Doob-Zerlegung eindeutig ist, gilt dann $B^* = 0$. Damit ist $X = Y^*$ ein P^*-Martingal und folglich P^* ein Martingalmaß. □

5.2 Das minimale Martingalmaß

Nachdem wir nun gesehen haben, wie wir äquivalente Martingalmaße identifizieren können, wollen wir nun herausfinden, wann ein solches äquivalentes Martingalmaß minimal ist. Die Antwort darauf liefert

Korollar 6. Sei $\hat{P} \in \mathcal{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß mit quadratintegrierbarer Dichte $\frac{d\hat{P}}{dP}$. Dann gilt:

$\hat{P}$ ist minimales Martingalmaß $\Leftrightarrow$ Λ aus der $*-$Darstellung besitzt eine Darstellung
$\Lambda_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}), t = 0, \ldots, T$
wobei Y dem P-Martingal in der Doob-von X entspricht und λ ein d-dimensionaler Prozess ist.

Beweis. "$\Leftarrow$"
Λ aus der $*$-Darstellung besitze selbst eine Darstellung

$$\Lambda_t = 1 + \sum_{s=1}^{1} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}), t = 0, \ldots, T$$

mit Y und λ wie oben.
Sei nun $M \in \mathcal{H}^2$ stark orthogonal X. Dann müssen wir zeigen, dass M auch ein $\hat{P}$-Martingal ist und dann ist $\hat{P}$ per Definition ein minimales Martingalmaß.
Betrachten wir zunächst MZ mit $Z_t := \mathbb{E}\,[\frac{d\hat{P}}{dP}|\mathcal{F}_t]$.
Da M und Z quadratintegrierbar sind, folgt sofort, dass $M_t Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$.
Nun definieren wir Stopzeiten

$$\tau_n := inf\{\ t \geq 0 \mid |\lambda_{t+1}| > n\ \}$$

und die zugehörigen P-Martingale

$$\Lambda^{\tau_n} := \Lambda \text{ in } \tau_n \text{ gestoppt.}$$

Da X quadratintegrierbar ist, folgt mit der Jensenschen Ungleichung für Erwartungswerte, dass $\mathbb{E}\ [|Y_t|^2] < \infty\ \forall\ t$. Dann ist aufgrund der Darstellung aus der Voraussetzung insbesondere auch $M\Lambda^{\tau_n}$ integrierbar.
Außerdem folgt aus der starken Orthogonalität von M und Y (diese folgt direkt aus der starken Orthogonalität von M und X) und mit Korollar 2, dass MY ein d-dimensionales P-Martingal ist.
Die entsprechende Äquivalenz in Korollar 2 gilt, wie im Beweis beschrieben, auch unabhängig von stabilen Unterräumen.
Dadurch gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ [M_{t+1} \cdot (\Lambda^{\tau_n}_{t+1} - \Lambda^{\tau_n}_t)|\mathcal{F}_t] \\
= \;& \mathbb{E}\ [M_{t+1} \cdot [I_{\{t+1 \le \tau_n\}} \cdot (1 + \sum_{s=1}^{t+1} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) \\
- \;& I_{\{t \le \tau_n\}} \cdot (1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}))]|\mathcal{F}_t] \\
= \;& \mathbb{E}\ \left[M_{t+1} \cdot \left[I_{\{t \le \tau_n\}} \cdot \left[(1 + \sum_{s=1}^{t+1} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) - (1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}))\right]\right] |\mathcal{F}_t\right] \\
= \;& \mathbb{E}\ \left[M_{t+1} \cdot \left[I_{\{t+1 \le \tau_n\}} \cdot \lambda_{t+1} \cdot (Y_{t+1} - Y_t)\right] |\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

und mit der Vorhersehbarkeit von λ

$$\begin{aligned}
= \;& I_{\{t+1 \le \tau_n\}} \cdot \lambda_{t+1} \cdot [\mathbb{E}\ [M_{t+1} Y_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}\ [M_{t+1} Y_t|\mathcal{F}_t]] \\
= \;& I_{\{t+1 \le \tau_n\}} \cdot \lambda_{t+1} \cdot [M_t Y_t - \mathbb{E}[M_{t+1} Y_t|\mathcal{F}_t] \cdot Y_t] \\
= \;& I_{\{t+1 \le \tau_n\}} \cdot \lambda_{t+1} \cdot (M_t Y_t - M_t Y_t) = 0
\end{aligned}$$

Die Indikatorfunktion macht hier deutlich, wann der obige Ausdruck überhaupt Sinn ergibt.
Für $Z^{\tau_n}_t := \prod_{s=1}^{t} (1 + \Lambda^{\tau_n}_s - \Lambda^{\tau_n}_{s-1})$ quadratintegrierbar gilt nun:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\ [M_{t+1} Z^{\tau_n}_{t+1}|\mathcal{F}_t] \\
= \;& \mathbb{E}\ [M_{t+1} \cdot (Z^{\tau_n}_t \cdot (1 + \Lambda^{\tau_n}_{t+1} - \Lambda^{\tau_n}_t)|\mathcal{F}_t] \\
= \;& Z^{\tau_n}_t \cdot \mathbb{E}\ [M_{t+1}(1 + \Lambda^{\tau_n}_{t+1} - \Lambda^{\tau_n}_t)|\mathcal{F}_t] \\
= \;& Z^{\tau_n}_t \cdot \mathbb{E}\ [M_{t+1}|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[M_{t+1}(\Lambda^{\tau_n}_{t+1} - \Lambda^{\tau_n}_t)|\mathcal{F}_t] \\
= \;& Z^{\tau_n}_t \cdot M_t
\end{aligned}$$

Also ist $Z^{\tau_n}M$ ein P-Martingal $\forall\ n$. Wenn wir jetzt das Optional Sampling Theorem benutzen können, so liefert es, dass $(Z^{\tau_n}M)^{\tau_n} = (ZM)^{\tau_n}$ ein P-Martingal ist.
Wir müssen aber zuerst überprüfen, ob Optional Sampling hier anwendbar ist:
(1)
$P(\tau_n < \infty) = 1\ \forall\ n$ ist klar
(2)
$Z^{\tau_n}, M \in \mathcal{L}^2(P) \Rightarrow Z^{\tau_n}, M \in \mathcal{L}^1(P) \Rightarrow Z^{\tau_n} \cdot M \in \mathcal{L}^1(P) \Rightarrow \mathbb{E}\left[|Z^{\tau_n}M|\right] < \infty$
(3)
$\int (1 - 1_{\{\tau_n \leq m\}})|Z^{\tau_n}M|dP = \int |Z^{\tau_n}M|dP - P(\{\tau_n \leq m\}) \cdot \int |Z^{\tau_n}M|dP \to 0$ da $P(\{\tau_n \leq m\}) \to 1$ für $m \to \infty$ Es gelten weiter, dass $\tau_n \uparrow T$ P-f.s. und $|M_{t+1}^{\tau_n} Z_{t+1}^{\tau_n}| \leq \sum\limits_{s=0}^{T} |M_s Z_s| \in \mathcal{L}^1(P)$
Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz für bedingte Erwartungswerte folgt nun:

$$\mathbb{E}\left[M_{t+1}Z_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = \lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[M_{t+1}^{\tau_n} Z_{t+1}^{\tau_n} > \mathcal{F}_t\right] = \lim_{n\uparrow\infty} M_t^{\tau_n} Z_t^{\tau_n} = M_t Z_t$$

$\Rightarrow$ MZ ist ein P-Martingal. Mit Lemma 4 ist folglich M ein $\hat{P}$-Martingal und damit ist $\hat{P}$ ein minimales Martingalmaß.
"$\Rightarrow$"
Sei nun $\hat{P}$ ein minimales Martingalmaß
zz.: Λ besitzt Darstellung als

$$\Lambda_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}),\ t = 0, \ldots, T.$$

für das P-Martingal Y aus der Doob-Zerlegung von X und einen d-dimensionalen vorhersehbaren Prozess λ.
Für diese Beweisrichtung benötigen wir nun die *Kunita-Watanabe-Zerlegung* des Erwartungsdichteprozesses Z bzgl. P:

$$Z_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) + L_t$$

mit einem d-dimensionalen vorhersehbaren Prozess η, dem quadratintegrierbarem Martingal Y und einem quadratintegrierbaren P-Martingal L, welches stark orthogonal zu Y ist. Die folgenden Umformungen zeigen, dass daraus auch die starke Orthogonalität von L zu X folgt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})(L_t - L_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[(Y_t + B_t - Y_{t-1} - B_{t-1})(L_t - L_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[(Y_t - Y_{t-1})(L_t - L_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \mathbb{E}\left[(B_t - B_{t-1})(L_t - L_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[(B_t - B_{t-1})(L_t - L_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[B_t L_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \mathbb{E}\left[B_t L_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \mathbb{E}\left[B_{t-1} L_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \mathbb{E}\left[B_{t-1} L_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]\\
=\;&B_t \cdot \mathbb{E}\left[L_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] - B_t L_{t-1} - B_{t-1} \cdot \mathbb{E}\left[L_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] + B_{t-1}L_{t-1},\ \text{da } B \text{ vorhersehb.}\\
=\;&0,\ \text{da } L \text{ ein Martingal ist}
\end{aligned}$$

Da $\hat{P}$ nach Voraussetzung ein minimales Martingalmaß ist, ist L auch ein $\hat{P}$-Martingal und mit Lemma 4 ist folglich LZ ein P-Martingal, wobei gilt:

$$L_t Z_t = L_t \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) + L_t\right) = L_t + L_t \cdot \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) + L_t^2$$

Wir wissen jetzt bereits, dass L ein P-Martingal ist. Da L und Y stark orthogonale P-Martingale sind, folgt mit Korollar 2 wie oben, dass LY ebenfalls ein P-Martingal ist, also auch der mittlere Summand $L_t \cdot \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})$ $(\eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) \in \mathcal{L}^2(P))$. Da LZ insgesamt ein P-Martingal ist, muss also L^2 auch ein P-Martingal sein, was bedeutet, dass

$$\mathbb{E}\left[L_t^2\right] = L_0^2 = 0,$$

womit folgt, dass L P-f.s. verschwindet.
Also ist in der Kunita-Watanabe-Zerlegung $Z_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})$ und damit

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{t+1} - \Lambda_t = \frac{Z_{t+1} - Z_t}{Z_t}\\
=\;&\frac{1}{Z_t} \cdot \left[\left(1 + \sum_{s=1}^{t+1} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})\right) - \left(1 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})\right)\right]\\
=\;&\frac{1}{Z_t} \cdot \eta_{t+1}(Y_{t+1} - Y_t).
\end{aligned}$$

Definieren wir nun noch passend den Prozess

$$\lambda_t := \frac{\eta_t}{Zt - 1},\ d - \text{dim. vorh., da } \eta\ d - \text{dim. vorh. ist,}$$

so gilt:

$$\begin{aligned}
& \Lambda_{t+1} = \Lambda_t + \lambda_{t+1} \cdot (Y_{t+1} - Y_t) \\
\Rightarrow \quad & \Lambda_t = 1 + \sum_{s=0}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) \; t = 0, \dots, T, \text{ da } \lambda_0 = 1
\end{aligned}$$

□

Diese Darstellung von Λ bedeutet für die Dichte Z eines minimalen Martingalmaßes

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + \lambda_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}))$$

Wir wissen also welche Form der Dichteprozess haben muss, damit ein minimales Martingalmaß vorliegt.
Es stellt sich jetzt noch die Frage, ob ein solches minimales Martingalmaß eindeutig bestimmt ist, oder ob es mehrere geben kann. Dazu:

Korollar 7. Es existiert höchstens ein minimales Martingalmaß

Beweis. Nehmen wir also an, es gäbe zwei minimale Martingalmaße $\hat{P}$ und $\hat{P}'$. Um zu zeigen, dass die beiden Maße übereinstimmen, zeigen wir dann, dass ihre Dichten bzgl. des zugrundeliegenden Maßes P übereinstimmen.
Weiter seien Λ bzw Λ' die entsprechenden Prozesse aus der $*$-Darstellung.
Da Y nun sowohl $\hat{P}$- als auch $\hat{P}'$-Martingal ist, folgt mit der Eindeutigkeit der Doob-Zerlegung , dass $B = B'$.
Mithilfe von Korollar 5 gilt dann mit $N := \Lambda - \Lambda'$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}\left[(\Lambda'_t - \Lambda'_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1} - \Lambda'_t + \Lambda'_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}\left[(N_t - N_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Also ist N stark orthogonal zu Y.
Mit Korollar 6 gilt für N:

$$\begin{aligned}
N_t = \Lambda_t - \Lambda'_t \quad &= \quad (1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})) - (1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda'_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})) \\
&= \quad \sum_{s=1}^{t} (\lambda_s - \lambda'_s)(Y_s - Y_{s-1}) \; \forall \; t
\end{aligned}$$

Mit der bekannten Stopzeit $\tau_n := \inf\{ \, t \mid |\lambda_{t+1} - \lambda'_{t+1}| > n\}$ folgt $N^{\tau_n} \in \mathcal{L}^2(P)$, sodass wir oben begonnene Äquivalenzen fortsetzen können:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[(N_t - N_{t-1})(Y_t - Y_{t-1})\mathcal{F}_{t-1}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[(\sum_{s=1}^{t}(\lambda_s - \lambda'_s)(Y_s - Y_{s-1}) - \sum_{s=1}^{t-1}(\lambda_s - \lambda'_s)(Y_s - Y_{s-1}))|\mathcal{F}_{s-1}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[(\lambda_s - \lambda'_s)(Y_s - Y_{s-1})(Y_s - Y_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[(\lambda_s - \lambda'_s)(Y_s - Y_{s-1})^2|\mathcal{F}_{s-1}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{E}\left[((\lambda_s - \lambda'_s)(Y_s - Y_{s-1}))^2|\mathcal{F}_{s-1}\right] = 0
\end{aligned}$$

Also

$$N_t^{\tau_n} - N_{t-1}^{\tau_n} = (\lambda_t - \lambda'_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) = 0 \ P-\text{f.s.}$$

$\Rightarrow N^{\tau_n} = 0 \ P-\text{f.s.} \ \Rightarrow N = 0 \ P-\text{f.s.} \ \Rightarrow \lambda = \lambda' \ P-\text{f.s.}$
$\Rightarrow \hat{P} = \hat{P}'$ □

In einem Finanzmarktmodell mit nur einem risky asset ist es sogar möglich, den Prozess λ aus der Dichte genau zu bestimmen und somit den gesamten Prozess. Da ein Maß vollständig über seine Dichte definiert werden kann, können wir das minimale Martingalmaß sogar genau charakterisieren.
Zuerst stellen wir fest, was aus der Existenz eines minimalen Martingalmaßes im eindimensionalen Fall gefolgert werden kann.

Korollar 8. Sei $d = 1$ und es existiere ein minimales Martingalmaß $\hat{P}$. Dann gelten P-f.s. auf $\{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0\}$:

$$(X_t - X_{t-1}) \cdot \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}F_{t-1}\right] < \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \ \forall \ t$$

und der in der Darstellung von Λ in Korollar 6 auftretende, vorhersehbare Prozess λ ist von der Form :

$$\lambda_t = \frac{-\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die zweite Folgerung, da aus ihr relativ direkt die erste folgt: Mit der Doob-Zerlegung von X bzgl P $X = Y + B$, die wir vorher schon kennengelernt haben, gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[Y_t - Y_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})(B_t - B_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \left[\mathbb{E}\left[B_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \mathbb{E}\left[B_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] - (B_t - B_{t-1}), \text{ da } B \text{ vorhersehbar} \\
\Rightarrow\ & B_t - B_{t-1} = \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]
\end{aligned}$$

Damit gilt nun weiter:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[(Y_t - Y_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[((X_t - X_{t-1}) - (B_t - B_{t-1}))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \; & \mathbb{E}[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - 2\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})(B_t - B_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
& + \mathbb{E}\left[(B_t - B_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \; & \mathbb{E}[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - 2\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
& + \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
= \; & var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})
\end{aligned}$$

Ziehen wir jetzt Korollar 5 heran, so kann man folgern:

$$\begin{aligned}
& B_t - B_{t-1} = -\mathbb{E}\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
\Leftrightarrow \; & \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = -\mathbb{E}\left[\lambda_t \cdot (Y_t - Y_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
\Leftrightarrow \; & \frac{\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbb{E}\left[(Y_t - Y_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right]} = -\lambda_t, \text{ da } \lambda_t \text{ vorhersehbar} \\
\Leftrightarrow \; & \lambda_t = -\frac{\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]}{var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}}
\end{aligned}$$

Nun zur ersten Folgerung: Nach Korollar 3 gilt:

$$\lambda_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}) = \Lambda_t - \Lambda_{t-1} > -1$$

Mit obigen Erkenntnissen ist dies äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
& \frac{-\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]}{var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}} \cdot (Y_t - Y_{t-1}) > -1 \\
\Leftrightarrow \; & -\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \cdot (Y_t - Y_{t-1}) \\
& > -\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] + \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
\Leftrightarrow \; & \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] > \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
& + \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \cdot (Y_t - Y_{t-1}) \\
\Leftrightarrow \; & \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] > \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
& + \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \cdot ((X_t - X_{t-1}) - (B_t - B_{t-1})) \\
\Leftrightarrow \; & \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] > \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
& + (X_t - X_{t-1})\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] - \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
\Leftrightarrow \; & \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] > (X_t - X_{t-1})\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]
\end{aligned}$$

$\square$

In die andere Richtung kann man sich nun auch überlegen, was für ein Modell gegeben sein muss, damit ein minimales Martingalmaß existiert und weiter wie dieses genau aussieht.

Satz 6. *Sei also $d = 1$. Gelten für ein Marktmodell folgende zwei Bedingungen, so existiert ein minimales Martingalmaß $\hat{P}$ für dieses Modell:*

$$(i): \quad (X_t - X_{t-1}) \cdot \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} F_{t-1}\right] < \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \; \forall \; t$$

Bedingung 1 im vorherigen Korollar

$$(ii): \quad \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \leq C \cdot var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \;\; P \; f.s. \; \forall \; t.$$

Bedingung des bounded mean-variance trade-offs

Der Dichteprozess $\frac{d\hat{P}}{dP} = Z_T$ ist dann durch die zuvor erhaltenen Darstellungen von Z,Λ und λ gegeben.

Beweis. Wir nutzen die bekannte Doob-Zerlegung für X bzgl P und nehmen an, λ sei wie in (5.5) definiert. Nun folgt aus der *Bounded mean-variance trade-off*-Bedingung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \leq C \cdot var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \\
\Leftrightarrow \quad & (-\lambda_t \cdot var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}))^2 \leq C \cdot var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda_t^2 \cdot var(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) \leq C \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda_t^2 \cdot \mathbb{E}\left[(Y_t - Y_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq C \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}\left[(\lambda_t (Y_t - Y_{t-1}))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq C
\end{aligned}$$

wie im Beweis von Korollar 8.
Dann ist Λ mit der Darstellung aus Korollar 6, $\Lambda_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})$ quadratintegrierbar und da Y P-Martingal ist, ist Λ_t auch P-Martingal.
Nun betrachten wir Z in der $*$-Darstellung:

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}) = \prod_{s=1}^{t} (1 + \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}))$$

Z ist jetzt strikt positiv, da im vorherigen Beweis bereits gezeigt wurde, dass

$$(X_t - X_{t-1}) \cdot \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | F_{t-1}\right] < \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

äquivalent zu $\Lambda_t - \Lambda_{t-1} > -1 \; \forall \; t$ ist.
Wie schon Λ ist nun auch Z quadratintegrierbares P-Martingal, da Y P-Martingal ist und $\mathbb{E}\left[(\lambda_t (Y_t - Y_{t-1}))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq C$.
Mit Korollar 3 ist Z nun Dichteprozess eines äquivaltenten Wahrscheinlichkeits-

maßes $\hat{P}$ mit quadratintegrierbarer Dichte $\frac{d\hat{P}}{dP}$ und X_t P-integrierbar für alle t.
Ist $\hat{P}$ denn auch minimales Martingalmaß?
Unter Anwendung vorheriger Erkenntnisse betrachte:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(Y_t - Y_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \quad & \mathbb{E}\left[\lambda_t \cdot (Y_s - Y_{s-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \quad & \lambda_t \cdot var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \\
= \quad & -\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \quad & -(B_t - B_{t-1}) \\
& \Rightarrow B_t = -\sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(Y_s - Y_{s-1})|\mathcal{F}_{s-1}\right]
\end{aligned}$$

Mit Korollar 5 ist dann $\hat{P}$ ein minimales Martingalmaß. Da es davon höchstens eines gibt, ist $\hat{P}$ auch eindeutig. $\square$

Kapitel 6

Das Trinomialmodell

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, den Wert eines Claims im Trinomialmodell zu bestimmen. Dafür haben wir im Verlaufe dieser Arbeit zwei unterschiedliche Methoden kennengelernt. Zum einen die rekursive Berechnung aus Kapitel 3 und zum Anderen über den Erwartungswert bzgl. eines minimalen Martingalmaßes.
Wir werden dafür zuerst prüfen müssen, ob die beiden Verfahren im Trinomialmodell anwendbar sind, also ob die zuvor gestellten Voraussetzungen an das Modell erfüllt sind.

Das Trinomialmodell

Gegeben sei ein Trinomialmodell mit T Perioden mit einem risky asset S mit

$$S_t = S_0 \cdot u^{U_t} \cdot m^{M_t} \cdot d^{D_t}.$$

Dabei bezeichnen u, m und d die drei verschiedenen Sprunghöhen und U, M und D seien Zufallsvariablen, die die Anzahl der jeweiligen Sprünge bis zum Zeitpunkt t zählen. Also:

$$\begin{aligned} U_t &= \sum_{s=1}^{t} 1_{\{R_s+1=u\}} \\ M_t &= \sum_{s=1}^{t} 1_{\{R_s+1=m\}} \\ D_t &= \sum_{s=1}^{t} 1_{\{R_s+1=d\}} \end{aligned}$$

mit R_t als unabhängig identisch verteilte quadratintegrierbare Zufallsvariablen, die die Returns des Aktienprozesses in t darstellen. Es gilt also auch:

$$S_t = S_{t-1} \cdot (R_{t+1}).$$

Weiter bezeichne S^0 den Preisprozess der risikolosen Anlage

$$S_t^0 = (1+\rho)^t.$$

Damit erhalten wir dann unseren diskontierten Preisprozess des risky assets

$$X_t = \frac{S_t}{(1+\rho)^t} = \frac{S_0}{(1+\rho)^t} \cdot \prod_{s=1}^{t} (1+R_s).$$

Das Trinomialmodell ist unvollständig, also wollen wir versuchen mithilfe von einer verallgemeinerten Handelsstrategie und dem zuvor erhltenen Schema eine Hedgingstrategie und dessen Anfangspreis für gegebenen Claim H zu ermitteln. Es gilt jedoch zuerst zu zeigen, dass solch eine lokal risikominimierende Handelsstrategie existiert, also dass das Trinomialmodell die Bedingung des Bounded mean-variance trade-offs erfüllt:
Betrachte:

$$\begin{aligned} 0 < var(\mathbb{R}_t|\mathcal{F}_{t-1}) = var(\mathbb{R}_t - \rho|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}\left[(\mathbb{R}_t-\rho)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{R}_t - \rho|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}\left[(\mathbb{R}_t-\rho)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] > \mathbb{E}\left[\mathbb{R}_t - \rho|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]^2 \\ = \; & \mathbb{E}\left[X_t \cdot \frac{1+R_t}{1+\rho} - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\ = \; & \mathbb{E}\left[X_{t-1} \cdot \left(\frac{1+R_t}{1+\rho} - 1\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\ = \; & \mathbb{E}\left[X_{t-1} \cdot \frac{1}{1+\rho}(R_t - \rho)|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\ = \; & \frac{1}{(1+\rho)^2} \cdot X_{t-1}^2 \cdot \mathbb{E}\left[(R_t-\rho)|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\ < \; & \frac{1}{(1+\rho)^2} \cdot X_{t-1}^2 \cdot \mathbb{E}\left[(R_t-\rho)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[X_{t-1}^2 \cdot \frac{1}{(1+\rho)^2}(R_t-\rho)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[(X_{t-1} \cdot \frac{1}{(1+\rho)}(R_t-\rho))^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \end{aligned}$$

Also $\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \leq \delta \cdot \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}\right]$ für ein $\delta < 1$.
Sei $\delta = \frac{C}{C+1}$ für ein $C > 0$, so folgt:

$$\begin{aligned}(C+1)\cdot \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 &\leq C\cdot \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right]^2 &\leq C\cdot var(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})\end{aligned}$$

Nach Satz 2 existiert für beliebigen Claim H im Trinomialmodell eine lokal risikominimierende Handelsstrategie.
Gilt $\mathbb{E}\left[(R_t-\rho)|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 0$ also $\mathbb{E}\left[R_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \rho$, so ist sogar $\mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 0$ und somit das zugehörige Maß P ein Martingalmaß.
Versuchen wir nun explizit den Anfangswert eines Claims zu berechnen. Sei dazu $T = 1$, also betrachten wir ein Trinomialmodell über eine Periode. Der Claim, den es zu hedgen gilt, sei ein Call mit Underlying S und Strike K.
Der Payoff des Claims ist also: $H = V_1 = (S_1 - K)\cdot 1_{\{S_1>K\}}$
Mithilfe der in Kapitel 3 erhaltenen Formeln ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{cov(V_1, X_1 - X_0)}{var(X_1 - X_0)} \\ &= \frac{cov(V_1, X_1)}{var(X_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{(1+\rho)}\cdot cov(V_1, S_1)}{\frac{1}{(1+\rho)^2}\cdot var(S_1)} \\ &= \frac{1+\rho}{var(S_1)}\cdot\left(\mathbb{E}\left[V_1 S_1\right] - \mathbb{E}\left[V_1\right]\mathbb{E}\left[S_1\right]\right) \\ &= \frac{1+\rho}{var(S_1)}\cdot\left(\mathbb{E}\left[1_{\{S_1>K\}}(S_1-K)S_1\right] - \mathbb{E}\left[1_{\{S_1>K\}}(S_1-K)\right]\mathbb{E}\left[S-1\right]\right) \\ &= \frac{(1+\rho)\cdot P(\{S_1>K\})}{var(S_1)}\cdot\left(\mathbb{E}\left[S_1^2\right] - K\mathbb{E}\left[S_1\right] - \mathbb{E}\left[S_1\right]^2 + K\mathbb{E}[S_1]\right) \\ &= (1+\rho)\cdot P(\{S_1>K\})\end{aligned}$$

Damit ist der Wert zum Zeitpunkt 0:

$$\begin{aligned}V_0 &= \mathbb{E}\left[V_1\right] - (1+\rho)P(\{S_1>K\})\cdot\mathbb{E}\left[X_1 - X_0\right] \\ &= P(\{S_1>K\})\cdot\left(\mathbb{E}\left[S_1\right] - K\right) - (1+\rho)P(\{S_1>K\})\cdot\left(\mathbb{E}\left[X_1\right] - X_0\right) \\ &= P(\{S_1>K\})\cdot\left[\mathbb{E}\left[S_1\right] - K - (1+\rho)\mathbb{E}\left[\frac{S_1}{(1+\rho)}\right] + (1+\rho)S_0\right] \\ &= P(\{S_1>K\})\cdot\left((1+\rho)\cdot S_0 - K\right)\end{aligned}$$

Versuchen wir nun das gleiche mithilfe eines möglichen minimalen Martingalmaßes. Dafür müssen wir zuerst feststellen, ob ein solches Maß existiert.
Satz 6 liefert uns dafür zwei Bedingungen, von denen geprüft werden muss, ob sie in einem Trinomialmodell, wie wir es vorgegeben haben, gelten. Dies werden wir nun mit wieder beliebigem T durchführen:
Als erstes stellen wir fest, dass die Bedingung des bounded mean-variance tradeoffs für unser Modell erfüllt ist, wie zuvor bereits gezeigt.
Prüfen wir also weiter, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen auch die zweite Bedingung

$$(X_t - X_{t-1}) \cdot \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] < \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \;\forall\; t \; P - \text{f.s.}$$

erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
& (X_t - X_{t-1}) \cdot \mathbb{E}\left[X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\right] < \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\
\Leftrightarrow\quad & X_t(\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] - X_{t-1}) - X_{t-1}(\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] - X_{t-1}) \\
>\quad & \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 - 2X_{t-1}\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] + X_{t-1}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & X_t\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] - X_{t-1}X_t - X_{t-1}\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] + X_{t-1}^2 \\
>\quad & \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 - 2X_{t-1}\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] + X_{t-1}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & X_t\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] - X_{t-1}X_t + X_{t-1}\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] > \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right]^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (X_t - \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right])(\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] - X_{t-1}) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (X_{t-1} > \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] > X_t) \\
\vee\quad & (X_{t-1} < \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] < X_t) \\
\Leftrightarrow\quad & ((1+\rho)S_{t-1} > \mathbb{E}\left[S_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] > S_t) \\
\vee\quad & ((1+\rho)S_{t-1} < \mathbb{E}\left[S_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] < S_t) \\
\Leftrightarrow\quad & ((1+\rho)S_{t-1} > S_{t-1}\mathbb{E}\left[R_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] > S_{t-1}(R_t + 1)) \\
\vee\quad & ((1+\rho)S_{t-1} < S_{t-1}\mathbb{E}\left[R_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] < S_{t-1}(R_t + 1)) \\
\Leftrightarrow\quad & ((1+\rho) > \mathbb{E}\left[R_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] > (R_t + 1)) \\
\vee\quad & ((1+\rho) < \mathbb{E}\left[R_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] < (R_t + 1)) \\
\Leftrightarrow\quad & (\rho > \mathbb{E}\left[R_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] > R_t) \\
\vee\quad & (\rho < \mathbb{E}\left[R_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] < R_t) \\
\Leftrightarrow\quad & (\rho > \mathbb{E}\left[R_1\right] > R_1) \\
\vee\quad & (\rho < \mathbb{E}\left[R_1\right] < R_1)
\end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit dem rekursiven Verfahren haben wir bereits festgestellt, dass das vorliegende Modell bereits ein Martingalmaß ist, falls $\mathbb{E}\left[R_t | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \rho$

gilt. Nun wissen wir auch, dass für gegebenes Trinomialmodell genau dann ein minimales Martingalmaß vorliegt, wenn eine der obigen Ungleichungsketten gilt, also genau dann, wenn $\mathbb{E}\ [R_1]$ in einem bestimmten Bereich um ρ herum liegt. Und zwar so, dass $\mathbb{E}\ [R_1]$ näher an ρ liegt als alle möglichen Werte, die R_1 annehmen kann, also:

$$|\mathbb{E}\ [R_1] - \rho| < min(\ |R_1 - \rho| \mid R_1 \in \{u, m, d\}\ )$$

Nehmen wir an, wir haben ein solches Trinomialmodell vorliegen. Dann können wir jetzt mit den in Kapitel 5 erhlatenen Darstellungen von Z, Λ und λ das minimale Martingalmaß $\hat{P}$ bestimmen, indem wir seine Dichte $\frac{d\hat{P}}{dP} = Z_T$ bzgl. P bestimmen. Wie beim rekursiven Verfahren sei $T = 1$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{P}}{dP} &= Z_T = Z_1 = 1 + \Lambda_1 - \Lambda_0 \\
&= 1 + \lambda_1 \cdot (Y_1 - Y_0) \\
&= 1 + \frac{-\mathbb{E}[X_1 - X_0]}{var(X_1 - X_0)} \cdot (Y_1 - Y_0) \\
&= 1 + \frac{X_0 - \mathbb{E}\ [X_1]}{var(X_1)} \cdot ((X_1 - X_0) - (B_1 - B_0)) \\
&= 1 + \frac{X_0 - \mathbb{E}\ [X_1]}{var(X_1)} \cdot ((X_1 - X_0) - \mathbb{E}\ [X_1 - X_0]) \\
&= 1 + \frac{X_0 - \mathbb{E}\ [X_1]}{var(X_1)} \cdot (X_1 - \mathbb{E}\ [X_1]) \\
&= \frac{1}{var(X_1)} \cdot \left(\mathbb{E}\ [X_1^2] - \mathbb{E}\ [X_1]^2 + X_0 X_1 - X_0 \mathbb{E}\ [X_1] - X_1 \mathbb{E}\ [X_1] + \mathbb{E}\ [X_1]^2\right) \\
&= \frac{1}{var(X_1)} \cdot \left(\mathbb{E}\ [X_1^2] + X_0 X_1 - X_0 \mathbb{E}\ [X_1] - X_1 \mathbb{E}\ [X_1]\right)
\end{aligned}$$

Berechnen wir nun den Wert eines Calls mit Underlying S und Strike K wie oben, nur dieses Mal über den Erwartungswert des Calls bzgl. des minimalen

Martingalmaßes $\hat{P}$:

$$\begin{aligned}
& V_0 = \hat{\mathbb{E}}\,[H] = \mathbb{E}\,\left[H \cdot \frac{d\hat{P}}{dP}\right] \\
= \quad & \mathbb{E}\,\left[(S_1 - K) \cdot \frac{1_{\{S_1 > K\}}}{var(X_1)} \cdot \left(\mathbb{E}\,[X_1^2] + X_0 X_1 - X_0 \mathbb{E}\,[X_1] - X_1 \mathbb{E}\,[X_1]\right)\right] \\
= \quad & P(\{S_1 > K\}) \cdot \mathbb{E}\,[(S_1 - K) \\
\cdot \quad & \frac{(1+\rho)^2 \mathbb{E}\,[S_1^2] + (1+\rho) S_0 S_1 - (1+\rho) S_0 \mathbb{E}\,[S_1] - (1+\rho)^2 S_1 \mathbb{E}\,[S_1]}{(1+\rho)^2 \cdot var(S_1)}] \\
= \quad & P(\{S_1 > K\}) \frac{1}{var(S_1)} \\
\cdot \quad & \mathbb{E}\,[(S_1 - K) \cdot (\mathbb{E}[S_1^2] - S_1 \mathbb{E}\,[S_1] + (1+\rho) S_0 S_1 - (1+\rho) S_0 \mathbb{E}\,[S_1])] \\
= \quad & P(\{S_1 > K\}) \frac{1}{var(S_1)} \mathbb{E}\,[S_1 \mathbb{E}\,[S_1^2] - S_1^2 \mathbb{E}\,[S_1] + (1+\rho) S_0 S_1^2 - (1+\rho) S_0 S_1 \mathbb{E}\,[S_1] \\
- \quad & K \mathbb{E}\,[S_1^2] + K S_1 \mathbb{E}_[S_1] - (1+\rho) K S_0 S_1 + (1+\rho) K S_0 \mathbb{E}_[S_1]] \\
= \quad & P(\{S_1 > K\}) \frac{1}{var(S_1)} \\
\cdot \quad & ((1+\rho) S_0 \mathbb{E}_[S_1^2] - (1+\rho) S_0 \mathbb{E}_[S_1]^2 - K \mathbb{E}\,[S_1^2] + K \mathbb{E}\,[S_1]^2) \\
= \quad & P(\{S_1 > K\}) \cdot ((1+\rho) \cdot S_0 - K)
\end{aligned}$$

Für $T = 1$ stimmen die Werte eines Calls bei beiden Methoden also überein. Für die rekursive Vorgehensweise wird mit steigender Periodenanzahl ein stark zunehmender Rechenaufwand entstehen, was diese Methode für große Periodenanzahlen unpraktisch macht. Mit dem minimalen Martingalmaß ist dies um einiges leichter, wie man der Formel

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = Z_T = \prod_{s=1}^{T} (1 + \lambda_s (Y_s - Y_{s-1}))$$

ansieht. Hier tritt allerdings das Problem auf, dass nicht für jedes Modell ein minimales Martingalmaß vorliegt, also dass hier im Beispiel des Trinomialmodells der Zinssatz für die risikolose Anlage, der erwartete Return und die möglichen Returnwerte in bestimmter Beziehung zueinander stehen müssen.

Kapitel 7

Anhang

Lemma 7 (A1)**.** *Für einen adaptierten Prozess M in $\mathcal{L}^1(P)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) M ist ein P-Martingal

(b) $\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_\tau\right] = M_{\min(t,\tau)}\ \forall\ t \in T$ und für alle Stopzeiten τ

Lemma 8 (A2)**.** *Sei M ein adaptierter Prozess, sodass $M_t \in \mathcal{L}^1(P)\ \forall\ t$. Dann sind äuivalent:*

(a) M ist ein P-Martingal

(b) Für jede Stopzeit τ ist M^τ ein P-Martingal

(c) $\mathbb{E}\left[M_{\min(\tau,T)}\right] = M_0$ für jede Stopzeit τ

Lemma 9 (A3)**.** *Sei $\mathcal{K} \cap Ł^0_+ = 0$. Dann ist $\mathcal{K}$ abgeschlossen in L^0. Hierbei ist $\mathcal{K} := \{\xi \cdot (X_1 - X_0)|\xi \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, P, \mathbb{R}^d)\}$.*

Kapitel 8

Quellen

Föllmer/Schied - Stochastic Finance, An Introduction in Diskrete Time