WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Bachelorarbeit

Thema:

Eine Einführung in die mikroökonomische Gleichgewichtstheorie

Betreuer: Dr. Paulsen
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik

Westfälische-Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von:

Veronika Beier

Matrikelnummer: 364258

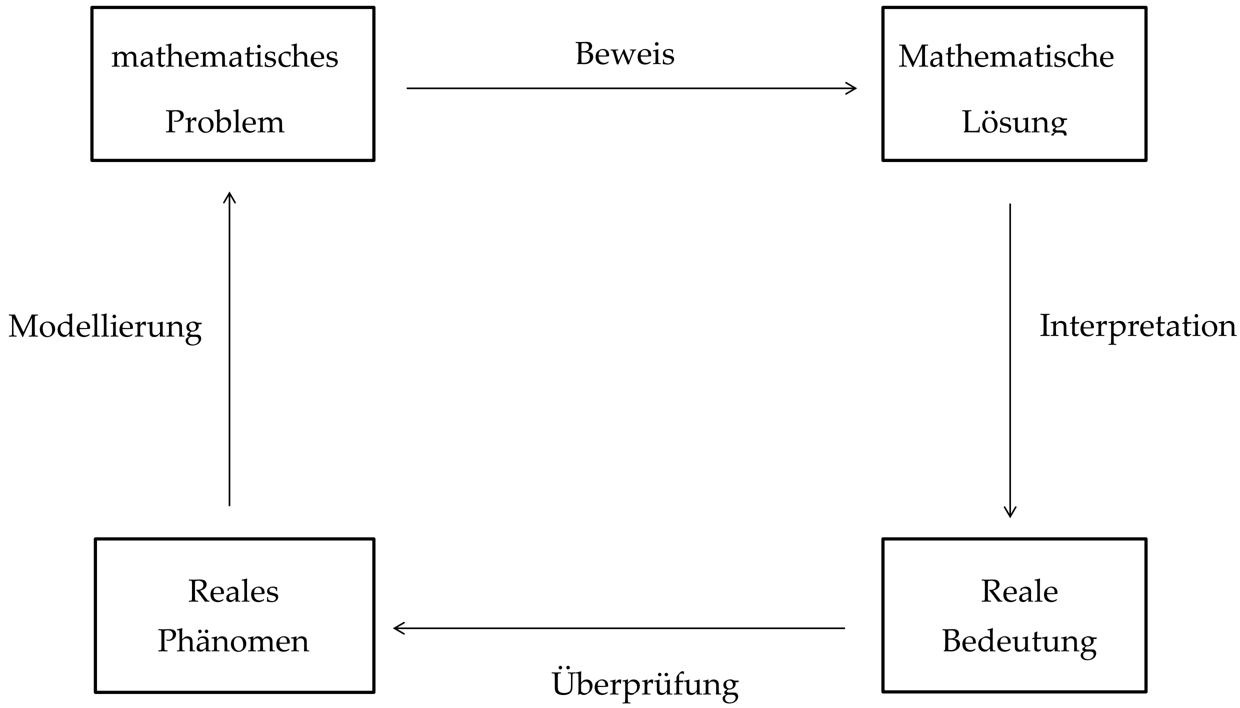
27. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Wirtschaft sind Preise für uns stets exogen. Wollen wir beispielsweise ein bestimmtes Wirtschaftsgut kaufen, so müssen wir den dafür entsprechenden Preis zahlen. Auch in der Finanzmathematik bei der Bewertung von Derivaten gehen wir immer von gegebnenen Preisen aus. Doch wie entstehen diese Preise? Und warum sind diese Marktpreise eindeutig? Im Rahmen der Bachelorarbeit möchte ich mich genau mit dieser Fragestellung beschäftigen. Ziel dieser Arbeit ist es einen Einblick in die mikroökonomische Gleichgewichtstheorie zu geben. Insbesondere wollen wir ein Verständnis dafür bekommen, wie Preise entstehen.

Wenn wir uns auf einen einzelnen Markt beschränken, so ist der Marktpreis für ein Gut der Preis, bei dem ein Gleichgewicht auf dem Markt entsteht. Pauschal spricht man von einem Gleichgewichtszustand auf einem Markt, wenn die Menge des Angebotes für ein Gut gleich der Nachfragemenge hierfür ist. In diesem Zustand wird dann die Gleichgewichtsmenge zum Gleichgewichtspreis gehandelt. Man spricht auch davon, dass der Markt geräumt ist.
Erstaunlich ist, dass sich dieses Gleichgewicht scheinbar von allein einstellt. Keiner der Marktteilnehmer wird von dem eindeutigen Gleichgewichtspreis abweichen, obwohl es Anbieter gibt, die zu einem günstigerem Preis anbieten könnten als zum Gleichgewichtspreis und es auch Nachfrager geben kann, die bereit wären mehr als den Gleichgewichtspreis für dieses Gut zu zahlen. Allgemein werden die Anbieter versuchen ihre Güter zu einem hohen Preis zu verkaufen und je höher der Preis ist, desto mehr Anbieter sind bereit zu diesem Preis zu verkaufen. Die Nachfrager dagegen verfolgen das Ziel einen möglichst niedrigen Preis zu erzielen. Die Nachfragemenge ist also umso höher, je niedriger der Preis ist. Doch obwohl jedes Wirtschaftssubjekt seine individuellen Handelspläne verfolgt, führt der Marktmechanismus zu einem gesamtwirtschaftlichen Ergebnis, dem Marktgleichgewicht. Es gibt also einen Preis, sodass ein Gleichgewicht auf dem Markt herrscht.
Wenn wir uns nicht nur auf einen Markt beschränken, sondern die Gesamtheit aller Märkte betrachten, so spricht man von einem Allgemeinen Gleichgewicht, wenn zeitgleich ein Gleichgewichtszustand auf allen Märkten vorherrscht. Für die Begründung der Entstehung eines Allgemeinen Gleichgewichts und den Nachweis der Existenz dieses Phänomens benötigen wir zunächst einen mathematischen Modellierungsprozess.
Die Gliederung meiner Bachelorarbeit wird sich an die Folge der aufgeführten Prozesse in der folgenden Abbildung orientieren. Hierzu werden wir im ersten Schritt das reale Phänomen - das Allgemeine Gleichgewicht - strukturieren und mathematisch modellieren. Wir benötigen hierfür eine starke Vereinfachung unserer komplexen Wirklichkeit und werden deshalb im ersten Teil eine Reihe von Annahmen treffen.



Anschließend werden wir das Problem mathematisch formulieren und definieren dazu das Arrow-Debreu Gleichgewicht. Um die Bedeutung eines Arrow-Debreu-Gleichgewichts besser verstehen zu können, werden wir einen kurzen Exkurs in einen Gütermarkt ohne Unsicherheiten einfügen. Im dritten Schritt unseres Prozesses beweisen wir die Existenz eines solchen Gleichgewichts unter bestimmten Voraussetzungen. Zu guter Letzt werden wir unsere Erkenntnisse interpretieren und untersuchen, ob das reale Phänomen unsere Erkenntnisse bekräftigt.

2 Modellierung

2.1 Voraussetzungen

- Wir nehmen eine **Tauschwirtschaft** an mit einer endlichen Menge an Marktteilnehmern $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \quad n \geq 2$. Des Weiteren unterstellen wir ein Ein-Perioden-Modell. In Zeitpunkt t=0 besitzt jeder Marktteilnehmer eine exogene Anfangsausstattung an Wirtschaftsgütern. Durch Tauschgeschäfte kann das Portfolio jedes Einzelnen so geändert werden, dass der erwartete Nutzen in t=1 maximiert wird.

- Es herrscht **Vollständige Konkurrenz** und dementsprechend wird ein Mengenanpasserverhalten angenommen.

- Die Menge aller möglichen stochastischen, diskontierten und nicht negativen **Auszahlungen** mit existierendem Erwartungswert ist gegeben als $\mathcal{X} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
  Insbesondere nehmen wir $\mathcal{X}$ als konvex an.

- Die Präferenzen (signalisiert durch die Nutzenfunktion) sind exogen für jeden Marktteilnehmer gegeben.
  Die **Nutzenfunktion** $u : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig, stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$, strikt konkav und streng monoton wachsend. Zudem verhält sich jeder Marktteilnehmer nutzenmaximierend.

- Für die **Anfangsausstattung** W_a eines Wirtschaftssubjekts $a \in \mathcal{A}$ gelte:
  $W_a \in \mathcal{X},\ P[W_a > 0] \neq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad$ und $\quad \mathbb{E}[\sum_{a \in \mathcal{A}} W_a] < \infty$.

- Die lineare **Preisdichte** φ ist eine integrierbare Funktion auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Also $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wir setzen voraus: $\varphi > 0 \quad$ P-f.s. und $\quad \mathbb{E}[W_a \varphi] < \infty \quad \forall a \in \mathcal{A}$.

2.2 Bemerkungen zu den Voraussetzungen

Tauschwirtschaft In dieser Ausarbeitung gehen wir von einer Tauschwirtschaft aus. Das bedeutet, dass jeder Marktteilnehmern eine Anfangsausstattung an Wirtschaftsgütern erhält und diese entsprechend seiner Präferenzen mit anderen Marktteilnehmern tauscht, mit dem Ziel den individuellen Nutzen zu maximieren. Ein Beispiel für diese Tauschwirtschaft ist das sogenannte *prisoner-of-war-camp* Beispiel.

> „*...the market is a prisoner-of-war camp. The men receive parcels from the Red Cross which contain a variety of commodities. They set up a market for exchanging them, using cigarettes as a unit of account and a medium for three-cornered transactions.*“ [1]

[1] Zitat von der britischen Ökonomin Joan Violet Robinson (* 31. Oktober 1903 in Surrey, England; † 10. August 1983 in Cambridge)

Möchte ein Gefängnisinsasse ein bestimmtes Gut seiner Anfangsausstattung zum Beispiel eine Tafel Schokolade verkaufen, weil es ihm im Vergleich zu anderen Gütern zu wenig Nutzen stiftet, so kann er diese Schokolade den anderen Gefängnisinsassen anbieten. Möchte er dagegen von einem anderen Gut (zum Beispiel einen Apfel) zusätzliche Einheiten erwerben, so tritt er als Nachfrager auf dem Markt auf und kann durch den Erlös seiner Schokolade in Form von Zigaretten das andere Gut erwerben. Ein Marktteilnehmer kann also sowohl als Anbieter, als auch als Nachfrager auf dem Gesamtmarkt agieren. Durch den Tauschvorgang konnte der Gefängnisinsasse seinen persönlichen Nutzen für das Portfolio nach dem Tauschvorgang gegenüber dem Nutzen des Anfangsportfolio erhöhen.
Die Marktpreise für die Güter, also die Anzahl der Zigaretten, die man für ein bestimmtes Gut zahlen muss, sind dabei nicht gegeben, sondern lassen sich implizit aus den Marktgegebenheiten herleiten. Das bedeutet, dass sich der Preis für ein bestimmtes Wirtschaftsgut aus dem Gleichgewichtszustand der aggregierten Nachfrage und des aggregierten Angebots ergibt. Der Marktpreis für das Gut ist dann genau der Preis, bei dem die Nachfragemenge der Angebotsmenge entspricht.
Zu beachten ist, dass jede Wirtschaftsgutart separat auf einem eigenen Markt gehandelt wird. Das bedeutet in unserem Gefängnisbeispiel, dass es einen Schokoladenmarkt, einen Apfelmarkt usw. gibt. Das Problem des Allgemeinen Gleichgewichts jedoch, also das gleichzeitige Gleichgewicht auf allen Märkten, lässt sich nur global lösen. Man spricht auch von der *Totalanalyse der Märkte*. Erklären lässt sich dies wie folgt:
Fokussieren wir uns auf einen Markt an dem beispielsweise Gut w* gehandelt wird. Möchten wir auf diesem Markt den Gleichgewichtszustand analysieren (*Partialanalyse eines Marktes*), so ergibt sich die Problematik, dass man nicht für diesen Markt gesondert einen Gleichgewichtspreis bestimmen kann. Denn es müsste gelten: Angebotsmenge nach Wertpapier w* = Nachfragemenge nach w*.
Da Angebot und Nachfrage jedoch nicht nur von dem Preis für w* (was hier bestimmt werden soll) selbst abhängen, sondern auch von den Preisen der anderen Güter (durch die Budgetrestriktion, siehe Definition 3.3), müssen wir diese als bekannt voraussetzen um ein Gleichgewichtspreis für w* bestimmen zu können (ceteris-paribus-Klausel [2]). Aber auch diese als bekannt angenommenen Preise sind natürlich vom Preis für w* abhängig. Wir sehen also, dass auf Grund der wechselseitigen Verflechtungen der Märkte das Problem des Allgemeinen (totalen) Gleichgewichts auf allen Märkten simultan gelöst werden muss.

Vollständige Konkurrenz Unter Mengenanpasserverhalten versteht man, dass für den einzelnen Anbieter bzw. Nachfrager die Preise exogen gegeben sind. Die Marktteilnehmer verfügen nicht über die Marktmacht einen Preis zu bestimmen, wie es bei einem Monopol- oder Oligopolmarkt der Fall wäre. Zudem folgt aus der Annahme eines vollständigen Marktes, dass die

[2] Dies bedeutet allgemein, dass sonstige Einflussfaktoren (hier die Preise der anderen Wertpapiere) als konstant vorausgesetzt werden.

Güter einer Güterart homogen sind und dass es keine räumlichen, zeitlichen oder persönlichen Präferenzen gibt.

Auszahlungen Das Ziel eines Markteilnehmers ist es den Nutzen für sein Endportfolio zu maximieren. Das Problem ist, dass wir eine einheitliche Recheneinheit benötigen, um einen Vergleich zwischen Portfolios mit unterschiedlichen Arten von Wirtschaftsgütern ziehen zu können. Wir wollen unterstellen, dass ein Portfolio von Wirtschaftsgütern einer bestimmten Auszahlung entspricht. Die Auszahlung ist also unsere Recheneinheit, die einen Portfoliovergleich möglich macht. Das bedeutet, dass am Ende der Periode die zu erwartende Auszahlung der entscheidene Faktor zur Nutzenbewertung des Portfolios darstellt.
Gehen wir von unserem Gefängnisbeispiel aus, so könnte beispielsweise ein Insasse am Ende der Periode drei Äpfel und fünf Tafeln Schokolade besitzen. Diesem Portfolio am Ende der Periode ordnet man seinen Wert zu, welcher in Zigaretteneinheiten angegeben wird. Die Anzahl der Zigaretten entspricht dann der Auszahlung für das Portfolio.
Als zusätzliche Modellannahme wollen wir fordern, dass die Auszahlungen gewissen Unsicherheiten unterliegen. Im Gefängnisfall könnte man als mögliches Szenario annehmen, dass innerhalb der Periode alle Äpfel schlecht werden und somit an Wert verlieren. Dies führt dazu, dass die Auszahlung für unser Endportfolio, das aus drei Äpfeln und 5 Tafeln Schokolade besteht, geschmälert wird. Oder es könnte ein Wetterumschwung geben, sodass die Nachfrage nach Schokolade bei gleichbleibenden Angebot durch die hohen Temperaturen abnimmt. Folglich führt auch dieses Szenario dazu, dass der Wert für Schokolade abnimmt und es zu einer Veringerung der Auszahlung kommt.
Allgemein ist also die Auszahlung eines Portfolios abhängig vom Szenario, das eingetreten ist. Wir bezeichnen Ω als die Menge aller möglichen Szenarien und mit $\mathcal{X} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller möglichen Auszahlungen für ein Portfolio an Wirtschaftsgütern in Abhängigkeit zum eingetretenen Szenario. In diesem Zusammenhang bedeutet die Formulierung *mögliche* Auszahlungen, dass $X \leq W$ P-f.s. gilt. W steht hier für das Marktportfolio (siehe Bemerkung zu Anfangsaustattung).
Jede Zufallsvariable $X \in \mathcal{X}$ ordnet jedem Szenario $\omega \in \Omega$ die entsprechende Auszahlung für ein Portfolio an Wirtschaftsgütern zu. Dadurch, dass wir voraussetzen, dass die stochastischen Auszahlungen Elemente aus L^1 sind, beschränken wir uns auf Zufallsvariablen, die nicht P-f.s. gleich 0 sind und deren Erwartungswert existiert und somit endlich ist. Um einen Vergleich zwischen Anfangs- und Endauszahlung herstellen zu können, wollen wir stets von diskontierten Auszahlungen ausgehen. Hierbei nehmen wir die Zinsrate als exogen an.
Interpretieren kann man diese Auszahlung am Ende der Periode auch als die Nachfrage des Marktteilnehmers $a \in \mathcal{A}$. Denn die Auszahlung am Ende der Periode ist ja gerade die Auszahlung, die ein Marktteilnehmer versucht zu erhalten bzw. erhält.
Als weitere Annahme für die Auszahlungen fordern wir, dass die Menge $\mathcal{X}$ konvex ist. Damit sind auch Kombinationen wie $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$ aus zwei möglichen Auszahlungen X_1, X_2 für

alle $\alpha \in (0,1)$ mögliche Auszahlungen.
Fassen wir die jeweilige Auszahlung bzw. die jeweilige Nachfrage (X_a) der Marktteilnehmer als Folge $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ auf, so erhalten wir die sogenannte *Allokation* oder auch die Verteilung der diskontierten Auszahlungen.

Nutzenfunktion Die Nutzenfunktion bildet die Präferenzen des jeweiligen Marktteilnehmers ab, indem sie jeder möglicher stochastischen Auszahlung für ein Portfolio den individuellen Nutzen für den Marktteilnehmer zuordnet. In unserem Modell gehen wir davon aus, das jeder Marktteilnehmer eine individuelle Nutzenfunktion hat und sich jeder nutzenmaximierend verhält. Das Besondere ist, wenn jeder Marktteilnehmer seine eigenen Handelspläne verfolgt, kommt es zu einem Gleichgewicht, dass auch für die Volkswirtschaft ein Optimum darstellt.

> *„Wenn daher jeder einzelne soviel wie nur möglich danach trachtet, [...] dass ihr Ertrag den höchsten Wertzuwachs erwarten lässt, dann bemüht sich auch jeder einzelne ganz zwangsläufig, dass das Volkseinkommen im Jahr so groß wie möglich werden wird.[...] Wenn er dadurch die Erwerbstätigkeit so fördert, dass ihr Ertrag den höchsten Wert erzielen kann, strebt er lediglich nach eigenem Gewinn. Er wird in diesem wie auch in vielen anderen Fällen von einer unsichtbaren Hand geleitet, um einen Zweck zu fördern, der keineswegs in seiner Absicht lag. “*[3]

Unsere Nutzenfunktion soll den üblichen Prämissen der Mikroökonomie genügen. Die strikt wachsende Entwicklung des Nutzens nennt man auch die *Annahme der Nichtsättigung*. Die Ökonomie geht davon aus, dass jede zusätzliche marginale Einheit an Auszahlung Nutzenzuwachs stiftet. In unserem Fall bedeutet die Nichtsättigung, dass ein Wirtschaftssubjekt immer bevorzugen wird, möglichst hohe Auszahlungen zu erzielen. Übertragen wir diese Eigenschaften auf unser Gefängnismodell, so wird ein Portfolio gegenüber einem Anderen präferiert, wenn dies eine höhere Auszahlung verspricht.
Das zweite wichtige Erfordernis, das eine sinnvolle Nutzenfunktion erfüllen sollte, ist der strikt konkave Verlauf. Dies ist das *Gesetz des abnehmenden Grenznutzens* oder auch *1. Gossensche Gesetz* genannt. Die Idee ist: Mit steigenden Auszahlungen nimmt der Nutzenzuwachs ab. Oft werden wir sogar annehmen, dass die Nutzenfunktion nach oben beschränkt ist. Dies ist zum Beispiel für jede exponentielle Nutzenfunktion der Form $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ mit $\alpha > 0$ erfüllt. Übertragen wir auch diese Bedingung auf unser Beispiel, so wird der Gefängnisinsasse seine erste Einheit an Nahrung (z.B. den ersten Apfel) einen wesentlich höheren Nutzenzuwachs zuordnen, als eine zusätzliche Einheit Nahrung wenn er schon ein Portfolio an Lebensmitteln besitzt.

Preisdichte Mit Hilfe einer Preisdichte lässt sich der Marktwert einer Auszahlung ermitteln.

[3]Zitat von schottischen Aufklärer und Ökonom Adam Smith (1723-1790).

Sie beschreibt den Kostenzuwachs für die Erhöhung der Auszahlung um eine Einheit in einem bestimmten Zustand $\omega \in \Omega$.

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

Das Wort Preisdichte ist ein wenig irreführend gewählt, denn es handelt sich nicht um Geldpreise, sondern um eine Tauschrelation zwischen den Wirtschaftsgütern. In unserem Gefängnisbeispiel sind die Zigaretten das Tauschmittel. Dabei ist nur die Relation der Preise, also die Relation der Anzahl von Zigarette für ein bestimmtes Wirtschaftsgut, bei einem Tausch von Bedeutung, nicht aber die absoluten Anzahlen der getauschten Zigaretten.
Wir wollen ein Maßwechsel mit Hilfe der Preisdichte vornehmen. Hierzu definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $dP^{\varphi} := \frac{\varphi}{\mathbb{E}[\varphi]}dP$. Das bedeutet, dass P^{φ} stetig bezüglich P mit Dichte $\frac{\varphi}{\mathbb{E}[\varphi]}$ ist. Hierbei handelt es sich bei $\frac{\varphi}{\mathbb{E}[\varphi]}$ tatsächlich um eine Dichte, denn beide Bedingungen für eine Dichte

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\omega)}{\mathbb{E}[\varphi]} &\geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \\ \text{und} \qquad \int_{\Omega} \frac{\varphi(\omega)}{\mathbb{E}[\varphi]} dP(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathbb{E}[\varphi]}\mathbb{E}[\varphi] &= 1 \end{aligned}$$

sind erfüllt. Das bedeutet:

$$P^{\varphi}(A) \quad = \quad \frac{1}{\mathbb{E}[\varphi]} \int_A \varphi(\omega) dP(\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Insbesondere gilt dann auch

$$\mathbb{E}\left[X \frac{\varphi}{\mathbb{E}[\varphi]}\right] = \mathbb{E}^{\varphi}[X] \qquad \text{für alle} \quad X \in \mathcal{X}.$$

Hierbei stellt $\mathbb{E}^{\varphi}[X]$ den Marktwert für die Auszahlung $X \in \mathcal{X}$ dar.

Ferner unterstellen wir hier, dass die Preisdichte linear verläuft. Das heißt es besteht ein proportionales Verhältnis zwischen dem Wert einer Auszahlung und der Preisdichte für ein festes Szenario. Insbesondere gilt, dass der Marktwert von der Summe zweier verschiedener Auszahlungen der Summe der Marktwerte der Auszahlungen entspricht, was in diesem Fall einfach der Additivität des Erwartungwertes entspricht.

Anfangsausstattung Nach unseren vorherigen Überlegungen erhält jedes Wirtschaftssubjekt $a \in \mathcal{A}$ eine Anfangsausstattung, deren diskontierte Auszahlung in t=1 definiert ist als $W_a \in \mathcal{X}$. Die Anfangsausstattung W_a kann auch als Angebot des Subjektes a im Startpunkt t=0 interpretiert werden. Mit der Voraussetzung $P(W_a > 0) > 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}$ wollen wir uns auf Marktteilnehmer beschränken, deren Wahrscheinlichkeit auf Auszahlung für ihr Anfangsportfolio positiv ist. Das bedeutet, sie treten als potentielle Anbieter und Nachfrager auf dem Markt auf. Aggregiert man über alle diese Marktteilnehmer, so erhält man das sogenannte *Marktportfolio*

$$W := \sum_{a \in \mathcal{A}} W_a. \tag{1}$$

Es beschreibt die Summe aller Auszahlungen der auf den Märkten verfügbaren Wirtschaftsgüter. Also das Angebot, welches auf dem Gesamtmarkt nachgefragt werden kann. Hierbei ist zu beachten, dass die Anzahl der auf dem Markt verfügbaren Wirtschaftsgüter immer exogen ist. Das bedeutet unter anderem, dass es keine dynamischen Mengenreaktionen derart geben kann, dass zum Beispiel mehr von einem stark nachgefragten Gut produziert wird, um die Nachfrage zu befriedigen.

3 Das Arrow-Debreu-Gleichgewicht

Nachdem wir nun eine Reihe von Annahmen getroffen haben, werden wir im nächsten Schritt das zu lösende Problem modellieren. Wir wollen also das Problem des Allgemeinen Gleichgewichts in die Sprache der Mathematik transformieren. Das Ziel dieses Kapitels ist es zur Definition des Arrow-Debreu-Gleichgewichtes zu gelangen. In Vorbereitung darauf, benötigen wir einige Definitionen und Sätze.

3.1 Definition

Eine Allokation $(X_a)_{a\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{X}$ heißt *zulässige Allokation*, falls sie folgende Markträumungsbedingung erfüllt:

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} X_a = W \qquad\qquad P-f.s.. \tag{2}$$

Ferner definieren wir $\mathcal{Z}$ als die Menge aller zulässigen Allokationen aus $\mathcal{X}$.

Erfüllt eine Allokation die Markträumungsbedingung, so bedeutet dies, dass alle vorhandenen Waren durch den Tausch verteilt worden sind. Mit anderen Worten: Die Gesamtnachfrage, also die Summe der Nachfrage über alle Marktteilnehmer, entspricht dem Gesamtangebot bzw. dem Marktportfolio. Hier wird auch deutlich, warum wir von diskontieren Auszahlungen ausgehen wollen. Denn nur so können wir einen intertemporalen Vergleich zwischen Anfangs- und Endauszahlung vornehmen.

3.2 Beispiele

- Sei $a_i \in \mathcal{A}$ ein Marktteilnehmer. Dann ist

  $$X_{a_i} = W, \qquad X_{a_j} = 0 \qquad P-f.s. \quad \forall a_j \in \mathcal{A}\backslash\{a_i\}$$

  eine zulässige Allokation. Hier erhält Marktteilnehmer a_i das gesamte Marktportfolio, also das gesamte Angebot des Marktes, die Anderen dagegen gehen leer aus.

- Sei $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \mathcal{A}$. Dann ist

  $$X_{a_i} = \frac{W}{|\mathcal{A}|} = \frac{W}{n} \qquad P-f.s. \quad \forall a_i \in \mathcal{A}$$

  eine zulässige Allokation. Wobei in diesem Fall die diskontierten Auszahlungen gleichmäßig auf alle Marktteilnehmer verteilt werden.

Zwar handelt es sich bei den beiden Beispielen um zulässige Allokation im Sinne der Definition, doch wird ein Marktteilnehmer $a_j \in \mathcal{A} \backslash \{a_i\}$ in Beispiel eins zufrieden sein mit dem Tausch?

Dies ist nicht der Fall! Denn nach Voraussetzung besitzt jede Anfangsausstattung eines Marktteilnehmers eine positive Wahrscheinlichkeit auf Auszahlung. Auf Grund des Ziels der Nutzenmaximierung würde kein Marktteilnehmer auf diese Auszahlungen verzichten. Und da ein Tauschvorgang immer freiwillig stattfindet, kommt eine neue zulässige Allokation nur zustande, wenn jeder Marktteilnehmer seinen anfänglichen Nutzen durch diesen Tausch mindestens erhöhen kann.
Hierbei muss jedes Subjekt seine sogenannte Budgetrestriktion beachten. Das bedeutet, dass ihnen zum Tauschen maximal der Wert ihrer Anfangsausstattung zur Verfügung steht. Geht man von einer bekannten Preisdichte φ aus, so beträgt der Marktwert des Anfangsportfolios: $\mathbb{E}^{\varphi}[W_a]$ für den Marktteilnehmer a. Ziel eines jeden Marktteilnehmers ist es nun unter dieser Restriktion den erwarteten Nutzen zu maximieren.

3.3 Definition

Die Auszahlung X_a^* erfüllt das *Nutzenmaximierungsproblem* bezüglich Preisdichte φ für den Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$, falls

$$X_a^* = \underset{X \in B_a^{\varphi}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}[u_a(X)]$$

wobei B_a^{φ} definiert ist als die *Budgetmenge* des Marktteilnehmers mit

$$B_a^{\varphi} = \{X \in \mathcal{X} | \mathbb{E}^{\varphi}[X] \leq \mathbb{E}^{\varphi}[W_a]\}$$

3.4 Satz

Sei a$\in \mathcal{A}$ ein Marktteilnehmer und $W_a \in \mathcal{X}$ die entsprechende Anfangsausstattung mit $\mathbb{E}[u_a(W_a)] < \infty$. Dann existiert ein eindeutiges Portfolio der Form

$$X_a^* = \underset{X \in B_a^{\varphi}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}[u_a(X)] = \min\{I_a^+(d_a\varphi), W\} \qquad \text{mit} \qquad d_a \in \mathbb{R}_{>0} \tag{3}$$

das bezüglich der Preisdichte φ das Nutzenmaximierungsproblem löst. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung gibt es genau ein $d_a \in \mathbb{R}_{>0}$, welches die Bedingung

$$\mathbb{E}^{\varphi}[X_a^*] = \mathbb{E}^{\varphi}[W_a]$$

erfüllt. Die Funktion $I_a^+ : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ ist dabei wie folgt definiert:

$$I_a^+(y) := \begin{cases} 0 & y \geq b_a \\ (u_a')^{-1}(y) & y \in (c_a, b_a) \\ \infty & y \leq c_a \end{cases} \tag{4}$$

mit

$$c_a := \lim_{x \uparrow \infty} u_a'(x) \geq 0 \qquad b_a := \lim_{x \downarrow 0} u_a'(x) \leq \infty \tag{5}$$

Beweis
Wir werden den Beweis in drei Schritte einteilen. Im ersten Schritt suchen wir einen möglichen Kandidaten für die Auszahlung, die den erwarteten Nutzen maximieren soll. Im zweiten Schritt werden wir dann beweisen, dass unser Kandidat auch wirklich das Nutzenmaximierungsproblem löst. Zu guter Letzt ist dann nur noch die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen.

Ermittlung eines Kandidaten zur Lösung des Nutzenmaximierungsproblems
Mit Hilfe der folgenden heuristischen Vorgehensweise werden wir einen Kandidaten für die Lösung des Nutzenmaximierungsproblems ermitteln. Hierzu nehmen wir an, dass ein optimales Portfolio mit Auszahlung X_a^* existiert und wir definieren:

$$X_a^{\lambda} := X_a^* + \lambda(X - \mathbb{E}[\varphi X]) \text{ mit } X \in L^{\infty}(P) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}$$

Betrachten wir folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda}\mathbb{E}[u_a(X_a^*)] \\ &= \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} \mathbb{E}[u_a(X_a^{\lambda})] \\ &= \mathbb{E}[u_a'(X_a^*)(X - \mathbb{E}[\varphi X])] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[u_a'(X_a^*)X] - \mathbb{E}[u_a'(X_a^*)\mathbb{E}[\varphi X]] \\
&= \mathbb{E}[u_a'(X_a^*)X] - \mathbb{E}[u_a'(X_a^*)] \cdot \mathbb{E}[\varphi X]
\end{aligned}$$

so erhalten wir die Gleichheit:

$$\mathbb{E}[u_a'(X_a^*)X] = d_a \mathbb{E}[\varphi X] \quad \text{wobei} \quad d_a := \mathbb{E}[u_a'(X_a^*)] > 0.$$

Dies impliziert, dass $u_a'(X_a^*) = d_a \varphi$ P-f.s. gilt. Nach Umformung erhalten wir hieraus

$$X_a^* = I_a(u_a'(X_a^*)) = I_a(d_a \varphi),$$

wobei wir $I_a : (c_a, b_a) \longrightarrow (0, \infty)$ als die Umkehrfunktion von $u_a'(X)$ (existiert, da die Nutzenfunktion bijektiv ist) definieren mit

$$c_a := \lim_{x \uparrow \infty} u_a'(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad b_a := \lim_{x \downarrow 0} u_a'(x) \leq \infty$$

Dies ist eine stetige, bijektive und streng monoton fallende Funktion auf (c_a, b_a) auf Grund des strikt konkaven Verlaufes unserer Nutzenfunktion.

Um die Funktion auf dem Intervall $[0, \infty]$ fortsetzen zu können, definieren wir die Funktion $I_a^+ : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ als

$$I_a^+(y) = \begin{cases} 0 & y \geq b_a \\ (u_a')^{-1}(y) & y \in (c_a, b_a) \\ \infty & y \leq c_a. \end{cases}$$

Des Weiteren kann die Auszahlung eines optimalen Portfolios eines Marktteilnehmers maximal dem Marktportfolio W entsprechen, da dies ja die Gesamtheit der verfügbaren Wirtschaftsgüter auf dem Markt darstellt. Und unsere Lösung ist insbesondere in der Menge $\mathcal{X}$ enthalten. Somit ist unser gesuchter Kandidat:

$$X_a^* = \min\{I_a^+(d_a \varphi), W\} \in \mathcal{X} \tag{6}$$

Erfüllt der Kandidat die geforderten Eigenschaften?

Wir müssen zeigen, dass unser Kandidat das Nutzenmaximierungsproblem bzgl. der Preisdichte φ löst und dass es genau eine Konstante $d_a \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, welche die Gleichheit von $\mathbb{E}^{\varphi}[X_a^*]$ und $\mathbb{E}^{\varphi}[W_a]$ impliziert.

Wir wollen zunächst die zweite Eigenschaft beweisen:
Betrachten wir hierzu die Funktion

$$y \longrightarrow \min\{I_a^+(y), W\}.$$

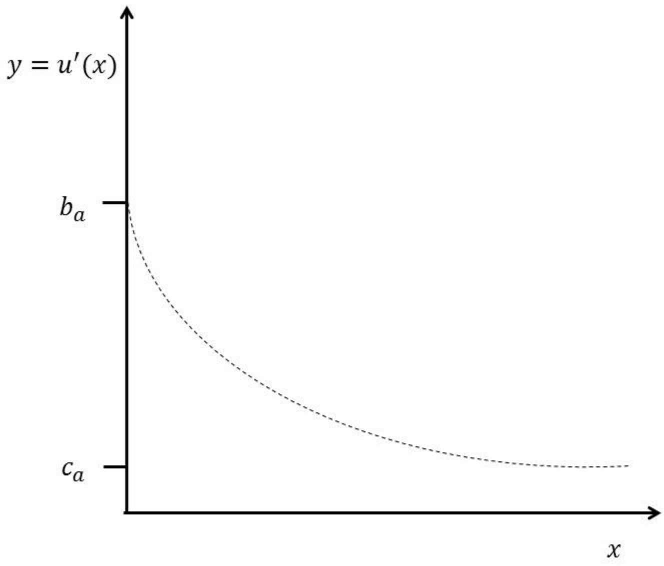


Abbildung 1: Grenznutzenfunktion Markteilnehmer a.

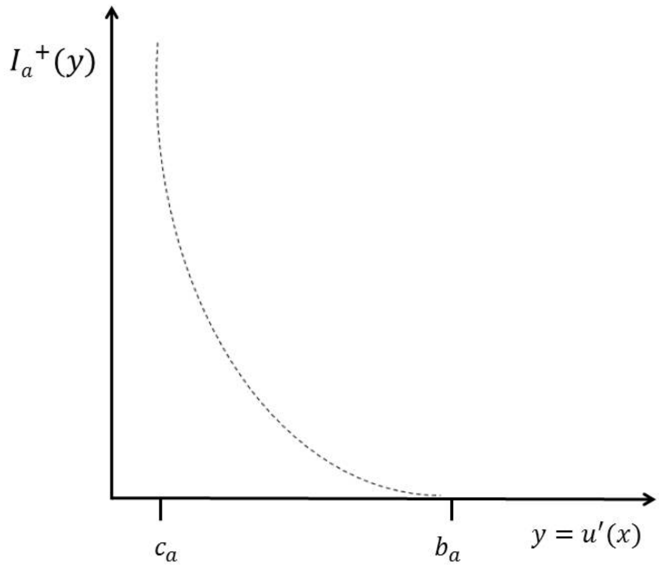


Abbildung 2: Umkehrfunktion der Grenznutzenfunktion eines Markteilnehmers.

Dies ist auf Grund des monoton fallenden Verlaufes der Funktion I_a^+ auch eine stetige und monoton fallende Folge. Des Weiteren gilt:

$$\lim_{y \uparrow b_a} \min\{I_a^+(y), W\} = 0 \qquad \text{da} \qquad \lim_{y \uparrow b_a} I_a^+(y) = 0.$$

und

$$\lim_{y \downarrow 0} \min\{I_a^+(y), W\} = W \qquad \text{da} \qquad \forall y \leq u_a'(W) \quad \min\{I_a^+(y), W\} = W.$$

Außerdem liefert uns die majorisierte Konvergenz, dass die Funktion

$$g(y) := \mathbb{E}^\varphi[\min\{I_a^+(y\varphi), W\}]$$

eine stetige und monoton fallende Folge ist mit

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow \infty} g(y) &= \mathbb{E}^\varphi[\lim_{y \uparrow \infty} \min\{I_a^+(y\varphi), W\}] = 0 \\ \text{und} \qquad \lim_{y \downarrow 0} g(y) &= \mathbb{E}^\varphi[\lim_{y \downarrow 0} \min\{I_a^+(y\varphi), W\}] = \mathbb{E}^\varphi[W]. \end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass die Funktion g(y) strikt monoton fallend auf der Menge $\{y | g(y) \in (0, \mathbb{E}^\varphi[W])\}$ ist. Insbesondere gilt für die Anfangsausstattung eines jeden Marktteilnehmers $W_a < W$ P-f.s.. Wegen der Monotonie des Erwartungswertes können wir dann folgern, dass

$$0 < \mathbb{E}^\varphi[W_a] < \mathbb{E}^\varphi[W]$$

gilt. Also existiert eine eindeutige Konstante $d_a > 0$ mit $g(d_a) = \mathbb{E}[W_a]$. Dies ist äquivalent dazu, dass es nur eine Konstante $d_a > 0$ gibt mit $\mathbb{E}^\varphi[X_a^*] = \mathbb{E}^\varphi[W_a]$. Damit haben wir bereits gezeigt, dass unser Kandidat die zweite Bedingungen erfüllt. Als nächstes beweisen wir, dass unser

Kandidat $\min\{I^+(d_a\varphi), W\}$ das Nutzenmaximierungsproblem bzgl. der Preisdichte φ löst. Wir betrachten hierzu die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \text{ x } \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad (y,\omega) \longmapsto \sup_{x \in [0,W(\omega)]} (u_a(x) - xy). \tag{7}$$

Für den Fall, dass $W(\omega) < \infty$ ist, bildet das Intervall $[0,W(\omega)]$ eine kompakte Teilmenge der reellen Zahlen. Für jedes feste $y \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u_a(x) - xy$ stetig in jedem Punkt $x \in [0, W(\omega)]$ und somit nimmt die Funktion auch auf diesem Intervall sein globales Maximum an. Das Maximum kann dabei auch am Rand des Intervalls liegen. Das Maximum wird in einem eindeutigen Punkt $x \in [0W(\omega)]$ angenommen, wenn einer der drei folgenden Fälle eintritt.

Fall 1 Das Maximum von $u_a(x) - xy$ ist in $x_y^* = 0$ genau dann, wenn gilt

$$u_a(0) \;>\; u_a(x) - xy \qquad \forall x \in (0, W(\omega)]$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{u_a(x) - u_a(0)}{x} \;<\; y \qquad \forall x \in (0, W(\omega)]$$

Mit dem Mittelwertsatz lässt sich der linke Teil umschreiben in den Grenznutzen $u_a'(\mu)$ mit $\mu \in (0,x)$. Dieser Grenznutzen ist maximal für ein $\mu \in \mathbb{R}$ nahe bei 0. Also können wir uns auf den Grenzwert für x gegen 0 beschränken und schreiben, dass die obige Aussage äquivalent ist zu:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{u_a(x) - u_a(0)}{x} = u_a'(0) \quad < \quad y$$

$$\underline{\text{Also}}\text{: Es gibt ein Maximum in } x_y^* = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_a'(x_y^*) < y \tag{8}$$

Fall 2 Das Maximum von $u_a(x) - xy$ ist in $x_y^* = W(\omega)$ genau dann, wenn gilt

$$u(W(\omega)) - W(\omega)y \;>\; u_a(x) - xy \qquad \forall x \in [0, W(\omega))$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{u_a(W(\omega)) - u_a(x)}{W(\omega) - x} \;>\; y \qquad \forall x \in [0, W(\omega))$$

Mit dem Mittelwertsatz lässt sich auch hier der linke Teil umschreiben in den Grenznutzen $u_a'(\mu)$ mit $\mu \in (x, W(\omega))$. Dieser Grenznutzen ist minimal für μ nahe bei $W(\omega)$. Also können wir uns wieder auf den Grenzwert für x gegen $W(\omega)$ beschränken und schreiben, dass die obige Aussage äquivalent ist zu:

$$\lim_{x \uparrow W(\omega)} \frac{u_a(W(\omega)) - u_a(x)}{W(\omega) - x} = u_a'(W(\omega)) \quad > y$$

$$\underline{\text{Also}}\text{: Es gibt ein eindeutiges Maximum in } x_y^* = W(\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u_a'(x_y^*) > y \tag{9}$$

Fall 3 Das Maximum von $u_a(x) - xy$ wird in dem Intervall $(0, W(\omega))$ angenommen, genau dann, wenn für die Extremstelle gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_y^*}(u_a(x_y^*) - x_y^* \cdot y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_a'(x_y^*) - y = 0 \\ \text{und} \quad & \frac{\partial^2}{(\partial x_y^*)^2}(u_a(x_y^*) - x_y^* \cdot y) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_a''(x_y^*) < 0 \\ & \text{und} \quad x_y^* \in (0, W(\omega)) \end{aligned}$$

Aus der notwendigen Bedingung folgt $x_y^* = (u_a')^{-1}(y)$. Die zweite Bedingung ist wegen dem strikt konkaven Verlauf der Nutzenfunktion immer erfüllt. Damit die dritte Eigenschaft erfüllt ist, müssen wir fordern, dass $0 < x_y^* < W(\omega)$ ist. Also muss unser $y \in \mathbb{R}$ bei festem $\omega \in \Omega$, auf Grund des streng monoton fallenden Verlaufes der Grenznutzenfunktion, aus der Menge $\{y \in \mathbb{R} | u_a'(W(\omega)) < y < u_a'(0)\} := Y$ kommen.

$$\underline{\text{Also}}\text{: Es gibt ein Maximum in } x_y^* \in (0, W(\omega)) \Longleftrightarrow u_a'(x_y^*) = y \text{ und } y \in Y \tag{10}$$

Führen wir die drei Fälle (8), (9) und (10) für $W(\omega) < \infty$ zusammen, so erhalten wir

$$x_y^* = \begin{cases} 0 & y \geq u_a'(0) \\ (u_a')^{-1}(y) & y \in (u_a'(W(\omega)), u_a'(0)) \\ W(\omega) < \infty & y \leq u_a'(W(\omega)). \end{cases}$$

Dies entspricht genau:

$$x_y^* = \min\{I_a^+(y), W\} \text{ auf der Menge } \{W < \infty\}. \tag{11}$$

Nun setzen wir

$$X_a^* := x^*(d_a\varphi) \text{ auf der Menge } \{W < \infty\}.$$

Dies entspricht dem Kandidaten für die Lösung des Nutzenmaximierungsproblems aus dem ersten Teil des Beweises für den Fall, dass $W(\omega) < \infty$ ist.

Als nächstes müssen wir noch den Fall betrachten, dass $W(\omega) = \infty$ ist. Das bedeutet, wir suchen den Wert der Funktion ϕ, wobei dies dem Supremum von $u_a(x) - xy$ auf der Menge $x \in [0, \infty]$ entspricht. Wird das Supremum in dem Intervall $[0, \infty)$ angenommen, so unterscheidet sich der Fall, dass $W(\omega) = \infty$ ist, nicht von unserem vorherigen Fall, indem wir $W(\omega)$ als endlich angenommen haben.
Das Supremum der Funktion ϕ wird jedoch nicht angenommen, wenn $y \leq u_a'(x) \quad \forall x \in [0, \infty]$,

also insbesondere wenn $y \leq \lim_{x\uparrow\infty} u_a'(x) =: c_a$ ist.
Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq c_a$ müsste gelten

$$X_a^* = \min\{I_a^+(y), W(\omega)\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty.$$

Da aber die Lösung des Nutzenmaximierungsproblems in L^1 liegt, kann die Lösung X_a^* nur auf einer Nullmenge den Wert unendlich annehmen. Denn für jede Zufallsvariablen in L^1 existiert der Erwartungswert und dieser ist endlich. Somit muss gelten

$$I_a^+(d_a\varphi) < \infty \text{ P-f.s. auf der Menge } \{W = \infty\}.$$

Infolgedessen erhalten wir

$$X_a^* = x^*(d_a\varphi) \qquad \text{P-f.s. auf der Menge } \{W = \infty\} \tag{12}$$

Führen wir (7),(11) und (12) zusammen, so erhalten wir :

$$\phi(d_a\varphi, \cdot) = \sup_{x\in[0,W(\omega)]} (u_a(x) - xy) = u_a(X_a^*) - X_a^* d_a\varphi \qquad \text{P-f.s.}$$

Wählen wir ein beliebige Auszahlung X aus der Menge B_a^φ aus, so erreichen wir wegen der Maximalität von X_a^*:

$$u_a(X_a^*) - X_a^* d_a\varphi \quad \geq \quad u_a(X) - X d_a\varphi \qquad \text{P-f.s.}$$

Wegen der Monotonie und der Linearität des Erwartungswertes gilt dann auch

$$\mathbb{E}[u_a(X_a^*)] \quad \geq \quad \mathbb{E}[u_a(X)] + d_a \cdot \mathbb{E}[\varphi(X_a^* - X)]$$

Können wir zeigen, dass der rechte Teil größer ist als $\mathbb{E}[u_a(X)]$, so gilt

$$\mathbb{E}[u_a(X_a^*)] \quad \geq \quad \mathbb{E}[u_a(X)] \qquad \forall X \in B_a^\varphi$$

und damit wäre die Maximalität des erwarteten Nutzens für unseren Kandidaten X_a^* gezeigt. Also wäre damit unser Kandidat eine Auszahlung, die das Nutzenmaximierungsproblem löst.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathbb{E}[\varphi(X_a^* - X)] \geq 0$ ist, da nach Voraussetzung $d_a > 0$ ist.
Die Eigenschaften der eindeutigen Konstanten d_a, dass der Marktwert $\mathbb{E}^\varphi[X_a^*]$ dem Marktwert $\mathbb{E}^\varphi[W_a]$ entspricht, und die Tatsache, dass für alle $X \in B_a^\varphi \quad \mathbb{E}^\varphi[X] \leq \mathbb{E}^\varphi[W_a]$ gilt, nutzen wir nun um die noch fehlende Ungleichung zu beweisen.

$$\begin{aligned}
& & \mathbb{E}^\varphi[X] &\leq \mathbb{E}^\varphi[W_a] = \mathbb{E}^\varphi[X_a^*] \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{\mathbb{E}[\varphi]}\mathbb{E}[\varphi X] &\leq \frac{1}{\mathbb{E}[\varphi]}\mathbb{E}[\varphi W_a] = \frac{1}{\mathbb{E}[\varphi]}\mathbb{E}[\varphi X_a^*] \qquad (\varphi > 0 P - f.s.) \\
&\Longleftrightarrow & \mathbb{E}[\varphi X] &\leq \mathbb{E}[\varphi W_a] = \mathbb{E}[\varphi X_a^*] \\
&\Longleftrightarrow & \mathbb{E}[\varphi(X_a^* - X)] &\geq 0
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass unser Kandidat aus dem ersten Teil des Beweises auch wirklich das Nutzenmaximierungsproblem löst.

Zur Eindeutigkeit:
Um zu zeigen, dass unser Kandidat auch die einzige Lösung unseres Nutzenmaximierungsproblems ist, müssen wir die Eindeutigkeit zeigen. Hierzu nutzen wir die folgende Eigenschaft konkaver Funktionen:

Existiert ein Maximum einer strikt konkaven Funktion auf einer konvexen Menge, so ist dieses Maximum eindeutig bestimmt und ein strikt globales Maximum.

- Aus dem strikt konkaven Verlauf der Nutzenfunktion der Linearität und der Monotonie des Erwartungswertes folgt direkt auch der strikt konkave Verlauf von $\mathbb{E}[u_a(X_a)]$, denn wegen dem stirkt konkaven Verlauf der Nutzenfunktion u_a gilt für alle $\alpha \in (0,1)$ und für alle $x_1, x_2 \in [0, \infty)$:

  $$u_a(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha u_a(x_1) + (1-\alpha)u_a(x_2).$$

  Also gilt auch

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_a(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)] &> \mathbb{E}[\alpha u_a(x_1) + (1-\alpha)u_a(x_2)] \\ &= \alpha\mathbb{E}[u_a(x_1)] + (1-\alpha)\mathbb{E}[u_a(x_2)]. \end{aligned}$$

- Zu guter Letzt müssen wir noch zeigen, dass B_a^φ konvex ist. Also müssen wir zeigen, dass für alle $\alpha \in (0,1)$ und für alle $X_1, X_2 \in B_a^\varphi$ gilt, dass $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 \in B_a^\varphi$ ist. Zunächst einmal ist nach Voraussetzung die Menge $\mathcal{X}$ konvex, also gilt

  $$\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 \in \mathcal{X}.$$

  Des Weiteren gilt:

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}^\varphi[\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2] &= \alpha\mathbb{E}[X_1] + (1-\alpha)\mathbb{E}^\varphi[X_2] \\ &\leq \alpha\mathbb{E}[W_a] + (1-\alpha)\mathbb{E}^\varphi[W_a] \\ &= \mathbb{E}[W_a]. \end{aligned}$$

Da alle Voraussetzungen für den obigen Satz erfüllt sind, haben wir auch die Eindeutigkeit der Lösung für eine Auszahlung, die das Nutzenmaximierungsproblem löst, gezeigt.

□

Interpretieren lässt sich eine Auszahlung, die das Nutzenmaximierungsproblem löst, als diejenige Auszahlung, die ein Marktteilnehmer bei der bestimmten Preisdichte versucht zu erreichen. Erreicht er durch Tauschen diese Auszahlung, so kann er seinen Zustand durch weiteres

Tauschen nicht mehr verbessern. Wählt man also eine bestimmte Preisdichte, so wird jeder Marktteilnehmer bezüglich dieser Preisdichte die Auszahlung versuchen zu erreichen, welche das individuelle Nutzenmaximierungsproblem löst. Das Problem dabei ist, dass die Allokation dieser optimalen Auszahlungen nicht zulässig sein könnte. Sprich, die Markträumungsbedingung könnte nicht erfüllt sein. In diesem Fall ist es so, dass nicht jeder der Marktteilnehmer bezüglich dieser Preisdichte sein individuelles Nutzenmaximierungsproblem lösen kann, da zum Beispiel von einem Gut ingesamt mehr nachgefragt wird als vorhanden ist. Die Frage, die sich uns nun stellt ist:

Gibt es eine Preisdichte, sodass jedes Wirtschaftssubjekt sein individuelles Nutzenmaximierungsproblem lösen kann und die Allokation der optimalen Auszahlungen die Markträumungsbedinung erfüllt?

Denn nur dann ist es möglich, dass jedes Wirtschaftssubjekt sein Nutzenmaximierungsproblem lösen kann. Zudem wäre in diesem Fall dann jedes Subjekt mit seinem Zustand zufrieden, es würde kein Tausch mehr auf dem Markt stattfinden und sich folglich ein Gleichgewicht einstellen. Dies führt uns zu der Definition des Arrow-Debreu-Gleichgewicht.

3.5 Definition

Eine Preisdichte φ^* zusammen mit einer zulässigen Allokation $(X_a^*)_{a\in\mathcal{A}}$ wird *Arrow-Debreu-Gleichgewicht* genannt, wenn jede Auszahlung X_a^* das Nutzenmaximierungsproblem bezüglich der Preisdichte φ^* für Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ löst.

Wir suchen also eine Preisdichte mit zugehöriger zulässigen Allokation, so dass jedes Wirtschaftssubjekt sein Optimum erreichen kann. Anzumerken ist noch, dass ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht[4] auch ein *Pareto-Optimum* ist. Von einer Pareto-Optimalen Allokation spricht man, wenn es nicht möglich ist ein Individuum besser zu stellen, ohne zugleich mindestens einen Zustand eines anderen Individuums zu verschlechtern. An dieser Stelle wird auch die anfangs behauptete These von Adam Smith, dass es sich bei einen Allgemeinen Gleichgewicht um ein volkswirtschaftliches Optimum handelt, deutlich. Obwohl jeder der Marktteilnehmer nur seine eigenen Ziele (die Maximierung des Nutzens unter der Budgetrestriktion) verfolgt, führt dies insgesamt auch dazu, dass der gesamtwirtschaftliche Wohlstand maximiert wird.

Bevor wir uns tiefgründiger mit der Existenz eines solchen Arrow-Debreu-Gleichgewichtes beschäftigen, also mit dem dritten Schritt unseres Modellierungsprozesses, wollen wir einen kleinen Exkurs einfügen.

[4] Benannt nach Kenneth Arrow und Gerad Debreu. Beide erhielt im Jahre 1972 bzw. 1983 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für ihre Arbeiten bezüglich der Allgemeinen Gleichgewichtstheorie.

4 Exkurs: Die Edgeworth-Box

Zur grafischen Verdeutlichung des Arrow-Debreu-Gleichgewichts wollen wir die Edgeworth-Box, oder auch Tauschbox genannt, einführen. Hierzu müssen und können wir unsere zuvor gemachten Annahmen bedeutend vereinfachen.

4.1 Abweichende Voraussetzungen

Wir gehen in diesem Modell von einer 2 x 2 Wirtschaft aus. Das bedeutet wir nehmen an, es gibt 2 Wirtschaftssubjekte (a_1, a_2) und 2 Arten von Wirtschaftsgütern (1,2). Jedes dieser Wirtschaftsgüter wird separat auf einen eigenen Markt gehandelt. Von der ersten Güterart gibt es insgesamt W' Einheiten und entsprechend von der zweiten Güterart W'' Einheiten. Zudem machen wir die sehr starke Annahme, dass es keine Unsicherheiten gibt. Folglich wollen wir, dass der Nutzen eines Portfolios nur noch von der Anzahl der beiden Güter abhängt. Wir setzten $X_a := (\xi_a^1, \xi_a^2) \quad \forall a \in \{a_1, a_2\}$. Wobei ξ_a^i die Anzahl der Güter des Marktteilnehmers $a \in \{a_1, a_2\}$ von Gut $i \in \{1, 2\}$ symbolisiert.
Hierbei sollen beide Güter unabhängig von einander Nutzen stiften (stehen also nicht in einem komplementären Verhältnis zueinander), jedoch soll es nicht möglich sein, dass eine Gut vollständig durch das Andere zu substituieren. Vergleichbar ist diese Situation mit einem Gütermarkt, auf dem es nur Wasser und Brot gibt. Um zu überleben sind beide Güter nötig und sollten in einem angemessenen Verhältnis stehen. Das bedeutet für unseren Markt, dass ein Subjekt das Portfolio präferieren wird, dessen Zusammenstellung in einem ausgeglichenem Verhältnis steht. Für unsere Nutzenfunktion gilt aus diesem Grund: $u : [0, W']x[0, W''] \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine typische Nutzenfunktion, die dies widerspiegelt ist die *Cobb-Douglas-Nutzenfunktion*: $u_{a_j}(X_{aj}) = (\xi_{a_j}^1)^{\beta_j} \cdot (\xi_{a_j}^2)^{1-\beta_j}$ mit $\beta_j \in (0, 1), j \in \{1, 2\}$. Sie ordnet jedem Güterbündel den zugehörigen Nutzen zu. Trägt man den Nutzen jeder möglichen Kombination horizontal ab, so entsteht grafisch ein sogenannter *Nutzenberg*. Dieser ist streng monoton wachsend und strikt konkav.
Eine weitere Annahme ist, dass wir keine Preisdichte haben, sondern ein Preisvektor $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ mit $\varphi_i \in (0, \infty) \quad \forall i = 1, 2$. Hierbei ist φ_i der Preis für eine Einheit vom Gut i.

4.2 Die Edgeworth-Box

Die Edgeworth-Box besteht aus zwei Koordinatensystemen, deren Ursprünge diagonal liegen. Das Koordinatensystem mit dem Ursprung 0_{a_1} gibt das Portfolio des Marktteilnehmers a_1 an. Das Koordinatensystem für den Marktteilnehmer a_2 mit Ursprung 0_{a_2} ist um 180 Grad gedreht und veranschaulicht das Portfolio des Marktteilnehmers a_2. Die Breite der Box gibt die Gesamtanzahl W' der vorhandenen Güter der Sorte eins an. Die Höhe entsprechend für Sorte zwei. Wir wollen hier den Punkt A als unsere Ausgangsallokation ansehen. Marktteilnehmer a_1

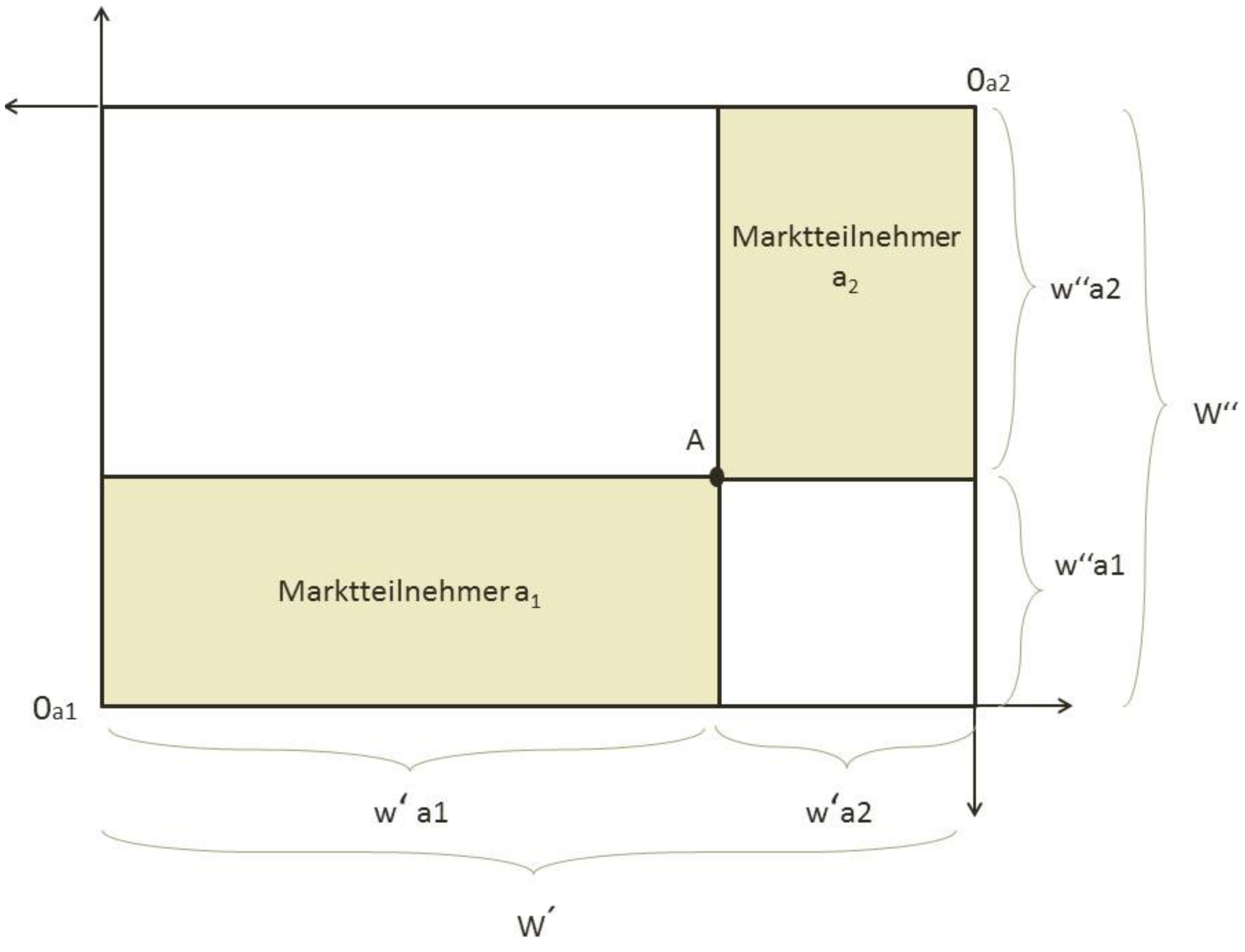


Abbildung 3: Die Edgeworth-Box mit Anfangsallokation

hat zu Beginn w'_{a_1} Einheiten von Gut eins und w''_{a_1} Einheiten von Gut zwei. Wir definieren das Anfangsportfolio von Marktteilnehmer a_1 als $W_{a_1} := (w'_{a_1}, w''_{a_1})$. Analog besitzt Subjekt a_2 zu Anfang das Portfolio $W_{a_2} := (w'_{a_2}, w''_{a_2})$.
Verteilt man die Güter gemäß der Farbmarkierung für Punkt A, so besteht die gesamte eingeschlossene Fläche der Edgeworth-Box aus zulässigen Allokationen. Denn wählen wir einen beliebigen Punkt in der Tauschbox, so ist die Markträumungsbedingung erfüllt, wenn wir die Wertpapiere gemäß $\xi^1_{a_1} + \xi^1_{a_2} = W'$ und $\xi^2_{a_1} + \xi^2_{a_2} = W''$ verteilen. Denn für die Markträumungsbedingung muss folgendes gelten:

$$\begin{aligned}
& \sum_{a \in \mathcal{A}} X_a &=& \; W \\
\iff & X_{a_1} + X_{a_2} &=& \; W_{a_1} + W_{a_2} \\
\iff & (\xi^1_{a_1}\ ,\ \xi^2_{a_1}) + (\xi^1_{a_2}\ ,\ \xi^2_{a_2}) &=& \; (w'_{a_1}\ ,\ w''_{a_1}) + (w'_{a_2}\ ,\ w''_{a_2}) \\
\iff & (\xi^1_{a_1} + \xi^1_{a_2}\ ,\ \xi^2_{a_1} + \xi^2_{a_2}) &=& \; (w'_{a_1} + w'_{a_2}\ ,\ w''_{a_1} + w''_{a_2}) \\
\iff & (\xi^1_{a_1} + \xi^1_{a_2}\ ,\ \xi^2_{a_1} + \xi^2_{a_2}) &=& \; (W'\ ,\ W'')
\end{aligned}$$

4.3 Nutzenmaximierungsproblem

Unser Ziel ist es nun ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht für unsere 2 x 2 Wirtschaft zu bestimmten. Zu diesem Zweck benötigen wir eine zulässige Allokation, also einen Punkt in der Box, und einen Preisvektor, der das Nutzenmaximierungsproblem für beide Marktteilnehmer löst. Zunächst wollen wir uns auf Marktteilnehmer a_1 beschränken und dessen Optimum bestimmen. Da wir in unserem Modell sehr starke Annahmen vorausgesetzt haben, können wir unser Nutzenmaximierungsproblem vereinfachen. Hierzu sei φ ein gegebener Preisvektor, dann suchen wir das Portfolio:

$$X^*_{a_1} \;=\; (\xi^{1^*}_{a_1}, \xi^{2^*}_{a_1}) = \underset{X \in B^{\varphi}_{a_1}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}[u_{a_1}(X)] = \underset{X \in B^{\varphi}_{a_1}}{\operatorname{argmax}} u_{a_1}(X)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad B^{\varphi}_{a_1} &= \left\{X \in \; [0, W']\text{x}[0, W'']|\varphi \xi^T_{a_1} \leq \varphi W^T_{a_1}\right\} \\ &= \left\{X \in \; [0, W']\text{x}[0, W'']|\varphi_1 \xi^1_{a_1} + \varphi_2 \xi^2_{a_1} \leq \overline{w}_{a_1}\right\}. \end{aligned}$$

Hier soll $\overline{w}_{a_1} := \varphi_1 w'_{a_1} + \varphi_2 w''_{a_1}$ dem Marktwert der Anfangsausstattung entsprechen. Wir können sogar ohne Einschränkung annehmen, dass für unsere optimale Investitionskombination $X^*_{a_1}$ die *Budgetgleichung* $\varphi_1 \xi^1_{a_1} + \varphi_2 \xi^2_{a_1} = \overline{w}_{a_1}$ gilt.
Wäre dies nicht der Fall, würde unser Marktteilnehmer freiwillig auf Wirtschaftsgüter mit positiven Auszahlungen verzichten, was unserer Annahme widersprechen würde, dass sich jedes Wirtschaftssubjekt nutzenmaximierend verhält. Wählen wir einen beliebigen Preisvektor $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, so können wir die Budgetgerade in unsere Tauschbox einzeichnen. Für das Koordinatensystem unseres Marktteilnehmers a_1 gilt nach Umformung der entsprechenden Budgetgleichung :

$$\xi^2_{a_1} = \frac{\overline{w}_{a_1}}{\varphi_2} - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \xi^1_{a_1} \tag{13}$$

Die Steigung dieser Budgetgleichung ist das negative Preisverhältnis $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. Natürlich verläuft die Budgetgerade -unabhängig von dem gewählten Preisvektor - durch unseren Anfangspunkt A. Denn dieser Punkt erfüllt trivialerweise die Budgetgleichung für jeden Preisvektor.
Wir wissen nun also, dass unser gesuchtes Optimum für Marktteilnehmer a_1 auf der Budgetgeraden liegt. Um eine eindeutige Lösung für unser Nutzemaximierungsproblem zu bestimmen, müssen wir den Punkt auf der Geraden finden, der uns den maximal möglichen Nutzen liefert. Dazu möchten wir hier noch den Begriff der *Indifferenzkurve* einführen.
Die Indifferenzkurve ist der geometrische Ort aller Investitionskombinationen, die dem Investor den gleichen Nutzen stiftet.
Aufgrund des identischen Nutzenniveaus ist er zwischen diesen Kombinationen indifferent. Anders formuliert: Liegen Güterkombination A und B auf der selben Indifferenzkurve, so ist dem Marktteilnehmer egal welches Bündel er wählt.

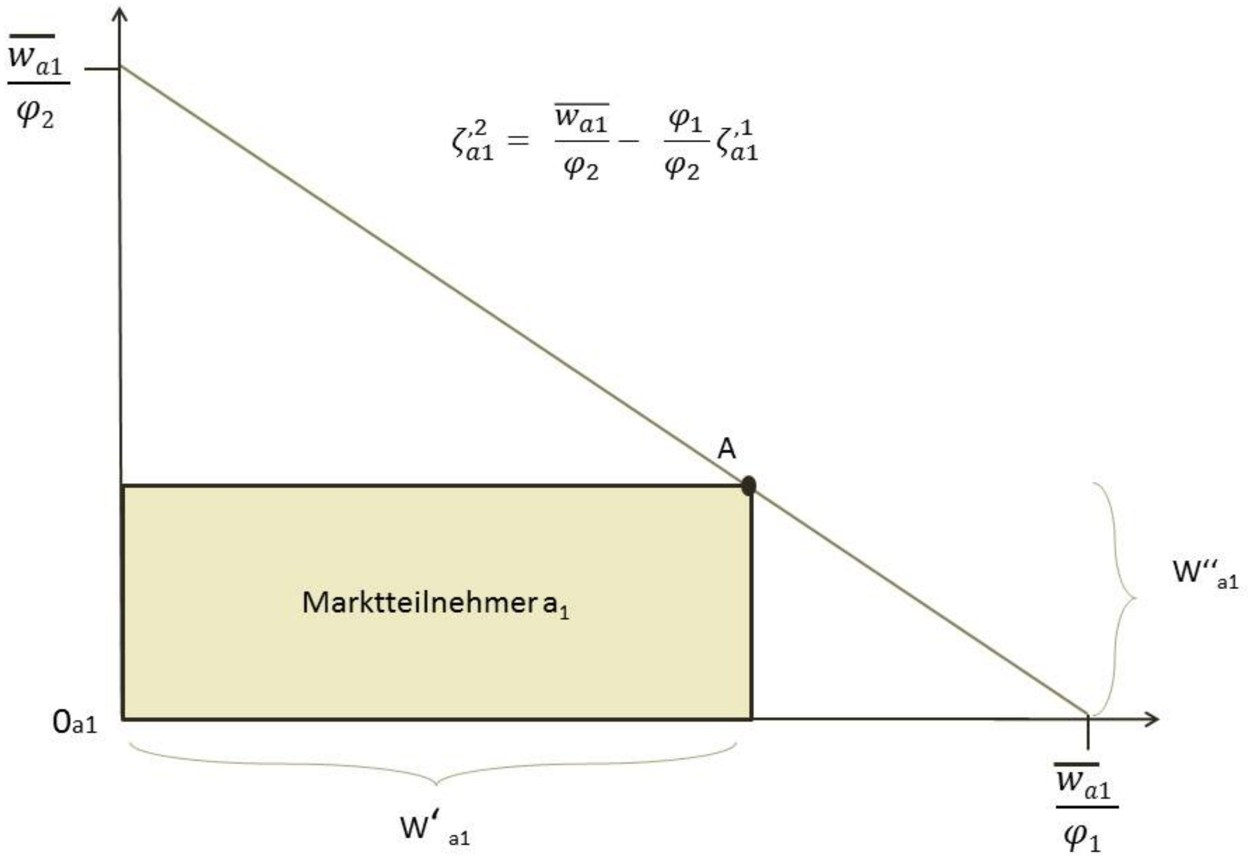
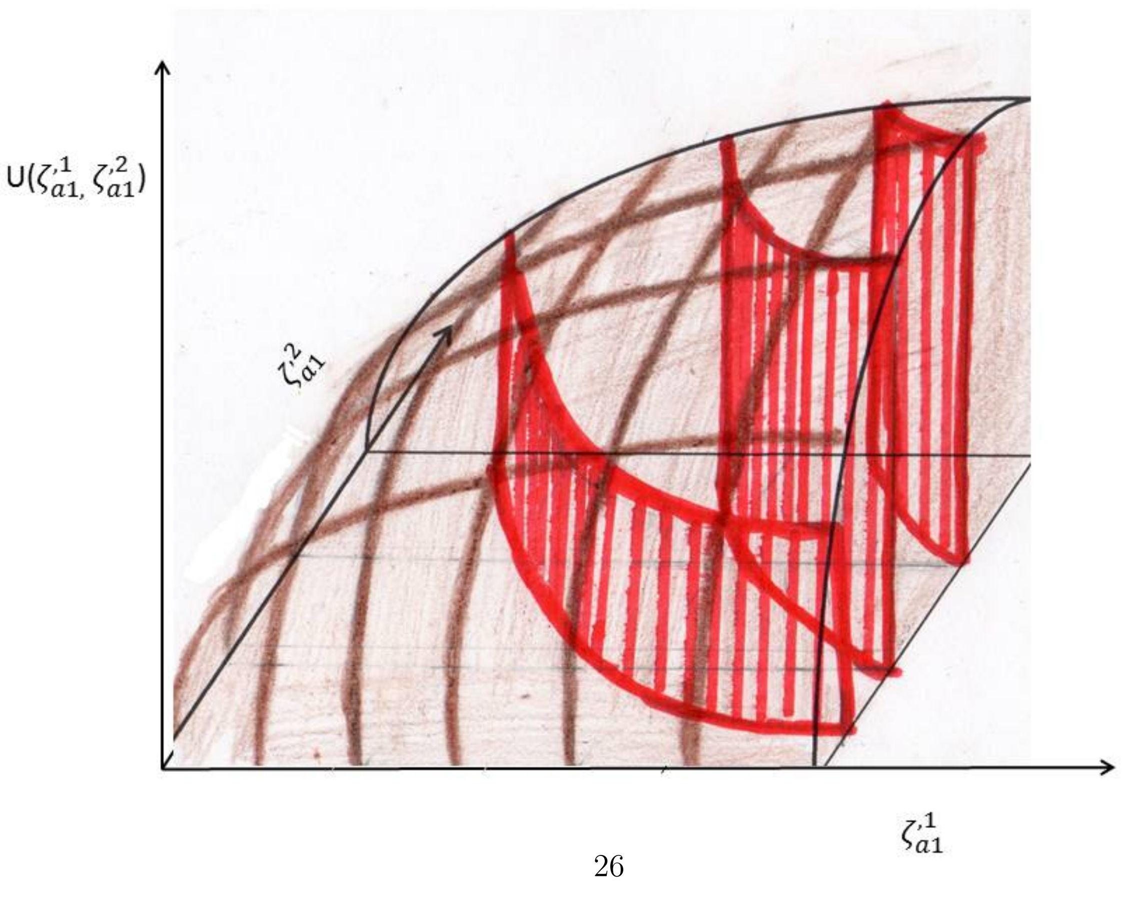


Abbildung 4: Budgetgerade von Marktteilnehmer a_1 bei gegebenen Preisvektor.



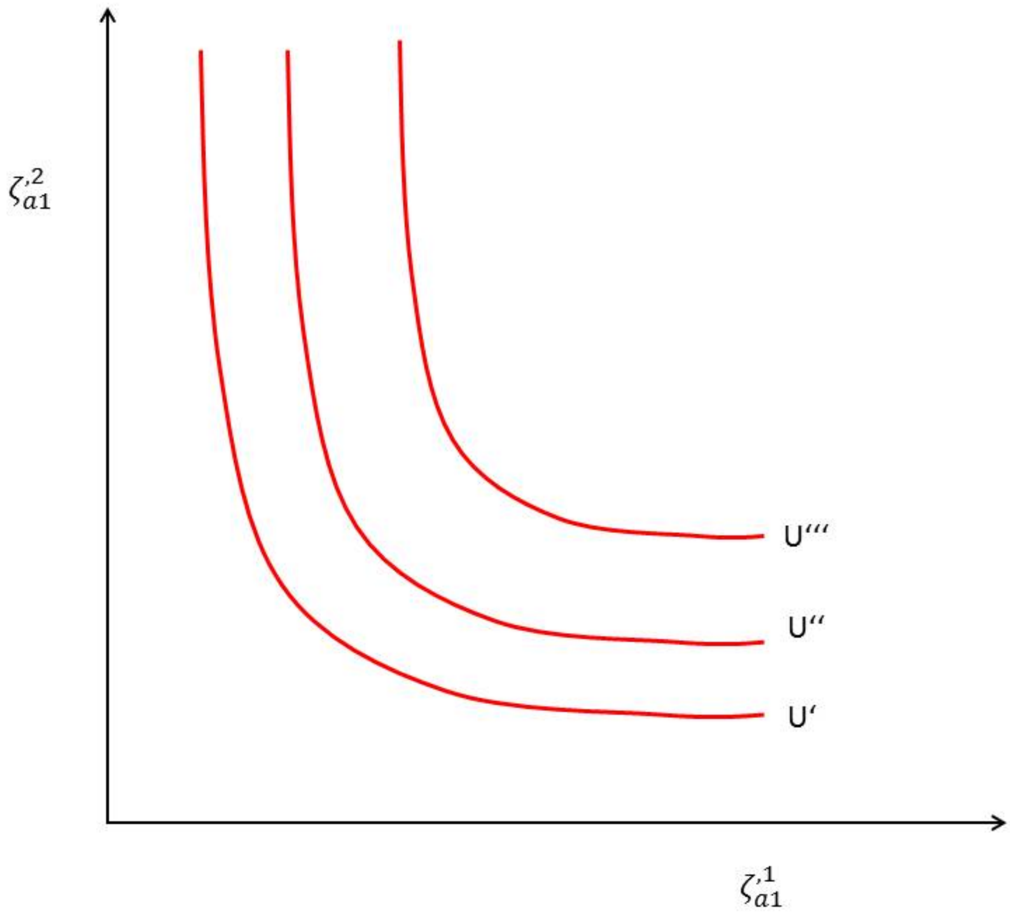


Abbildung 5: Nutzengebirge und Indifferenzkurven

Anschaulich ergibt sich die Indifferenzkurve als eine Höhenlinie des Nutzenberges, und kommt durch einen waagerechten Schnitt durch den Berg zustande. Indifferenzkurven sind charakterisiert durch drei wichtige Eigenschaften:

- Indifferenzkurven können sich nicht schneiden,
- Der Verlauf jeder Kurve ist konvex,
- Je weiter die Indifferenzkurve vom Ursprung entfernt ist, desto höher ist ihr Nutzenniveau.

Die Steigung einer Indifferenzkurve wird auch *Grenzrate der Substitution* genannt. Sie gibt das Mengenverhältnis an, indem sich das eine Wirtschaftsgut gegen das Andere eintauschen lässt ohne das Nutzenniveau zu verändern.
Ist ein Investor in der Situation, dass er verhältnismäßig viel von z.B. Gut 1 besitzt, jedoch wenig von Gut 2, so wird er bereit sein für eine zusätzliche Einheit von Gut 2 viele Einheiten von Gut 1 aufzugeben. Man spricht auch davon, dass der Grenznutzen an Wirtschaftsgut 2 hoch ist. Jedoch nimmt dieser Grenznutzen mit zunehmenden Mengen von Gut 2 ab.

4.4 Arrow-Debreu-Gleichgewicht

Um ein Optimum bestimmen zu können, führen wir beide Komponenten: Indifferenzkurve und Budgetgerade zusammen. Die Idee ist: Sei eine feste Budgetgerade[5] (durch die Wahl eines Preisvektors) gegeben, so wählen wir diejenige Investitionskombination, bei der die maximal vom Ursprung entfernte Indifferenzkurve die Budgetgeraden gerade noch tangiert. Dies ist die Indifferenzkurve, die uns den maximal möglichen Nutzen liefert. In Abbildung 6 ist unser Nutzenmaximierungsproblem genau in dem Punkt gelöst, indem sich die Budgetgerade und die Indifferenzkurve mit Nutzenniveau U"' treffen. Indifferenzkurven U' und U" weisen ein niedrigeres Nutzenniveau auf, und sind deshalb nicht optimal. Außerdem kann Nutzenniveau U"" mit dieser Budgetgerade nicht erreicht werden und liegt außerhalb des möglichen Bereichs.

Im Optimalpunkt gilt insbesondere, dass die Steigung der Indifferenzkurve gleich der Steigung der Budgetgeraden ist. Es gilt also:

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial \xi^1_{a_1}}}{\frac{\partial u}{\partial \xi^2_{a_1}}} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{14}$$

Wobei sich der linke Teil aus dem totalen Differential unserer Nutzenfunktion u ergibt.

$$\underbrace{du}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi^1_{a_1}} d\xi^1_{a_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi^2_{a1}} d\xi^2_{a_1}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\xi^2_{a_1}}{d\xi^1_{a_1}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial \xi^1_{a_1}}}{\frac{\partial u}{\partial \xi^2_{a_1}}}$$

Die Steigung du ist hierbei null, da nach Definition der Nutzen für jede Investitionskombination auf der Indifferenzkurve gleich ist. Das bedeutet, wenn man sich bei einer Veränderung der Güterkombinationen auf der Indifferenzkurve bewegt, ändert sich der Nutzen nicht.
In der Mikroökonomie nennt man diese Gleichung (14) auch das *2. Gossensches Gesetz.*

Es lässt sich wie folgt interpretieren: Der Grenznutzen des Geldes in der Verwendung zum Kauf von Gut 1 ist gleich dem Grenznutzen des Geldes in der Verwendung zum Kauf vom Gut 2. Mit anderen Worten: Es liegt ein optimales Tauschverhältnis vor. Denn wäre dem nicht so, würde der Marktteilnehmer sein Portfolio solange umdisponieren, bis er sein maximal mögliches Nutzenniveau erreicht hat. Im Optimum gibt es diese Möglichkeit zur Erhöhung des Nutzens nicht mehr.

Diesen Vorgang zum Finden einer optimalen Güterkombination bei gegebener Budgetgeraden

[5]Natürlich können wir auch die Indifferenzkurve festsetzen und die minimale Budgetgerade suchen, die die Indifferenzkurve tangiert, um unser Nutzenmaximierungsproblem zu lösen.

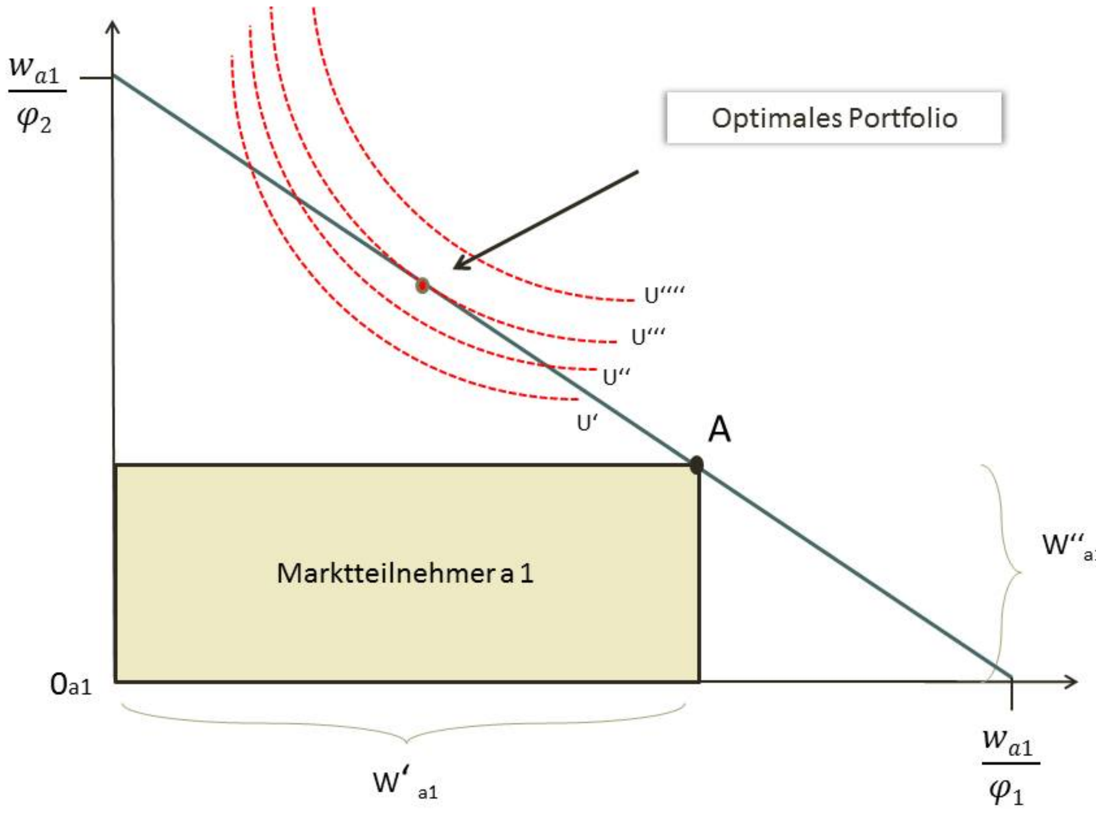


Abbildung 6: Optimale Güterkombination für gegebenen Preisvektor für Marktteilnehmer a_1.

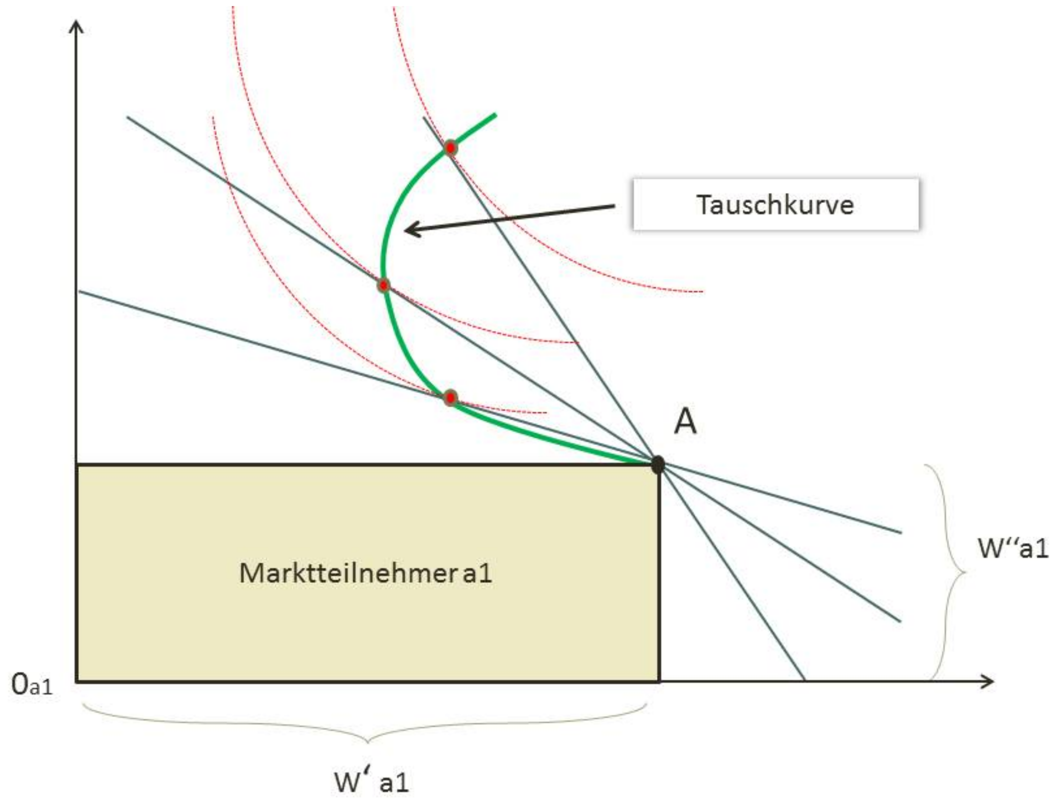


Abbildung 7: Tauschkurve des Marktteilnehmers a_1.

lässt sich für beliebig viele verschiedene Preisvektoren durchführen. Verbindet man die dazugehörigen optimalen Bündel, so erhält man die sogenannte *Tauschkurve*. Sie gibt die Tauschwünsche des jeweiligen Wirtschaftssubjekts bei gegebenen Preisverhältnis an. Also den Punkt in der Tauschbox, den der Marktteilnehmer gerne erreichen würde bei einem bestimmten Preisvektor. Zu bemerken ist, dass alle Punkte auf der Tauschkurve die oberhalb unseres Anfangspunktes A liegen gegenüber des ursprünglichen Portfolios bevorzugt werden. Dies ist der Fall, aus dem einfachem Grund, dass diese Punkte auf einer höheren Indifferenzkurve liegen.

Analog zu Markteilnehmer a_1 gehen wir bei Marktteilnehmer a_2 vor. Durch Verbinden der optimalen Investitionskombinationen für Marktteilnehmer a_2, erhalten wir eine zweite Tauschkurve.
Wie wir aus der Abbildung 8 entnehmen können, erhalten wir zwei Schnittpunkte A und B. In diesen Punkten ergänzen sich die Tauschwünsche zu einer zulässigen Allokation. Aus vorherigen Überlegen ist unsere Anfangsausstattung suboptimal. Wir betrachten also den Schnittpunkt B. Die zugehörige Budgetgerade, die durch den Punkt B führt, liefert genau den Preisvektor, bei der sich automatisch ein Gleichgewicht auf den Märkten einstellt. Denn bei diesem Preisvektor wünschen sich beide Markteilnehmer genau das Portfolio in Punkt B zu erreichen. Durch den Tauschvorgang konnten beide Marktteilnehmer ihren Nutzen erhöhen, da die optimalen Güterkombinationen auf einer höheren Indifferenzkurve liegen. Die Allokation im Punkt B mit zugehörigem Preisvektor ist also unser gesuchtes Arrow-Debreu-Gleichgewicht! In diesem Punkt erfüllen beide Güterkombinationen das Nutzenmaximierungsproblem der jeweiligen Marktteilnehmer *und* es liegt eine zulässige Allokation vor.

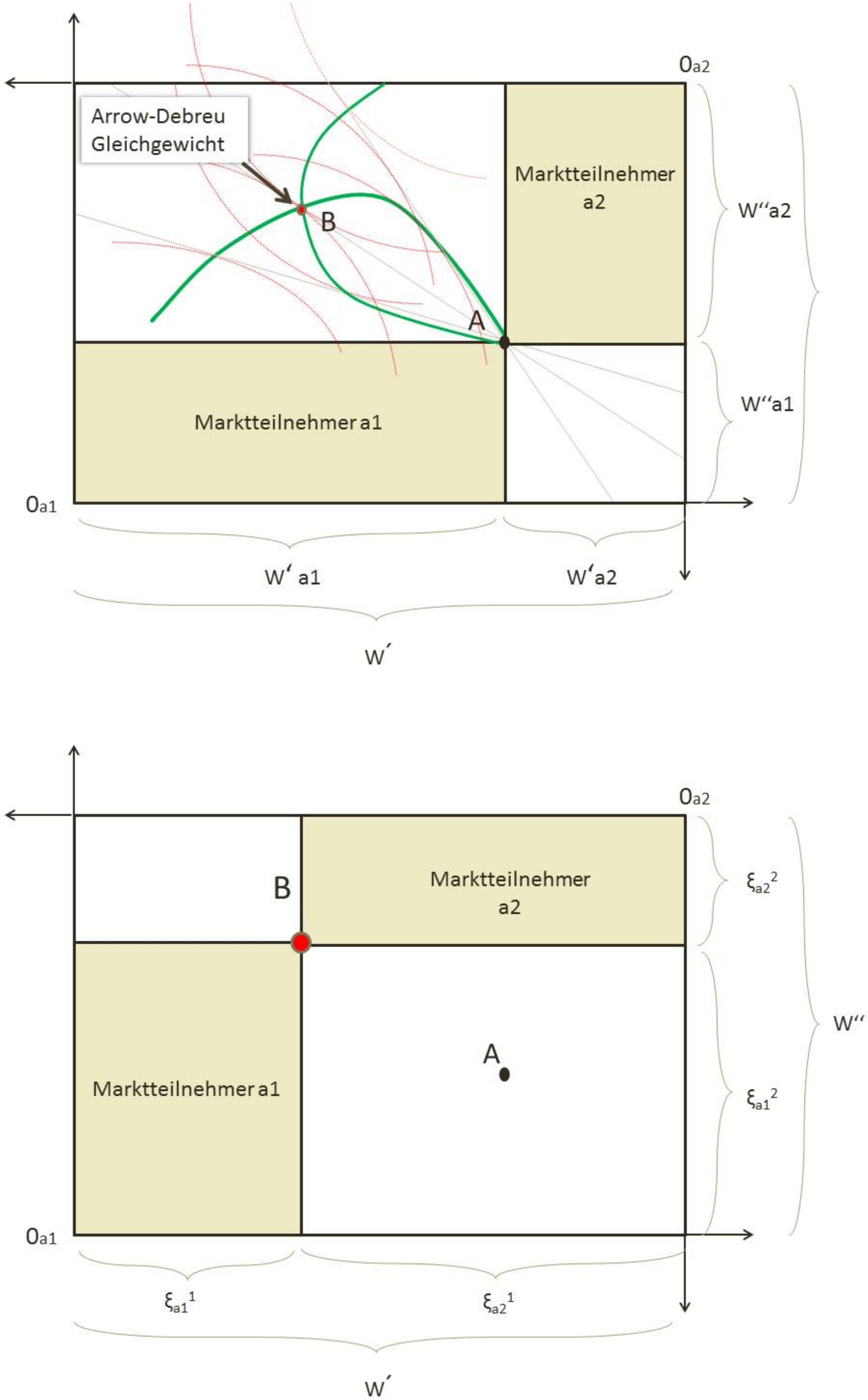


Abbildung 8: Die alte Allokation mit Arrow-Debreu-Gleichgewicht und die neue Allokation für die 2 x2 Wirtschaft.

4.5 Beispiel

Wir nehmen an, dass beide Marktteilnehmer eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion haben mit $\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2} \in (0,1)$. Also gilt:

$$u_a(\xi_a^1, \xi_a^2) = (\xi_a^1)^{\alpha_a} \cdot (\xi_a^2)^{(1-\alpha_a)} \qquad \forall a \in \{a_1, a_2\}.$$

Nun wollen wir für diese Ausgangssituation ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht finden. Also suchen wir einen Preisvektor, sodass sich die nutzenmaximierenden Portfolios der Marktteilnehmer zu einer zulässigen Allokation ergänzen.
Sei hierzu ein Preisvektor $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ gegeben. Wir werden nun mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens, die zu diesem Preisvektor optimalen Güterkombinationen ermitteln. Beginnen wir mit dem Marktteilnehmer a_1. Wir wollen den Nutzen $u_{a_1}(\xi_{a_1}^1, \xi_{a_1}^2)$ maximieren unter der Bedingung, dass unsere Güterkombination auf der Budgetgeraden liegt. Also muss unsere Lösung die Gleichheit $\varphi_1 \xi_{a_1}^1 + \varphi_2 \xi_{a_1}^2 = \varphi_1 w_{a_1}' + \varphi_2 w_{a_1}''$ erfüllen. Dieses Optimierungsproblem mit linearer Restriktion können wir mathematisch mit der Maximierung der Lagrange-Funktion lösen:

$$L(\xi_{a_1}^1, \xi_{a_2}^2, \lambda) := (\xi_{a_1}^1)^{\alpha_{a_1}} \cdot (\xi_{a_1}^2)^{(1-\alpha_{a_1})} - \lambda[\varphi_1 \xi_{a_1}^1 + \varphi_2 \xi_{a_1}^2 - \varphi_1 w_{a_1}' - \varphi_2 w_{a_1}''].$$

Hierbei ist λ der Lagrange-Multiplikator. Für eine Extremstelle der Lagrange-Funktion müssen die partiellen Ableitungen null sein.

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_{a_1}^1} = \alpha_{a_1} \cdot (\xi_{a_1}^1)^{(\alpha_{a_1}-1)} \cdot (\xi_{a_1}^2)^{(1-\alpha_{a_1})} - \lambda\varphi_1 \overset{!}{=} 0 \implies \lambda = \frac{\alpha_{a_1}}{\varphi_1} \cdot \left(\frac{\xi_{a_1}^2}{\xi_{a_1}^1}\right)^{(1-\alpha_{a_1})} \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_{a_1}^2} = (1-\alpha_{a_1}) \cdot (\xi_{a_1}^1)^{\alpha_{a_1}} \cdot (\xi_{a_1}^2)^{-\alpha_{a_1}} - \lambda\varphi_2 \overset{!}{=} 0 \implies \lambda = \frac{(1-\alpha_{a_1})}{\varphi_2} \cdot \left(\frac{\xi_{a_1}^1}{\xi_{a_1}^2}\right)^{\alpha_{a_1}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\varphi_1 \xi_{a_1}^1 - \varphi_2 \xi_{a_1}^2 + \varphi_1 w_{a_1}' + \varphi_2 w_{a_1}'' \overset{!}{=} 0 \implies \varphi_1 \xi_{a_1}^1 + \varphi_2 \xi_{a_1}^2 = \varphi_1 w_{a_1}' + \varphi_2 w_{a_1}'' \tag{17}$$

Setzen wir (15) und (16) gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{a_1}}{\varphi_1} \cdot \left(\frac{\xi_{a_1}^2}{\xi_{a_1}^1}\right)^{(1-\alpha_{a_1})} &= \frac{(1-\alpha_{a_1})}{\varphi_2} \cdot \left(\frac{\xi_{a_1}^1}{\xi_{a_1}^2}\right)^{\alpha_{a_1}} \\ \iff \quad \xi_{a_1}^1 &= \frac{\alpha_{a_1}}{(1-\alpha_{a_1})} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \cdot \xi_{a_1}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Setzen wir (18) in (17) ein, so erhalten wir unsere optimale Güterkombination für Marktteilnehmer a_1 bezüglich dem Preisvektor φ.

$$\xi_{a_1}^{1^*} = \alpha_{a_1} \cdot \left(w_{a_1}' + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} w_{a_1}''\right) \quad \text{und} \quad \xi_{a_1}^{2^*} = (1-\alpha_{a_1}) \cdot \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} w_{a_1}' + w_{a_1}''\right) \tag{19}$$

Bei dieser Extremstelle handelt es sich um ein Maximum, denn man kann schnell nachrechnen, dass die Hesse-Matrix negativ definit ist.

Ganz analog bestimmen wir die optimale Güterkombination für Marktteilnehmer a_2. Da wir auch hier von einer Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen ausgehen, erhalten wir:

$$\xi_{a_2}^{1^*} = \alpha_{a_2} \cdot \left(w'_{a_2} + \frac{\varphi 2}{\varphi 1} w''_{a_2} \right) \quad \text{und} \quad \xi_{a_2}^{2^*} = (1-\alpha_{a_2}) \cdot \left(\frac{\varphi 1}{\varphi 2} w'_{a_2} + w''_{a_2} \right) \tag{20}$$

Im nächsten Schritt müssen wir nun prüfen, ob diese beiden optimalen Güterkombinationen zusammen eine zulässige Allokation bilden. Beziehungsweise wir müssen einen Preisvektor finden, bezüglich der die optimalen Güterkombinationen eine zulässige Allokation ist. Hierzu muss gelten

$$\xi_{a_1}^{1^*} + \xi_{a_2}^{1^*} \stackrel{!}{=} W' \quad \text{und} \quad \xi_{a_1}^{2^*} + \xi_{a_2}^{2^*} \stackrel{!}{=} W''$$

- **Bedingung 1**

$$\begin{aligned} \xi_{a_1}^{1^*} + \xi_{a_2}^{1^*} &= \alpha_{a_1} \cdot \left(w'_{a_1} + \frac{\varphi 2}{\varphi 1} w''_{a_1} \right) + \alpha_{a_2} \cdot \left(w'_{a_2} + \frac{\varphi 2}{\varphi 1} w''_{a_2} \right) \\ &= \frac{\varphi 2}{\varphi 1} \cdot (\alpha_{a_1} w''_{a_1} + \alpha_{a_2} w''_{a_2}) + \alpha_{a_1} w'_{a_1} + \alpha_{a_2} w'_{a_2} \\ &\stackrel{!}{=} W' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \frac{\varphi 2}{\varphi 1} &= \frac{W' - \alpha_{a_1} w'_{a_1} - \alpha_{a_2} w'_{a_2}}{\alpha_{a_1} w''_{a_1} + \alpha_{a_2} w''_{a_2}} = \frac{W' - \alpha_{a_1}(W' - w'_{a_2}) - \alpha_{a_2} w'_{a_2}}{\alpha_{a_1}(W'' - w''_{a_2}) + \alpha_{a_2} w''_{a_2}} \\ &= \frac{(1-\alpha_{a_1})W' + (\alpha_{a_1} - \alpha_{a_2}) w'_{a_2}}{\alpha_{a_1} W'' + (\alpha_{a_2} - \alpha_{a_1}) w''_{a_2}} \end{aligned} \tag{21}$$

- **Bedingung 2**

$$\begin{aligned} \xi_{a_1}^{2^*} + \xi_{a_2}^{2^*} &= (1-\alpha_{a_1}) \cdot \left(\frac{\varphi 1}{\varphi 2} w'_{a_1} + w''_{a_1} \right) + (1-\alpha_{a_2}) \cdot \left(\frac{\varphi 1}{\varphi 2} w'_{a_2} + w''_{a_2} \right) \\ &= \frac{\varphi 1}{\varphi 2} \left((1-\alpha_{a_1}) w'_{a_1} + (1-\alpha_{a_2}) w'_{a_2} \right) + (1-\alpha_{a_1}) w''_{a_1} + (1-\alpha_{a_2}) w''_{a_2} \\ &\stackrel{!}{=} W'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \frac{\varphi 2}{\varphi 1} &= \frac{(1-\alpha_{a_1}) w'_{a_1} + (1-\alpha_{a_2}) w'_{a_2}}{W'' - (1-\alpha_{a_1}) w''_{a_1} - (1-\alpha_{a_2}) w''_{a_2}} = \frac{(1-\alpha_{a_1})(W' - w'_{a_2}) + (1-\alpha_{a_2}) w'_{a_2}}{W'' - (1-\alpha_{a_1})(W'' - w''_{a_2}) - (1-\alpha_{a_2}) w''_{a_2}} \\ &= \frac{(1-\alpha_{a_1})W' + (\alpha_{a_1} - \alpha_{a_2}) w'_{a_2}}{\alpha_{a_1} W'' + (\alpha_{a_2} - \alpha_{a_1}) w''_{a_2}} \end{aligned} \tag{22}$$

Also bildet unsere optimale Kombination von Gütern für jede Preisdichte der Form

$$\varphi^* = \left(\varphi 1 \quad , \frac{(1-\alpha_{a_1})W' + (\alpha_{a_1} - \alpha_{a_2}) w'_{a_2}}{\alpha_{a_1} W'' + (\alpha_{a_2} - \alpha_{a_1}) w''_{a_2}} \cdot \varphi 1 \right) \qquad \text{mit } \varphi 1 > 0 \tag{23}$$

eine zulässige Allokation. Diese Preisdichte zusammen mit der Allokation aus den Güterkombinationen (19) und (20) bilden dann unser Arrow-Debreu-Gleichgewicht

Wenden wir unsere Erkenntnisse auf einen konkreten Fall an. Hierzu seien die Anfangsausstattungen wie folgt gewählt:

$$\begin{array}{ccc} W' = 500 & w'_{a_1} = 50 & w'_{a_2} = 450 \\ W'' = 250 & w''_{a_1} = 200 & w''_{a_2} = 50 \end{array}$$

Zudem seien die Parameter der Nutzenfunktion $\alpha_{a_1} = 0,5$ und $\alpha_{a_2} = 0,7$. Für den Nutzen der Anfangsausstattung können wir nun ermitteln, dass diese

$$\begin{array}{rrcl} \text{für Marktteilnehmer } a_1 & u_{a_1}(w'_{a_1}, w''_{a_1}) & = & 50^{0,5} \cdot 200^{0.5} = 100 \\ \text{und für Marktteilnehmer } a_2 & u_{a_2}(w'_{a_2}, w''_{a_2}) & = & 450^{0,7} \cdot 50^{0,3} = 232,77 \end{array}$$

Einheiten betragen. Aus vorherigen Überlegungen können wir nun ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht angeben. Wir wissen, dass hierzu der Preisvektor

$$\varphi^* = (\varphi_1 \ , \ 1,1851 \cdot \varphi_1) \text{ mit } \varphi_1 > 0$$

sein muss und die Verteilung der Güter am Ende der Periode bei diesem Preisvektor wie folgt aussieht:

$$\begin{array}{rclc} \xi^{1^*}_{a_1} & = & 143,52 & \xi^{1^*}_{a_2} = 356,48 \\ \xi^{2^*}_{a_1} & = & 121,10 & \xi^{2^*}_{a_2} = 128,9 \end{array}$$

Marktteilnehmer a_1 verkauft 78,90 Einheiten von Gut 2 an Marktteilnehmer a_2. Hierfür erhält er einen Erlös in Höhe von 93,52 $\cdot\varphi_1$. Für diesen Betrag kauft er genau 93,52 Einheiten von Gut 1. Andererseits verkauft Marktteilnehmer a_2 93, 52 Einheiten von Gut 1 und kauft die 78,90 Einheiten von Gut 2. Mit diesem Tauschvorgang konnte der Nutzen für die Marktteilnehmer auf 100 auf 131,83 für den Marktteilnehmer a_1 und von 232,77 auf 262,72 für Marktteilnehmer a_2 erhöht werden.

5 Arrow-Debreu-Existenzsatz

Kehren wir nach dem Exkurs zu unserem Modellierungsprozess zurück. Im dritten Modellierungsprozessschritt wollen wir die Existenz eines Arrow-Debreu-Gleichgewichtes nachweisen. Also mathematisch beweisen, dass ein solches Gleichgewicht unter bestimmten Annahmen existiert. In unserem vorher gezeigten Tauschboxbeispiel (wir haben die Nutzenfunktion so gestaltet) existierte ein eindeutiges Arrow-Debreu Gleichgewicht als Schnittpunkt der beiden Tauschkurven. Doch welche Eigenschaften muss eine Nutzenfunktion haben, sodass es eine zulässige Allokation und eine Preisdichte gibt, die das Nutzenproblem für jeden Marktteilnehmer löst?

5.1 Theorem

Sind die Voraussetzungen

$$(1) \qquad \limsup_{x \downarrow 0} x\, u_a'(x) < \infty$$

$$\textit{und} \qquad (2) \qquad \mathbb{E}\left[u_a'\left(\frac{W}{|\mathcal{A}|}\right)\right] < \infty \qquad \forall a \in \mathcal{A}$$

erfüllt, so existiert ein Arrow-Debreu Gleichgewicht.

Bedingung eins besagt, dass x schneller gegen null geht als der Grenznutzen $u_a'(x)$ gegen unendlich für x gegen 0. Die zweite Voraussetzung besagt, dass der erwartete Grenznutzen einer durchschnittlichen Auszahlung für jede Nutzenfunktion der Marktteilnehmer beschränkt sein muss. Zur Erklärung der ersten Voraussetzung folgen eine Bemerkung und einige Beispiele.

5.2 Bemerkung

Zur Vereinfachung der ersten Bedingung können wir anwenden, dass diese bereits erfüllt ist, wenn

$$u_a'(0) := \lim_{x \downarrow 0} u_a'(x) < \infty, \qquad \forall a \in \mathcal{A} \tag{24}$$

gilt. Denn wenn die Funktion $u_a'(x)$ einen Grenzwert für x gegen 0 besitzt, so können wir schreiben:

$$\limsup_{x \downarrow 0} x u_a'(x) = (\limsup_{x \downarrow 0} x) * (\limsup_{x \downarrow 0} u_a'(x)).$$

Außerdem stimmen Limes und Limes superior in diesem Fall überein, da die Grenzwerte existieren.

5.3 Beispiele

5.3.1 Logarithmische Nutzenfunktion

Sei $u(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$ mit $\gamma \in (0,1)$. Diese typische Nutzenfunktion erfüllt unsere üblichen Voraussetzungen: Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie und Konkavität. Zudem gilt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \downarrow 0}(xu'(x)) &= \limsup_{x \downarrow 0}\left(x\frac{1}{\gamma}\gamma x^{\gamma-1}\right) \\
&= \limsup_{x \downarrow 0}(x^\gamma) \\
&= 0 < \infty
\end{aligned}$$

Das bedeutet, wenn jeder Marktteilnehmer eine logarithmische Nutzenfunktion hat, wobei $\gamma_a \in (0,1) \quad \forall a \in \mathcal{A}$ ist, und zusätzlich noch die zweite Bedingung des Theorems erfüllt ist, so existiert ein Arrow-Debreu Gleichgewicht.

5.3.2 Exponentielle Nutzenfunktion

Mit Hilfe der Bemerkung 5.2 lässt sich auch schnell die erste Bedingung für die Existenz eines Arrow-Debreu Gleichgewichts für exponentielle Nutzenfunktionen zeigen. Sei $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ mit $\alpha > 0$. Auch diese Nutzenfunktion erfüllt die üblichen Eigenschaften und es gilt zusätzlich:

$$u_a'(0) := \lim_{x \downarrow 0} u'(x) = \lim_{x \downarrow 0} \alpha e^{-\alpha x} = \alpha < \infty.$$

Es folgt mit der Bemerkung 5.2 , dass

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \downarrow 0}(xu'(x)) &= (\limsup_{x \downarrow 0} x) * (\limsup_{x \downarrow 0} u'(x)) \\
&= \limsup_{x \downarrow 0} x * \alpha \\
&= 0 < \infty
\end{aligned}$$

ist. Also existiert auch bei exponentiellen Nutzenfunktionen ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht, wenn zusätzlich die zweite Bedingung erfüllt ist.

5.3.3 Gegenbeispiel

Sei $u(x) = 1 - \frac{1}{x}$ die Nutzenfunktion eines Marktteilnehmers $a \in \mathcal{A}$. Diese Funktion erfüllt zwar unsere üblichen Voraussetzungen einer Nutzenfunktion, jedoch nicht die erste Bedingung des Theorems. Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \downarrow 0} xu'(x) &= \limsup_{x \downarrow 0} \frac{x}{x^2} \\
&= \limsup_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Die Existenz eines Arrow-Debreu- Geichgewichtes ist also nicht garantiert.

In Vorbereitung auf den Beweis des Theorems wollen wir zunächst zeigen, dass die Arrow-Debreu Gleichgewichtsallokation $(X_a^*)_{a\in\mathcal{A}}$ den gewichteten Durchschnitt des erwarteten Nutzen U^λ über alle Markteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ maximiert. Des Weiteren liefert uns das folgende Lemma 5.6 Kandidaten für eine Preisdichte und eine zulässige Allokation, die zusammen das Arrow-Debreu-Gleichgewicht bilden. Damit diese Kandidaten zusammen auch wirklich ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht bilden, müssen wir noch sicherstellen, dass die Allokation zulässig ist und jeder Marktteilnehmer sein Nutzenmaximierungsproblem bezüglich dieser Preisdichte löst. Ob diese Eigenschaften erfüllt sind, und wenn ja unter welchen Bedingungen, dies werden wir im Beweis zum Theorem 5.7 überprüfen. Doch zunächst wollen wir mit den vorbereitenden Maßnahmen für den Beweis zum Theorem beginnen.

Wir wollen zeigen, dass die Gleichgewichtsallokation $(X_a^*)_{a\in\mathcal{A}}$ den gewichteten Durchschnitt des zu erwartenden Nutzens maximiert. Hierzu betrachten wir zunächst den allgemeinen gewichteten Durchschnitt. Dieser ist von der Form:

$$U^\lambda(X) := \frac{\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)]}{\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a} \qquad \text{mit} \quad \lambda_a \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad X \in \mathcal{X}$$

wobei $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ die Gewichte für den erwarteten Nutzen darstellen. Zur Vereinfachung machen wir eine Einschränkungen für die Gewichte $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$.
Die Gewichte $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ sind Indikatoren zur Bewertung der Wichtigkeit der einzelner Faktoren hinsichtlich des Lösungsansatzes. Das heißt je größer der Gewichtungsfaktor λ_a für einen bestimmten Markteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ ist, desto größer ist sein Einfluss auf die Lösung des optimalen Gleichgewichts. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Vektor $\lambda := (\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ normiert ist. Wir wählen also Gewichtungsvektoren λ mit

$$\lambda \quad \in \quad \Lambda := \{\lambda \in [0,1]^{|\mathcal{A}|} | \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a = 1\} \tag{25}$$

Durch diese Annahme lässt sich der gewichtete Durchschnitt vereinfachen zu:

$$U^\lambda(X) := \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)] \tag{26}$$

5.4 Lemma

Die Menge Λ ist konvex und kompakt

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass Λ kompakt ist. Da $\Lambda := \{\lambda \in [0,1]^{|\mathcal{A}|} | \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a = 1\}$ Teilmenge des $\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ ist, können wir den Satzes von Heine-Borel nutzen. Dieser besagt, dass Λ genau dann kompakt ist, wenn Λ abgeschlossen und beschränkt ist. Die Beschränktheit folgt direkt aus der Definition von λ. Die Abgeschlossenheit von Λ ist erfüllt, da alle Randpunkte enthalten sind.

- Um zu zeigen, dass Λ eine konvexe Menge ist, muss für alle $u, v \in \Lambda$ und für alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \in (0,1)$ stets gelten:

$$\beta u + (1-\beta)v \quad \in \quad \Lambda.$$

Beweis: Seien u,v $\in \Lambda$, und $\beta \in (0,1)$ beliebig, dann gilt:

$$\beta u_a \quad + \quad (1-\beta)v_a \quad \in \quad [0,1] \qquad a \in \mathcal{A}$$

Da $u_a, v_a \in [0,1]$ sind. Also gilt auch:

$$\beta u \quad + \quad (1-\beta)v \quad \in \quad [0,1]^{|\mathcal{A}|}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \beta u + (1-\beta)v &= \beta \sum_{a\in\mathcal{A}} u_a + (1-\beta) \sum_{a\in\mathcal{A}} v_a \\ &= \underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}} v_a}_{=1} + \underbrace{\beta\left(\sum_{a\in\mathcal{A}} u_a - \sum_{a\in\mathcal{A}} v_a\right)}_{=0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

5.5 Definition

Eine zulässige Allokation $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ist λ-*effizient* für $\lambda \in \Lambda$, falls der gewichtete Durchschnitt des zu erwarteten Nutzens über alle zulässigen Verteilungen maximiert wird.

$$(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}} := \operatorname*{argmax}_{X\in\mathcal{Z}} U^\lambda(X) = \operatorname*{argmax}_{X\in\mathcal{Z}} \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)]$$

5.6 Lemma

1. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ existiert eine eindeutige λ-effiziente Allokation.

2. Sei $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ eine zulässige Allokation. Dann gilt:
$(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ist genau dann λ-effizient, wenn es eine Preisdichte gibt, sodass für alle $a \in \mathcal{A}$

$$\lambda_a u_a'(X_a) \leq \varphi \text{ mit Gleichheit auf } \{X_a > 0\} \tag{27}$$

gilt. Die Preisdichte kann eindeutig definiert werden als

$$\varphi^\lambda := \max_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(X_a^\lambda). \tag{28}$$

3. X_a^λ maximiert für jedes $a \in \mathcal{A}$ sowohl den erwarteten Nutzen $\mathbb{E}[u_a(X)]$ über alle $X \in \mathcal{X}$, als auch den Marktwert

$$\mathbb{E}^{\varphi^\lambda}[X] \leq \mathbb{E}^{\varphi^\lambda}[X_a^\lambda] \tag{29}$$

Interpretation

1. Die eindeutige λ-effiziente Allokation für einen bestimmten Gewichtungsvektor $\lambda \in \Lambda$ ist genau der Anwärter für die Arrow-Debreu-Gleichgewichts Allokation.

2. Der Gewichtungsvektor und die dazugehörige λ-effiziente Allokation liefern uns eine Preisdichte. Da nach Lemma Teil 1 die λ-effiziente Allokation eindeutig für ein gewähltes $\lambda \in \Lambda$ ist, ist auch die Preisdichte eindeutig bestimmt.
Da die Abschätzung $\lambda_a u_a'(X_a) \leq \varphi$ mit Gleichheit auf der Menge $\{X_a > 0\}$ für alle Marktteilnehmer erfüllt sein muss und die Preisdichte natürlich unabhängig von den Marktteilnehmern ist, können wir die eindeutige Preisdichte φ^λ als das Maximum über alle Marktteilnehmer von $\lambda_a u_a'(X_a)$ definieren.

3. Eine λ-effiziente Allokation maximiert neben dem gewichteten Durchschnitt gleichzeitig auch den erwarteten Nutzen eines jeden Marktteilnehmers über alle möglichen Auszahlungen aus $\mathcal{X}$. Insbesondere natürlich auch über alle Auszahlungen aus der Budgetmenge $B_a^{\varphi^\lambda}$. Somit ist das Nutzenmaximierungsproblem für jeden Marktteilnehmer gelöst, wenn wir sicherstellen können, dass die Auszahlungen X_a^λ die Budgetrestriktion erfüllen. Weiterhin ist der Marktwert aller möglichen Auszahlungen kleiner als der Wert der Auszahlung einer λ-effizienten Allokation.

Beweis

1. Es gilt:

   Für eine Funktion $U^\lambda : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert genau ein $X^\lambda \in \mathcal{Z}$, dass U^λ über alle $X \in \mathcal{Z}$ maximiert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

   - *U^λ ist eine strikt konkave Funktion*
   - *$\mathcal{Z}$ ist eine Menge von Zufallsvariablen, die Werte in $\mathbb{R}^n$ annehmen und die Menge $\mathcal{Z}$ ist konvex und abgeschlossen bzgl. P-f.s. Konvergenz.*
   - *Es existiert eine Zufallsvariable $V \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $|X_a| \leq V < \infty$ P-f.s. für alle $a \in \mathcal{A} := \{a_1, ..., a_2\}$und für alle $X = (X_{a_1}, ..., X_{a_n}) \in \mathcal{Z}$.*
   - $\sup_{X \in \mathcal{Z}} U^\lambda(X) < \infty$.
   - *U^λ ist stetig von oben bzgl P-f.s. Konvergenz.*

   Können wir die Voraussetzungen dieses Satzes[6] nachweisen, so haben wir sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit einer λ-effizienten zulässigen Allokation für alle $\lambda \in \Lambda$ bewiesen. Sei $\lambda \in \Lambda$ beliebig, dann lautet die zu betrachtende Funktion:

$$U^\lambda : \quad \mathcal{Z} \to \mathbb{R}, \qquad (X_a)_{a \in \mathcal{A}} \longmapsto \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)].$$

   - **z.z U^λ ist eine strikt konkave Funktion**
     Wir müssen zeigen, dass für alle $Y = (Y_a)_{a \in \mathcal{A}}, \check{Y} = (\check{Y}_a)_{a \in \mathcal{A}} \in \mathcal{Z}$ und für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt:

$$U^\lambda(\alpha Y + (1-\alpha)\check{Y}) > \alpha U^\lambda(Y) + (1-\alpha) U^\lambda(\check{Y})$$

     Beweis:

$$\begin{aligned} U^\lambda(\alpha Y + (1-\alpha)\check{Y}) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(\alpha Y_a + (1-\alpha)\check{Y}_a)] \\ &> \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[\alpha u_a(Y_a) + (1-\alpha) u_a(\check{Y}_a)] \\ &= \alpha \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(\check{Y}_a)] + (1-\alpha) \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(\check{Y}_a)] \\ &= \alpha U^\lambda(Y) + (1-\alpha) U^\lambda(\check{Y}) \end{aligned}$$

     Die Ungleichung im zweiten Schritt folgt aus dem strikt konkaven Verlauf der Nutzenfunktion.

[6] Föllmer Schmied, Bemerkung 3.7

- **z.z. $\mathcal{Z}$ ist eine Menge von Zufallsvariablen, die Werte in $\mathbb{R}^n$ annehmen und die Menge $\mathcal{Z}$ ist konvex und abgeschlossen bzgl. P-f.s. Konvergenz**
  $\mathcal{Z}$ ist die Menge aller zulässigen Allokationen. Die Elemente dieser Menge sind Vektoren von Zufallsvariablen die jeweils Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Da die Mächtigkeit der Menge der Marktteilnehmer $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung n ist, nehmen die Allokationen $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ Werte in $\mathbb{R}^n$ an.
  Für die Konvexität müssen wir zeigen, dass für alle $Y=(Y_a)_{a\in\mathcal{A}}, \check{Y}=(\check{Y}_a)_{a\in\mathcal{A}}\in\mathcal{Z}$ und für alle $\alpha\in(0,1)$ gilt: $\alpha\cdot Y+(1-\alpha)\cdot\check{Y}\in\mathcal{Z}$
  Beweis:
  $$\alpha\cdot Y+(1-\alpha)\cdot\check{Y}\in\mathcal{X}\quad \text{da } \mathcal{X} \text{ eine konvexe Menge ist}$$
  $$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathcal{A}}(\alpha Y+(1-\alpha)\check{Y}) &= \alpha\sum_{a\in\mathcal{A}}Y_a+(1-\alpha)\sum_{a\in\mathcal{A}}\check{Y}_a\\ &= \alpha W+(1-\alpha)W\\ &= W\end{aligned}$$
  Somit ist auch $\alpha\cdot Y+(1-\alpha)\cdot\check{Y}$ eine zulässige Allokation und die Konvexität von der Menge $\mathcal{Z}$ ist gezeigt.
  Die Abgeschlossenheit der Menge $\mathcal{Z}$ unter P-f.s. Konvergenz folgt daraus, dass die Randpunkte in der Menge $\mathcal{Z}$ enthalten sind.

- **z.z. Es existiert eine Zufallsvariable $V\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit $|X_a|\le V<\infty$ P-f.s. für alle $a\in\mathcal{A}:=\{a_1,...,a_2\}$ und für alle $X=(X_{a_1},...,X_{a_n})\in\mathcal{Z}$**
  Da für jede zulässige Allokation $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ die Markträumungsbedingung $\sum_{a\in\mathcal{A}}X_a = W \quad P-f.s.$ gilt, können wir das Marktportfolio $W\in\mathcal{X}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ als unsere beschränkende Zufallsvariable wählen. Denn hierfür gilt natürlich:
  $$|X_a|\le W<\infty \quad P-f.s. \quad \forall a\in\mathcal{A}, \quad \forall X=(X_a)_{a\in\mathcal{A}}\in\mathcal{Z}$$

- **z.z.** $\sup_{X\in\mathcal{Z}}U^\lambda(X)<\infty$
  $$\begin{aligned}U^\lambda(X) &= \sum_{a\in\mathcal{A}}\lambda_a\mathbb{E}[u_a(X_a)]\\ &\le \sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbb{E}[u_a(X_a)] && (0\le\lambda_a\le 1, \quad \text{da } \lambda\in\Lambda)\\ &\le \sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbb{E}[u_a(W)] && (0\le X_a\le W, \quad \text{da } (X_a)_{a\in\mathcal{A}}\in\mathcal{Z})\\ &\le \max_{a\in\mathcal{A}}\mathbb{E}[u_a(W)]\cdot|\mathcal{A}|\\ &\le \max_{a\in\mathcal{A}}u_a(\underbrace{\mathbb{E}[W]}_{<\infty})\cdot n && \text{(Jensensche Ungleichung)}\\ &< \infty\end{aligned}$$

Im letzten Schritt gilt $\mathbb{E}[W] < \infty$ nach Voraussetzung, da $W \in L^1$. Somit ist $U^\lambda(X)$ beschränkt für alle $\lambda \in \Lambda$ und für alle $X \in \mathcal{Z}$

- **U ist stetig von oben bzgl P-f.s. Konvergenz**

  Es gilt, ist $U^\lambda(X)$ stetig, so impliziert dies die Stetigkeit von oben. Wir wollen zunächst die Stetigkeit der Funktion $\mathbb{E}[u_a(X)]$ zeigen. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{X}$ mit Grenzwert $X \in \mathcal{X}$. Für die Stetigkeit müssen wir nun zeigen, dass $\mathbb{E}[u_a(X_n)]$ gegen $\mathbb{E}[u_a(X)]$ konvergiert.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[u_a(X_n)] &= \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} u_a(X_n)] \\ &= \mathbb{E}[u_a(\lim_{n\to\infty} X_n)] \\ &= \mathbb{E}[u_a(X)]\end{aligned}$$

  Die erste Gleichheit folgt aus der majorisierten Konvergenz, wobei $\mathbb{E}[u_a(W)] < \infty$ die Majorante darstellt, denn nach Voraussetzung ist die Nutzenfunktion streng monoton wachsend und es gilt $X \leq W$ P-f.s. für alle $X \in \mathcal{X}$. Die zweite Gleichheit folgt aus der Stetigkeit der Nutzenfunktion.

  Da die Funktion $\mathbb{E}[u_a(X_a)]$ für jeden Marktteilnehmer stetig auf der Menge $\mathcal{X}$ ist, gilt dies insbesondere für jede Auszahlung, deren Allokation die Markträumungsbedingung erfüllt. Aus diesem Resultat können wir folgern, dass auch $\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)]$ stetig auf der Menge $B_a^{\varphi^\lambda}$ ist.

2. $''\Longleftarrow''$ Sei $X = (X_a)_{a\in\mathcal{A}} \in \mathcal{Z}$ eine zulässige Allokation und $\lambda \in \Lambda$ ein Gewichtungsvektor sodass $\lambda_a u_a'(X_a) \leq \varphi$ mit Gleichheit auf $\{X_a > 0\} \forall a \in \mathcal{A}$ gilt und sei $Y = (Y_a)_{a\in\mathcal{A}} \in \mathcal{Z}$ eine andere beliebige zulässige Allokation. Um zu zeigen, dass X λ-effizient ist, muss gelten $U^\lambda(X) - U^\lambda(Y) \geq 0$, da X ja genau die Allokation ist, die $U^\lambda(X)$ maximiert. Um dies zu beweisen, benötigen wir zunächst die Gültigkeit der Ungleichung:

$$u_a(X_a) - u_a(Y_a) \geq u_a'(X_a) \cdot (X_a - Y_a) \quad P-f.s. \qquad \forall\, X_a, Y_a \in \mathcal{X} \tag{30}$$

   Hierzu zeigen wir, dass $u_a(x) - u_a(y) \geq u_a'(x) \cdot (x-y) \qquad \forall\, x, y \in [0,\infty)$ gilt.

   Für den Fall, dass $x = y$ gilt, ist die Ungleichung direkt erfüllt. Wir nehmen also ohne Einschränkung an, dass $x \neq y$ ist.

   Fall 1 Sei $0 \leq x < y < \infty$. Da die Nutzenfunktion nach Voraussetzung stetig differenzierbar auf $(0,\infty)$ ist, kann der Mittelwertsatz angewandt werden. Das heißt

$$\exists \quad \check{x} \in (x,y) \text{ mit } u_a'(\check{x}) = \frac{u_a(y) - u_a(x)}{y - x}$$

Da die Nutzenfunktion konkav ist, ist die erste Ableitung streng monoton fallend, das bedeutet: $u_a'(x) > u_a'(\check{x}) > u_a'(y)$. Somit gilt :

$$u_a'(\check{x}) = \frac{u_a(y) - u_a(x)}{\underbrace{y-x}_{>0}} < u_a'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad u_a(y) - u_a(x) < u_a'(x) \cdot (y-x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad u_a(x) - u_a(y) > u_a'(x) \cdot (x-y)$$

Fall 2 Sei $0 \leq y < x < \infty$. Analog zu Fall 1 gilt:

$$\exists \quad \check{x} \in (y,x) \text{ mit } u_a'(\check{x}) = \frac{u_a(x) - u_a(y)}{x-y}$$

Und $u_a'(y) > u_a'(\check{x}) > u_a'(x)$. Also

$$u_a'(\check{x}) = \frac{u_a(x) - u_a(y)}{\underbrace{x-y}_{>0}} > u_a'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad u_a(x) - u_a(y) > u_a'(x) \cdot (x-y)$$

Da alle Auszahlungen in $\mathcal{X}$ nicht negative Werte annehmen, gilt die bewiesene Ungleichung auch für alle $X_a, Y_a \in \mathcal{X}$. Somit haben die Ungleichung (30) bewiesen.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Allokation $X = (X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ λ-effizient ist, also den gewichteten Durchschnitt $U^\lambda(X)$ maximiert über alle zulässigen Allokationen. Für eine beliebige zulässige Allokation Y gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
U^\lambda(X) - U^\lambda(Y) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)] + \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a)] \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(X_a) - u_a(Y_a)] \\
&\geq \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[\lambda_a u_a'(X_a) \cdot (X_a - Y_a)] \quad \text{((30), Monotonie des Erwartungswertes)} \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \Big[\mathbb{E}[(\lambda_a u_a'(X_a) \cdot (X_a - Y_a)) \cdot \mathbf{1}_{\{X_a>0\}}] + \mathbb{E}[(\lambda_a u_a'(X_a) \cdot (X_a - Y_a)) \cdot \mathbf{1}_{\{X_a=0\}}]\Big] \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[(\underbrace{\lambda_a u_a'(X_a)}_{=\varphi \quad n.Vor.} \cdot (X_a - Y_a)) \cdot \mathbf{1}_{\{X_a>0\}}] + \underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[\ (\underbrace{\lambda_a u_a'(0)}_{\leq\varphi \quad n.Vor.} \cdot (X_a - Y_a))\mathbf{1}_{\{X_a=0\}}]}_{\leq 0} \\
&\geq \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[(\varphi \cdot (X_a - Y_a)) \cdot \mathbf{1}_{\{X_a>0\}}] + \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[(\varphi \cdot (X_a - Y_a))\mathbf{1}_{\{X_a=0\}}] \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[\varphi \cdot (X_a - Y_a)] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(\underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}} X_a - \sum_{a\in\mathcal{A}} Y_a}_{=W-W})] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit $U^\lambda(X) - U^\lambda(Y) \geq 0$ haben wir die gezeigt, dass eine Allokation $X = (X_a)_{a\in\mathcal{A}} \in \mathcal{Z}$, für die $\lambda_a u_a'(X_a) \leq \varphi$ mit Gleichheit auf $\{X_a > 0\} \forall a \in \mathcal{A}$ gilt, λ-effizient ist.

$'' \Longrightarrow''$ Um den Beweis für die Hinrichtung zu vereinfachen,[7] benutzen wir die etwas stärkere Voraussetzung (24). Es gilt also $u'_a(0) := \lim_{x\downarrow 0} u'_a(x) < \infty$ für alle a $\in \mathcal{A}$.
Sei $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ eine $\lambda-$ effiziente Allokation für ein $\lambda \in \Lambda$ und $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ eine weitere zulässige Allokation. Definiere

$$Y_a^\epsilon := \epsilon X_a + (1-\epsilon)X_a^\lambda \quad \text{mit} \quad \epsilon \in (0,1].$$

Nach dem Beweis vom vorhergegangenem ersten Teil des Lemmas wissen wir, dass $\mathcal{Z}$ konvex ist und es folgt: Y_a^ϵ ist eine zulässige Allokation. Aus der λ-Effizienz von $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ resultiert, dass die Allokation $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ unter allen zulässigen Allokationen den gewichteten Durchschnitt U^λ maximiert. Dies führt uns zu der Abschätzung:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{1}{\epsilon}(U^\lambda(Y^\epsilon) - U^\lambda(X^\lambda)) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u_a(Y_a^\epsilon) - u_a(X_a^\lambda)] \\
&\geq \frac{1}{\epsilon}\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u'_a(Y_a^\epsilon)\cdot(Y_a^\epsilon - X_a^\lambda)] \qquad \text{(Ungleichung (30))} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u'_a(Y_a^\epsilon)\cdot(\epsilon X_a + (1-\epsilon)X_a^\lambda - X_a^\lambda)] \\
&= \frac{1}{\epsilon}\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u'_a(Y_a^\epsilon)\cdot\epsilon(X_a - X_a^\lambda)] \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \mathbb{E}[u'_a(Y_a^\epsilon)\cdot(X_a - X_a^\lambda)]
\end{aligned}$$

Dies liefert:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u'_a(Y_a^\epsilon)\cdot X_a^\lambda\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u'_a(Y_a^\epsilon)\cdot X_a\right] \qquad \forall \epsilon \in (0,1] \tag{31}$$

Diese Ungleichung ist das erste wichtige Element für unseren Beweis. Für das Zweite benutzen wir den Satz der majorisierten Konvergenz.

Zur Erinnerung:

> *Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$* P-fs. *Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \longrightarrow [0,\infty)$* mit $\sup_n |f_n(x)| \leq g(x)$ P-f.s.. *Dann ist f integrierbar bzgl. P und es gilt:*

$$\int f dP = \lim_{n\to\infty} \int f_n dP \qquad \text{bzw.} \qquad \int |f - f_n| dP \longrightarrow 0$$

Wir definieren die Folge

$$f_n^\lambda(Y_a) := \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u'_a(Y_a^{(\frac{1}{n})}) X_a^\lambda \quad \text{mit} \quad Y_a^{(\frac{1}{n})} := \frac{1}{n}X_a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_a^\lambda.$$

[7] Der Beweis ist auch mit den normalen Voraussetzungen durchführbar.

Dies ist eine Folge messbarer Funktionen, da es eine Verkettung von Zufallsvariablen ist. Weiterhin konvergiert diese Folge, denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n^\lambda(Y_a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(Y_a^{(\frac{1}{n})}) \cdot X_a^\lambda \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(\lim_{n\to\infty}(Y_a^{(\frac{1}{n})})) \cdot X_a^\lambda \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ X_a + \left(1-\frac{1}{n}\right) X_a^\lambda\right)\right) \cdot X_a^\lambda \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(X_a^\lambda) \cdot X_a^\lambda \\
&= \underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a^\lambda}_{:=f^\lambda}
\end{aligned}$$

mit $\varphi_a^\lambda := \lambda_a u_a'(X_a^\lambda)$. Außerdem wird die Folge f_n^λ von einer integrierbaren Funktion g mit $\mathbb{E}[|g|] < \infty$ majorisiert, d.h. es gilt $|f_n^\lambda(Y_a)| \leq g$ P-f.s.für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierzu definieren wir

$$\varphi^\lambda := \max_{a\in\mathcal{A}, X\in\mathcal{X}} \lambda_a u_a'(X) =^1 \max_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a \lim_{x\downarrow 0} u_a'(x) = \max_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(0) <^2 \infty \quad \text{P-f.s.}$$

Gleichung eins gilt, da die Steigung der Nutzenfunktion streng monoton fallend ist auf dem Definitionsbereich $[0,\infty)$. Unsere zuvor angenommene stärkere Voraussetzung $u_a'(0) := \lim_{x\downarrow 0} u_a'(x) < \infty$ geht in die zweite Abschätzung ein.
Wir definieren

$$g := \varphi^\lambda W$$

als unsere Majorante. Diese Majorante ist integrierbar als Produnkt zweier integrierbarer Funktionen und es gilt

$$|f_n^\lambda(Y_a)| = f_n^\lambda(Y_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(Y_a^\epsilon) X_a^\lambda \leq \sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi^\lambda X_a^\lambda = \varphi^\lambda \sum_{a\in\mathcal{A}} X_a^\lambda = \varphi^\lambda W =: g \quad \text{P-f.s.}$$

Da alle Voraussetzungen für den Satz der Majorisierten Konvergenz erfüllt sind, können wir schlussfolgern, dass f^λ integrierbar bezüglich P ist und es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(Y_a^{(\frac{1}{n})}) X_a^\lambda] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} f_n^\lambda(Y_a)] = \mathbb{E}[\sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a^\lambda] = \mathbb{E}[f^\lambda] \tag{32}$$

Analog kann man mit Hilfe der majorisierten Konvergenz zeigen,
dass für die Folge $f_n(Y_a) := \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u'(Y_a^{(\frac{1}{n})}) X_a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a u_a'(Y_a^{(\frac{1}{n})}) X_a] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} f_n(Y_a)] = \mathbb{E}[\sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a] =: \mathbb{E}[f] \tag{33}$$

Die Gleichungen (32) und (33) bilden zusammen das zweite Element unseres Beweises. Zusammen mit der Ungleichung (31) des ersten Beweisteiles und der gemeinsamen Majorante g erreichen wir:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[g] \geq && \mathbb{E}[f^\lambda] && \geq \mathbb{E}[f] \\ \iff \quad & \mathbb{E}[\varphi^\lambda W] \geq && \mathbb{E}[\sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a^\lambda] && \geq \mathbb{E}[\sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a]. \end{aligned} \tag{34}$$

Wenn wir nun unsere zulässige Allokation $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ so wählen, dass
$\varphi^\lambda W = \sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a$ P-f.s. gilt, so erhalten wir die Gleichheit von (34) .
(Beispielsweise können wir unser Portfolio so wählen, dass $X_a := W \cdot 1_{\{T=a\}}$
mit $T(\omega) := \min\{a|\varphi_a^\lambda(\omega) = \varphi^\lambda(\omega)\}$ gilt.)
Insbesondere gilt dann auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g] = \mathbb{E}[f^\lambda] \quad & \iff \quad \mathbb{E}[g - f^\lambda] = 0 \\ & \iff \quad \mathbb{E}[\varphi^\lambda W - \sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a^\lambda] = 0. \end{aligned}$$

Da für alle zulässigen Allokationen $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ die Markträumungsbedingung $\sum_{a\in\mathcal{A}} X_a = W$ P-f.s. gilt und auch $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ eine zulässige Allokation ist, können wir W duch $\sum_{a\in\mathcal{A}} X_a^\lambda$ ersetzten und wir erhalten:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi^\lambda X_a^\lambda - \sum_{a\in\mathcal{A}} \varphi_a^\lambda X_a^\lambda\right] = 0 \qquad \iff \qquad \mathbb{E}\left[\sum_{a\in\mathcal{A}} \underbrace{\left(\varphi^\lambda - \varphi_a^\lambda\right)}_{\geq 0} X_a^\lambda\right] = 0$$

Dies impliziert $\varphi^\lambda = \varphi_a^\lambda$ P-f.s. auf der Menge $\{X_a^\lambda > 0\}$ und auf Grund der Maximalität von φ^λ gilt auch $\varphi^\lambda \geq \varphi_a^\lambda$ auf der Menge $\{X_a^\lambda = 0\}$. Dies entspricht der Behauptung.

3. Aus Satz 3.4 wissen wir, dass die Lösung des Nutzenmaximierungsproblem für ein Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ von der Form

$$X_a^* \quad = \quad \min\{I_a^+(d_a\varphi), W\} \qquad \text{mit} \quad d_a \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\text{wobei} \quad I_a^+(d_a\varphi) \quad := \quad \begin{cases} 0 & d_a\varphi \geq b_a \\ (u_a')^{-1}(d_a\varphi) & d_a\varphi \in (c_a, b_a) \\ \infty & d_a\varphi \leq c_a \end{cases}$$

ist. Können wir nun zeigen, dass unsere Auszahlung einer λ-effiziente Allokation von dieser Form ist, so haben wir gezeigt, dass diese Auszahlung den erwarteten Nutzen über alle $X \in \mathcal{X}$ maximiert. Hierzu nehmen wir für unsere λ-effiziente Allokation ohne Einschränkung

der Allgemeinheit an, dass $P(X_a^\lambda > 0) > 0$ ist. Zudem sollen unsere Gewichtungsfaktoren $\lambda_a > 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$ erfüllen (abweichendes wäre irrelevant für die Ermittlung einer λ-effizienten Allokation und würde das Ergebnis nicht beeinflussen).
Nun liefert uns Lemma Teil zwei $\varphi = \lambda_a u_a'(X_a^\lambda) \quad \forall a \in \mathcal{A}$ auf $\{X_a^\lambda > 0\}$. Nach Umformung erhalten wir:

$$X_a^\lambda = (u_a')^{-1}(\varphi \lambda_a^{-1}) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Wir definieren $\lambda_a^{-1} > 0$ als unsere Konstante d_a. Da die Auzahlung nun von der geforderten Form ist, maximiert $X_a^\lambda = (u_a')^{-1}(\varphi \lambda_a^{-1})$ den zu erwarteten Nutzen für alle Marktteilnehmer und es gilt zusätzlich, dass diese Auszahlung den Marktwert über alle $X \in \mathcal{X}$ maximiert:

$$\mathbb{E}^{\varphi^\lambda}[X] \leq \mathbb{E}^{\varphi^\lambda}[X_a^\lambda] \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

□

5.7 Beweis des Theorems

Nach den vorbereiteten Maßnahmen wollen wir nun den Existenzsatz für ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht unter den Voraussetzungen des Theorems 5.1 beweisen. Die erste Bedingung des Theorems haben wir bereits in den Vorbereitungen in dem Beweis zu dem Lemma 5.6 benutzt. Die zweite Voraussetzung aus Theorem 5.1 werden wir nun nutzen.
Das Ziel des Beweises ist es unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz eines Arrow-Debreu-Gleichgewichtes zu sichern. Hierzu benötigen wir eine zulässige Allokation und eine Preisdichte, sodass jeder Marktteilnehmer sein individuelles Nutzenmaximierungsproblem lösen kann.
Wählen wir nun einen festen Gewichtungsvektor $\lambda \in \Lambda$, so wissen wir aus dem ersten Teil des Lemmas, dass wir zu jedem Gewichtungsvektor λ eine eindeutige λ-effiziente Allokation finden. Die Bedingung, die an unsere Gleichgewichtsallokation gestellt wird ist, dass diese die Markträumungsbedinung erfüllen sollte. Nach Definition ist bereits jede λ-effiziente Allokation auch eine zulässige Allokation. Somit bildet diese λ-effiziente Allokation unseren Kandidaten für die Arrow-Debreu-Gleichgewichtsallokation.
Ferner liefert uns der zweite Teil des Lemmas eine eindeutige Preisdichte φ^λ bezüglich dieser λ-effizienten Allokation. Damit wir ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht erreichen, muss jeder Markteilnehmer bzgl. dieser Preisdichte φ^λ sein Nutzenmaximierungsproblem lösen. Betrachten wir den dritten Teil des vorhergegangenden Lemmas, so sehen wir, dass jede Auszahlung einer λ-effizienten Allokation den erwarteten Nutzen für alle Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ über alle möglichen Auszahlungen $X \in \mathcal{X}$ maximiert. Insbesondere maximiert diese Auszahlung dann auch den zu erwartenen Nutzen über alle Auzahlungen unserer Budgetmenge $B_a^{\varphi^\lambda} \subset \mathcal{X}$. Zudem liefert uns der dritte Teil des Lemmas, dass der Marktwert bezüglich der eindeutigen Preisdichte φ^λ über alle möglichen Auszahlungen maximiert wird. Wenn wir nun überprüfen wollen, ob die jeweilige Auszahlung der λ-effizienten Allokation das Nutzenmaximierungsproblem für jeden Marktteilnehmer löst, so müssen wir nur noch sicherstellen, dass diese optimale Auszahlung die Budgetrestriktion erfüllt. Denn können wir dies zeigen, so ist für jeden Marktteilnehmer a die Auszahlung X_a^λ einer λ-effizienten Allokation die Auszahlung, die das Nutzenmaximierungsproblem löst. Also bilden die Allokation $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ zusammen mit der Preisdichte φ^λ unser gesuchtes Arrow-Debreu-Gleichgewicht.

Was noch zu zeigen ist, ist somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\varphi^\lambda}[W_a] &= \mathbb{E}^{\varphi^\lambda}[X_a^\lambda] \\ \Longleftrightarrow \mathbb{E}[\varphi^\lambda W_a] &= \mathbb{E}[\varphi^\lambda X_a^\lambda] \qquad \forall a \in \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{35}$$

Denn nur dann wird der anfängliche Marktwert der Ausstattung vollkommen genutzt. Würde unsere optimale Allokation den Anfangsmarktwert nicht voll ausnutzen, so würde dies der individuellen Nutzenmaximierungsannahme widersprechen.

Ziel ist es also einen Gewichtungsvektor $\lambda \in \Lambda$ zu finden, der genau diese noch fehlende Bedingung erfüllt.

Erfüllt unsere λ-effiziente Allokation (35), so ist unsere Allokation $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ zusammen mit der Preisdichte φ^λ unser gesuchtes Arrow-Debreu-Gleichgewicht. Und wir sind fertig!

Ist dies nicht der Fall, so können wir λ ersetzen durch $g(\lambda) = (g_a(\lambda))_{a\in\mathcal{A}}$ mit:

$$g_a(\lambda) : \;=\; \lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}\left[\varphi^\lambda(W_a - X_a^\lambda)\right] \tag{36}$$

$$\text{mit} \qquad V \;:=\; \kappa\cdot(1+W) \quad \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P), \tag{37}$$

$$\kappa : \;=\; \max_{a\in\mathcal{A}} \sup_{0<x\leq 1} xu_a'(x) \in (0,\infty) \quad \text{(nach Voraussetzung aus 5.1)} \tag{38}$$

Mit Hilfe von $g(\lambda)$ definieren wir unsere Gewichte so um, dass wir die Gewichte für Marktteilnehmer verringern, deren Marktwert nach dem Tauschen höher ist als ihre Anfangsmarktwerte und die Gewichte im umgekehrten Fall erhöhen. Für jeden Fixpunkt unserer Funktion g ist unsere Gleichung (35) trivialerweise erfüllt. Denn

$$\begin{aligned} g(\lambda) = \lambda \quad &\Longleftrightarrow \quad g_a(\lambda) = \lambda_a \qquad \forall a \in \mathcal{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[\varphi^\lambda(W_a - X_a^\lambda)] = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[\varphi^\lambda W_a] = \mathbb{E}[\varphi^\lambda X_a] \quad \forall a \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Das bedeutet in diesem Fall, dass unsere Allokation $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ zusammen mit der Preisdichte φ^λ, für ein $\lambda \in \Lambda$ mit $g(\lambda) = \lambda$, ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht bilden. Können wir nachweisen, dass ein solcher Fixpunkt der Funktion g immer existiert, so haben wir die Existenz eines Arrow-Debreu-Gleichgewicht bewiesen. Um dies zu verifizieren benötigen wir den *Brouwerschen Fixpunktsatz*:

> *Sei D eine kompakte und konvexe Menge. Dann besitzt jede stetige Abbildung von D in sich selbst einen Fixpunkt.*

Angewendet auf unsere Situation ist $D = \Lambda$. Nach Lemma 5.4 ist Λ kompakt und konvex. Was wir also noch zeigen müssen, damit die Existenz eines Fixpunktes gesichert ist, ist, dass die Abbildung g eine stetige Selbstabbildung ist.

z.z. Die Funktion g ist eine Selbstabbildung

Für eine selbstabbildende Funktion muss gelten $g(\lambda) \in \Lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda := \{\lambda \in [0,1]^{|\mathcal{A}|} \mid \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a = 1\}$

- zu zeigen $\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} g_a(\lambda) = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in\mathcal{A}} g_a(\lambda) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} \left(\lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}\left[\varphi^\lambda(W_a - X_a^\lambda)\right]\right) \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]} \sum_{a\in\mathcal{A}} \left(\mathbb{E}[\varphi^\lambda(W_a - X_a^\lambda)]\right) \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}\left[\varphi^\lambda \sum_{a\in\mathcal{A}} (W_a - X_a^\lambda)\right] \\
&= \underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a}_{=1} + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}\left[\varphi^\lambda \underbrace{\left(\sum_{a\in\mathcal{A}} W_a - \sum_{a\in\mathcal{A}} X_a^\lambda\right)}_{=W-W}\right] \qquad (\text{da } (X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}} \in \mathcal{Z}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

- zu zeigen: $g_a(\lambda) \in [0,1] \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in \Lambda$

Um dies zu zeigen, beweisen wir zunächst die Ungleichung:

$$x \cdot u_a'(x) \le \kappa + x \cdot u_a'(1) \le \kappa(1+x) \quad \forall x \ge 0 \tag{39}$$

Die zweite Ungleichung folgt direkt aus der aus Definition von κ,
denn $u_a'(1) \le \kappa := \max\limits_{a\in\mathcal{A}} \sup\limits_{0<x\le 1} x u_a'(x)$. Für die erste Ungleichung machen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1 Sei x=0

Ungleichung ist erfüllt, da κ>0.

Fall 2 Sei $x \in (0,1]$

Nach Definition von κ gilt bereits $x \cdot u_a'(x) \le \kappa$. Also gilt auch
$x \cdot u_a'(x) \le \kappa \le \kappa + \underbrace{x \cdot u_a'(1)}_{\ge 0}$.

Fall 3 Sei $x > 1$

Da die Grenznutzenfunktion streng monoton fallend ist,
gilt $u_a'(x) < u_a'(1) \quad \forall x > 1$. Hiermit gilt dann auch

$$x \cdot \underbrace{(u_a'(x) - u_a'(1))}_{<0} \le \kappa \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot u_a'(x) \le \kappa + x \cdot u_a'(1)$$

Ungleichung (39) können wir auch auf unsere Auszahlungen anwenden, da diese nur nicht negative Werte annehmen. Also gilt:

$$X_a u_a'(X_a) \le \kappa(1 + X_a) \le \kappa(1+W) := V \quad \forall X_a \in \mathcal{X}.$$

Diese Ungleichung zusammen mit der Preisdichte aus Lemma 5.6 führt zu der Abschätzung:

$$\mathbb{E}[\varphi^\lambda X_a^\lambda] = \mathbb{E}[\lambda_a u_a'(X_a^\lambda) X_a^\lambda] \leq \lambda_a \mathbb{E}[V]. \tag{40}$$

Und es folgt:

$$\begin{aligned} g_a(\lambda) &= \lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}[\varphi^\lambda (W_a - X_a^\lambda)] \\ &= \lambda_a + \frac{\mathbb{E}[\varphi^\lambda W_a]}{\mathbb{E}[V]} - \frac{\mathbb{E}[\varphi^\lambda X_a^\lambda]}{\mathbb{E}[V]} \\ &\geq \lambda_a + \frac{\mathbb{E}[\varphi^\lambda W_a]}{\mathbb{E}[V]} - \frac{\lambda_a \mathbb{E}[V]}{\mathbb{E}[V]} \\ &= \lambda_a + \frac{\mathbb{E}[\varphi^\lambda W_a]}{\mathbb{E}[V]} - \lambda_a \\ &= \frac{\mathbb{E}[\varphi^\lambda W_a]}{\mathbb{E}[V]} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Das Resulat $g_a(\lambda) \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in \Lambda$ zusammen mit $\sum_{a\in\mathcal{A}} g_a(\lambda) = 1$ ergibt $g_a(\lambda) \in [0,1] \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Wir haben somit gezeigt, dass die Funktion g eine Selbstabbildung ist.

z.z Die Funktion g ist stetig

Dazu benutzen wir das Folgenkriterium :

Die Funktion g: $\Lambda \longrightarrow \Lambda$ ist stetig in $\lambda \in \Lambda$, wenn für jede Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen $\lambda_n \in \Lambda$, die gegen λ konvergiert auch $g(\lambda_n)$ gegen $g(\lambda)$ konvergiert. g heißt stetig in Λ, falls g in jedem Punkt von Λ stetig ist.

Sei also $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in Λ mit Grenzwert $\lambda \in \Lambda$. Um zu zeigen, dass hieraus

$$\begin{aligned} && \lim_{n\to\infty} g(\lambda_n) &= g(\lambda) \\ \Longleftrightarrow && \lim_{n\to\infty} g_a(\lambda_n) &= g_a(\lambda) \qquad \forall a \in \mathcal{A} \\ \Longleftrightarrow && \lim_{n\to\infty} \lambda_{n_a} + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}[\varphi^{\lambda_n}(W_a - X_a^{\lambda_n})] &= \lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}[\varphi^\lambda (W_a - X_a^\lambda)] \qquad \forall a \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

folgt, müssen wir einige Zwischenbeweise tätigen.

- Zunächst werden wir sicherstellen, dass

  $$X_a^{\lambda_n} \longrightarrow X_a^\lambda \quad \text{und } \varphi^{\lambda_n} \longrightarrow \varphi^\lambda \qquad \text{P-f.s. gilt für} \quad \lambda_n \longrightarrow \lambda.$$

  gilt. Hierzu definieren wir die Funktion

  $$f : \Lambda \text{ x } [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty] \qquad \text{mit} \qquad f(\lambda, y) := \sum_{a\in\mathcal{A}} I_a^+(\lambda_a^{-1} y)$$

Wobei die Funktion $I_a^+[0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ definiert ist wie in Satz 3.4.

$$I_a^+(\lambda_a^{-1}y) := \begin{cases} 0 & y \geq b_a(\lambda) \\ (u_a')^{-1}(\lambda_a^{-1}y) & y \in (c_a(\lambda), b_a(\lambda)) \\ \infty & y \leq c_a(\lambda) \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} b_a(\lambda) &:= \lambda_a \lim_{x \downarrow 0} u_a'(x) \leq \infty \\ c_a(\lambda) &:= \lambda_a \lim_{x \uparrow \infty} u_a'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Die Funktionen $I_a^+(\lambda_a^{-1}y)$ sind stetig auf $[0,\infty]$ für alle a $\in \mathcal{A}$. Fixieren wir uns auf ein $\lambda \in \Lambda$, dann ist auch die Funktion $f(\lambda,\cdot)$ stetig auf $[0,\infty]$ als Summe der Funktionen $I_a^+(\lambda_a^{-1}y)$ über alle Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$. Zudem gilt, dass die Funktionen $I_a^+(\lambda_a^{-1}y)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ bijektiv und streng monoton fallend auf der Menge $(c_a(\lambda), b_a(\lambda))$ sind. Gleiches gilt für $f(\lambda, y)$ auf $(c(\lambda), b(\lambda))$. Wobei wir $b(\lambda)$ und $c(\lambda)$ setzen können als:

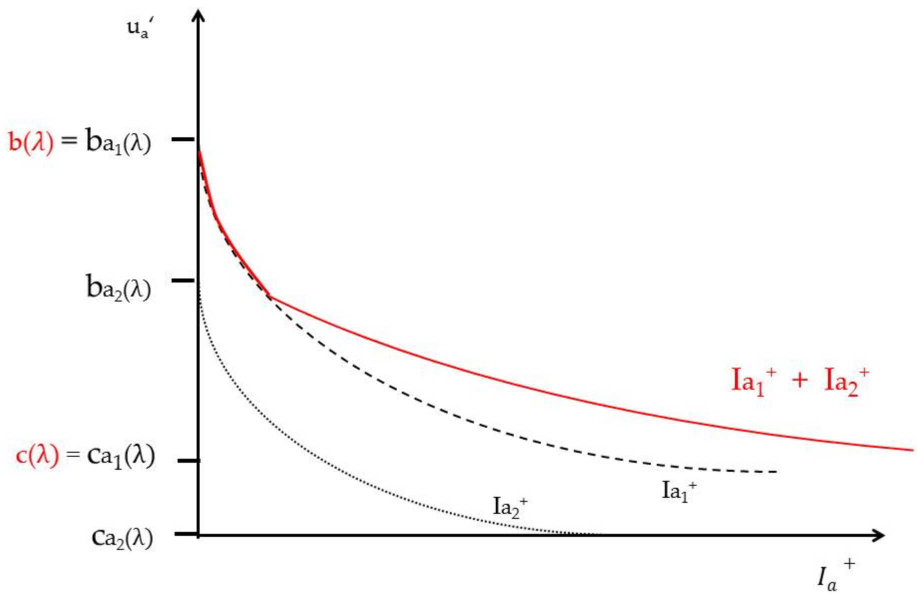


Abbildung 9: Summierte Umkehrfunktion für den Fall, dass es zwei Marktteilnehmer gibt.

$$b(\lambda) := \max_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \lim_{x \downarrow 0} u_a'(x) \leq \infty \qquad \text{und} \qquad c(\lambda) = \max_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a \lim_{x \uparrow \infty} u_a'(x) \geq 0$$

Somit ergibt sich:

$$f(\lambda, y) := \begin{cases} 0 & y \geq b(\lambda) \\ \sum_{a \in \mathcal{A}} (u_a')^{-1}(\lambda_a^{-1}y) & y \in (c(\lambda), b(\lambda)) \\ \infty & y \leq c(\lambda). \end{cases}$$

Aus dem bijektiven Verlauf der Funktion $f(\lambda, \cdot)$ auf der Menge $(c(\lambda), b(\lambda))$ folgt, dass für jedes w$\in (0, \infty)$ genau eine eindeutige Lösung $y^\lambda \in (c(\lambda), b(\lambda))$ existiert mit

$$f(\lambda, y^\lambda) = \mathrm{w}$$

Wir wollen zeigen, dass die Lösung y^λ stetig von $\lambda \in \Lambda$ abhängt. Hierzu wählen wir eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ mit Grenzwert $\lambda \in \Lambda$. Außerdem wählen wir eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$, sodass für die Folge der Lösungen $(y^{\lambda_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $f(\lambda_{n_k}, y) = \mathrm{w}$ gilt, dass diese für $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ gegen y_∞ konvergiert, wobei y_∞ aus dem Intervall $[c(\lambda), b(\lambda)]$ kommt. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f, dass

$$\lim_{k\uparrow\infty} f(\lambda_{n_k}, y^{\lambda_{n_k}}) = f(\lambda, y_\infty) = \mathrm{w}.$$

ist. Da die Lösung y_∞ auf Grund der Bijektivität von $f(\lambda, \cdot)$ eindeutig ist, stimmen y^λ und y_∞ überein. Damit haben wir gezeigt, dass y^λ stetig von $\lambda \in \Lambda$ abhängt.

Wir wissen nun also, dass wir für jedes w$\in (0, \infty)$ ein eindeutiges y^λ finden können, welches die Gleichung $f(\lambda, y^\lambda) = \mathrm{w}$ löst. Zudem ist dieses y^λ stetig abhängig von λ. Das bedeutet, dass die Folgerung

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad y^{\lambda_n} \longrightarrow y^\lambda$$

gilt. Dieses Resultat nutzen wir nun um zu zeigen, dass

$$X_a^{\lambda_n} \longrightarrow X_a^\lambda \quad \text{und} \quad \varphi^{\lambda_n} \longrightarrow \varphi^\lambda \qquad \text{P-f.s. gilt für } \lambda_n \longrightarrow \lambda$$

Aus Satz 3.4 wissen wir, dass die optimale Auszahlung für jeden Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ von der Form

$$X_a^\lambda = \min\{I_a^+(\lambda_a^{-1}\varphi^\lambda), W\}$$

ist. Also können wir schreiben

$$W = \sum_{a\in\mathcal{A}} X_a^\lambda = \sum_{a\in\mathcal{A}} I_a^+(\lambda_a^{-1}\varphi^\lambda) = f(\lambda, \varphi^\lambda) \quad P - f.s..$$

Ersetzen wir in unseren vorherigen Überlegungen w durch W und y^λ durch φ^λ, so erhalten wir, dass φ^{λ_n} P-f.s gegen φ^λ konvergiert für $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Zudem liefert uns die Form der optimalen Auszahlung und die Konvergenz der Preisdichte, dass

$$X_a^{\lambda_n} = I_a^+(\lambda_{a_n}^{-1}\varphi^{\lambda_n}) \longrightarrow I_a^+(\lambda_a^{-1}\varphi^\lambda) = X_a^\lambda \quad P - f.s.$$

konvergiert für $\lambda_n \longrightarrow \lambda$.

- Für die Stetigkeit unserer Funktion g müssen wir zeigen, dass für alle Marktteilnehmer $a \in \mathcal{A}$ und für jede konvergente Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert λ

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n_a} + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}[\varphi^{\lambda_n}(W_a - X_a^{\lambda_n})] = \lambda_a + \frac{1}{\mathbb{E}[V]}\mathbb{E}[\varphi^{\lambda}(W_a - X_a^{\lambda})]$$

gilt . Da λ_{n_a} für jeden Marktteilnehmer gegen λ_a konvergiert, reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi^{\lambda_n}(W_a - X_a^{\lambda_n})] = \mathbb{E}[\varphi^{\lambda_n}(W_a - X_a^{\lambda_n})]$$

für alle Marktteilnehmer gilt. Hierzu müssen wir mit Hilfe der majorisierten Konvergenz zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi^{\lambda_n} W_a] &\longrightarrow \mathbb{E}[\varphi^{\lambda} W_a] \qquad \text{und} &(41)\\ \mathbb{E}[\varphi^{\lambda_n} X_a^{\lambda_n}] &\longrightarrow \mathbb{E}[\varphi^{\lambda} X_a^{\lambda}] &(42)\end{aligned}$$

gilt. Da in beiden Fällen die Folge von Funktionen $(\varphi^{\lambda_n} W_a)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi^{\lambda_n} X_a^{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils aus Zufallsvariablen bestehen, sind sie messbar. Außerdem ist nach dem vorherigen Überlegungen der Grenzwert bekannt. Für die Anwendung der majorisierten Konvergenz müssen wir nur noch eine jeweilige Majorante finden. Also integrierbare Funktionen $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\varphi^{\lambda_n} W_a| \leq f_1 \quad \text{und} \quad |\varphi^{\lambda_n} X_a^{\lambda}| \leq f_2 \qquad P - f.s.$$

Es reicht, wenn wir eine gemeinsame Majorante f finden, für die gilt: $f := \max(f_1, f_2)$. Hierzu betrachten wir

$$F := \max_{a\in\mathcal{A}} u_a' \left(\frac{W}{|\mathcal{A}|}\right) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \tag{43}$$

Nach der zweiten Bedingung für die Existenz eines Arrow-Debreu-Gleichgewichtes aus Theorem 5.1 können wir annehmen, dass der Erwartungswert von F endlich ist. Insbesondere ist dann die Zufallsvariable F ein Element aus dem Fakorraum L^1.

Behauptung: $F \geq \varphi^{\lambda} \quad \forall \lambda \in \Lambda$

Da unsere Nutzenfunktion konvex ist, ist die Umkehrfunktion I_a^+ monoton fallend. Zudem wissen, dass unser unsere Auszahlung einer λ-effizienten Allokation von der Form $X_a^{\lambda} = I_a^+(\varphi^{\lambda}\lambda_a^{-1})$ ist . Also gilt für alle $\lambda \in \Lambda$

$$\begin{aligned} W &= \sum_{a\in\mathcal{A}} X_a^{\lambda} \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}} I_a^+(\varphi^{\lambda}\lambda_a^{-1}) \\ &\leq \sum_{a\in\mathcal{A}} I_a^+(\varphi^{\lambda}) \qquad \text{(da } \lambda_a \in [0,1]) \\ &\leq |\mathcal{A}| \max_{a\in\mathcal{A}} I_a^+(\varphi^{\lambda}). \end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung können wir folgern, dass die folgende Abschätzung

$$\left(\frac{W}{|\mathcal{A}|}\right) \leq \max_{a \in \mathcal{A}} I_a^+(\varphi^\lambda)$$

stimmt. Dies und der streng monoton fallende Verlauf der Grenznutzenfunktion führt dann zur Ungleichung

$$\begin{aligned} F := \max_{a \in \mathcal{A}} u_a' \left(\frac{W}{|\mathcal{A}|}\right) &\geq \max_{a \in \mathcal{A}} u_a'(\max_{b \in \mathcal{A}} I_b^+(\varphi^\lambda)) \\ &= \max_{a \in \mathcal{A}} u_a'(I_{a_0}^+(\varphi^\lambda)) \qquad \text{mit} \qquad I_{a_0}^+(\varphi^\lambda) = \max_{b \in \mathcal{A}} I_b^+(\varphi^\lambda) \\ &\geq u_{a_0}'(I_{a_0}^+(\varphi^\lambda)) \\ &= \varphi^\lambda \qquad\qquad \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Nun können wir die Abschätzung $F \geq \varphi^\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$ nutzen, um eine gemeinsame Majorante für die Folgen $(\varphi^{\lambda_n} W_a)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\varphi^{\lambda_n} X_a^{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden. Es gilt:

$$|\varphi^{\lambda_n} W_a| = \varphi^{\lambda_n} W_a \leq \varphi^{\lambda_n} W \leq FW =: f \qquad P-f.s \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analoges gilt für die zweite Funktionenfolge

$$|\varphi^{\lambda_n} X_a^{\lambda_n}| = \varphi^{\lambda_n} X_a^{\lambda_n} \leq \varphi^{\lambda_n} W \leq FW =: f \qquad P-f.s. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Eine gemeinsame Majorante ist also die Funktion FW. Die Bedingung, dass diese Majorante eine integrierbare Funktion ist, ist erfüllt, da sowohl F als auch W Elemente unseres Faktorraums L^1 sind. Damit sind alle Voraussetzungen für die majorisierte Konvergenz gezeigt und wir haben (41), (42) bewiesen. Somit ist die Stetigkeit von unserer Funktion g gezeigt, denn für jede Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Λ, die gegen $\lambda \in \Lambda$ konvergiert, konvergiert auch $g(\lambda_n)$ gegen $g(\lambda)$ und dies gilt für alle $\lambda \in \Lambda$.

□

Nun haben wir alle Voraussetzungen für den Brouwerschen Fixpunktsatz erfüllt. Der Brouwersche Fixpunktsatz liefert uns einen Gewichtungsvektor. Lemma 5.6 liefert uns dann zu diesem Gewichtungsvektor mit $g(\lambda) = \lambda$ eine eindeutige Preisdichte φ^λ und auch eine λ-effiziente Allokation $(X_a^\lambda)_{a \in \mathcal{A}}$, die insbesondere zulässig ist. Nach der Aussage vom dritten Teil des Lemmas maximiert jede Auszahlung X_a^λ einer λ-effizienten Allokation den zu erwarteten Nutzen und den Marktwert über alle $B_a^{\varphi^\lambda} \subset \mathcal{X}$. Für unser Arrow-Debreu-Gleichgewicht muss jeder Marktteilnehmer sein Nutzenmaximierungsproblem bezüglich der Preisdichte φ^λ mit der Auszahlung X_a^λ lösen können. Was uns hierzu noch fehlt, ist, dass die Budgetrestriktion (35) erfüllt ist.

Aber dies ist für jeden Gewichtungsvektor, der ein Fixpunkt der Funktion g ist, erfüllt. Somit bilden die Allokation $(X_a^\lambda)_{a\in\mathcal{A}}$ und die Preisdichte φ^λ unser Arrow-Debreu-Gleichgwicht und wir haben das Theorem 5.1 über die Existenz eines Gleichgewichtes unter den angegebenden Voraussetzungen gezeigt.

6 Fazit

Wir sind am Ende unseres Modellierungsprozesses angelangt: der Interpretation unserer Ergebnisse in Hinsicht auf die reale Situation. Das Phänomen, dass sich ein Allgemeines Gleichgewicht auf den Märkten scheinbar von alleine einstellt, haben wir mit Hilfe des Modellierungsprozesses nun bewiesen. Hierbei mussten wir jedoch eine Reihe von Annahmen treffen.
Diese starke Vereinfachung der komplexen Wirklichkeit hat zur Folge, dass wir unsere Resultate nicht eins zu eins in die Realität übertragen können. Doch ist es uns möglich einen Zugang zum Verständnis der wechselseitigen Beziehungen in der Volkswirtschaft zu bekommen.
Wir haben durch den Modellierungsprozess einen Weg gefunden, die Existenz des Allgemeinen Gleichgewichtes zu beweisen und wir haben ein Gefühl dafür erhalten, wie Preise auf dem Markt entstehen.

> *Damit war ein entscheidender Schritt getan: Zum ersten Mal war bewiesen worden, dass das Problem der Allokation knapper Ressourcen durch den Marktmechanismus lösbar ist. Die Allokation dem Markt anzuvertrauen heißt also nicht, sie dem Chaos zu überlassen, wie bis in die Gegenwart hinein vielfach behauptet worden ist.[...] Durch diese Entdeckung wurde die Vermutung Adam Smiths, dass die Verfolgung des Selbstinteresses unter Wettbewerbsbedingungen - wie von einer unsichtbaren Hand geleitet - dem Allgemeinwohl dient, auf eine feste Grundlage gestellt.*[8]

[8]Zitat vom deutschen Ökonom Manfred Johan Michael Neumann (*1940).

7 Quellenverzeichnis

Hans Föllmer, Alexander Schied, Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time, de Gruyter, 2nd Edition

Breyer, Mikroökonomie Eine Einführung, Springer, 4. Auflage

Walter Alt, Nichtlineare Optimierung, Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendung, vieweg, 1. Auflage

Claus Peter Ortlieb, Skript, Methodische Probleme und methodische Fehler der mathematischen Modellierung in der Volkswirtschaft

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Münster, den 27. Juni 2012 Veronika Beier