Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Die Bewertung von Derivaten in zeitdiskreten Modellen

Bachelorarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung:
Dr. Volkert Paulsen

Eingereicht von:
Jörn Borrink

Münster, den 23. August 2012

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Jörn Borrink, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Münster, den 23. August 2012

Jörn Borrink

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit gibt eine Einführung in die Finanzmathematik mit dem Ziel der Bewertung von Derivaten in einem Finanzmarkt in diskreter Zeit, wobei das Hauptaugenmerk auf die Claims (Derivate, die nur in einen vorher festgelegtem Zeitpunkt eine Auszahlung liefern) gelegt wird.
Das erste Kapitel beginnt mit einer informellen Übersicht von finanzmathematischen Bezeichnungen, woraufhin die Erläuterung des Replikationsprinzips folgt. Im Anschluss werden einige Anwendungsbeispiele dieses zentralen Prinzips behandelt.
Der erste Hauptteil dieser Arbeit beinhaltet die Formulierung eines exakten mathematischen Modells sowie die Bewertung von duplizierbaren (hedgebaren) Claims. Nachdem die Zutaten des Modells in diskreter Zeit sowie die Arbitragefreiheit eingeführt wurden, wird mit Hilfe der Idee des Hedgings die erste Bewertungsmöglichkeit für hedgebare Claims aufgezeigt. Anschließend folgt die Einführung von Martingalen sowie die Behandlung der beiden Fundamentalsätze der Preistheorie (No-Arbitrage Theoreme) mit dem Beweis des ersten Theorems unter Verwendung des Separationssatzes. Unter Benutzung des äquivalenten Martingalmaßes wird eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des fairen Preises eines duplizierbaren Claims erläutert.
Im dritten Kapitel wird die Bestimmung des faires Preis eines Claims anhand der beiden Möglichkeiten (Hedging und äquivalentes Martingalmaß) im (vollständigen) Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein vorgeführt.
Der zweite Hauptteil behandelt die Theorie für die allgemeine Bewertung von Derivaten. Unter Zuhilfenahme des Bipolar Theorems wird gezeigt, dass die Menge der arbitragefreien Preise eines Claims immer mit der Menge der Erwartungswerte der diskontierten Claimauszahlungen bezüglich jedes äquivalenten Martingalmaßes übereinstimmt.
Die kurze Vorstellung des Trinomialmodells mit Beispielen zur Bewertung von hedgebaren und nicht-hedgebaren Claims in einem unvollständigen Markt beendet die Einführung in die Bewertung von Derivaten.

1. Informelle Einführung in die Finanzmathematik

In dieser kleinen Definitionsübersicht soll - ohne die explizite Charakterisierung mit Hilfe eines mathematischen Modells - eine Einführung in die Begriffe der Derivate und der Arbitragefreiheit gegeben werden. Darauf aufbauend wird das Law of One Price (Replikationsprinzip) hergeleitet.

1.1. Derivate

Unter einem Handel (einer Handelsstrategie) in einem Finanzmarkt verstehen wir die Veränderung eines Portfolios im Verlauf der Zeit. Dieses Portfolio kann sich aus verschiedenen Basisfinanzgütern (z.B. Aktien oder Rentenpapieren) zusammensetzen. Die Wertentwicklung der Basisfinanzgüter ist einer gewissen Unsicherheit unterworfen. Wenn wir eine Aktie kaufen, so entspricht unser Verlust im schlimmsten Szenario dem Kaufpreis (bei völliger Wertlosigkeit der Aktie). Entsprechend ist aber unser maximaler Gewinn unbeschränkt. Vermuten wir steigende Kurse, so würden wir die Aktie kaufen und sie zu einem späteren Zeitpunkt verkaufen (mit Gewinn, falls wir Recht behalten). Hierfür benötigen wir aber als Startkapital den heutigen Wert der Aktie. Mittels Derivaten ist es auch mit einem geringeren Startkapital möglich auf zum Beispiel steigende Kurse zu "wetten". Hierfür ist der Kauf der Aktie (vorerst) nicht nötig.

Definition 1.1.1 (Derivat)
Bei Derivaten handelt es sich um Finanzprodukte, die an andere Finanzprodukte gekoppelt sind, deren Wert also vom Wert anderer sogenannter Basiswerte (Underlyings) abhängt. Der Käufer eines Derivats ist in der long-Position und der Verkäufer in der short-Position.[4]

Es werden drei Grundgeschäftsarten von Derivaten unterschieden:

1. Forwards (Futures)
2. Optionen
3. Swaps

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit sind die beiden zuerst genannten Typen von Relevanz.

Definition 1.1.2 (Forward)
Ein Forward-Kontrakt ist eine zum heutigen Zeitpunkt eingegangene Verpflichtung, ein bestimmtes Wertpapier (das Underlying) zu einem in der Zukunft liegendem Zeitpunkt (dem Fälligkeitszeitpunkt T) zu einem heute festgesetzten Preis F (dem Forward-Preis) zu kaufen. Das Eingehen der Kauf- bzw. Verkaufsverpflichtung ist dabei zum heutigen Zeitpunkt kostenlos.

Bei Forwards handelt es sich um sogenannte unbedingte Termingeschäfte, das heißt, es besteht die Verpflichtung zur Ausführung des Kontraktes in Form des Kaufes bzw. Verkaufes des Underlyings zum Preis F im Fälligkeitszeitpunkt.
Sei S_T der Kurs des Wertpapiers zum Zeitpunkt T, so beträgt der Wert des Forward-Kontraktes zum Ausübungszeitpunkt T

$$S_T - F.$$

Der Verkäufer eines Forwards spekuliert also auf einen Kurs S_T unterhalb von F, während der Käufer einen hohen Kurs S_T erwartet. Liegt der tatsächliche Kurs des Underlyings im Fälligkeitszeitpunkt unterhalb des Forward-Preises, erleidet der Käufer einen Verlust. Möchte der Käufer dieses Szenario vermeiden, so sollte er anstelle des Forwards ein Optionsgeschäft eingehen.

Definition 1.1.3 (Option)
Unter einer Option versteht man ein bedingtes Termingeschäft, das heißt, der Käufer der Option besitzt das Recht, aber nicht die Verpflichtung, seine Option auszuüben. Für dieses Recht hat der Käufer einen Preis, die sogenannte Optionsprämie (den Optionspreis), an den Verkäufer zu zahlen. Die Standard-Optionen werden als plain-vanilla options bezeichnet:

Definition *(Call-Option)*
Eine Call-Option ist das Recht, ein bestimmtes Wirtschaftsgut (das Underlying) an einem späteren Zeitpunkt für einen vereinbarten Basispreis (den Strikepreis) zu kaufen.

Definition *(Put-Option)*
Eine Put-Option ist das Recht, ein bestimmtes Wirtschaftsgut (das Underlying) an einem späteren Zeitpunkt für einen vereinbarten Basispreis (den Strikepreis) zu verkaufen.

Eine *amerikanische Option* gibt dem Optionsinhaber das Recht, die Option während der kompletten Laufzeit einmalig auszuüben, während bei einer *europäischen Option* dies nur zum Fälligkeitszeitpunkt T gestattet ist. Die Ausführungen in dieser Arbeit basieren auf den europäischen Optionen.
Eine europäische Call-Option (Put-Option) ist demnach das Recht, das Underlying im Fälligkeitszeitpunkt T zum heute festgelegten Strikepreis zu kaufen (bzw. zu verkaufen). Da es sich um keine Verpflichtung handelt, wird der Käufer die Option nur ausführen, wenn der Wert des Underlyings zum Fälligkeitstermin oberhalb (bzw. unterhalb) des Basispreises notiert. Dies bedeutet, er hat zum Zeitpunkt T eine nichtnegative Auszahlung. Bei einem Strikepreis in Höhe von K beträgt die Auszahlung des Optionsinhabers (=Long-Position) im Ausübungszeitpunkt T demnach für einen

$$\text{Call:} \quad \max\{S_T - K, 0\} := [S_T - K]^+$$
$$\text{Put:} \quad \max\{K - S_T, 0\} := [K - S_T]^+$$

Die Auszahlung des Verkäufers (=Short-Position) entspricht der negativen Auszahlung des Käufers. Die graphische Darstellung befindet sich in Abbildung 1.1.

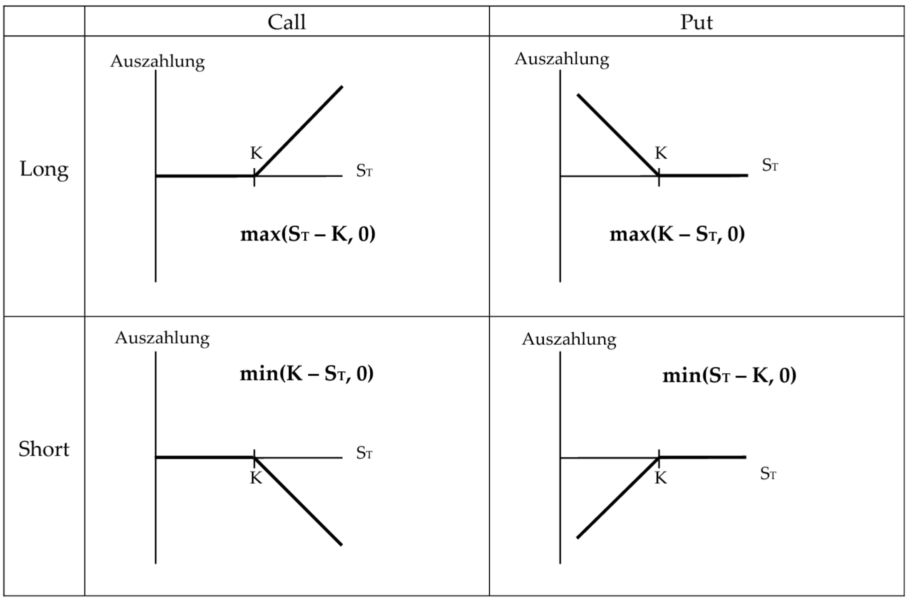

Abbildung 1.1.: Auszahlungsprofile der Call- und Put-Optionen

Die Charakterisierung der Vorteilhaftigkeit einer Option für den Optionsinhaber bei sofortiger Ausübung stellt die Tabelle 1.1 dar.

Auszahlung	Option ist
> 0	im Geld
$= 0$	am Geld
< 0	aus dem Geld

Tabelle 1.1.: Notation einer Option bei sofortiger Ausübung

Es kommt zur Ausübung einer Option, wenn diese im Geld liegt. Notiert die Option am Geld, so ist der Optionsinhaber indifferent zwischen Ausübung und Verfall der Option. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass in diesem Szenario die Option ausgeübt wird.

Die Zuordnung der Begrifflichkeiten kann im ersten Moment sehr verwirrend sein, wie es Serge Demolière passend formulierte:

> „Welcher Laie wird wohl je verstehen, dass der Verkäufer einer Verkaufsoption bei Ausübung der Verkaufsoption durch den Käufer der Verkaufsoption der Käufer der vom Käufer der Verkaufsoption verkauften Wertpapiere ist?“

Aus diesem Grund geben wir zum Abschluss eine Übersicht der für diese Arbeit relevanten Begrifflichkeiten und Eigenschaften.

<table>
<tr><th>Options-Position</th><th>Bedeutung der Options-Position</th><th>im Geld (Ausübung)</th><th>am Geld (Ausübung)</th><th>aus dem Geld (Verfall)</th></tr>
<tr><td>Long Call</td><td>Kauf einer Kaufoption</td><td rowspan="2">$S_T > K$</td><td rowspan="2">$S_T = K$</td><td rowspan="2">$S_T < K$</td></tr>
<tr><td>Short Call</td><td>Verkauf einer Kaufoption</td></tr>
<tr><td>Long Put</td><td>Kauf einer Verkaufsoption</td><td rowspan="2">$S_T < K$</td><td rowspan="2">$S_T = K$</td><td rowspan="2">$S_T > K$</td></tr>
<tr><td>Short Put</td><td>Verkauf einer Verkaufsoption</td></tr>
</table>

Tabelle 1.2.: Übersicht Call- und Put-Optionen

1.2. Arbitrage

A little joke:

> „A professor working in Mathematical Finance and a normal person go on a walk and the normal person sees a 100€ bill lying on the street. When the normal person wants to pick it up, the professor says: don’t try to do that. It is absolutely impossible that there is a 100€ bill lying on the street.

> Indeed, if it were lying on the street, somebody else would have picked it up before you.“[1]

Dieser kleine Witz lässt den Grundgedanken der Arbitragefreiheit erkennen, nämlich dass in einem Finanzmarkt *nicht einfach Geld herumliegt*. Dies begründet sich in der Annahme der Existenz der sogenannten Arbitrageure. Hierbei handelt es sich um Personen, die gezielt nach risikolosen Gewinnen suchen und daher die Chance, den 100€ Schein zu bekommen, schon genutzt hätten.

Definition 1.2.1 (Arbitrage)
Eine Arbitragemöglichkeit in einem Finanzmarkt ist die Chance einen Profit ohne Risiko und Einsatz von Kapital zu erlangen.[1]

Umgangssprachlich formuliert bedeutet Arbitrage mit 0 zu starten, niemals unter 0 zu kommen und am Schluss mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn zu erzielen. Für diese Chance muss also kein Risiko eingegangen werden. Es wird angenommen, dass keine Mengenrestriktionen existieren, das heißt, bei Existenz einer Arbitragemöglichkeit kann diese *unendlich oft* genutzt werden. Daher müsste in der Situation unseres kleinen Witzes theoretisch eine selbstauffüllende Kiste voller 100€ Scheine auf der Straße liegen. Dies soll nun anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Beispiel 1.2.2 (Wechselkurse)
Sei der an der Börse in Frankfurt gehandelte Kurs von €:$ 1:1, während zeitgleich 1€ für 0,99$ an der Börse in New York zu bekommen ist. Ein Arbitrageur würde nun zeitgleich 1€ in New York kaufen und in Frankfurt verkaufen. Sein Gewinn beträgt somit (unter Ausschluss von Transaktionskosten) pro Euro

$$1\$ - 0,99\$ = 0,01\$.$$

Die Idee ist, dass der Arbitrageur sich von einer Bank 0,99$ leiht, diese sofort in New York in 1€ umtauscht, um dafür in Frankfurt 1$ zu erhalten und damit seine Schuld bei der Bank zu tilgen (und dieses Vorgehen geschieht „in einem Augenblick“). Der Arbitrageur kann diese Strategie unendlich oft verfolgen und somit einen unbegrenzten Gewinn erwirtschaften.

Die Annahme der Absenz von Arbitragemöglichkeiten in einem Finanzmarkt begründet sich in dem Marktmechanismus. Im Bezug auf das oben genannte Beispiel würde die Nachfrage nach Euros in New York steigen *(bis ins Unermessliche)*, während in Frankfurt der Dollar sehr begehrt wäre. Dies hätte eine Veränderung des Kurses zur

Folge (1€ wird teurer in New York und billiger in Frankfurt), bis keine Diskrepanz mehr zwischen den Kursen an den Börsen Frankfurt und New York besteht, also die Arbitragemöglichkeit verschwunden wäre.

Nun findet man trotzdem mit etwas Glück Geld auf der Straße, also eine Arbitragemöglichkeit. Dies begründet sich in den Informationsasymmetrien, denn nur wenige (vermutlich sogar niemand) wissen von dem 100€ Schein, der auf der Straße liegt. Im vorliegenden Finanzmarktmodell hingegen wird die vollständige Information, also die Absenz von Informationsasymmetrien, vorausgesetzt. Jeder weiß somit von dem besagten 100€ Schein, insbesondere die Person, welche ihn verloren hat. Nun wird sie den Schein direkt wieder aufheben und einstecken, demnach kann es erst gar nicht zu einer Arbitragemöglichkeit kommen.

Die wichtigste Folgerung aus der Arbitragefreiheit ist das Replikationsprinzip. Es ist von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit, da die Bewertung von Derivaten auf der Anwendung dieses Prinzips basiert.

1.3. Replikationsprinzip

Werden in einem arbitragefreien Finanzmarktmodell zwei Finanzgüter betrachtet, deren Auszahlungen in einem zukünftigen Zeitpunkt identisch sind, so erscheint es logisch, dass diese beiden Finanzgüter heute den selben Wert besitzen sollten. Dies ist das sogenannte Replikationsprinzip.

Satz 1.3.1 (Replikationsprinzip)
Seien X und Y dividendenfreie Finanzgüter (z.B. Aktien) und X_t bzw. Y_t deren Auszahlung zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Es gilt

$$X_T = Y_T \implies X_t = Y_t \text{ für alle } t \leq T$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es einem Zeitpunkt $t < T$ gibt, in welchem die Auszahlungen der beiden Finanzgüter nicht übereinstimmen und zeigen die Verletzung der Arbitragefreiheit.

Angenommen, es gibt $t < T$ mit $X_t < Y_t$ (der Fall $Y_t < X_t$ verläuft analog), so wählen wir im Zeitpunkt t folgende Strategie:
Wir gehen short in Y und long in X, das heißt, wir leihen uns die Aktie Y, verkaufen sie am Markt und verwenden dieses Geld zum Kauf von X.

Unsere Auszahlung in t beläuft sich somit auf

$$Y_t - X_t > 0.$$

Im Zeitpunkt T verkaufen wir die Aktie X und kaufen Y zum Begleichen des Leihgeschäfts, wodurch die Auszahlung

$$X_T - Y_T = 0$$

beträgt.
Insgesamt erhalten wir durch die Wahl dieser Strategie einen risikolosen Gewinn im Zeitpunkt t ohne Einsatz von Kapital. → Widerspruch zur Arbitragefreiheit! □

Die Grundidee der Bewertung von Derivaten mit Hilfe des Replikationsprinzips besteht darin, zum heutigen Zeitpunkt ein Portfolio aufzustellen, dessen Wert in der Zukunft (also zur Zeit T) mit der Auszahlung des Derivats übereinstimmt. Dann ist der Anfangswert der Portfoliostrategie der eindeutig bestimmte arbitragefreie Preis des Derivats. Eine solche Portfoliostrategie repliziert die Derivatauszahlung und wird *Hedge* oder *replizierendes Portfolio* genannt.

Bevor zum Abschluss dieses einführenden Abschnitts einige Anwendungen des Replikationsprinzips folgen, wenden wir uns zunächst der Existenz einer risikolosen Anlage zu. Wir besitzen die Möglichkeit im heutigen Zeitpunkt t unser Geld in das sogenannte Geldmarktkonto (zum Beispiel ein Sparbuch) anzulegen und bekommen dafür im Zeitpunkt T einen vorher festgelegten Betrag. In unserem Finanzmarkt werden wir dieses Konto mittels der Nullkuponanleihe modellieren.

Definition 1.3.2 (Nullkuponanleihe)
Die Nullkoponanleihe ist ein festverzinsliches Wertpapier, das zu einem zukünftigen Zeitpunkt T zu einer Auszahlung eines festen Geldbetrages an seinen Inhaber führt. Kouponzahlungen innerhalb der Laufzeit finden nicht statt.
Wir nennen $B(t,T)$ den Wert einer Kuponanleihe im Zeitpunkt t, die in T eine Auszahlung in Höhe von 1 liefert. [5]

1.4. Anwendungen

1.4.1. Put-Call-Parität

Paritäten sind Bewertungsgrenzen in Form von Gleichheiten, die es erlauben die Auszahlung eines Finanzderivats durch ein Portfolio aus anderen Wertpapieren zu erzeugen.

Die Put-Call-Parität gibt die Beziehung zwischen dem Preis eines europäischen Calls und dem Preis eines europäischen Puts mit gleichem Underlying S an, unter der Voraussetzung, dass der Basispreis sowie die Laufzeit der Optionen identisch sind.

Satz 1.4.1 (Put-Call-Parität)
Sei mit $C_e(t) := C_e(S, K, t, T)$ bzw. $P_e(t) := P_e(S, K, t, T)$ der Preis eines europäischen Calls bzw. Puts zum Zeitpunkt t bezeichnet, wobei S das Underlying, K den Strikepreis und T den Fälligkeitszeitpunkt angeben. Dann gilt

$$C_e(0) - P_e(0) = S_0 - K \cdot B(0, T).$$

Beweis. Wir wollen das Replikationsprinzip anwenden und betrachten daher die beiden folgenden Strategien in $t = 0$:

- Strategie 1:
  Gehe die long-Position in einem europäischen Call ein und kaufe
  $K \cdot B(0, T)$ Nullkuponanleihen.
  Wert des Portfolios (in t=0) : $C_e(0) + K \cdot B(0, T)$
- Strategie 2:
  Gehe die long-Position in einem europäischen Put ein und kaufe das Underlying zum Preis S_0.
  Wert des Portfolios (in t=0) : $P_e(0) + S_0$

mögliche	Strategie 1		Strategie 2	
Fälle	Option	Auszahlung	Option	Auszahlung
$S_T > K$	ausüben	S_T	verfällt	S_T
$S_T = K$	ausüben	S_T	ausüben	K
$S_T < K$	verfällt	K	ausüben	K

Tabelle 1.3.: Auszahlungsprofile der Strategien bei der Put-Call-Parität

Die Auszahlung der jeweiligen Strategie zum Zeitpunkt T hängt vom dem Kurs S_T ab, da der Optionsinhaber je nach Notation der Option deren Ausübung oder deren

Verfall bevorzugen wird. Die Auszahlungsprofile sind in der Tabelle 1.3 aufgelistet. Wie zu erkennen ist, stimmen die Auszahlungen der beiden Strategien überein (in Höhe von $\max\{K, S_T\}$). Nach dem Replikationsprinzip entsprechen sich deren heutige Preise, also gilt

$$C_e(0) + K \cdot B(0,T) = P_e(0) + S_0.$$

□

Erkenntnis Die Put-Call-Parität liefert ein interessantes Ergebnis.
Es besteht die Möglichkeit die Auszahlung einer Put-Option durch Erstellung eines Portfolios, welches eine Call-Option mit Fälligkeitszeitpunkt und Strikepreis der Put-Option beinhaltet, zu duplizieren. Dies impliziert, dass zur Ermittlung des Put-Preises die Berechnung des Call-Preises genügt. Aus diesem Grund werden in den Beispielen dieser Arbeit nur die Call-Optionen betrachtet.

1.4.2. No-Arbitrage-Preis eines Forwards

Erinnerung Bei einem Forward-Kontrakt ist das Eingehen der Kauf- bzw. Verkaufsverpflichtung zum heutigen Zeitpunkt ($t = 0$) kostenlos.

Satz 1.4.2 (No-Arbitrage-Preis eines Forwards)
Bezeichnen wir mit S_0 den Anfangspreis des Underlyings, so gilt für den Forwardpreis F die Beziehung

$$S_0 = F \cdot B(0,T).$$

Beweis. Die Beweisidee folgt dem Vorgehen des vorigen Beispiels. Die Strategien sind:

- Strategie 1:
  Gehe die short-Position in einem Forward-Vertrag ein und kaufe das Underlying zum Preis S_0.
  Wert des Portfolios (in t=0) : S_0

- Strategie 2:
  Kaufe $F \cdot B(0,T)$ Nullkuponanleihen.
  Wert des Portfolios (in t=0) : $F \cdot B(0,T)$

Aufgrund der gleichen Auszahlung in Höhe von F im Zeitpunkt T (unabhängig von der Höhe des Kurses S_T) folgt die Behauptung mit dem Replikationsprinzip. □

2. Finanzmarkt in diskreter Zeit

Als Vorlage für das Grundgerüst dieses Kapitels diente das Buch von Klaus Sandmann (Kapitel 4).[2]
Nach der Erläuterung der wichtigsten finanzmathematischen Begriffe im ersten Teil dieser Arbeit, folgt nun die Entwicklung eines Modells eines Finanzmarktes in diskreter Zeit. Einen zentralen Aspekt hierbei bildet das mathematische Formalisieren der Arbitragefreiheit und des Replikationsprinzips, um danach die Bewertung von replizierbaren Derivaten mittels des Hedgings durchzuführen zu können. Anschließend folgt die Behandlung der No-Arbitrage Theoreme, welche zur Charakterisierung von Arbitragefreiheit und Vollständigkeit eines Marktes hilfreich sind. Hierbei bedeutet vollständig, dass jede beliebige Auszahlung durch einen Hedge dupliziert werden kann.

2.1. Entwicklung eines mathematischen Modells

In einem realen Finanzmarkt ändern Investoren die Zusammensetzung ihrer Wertpapierportfolios laufend, um auf Kursschwankungen zu reagieren. Wir gehen von einem diskreten dynamischen Zeitverlauf aus, welcher die Öffnung des Marktes für die Investoren zum Kauf und Verkauf von Wertpapieren an endlich vielen Handlungszeitpunkten bedeutet. Sei $[0, T]$ das relevante Zeitintervall, so bezeichnet

$$T_d := T_{diskret} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\} \subset [0, T]$$

die diskrete Menge der Handlungszeitpunkte und der Zeitraum $[t_{i-1}, t_i)$ stellt die i-te Periode dar, wir befinden uns somit in einem N-Perioden-Modell.
Folgende Annahmen werden getroffen:

- äquidistante Abstände zwischen den einzelnen Zeitpunkten, das heißt

$$t_i - t_{i-1} = \frac{T}{N} \text{ für alle } i = 1, \ldots, N,$$

- keine Transaktionskosten sowie
- keine Informationsasymmetrien.

Es wird die Existenz von endlich vielen Wertpapieren $S^1, \dots, S^J$ ohne Dividendenzahlungen vorausgesetzt, wobei S^1 das Geldmarktkonto (verzinsliches Wertpapier bzw. Bond) darstellt. Der Zustand des Marktes zum Zeitpunkt $t = 0$, also die Kurse der Wertpapiere, sei bekannt, wohingegen über den zukünftigen Zustand in $t \in T_d \setminus \{0\}$ Unsicherheit herrsche. Um die Veränderung der Wertpapierpreise zu modellieren, führen wir den stochastischen Prozess ein.

Definition 2.1.1 (Stochastischer Prozess)
Seien mit $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\mathbb{R}^J, \mathcal{B}^J)$ zwei Messräume gegeben und sei $I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, so heißt eine Familie von messbaren Abbildungen $(S_t)_{t \in I}$, also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{S} : I \times \Omega &\to \mathbb{R}^J \\ \textit{mit } \mathrm{S_t} : \qquad \omega &\mapsto S_t(\omega) \quad \mathcal{F} - \mathcal{B}^J - \textit{messbar für alle } t \in I \end{aligned}$$

ein J-dimensionaler (numerischer) stochastischer Prozess.
Stellt I eine diskrete Menge dar (z.B. $I = T_d$), so sprechen wir von einem stochastischen Prozess in diskreter Zeit. Für ein festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $\mathrm{S}(\omega) : \ I \to \mathbb{R}^J$ eine Trajektorie oder ein Pfad von S. Bei festem $t \in I$ gibt die Abbildung $\mathrm{S_t} : \ \Omega \to \mathbb{R}^J$ die Realisationen von S zum Zeitpunkt t an.

Der Preisprozess $(S_t^j)_{t \in T_d}$ des j-ten Wertpapiers ist somit ein stochastischer Prozess

$$\mathrm{S^j} : \ T_d \times \Omega \to \mathbb{R}$$

mit $S_t^j(\omega)$ als Bezeichnung für den Kurs des j-ten Wertpapiers zum Zeitpunkt $t \in T_d$ im Zustand $\omega \in \Omega$. Insbesondere gilt für das Geldmarktkonto

$$\begin{aligned} \mathrm{S^1} : T_d \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t_i, \omega) &\mapsto \beta_{t_i}(\omega) := \prod_{n=1}^{i} (1 + r_{t_n}(\omega)), \end{aligned}$$

wobei $r_{t_n}(\omega)$[1] als die Zinsrate, mit der das angelegte Kapital auf einem Geldmarktkonto in der n-ten Periode verzinst wird, aufgefasst werden kann. Der Diskontierungsprozess ist gegeben durch die Nullkuponanleihe

$$B(0,t) := \frac{1}{S_t^1} = \frac{1}{\beta_t} \quad \text{für } t \in T_d.$$

Im Bezug auf das Wertpapier S^j definiert

$$\widetilde{S}_t^j := B(0,t) \cdot S_t^j = \frac{1}{\beta_t} \cdot S_t^j \quad \text{für } t \in T_d$$

den diskontierten Preisprozess, welcher den Preis des Wertpapiers gemessen in Bondanteilen angibt. Mit

$$\mathrm{S}: \ T_d \times \Omega \to \mathbb{R}^J, \ S_t(\omega) = (S_t^1(\omega), \dots, S_t^J(\omega))^t$$

wird der J-dimensionale stochastische Prozess des Preisvektors bezeichnet.

Die Idee unseres Modells ist, dass *genau ein* $\omega \in \Omega$ eintritt und der Pfad $S(\omega)$ den Zustand des Marktes in allen Zeitpunkten $t \in T_d$ bestimmt. Zur Vereinfachung wird von einer endlichen Menge Ω von möglichen Elementen ω mit *positiver Eintrittswahrscheinlichkeit im Zeitpunkt* $t = 0$ ausgegangen.

Durch die Annahme der eindeutig bestimmten Preise der Wertpapiere im Startzeitpunkt $t = 0$ stellt die Realisation $\mathrm{S}_0: \ \Omega \to \mathbb{R}^J$ eine konstante Abbildung dar. Hingegen seien für die Zeitpunkte $t \in T_d \setminus \{0\}$ die Werte $S_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ zwar bekannt, aber es entscheidet sich immer erst zum tatsächlichen Zeitpunkt, welche Kurse $S_t^j(\omega)$ realisiert werden.

Notation Für die zum Zeitpunkt t möglichen Zustände von S verwenden wir die Notation $S_t(\omega)$ und den tatsächlich eintretenden Zustand bezeichnen wir mit S_t. Zudem definiert

$$\widetilde{S_T} := \{S_T(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

die Menge aller möglichen Endkurse.

Konvention Ein Wertpapier kann im schlimmsten Szenario wertlos werden, aber niemals einen negativen Wert besitzen. Aus diesem Grund gilt in unserem Modell, dass die

[1]Dieser Zinsprozess stellt selber einen stochastischen Prozess dar und definiert somit S^1 eindeutig. Wir werden im weiteren Verlauf annehmen, dass $r_{t_n}(\omega)$ ein an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ adaptierter vorhersehbarer Prozess ist (die genaue Definition wird noch gegeben). Die Vorstellung ist, dass der Zinssatz r_{t_n} für die n-te Periode im Zeitpunkt t_{n-1} eindeutig festgelegt ist.

S^j nicht-negative Zufallsvariablen[2] auf Ω mit positivem Anfangskurs S_0^j sind. Die Anlage in das Geldmarktkonto sollte eine (nicht zwingend in der Höhe sichere) Rückzahlung garantieren. Daher stellt S^1 eine positive Zufallsvariable dar.

Im Startzeitpunkt sind wir nicht in der Lage, einen der möglichen Endwerte $S_T(\omega)$ auszuschließen. Dennoch scheint es plausibel, dass unsere Informationslage in t_{N-1} dies erlauben könnte. Exemplarisch betrachten wir einen Markt, in dem nur ein risikobehaftetes Wertpapier S gehandelt wird.

Beispiel 2.1.2 (pfadabhängiger Trinomialprozess)
Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P} = \textit{Laplace})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Zustandsraum* $\Omega := \{9, 0, -5\}^N = \{\{\omega_1, \dots, \omega_N\} |\ \omega_i \in \{9, 0, -5\},\ 1 \leq i \leq N\}$. *Der stochastische Prozess* $\mathrm{S}: T_d \times \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $S_0 = 100$ *sei gegeben durch*

$$S_{t_i}(\omega) := S_{t_{i-1}} + i * \omega_i = \begin{cases} S_{t_{i-1}} + 9 * i & \omega_i = 9 \\ S_{t_{i-1}} & \omega_i = 0 \\ S_{t_{i-1}} - 5 * i & \omega_i = -5 \end{cases}$$

Betrachten wir ein 2-Perioden-Modell ($T_d = \{0, 1, 2\}$), so ist der Preisprozess in der Abbildung (2.1) als Baumdiagramm dargestellt.

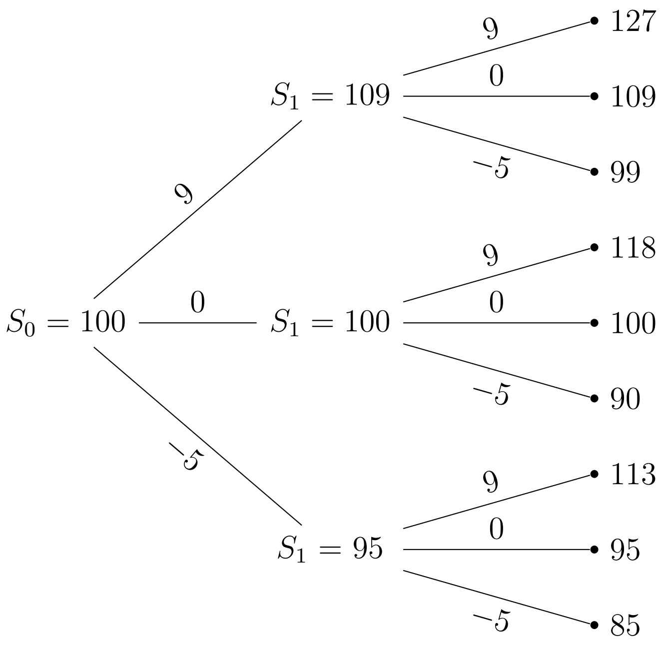

Abbildung 2.1.: pfadabhängiger Trinomialprozess im 2-Perioden-Modell

[2] Wir sprechen von einer nicht-negativen Zufallsvariable S^j, wenn jede Realisation $\mathrm{S}_\mathrm{t}^\mathrm{j}: \Omega \to \mathbb{R}$ für $t \in T_d$ eine nicht-negative Zufallsvariable auf Ω darstellt.

Beitzt der Kurs S_1 den Wert 109, so ist $S_2(\omega) = 85$ (für $\omega = (-5, -5)$) nicht mehr erreichbar. Hier reduziert sich die Anzahl der möglichen Endzustände $S_2(\omega)$ durch Kenntnis des eingetretenen Kurses S_1.
Gehen wir von einem Wertpapier (z.B. einer Aktie) aus, dessen Wert in $t = 0$ mit 100 € notiert und stetig bis auf 50 € im Zeitpunkt t_{N-1} sinkt, so lässt sich vermuten, dass Kurse über 100 € im Endzeitpunkt nicht realistisch bzw. unmöglich sind.
In diesem Zusammenhang erscheint es sinnvoll einen Einfluss des eingetretenen Zustands auf die zukünftigen Realisationen zu vermuten (wie in dem oben aufgeführten Beispiel). Diese Erkenntnis finden wir in unserem Modell in Form der Filtration wieder.

Definition 2.1.3 (Filtration)
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein gegebener Messraum. Eine Familie von σ-Algebren $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ des Zustandsraums Ω mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für $s \leq t \in T_d$ und $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ für alle $t \in T_d$ heißt Filtration.

Ein stochastischer Prozess $\mathrm{S} : T_d \times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$, falls S_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist für jedes $t \in T_d$.

In unserem Modell stellt $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ die triviale σ-Algebra dar und $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Die Filtration ist eine Informationsstruktur, die den Informationszufluss im Zeitverlauf symbolisiert, das heißt, $\mathcal{F}_t$ stellt die Kenntnis über die Menge der im Zeitpunkt t noch möglichen eingetretenen Ereignisse $\omega \in \Omega$ dar. Durch die Wahl der kleinsten Menge in $\mathcal{F}_t$, die alle dieser Elemente enthält, erhalten wir die maximale Einschränkung der möglichen Endwerte $S_T(\omega)$.

Betrachten wir das Beispiel 2.1.2 für den Fall $T_d = \{0, 1, 2\}$, und wählen als Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \{0,1,2\}}$ die erzeugten σ-Algebren $\{\sigma(S_0, \dots, S_t)\}_{t \in \{0,1,2\}}$, so gilt
$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$,
$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, A_9, {A_9}^C, A_0, {A_0}^C, A_{-5}, {A_{-5}}^C\}$ mit $A_i = \{\omega = \{\omega_1, \omega_2\} | \omega_1 = i\}$ und
$\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$.
Aus dem Baumdiagramm (in Abbildung (2.1)) ist ersichtlich, dass das Wertpapier keine identischen Endzustände besitzt, die durch unterschiedliche Pfadverläufe erzeugt werden. Formal bedeutet dies für die Realisation $\mathrm{S}_2 : \Omega \to \mathbb{R}$

$$S_2(\widetilde{\omega}) = S_2(\widehat{\omega}) \Rightarrow \widetilde{\omega} = \widehat{\omega}, \tag{2.1.1}$$

das heißt, ist S_2 injektiv. Im Zeitpunkt $t = 0$ besitzen wir keine Informationen, um den Endwert S_2 einschränken zu können. Daher gilt

$$S_2 \in \{S_2(\omega) |\ \omega \in \Omega \in \mathcal{F}_\mathbf{0}\}.$$

Aus der vorigen Überlegung wissen wir bereits, dass für den bekannten Wert S_1 nicht mehr alle Kurse im Endzeitpunkt möglich sind. Nach Definition des stochastischen Prozess ist im Fall $S_1 = 109$ ein Zustand $\overline{\omega} = \{9, \omega_2\} \in \Omega$ eingetreten und mittels obiger Implikation (2.1.1) sind im Zeitpunkt $t = 2$ Realisationen $S_2(\omega)$ mit $\omega \notin A_9$ unmöglich. Dies impliziert schon im Zeitpunkt $t = 1$ mit Hilfe des Wertes $S_1 = 109$ die Einschränkung der möglichen Endzustände auf

$$S_2 \in \{S_2(\omega)|\ \omega \in A_9 \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}\}.$$

Bei bekanntem Endkurs ergibt sich natürlich

$$S_2 \in \{S_2(\omega)|\ \omega \in \{\omega\} \in \mathcal{F}_{\mathbf{2}}\}.$$

Bemerkung Unter der Voraussetzung der Adaptiertheit sorgt $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ dafür, dass die Realisation $\mathrm{S}_0 : \ \Omega \to \mathbb{R}^J$ mit $S_0(\omega) = (S_0^1(\omega), \dots, S_0^J(\omega))$ eine konstante Abbildung und somit der Zustand des Marktes bekannt ist.
Mittels der Forderung einer Filtration ist gesichert, dass wir keinen Informationsverlust erleiden können. Haben wir in einem Zeitpunkt ein $\omega \in \Omega$ als eingetretenes Element ausgeschlossen, so behalten wir diese Information in allen noch folgenden Zeitpunkten.
Zusammenfassend sind unsere Zutaten für den Finanzmarkt in diskreter Zeit:

- eine diskrete Menge $T_d = \{0 = t_0 < \ldots < t_N = T\} \subset [0, T]$ an Handlungszeitpunkten mit äquidistanten Abständen,
- ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,
- die Informationsstruktur $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T_d}$ in Form einer Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ sowie
- die Wertpapierpreisprozesse $\mathrm{S}^j : \ T_d \times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ für $j = 1, \dots, J$, die einen an die Informationsstruktur $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T_d}$ adaptierten stochastischen Prozess $\{S_t^j\}_{t \in T_d}$ darstellen.

2.1.1. Handelsstrategie

In einem diskreten Finanzmarkt können die Investoren in den Handlungszeitpunkten t_0 bis t_{N-1} entscheiden, wie sie ihr Portfolio - bestehend aus Kombinationen der Wertpapiere $S^1, \dots, S^J$ - zusammensetzen und verändern möchten. Mathematisch gesehen handelt es sich hierbei um eine Handelsstrategie.

Definition 2.1.4 (Portfoliostrategie)
Unter einer Portfoliostrategie (oder Handelsstrategie) verstehen wir einen J-dimensionalen vorhersehbaren stochastischen Prozess $\phi := (\phi_t)_{t \in T_d \setminus \{0\}}$ *in diskreter Zeit, das heißt,* ϕ_{t_i} *ist* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*-messbar. Hierbei gilt für die Realisationen* $\phi_{\mathrm{t}} : \ \Omega \to \mathbb{R}^J$

$$\phi_t(\omega) = (\phi_t^1(\omega), \ldots, \phi_t^J(\omega))^t$$

mit 1*-dimensionalen vorhersehbaren stochastischen Prozessen* ϕ_t^j*.*

Unsere Vorstellung ist, dass $\phi_{t_i}^j(\omega)$ die Anzahl der Wertpapiere S^j im Zeitraum $[t_{i-1}, t_i)$ bezeichnet, die beim Eintreten von $\omega \in \Omega$ gehalten werden. Hierbei kann der Investor in unbeschränkter Höhe long ($\phi_{t_i}^j(\omega) > 0$) oder short ($\phi_{t_i}^j(\omega) < 0$) gehen und wir nehmen die beliebige Teilbarkeit der Finanzgüter ($\phi_{t_i}^j(\omega) \in \mathbb{R}$) an. Dieser Prozess wird vorhersehbar genannt, weil das Portfolio ϕ_{t_i} für die i-te Periode $[t_{i-1}, t_i)$ schon zum Zeitpunkt t_{i-1} bekannt ist.

Definition 2.1.5 (Wertprozess einer Portfoliostrategie)
Der Wert der Strategie ϕ *zum Zeitpunkt* $t \in T_d \setminus \{0\}$ *ist gegeben durch*

$$V_t(\phi) := \sum_{j=1}^{J} \phi_t^j \cdot S_t^j$$

und für $t = 0$ *durch*

$$V_0(\phi) := \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_1}^j \cdot S_0^j.$$

Mit $(V_t(\phi))_{t \in T_d}$ *wird der Wertprozess einer Portfoliostrategie* ϕ *bezeichnet, wobei* $V_0(\phi)$ *das Anfangskapital des Investors darstellt.*

Zu Beginn legt ein Investor mit $V_0(\phi)$ seine Startinvestition fest. Nach Ablauf der ersten Periode, also im Zeitpunkt t_1, besitzt er den Wert $V_{t_1}(\phi)$. Nun verfügt er über die Möglichkeit sein Portfolio zu verändern, indem er die Anzahl der gehaltenden Wertpapiere variiert, also ϕ_{t_2} festlegt.

Definition 2.1.6 (Investitionsplan)
Ein Investor hält in der $(i+1)$*-ten Periode* $[t_i, t_{i+1})$ *ein Portfolio mit Investitionswert in Höhe von*

$$I_{t_i}(\phi) := \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_{i+1}}^j \cdot S_{t_i}^j.$$

Mit $(I_t(\phi))_{t \in T_d \setminus \{T\}}$ *wird der Investitionsplan der Strategie* ϕ *benannt.*

Nach Definition gilt im Zeitpunkt $t = 0$

$$I_0(\phi) = \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_1}^j \cdot S_0^j = V_0(\phi).$$

In den Zeitpunkten $t \in T_d \setminus \{0, T\}$ hängt der Investitionsplan neben dem aktuellen Wert $V_t(\phi)$ des Portfolios auch von den Finanzierungsmöglichkeiten des Investors ab, insbesondere besitzt dieser drei Alternativen. In der folgenden Periode kann er

- einen höheren Wert als $V_t(\phi)$ (Kapitalzufluss),
- genau den aktuellen Wert $V_t(\phi)$ oder
- einen geringeren Wert als $V_t(\phi)$ (Kapitalausschüttung)

in dem Markt anlegen. Dies formalisieren wir mit Hilfe des Konsumplans.

Definition 2.1.7 (Konsumplan)
Ein Konsumplan ist ein stochastischer Prozess $\mathrm{x}: \ T_d \times \Omega \to \mathbb{R}$ *in diskreter Zeit.*
$X := \{\mathrm{x}: \ T_d \times \Omega \to \mathbb{R} |$ *x ist adaptiert an die Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}\}$ *definiert die Menge aller zustandsabhängigen Konsumpläne.*

Sei ϕ die Portfoliostrategie eines Investors, $(V_t(\phi))_{t \in T_d}$ der dazugehörige Wertprozess sowie $(I_t(\phi))_{t \in T_d \setminus \{T\}}$ der Investitionsplan. Der durch die Portfoliostrategie erzeugte Konsumplan $x(\phi) = (x_t)_{t \in T_d} := (x_0, \ldots, x_T)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I_0(\phi) &= x_0, \\ V_t(\phi) &= I_t(\phi) + x_t \quad \text{für } t \in T_d \setminus \{0, T\} \text{ und} \\ V_T(\phi) &= x_T. \end{aligned}$$

Das Startkapital

$$x_0 = V_0(\phi) = \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_1}^j \cdot S_0^j$$

eines durch die Portfoliostrategie ϕ erzeugten Konsumplans $x \in X$ nennen wir den Preis von x.

Interpretation Der von einer Portfoliostrategie erzeugte Konsumplan besteht aus dem Startkapital x_0, dem Endkapital x_T sowie den Ein- bzw. Auszahlungen in den Handlungszeitpunkten $t \in T_d \setminus \{0, T\}$, wobei $x_t < 0$ Kapitalzufluss und $x_t > 0$ Kapitalausschüttung bedeutet.

Die Menge der nicht-negativen Konsumpläne definieren wir mit

$X_0^+ := \{x \in X | \, \mathbb{P}(x_t \geq 0) = 1 \text{ für alle } t \in T_d \setminus \{0\}\}$

und die der positiven mit

$X^+ := \{x \in X | \, \mathbb{P}(x_t \geq 0) = 1 \text{ für alle } t \in T_d \setminus \{0\} \text{ und } \mathbb{P}(x_{t_j} > 0) > 0 \text{ für ein } j > 0\}.$

Durch die Einführung dieser beiden Mengen können wir den Begriff der Arbitragemöglichkeit in unser Modell einbauen.

2.2. Arbitrage

Erinnerung Bei einer Arbitragemöglichkeit handelt es sich um die Existenz einer Chance auf einen risikolosen Gewinn ohne Kapitaleinsatz.

In unserem mathematischen Modell handelt es sich bei einer Portfoliostrategie ϕ, die den Konsumplan $x \in X$ erzeugt, um eine Arbitragemöglichkeit, falls entweder

- $x \in X_0^+$ und $x_0 < 0$
  (Die Strategie benötigt also ein negatives Startkapital, welches einer garantierten Auszahlung entspricht und besitzt außerdem kein Risiko, da in allen anderen Handlungszeitpunkten die Wahrscheinlichkeit für Kapitalzufluss gleich null und der Endwert nicht-negativ ist.)

oder

- $x \in X^+$ und $x_0 \leq 0$
  (Die Strategie benötigt also ein nicht-positives Startkapital, besitzt kein Risiko und es ist die Chance auf einen Gewinn in Form einer Kapitalausschüttung oder eines positiven Endwertes gegeben.)

gilt.

Zur (leichteren) Überprüfung der Arbitragefreiheit von Märkten kann die folgende Äquivalenz verwendet werden.

Satz 2.2.1
In einem Markt folgt für jeden durch eine Strategie erzeugten Konsumplan $x(\phi)$ mit

(1) $x_0 = V_0(\phi) = 0$

(2) $x \in X_0^+$

$x(\phi) = (0, \dots, 0)$ *(also* $x_t = 0$ *für alle* $t \in T_d$*) genau dann, wenn der Markt keine Arbitragemöglichkeit besitzt.*

Beweis.
"$\Rightarrow$" Die Existenz einer Strategie ϕ mit $x(\phi) \in X_0^+$ und $x_0 < 0$ kann nicht vorliegen, denn ansonsten erhalten wir durch Investition von x_0 in das Geldmarktkonto eine Strategie $\hat{\phi}$, deren Konsumplan die Eigenschaften des Satzes erfüllt und die einen Endwert $x_T > 0$ besitzt (da wir S^1 als positive Zufallsvariable definiert haben).
Mit $X^+ \subseteq X_0^+$ ergibt sich, dass zudem kein erzeugter Konsumplan mit $x(\phi) \in X^+$ und $x_0 \leq 0$ existieren kann.

"$\Leftarrow$" Sei ϕ eine Strategie mit $x(\phi) \in X_0^+$ und $x_0 = 0$, so muss nach Voraussetzung der Arbitragefreiheit $x(\phi) \in X_0^+ \setminus X^+$ gelten. Dies bedeutet aber

$$\mathbb{P}(x_t \geq 0) = 1 \text{ und } \mathbb{P}(x_t > 0) = 0 \text{ für jedes } t \in T_d \setminus \{0\}.$$

Also gilt $x_t = 0$ ($\mathbb{P}$-f.s.) für $t \in T_d \setminus \{0\}$ und somit $x(\phi) = (0, \dots, 0)$. □

2.3. Replikationsprinzip

Satz 2.3.1 (Replikationsprinzip)
Falls ein Markt keine Arbitragemöglichkeit besitzt und für die durch zwei unterschiedliche Portfoliostrategien $\phi = (\phi_t)_{t \in T_d \setminus \{0\}}$ *und* $\bar{\phi} = (\bar{\phi}_t)_{t \in T_d \setminus \{0\}}$ *erzeugten Konsumpläne* $x(\phi), x(\bar{\phi}) \in X$

$$x_t(\phi) = x_t(\bar{\phi}) \quad \textit{für alle } t \in T_d \setminus \{0\}$$

gilt, so folgt

$$V_t(\phi) = V_t(\bar{\phi}) \quad \textit{für alle } t \in T_d,$$

das heißt, die Wertprozesse stimmen überein. Insbesondere gilt für $t = 0$

$$x_0(\phi) = V_0(\phi) = V_0(\bar{\phi}) = x_0(\bar{\phi}),$$

demnach wird für die Ausübung der Strategien das identische Startkapital benötigt.

Beweis. Angenommen, es existiert ein $t \in T_d$ mit $V_t(\phi) > V_t(\bar{\phi})$, dann gilt

$$x_t(\bar{\phi}) + I_t(\phi) \overset{n.V.}{=} x_t(\phi) + I_t(\phi) = V_t(\phi) > V_t(\bar{\phi}) = x_t(\bar{\phi}) + I_t(\bar{\phi}),$$

also

$$I_t(\phi) > I_t(\bar{\phi}).$$

Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis des Replikationsprinzips in dem einführenden Teil (Satz 1.3.1). □

2.3.1. Bewertung von hedgebaren Claims mittels eines replizierenden Portfolios

Mit der Einführung des Replikationsprinzips in dieses Modell eines Finanzmarktes in diskreter Zeit ist nun die Bewertung von Derivaten möglich, wobei in diesem Ausführungen der Fokus auf die Bewertung von Claims gelegt wird.

Definition 2.3.2 (Claim)
Unter einem (Contigent) Claim wird ein im Zeitpunkt $t = 0$ abgeschlossenes Derivat verstanden, welches nur im Endzeitpunkt T eine Auszahlung $\mathrm{C} : \Omega \to \mathbb{R}$ liefert. Insbesondere definiert jede $\mathcal{F}_T$-messbare Abbildung aus Ω einen Claim.

Zur Ermittlung des heutigen Preises eines Claims werden wir einen Hedge bilden. Da ein Claim in den Zeitpunkten t_1 bis t_{N-1} keine Auszahlung liefert bzw. Einzahlung benötigt, muss dieses auch für die Hedgingstrategie gelten, damit die Konsumpläne übereinstimmen und das Replikationsprinzip anwendbar ist. Aus diesem Grund definieren wir die selbstfinanzierenden Strategien.

Definition 2.3.3 (selbstfinanzierende Portfoliostrategie)
Wir nennen eine Portfoliostrategie ϕ selbstfinanzierend, wenn

$$V_{t_i}(\phi) = \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_i}^j \cdot S_{t_i}^j = \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_{i+1}}^j \cdot S_{t_i}^j = I_{t_i}(\phi) \qquad \textit{für alle } t_i \in T_d \setminus \{0, T\} \tag{2.3.1}$$

gilt. Mit $\mathcal{H}$ bezeichnen wir die Menge aller selbstfinanzierenden Strategien.

Bedeutung Ein Investor legt die Strategie $\phi_{t_{i+1}}$ für die $(i+1)$-te Periode zum Zeitpunkt t_i fest. Er hat einen Betrag in Höhe von $V_{t_i}(\phi)$ zur Verfügung und darf sein Wertpapierkonto umschichten, soll aber weder Geld konsumieren noch zusätzliches Kapital investieren. Daher muss die neue Aufteilung $\phi_{t_{i+1}}$ so gewählt werden, dass $I_{t_i}(\phi) = V_{t_i}(\phi)$ gilt.

Korollar 2.3.4
Sei x der zu ϕ gehörige Konsumplan, so gilt:

$$\phi \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow x(\phi) = (x_0, 0, \dots, 0, x_T)$$

Beweis. Die Gültigkeit dieses Korollars ergibt sich mit der Gleichung (2.3.1) und der Definition des Konsumplans. □

Lemma 2.3.5
Sei $\phi \in \mathcal{H}$, dann gilt für alle $t_i \in T_d$

$$\widetilde{V}_{t_i}(\phi) := \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_i}^j \cdot \widetilde{S}_{t_i}^j = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k} =: V_0(\phi) + \widetilde{G}_{t_i}(\phi),$$

wobei $\phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k}$ das Skalarprodukt von ϕ_{t_k} und $\Delta\widetilde{S}_{t_k} := \widetilde{S}_{t_k} - \widetilde{S}_{t_{k-1}}$ definiert.

Beweis. Die Gleichung ergibt sich durch Nachrechnen mittels der Anwendung des vorigen Korollars.

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_{t_i}(\phi) &= \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k} \\
&= \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * (\widetilde{S}_{t_k} - \widetilde{S}_{t_{k-1}}) \\
&= \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_k}^j \cdot (\widetilde{S}_{t_k}^j - \widetilde{S}_{t_{k-1}}^j) \\
&= \sum_{k=1}^{i} (\underbrace{\sum_{j=1}^{J} \phi_{t_k}^j \cdot \widetilde{S}_{t_k}^j}_{\widetilde{V}_{t_k}(\phi)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \phi_{t_k}^j \cdot \widetilde{S}_{t_{k-1}}^j}_{\widetilde{I}_{t_{k-1}}(\phi)}) \\
&= \sum_{k=1}^{i} (\widetilde{V}_{t_k}(\phi) - \widetilde{I}_{t_{k-1}}(\phi)) \\
&= \widetilde{V}_{t_i}(\phi) - \widetilde{I}_0(\phi) + \sum_{k=1}^{i-1} (\widetilde{V}_{t_k}(\phi) - \widetilde{I}_{t_k}(\phi))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{V}_{t_i}(\phi) - \widetilde{I}_0(\phi) + \sum_{k=1}^{i-1}(B(0,t_k)\cdot \underbrace{(V_{t_k}(\phi) - I_{t_k}(\phi))}_{x_{t_k}} \\
&= \widetilde{V}_{t_i}(\phi) - \widetilde{I}_0(\phi) + \sum_{k=1}^{i-1} B(0,t_k)\cdot \underbrace{x_{t_k}}_{=0} \\
&= \widetilde{V}_{t_i}(\phi) - \widetilde{I}_0(\phi),
\end{aligned}
$$

wobei $x_{t_k} = 0$ nach der Voraussetzung einer selbstfinanzierenden Portfoliostrategie ϕ gilt (siehe Korollar 2.3.4). Mit $\widetilde{I}_0(\phi) = I_0(\phi) = V_0(\phi)$ folgt die Behauptung. □

Interpretation $\widetilde{G}_t(\phi)$ stellt den diskontierten Gewinn (die Gewinnspanne) der Strategie ϕ zum Zeitpunkt t dar, wobei hier unter Verlust ein negativer Gewinn verstanden wird.
Mit $\widetilde{S}^1_{t_k} = \widetilde{S}^1_{t_{k-1}}$ für alle $t_k \in T_d \setminus \{0\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G}_{t_i}(\phi) &= \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k} \\
&= \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * (\widetilde{S}_{t_k} - \widetilde{S}_{t_{k-1}}) \\
&= \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{J} \phi^j_{t_k}\cdot(\widetilde{S}^j_{t_k} - \widetilde{S}^j_{t_{k-1}}) \\
&= \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=2}^{J} \phi^j_{t_k}\cdot(\widetilde{S}^j_{t_k} - \widetilde{S}^j_{t_{k-1}}),
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

also ist der diskontierte Gewinn unabhängig von der Anlagemenge in das Geldmarktkonto S^1. Insbesondere ist die Menge der selbstfinanzierenden Strategien mit $\phi^1_{t_1} = 0$ isomorph zu der Menge der Strategien, die nur in die Anlagen S^2 bis S^J investieren. Dies folgt sofort aus der geforderten Gleichheit

$$
\sum_{j=1}^{J} \phi^j_{t_i}\cdot S^j_{t_i} = \sum_{j=1}^{J} \phi^j_{t_{i+1}}\cdot S^j_{t_i} \text{ für } t \in T_d \setminus \{0,T\}, \tag{2.3.3}
$$

denn durch die Wahl von ϕ^j für $j \geq 2$ wird $\phi^1 = (0, \phi^1_{t_2}, \ldots, \phi^1_T)$ eindeutig festgelegt.

Korollar 2.3.6
Für jede Strategie $\overline{\phi}$ gibt es eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ mit

$$
\widetilde{G}_T(\overline{\phi}) = \widetilde{G}_T(\phi).
$$

Beweis. Dies folgt mit der obigen Begründung, und zwar indem wir für ϕ

$$\phi^j = \overline{\phi^j} \quad \text{für } j \geq 2$$

setzen und $\phi^1 = (\overline{\phi^1_{t_1}}, \phi^1_{t_2}, \ldots, \phi^1_T)$ durch die geforderte Gleichheit in (2.3.3) berechnen. Damit gilt $\phi \in \mathcal{H}$ und mit (2.3.2) folgt

$$\widetilde{G}_T(\overline{\phi}) = \widetilde{G}_T(\phi).$$

$\square$

Nachdem die Theorie der selbstfinanzierenden Portfoliostrategien und der Gewinnspanne betrachtet wurde, kommen wir nun zur ersten Bewertungsmöglichkeit von Claims, wobei dies exemplarisch anhand einer Call-Option vorgeführt wird.

Erinnerung Der Verkäufer einer Option hat im Zeitpunkt T die entgegengesetzte Auszahlung des Käufers - also kleiner gleich null - erhält aber im Gegenzug dafür im heutigen Zeitpunkt die Optionsprämie.

Zur Ermittlung der fairen Optionsprämie p_0 einer europäischen Call-Option mit zustandsabhängiger Auszahlung $\mathrm{C_T} : \Omega \to \mathbb{R}$ im Zeitpunkt T bedarf es einer Strategie ϕ, deren Konsumplan $x(\phi)$ in den Zeitpunkten $t \in T_d \setminus \{0\}$ mit der Auszahlung der Option übereinstimmt. Wir benötigen also eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ mit

$$x_T(= V_T(\phi)) = C_T.$$

Existiert eine solche Strategie, so folgt (unter der Bedingung der Arbitragefreiheit) mit dem Replikationsprinzip, dass zum einen

$$p_0 = x_0 = V_0(\phi)$$

der eindeutige faire Preis der Option und zum anderen der Wert der Option in den Zeitpunkten $t \in T_d \setminus \{0, T\}$ durch $V_t(\phi)$ determiniert ist. Damit kennen wir auch den Preis, zu welchem wir die Option an diesen Handlungszeitpunkten weiterverkaufen würden. Insbesondere ist somit nach dem Lemma 2.3.5 $(V_t(\phi))_{t \in T_d}$ mit

$$V_t(\phi) = \frac{1}{B(0,t)} \cdot [V_0(\phi) + \widetilde{G}_t(\phi)] = \beta_t \cdot [V_0(\phi) + \widetilde{G}_t(\phi)]$$

der eindeutig bestimmte arbitragefreie Preisprozess der Option.

Bemerkung Zum einen kann es sehr aufwendig sein die Arbitragefreiheit eines Marktes nachzuweisen, zum anderen erweist es sich in vielen Fällen als schwierig eine Hedgingstrategie zu finden, um damit den Claim zu bewerten. Außerdem gibt es Märkte, in denen nicht zwingend für jede Claimauszahlung $\mathrm{C} : \Omega \to \mathbb{R}$ ein selbstfinanzierender Hedge existiert (unvollständige Märkte). Wir möchten daher ein handliches Kriterium zum Nachweis der Arbitragefreiheit eines Marktes herleiten und ein Verfahren entwickeln, welches uns, nur auf der Auszahlung des Claims basierend, die Existenz eines eindeutigen fairen Preises verifiziert bzw. falsifiziert. Außerdem sollte es diesen Preis liefern, sofern er existiert. Die Einführung von Martingalen wird uns der Lösung dieser beiden Probleme näherbringen.

2.4. Äquivalentes Martingalmaß

Definition 2.4.1 (Martingal)
Sei $M := (M_t)_{t \in T_d}$ ein stochastischer Prozess in diskreter Zeit auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$. Wir nennen M ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$, wenn

- *M an die Filtration adaptiert ist,*
- *$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(|M_t|) < \infty$ für alle $t \in T_d$ und*
- *$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}) = M_{t_i}$ für alle $t_i \in T_d \setminus \{T\}$ gilt.*

$\mathbb{Q}$ heißt Martingalmaß und mit Induktion folgt für alle $s, t \in T_d$ mit $s \leq t$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s.$$

Hierzu wird die Eigenschaft

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{A}]|\mathcal{B}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{B}]$$

für σ-Algebren $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ verwendet.

Ein Martingal ist insbesondere ein stochastischer Prozess, bei dem der bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_0$ bedingte Erwartungswert einer Beobachtung $M_{t_{i+1}}$ gleich dem Wert M_0 entspricht. Diese Eigenschaft wollen wir uns zum Bewerten von Claims zu Nutze machen. Eine Idee, die vielversprechend erscheint, wäre beispielsweise die Wahl eines Martingalmaßes $\mathbb{Q}$, unter welchem jeder Wertprozess einer selbstfinanzierenden Portfoliostrategie ein Martingal bildet. Schließlich würde somit für den Hedge $\phi \in \mathcal{H}$ eines Claims mit Auszahlung $\mathrm{C}: \ \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T(\phi)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T(\phi)|\mathcal{F}_0] \\ &= V_0(\phi)\end{aligned}$$

gelten (da nach Vorraussetzung $\mathcal{F}_0$ die triviale σ-Algebra darstellt). Nach dem Replikationsprinzip ist der faire Preis p_0 des Claims durch $V_0(\phi)$ gegeben, also liefert uns die Rechnung mittels des Martingals diesen. Jedoch ist für die Anwendung des Replikationsprinzips die Existenz der Arbitragefreiheit unerlässig. Optimal wäre daher die Äquivalenz der Existenz eines Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ mit obiger Eigenschaft zur Arbitragefreiheit. Tatsächlich gilt der erste Fundamentalsatz der Preistheorie, welcher die Äquivalenz zwischen der Arbitragefreiheit eines Marktes und der Existenz eines sogenannten äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ beinhaltet.

Definition 2.4.2 (Äquivalentes Martingalmaß)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T_d}$ eine Filtration und

$$\mathrm{S}: \ T_d \times \Omega \to \mathbb{R}^J$$

der an die Informationsstruktur adaptierte, numerische J-dimensionale stochastische Prozess in diskreter Zeit der J Wertpapiere und

$$\mathrm{r}: \ T_d \setminus \{0\} \times \Omega \to (-1, \infty)$$

der durch S^1 definierte vorhersehbare stochastische Prozess in diskreter Zeit des Zinssatzes pro Periode. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß, falls

1. *$\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ äquivalent sind, das heißt*

$$\mathbb{P}[A] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}[A] = 0 \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{F} \textit{ erfüllt ist, und}$$

2. *für jedes Wertpapier S^j der diskontierte Preisprozes $\widetilde{S}_t^j$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$ darstellt.*

Mit $\mathcal{P}^*$ bezeichnen wir die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{Q}$.

Für ein $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ gilt demnach für jedes $j \in \{1, \dots, J\}$

$$\widetilde{S}^j_{t_i} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}^j_{t_k} \mid \mathcal{F}_{t_i}] \qquad \text{für alle } 0 \leq i < k \leq N.$$

Im Speziellen ergibt sich

$$S^j_{t_i} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{S^j_{t_{i+1}}}{1 + r_{t_{i+1}}} \mid \mathcal{F}_{t_i}] \quad \text{für alle } 0 \leq i < N. \tag{2.4.1}$$

2.5. No-Arbitrage Theoreme

Die Gültigkeit der No-Arbitrage Theoreme, auch bekannt als Fundamentalsätze der Preistheorie, ist für unendliche Zustandsräume gegeben. Da wir uns im Abschnitt zur Entwicklung eines mathematischen Modells auf endliche Zustandsräume beschränkt haben, werden wir den Beweis des ersten No-Arbitrage Theorems für einen diskreten Finanzmarkt mit endlich vielen Zuständen ($|\Omega| < \infty$) führen. Auf den Beweis des zweiten Theorems wird in dieser Arbeit verzichtet.

Satz 2.5.1 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie)
In einem Markt, bestehend aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, der Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ *sowie den adaptierten Wertpapierpreisprozessen* $\mathrm{S}^j : T_d \times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Markt ist arbitragefrei

(ii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß ($\mathcal{P}^* \neq \emptyset$)

Der Beweis dieses zentralen Satz benötigt eine Variante des Separationssatzes, welche mit Hilfe des folgenden Lemmas gezeigt wird.

Lemma 2.5.2
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine nicht-leere, konvexe und abgeschlossene Menge, die nicht den Nullpunkt enthält. Dann existiert ein* $\lambda \in V$*, sodass für alle* $z \in V$

$$|\lambda|^2 \leq \langle \lambda, z \rangle$$

gilt.[3]

[3] $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ für $x = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Beweis. Da V abgeschlossen ist, finden wir ein $\lambda \in V$ mit

$$|\lambda| \le |z| \quad \text{für alle } z \in V. \tag{2.5.1}$$

[Angenommen, es gibt kein $\lambda \in V$ mit der obigen Eigenschaft, dann können wir eine Folge $(z_n)_{n\in\mathrm{N}} \in V$ mit $|z_{i+1}| < |z_i|$ konstruieren. Diese Folge ist aber beschränkt durch 0 und monoton fallend, also nach Bolzano-Weierstraß konvergent und der Grenzwert liegt in V, da V abgeschlossen ist. Widerspruch!]

Sei $z \in V$ beliebig, so folgt aus der Konvexität von V, dass für $t \in [0, 1]$

$$tz + (1-t)\lambda = \lambda + (z-\lambda)t \in V$$

ist und mit der Ungleichung (2.5.1) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& |\lambda|^2 \le |\lambda + (z-\lambda)t|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |\lambda|^2 \le \langle \lambda + (z-\lambda)t, \lambda + (z-\lambda)t \rangle \\
\Leftrightarrow \quad & |\lambda|^2 \le |\lambda|^2 + 2t\langle \lambda, z-\lambda \rangle + t^2 |z-\lambda|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \quad 0 \le 2t\langle \lambda, z-\lambda \rangle + t^2 |z-\lambda|^2 \\
\Rightarrow \quad & \quad 0 \le 2\langle \lambda, z-\lambda \rangle + t|z-\lambda|^2 \qquad \text{für } t > 0.
\end{aligned}$$

Mit $t \to 0$ folgt

$$0 \le 2\langle \lambda, z-\lambda \rangle = 2\langle \lambda, z \rangle - 2|\lambda|^2,$$

also

$$|\lambda|^2 \le \langle \lambda, z \rangle.$$

□

Satz 2.5.3 (Separationssatz)
Seien C_1 und C_2 nicht-leere Mengen des $\mathbb{R}^n$, deren Schnitt leer ist. Sei C_1 ein Untervektorraum und C_2 konvex & kompakt. Dann existiert ein lineares Funktional $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derart, dass für ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$

(1) $\varphi(x) = \langle \lambda, x \rangle = 0$ *für alle* $x \in C_1$ *und*

(2) $\varphi(x) = \langle \lambda, x \rangle > 0$ *für alle* $x \in C_2$

gilt.

Beweis. Wir führen den Beweis in Anlehnung an Andrea Pascucci: "PDE and Martingale Methods in Option Pricing"(Seite 690).[3]

Zuerst wird die Minkowski-Summe

$$V := C_2 + (-C_1) = \{x - y | x \in C_2, y \in C_1\}$$

betrachtet. V ist

(i) *konvex*, denn C_1 ist als Untervektorraum konvex und somit folgt für $a = x_1 - y_1$, $b = x_2 - y_2 \in V$ und $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} ta + (1-t)b &= t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) \\ &= \underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in C_2, \text{ da } C_2 \text{ konvex}} - \underbrace{(ty_1 + (1-t)y_2)}_{\in C_1, \text{ da } C_1 \text{ UVR}} \in V. \end{aligned}$$

(ii) *abgeschlossen*, denn die Minkowski-Summe einer abgeschlossenen Menge mit einer kompakten Menge ist abgeschlossen.
Beweis: Sei $X \in \mathbb{R}^n$ kompakt und $Y \in \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Sei $z_i = x_i + y_i$ eine konvergente Folge in $X + Y$ mit Limes z, deren Summanden Folgen in X und Y sind.
$\lightning : z \in X + Y$
Da x_i eine Folge im Kompaktum X ist, hat sie einen Häufungspunkt, das heißt, es gibt eine konvergente Teilfolge x_{n_i}, die gegen $x \in X$ konvergiert. Dann muss aber auch $y_{n_i} = z_{n_i} - x_{n_i}$ konvergieren, und zwar, da Y abgeschlossen ist, gegen ein $y \in Y$. Daher folgt $z = x + y \in X + Y$.

(iii) *eine Menge, die nicht den Nullpunkt enthält.* Dies folgt sofort aus $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Nach dem vorigem Lemma 2.5.2 existiert ein $\lambda \in V$, sodass für alle $z \in V$

$$|\lambda|^2 \leq \langle \lambda, z \rangle$$

gilt. Dies impliziert für $x \in C_2, y \in C_1$

$$|\lambda|^2 \leq \langle \lambda, x - y \rangle = \langle \lambda, x \rangle - \langle \lambda, y \rangle$$

und da C_1 ein Untervektorraum ist, bedeutet dies

$$|\lambda|^2 \leq \langle \lambda, x - ty \rangle = \langle \lambda, x \rangle - t\langle \lambda, y \rangle \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Diese Ungleichung kann nur erfüllt sein, wenn für alle $y \in C_1$ $\langle \lambda, y \rangle = 0$ gilt. Da λ ein Element aus V darstellt, also $\lambda \neq 0$ und damit $|\lambda|^2 > 0$ ist, folgt $\langle \lambda, x \rangle > 0$ für alle $x \in C_2$. $\square$

Beweis von Satz 2.5.1: 1. Fundamentalsatz der Preistheorie.
Sei $|\Omega| < \infty$, also o.B.d.A. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ mit $\mathbb{P}(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

(ii)$\Longrightarrow$(i)

Wir nehmen die Existenz eines Maßes $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ an. Sei $\phi \in \mathcal{H}$ mit dazugehörigem Konsumplan $x(\phi)$, für welchen

(1) $x_0 = V_0(\phi) = 0$ und

(2) $x(\phi) \in X_0^+$

gilt. Diese Eigenschaften bedeuten, dass es sich um eine selbstfinanzierende Strategie ohne Einsatz von Kapital und ohne Risiko handelt. Insbesondere ist der Konsumplan von der Gestalt $x(\phi) = (0, \dots, 0, x_T)$. Nach dem Satz 2.2.1 muss in einem arbitragefreien Markt $x_T = 0$ gelten.
z : $x_T = V_T(\phi) = 0$
Nach dem Lemma 2.3.5 gilt für den diskontierten Wertprozess

$$\widetilde{V}_{t_i}(\phi) = V_0(\phi) + \widetilde{G}_{t_i}(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_{t_{i+1}}(\phi) - \widetilde{V}_{t_i}(\phi)|\mathcal{F}_{t_i}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(V_0(\phi) + \widetilde{G}_{t_{i+1}}(\phi)) - (V_0(\phi) + \widetilde{G}_{t_i}(\phi))|\mathcal{F}_{t_i}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_{t_{i+1}}(\phi) - \widetilde{G}_{t_i}(\phi)|\mathcal{F}_{t_i}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sum_{k=1}^{i+1} \phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k} - \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} * \Delta\widetilde{S}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_i}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi_{t_{i+1}} * \Delta\widetilde{S}_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sum_{j=1}^{J} \phi^j_{t_{i+1}}(\widetilde{S}^j_{t_{i+1}} - \widetilde{S}^j_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}] \qquad (2.5.2) \\
&= \sum_{j=1}^{J} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi^j_{t_{i+1}}(\widetilde{S}^j_{t_{i+1}} - \widetilde{S}^j_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{J} \phi_{t_{i+1}}^{j} \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_{t_{i+1}}^{j} - \widetilde{S}_{t_i}^{j} | \mathcal{F}_{t_i}]}_{=0 \text{ n.V.}} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit die F_{t_i}-Messbarkeit von $\phi_{t_{i+1}}^{j}$ benutzt haben. Somit ist auch $(\widetilde{V}_t(\phi))_{t \in T_d}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$ und folglich

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_T(\phi)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_T(\phi)|\mathcal{F}_0] = \widetilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi) \overset{\text{n.V.}}{=} 0. \tag{2.5.3}
$$

Die Voraussetzung $x \in X_0^+$ liefert uns $\mathbb{P}(x_T \geq 0) = \mathbb{P}(V_T(\phi) \geq 0) = 1$. Dies impliziert die Nicht-Negativität des abdiskontierten Endwertes $\widetilde{V}_T(\phi)$ der Handelsstrategie. Daher ist die Gleichung (2.5.3) genau dann erfüllt, wenn $\widetilde{V}_T(\phi) = 0$ $\mathbb{Q}$-fast sicher gilt. Mit der Äquivalenz von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ bedeutet dies $\widetilde{V}_T(\phi) = 0$, woraus $V_T(\phi) = 0$ folgt.

Da S^1 als positive Zufallsvariable definiert wurde, kann somit unter allen Strategien keine existieren, die ohne Einsatz von Kapital und ohne Risiko eine Chance auf Gewinn besitzt.
Angenommen, es existiert eine nicht-selbstfinanzierende Strategie mit Konsumplan $x(\phi) \in X_0^+$ und $x_0 = 0$ sowie $x_t(\omega) > 0$ für ein Paar $(t, \omega) \in T_d \setminus \{0, T\} \times \Omega$. Dann investiere x_t in S^1 und erzeuge somit eine selbstfinanzierende Strategie $\hat{\phi}$. Für deren Endwert gilt dann im Zustand ω natürlich $V_T(\hat{\phi})(\omega) > 0$. Dies ist aber nicht möglich, da unter den selbstfinanzierenden Strategien keine Arbitragemöglichkeit existiert.
Mit dem Satz 2.2.1 ergibt sich die Arbitragefreiheit des Marktes.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Sei nun ein arbitragefreier Markt gegeben. Wir definieren

$$
G := \{\widetilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}}(\phi) : \ \Omega \to \mathbb{R} | \ \phi \in \mathcal{H}\}
$$

sowie

$$
L^+ := \{\mathrm{Y} : \ \Omega \to \mathbb{R} | \ Y(\omega) \geq 0 \text{ und es existiert } \omega \text{ mit } Y(\omega) > 0\}.
$$

Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit muss

$$
G \cap L^+ = \emptyset \tag{2.5.4}
$$

gelten.

[Angenommen, der Schnitt ist nicht-leer, dann gibt es nach dem Lemma 2.3.5 eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ mit diskontierter Auszahlung $\widetilde{V}_T(\phi) \geq V_0(\phi)$, für die in mindestens einem Zustand

$$\widetilde{V}_T(\phi)(\omega) > V_0(\phi) \tag{2.5.5}$$

gilt. Dann kann aber durch das Leihen des Startkapitals $V_0(\phi)$ (von der Bank) und das Eingehen der Strategie ϕ ohne Einsatz von Kapital eine nicht-negative Auszahlung $V_T(\phi) - \beta_T V_0(\phi) \geq 0$ generiert werden. Nach (2.5.5) besteht die Chance auf einen Gewinn, also handelt es sich hierbei um eine Arbitragemöglichkeit. Widerspruch!]

Wir definieren die kompakte und konvexe Menge

$$L^+(1) := \{Y \in L^+ | \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) = 1\}.$$

$L^+(1)$ stellt die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω dar und mit (2.5.4) folgt

$$G \cap L^+(1) = \emptyset.$$

Da G einen Untervektorraum aller Zufallsgrößen auf Ω definiert, existiert nach dem Separationssatz[4] ein lineares Funktional φ, sodass

1) $\varphi(Y) = \langle \lambda, Y \rangle = \sum_\omega \lambda(\omega) Y(\omega) > 0$ für alle $Y \in L^+(1)$ und

2) $\varphi(\widetilde{G}_T(\phi)) = \langle \lambda, \widetilde{G}_T(\phi) \rangle = \sum_\omega \lambda(\omega) \widetilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0$ für alle $\widetilde{G}_T(\phi) \in G$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt. Für $\omega \in \Omega$ ist $\mathbf{1}_{\{\omega\}} \in L^+(1)$, wodurch mit der ersten Eigenschaft $\lambda(\omega) > 0$ folgt. Damit können wir aber durch

$$\mathbb{Q}(\omega) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} > 0$$

ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definieren. Wenden wir nun die zweite Eigenschaft an, so gilt für $\widetilde{G}_T(\phi) \in G$

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \widetilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} \widetilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0 \end{aligned}$$

[4] Für die Anwendung des Satzes werden die Mengen G und $L^+(1)$ als Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ interpretiert, das heißt $G := \{(\widetilde{G}_T(\phi)(\omega_1), \dots, \widetilde{G}_T(\phi)(\omega_n))^t | \ \phi$ vorhersehbarer Prozess$\}$ und analog für $L^+(1)$.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad & \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{Q}(\omega)\widetilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(\phi)] = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^{N} \phi_{t_i} * \Delta\widetilde{S}_{t_i}] = 0. \qquad (2.5.6)
\end{aligned}$$

Da G die Menge der Gewinnspannen aller selbstfinanzierenden Strategien darstellt, folgt mit dem Korollar 2.3.6, dass die Gleichung (2.5.6) für alle Strategien gilt. Insbesondere ist sie für solche erfüllt, die nur in eine bestimmte Anlage S^j investieren. Damit ergibt sich für $j \in \{1, \ldots, J\}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^{N} \phi^j_{t_i} \cdot \Delta\widetilde{S}^j_{t_i}] = 0. \qquad (2.5.7)$$

Wir betrachten die Strategien, welche nur in einem bestimmten Zeitpunkt $t_i \in T_d \backslash \{T\}$ beim Eintreten von Ereignissen $\omega \in A \in \mathcal{F}_{t_i}$ in das j-te Wertpapier investieren. Also Startegien von der Form

- $\phi^j = (\phi^j_{t_1}, \ldots, \phi^j_T) = (0, \ldots, 0, \phi^j_{t_{i+1}}, 0, \ldots, 0)$ mit $\phi^j_{t_{i+1}} = \mathbf{1}_A$ für eine $\mathcal{F}_{t_i}$-messbare Menge A und
- $\phi^k = (\phi^k_{t_1}, \ldots, \phi^k_T) = (0, \ldots, 0)$ für $k \neq j$.

Mit (2.5.7) erhalten wir die Beziehung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A(\widetilde{S}^j_{t_{i+1}} - \widetilde{S}^j_{t_i})] = 0.$$

Da diese Strategien für alle $\mathcal{F}_{t_i}$-messbaren Mengen definiert werden können, folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}^j_{t_{i+1}} - \widetilde{S}^j_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] = 0$$

und damit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}^j_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}] = \widetilde{S}^j_{t_i}.$$

Also definiert $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß. □

Einen Bezug zwischen der Vollständigkeit eines Marktes und der Anzahl äquivalenter Martingalmaße gibt das zweite No-Arbitrage Theorem an.

Satz 2.5.4 (2. Fundamentalsatz der Preistheorie)
In einem Markt, bestehend aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, der Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ *sowie den adaptierten Wertpapierpreisprozessen* $\mathrm{S}^j : T_d \times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$*, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Markt ist vollständig, also jede Auszahlung hedgebar

(ii) Es existiert **genau ein** *äquivalentes Martingalmaß*

Ein Beweis des Satzes befindet sich zum Beispiel im Buch von Andrea Pascucci [3] (Theorem 2.29 auf Seite 31).

2.5.1. Bewertung von hedgebaren Claims mittels eines äquivalenten Martingalmaßes

Erinnerung Unsere Idee lag darin ein Martingalmaß zu finden, unter welchem jeder Wertprozess einer selbstfinanzierenden Portfoliostrategie ein Martingal bildet.

Nun ist leider nicht bekannt, ob ein solches Maß in einem arbitragefreien Markt existiert. Aber nach dem ersten No-Arbitrage Theorem finden wir auf jeden Fall ein äquivalentes Martingalmaß, welches aber auch eine zur Bewertung hilfreiche Eigenschaft besitzt.

Korollar 2.5.5
Sei $\mathbb{Q}$ *ein äquivalentes Martingalmaß und* $\phi \in \mathcal{H}$*, so bildet der diskontierte Wertprozess* $(\widetilde{V}_t(\phi))_{t \in T_d}$ *ebenfalls ein Martingal bezüglich* $\mathbb{Q}$*.*

Beweis. Dies wurde in dem Beweis vom ersten Fundamentalsatz der Preistheorie hergeleitet (siehe (2.5.2)). □

Soll ein hedgebarer Claim mit zustandsabhängiger Auszahlung $\mathrm{C} : \Omega \to \mathbb{R}$ im Zeitpunkt T bewertet werden, so liefert die Hedgingstrategie $\phi \in \mathcal{H}$ mit $V_T(\phi) = C$ nach dem Replikationsprinzip einen eindeutigen fairen Preis p_0 für den Claim, nämlich $p_0 = x_0 = V_0(\phi)$. Bei Kenntnis des Diskontierungsprozesses, welcher durch das

Wertpapier S^1 definiert wird, gilt nach dem vorigen Korollar für das Startkapital

$$\begin{aligned} V_0(\phi) = \widetilde{V}_0(\phi) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_T(\phi)|\mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_T(\phi)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T \cdot V_T(\phi)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T \cdot C] \\ &=: \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*], \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Q}$ ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß sei. Also entspricht der Erwartungswert der diskontierten Auszahlung des Claims seinem fairen Preis. Insbesondere ist der eindeutige diskontierte Wertprozess des Claims durch

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*|\mathcal{F}_t] \quad \text{für } t \in T_d$$

gegeben.

Fazit Für die Berechnung des fairen Preises eines hedgebaren Claims in *vollständigen* und *unvollständigen* (arbitragefreien) Märkten reicht die Kenntnis **eines** äquivalenten Martingalmaßes. Dies ergibt sich aus der obigen Rechnung, welche unabhängig vom gewählten Maß $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ Gültigkeit besitzt. Insbesondere muss das replizierende Portfolio hierfür nicht explizit angegeben werden.

3. Binomialmodell

Das Binomialmodell ist ein diskretes Modell für die Modellierung von Wertpapier- und Aktienkursentwicklungen. Wir werden die Vollständigkeit des Cox-Ross-Rubinstein-Binomialmodells zeigen und danach die Anwendung der zwei hergeleiteten Bewertungsmethoden vorführen.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$. Für das Binomialmodell gelten vereinfachende Annahmen, und zwar gibt es

- keine Transaktionskosten und Steuern,
- keine Mengenbeschränkungen sowie
- ein Geldmarktkonto mit konstantem Zinssatz $r > -1$ pro Periode, welches durch die Nullkuponanleihe $B(0, t_i) = (1+r)^{-i}$ dargestellt wird.

In dem Binomialmodell werden für jeden Zeitschritt *zwei* Entwicklungsmöglichkeiten postuliert und jede mit einer positiven Wahrscheinlichkeit belegt. Dies bedeutet die Existenz von risikobehafteten Wertpapieren S in Form von stochastischen Prozessen $(S_t)_{t \in T_d}$ mit den Kursausprägungen $u_{t_{i+1}}(\omega) \cdot S_{t_i}(\omega) > 0$ bzw. $d_{t_{i+1}}(\omega) \cdot S_{t_i}(\omega) > 0$ im Zeitpunkt t_{i+1} (u steht hierbei für *up* und d für *down*) und einem heutigen Wert $S_0 > 0$. Zur Sicherung der nicht-exakten Vorhersage[1] des Wertpapiers nehmen wir $u_t > d_t > 0$ für alle $t \in T_d \setminus \{0\}$ an.

3.1. Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein (CRR-Modell) geht von einem Markt aus, in dem neben dem Geldmarktkonto nur ein risikobehaftetes Wertpapier S existiert. Zudem gilt $d_t = d$ und $u_t = u$ für alle $t \in T_d \setminus \{0\}$.

[1] Ein Wertpapier heißt nicht-exakt vorhersagbar für die nächste Periode, wenn wir den eintretenen Kurs nicht mit absoluter Sicherheit angeben können. Es gibt also mindestens zwei unterschiedliche Kursrealisationen mit positiver Eintrittswahrscheinlichkeit.

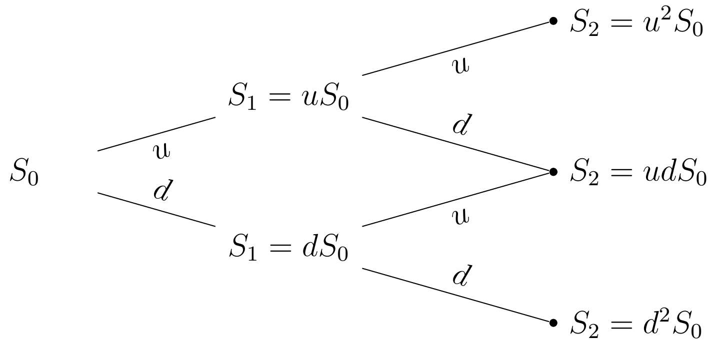

Abbildung 3.1.: Aktienpreisprozess im CRR-Modell

Der dem Modell zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist somit durch $(\Omega = \{u, d\}^N, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben. Hierbei ist für alle $\omega \in \Omega$ und ein $p \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega) &= \mathbb{P}((\omega_1, \dots, \omega_N)) \\ &= p^{\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{u\}}(\omega_i)} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{d\}}(\omega_i)}.\end{aligned}$$

Unter dem gegebenen W'Maß $\mathbb{P}$ ist somit im Bezug auf den zukünftigen Kurs $S_{t_{i+1}}$ bei Kenntnis von S_{t_i}

$$\mathbb{P}(S_{t_{i+1}} = uS_{t_i}) = p = 1 - \mathbb{P}(S_{t_{i+1}} = dS_{t_i}),$$

also ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir im Zeitpunkt t_{i+1} ein *up* bzw. ein *down* sehen, unabhängig von der Höhe des aktuellen Kurses S_{t_i}. Der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \in T_d}$ kann unter diesen Annahmen als

$$S_{t_i} = S_0 \cdot \prod_{n=1}^{i} Y_n \tag{3.1.1}$$

dargestellt werden, wobei $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$ unabhängig identisch verteilte (u.i.v.) Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_n = u) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_n = d)$ sind. Eine weitere Alternative wäre

$$S_{t_i} = S_0 \cdot u^{Z_i} \cdot d^{i - Z_i}$$

mit $Z_i \backsim$ Bin(i,p).

Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ ist definiert durch $\mathcal{F}_{t_i} = \sigma(S_0, \dots, S_{t_i}) = \sigma(Y_1, \dots, Y_i)$, insbesondere ist der stochastische Prozess $(S_t)_{t \in T_d}$ an die Filtration adaptiert.[2]

[2]Für die Adaptiertheit von $(S_t)_{t \in T_d}$ an $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ würde $\mathcal{F}_t = \sigma(S_t)$ genügen, doch dann stellt $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ im Allgemeinen (bei jedem CRR-Modell mit mindestens zwei Perioden) keine Filtration dar.

Nun widmen wir uns der Frage, welche Voraussetzungen für die Arbitragefreiheit des CRR-Modells erfüllt sein müssen. Die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns ohne Einsatz von Kapital hängt von den Kurssprüngen des Wertpapiers, also von den Parametern u und d ab. Da sich das Modell auf die Existenz nur eines risikobehafteten Wertpapiers beschränkt, und das Geldmarktkonto einen periodenunabhängigen Zinssatz $r > -1$ besitzt, existieren drei relevante Fälle:

- $u > d \geq 1 + r$ führt zu Arbitrage, indem Geld vom Geldmarktkonto geliehen wird, um dieses in das Wertpapier zu investieren. Aufgrund der Ungleichung $\min\{u \cdot S_t, d \cdot S_t\} \geq (1+r) \cdot S_t$ besitzt diese Strategie eine risikolose Gewinnchance ohne Einsatz von Kapital.
- $1 + r \geq u > d$ führt ebenfalls zu Arbitrage, wobei hier die konträre Strategie gewählt wird.
- $u > 1 + r > d$

Satz 3.1.1
Das CRR-Modell mit der Nullkuponanleihe $B(0, t_i) = (1 + r)^{-i}$ ist arbitragefrei genau dann, wenn $u > 1 + r > d$ gilt.

Beweis. Der Markt ist nach dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie (siehe 2.5.1) genau dann arbitragefrei, wenn ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. Für dieses Maß gilt nach der Gleichung (2.4.1) für jeden Zeitpunkt $t_i \in T_d \setminus \{T\}$

$$\begin{aligned} S_{t_i} &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] \\ &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 \prod_{n=1}^{i+1} Y_n|\sigma(Y_1, \dots, Y_i)] \end{aligned}$$

und mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[XY|\mathcal{A}] = X\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{A}]$ für eine $\mathcal{A}$-messbare Zufallsvariable X folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+r} \underbrace{S_0 \prod_{n=1}^{i} Y_n}_{=S_{t_i}} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{i+1}|\sigma(Y_1, \dots, Y_i)] \\ &= \frac{1}{1+r} S_{t_i} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{i+1}|\sigma(Y_1, \dots, Y_i)]. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass die $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$ u.i.v. Zufallsvariablen bzgl. $\mathbb{P}$ sind. Für den Nachweis, dass die Unabhängigkeit auch bzgl. des äquivalenten Maßes $\mathbb{Q}$ gilt, verweisen wir auf die Vorlesung Finanzmathematik von Volkert Paulsen, Seite 62.[7]
Verwenden wir nun $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ für X und $\mathcal{A}$ unabhängig, so ergibt sich

$$S_{t_i} = \frac{1}{1+r} S_{t_i} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{i+1}].$$

Definieren wir $q_n(u) := \mathbb{Q}(Y_n = u)$ und $q_n(d) := \mathbb{Q}(Y_n = d)$ für $n \in \{1, \dots, N\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & 1+r = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{i+1}] \\ \Leftrightarrow \quad & 1+r = q_{i+1}(u) \cdot u + q_{i+1}(d) \cdot d \\ \Leftrightarrow \quad & 1+r = q_{i+1}(u) \cdot u + (1 - q_{i+1}(u)) \cdot d \\ \Leftrightarrow \quad & 1+r = q_{i+1}(u) \cdot (u-d) + d. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Nun liefert uns (3.1.2)

$$\begin{aligned} q_n(u) &= \frac{1+r-d}{u-d} =: q(u) \\ q_n(d) &= \frac{u-(1+r)}{u-d} =: q(d) \qquad \text{für jedes } n \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Für ein $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \Omega$ gilt somit

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}((\omega_1, \dots, \omega_N)) &= \mathbb{Q}(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_N = \omega_N) \\ &= \mathbb{Q}(Y_1 = \omega_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{Q}(Y_N = \omega_N) \\ &= q(\omega_1) \cdot \ldots \cdot q(\omega_N). \end{aligned}$$

Das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist also durch das Modell (r, u und d sind gegeben) eindeutig bestimmt. Mit dieser Überlegung folgt:

$$\begin{aligned} & \text{Das CRR-Modell ist arbitragefrei} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{es existiert ein äquivalentes Martingalmaß } \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < q(u) = \frac{1+r-d}{u-d} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & d < 1+r < u. \end{aligned}$$

□

3.2. Bewertung im CRR-Modell

Wir wollen Claims mit Auszahlung $\mathrm{C}: \Omega \to \mathbb{R}$ bewerten. Im Verlauf des zweiten Kapitels haben wir 2 Möglichkeiten kennengelernt, um den Preis für Hedgebare zu bestimmen, und zwar

(1) mittels einer selbstfinanzierenden, die Auszahlung des Claims erzeugenden, Portfoliostrategie oder

(2) mittels eines äquivalenten Martingalmaßes.

Mit obiger Rechnung haben wir gezeigt, dass in diesem Modell genau ein äquivalentes Martingalmaß existiert. Nach dem zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie (siehe 2.5.4) folgt die Vollständigkeit des Marktes, also ist jede Auszahlung eines Claims duplizierbar und mit Hilfe des Replikationsprinzips bewertbar.
Das Hedging einer europäischen Call-Option wollen wir nun im Ein-Perioden-Modell vorführen.

3.2.1. Bewertung eines hedgebaren Claims

Beispiel 3.2.1 (Bewertung eines Calls im CRR-Modell)
Sei also $T_d = \{0, 1\}$, $(\Omega = \{u, d\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum und* $Call_e[S, K, 0, 1]$ *der Wert des europäischen Calls in* $t = 0$ *mit Underlying* S*, Strikepreis* K *und Fälligkeitszeitpunkt* $T = 1$*.*
Die Auszahlung $\mathrm{C_T}: \Omega \to \mathbb{R}$ *des Calls beträgt*

$$C_1(\omega) = [S_1(\omega) - K]^+ = \begin{cases} [u \cdot S_0 - K]^+ & =: C_u \quad \textit{falls } \omega = u \\ [d \cdot S_0 - K]^+ & =: C_d \quad \textit{falls } \omega = d \end{cases}$$

Sei Δ_1 *der Anteil an gehaltenen Wertpapieren und* B_1 *das Bargeld, welches in das Geldmarktkonto gelegt wird. Ist* $\phi = (B_1, \Delta_1)$ *das replizierende Portfolio des Calls, so gilt*

$$C_u = \Delta_1 \cdot u \cdot S_0 + (1 + r) \cdot B_1$$
$$C_d = \Delta_1 \cdot d \cdot S_0 + (1 + r) \cdot B_1$$

und daraus folgt

$$\Delta_1 = \frac{C_u - C_d}{(u-d) \cdot S_0}$$
$$B_1 = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{u-d}$$

$$\underset{Replikationsprinzip}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} Call_e[S,K,0,1] &= \Delta_1 \cdot S_0 + B_1 \\ &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)} + \frac{1}{1+r} \cdot \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{u-d} \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot [\frac{(1+r) \cdot (C_u - C_d) + u \cdot C_d - d \cdot C_u}{u-d}] \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot [\frac{1+r-d}{u-d} \cdot C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d} \cdot C_d] \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot [q(u) \cdot C_u + q(d) \cdot C_d] \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{1p}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*_{1p}], \end{aligned}$$

wobei C_{ip} die Auszahlung eines i-periodigen Calls bezeichnet.

Die beiden Methoden der Bewertung liefern (wie bereits in der Theorie in Kapitel 2 gezeigt) das selbe Ergebnis für den fairen Preis der Call-Option.

3.2.2. Binomialformel für europäische Call-Optionen

Bemerkung Die Bewertung von europäischen Calls, deren Laufzeit über mehrere Perioden geht, folgt induktiv der gleichen Idee und führt zur Binomialformel für europäische Call-Optionen.

Satz 3.2.2 (Binomialformel für europäische Call-Optionen)
In einem N-Perioden-CRR-Modell mit $u > 1 + r > d$ gilt für den Arbitragepreis einer europäischen Call-Option mit Basispreis K und Ausübungszeitpunkt $t_N = T$

$$\begin{aligned} Call_e[S,K,0,T] &= \frac{1}{(1+r)^N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{Np}] \\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} q(u)^j q(d)^{N-j} [u^j d^{N-j} S_0 - K]^+ \end{aligned}$$

mit $q(u) = \frac{1+r-d}{u-d} = 1 - q(d)$.

Beweis. Die Formel kann mit Hilfe der Induktion gezeigt werden. Wie stellen hier nur die Idee anhand des 2-Perioden-Modells vor. Sei $(\Omega = \{u,d\}^2, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ der W'Raum, $T_d = \{0,1,2\}$ und die Formel für den Fall eines einperiodigen Calls bewiesen. Wir wollen den Wert $Call_e[S,K,0,2]$ berechnen. Die Auszahlung C : $\Omega \to \mathbb{R}$ des Calls beträgt

$$C(\omega) = [S_2(\omega) - K]^+ = \begin{cases} [u^2 \cdot S_0 - K]^+ & =: C_{uu} \quad \text{falls } \omega = (u,u) \\ [ud \cdot S_0 - K]^+ & =: C_{ud} \quad \text{falls } \omega = (u,d) \text{ oder } \omega = (d,u) \\ [d^2 \cdot S_0 - K]^+ & =: C_{dd} \quad \text{falls } \omega = (d,d) \end{cases}$$

Die Idee ist die Zerlegung der zwei Perioden in zwei Einperioden-Modelle. Hierfür wird zuerst angenommen, dass der Kurs S_1 bekannt ist und dann ein Hedge für einen im Zeitpunkt $t = 1$ abgeschlossenen Call mit Strikepreis K und Fälligkeitszeitpunkt $T = 2$ berechnet.

1. Sei $S_1 = u \cdot S_0$.
   Wir betrachten den im Zeitpunkt $t = 1$ abgeschlossenen Call C^u mit der Auszahlung

   $$C_2^u(\omega) = [S_2(\omega) - K]^+ = \begin{cases} [u \cdot S_1 - K]^+ & = C_{uu} \quad \text{falls } \omega = (u,u) \\ [d \cdot S_1 - K]^+ & = C_{ud} \quad \text{falls } \omega = (u,d) \end{cases}$$

   Da wir einem einperiodigen Call betrachten, folgt nach Induktionsvoraussetzung für den Wert $\widetilde{C_u}$ des Calls

   $$\widetilde{C_u} := Call_e[S,K,1,2] \overset{IV}{=} \frac{1}{1+r} \cdot [q(u) \cdot C_{uu} + q(d) \cdot C_{ud}].$$

2. Sei $S_1 = d \cdot S_0$.
   Mit analogem Vorgehen ergibt sich für den Wert $\widetilde{C_d}$ des Calls C^d

   $$\widetilde{C_d} := Call_e[S,K,1,2] \overset{IV}{=} \frac{1}{1+r} \cdot [q(u) \cdot C_{ud} + q(d) \cdot C_{dd}].$$

Bezeichnet $\phi = (\phi_t)_{t \in \{1,2\}} = ((B_t, \Delta_t)^t)_{t \in \{1,2\}}$ das die Auszahlung des 2-periodigen Calls duplizierende Portfolio, so gilt

$$V_1(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^* | \mathcal{F}_1].$$

Mit $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_0, S_1) = \sigma(S_1) = \sigma(Y_1)$ folgt für $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$

$$\begin{aligned}
V_1(\phi)(\omega) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*|Y_1](\omega) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*|Y_1 = u] \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=u\}}(\omega) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*|Y_1 = u] \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=u\}}(\omega) \\
&= \frac{1}{1+r} \cdot [C_{uu} \cdot \mathbb{Q}(C = C_{uu}|Y_1 = u) + C_{ud} \cdot \mathbb{Q}(C = C_{ud}|Y_1 = u)] \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=u\}}(\omega) \\
&+ \frac{1}{1+r} \cdot [C_{ud} \cdot \mathbb{Q}(C = C_{ud}|Y_1 = d) + C_{dd} \cdot \mathbb{Q}(C = C_{dd}|Y_1 = d)] \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=d\}}(\omega) \\
&= \frac{1}{1+r} \cdot [C_{uu} \cdot q(u) + C_{ud} \cdot q(d)] \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=u\}}(\omega) \\
&+ \frac{1}{1+r} \cdot [C_{ud} \cdot q(u) + C_{dd} \cdot q(d)] \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=d\}}(\omega) \\
&= \widetilde{C_u} \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=u\}}(\omega) + \widetilde{C_d} \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_1=d\}}(\omega)
\end{aligned}$$

Also entspricht der Wert des zweiperiodigen Calls im Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit von Kurs S_1 den Werten $\widetilde{C_u}$ bzw. $\widetilde{C_d}$. Mit dem Replikationsprinzip folgt, dass die heutigen Preise der Strategie ϕ und des Claims $\widetilde{C}$ mit Auszahlung im Zeitpunkt $t = 1$ in Höhe von

$$\widetilde{C}(\omega) = \begin{cases} \widetilde{C}_u & \text{falls } \omega = (u,u) \text{ oder } \omega = (u,d) \\ \widetilde{C}_d & \text{falls } \omega = (d,u) \text{ oder } \omega = (d,d) \end{cases}$$

übereinstimmen. Das heißt, es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \cdot S_0 + B_1 &= \frac{1}{1+r} \cdot [q(u) \cdot \widetilde{C_u} + q(d) \cdot \widetilde{C_u}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}[q(u)^2 C_{uu} + 2q(u)q(d)C_{ud} + q(d)^2 C_{dd}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}[\binom{2}{2} q(u)^2 C_{uu} + \binom{2}{1} q(u)q(d)C_{ud} + \binom{2}{0} q(d)^2 C_{dd}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q(u)^j q(d)^{2-j} [u^j d^{2-j} S_0 - K]^+.
\end{aligned}$$

Nun ist ϕ aber auch ein Hedge für den zweiperiodigen Call und somit

$$\Delta_1 \cdot S_0 + B_1 = Call_e[S, K, 0, 2],$$

womit die Formel für den zweiperiodigen Call gezeigt ist. □

4. Allgemeine Bewertung von Finanzderivaten

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der allgemeinen Bewertung von Finanzderivaten. Hierbei ist das Modell (wie in den vorigen Kapiteln) durch einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T_d}$ und adaptierten Preisprozessen S^j gegeben.

Die Bewertung von hedgebaren Claims wurde im Kapitel 2 behandelt. Mit Kenntnis eines äquivalenten Maßes $\mathbb{Q}$ können wir den fairen Preis p_0 eines replizierbaren Claims C durch

$$p_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*]$$

berechnen. In *unvollständigen*, aber arbitragefreien Märkten existieren nach den Fundamentalsätzen der Preistheorie mindestens zwei äquivalente Martingalmaße. Besteht nun die Möglichkeit, dass auch für die Bewertung von nicht-hedgebaren Claims die Kenntnis dieser äquivalenten Martingalmaße ausreicht? Folglich ergeben sich zwei wesentliche Fragen für arbitragefreie unvollständige Märkte:

(1) Wie sieht eigentlich die Menge $\Pi(C)$ der arbitragefreien Preise für einen nicht-hedgebaren Claim C aus?

(2) Bezeichne $\mathbb{E}[C] := \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] | \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*\}$ die Menge der erwarteten abdiskontierten Claimauszahlungen C^*. Gilt (wie im hedgebaren Fall)

$$\Pi(C) = \mathbb{E}[C]?$$

4.1. Upper and lower hedging

Zum Bewerten von Claims müssen selbstfinanzierende Strategien betrachtet werden. Nach dem Lemma 2.3.5 gilt für $\phi \in \mathcal{H}$

$$\widetilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \widetilde{G}_T(\phi).$$

Erinnerung $\widetilde{G}_t(\phi)$ stellt den diskontierten Gewinn (die Gewinnspanne) der Strategie ϕ zum Zeitpunkt t dar, wobei hier unter Verlust ein negativer Gewinn verstanden wird.

Neben der Charakterisierung durch den abdiskontierten Erwartungswert der Claimauszahlung konnten wir mit Hilfe des Startkapitals eines replizierenden Portfolios den Anfangspreis eines hedgebaren Claims eindeutig bestimmen.
Für allgemeine Claims C folgt die Einschränkung der arbitragefreien Preise der gleichen Idee. Gesucht sind hedgebare Claims $\overline{C}$, dargestellt durch ihr replizierendes Portfolio, welche wir mit dem Claim C vergleichen können. Als Vergleichsobjekt verwenden wir die Gewinnspanne.

Definition 4.1.1 (Upper Hedge)
Ein Claim C ist upper hedgebar zum Anfangskapital x, falls es ein $\phi_x \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$x + \widetilde{G}_T(\phi_x) \geq C^*.$$

ϕ_x nennen wir einen Upper Hedge für C zum Anfangskapital x und mit

$$U(C) := \{x : C \text{ ist upper hedgebar zum Anfangskapital } x\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Anfangskapitale bezüglich derer C upper hedgebar ist. Das Infimum

$$p_+(C) := \inf U(C)$$

ist der upper hedging Preis.

Definition 4.1.2 (Lower Hedge)
Ein Claim C ist lower hedgebar zum Anfangskapital x, falls es ein $\phi_x \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$x + \widetilde{G}_T(\phi_x) \leq C^*.$$

ϕ_x nennen wir einen Lower Hedge für C zum Anfangskapital x und mit

$$L(C) := \{x : C \text{ ist lower hedgebar zum Anfangskapital } x\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Anfangskapitale bezüglich derer C lower hedgebar ist. Das Supremum

$$p_-(C) := \sup L(C)$$

ist der lower hedging Preis.

Satz 4.1.3
$U(C)$ ist nach unten beschränkt.

Beweis. Betrachten wir die Rechnung (2.5.2) im Beweis des ersten Fundamentalsatz der Preistheorie, so folgt, dass auch der Prozess $(\widetilde{G}_t(\phi))_{t\in T_d}$ ein Martingal unter einem Maß $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ bildet. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(\phi)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(\phi)|\mathcal{F}_0] = \widetilde{G}_0(\phi) = 0. \tag{4.1.1}$$

Ist $x \in U(C)$, so folgt aus der Monotonie des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[x + \widetilde{G}_T(\phi_x)] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*],$$

also gilt nach (4.1.1)

$$x \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*].$$

Da Ω endlich ist, existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*]$ und es folgt die Behauptung. □

Korollar 4.1.4
$L(C)$ ist nach oben beschränkt.

Beobachtung Betrachten wir einen beliebigen Upper Hedge ϕ_x für einen Claim C, so gilt nach dem vorigen Satz 4.1.3

$$x \geq \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*]|\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*\} = \sup \mathbb{E}[C].$$

Da dies nicht von der Wahl des Upper Hedges abhängt, folgt

$$\inf U(C) = p_+(C) \geq \sup \mathbb{E}[C].$$

Mittels den selben Begründungen ergibt sich

$$\sup L(C) = p_-(C) \leq \inf \mathbb{E}[C].$$

In einem arbitragefreien Markt ist die Menge der äquivalenten Martingalmaße nach dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie nicht-leer, insbesondere existieren somit $\inf \mathbb{E}[C]$ und $\sup \mathbb{E}[C]$. Insgesamt folgt

$$-\infty < p_-(C) \leq \inf \mathbb{E}[C] \leq \sup \mathbb{E}[C] \leq p_+(C) < \infty. \tag{4.1.2}$$

Notation $y \trianglerighteq z :\Leftrightarrow y \geq z$ und es existiert mindestens ein $\omega \in \Omega$ mit $y(\omega) > z(\omega)$

Interpretation Sei ϕ ein beliebiger Upper Hedge für einen Claim C, so gilt für ein $x \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{G}_T(\phi) \geq C^* - x. \tag{4.1.3}$$

Interpretieren wir x als den Preis des Claims, so vergleichen wir den diskontierten Gewinn von C mit dem eines Claims $\overline{C}$ mit Hedge ϕ. Nun suchen wir den minimalen Preis $\hat{x}$, bei welchem $\overline{C}$ noch gegenüber C bevorzugt würde, also die Ungleichung (4.1.3) noch erfüllt ist. Dieses Vorgehen führen wir für alle Upper Hedges von C durch und erhalten zwei mögliche Fälle.

- Es gilt $\widetilde{G}_T(\phi_{\hat{x}}) = C^* - \hat{x}$ für einen Upper-Hedge $\phi_{\hat{x}}$.
  Dann ist C auch lower hedgebar zum Anfangskapital $\hat{x}$, insbesondere gilt demnach $\hat{x} \in U(C)$ und $\hat{x} \in L(C)$, welches $p_+(C) \leq \hat{x} \leq p_-(C)$ impliziert. Mit (4.1.2) folgt

$$p_-(C) = \hat{x} = p_+(C).$$

- Es gilt $\widetilde{G}_T(\phi_{\hat{x}}) \trianglerighteq C^* - \hat{x}$ für alle Upper Hedges $\phi_{\hat{x}}$.
  Der gehandelte Preis p_0 des Claims kann dann nur unterhalb von $\hat{x}$ notieren, da sonst die Arbitragefreiheit verletzt werden würde.
  [Beweis: Gilt $p_0 \geq \hat{x}$ so folgt

$$\widetilde{V}_T(\phi_{\hat{x}}) - V_0(\phi_{\hat{x}}) = \widetilde{G}_T(\phi_{\hat{x}}) \trianglerighteq C^* - \hat{x} \geq C^* - p_0. \tag{4.1.4}$$

  Verkaufen wir den Claim, gehen die Strategie $\phi_{\hat{x}}$ ein und legen die Differenz $p_0 - V_0(\phi_{\hat{x}})$ auf das Geldmarktkonto (bzw. leihen sie uns), so besitzt unsere Strategie im Endzeitpunkt T den Wert

$$(p_0 - V_0(\phi_{\hat{x}})) \cdot \beta_T + V_T(\phi_{\hat{x}}) - C \underset{(4.1.4)}{\trianglerighteq} 0.$$

  Da kein eigenes Kapital investiert werden muss, stellt sie eine Arbitragemöglichkeit dar.]

Daher folgt

$$p_0 < x \text{ für alle } x \in U(C). \tag{4.1.5}$$

Für den Fall der Lower Hedges muss demnach

$$p_0 > x \text{ für alle } x \in L(C) \tag{4.1.6}$$

gelten.

4.2. Arbitragefreie Preise

Definition 4.2.1 (arbitragefreier Preis)
Sei C ein Claim. $p_0 \in \mathbb{R}$ heißt arbitragefreier Preis für C, falls weder
$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \trianglerighteq C^*$ *noch*
$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \trianglelefteq C^*$
für eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ gilt. $\Pi(C)$ sei die Menge aller arbitragefreien Preise.

Wir charakterisieren die zum Anfangskapital $x = 0$ upper hedgebaren (superreplizierbaren) Claims durch die abgeschlossene Menge

$$G^* := \{C^* : \text{ es existiert } \phi \in \mathcal{H} \text{ mit } C^* \leq \widetilde{G}_T(\phi)\}.$$

Korollar 4.2.2
Für einen Claim C gilt

1. $x \in U(C) \Leftrightarrow C^* - x \in G^*$
2. $x \in L(C) \Leftrightarrow x - C^* \in G^*$

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt sofort aus der Definition von $U(C)$ und G^*. Bei der zweiten wird verwendet, dass für eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ auch $-\phi \in \mathcal{H}$ ist. $\square$

Satz 4.2.3
Sei C ein Claim, so gilt

1. $U(C) = [p_+(C), +\infty)$
2. $L(C) = [p_-(C), -\infty)$

Beweis.
zu 1..
Es genügt zu zeigen, dass die Menge $U(C)$ das Infimum $p_+(C)$ annimmt.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U(C)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p_+(C)$. Die Existenz einer solchen Folge ist gegeben, da ansonsten $p_+(C)$ nicht das Infimum der Menge $U(C)$ sein kann. Nach dem Korollar 4.2.2 gilt $C^* - a_n \in G^*$, also folgt mit der Abgeschlossenheit von G^*

$$\lim_{n\to\infty}(C^* - a_n) = C^* - p_+(C) \in G^*,$$

insbesondere ist $p_+(C) \in U(C)$.

zu 2.
Der Beweis geht analog. □

Nun können wir die arbitragefreien Preise eines Claims C in einem arbitragefreien Markt charakterisieren.

Satz 4.2.4 (Charakterisierung der arbitragefreien Preise, Teil I)
Sei C ein Claim.

1. *C ist genau dann hedgebar zum Anfangskapital p_0, wenn $p_-(C) = p_0 = p_+(C)$ gilt. In diesem Fall folgt für die Menge der arbitragefreien Preise*

$$\Pi(C) = \{p_0\} = \mathbb{E}[C].$$

2. *C ist genau dann nicht-hedgebar, wenn $p_-(C) < p_+(C)$ gilt. In diesem Fall folgt für die Menge der arbitragefreien Preise*

$$\Pi(C) = (p_-(C), p_+(C)).$$

Beweis.
zu 1.
"$\Rightarrow$" Ist C hedgebar zum Anfangskapital p_0, so gibt es eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ mit $\widetilde{V}_T(\phi) = C^*$ und $V_0(\phi) = p_0$, also gilt

$$\widetilde{V}_T(\phi) = p_0 + \widetilde{V}_T(\phi) - V_0(\phi) = p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) = C^*,$$

insbesondere ist C upper und lower hedgebar zum Anfangskapital p_0. Es folgt $p_-(C) = p_0 = p_+(C)$ (wie bereits in der Behandlung der möglichen Fälle auf Seite 47 [Interpretation] gesehen).

"$\Leftarrow$" Nach dem Satz 4.2.3 ist C upper und lower hedgebar zum Anfangskapital p_0, also gilt

$$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) = C^*$$

für ein $\phi \in \mathcal{H}$. Betrachten wir die Strategie $\overline{\phi} \in \mathcal{H}$, welche im Zeitpunkt $t = 0$ in das Geldmarktkonto S^1 investiert und danach keine Veränderungen vornimmt, so gilt nach (2.3.2)

$$\widetilde{G}_T(\overline{\phi}) = \widetilde{V}_T(\overline{\phi}) - V_0(\overline{\phi}) = 0. \tag{4.2.1}$$

Wird $\overline{\phi}$ derart gewählt, dass $V_0(\overline{\phi}) = p_0 - V_0(\phi)$ ist, so ergibt sich mit (4.2.1)

$$C^* = p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) = p_0 + \widetilde{V}_T(\phi) - V_0(\phi) = \widetilde{V}_T(\phi) + \widetilde{V}_0(\overline{\phi}) = \widetilde{V}_T(\phi) + \widetilde{V}_T(\overline{\phi}) = \widetilde{V}_T(\hat{\phi})$$

mit $\hat{\phi} := \phi + \overline{\phi}$. Nun ist $\hat{\phi} \in \mathcal{H}$, da die Menge der selbstfinanzierenden Strategien bezüglich Addition abgeschlossen ist, also stellt $\hat{\phi}$ mit Anfangskapital

$$V_0(\hat{\phi}) = V_0(\phi) + V_0(\overline{\phi}) = V_0(\phi) + p_0 - V_0(\phi) = p_0$$

einen Hedge für den Claim C dar.

$\Pi(C) = \{p_0\} = \mathbb{E}[C]$ haben wir bereits bei der Bewertung von hedgebaren Claims (2.3.1 und 2.5.1) im Kapitel 2 zum Finanzmarkt in diskreter Zeit bewiesen.

<u>zu 2.</u>
Die Äquivalenz folgt aus dem ersten Teil des Satzes.

Es bleibt zu zeigen: $\Pi(C) = (p_-(C), p_+(C))$
"$\subseteq$"
Sei $p_0 \in \Pi(C)$ und $p_-(C) < p_+(C)$.
Implizit haben wir bereits bei Behandlung der möglichen Fälle auf Seite 47 [Interpretation] gesehen, dass für einen arbitragenfreien Preis p_0

$$y < p_0 < x \text{ für alle } y \in L(C), x \in U(C)$$

gelten muss (siehe Ungleichungen (4.1.5) und (4.1.6)). Mit dem Satz 4.2.3 folgt somit

$$p_-(C) < p_0 < p_+(C).$$

Trotzdem führen wir einen Beweis vor, um zu zeigen, dass die gewählte Definition 4.2.1 der arbitragefreien Preise diese Inklusion erfüllt.

Angenommen, es gilt $p_0 \geq p_+(C)$, so existiert ein $\phi \in \mathcal{H}$ mit $p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \geq C^*$. Da $p_0 \in \Pi(C)$ ist, kann nicht

$$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \trianglerighteq C^*$$

gelten. Dies impliziert

$$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) = C^*$$

und somit ist $p_0 \in L(C)$, also $p_+(C) \leq p_0 \leq p_-(C)$, was einen Widerspruch zur Annahme $p_-(C) < p_+(C)$ darstellt.
Mit der selben Idee wird gezeigt, dass nicht $p_0 \leq p_-(C)$ gelten darf.
Insgesamt folgt $p_0 \in (p_-(C), p_+(C))$.

"$\supseteq$"
Gilt $p_-(C) < p_0 < p_+(C)$, so kann weder
$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \geq C^*$ (insbesondere $p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \trianglerighteq C^*$) noch
$p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \leq C^*$ (insbesondere $p_0 + \widetilde{G}_T(\phi) \trianglelefteq C^*$)
für eine Strategie $\phi \in \mathcal{H}$ gelten, also ist $p_0 \in \Pi(C)$. □

Bemerkung Durch die Kenntnis aller Upper und Lower Hedges eines Claims C kann die Menge $\Pi(C)$ seiner arbitragefreien Preise exakt angegeben werden. Wir haben bereits gesehen, dass diese im hedgebaren Fall mit der Menge $\mathbb{E}[C]$ übereinstimmt. Nun widmen wir uns der Frage, ob auch für einen nicht-hedgebaren Claim C

$$\Pi(C) = \mathbb{E}[C], \text{ also } (p_-(C), p_+(C)) = \mathbb{E}[C]$$

gilt. Nach (4.1.2) ist die Ungleichungsfolge

$$-\infty < p_-(C) \leq \inf \mathbb{E}[C] \leq \sup \mathbb{E}[C] \leq p_+(C) < \infty$$

für jeden Claim C erfüllt. Um unsere Vermutung zu bestätigen, muss

- $p_-(C) = \inf \mathbb{E}[C]$ und $\sup \mathbb{E}[C] = p_+(C)$ sowie
- $\mathbb{E}[C]$ ist ein offenes Intervall

gezeigt werden. Für den Beweis des ersten Teils wird das Bipolar Theorem benötigt.

4.3. Bipolar Theorem

Definition 4.3.1 (konvexer Kegel)
Eine nicht-leere Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvexer Kegel, falls

(i) $x \in K, \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \in K$

(ii) $x, y \in K \Longrightarrow x + y \in K$

gilt.

Definition 4.3.2 (erzeugter Kegel)
Für eine nicht-leere konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert

$$\begin{aligned} cone(X) &:= \cap\{K \subseteq \mathbb{R}^n : X \subseteq K, K \ Kegel\} \\ &= \{\lambda x : x \in X, \lambda \geq 0\} \end{aligned}$$

den von X erzeugten konvexen Kegel.

Definition 4.3.3 (polarer Kegel)
Für einen konvexen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der polare Kegel K^o definiert durch

$$K^o = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in K\}.$$

Satz 4.3.4
K^o ist ein abgeschlossener konvexer Kegel.

Beweis. Dass K^o einen konvexen Kegel darstellt, ergibt sich aus der Bilinearform des Skalarprodukts und die Abgeschlossenheit folgt mit der Stetigkeit.

(i) Sei $y \in K^o$, so gilt für $\lambda \geq 0$

$$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y\rangle}_{\leq 0} \leq 0 \text{ für alle } x \in K,$$

also ist auch $\lambda y \in K^o$.

(ii) Seien $y, y' \in K^o$, so gilt

$$\langle x, y + y'\rangle = \underbrace{\langle x, y\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle x, y'\rangle}_{\leq 0} \leq 0 \text{ für alle } x \in K,$$

also ist auch $y + y' \in K^o$ und folglich K^o ein konvexer Kegel.

(iii) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K^o mit Limes y, so gilt aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes für jedes feste $x \in K$

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Mit $\langle x, y_n \rangle \leq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt $\langle x, y \rangle \leq 0$, also $y \in K^o$. Somit ist K^o abgeschlossen.

□

Satz 4.3.5 (Trennungssatz für konvexe Kegel)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht-leerer, abgeschlossener und konvexer Kegel. Zu $y \notin K$ gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle \lambda, y \rangle < 0 \leq \langle \lambda, x \rangle \text{ für alle } x \in K.$$

Beweis. Die Minkowski-Summe

$$V = K - \{y\} := \{x - y \mid x \in K\}$$

ist konvex, abgeschlossen und enthält nicht den Nullpunkt (dies kann man analog zum Beweis für die Minkowski-Summe in 2.5.3 zeigen, denn K ist konvex & abgeschlossen und $\{y\}$ kompakt). Wir können somit das Hilfslemma 2.5.2 für den Separationssatz anwenden und erhalten für ein $\lambda \in V$

$$|\lambda|^2 \leq \langle \lambda, z \rangle \quad \text{für alle } z \in V.$$

Dies impliziert

$$|\lambda|^2 \leq \langle \lambda, x - y \rangle = \langle \lambda, x \rangle - \langle \lambda, y \rangle \quad \text{für alle } x \in K$$

und mit $|\lambda|^2 > 0$ ($\lambda \neq 0$) ergibt sich

$$\langle \lambda, y \rangle < \langle \lambda, x \rangle \quad \text{für alle } x \in K. \tag{4.3.1}$$

Nun stellt K einen konvexen Kegel dar, nach Definition ist daher $0 \in K$ und mit (4.3.1)

$$\langle \lambda, y \rangle < \langle \lambda, 0 \rangle = 0.$$

Angenommen, es existiert ein $x \in K$ mit $\langle \lambda, x \rangle < 0$, so gilt auch

$$\langle \lambda, \alpha x \rangle = \alpha \langle \lambda, x \rangle < 0 \text{ für alle } \alpha > 0,$$

insbesondere folgt

$$\lim_{\alpha \to \infty} \langle \lambda, \alpha x \rangle = -\infty.$$

Da $\alpha x \in K$ für alle $\alpha \geq 0, x \in K$ stellt dies einen Widerspruch zur Beschränkung (nach unten) durch $\langle \lambda, y \rangle$ (siehe (4.3.1)) dar. Insgesamt ergibt sich

$$\langle \lambda, y \rangle < 0 \leq \langle \lambda, x \rangle \text{ für alle } x \in K.$$

□

Satz 4.3.6 (Bipolar Theorem)
Sei K ein konvexer Kegel, so gilt

$$(K^o)^o = \overline{K}.$$

Beweis.
"$\subseteq$"
Angenommen, es gibt ein $y \in (K^o)^o \setminus \overline{K}$, dann folgt nach dem Trennungssatz 4.3.5 für konvexe Kegel die Existenz eines Vektors $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ ($\widetilde{\lambda} = -\lambda$), sodass

$$\langle \widetilde{\lambda}, y \rangle > 0 \text{ und } \langle \widetilde{\lambda}, x \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in \overline{K}. \tag{4.3.2}$$

Der zweite Teil impliziert $\widetilde{\lambda} \in K^o$, insbesondere gilt mit

$$y \in (K^o)^o = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in K^o\}$$

$$\langle \widetilde{\lambda}, y \rangle \leq 0,$$

wodurch wir einen Widerspruch zu (4.3.2) erhalten.

"$\supseteq$"
Für $x \in K$ gilt nach Definition $\langle x, y \rangle \leq 0$ für alle $y \in K^o$, insbesondere ist $x \in (K^o)^o$. Dies bedeutet

$$K \subseteq (K^o)^o \underset{(K^o)^o \text{ abg.}}{\Longrightarrow} \overline{K} \subseteq (K^o)^o.$$

□

4.4. Anwendung des Bipolar Theorems

Erinnerung $G^* := \{C^* : \text{ es existiert } \phi \in \mathcal{H} \text{ mit } C^* \leq \widetilde{G}_T(\phi)\}$ ist eine abgeschlossene, konvexe Menge.

Interpretieren wir C^* als Vektor $(C^*(\omega_1), \ldots, C^*(\omega_n))^t$, so stellt G^* einen abgeschlossenen konvexen Kegel im $\mathbb{R}^n$ mit $n = |\Omega|$ dar.

Notation Mit $\hat{\mathcal{P}}$ bezeichnen wir die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße, unter welchen die diskontierten Preisprozesse ein Martingal bilden.

Lemma 4.4.1
Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ sind äquivalent

(i) $\mathbb{Q} \in \hat{\mathcal{P}}$

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] \leq 0$ *für alle* $C^* \in G^*$

Beweis.
"(i)⇒(ii)"
Sei $\mathbb{Q} \in \hat{\mathcal{P}}$. Für $C^* \in G^*$ gibt es eine selbstfinanzierende Strategie ϕ mit $C^* \leq \widetilde{G}_T(\phi)$. Es folgt mit der Monotonie des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(\phi)] = \widetilde{G}_0(\phi) = 0,$$

wobei wir uns zu Nutze machen, dass $(\widetilde{G}_t(\phi))_{t \in T_d}$ bezüglich jedem (nicht zwingend äquivalenten) Martingalmaß ein Martingal bildet.

"(ii)⇒(i)"
Sei $\mathbb{Q}$ ein W'Maß und es gelte $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] \leq 0$ für alle $C^* \in G^*$.
Die Menge $G := \{\widetilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}}(\phi) : \ \Omega \to \mathbb{R} | \ \phi \in \mathcal{H}\}$ der Gewinnspannen selbstfinanzierender Strategien ist Teilmenge der zum Anfangskapital 0 superreplizierbaren Claims (dies ergibt sich sofort aus der Definition von G^*). Nun ist für ein $\phi \in \mathcal{H}$ auch $-\phi \in \mathcal{H}$ und mit $G \subseteq G^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(\phi)] &\leq 0 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(-\phi)] &\leq 0. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Da $\widetilde{G}_T(-\phi) = -\widetilde{G}_T(\phi)$ gilt, folgt mit (4.4.1)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{G}_T(\phi)] = 0 \text{ für alle } \widetilde{G}_T(\phi) \in G.$$

Nun befinden wir uns aber in der Situation des Beweises vom ersten Fundamentalsatz der Preistheorie (Richtung "(i)$\Longrightarrow$(ii)", siehe Seite 33). Mit dem analogen Vorgehen ergibt sich $\mathbb{Q} \in \hat{\mathcal{P}}$. $\square$

Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}^*$ aller äquivalenten Martingalmaße. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*, \mathbb{Q}' \in \hat{\mathcal{P}}$, so gilt für $p \in (0,1)$ und $0 \leq i \leq k \leq N$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p\mathbb{Q}+(1-p)\mathbb{Q}'}[\widetilde{S}^j_{t_k}|\mathcal{F}_{t_i}] &= p\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}^j_{t_k}|\mathcal{F}_{t_i}] + (1-p)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[\widetilde{S}^j_{t_k}|\mathcal{F}_{t_i}] \\ &= p\widetilde{S}^j_{t_i} + (1-p)\widetilde{S}^j_{t_i} \\ &= \widetilde{S}^j_{t_i}.\end{aligned}$$

Somit bildet $p\mathbb{Q} + (1-p)\mathbb{Q}'$ ein äquivalentes Martingalmaß für alle $p \in (0,1)$ und daher ist die Menge $\mathcal{P}^*$ der äquivalenten Martingalmaße dicht in der Menge $\hat{\mathcal{P}}$ aller Martingalmaße. Insbesondere ist $\mathcal{P}^*$ konvex und wir können (durch Interpretation von $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ als Vektor $(\mathbb{Q}(\omega_1), \ldots, \mathbb{Q}(\omega_n))^t$) den von $\mathcal{P}^*$ erzeugten konvexen Kegel

$$cone(\mathcal{P}^*) = \{\lambda\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*, \lambda \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

betrachten.

Satz 4.4.2
Es gilt

$$(G^*)^o = \overline{cone(\mathcal{P}^*)}.$$

Beweis.
"$\subseteq$"
Sei $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (G^*)^o = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in G^*\}$.
Beh.(1): Es ist $y_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Bew.(1): Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ liegt der Claim $C_i^* = -\overrightarrow{e_i}$, wobei $\overrightarrow{e_i}$ den i-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichne, in G^* (ein Upper Hedge wäre zum Beispiel die Strategie ϕ, welche gar nichts investiert, sich also aus dem Markt fernhält). Somit gilt

$$\langle -\overrightarrow{e_i}, y\rangle = -y_i \leq 0,$$

also $y_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1\. Fall: $y = 0$, dann ist $y \in \overline{cone(\mathcal{P}^*)}$, da $\lambda\mathbb{Q} \in cone(\mathcal{P}^*)$ für $\lambda = 0, \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$.
2\. Fall: $y \neq 0$, dann wird (nach Beh.(1)) durch

$$\mathbb{Q}(\omega_i) := \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} \geq 0 \;\text{ für } i = 1, \ldots, n$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Für $C^* \in G^*$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{Q}(\omega_i) \cdot C^*(\omega_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} \cdot C^*(\omega_i) \\
&= \frac{1}{\sum_{j=1}^n y_j} \sum_{i=1}^n y_i \cdot C^*(\omega_i) \\
&= \frac{1}{\sum_{j=1}^n y_j} \underbrace{\langle C^*, y \rangle}_{\leq 0} \qquad \leq 0
\end{aligned}$$

und mit dem Lemma 4.4.1 folgt $\mathbb{Q} \in \hat{\mathcal{P}}$. Da $\mathcal{P}^*$ dicht in $\hat{\mathcal{P}}$ ist, gilt somit $\mathbb{Q} \in \overline{\mathcal{P}^*}$. Mittels

$$y_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n y_j}_{:=\lambda > 0} \cdot \mathbb{Q}(\omega_i)$$

folgt

$$y = \lambda \cdot \mathbb{Q},$$

also $y \in cone(\overline{\mathcal{P}^*}) = \overline{cone(\mathcal{P}^*)}$.

"$\supseteq$"
Für ein beliebiges äquivalentes Maß $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ gilt nach dem Lemma 4.4.1

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] \leq 0 \text{ für alle } C^* \in G^*,$$

also für $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E}_{\lambda\mathbb{Q}}[C^*] \leq 0 \text{ für alle } C^* \in G^*.$$

Dies bedeutet aber $cone(\mathcal{P}^*) \subseteq (G^*)^o$ und mit der Abgeschlossenheit des polaren Kegels (nach Satz 4.3.4) folgt $\overline{cone(\mathcal{P}^*)} \subseteq (G^*)^o$. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Menge G^* der upper hedgebaren Claims zum Anfangskapital $x = 0$ exakt klassifizieren.

Satz 4.4.3
Es ist $G^* = cone(\mathcal{P}^*)^o$, also gilt

$$C^* \in G^* \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] \leq 0 \textit{ für alle } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*. \tag{4.4.2}$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Zusammenführen der folgenden beiden Gleichungen.

(1) Mit dem Satz 4.4.2 gilt
$((G^*)^o)^o = \overline{cone(\mathcal{P}^*)}^o = cone(\mathcal{P}^*)^o$.

(2) Nach dem Bipolar Theorem 4.3.6 gilt
$((G^*)^o)^o = \overline{G^*} = G^*$.

□

Folgerung Für einen Claim C gilt

$$a \in U(C) \underset{4.2.2}{\Leftrightarrow} C^* - a \in G^* \underset{4.4.3}{\Leftrightarrow} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^* - a] \leq 0 \text{ für alle } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^* \Leftrightarrow \sup \mathbb{E}[C] \leq a$$

und

$$b \in L(C) \underset{4.2.2}{\Leftrightarrow} b - C^* \in G^* \underset{4.4.3}{\Leftrightarrow} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[b - C^*] \leq 0 \text{ für alle } \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^* \Leftrightarrow \inf \mathbb{E}[C] \geq b.$$

In Verbindung mit dem Korollar 4.2.2 liefern die Äquivalenzen

$$p_-(C) = \inf \mathbb{E}[C] \text{ und } p_+(C) = \sup \mathbb{E}[C]. \tag{4.4.3}$$

Mit Hilfe dieser Gleichheit sind wir in der Lage unsere Vermutung zu verifizieren.

Satz 4.4.4 (Charakterisierung der arbitragefreien Preise, Teil II)
In einem arbitragefreien Markt gilt für jeden Claim C

$$\Pi(C) = \mathbb{E}[C].$$

Beweis. Für den hedgebaren Claim haben wir dies bereits gezeigt. Sei nun C nicht-hedgebar, also $\Pi(C) = (p_-(C), p_+(C))$ mit $p_-(C) < p_+(C)$ nach dem ersten Teil der Charakteriserung der arbitragefreien Preise (Satz 4.2.4).

$\underline{z}: (p_-(C), p_+(C)) = \mathbb{E}[C]$
Zuerst merken wir an, dass es sich bei $\mathbb{E}[C] = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] | \mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*\}$ um eine konvexe Menge handelt. Dies ergibt sich aus der Konvexität von $\mathcal{P}^*$ und da jede konvexe Teilmenge der reellen Zahlen die Form eines Intervalles besitzt, stellt auch $\mathbb{E}[C]$ ein solches dar.

"$\subseteq$"
Diese Inklusion folgt aus den Gleichungen $p_-(C) = \inf \mathbb{E}[C]$ und $p_+(C) = \sup \mathbb{E}[C]$ in (4.4.3).

"$\supseteq$"
Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{E}[C]$ ein offenes Intervall darstellt, also $\sup \mathbb{E}[C] \notin \mathbb{E}[C]$ und $\inf \mathbb{E}[C] \notin \mathbb{E}[C]$ gilt.
Angenommen, es gilt $\sup \mathbb{E}[C] \in \mathbb{E}[C]$. Dann folgt mit (4.4.3) $p_+(C) \in \mathbb{E}[C]$, insbesondere existiert ein äquivalentes Maß $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ mit

$$p_+(C) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*]. \tag{4.4.4}$$

Da $p_+(C) \in U(C)$ ist, gibt es ein $\phi \in \mathcal{H}$ mit

$$p_+(C) + \widetilde{G}_T(\phi) \geq C^*, \tag{4.4.5}$$

für welches nach (4.4.4)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[p_+(C) + \widetilde{G}_T(\phi)] = p_+(C) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*]$$

gilt. Mit (4.4.5) muss demnach

$$p_+(C) + \widetilde{G}_T(\phi) = C^* \quad \mathbb{Q} - \text{fast sicher}$$

gelten und da $\mathbb{Q}$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist, bedeutet dies

$$p_+(C) + \widetilde{G}_T(\phi) = C^*.$$

Diese Gleichung impliziert aber, dass C auch lower hedgebar zum Anfangskapital $p_+(C)$ ist, also $p_+(C) \leq p_-(C)$ gilt, welches einen Widerspruch zur Annahme eines nicht-hedgebaren Claims darstellt. Analog können wir $\inf \mathbb{E}[C] \notin \mathbb{E}[C]$ zeigen. $\square$

Fazit Nachdem im Abschnitt 2.5.1 des Kapitels 2 die Identität $\Pi(C) = \mathbb{E}[C]$ für hedgebare Claims gezeigt wurde, ist es uns in diesem Kapitel gelungen, dies auch für nicht-hedgebare Claims nachzuweisen. Daher ist es möglich in einem arbitragefreiem

Markt durch Kenntnis der Menge $\mathcal{P}^*$ aller äquivalenten Martingalmaße jeden beliebigen Claim zu bewerten. Insbesondere liefert die Bewertungsmethode mittels den äquivalenten Martingalmaßen auch die Charakterisierung des Claims als hedgebar bzw. nicht-hedgebar.

5. Trinomialmodell

Das Trinomialmodell ähnelt im Bezug auf die Annahmen dem Binomialmodell. Der einzige, aber wesentliche Unterschied besteht in der Tatsache, dass in jedem Zeitschritt *drei* Entwicklungsmöglichkeiten mit einer positiven Eintrittswahrscheinlichkeit postuliert werden. Die risikobehafteten Wertpapiere S besitzen also in jedem Zeitpunkt t_i mögliche Kursausprägungen $u_{t_i}(\omega) \cdot S_{t_{i-1}}(\omega), m_{t_i}(\omega) \cdot S_{t_{i-1}}(\omega)$ oder $d_{t_i}(\omega) \cdot S_{t_{i-1}}(\omega)$, wobei $u_t > m_t > d_t > 0$ für alle $t \in T_d \setminus \{0\}$ gilt.

Besitzt der Markt zwei unterscheidbare risikobehaftete Wertpapiere, handelt es sich um ein vollständiges Trinomialmodell und wir können den Preis eines Derivats mittels des Replikationsprinzip eindeutig bestimmen (completed trinomial model). Das Vorgehen ist hierbei analog zum Beispiel 3.2.1 im Binomialmodell.
Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf nur die Existenz eines risikobehafteten Wertpapiers S vorausgesetzt.

5.1. Standard-Trinomialmodell

Beispiel 5.1.1 (Trinomialprozess)
Sei $u > m > d > 0$ *und* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum mit* $\Omega := \{u, m, d\}^N = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_N\} | \ \omega_i \in \{u, m, d\}, \ 1 \leq i \leq N\}$. *Ein stochastischer Prozess* $\mathrm{S}: \ T_d \times \Omega \to \mathbb{R}$ *in diskreter Zeit mit* $S_0 > 0$ *und*

$$S_{t_i}(\omega) := \begin{cases} uS_{t_{i-1}} & \textit{falls } \omega_i = u \\ mS_{t_{i-1}} & \textit{falls } \omega_i = m \qquad \textit{für } i \geq 1 \\ dS_{t_{i-1}} & \textit{falls } \omega_i = d \end{cases}$$

stellt einen Trinomialprozess mit konstanten prozentualen Zuwächsen je Periode dar.

Der Preisprozess kann also durch

$$S_{t_i} = S_0 \cdot \prod_{n=1}^{i} Y_n \tag{5.1.1}$$

dargestellt werden, wobei $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_n = x) = p_x > 0$ für $x \in \{u, m, d\}$ und $\sum_x p_x = 1$ sind.

Mit dem Standard-Trinomialmodell bezeichnen wir einen Markt, in welchem außer dem durch die Nullkuponanleihe $B(0, t_i) = (1 + r)^{-i}$ definierten Geldmarktkonto nur ein Wertpapier mit dem obigen Preisprozess existiert. Um in diesem Modell die Bewertung von Derivaten durchzuführen, müssen wir die Arbitragefreiheit fordern. Nach dem ersten Fundamentalsatz der Preistheorie ist zu zeigen, dass mindestens ein äquivalentes Martingalmaß existiert. Nach (2.4.1) gilt für ein solches äquivalentes Maß $\mathbb{Q}$ mit $q_n(x) := \mathbb{Q}(Y_n = x)$ für $x \in \{u, m, d\},\ n \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}
& & S_{t_i} &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] \\
&\Leftrightarrow & S_{t_i} &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 \prod_{n=1}^{i+1} Y_n|\sigma(Y_1, \dots, Y_i)]
\end{aligned}$$

und mit den bereits im Binomialmodell verwendeten Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte sowie der Begründung für die Unabhängigkeit von $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$ unter $\mathbb{Q}$ (siehe Seite 38) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow & S_{t_i} &= \frac{1}{1+r}\underbrace{S_0 \prod_{n=1}^{i} Y_n}_{S_{t_i}} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{i+1}|\sigma(Y_1, \dots, Y_i)] \\
&\Leftrightarrow & S_{t_i} &= \frac{1}{1+r} S_{t_i} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{i+1}] \\
&\Leftrightarrow & S_{t_i} &= \frac{1}{1+r} S_{t_i} \cdot [q_{i+1}(u) \cdot u + q_{i+1}(m) \cdot m + q_{i+1}(d) \cdot d] \\
&\Leftrightarrow & 1 + r &= q_{i+1}(u) \cdot u + q_{i+1}(m) \cdot m + (1 - q_{i+1}(u) - q_{i+1}(m)) \cdot d \\
&\Leftrightarrow & 1 + r &= q_{i+1}(u) \cdot (u - d) + q_{i+1}(m) \cdot (m - d) + d \\
&\Leftrightarrow & q_{i+1}(u) &= \frac{1 + r - d - q_{i+1}(m) \cdot (m - d)}{u - d}
\end{aligned}$$

für jeden Zeitpunkt $t_i \in T_d \setminus \{T\}$. Es folgt für $q_{i+1}(d)$

$$\begin{aligned}
q_{i+1}(d) &= 1 - q_{i+1}(u) - q_{i+1}(m) \\
&= \frac{u - d - (1 + r - d - q_{i+1}(m) \cdot (m - d)) - q_{i+1}(m) \cdot (u - d)}{u - d} \\
&= \frac{u - (1 + r) + q_{i+1}(m) \cdot (m - u)}{u - d}.
\end{aligned}$$

Mit der Forderung $q_n(u) > 0$ folgt $1 + r > d$ und analog aus $q_n(d) > 0$ somit $u > 1 + r$. Dies führt zu dem (uns schon aus dem Binomialmodell bekannten) Zusammenhang.

Satz 5.1.2
Das Standard-Trinomialmodell ist arbitragefrei genau dann, wenn $u > 1 + r > d$ gilt.

Bemerkung Für das arbitragefreie Standard-Trinomialmodell ist jedes Maß $\mathbb{Q}$, welches für $n \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}
q_n(m) &= z_n \\
q_n(u) &= \frac{1 + r - d}{u - d} - \frac{m - d}{u - d} \cdot z_n \\
q_n(d) &= \frac{u - (1 + r)}{u - d} - \frac{u - m}{u - d} \cdot z_n
\end{aligned}$$

für $z_n \in (0, \min\{\frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m}\})$[1] erfüllt, ein äquivalentes Martingalmaß. Insbesondere gilt für die Menge $\mathcal{P}^*$ aller äquivalenten Martingalmaße

$$|\mathcal{P}^*| = \infty.$$

In dem Standard-Trinomialmodell existieren also überabzählbar viele äquivalente Martingalmaße, daher ist der Markt nach dem zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie unvollständig. Im Kapitel zur allgemeinen Bewertung haben wir im Satz 4.4.4 gezeigt, dass für einen Claim C

$$\Pi(C) = \mathbb{E}[C]$$

gilt. Die Anwendung wollen wir nun im Standard-Trinomialmodell vorführen.

[1] die Herleitung befindet sich im Anhang A.1

5.2. Bewertung im Standard-Trinomialmodell

Sei ein einperiodiges Standard-Trinomialmodell ($T_d = \{0, 1\}$) mit $u = 1,1;\ m = 1$ und $d = 0,9$ sowie $r = 0,05$ gegeben. Der Preisprozess des Wertpapiers S mit $S_0 = 100$ wird in dem Baumdiagramm in Abbildung 5.1 dargestellt.

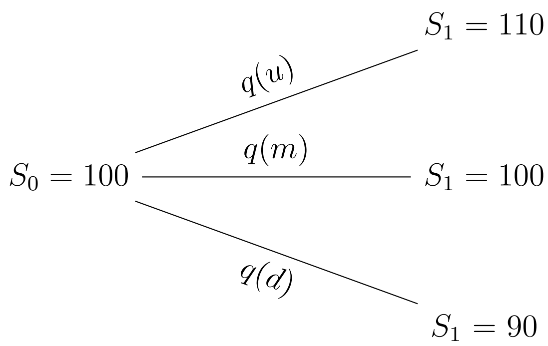

Abbildung 5.1.: Preisprozess im Ein-Perioden-Standard-Trinomialmodell

Nach obiger Bemerkung gilt demnach für die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Maßes $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$

$$\begin{aligned} q(m) &= z \\ q(u) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot z \\ q(d) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot z \end{aligned}$$

für ein $z \in (0, \min\{\frac{1{,}05-0{,}9}{1-0{,}9}, \frac{1{,}1-1{,}05}{1{,}1-1}\}) = (0, \frac{1}{2})$.

5.2.1. Bewertung eines nicht-hedgebaren Claims

Beispiel 5.2.1 (Bewertung eines Calls im Standard-Trinomialmodell)
Betrachtet wird eine europäische Call-Option mit Underlying S, Fälligkeit $T = 1$ und Strikepreis $K = 100$. Die Auszahlungsfunktion $\mathrm{C}:\ \Omega \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch*

$$C(\omega) = [S_1(\omega) - K]^+ = \begin{cases} [u \cdot S_0 - K]^+ & = [110 - 100]^+ = 10 \quad \textit{falls } \omega = u \\ [m \cdot S_0 - K]^+ & = [100 - 100]^+ = 0 \quad \textit{falls } \omega = m \\ [d \cdot S_0 - K]^+ & = [90 - 100]^+ = 0 \quad \textit{falls } \omega = d \end{cases}$$

Die Berechnung des heutigen Wertes der Option mittels des Erwartungswertes $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T^*]$ *unter einem äquivalenten Martingalmaßes* $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ *liefert*

$$
\begin{aligned}
&Call_e[S, K = 100, 0, 1] \\
&= \frac{1}{1+r}[q(u) \cdot [u \cdot S_0 - K]^+ + q(m) \cdot [m \cdot S_0 - K]^+ + q(d) \cdot [d \cdot S_0 - K]^+] \\
&= \frac{1}{1+r}[(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot z) \cdot [u \cdot S_0 - K]^+ + z \cdot [m \cdot S_0 - K]^+ + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot z) \cdot [d \cdot S_0 - K]^+] \\
&= \frac{1}{1,05}[(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot z) \cdot 10 + z \cdot 0 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot z) \cdot 0] \\
&= \frac{1}{1,05}[7,5 - 5 \cdot z]
\end{aligned}
$$

und aus $z \in (0, \frac{1}{2})$ *folgt*

$$Call_e[S, K = 100, 0, 1] \in \mathbb{E}[C] = (\frac{5}{1,05}, \frac{7,5}{1,05}).$$

Erkenntnis Wir haben keinen eindeutigen Preis, sondern ein offenes Intervall von arbitragefreien Preisen für diesen Call erhalten. Somit kann es sich nach dem Satz 4.2.4 nur um einen nicht-hedgebaren Claim handeln. Eine Möglichkeit, dieses zu verifizieren, ist die Betrachtung des Gleichungssystems, welches ein replizierendes Portfolio der angegebenen Call-Option zu erfüllen hätte.

Angenommen, es gäbe ein Portfolio, bestehend aus Δ_1 Anteilen des Wertpapiers und der Menge B_1 an Bargeld im Geldmarktkonto, welches die Auszahlung des Calls dupliziert. Dann müsste dieses Portfolio das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$110\Delta_1 + 1,05B_1 = 10 \tag{5.2.1}$$

$$100\Delta_1 + 1,05B_1 = 0 \tag{5.2.2}$$

$$90\Delta_1 + 1,05B_1 = 0 \tag{5.2.3}$$

Die Gleichungen (5.2.2) und (5.2.3) können nur beide eingehalten werden, wenn $\Delta_1 = B_1 = 0$ gilt. Dann ist natürlich (5.2.1) nicht erfüllt. Daher existiert keine Strategie $\phi = (B_1, \Delta_1)$, welche dieses Gleichungssystem löst, insbesondere ist der Call nicht-hedgebar.

5.2.2. Bewertung eines hedgebaren Claims

Beispiel 5.2.2

Sei C ein Claim mit zustandsabhängiger Auszahlung im Zeitpunkt $T = 1$ in Höhe von

$$C = \begin{cases} 325 & \textit{falls } \omega = u \\ 305 & \textit{falls } \omega = m \\ 285 & \textit{falls } \omega = d \end{cases}$$

Erneut berechnen wir die Menge der arbitragefreien Preise mittels den äquivalenten Martingalmaßen. Für ein $p_0 \in \Pi(C)$ gilt in Abhängigkeit vom gewählten $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ ($z \in (0, \frac{1}{2})$)

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C^*] \\ &= \frac{1}{1+r}[325 \cdot q(u) + 305 \cdot q(m) + 285 \cdot q(d)] \\ &= \frac{1}{1,05}[325 \cdot (\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot z) + 305 \cdot z + 285 \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot z)] \\ &= \frac{1}{1,05}[\frac{325 \cdot 3 + 285}{4} + \frac{-325 + 610 - 285}{2} \cdot z] \\ &= \frac{1}{1,05}[315 + 0 \cdot z] \\ &= 300. \end{aligned}$$

Erkenntnis Für diesen Claim haben wir einen eindeutigen arbitragfreien Preis gefunden, da jedes Martingalmaß den Wert $p_0 = 300$ liefert. Nach dem Satz 4.2.4 handelt es sich somit um einen hedgebaren Claims. Die Berechnung des replizierenden Portfolios folgt der Idee im nicht-hedgebaren Beispiel. Bezeichne $\phi = (B_1, \Delta_1)$ den Hedge des Claims, so muss folgendes Gleichungssystem erfüllt sein:

$$110\Delta_1 + 1,05B_1 = 325 \tag{5.2.4}$$

$$100\Delta_1 + 1,05B_1 = 305 \tag{5.2.5}$$

$$90\Delta_1 + 1,05B_1 = 285 \tag{5.2.6}$$

Durch simultanes Lösen der beiden Gleichungen (5.2.4) und (5.2.5) ergibt sich

$$\Delta_1 = 2, B_1 = 100$$

und diese Lösung erfüllt (5.2.6). Somit bildet $(B_1, \Delta_1) = (100, 2)$ einen Hedge für den Claim C und der eindeutige arbitragefreie Preis beträgt

$$\begin{aligned} p_0 &= \Delta_1 \cdot S_0 + B_1 \\ &= 2 \cdot 100 + 100 \\ &= 300. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Delbaen, Schachermayer: *The Mathematics of Arbitrage*, 2005.

[2] Klaus Sandmann: *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*, 2010.

[3] Andrea Pascucci: *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, 2010.

[4] Jürgen Tietze: *Einführung in die Finanzmathematik*, 11. Auflage, 2011.

[5] Volkert Paulsen: *Zur Bewertung von Derivaten, Eine Einführung*, 2009. wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/WeiterePublikationen/Mathetage.pdf

[6] Volkert Paulsen: *Bewertung von Finanzderivaten (Notizen), Seminar Finanzmathematik*, 2012.

[7] Volkert Paulsen: *Vorlesung Finanzmathmatik*, WS2009/2010. www.bruns-software.de/studium/downloads/FinanzmatheWS200910.pdf

A. Anhang

A.1. Berechnung der äquivalenten Martingalmaße im Standard-Trinomialmodell

Da die Aufteilung $q_n(u), q_n(m), q_n(d)$ für alle $n \in \{1, \dots, N\}$ die selbe Form besitzt, genügt die Betrachtung des Einperioden-Modells mit Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega = \{u, m, d\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Wir schreiben zur Vereinfachung $q(x)$ anstelle $q_{t_1}(x)$. Es wurde bereits gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Maßes $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^*$ von der Form

$$\begin{aligned} q(m) &= z \\ q(u) &= \frac{1+r-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d} \cdot z \\ q(d) &= \frac{u-(1+r)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d} \cdot z \end{aligned}$$

sein muss. Außerdem muss $u > 1+r > d$ gelten, damit der Markt arbitragefrei ist. Nun wollen wir die Menge $\mathcal{P}^*$ exakt klassifizieren. Es gilt drei Restriktionen zu beachten, nämlich

1. für $q(m)$

$$0 < z < 1$$

2. für $q(u)$

$$\begin{array}{rcl} 0 < & \frac{1+r-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d} \cdot z & < 1 \\ 0 < & 1+r-d-(m-d) \cdot z & < u-d \\ d-(1+r) < & -(m-d) \cdot z & < u-(1+r) \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{d-(1+r)}{m-d} < & -z & < \frac{u-(1+r)}{m-d} \\
\underbrace{\frac{(1+r)-d}{m-d}}_{\leq 1 \text{ für } (1+r)\leq m} > & z & > \underbrace{\frac{(1+r)-u}{m-d}}_{<0}
\end{array}
$$

3. für $q(d)$

$$
\begin{array}{rcl}
0 < & \frac{u-(1+r)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d} \cdot z & < 1 \\
0 < & u-(1+r)-(u-m)\cdot z & < u-d \\
(1+r)-u < & -(u-m)\cdot z & < (1+r)-d \\
\frac{(1+r)-u}{u-m} < & -z & < \frac{(1+r)-d}{u-m} \\
\underbrace{\frac{u-(1+r)}{u-m}}_{\leq 1 \text{ für } (1+r)\geq m} > & z & > \underbrace{\frac{d-(1+r)}{u-m}}_{<0}
\end{array}
$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
z &\in (\max\{0, \frac{(1+r)-u}{m-d}, \frac{d-(1+r)}{u-m}\}, \min\{1, \frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m}\}) \\
&= (0, \min\{\frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m}\}).
\end{aligned}
$$

Die Menge $\mathcal{P}^*$ ist daher gegeben durch

$$
\mathcal{P}^* = \{\mathbb{Q}_z \ | z \in (0, \min\{\frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m}\})\},
$$

wobei $\mathbb{Q}_z$ ein W'Maß auf $\Omega = \{u, m, d\}$ mit

$$
\begin{aligned}
q(m) &= z \\
q(u) &= \frac{1+r-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d} \cdot z \\
q(d) &= \frac{u-(1+r)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d} \cdot z
\end{aligned}
$$

darstellt.

Für den N-Perioden-Fall mit W'Raum $(\Omega = \{u, m, d\}^N, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ist $\mathcal{P}^*$ gegeben durch

$$\mathcal{P}^* = \{\mathbb{Q}_{z_1,\dots,z_N} \, | z_n \in (0, \min\{\frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m}\}) \text{ für alle } n = 1\dots, N\},$$

wobei $\mathbb{Q}_{z_1,\dots,z_N}$ ein W'Maß auf $\Omega = \{u, m, d\}^N$ mit

$$\begin{aligned} q_n(m) &= z_n \\ q_n(u) &= \frac{1+r-d}{u-d} - \frac{m-d}{u-d} \cdot z_n \\ q_n(d) &= \frac{u-(1+r)}{u-d} - \frac{u-m}{u-d} \cdot z_n \end{aligned}$$

für $n \in \{1, \dots, N\}$ und

$$\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}((\omega_1, \dots, \omega_N)) = q_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot q_N(\omega_N)$$

darstellt.