

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematische Statistik

# Zur Bewertung von Basket Optionen

Bachelorarbeit  
August 2011

Leo Bronstein  
Matrikel-Nummer 366136

Prüfer und Betreuer PD Dr. Volkert Paulsen

**Erklärung des / der Studierenden**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

Zur Bewertung von Basket Optionen

selbständig verfasst habe, und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Das CRR-Modell mit mehreren Aktien</b>	<b>2</b>
1.1 Das Modell . . . . .	2
1.2 Das Ausübungsgebiet . . . . .	4
<b>2 Die innere Approximation des Ausübungsgebiets</b>	<b>8</b>
2.1 Konstruktion des Supermartingals . . . . .	8
2.2 Die innere Approximation . . . . .	11
<b>3 Praktische Aspekte</b>	<b>17</b>
3.1 Aufwand des Verfahrens . . . . .	17
3.2 Endliche Laufzeit . . . . .	18
<b>4 Numerische Rechnungen</b>	<b>19</b>
4.1 Unabhängige Preisprozesse . . . . .	20
4.2 Abhängige Preisprozesse . . . . .	24
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>26</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>27</b>

# Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit sogenannten Basket-Optionen, d.h. mit Optionen, bei denen das Basisfinanzgut die gewichtete Summe mehrerer Finanzgüter ist. Dabei wird speziell der amerikanische Put mit einer solchen gewichteten Summe als Basisfinanzgut betrachtet.

Optionen haben in der Realität eine endliche Laufzeit. Allerdings ist der Fall einer unendlichen Laufzeit, ein sogenannter „perpetual put“, mathematisch einfacher zu behandeln. In [1] hat Paulsen für den perpetual put im zeitstetigen Fall Approximationen der „early exercise region“ hergeleitet. In dieser Arbeit werden die Ergebnisse aus [1] soweit möglich auf den diskreten Fall übertragen. Dabei wird größtenteils das Vorgehen aus [1] übernommen und nur an den relevanten Stellen an den diskreten Fall angepasst.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Im ersten Kapitel wird das verwendete mathematische Modell vorgestellt und die Problemstellung formuliert. Außerdem werden erste einfache Folgerungen hergeleitet. Im zweiten Kapitel werden die zentralen Aussagen der Arbeit formuliert und bewiesen. Im dritten Kapitel werden kurz einige praktische Aspekte der vorgestellten Methoden diskutiert. Im vierten Kapitel werden die Ergebnisse an einigen Beispielen numerisch ausprobiert. Es folgt eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Fragestellungen.

# Kapitel 1

## Das CRR-Modell mit mehreren Aktien

In diesem Kapitel soll das verwendete mathematische Modell vorgestellt werden. Außerdem wird die Problemstellung formuliert.

Vorher legen wir noch einige Notationen fest:

Für einen Vektor  $\mathbf{x} \in (0, \infty)^n$  sei

$$|\mathbf{x}| := x_1 + \cdots + x_n.$$

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (0, \infty)^n$  schreiben wir  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$  genau dann, wenn gilt  $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$ . Weiter sei  $\mathcal{I} := \{-1, +1\}$  und  $\mathbf{1} := (1, \dots, 1) \in (0, \infty)^n$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $x^+ := \max(0, x)$ .

### 1.1 Das Modell

Für die gesamte Arbeit wird ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zugrunde gelegt. Das Modell wird durch die folgenden Daten beschrieben:

1. Der Anzahl  $n$  der Aktien.
2. Dem konstanten Zinssatz  $1 + \rho$  für das festverzinsliche Wertpapier. Dabei sei  $\rho > 0$ .

3. Dem Ausübungspreis  $K$  der Option.
4. Einer Familie von Zufallsvariablen  $Y_j(k)$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $k \in \mathbb{N}$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum.
5. Einem Vektor von Startpreisen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n$  für die Aktien.
6. Einem Vektor  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (0, \infty)^n$ , der die Gewichte der einzelnen Aktien angibt.

Dabei kann die Zufallsvariable  $Y_j(k)$  nur die zwei Werte  $u_j$  und  $1/u_j$  annehmen, wobei  $u_j > 0$  ist. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  können die Zufallsvariablen  $Y_1(k), \dots, Y_n(k)$  beliebige Abhängigkeiten aufweisen. Genauer sei für  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{I}^n$  und jedes  $k$

$$P(Y_1(k) = u_1^{w_1}, \dots, Y_n(k) = u_n^{w_n}) =: q(\mathbf{w})$$

mit  $0 < q(\mathbf{w}) < 1$  für alle  $\mathbf{w} \in \mathcal{I}^n$ . Andererseits seien die Vektoren  $(\mathbf{Y}(k))_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbf{Y}(k) = (Y_1(k), \dots, Y_n(k))$  unabhängig von einander. Wir definieren noch  $p_j := P(Y_j(1) = u_j)$ .

Nun kann man die Aktienpreisprozesse mit Startpreis  $\mathbf{x}$  durch

$$S_j^{\mathbf{x}}(t) = x_j \prod_{k=1}^t Y_j(k), \quad \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(t) = (S_1^{\mathbf{x}}(t), \dots, S_n^{\mathbf{x}}(t))$$

definieren. Schließlich sei  $\mathcal{F}_t := \sigma(\mathbf{S}^{\mathbf{x}}(0), \dots, \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(t))$ ,  $t \geq 0$  die von den Aktienpreisprozessen erzeugte Filtration,  $\mathcal{T}$  die Menge aller fast sicher endlichen Stoppzeiten bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ .

Es wird davon ausgegangen, dass  $P$  ein Martingalmaß für  $\mathbf{S}^{\mathbf{x}}$  ist. Man rechnet leicht nach, dass dies bedeutet, dass für jedes  $j$  die Gleichung

$$p_j u_j + (1 - p_j) \frac{1}{u_j} = 1 + \rho$$

erfüllt sein muss. Sind die Wahrscheinlichkeiten  $q(\mathbf{w})$  festgelegt, kann also nur noch einer der Parameter  $u_1, \dots, u_n, \rho$  frei gewählt werden.

Betrachtet wird nun ein Amerikanischer Put mit unendlicher Laufzeit und Ausübungspreis  $K$ , bei dem das Basisfinanzgut die gewichtete Summe der Aktienkurse

ist. Die Auszahlung der Option bei einer Ausübung zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}_0$  ist also gleich

$$(K - [a_1 S_1^{\mathbf{x}}(t) + \dots + a_n S_n^{\mathbf{x}}(t)])^+.$$

Der faire Preis dieser Option ist dann durch

$$v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau} (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))^+]$$

gegeben. Das Ziel ist es, den Ausübungszeitpunkt „optimal“ zu wählen. Da der Put unendliche Laufzeit hat, ist es einsichtig, dass die Entscheidung, ob zu einem bestimmten Zeitpunkt die Option ausgeübt werden soll, lediglich vom Aktienkurs zu diesem Zeitpunkt abhängt. Als erste (triviale) Beobachtung kann man festhalten, dass die Ausübung lediglich innerhalb des Gebiets

$$T_{\mathbf{a}} := \{\mathbf{x} \in (0, \infty)^n \mid K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} > 0\}$$

sinnvoll ist, da außerhalb dieses Gebiets die Auszahlung gleich 0 ist.

## 1.2 Das Ausübungsgebiet

**Definition 1.** Die „early exercise region“  $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$ , im Folgenden Ausübungsgebiet genannt, ist definiert durch

$$\mathcal{E}_{\mathbf{a}} := \{\mathbf{x} \in (0, \infty)^n \mid v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \leq (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^+\}.$$

Man kann  $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$  folgendermaßen interpretieren:  $v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$  ist die größte (diskontierte) Auszahlung, die man erwarten kann, wenn man ausgehend von einem Aktienkurs von  $\mathbf{x}$  entsprechend einer optimalen Strategie handelt. Die Bedingung  $v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \leq (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^+$  besagt, dass die Auszahlung bei sofortiger Ausübung der Option größer oder gleich dieser optimalen Auszahlung ist. Folglich ist es sinnvoll, die Option auszuüben, sobald der Preisprozess das Gebiet  $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$  betritt.

Es ist möglich, ohne Einschränkung von  $\mathbf{a} = \mathbf{1}$  auszugehen:

**Lemma 1.** Für  $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in (0, \infty)^n$  gilt  $v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = v_{\mathbf{1}}(a_1x_1, \dots, a_nx_n)$ . Weiter gilt

$$\mathcal{E}_{\mathbf{a}} = \left\{ \left( \frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n} \right) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathbf{1}} \right\}$$

*Beweis.* Die erste Aussage gilt wegen

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) &= \sup_{\tau \in T} \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau} (K - (x_1a_1, \dots, x_na_n) \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{1}}(\tau))^+] \\ &= \sup_{\tau \in T} \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau} (K - (1, \dots, 1) \cdot \mathbf{S}^{(x_1a_1, \dots, x_na_n)}(\tau))^+] \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt damit aus

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{a}} &= \{ \mathbf{x} \in (0, \infty)^n \mid v_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = (K - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^+ \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in (0, \infty)^n \mid v_{\mathbf{1}}(a_1x_1, \dots, a_nx_n) \\ &= (K - (1, \dots, 1) \cdot (a_1x_1, \dots, a_nx_n))^+ \} \end{aligned}$$

□

Im Folgenden wird immer  $\mathbf{a} = \mathbf{1}$  angenommen. Zur Vereinfachung der Notation sei  $v(\mathbf{x}) := v_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{\mathbf{1}}$  sowie  $T := T_{\mathbf{1}}$ .

Benötigt wird noch der folgende Begriff:

**Definition 2.** Eine Teilmenge  $M \subseteq (0, \infty)^n$  heißt Südwest-Zusammenhängend, wenn gilt:

Für jedes  $\mathbf{x} \in M$  und jedes  $\mathbf{y} \in (0, \infty)^n$  mit  $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$  gilt  $\mathbf{y} \in M$ .

Nun kann man einige geometrische Eigenschaften des Ausübungsgebiets formulieren.

**Lemma 2.** Das Ausübungsgebiet  $\mathcal{E}$  hat folgende Eigenschaften:

- a)  $\mathcal{E}$  ist Südwest-Zusammenhängend.
- b)  $\mathcal{E}$  ist konvex.

Das Theorem und der Beweis (mit kleinen Änderungen) entstammen [1].



*Beweis.* Zum Südwest-Zusammenhang: Sei  $\mathbf{y} \in \mathcal{E}$  und  $\mathbf{x} \in (0, \infty)^n$  mit  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ . Sei  $\tau \in \mathcal{T}$ . Zunächst gilt offenbar

$$v(\mathbf{y}) - \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{y}}(\tau))^+] \geq 0.$$

Nutzt man noch aus, dass  $z_1^+ - z_2^+ \leq (z_1 - z_2)^+$  gilt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))^+] &\leq \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))^+] \\ &\quad + v(\mathbf{y}) - \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{y}}(\tau))^+] \\ &= \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}[(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))^+ - (K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{y}}(\tau))^+]] \\ &\quad + v(\mathbf{y}) \\ &\leq \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{y}}(\tau) - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))^+] + v(\mathbf{y}) \\ &= \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}((\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{1}}(\tau))^+] + v(\mathbf{y}) \\ &= \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}((\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{1}}(\tau))] + v(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau} S_j^{\mathbf{1}}(\tau)] + v(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Nun ist  $((1 + \rho)^{-t} S_j^{\mathbf{1}}(t))_{t \in \mathbb{N}_0}$  ein positives Martingal, insbesondere ein Supermartingal. Mit dem Optional Sampling Theorem für nichtnegative diskrete Supermartingale und fast sicher endliche Stoppzeiten (siehe [2, Satz 10.11]) folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau} S_j^{\mathbf{1}}(\tau)] + v(\mathbf{y}) &\leq \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) + v(\mathbf{y}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) + (K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{y}) \\ &= K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\mathbb{E}[(1 + \rho)^{-\tau}(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))^+] \leq K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$$

Hieraus erhält man sofort  $v(\mathbf{x}) \leq K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$ , was zu zeigen war.

Zur Konvexität: Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$  und  $t \in [0, 1]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}^{t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y}}(\tau))^+ &= (K - (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot \mathbf{S}^1(\tau))^+ \\ &\leq (2K - (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot \mathbf{S}^1(\tau))^+ \\ &\leq (K - t\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}^1(\tau))^+ + (K - (1-t)\mathbf{y} \cdot \mathbf{S}^1(\tau))^+, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass  $v$  als Supremum konvexer Funktionen selbst konvex ist. Man erhält

$$\begin{aligned}v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) &\leq tv(\mathbf{x}) + (1-t)v(\mathbf{y}) \\ &\leq t(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{x}) + (1-t)(K - \mathbf{1} \cdot \mathbf{y}) \\ &\leq K - \mathbf{1} \cdot (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}), \end{aligned}$$

also  $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ .

□

# Kapitel 2

## Die innere Approximation des Ausübungsgebiets

In diesem Kapitel soll eine innere Approximation des Ausübungsgebiets hergeleitet werden, d.h. es soll eine Menge  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  gefunden werden, die möglichst gut zu berechnen sein sollte. Dabei werden die Ergebnisse aus [1] soweit möglich auf den diskreten Fall übertragen. Zu diesem Zwecke wird auch hier ein Supermartingal  $M_{\alpha}^{\mathbf{x}}$  konstruiert, für das im diskreten Fall die Form

$$M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t) = (1 + \rho)^{-t} S_1^{\mathbf{x}}(t)^{-\alpha_1} \dots S_n^{\mathbf{x}}(t)^{-\alpha_n}$$

für passende  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (0, \infty)^n$  angesetzt wird.

### 2.1 Konstruktion des Supermartingals

Zunächst müssen die Bedingungen an  $\alpha$  bestimmt werden, unter denen  $M_{\alpha}^{\mathbf{x}}$  ein Supermartingal ist, unter denen also  $M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t) \geq \mathbb{E}(M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t+1) | \mathcal{F}_t)$  für alle  $t \geq 0$  gilt.

Dazu berechnet man

$$\begin{aligned}
M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t) &\geq \mathbb{E}(M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t+1) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t+1) | (\mathbf{Y}(k))_{k=1,\dots,t}) \\
&= \mathbb{E} \left( (1+\rho)^{-(t+1)} \prod_{j=1}^n \left( x_j Y_j(t+1) \prod_{k=1}^t Y_j(k) \right)^{-\alpha_j} \middle| (\mathbf{Y}(k))_{k=1,\dots,t} \right) \\
&= M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t) \mathbb{E} \left( (1+\rho)^{-1} \prod_{j=1}^n Y_j(t+1)^{-\alpha_j} \right) \\
&= M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t) (1+\rho)^{-1} \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{I}^n} q(\mathbf{w}) u_1^{-w_1 \alpha_1} \dots u_n^{-w_n \alpha_n},
\end{aligned}$$

da  $M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t)$   $\mathcal{F}_t$ -messbar und  $\mathbf{Y}(t+1)$  unabhängig von  $\mathcal{F}_t$  ist. Da  $M_{\alpha}^{\mathbf{x}}(t)$  und  $1+\rho$  positiv sind, ist  $M_{\alpha}^{\mathbf{x}}$  also genau dann ein Supermartingal, wenn gilt

$$\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{I}^n} q(\mathbf{w}) u_1^{-w_1 \alpha_1} \dots u_n^{-w_n \alpha_n} \leq 1 + \rho.$$

Wir setzen noch  $v_j = \ln(u_j)$  und schreiben dies als

$$F(\alpha) := \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{I}^n} q(\mathbf{w}) \exp \left( - \sum_l w_l v_l \alpha_l \right) \leq 1 + \rho.$$

Sei  $\Sigma$  die Menge aller  $\alpha$ , die diese Bedingung erfüllen.

**Lemma 3.** *Die Menge  $\Sigma$  ist konvex.*

*Beweis.* Für alle  $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{I}$  ist die Funktion  $\alpha \mapsto \exp(-\sum w_l v_l \alpha_l)$  konvex, denn es gilt für  $\alpha, \beta \in (0, \infty)^n$  und  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\exp \left( - \sum w_l v_l (t \alpha_l + (1-t) \beta_l) \right) &= \exp \left( -t \sum w_l v_l \alpha_l - (1-t) \sum w_l v_l \beta_l \right) \\
&\leq t \exp \left( - \sum w_l v_l \alpha_l \right) + (1-t) \exp \left( - \sum w_l v_l \beta_l \right),
\end{aligned}$$

da  $x \mapsto e^x$  konvex ist. Die Funktion  $F$  ist konvex, da  $q(\mathbf{w}) > 0$  für alle  $\mathbf{w} \in \mathcal{I}^n$  ist, also jeder Summand in der Definition von  $F$  konvex. Für konvexe Funktionen sind Sublevel-Mengen (d.h. Mengen der Form  $\{F \leq c\}$  für  $c \in \mathbb{R}$ ) konvex, insbesondere gilt dies für  $\Sigma$ . Siehe hierzu [3, Kapitel 3].  $\square$

Bevor wir zur angestrebten inneren Approximation des Ausübungsgebiets übergehen, wollen wir noch den Einfluß untersuchen, den die Unabhängigkeit der Aktien haben kann. Dafür gehen wir davon aus, dass für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  die Vektoren  $(Y_1(1), \dots, Y_k(1))$  und  $(Y_{k+1}(1), \dots, Y_n(1))$  unabhängig sind. Dann gilt für alle  $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{I}$

$$q(w_1, \dots, w_n) = q_k^1(w_1, \dots, w_k) q_n^{k+1}(w_{k+1}, \dots, w_n)$$

mit

$$q_k^1(w_1, \dots, w_k) := P(Y_1(1) = u_1^{w_1}, \dots, Y_k(1) = u_k^{w_k})$$

sowie

$$q_n^{k+1}(w_{k+1}, \dots, w_n) := P(Y_{k+1}(1) = u_{k+1}^{w_{k+1}}, \dots, Y_n(1) = u_n^{w_n})$$

Weiter definieren wir

$$F_k^1(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{w_1, \dots, w_k \in \mathcal{I}^k} q_k^1(w_1, \dots, w_k) \exp\left(-\sum_{l=1}^k w_l v_l \alpha_l\right)$$

$$F_n^{k+1}(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = \sum_{w_{k+1}, \dots, w_n \in \mathcal{I}^{n-k}} q_n^{k+1}(w_{k+1}, \dots, w_n) \exp\left(-\sum_{l=k+1}^n w_l v_l \alpha_l\right)$$

Damit gilt nun

**Lemma 4.** *Unter den genannten Voraussetzungen gilt*

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F_k^1(\alpha_1, \dots, \alpha_k) F_n^{k+1}(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{w_1, \dots, w_n \in \mathcal{I}} q(w_1, \dots, w_n) \exp\left(-\sum_{l=1}^n w_l v_l \alpha_l\right) \\
&= \sum_{w_1, \dots, w_k \in \mathcal{I}} \sum_{w_{k+1}, \dots, w_n \in \mathcal{I}} q_k^1(w_1, \dots, w_k) q_n^{k+1}(w_{k+1}, \dots, w_n) \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(-\sum_{l=1}^k w_l v_l \alpha_l\right) \exp\left(-\sum_{l=k+1}^n w_l v_l \alpha_l\right) \\
&= \left[ \sum_{w_1, \dots, w_k \in \mathcal{I}} q_k^1(w_1, \dots, w_k) \exp\left(-\sum_{l=1}^k w_l v_l \alpha_l\right) \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ \sum_{w_{k+1}, \dots, w_n \in \mathcal{I}} q_n^{k+1}(w_{k+1}, \dots, w_n) \exp\left(-\sum_{l=k+1}^n w_l v_l \alpha_l\right) \right] \\
&= F_k^1(\alpha_1, \dots, \alpha_k) F_n^{k+1}(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)
\end{aligned}$$

□

Besonders interessant ist wohl der Fall völliger Unabhängigkeit:

**Lemma 5.** Sind  $Y_1(1), \dots, Y_n(1)$  unabhängig, so gilt

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{j=1}^n [p_j e^{-v_j \alpha_j} + (1 - p_j) e^{v_j \alpha_j}]$$

*Beweis.* Dies folgt durch mehrfache Anwendung des vorherigen Lemmas. □

## 2.2 Die innere Approximation

Bevor die eigentliche Approximation formuliert werden kann, wird noch folgendes Lemma benötigt:

**Lemma 6.** Die Funktion  $g_\alpha(\mathbf{x}) := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} (K - \sum x_j)^+$  für  $\alpha \in (0, \infty)^n$  ist beschränkt und hat ihr Maximum bei  $K \frac{\alpha}{1+|\alpha|}$ .

*Beweis.* Wir führen die in [1] angegebene Beweisidee aus:

Da  $g_{\alpha}$  auf der Menge  $\{\mathbf{x} \in (0, \infty)^n \mid K - \sum x_i \leq 0\}$  verschwindet, genügt es das Maximum auf der Menge  $T$  zu bestimmen. Dazu betrachten wir  $g_{\alpha}$  auf Hyperflächen der Form  $\{\mathbf{x} \in (0, \infty)^n \mid s - \sum x_i = 0\}$  für  $0 < s < K$ . Mit dieser Nebenbedingung wenden wir die Methode von Lagrange an. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \cdots x_j^{\alpha_j-1} \cdots x_n^{\alpha_n} \left[ \alpha_j \left( K - \sum x_i \right) - x_j \right] &= \lambda \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ \sum x_i &= s. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\lambda$  der Lagrange-Multiplikator. Setzt man jeweils zwei linke Seiten der ersten Gleichung für  $j \neq k$  gleich, erhält man

$$x_k[(K - s)\alpha_j - x_j] = x_j[(K - s)\alpha_k - x_k]$$

und hieraus schließlich

$$x_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_k} x_k.$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung des Systems ein, erhält man

$$x_j = \frac{\alpha_j}{|\alpha|} s \tag{2.1}$$

als einzig mögliche Lösung des Gleichungssystems. Einsetzen in das System zeigt, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt. Betrachtet man die Funktion  $g_{\alpha}$  wird klar, dass es sich um das globale Maximum (auf der Hyperfläche zum Parameter  $s$ ) handeln muss. Setzt man diese Lösung in  $g_{\alpha}$  ein, so folgt

$$\begin{aligned} g_{\alpha} \left( \frac{s}{|\alpha|} \alpha \right) &= \left( \frac{s}{|\alpha|} \alpha_1 \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \frac{s}{|\alpha|} \alpha_n \right)^{\alpha_n} (K - s) \\ &= \alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n} \frac{s^{|\alpha|}}{|\alpha|^{|\alpha|}} (K - s) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muss nun bezüglich  $s$  maximiert werden. Ableiten liefert

$$\frac{d}{ds} g_{\alpha} \left( \frac{s}{|\alpha|} \alpha \right) = \frac{\alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}}{|\alpha|^{|\alpha|-1}} s^{|\alpha|-1} \left[ K - \left( \frac{1 + |\alpha|}{|\alpha|} \right) s \right] \stackrel{!}{=} 0,$$

woraus  $s = \frac{K|\boldsymbol{\alpha}|}{1+|\boldsymbol{\alpha}|}$  folgt. Setzt man dies in (2.1) ein, erhält man

$$x_j = \frac{K}{1+|\boldsymbol{\alpha}|} \alpha_j,$$

was zu zeigen war. □

Die folgende Abbildung spielt im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle: Wir definieren

$$\psi : (0, \infty)^n \rightarrow T, \quad \boldsymbol{\alpha} \mapsto \frac{K}{1+|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha}.$$

**Lemma 7.** *Sei*

$$\phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{K-|\mathbf{x}|} \mathbf{x}.$$

Dann gilt  $\psi^{-1} = \phi$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\psi(\phi(\mathbf{x})) = \psi\left(\frac{1}{K-|\mathbf{x}|} \mathbf{x}\right) = \frac{K}{1+\frac{|\mathbf{x}|}{K-|\mathbf{x}|}} \frac{1}{K-|\mathbf{x}|} \mathbf{x} = \frac{K}{\frac{K}{K-|\mathbf{x}|}} \frac{1}{K-|\mathbf{x}|} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

sowie

$$\phi(\psi(\boldsymbol{\alpha})) = \phi\left(\frac{K}{1+|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha}\right) = \frac{1}{K-\frac{K|\boldsymbol{\alpha}|}{1+|\boldsymbol{\alpha}|}} \frac{K}{1+|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\frac{K}{1+|\boldsymbol{\alpha}|}} \frac{K}{1+|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha},$$

was zu zeigen war. □

Relevant ist noch folgende Eigenschaft:

**Lemma 8.** *Die Abbildung  $\psi$  bildet Strecken wieder auf Strecken ab. Insbesondere werden konvexe Mengen wieder auf konvexe Mengen abgebildet.*

*Beweis.* Sei die Strecke durch die Abbildung  $t \mapsto \boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}$  gegeben, wobei  $\boldsymbol{\alpha} \in (0, \infty)^n$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  ist und  $\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}$  für alle  $t$  in  $(0, \infty)^n$  liegt.



Dann gilt  $|\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|$ , wobei auch für  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$   $|\mathbf{v}| = v_1 + \dots + v_n$  sei. Man berechnet den Geschwindigkeitsvektor des Bildes unter  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v})) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}|} (\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|} (\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}) \right) \\ &= -\frac{K|\mathbf{v}|}{(1 + |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|)^2} (\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v}) + \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|)^2} [K(1 + |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|)\mathbf{v} - K|\mathbf{v}|(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v})] \\ &= \frac{1}{(1 + |\boldsymbol{\alpha}| + t|\mathbf{v}|)^2} [K(1 + |\boldsymbol{\alpha}|)\mathbf{v} - K|\mathbf{v}|\boldsymbol{\alpha}] \end{aligned}$$

Da die Richtung des Geschwindigkeitsvektors gleich bleibt (nur der Betrag ändert sich), definiert  $t \mapsto \psi(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{v})$  eine Strecke. Hieraus folgt offenbar auch, dass  $\psi$  die Konvexität von Mengen erhält.  $\square$

Nun kann man die zentrale Aussage formulieren:

**Satz 1.** Sei  $\mathcal{E}' := \psi(\Sigma)$ . Dann gilt

- a)  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ .
- b)  $\mathcal{E}'$  ist konvex.

*Beweis.* Der Beweis entspricht im Wesentlichen dem aus [1]. Zunächst gilt offenbar

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{x}}(t)g_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{S}^{\mathbf{x}}(t)) &= (1 + \rho)^{-t} S_1^{\mathbf{x}}(t)^{-\alpha_1} \dots S_n^{\mathbf{x}}(t)^{-\alpha_n} S_1^{\mathbf{x}}(t)^{\alpha_1} \dots S_n^{\mathbf{x}}(t)^{\alpha_n} \left( K - \sum_{j=1}^n S_j^{\mathbf{x}}(t) \right)^+ \\ &= (1 + \rho)^{-t} \left( K - \sum_{j=1}^n S_j^{\mathbf{x}}(t) \right)^+ . \end{aligned}$$

Sei  $h_{\boldsymbol{\alpha}} : (0, \infty)^n \rightarrow (0, \infty)$  definiert durch

$$\mathbf{x} \mapsto \left( K \frac{\alpha_1}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \right)^{\alpha_1} \dots \left( K \frac{\alpha_n}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \right)^{\alpha_n} \left( K - K \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \right)^+ x_1^{-\alpha_1} \dots x_n^{-\alpha_n}$$

Hiermit folgt für jedes  $\tau \in \mathcal{T}$ ,  $\mathbf{x} \in (0, \infty)^n$  und  $\boldsymbol{\alpha} \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ (1 + \rho)^{-\tau} (K - \sum_{j=1}^n S_j^{\mathbf{x}}(\tau))^+ \right] &= \mathbb{E} [M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{x}}(\tau) g_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{S}^{\mathbf{x}}(\tau))] \\
&\leq \mathbb{E} \left[ M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{x}}(\tau) \sup_{y \in (0, \infty)^n} g_{\boldsymbol{\alpha}}(y) \right] \\
&= \sup_{y \in (0, \infty)^n} g_{\boldsymbol{\alpha}}(y) \mathbb{E} [M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{x}}(\tau)] \\
&\leq g_{\boldsymbol{\alpha}} \left( \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} \right) \mathbb{E} [M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{x}}(0)] \\
&= g_{\boldsymbol{\alpha}} \left( \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} \right) x_1^{-\alpha_1} \cdots x_n^{-\alpha_n} \\
&= h_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

da  $M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{x}}$  und  $g_{\boldsymbol{\alpha}}$  nichtnegativ sind und mit dem Optional Sampling Theorem für nichtnegative diskrete Supermartingale und fast sicher endliche Stoppzeiten, siehe [2, Satz 10.11].

Es folgt, dass auch

$$v(\mathbf{x}) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ (1 + \rho)^{-\tau} (K - \sum_{j=1}^n S_j^{\mathbf{x}}(\tau))^+ \right] \leq h_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x} \in (0, \infty)^n$  gilt, insbesondere also

$$v \left( \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} \right) \leq h_{\boldsymbol{\alpha}} \left( \frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} \right) = \left( K - K \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \right)^+$$

Der letzte Term gibt die Auszahlung bei einer Ausübung der Option an, wenn der Kurs  $\frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha}$  beträgt. Da diese mindestens so groß wie der faire Preis  $v(\frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha})$  ist, gilt  $\frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{E}$ .

Wir haben gezeigt: Ist  $\boldsymbol{\alpha} \in \Sigma$ , dann gilt  $\frac{K}{1 + |\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha} = \psi(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{E}$ . Dies ist gerade die Behauptung.

Nach Lemma 3 ist  $\Sigma$  konvex, und nach Lemma 8 erhält  $\psi$  Konvexität. Also ist auch  $\mathcal{E}'$  wieder konvex.  $\square$

Eine bestimmte Teilmenge von  $\mathcal{E}'$  ist leicht explizit anzugeben. Dazu bemerkt man, dass für jedes  $j = 1, \dots, n$  gilt

$$F(0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0) = p_j e^{-v_j \alpha_j} + (1 - p_j) e^{v_j \alpha_j}.$$

Nun ist  $F(0, \dots, 0) = 1 < 1 + \rho$ , weiter  $\lim_{\alpha_j \rightarrow \infty} F(0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0) = +\infty$  und  $F$  konvex. Also hat die Gleichung  $F(0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0) = 1 + \rho$  genau eine positive Lösung  $\alpha_j^*$ . Man erhält einen Punkt  $\psi(0, \dots, 0, \alpha_j^*, 0, \dots, 0)$  von  $\mathcal{E}'$  auf jeder Koordinatenachse. Die von diesen Punkten aufgespannte Hyperebene liegt wegen der Konvexität von  $\mathcal{E}'$  in  $\mathcal{E}'$ . Es ist klar, dass  $\Sigma$ , und damit auch  $\mathcal{E}'$ , eine Umgebung von  $\mathbf{0} \in (0, \infty)^n$  enthält. Aus der Konvexität von  $\mathcal{E}'$  folgt damit, dass  $\mathcal{E}'$  das Gebiet unterhalb dieser Hyperebene (geschnitten mit  $(0, \infty)^n$ ) enthält.

Es ist noch zu erwähnen, dass es im 1-dimensionalen Fall möglich ist, das Ausübungsgebiet explizit zu bestimmen. Dabei wird (im diskreten Fall) allerdings das Ausübungsgebiet als diskrete Menge von Punkten aufgefasst, was nicht dem in dieser Arbeit verwendeten Vorgehen entspricht. Deshalb wird hier darauf verzichtet, das Theorem und den Beweis zu reproduzieren, und stattdessen auf [4, Satz 4.21] verwiesen.

# Kapitel 3

## Praktische Aspekte

In diesem Kapitel wird auf einige für die Anwendung der beschriebenen Methoden wichtige Aspekte eingegangen.

Grundsätzlich bietet sich folgendes Vorgehen an: Wollen wir für einen Aktienkurs  $\mathbf{x} \in T_{\mathbf{a}}$  feststellen, ob die Option ausgeübt werden soll, so prüfen wir, ob

$$F(\phi(a_1x_1, \dots, a_nx_n)) \leq 1 + \rho$$

gilt. Ist dies der Fall, dann sollte die Option ausgeübt werden. Ist dies nicht der Fall, kann man keine Aussage treffen.

### 3.1 Aufwand des Verfahrens

Zunächst stellt man fest, dass im Fall voller Abhängigkeiten das Modell  $2^n$  freie Parameter besitzt. Dies ergibt sich, da nach dem (beliebigen) festlegen der  $2^n - 1$  Wahrscheinlichkeiten  $q(\mathbf{w})$  nur noch  $\rho$  gewählt werden kann. Die Parameter  $u_1, \dots, u_n$  sind dann durch die Martingalmaßbedingung festgelegt. Für Basket-Optionen aus vielen Aktien (großes  $n$ ) ist dies nicht praktikabel. Abgesehen davon, dass für die Berechnung der Funktion  $F$   $2^n$  Terme aufsummiert werden müssen, ist es auch nötig,  $2^n$  Parameter zu schätzen.

Besser wird die Situation, wenn Unabhängigkeit unterstellt wird. Dann reduziert sich die Anzahl der zu schätzenden Parameter auf  $n + 1$ : Den Wahrscheinlichkeiten

$p_1, \dots, p_n$  und dem Zinssatz  $\rho$ . Auch das Auswerten der Funktion  $F$  ist dann praktikabel.

Allerdings wäre es möglich, Abhängigkeiten zwischen einzelnen ausgewählten Aktien zuzulassen. Zum Beispiel könnte man, aus ökonomischen Überlegungen heraus, zwischen zwei bestimmten Aktien eine Abhängigkeit modellieren und alle anderen Aktien als unabhängig ansehen. Aus Lemma 4 folgt, dass die Anzahl der zu schätzenden Parameter in diesem Fall um zwei steigt.

## 3.2 Endliche Laufzeit

Wie Eingang erwähnt stellt die Annahme eines Puts mit unendlicher Laufzeit lediglich eine Idealisierung dar, die eine einfachere Handhabung ermöglicht. In der Realität hat ein Put eine endliche Laufzeit. Es stellt sich die Frage, inwiefern die innere Approximation des Ausübungsgebiets auf den Fall einer endlichen Laufzeit anwendbar ist. Dazu kann man heuristisch folgendermaßen argumentieren:

Ein Put mit unendlicher Laufzeit ist immer mindestens soviel Wert wie ein Put mit endlicher Laufzeit (auf dasselbe Basisfinanzgut), da bei unendlicher Laufzeit alle Ausübungsmöglichkeiten der Option mit endlicher Laufzeit vorliegen. Hieraus folgt, dass für jeden Preisvektor  $\mathbf{x}$ , für den bei unendlicher Laufzeit ausgeübt wird, auch bei endlicher Laufzeit ausgeübt werden sollte. Das Ausübungsgebiet bei unendlicher Laufzeit ist also in dem Ausübungsgebiet bei endlicher Laufzeit enthalten. Folglich ist eine innere Approximation für unendliche Laufzeit auch eine innere Approximation für endliche Laufzeit.

# Kapitel 4

## Numerische Rechnungen

In diesem Kapitel wird exemplarisch die innere Approximation des Ausübungsgebiets im Fall zweier Aktien numerisch berechnet.

Es wird das in Kapitel 3 beschriebene Vorgehen auf ein Gitter von Preisvektoren angewandt. In allen Beispielen ist  $\mathbf{a} = \mathbf{1}$  sowie  $K = 1$ . Die Parameter  $p_1, p_2$  im unabhängigen Fall bzw.  $q(\mathbf{w})$  im abhängigen Fall sowie  $\rho$  werden vorgegeben. Die Parameter  $u_1$  und  $u_2$  werden dann aus der Martingalmaßbedingung bestimmt. Untersucht wird die Abhängigkeit der inneren Approximation von den Parametern  $p_1, p_2$  bzw.  $q(\mathbf{w})$  und von  $\rho$ .

Numerische Rechnungen für den 2-dimensionalen Fall wurden auch in [1] durchgeführt. Hier soll untersucht werden, inwiefern die Ergebnisse übereinstimmen. Außerdem ist es interessant zu überprüfen, ob die innere Approximation des Ausübungsgebiets die Eigenschaften aufweist, die man auch von dem tatsächlichen Ausübungsgebiet erwarten würde. Dies gibt zumindest heuristisch einen Hinweis auf die Güte der Approximation.

Zuerst betrachten wir den Fall unabhängiger Preisprozesse.

## 4.1 Unabhängige Preisprozesse

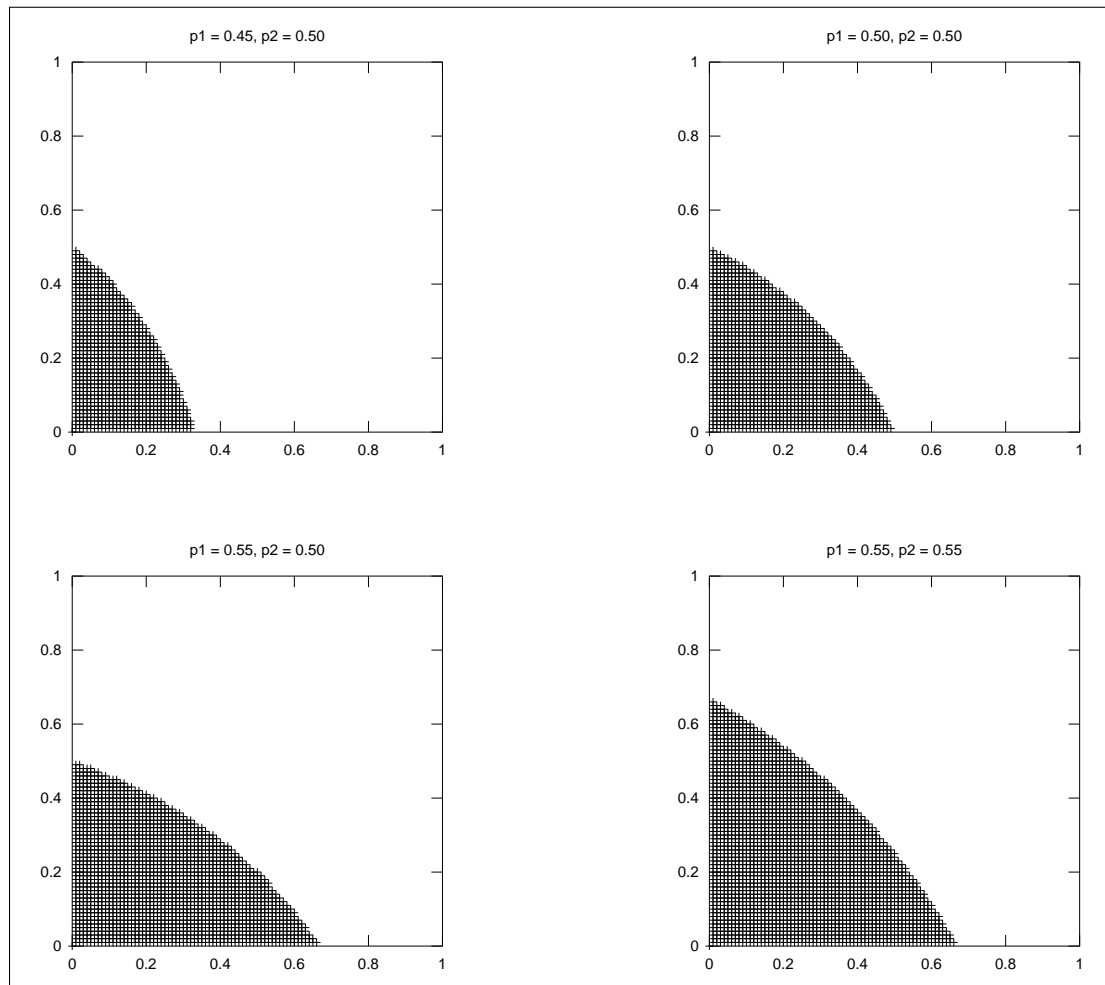


Abbildung 4.1: Approximation des Ausübungsgebiets in Abhängigkeit von den Wahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$ . Dabei ist  $\rho = 0.04$ .

Abbildung 4.1 zeigt die Abhängigkeit der Approximation von den Wahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$ . Man erkennt, dass sich die Approximation so verhält, wie man es auch von dem tatsächlichen Ausübungsgebiet erwarten würde: Steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis einer Aktie einen Sprung nach oben macht, so muss damit gerechnet werden, dass die Wertentwicklung des Puts mit der Zeit schlechter ausfällt. Folglich macht es bereits bei einer kleineren Auszahlung Sinn, die Option auszuüben, d.h. das Ausübungsgebiet wird größer. Weiter kann man

beobachten, dass sich die Größe der Approximation nur in Richtung der Achse ändert, für die sich die Wahrscheinlichkeit geändert hat. Auch dies entspricht den Erwartungen.

Nun betrachten wir die Abhängigkeit von  $\rho$ .

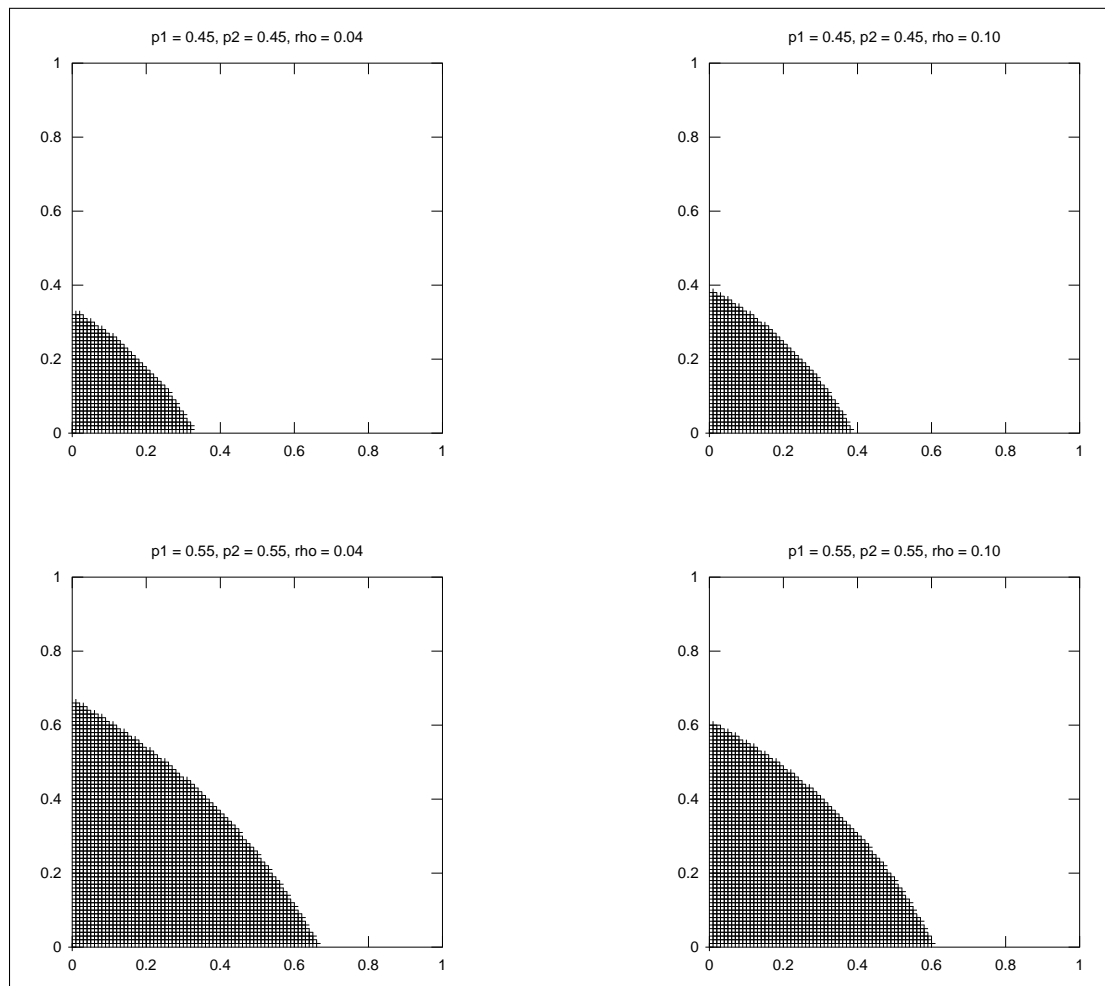


Abbildung 4.2: Approximation des Ausübungsgebiets in Abhängigkeit von  $\rho$ .

Hier ist zu beobachten, dass die Auswirkung, die eine Änderung von  $\rho$  nach sich zieht, von  $p_1$  und  $p_2$  abhängt: Gilt  $p_1, p_2 < 1/2$ , dann wächst die Approximation mit  $\rho$ . Ist hingegen  $p_1, p_2 > 1/2$ , so ist es umgekehrt.



Eine mögliche (allerdings eher unpräzise) Interpretation ist folgende: Der faire Preis der Option entsteht durch den Vergleich der Auszahlung der Option mit dem Wert der risikofreien Anlage. Gilt nun  $p_1, p_2 < 1/2$ , dann muss mit einem Ansteigen des Wertes der Option gerechnet werden, es lohnt sich also eher, abzuwarten. Ein höherer Zinssatz reduziert aber den Wert der Option mit der Zeit immer stärker, hat also den gegenteiligen Effekt.

Gilt andererseits  $p_1, p_2 > 1/2$ , so muss mit einem Fallen des Wertes der Option (im Vergleich zur risikolosen Anlage) gerechnet werden, es lohnt sich also eher, die Option früh auszuüben. Ein höherer Zinssatz reduziert diesen zu erwartenden Wertverlust.

Ist  $p_1 < 1/2$  und  $p_2 > 1/2$ , so kann man denselben Effekt für jede Achse einzeln beobachten, wie Abbildung 4.3 zeigt.

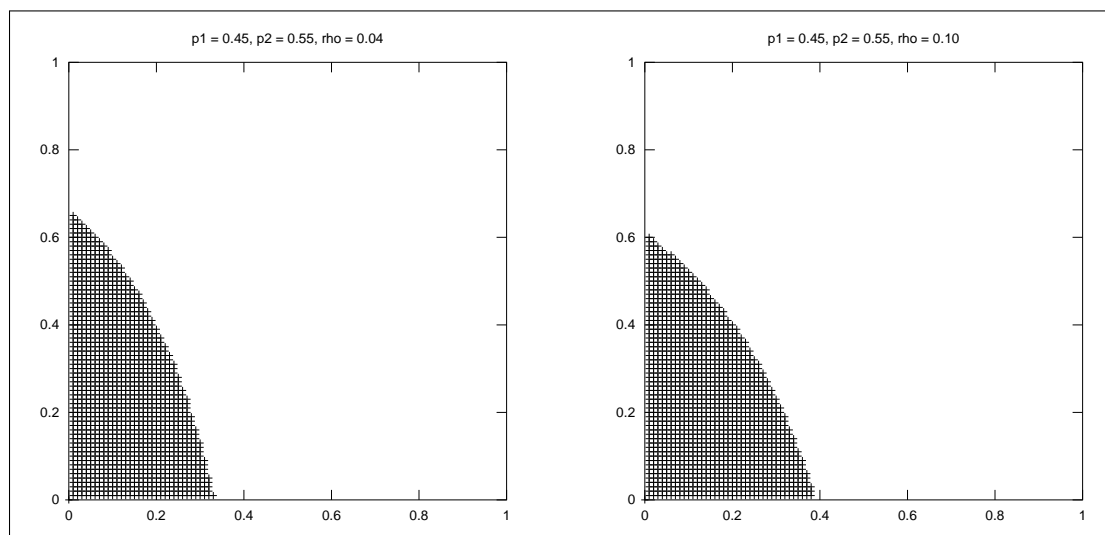


Abbildung 4.3: Approximation des Ausübungsgebiets in Abhängigkeit von  $\rho$ . Dabei ist  $p_1 < 1/2$  und  $p_2 > 1/2$ .

Es ist noch anzumerken, dass der „kritische“ Wert  $1/2$  nur experimentell ermittelt wurde. Es ist also möglich, dass sich der tatsächliche Wert leicht von  $1/2$  unterscheidet. Hierzu zeigt Abbildung 4.4 noch einmal diesen Effekt für Werte von  $p_1$  und  $p_2$ , die nahe bei  $1/2$  sind.

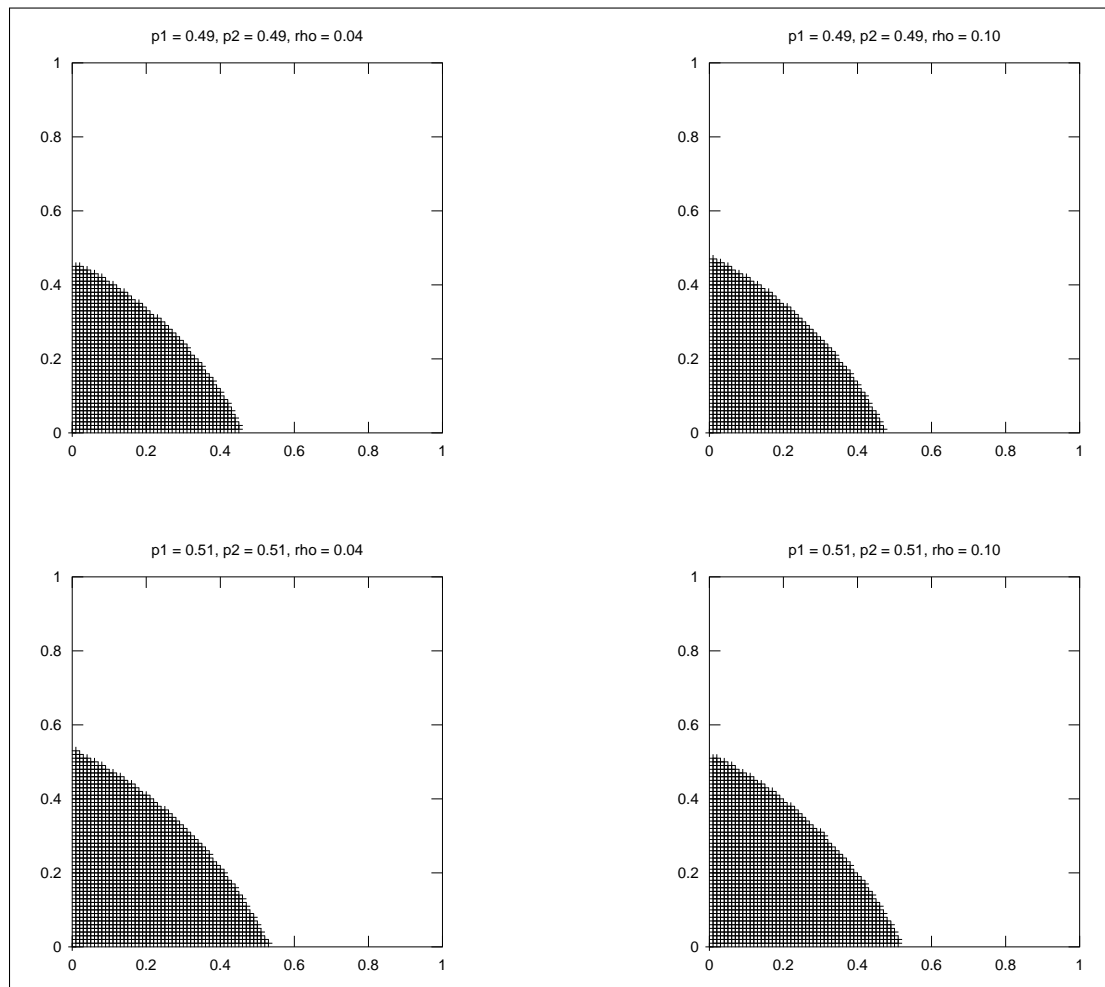


Abbildung 4.4: Approximation des Ausübungsgebiets in Abhängigkeit von  $\rho$ . Dabei wurden  $p_1, p_2$  nahe bei  $1/2$  gewählt.

Nun betrachten wir abhängige Preisprozesse.

## 4.2 Abhängige Preisprozesse

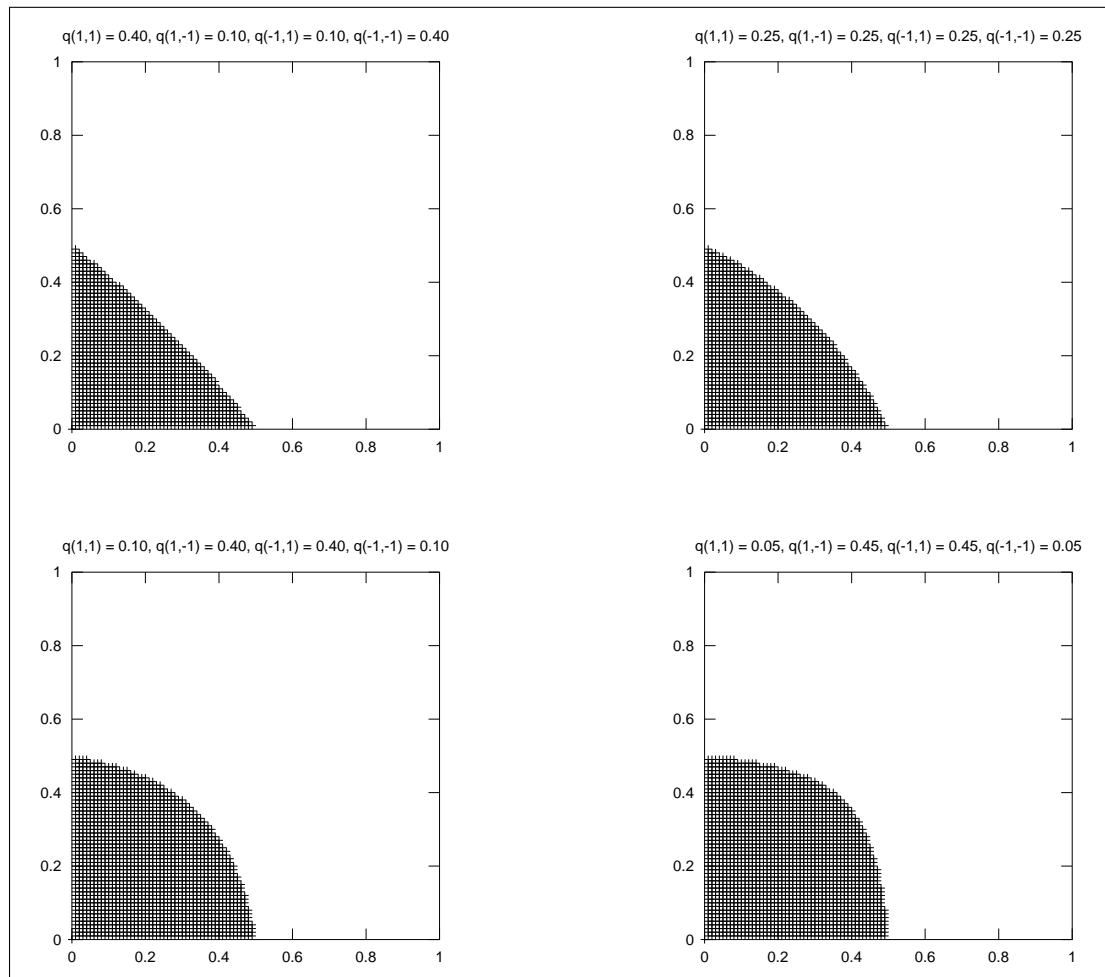


Abbildung 4.5: Approximation des Ausübungsgebiets in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten  $q(\mathbf{w})$ , bei vorhandenen Abhängigkeiten. Dabei ist  $\rho = 0.04$ .

Bei hoher positiver Korrelation hat die Approximation in etwa die Form eines Simplexes. Mit sinkender Korrelation verliert die Approximation zunehmend diese einfache Form und wird größer. Dabei wächst die Approximation besonders stark in der Nähe der Achse  $x_1 = x_2$ . Paulsen gibt in [1] die folgende Interpretation: Mit steigender (positiver) Korrelation wächst die Wahrscheinlichkeit, dass die Kursentwicklungen beider Aktien in dieselbe Richtung verlaufen. Folglich steigt

auch die Wahrscheinlichkeit für eine geringere Summe der Aktienkurse, d.h. das Ausübungsgebiet wird kleiner.

# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

Die in [1] für den stetigen Fall erzielten Ergebnisse für die innere Approximation des Ausübungsgebiets konnten größtenteils auf den diskreten Fall übertragen werden. Die numerischen Berechnungen haben gezeigt, dass die Approximation die Eigenschaften aufweist, die man auch von dem eigentlichen Ausübungsgebiet erwarten würde. Außerdem stimmen die numerischen Ergebnisse qualitativ mit denen aus [1] überein. Insgesamt weisen die inneren Approximationen im stetigen und im diskreten Fall ähnliche Eigenschaften auf.

Als weiterführende Fragestellung würde es sich anbieten, auch die äußere Approximation des Ausübungsgebiets, wie sie in [1] hergeleitet wird, auf den diskreten Fall zu übertragen. Außerdem wäre es interessant zu untersuchen, wie stark die Approximation von dem tatsächlichen Ausübungsgebiet abweicht.

Schließlich sollte genauer untersucht werden, warum der Einfluß des Zinssatzes  $\rho$  auf die innere Approximation davon abhängt, ob die Wahrscheinlichkeiten  $p_j$  größer oder kleiner  $1/2$  sind.

# Literaturverzeichnis

- [1] PAULSEN, VOLKERT: *Bounds for the American perpetual put on a stock index*. Journal of Applied Probability 38, 2001. 1, 5, 8, 11, 14, 19, 24, 26
- [2] KLENKE, ACHIM: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2008. 6, 15
- [3] BOYD, STEPHEN und LIEVEN VANDENBERGHE: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. 9
- [4] IRLE, ALBRECHT: *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. Teubner, 2003. 16