Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung von Transaktionskosten

Andre Christopher Kirsch

17. September 2013

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich Mathematik und Informatik

Erstgutachter:
PD Dr. Volkert Paulsen

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Matthias Löwe

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Diese Bachelorarbeit befasst sich mit dem Lösen von finanzmathematischen Optimierungsproblemen unter Berücksichtigung von Transaktionskosten (TAK) in diskreter Zeit.
Das Endvermögen eines individuellen Investors mit gegebenem Startvermögen soll über einen beschränkten Zeithorizont durch optimales Handeln am Aktienmarkt maximiert werden, wobei durch das Handeln von Wertpapieren TAK anfallen. Auf Grundlage von Markovscher Entscheidungstheorie soll die Existenz optimaler Strategien für unterschiedliche Arten von TAK bewiesen und -sofern möglich- deren Form gezeigt werden. „Optimal“ bezieht sich in dem Sinne auf die Berücksichtigung von stochastischen Aktienwertprozessen.

Das erste Kapitel soll eine kurze Einführung in die Grundlagen Markovscher Entscheidungstheorie geben. Dabei wird das Markovsche Entscheidungsmodell definiert und die Bedeutung der einzelnen Daten besprochen. Notwendige formelle Begriffe wie der des *Maximierers* werden definiert, sodass Techniken zur Lösung von Optimierungsproblemen durch Markovsche Entscheidungstheorie vorgestellt werden können. Dabei wird der Anwendungsbezug zu finanzmathematischen Problemen veranschaulicht.
Sämtliche Definitionen und Sätze dieses Kapitels stützen sich ausschließlich auf [1].

Im folgenden Kapitel wird der Einfluss von proportionalen TAK auf das Problem der Vermögensmaximierung untersucht. Es wird ein -dem Sachverhalt entsprechendes- Modell entworfen auf dessen Grundlage Formeln für optimale Strategien gegeben und bewiesen werden können. Die Erkenntnisse werden anschließend auf das einstufige Binomialmodell angewendet, in dem eine Aktie nur 2 unterschiedliche Werte annehmen kann. Als Basis dient dabei mein Seminarvortrag über „Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung von Transaktionskosten“ in der mathematischen Statistik an der Westfälischen Wilhelms-Universität vom 17.06.2013. Vergleiche dazu [1, S.106-116].
Auf den Ergebnissen aufbauend wird das Trinomialmodell kurz erörtert. Es soll insbesondere zur Veranschulichung dienen, wie sehr sich das Modell unter zunehmender Komplexität verkompliziert.

Kapitel 3 stellt ein Modell mit kombinierten Formen von TAK vor. Dazu zählen Kombinationen aus *fixen, konstanten* und eben *proportionalen* Kosten. Eine Lösung des Maximierungsproblems kann dann nur mit Hilfe eines erweiterten Modells gewährleistet werden, wozu die herkömmlichen Techniken aus [1] bzw. Kapitel 2 nicht ausreichen.
Letztlich wird die Existenz optimaler Strategien bewiesen, allerdings werden Formeln zur Berechnung nur im Anwendungsbeispiel gegeben werden können. Die Ausarbeitung beruht auf [2].
Analog zu der Vorgehensweise werden im Anschluss die Erkenntsnisse auf das Trinomialmodell übertragen und es wird ein Beispiel besprochen in dem explizite Werte in Abhängigkeit des Planungshorizonts berechnet werden können.

1 Grundlagen über Markovsche Entscheidungsprozesse

Wir beginnen an dieser Stelle mit einer kurzen Einführung in die angewandte Theorie der Markovschen Entscheidungsprozesse und erörtern Lösungstechniken für Optimierungsprobleme im Bezug auf finanzmathematische Modelle.
Angenommen wir haben ein System gegeben, das über N Perioden läuft; in jeder Periode tritt ein gewisser Zustand ein auf den nun jeweils Einfluss genommen werden kann. Dem Einflussnehmer stehen dabei eine gewisse Anzahl von Aktionen zur Verfügung. Die Menge der möglichen Aktionen ist dabei durch äußere Begebenheiten begrenzt. Generell wird angenommen, dass jede Aktion einen gewissen Ertrag liefert, ebenso wie der letzte Zustand z.Zt. N.
Das Optimierungsproblem besteht in der Maximierung der erwarteten Gesamterträge. Kurz gesagt: Das System befindet sich in einem Zustand, der Einflussnehmer (Investor) realisiert welche Aktionen ihm zur Verfügung stehen und wählt davon die optimale im Hinblick auf Ertragsmaximierung aus.
Ist für einen Zustand eine Aktion ausgewählt, also eine Entscheidung getroffen, so tritt in der nächsten Periode ein Folgezustand ein; die Zustandsänderung ist dabei (in Abhängigkeit der Aktion) zufällig, d.h. sie wird durch stochastische Größen beeinflusst.
Andererseits erfüllt der Zustandsprozess die Markoveigenschaft, d.h. zukünftige Zustände sind unabhängig von Vergangenen. Diesen Sachverhalt beschreiben wir durch ein Markovsches Entscheidungsmodell.

Definition 1.1:
Für einen Planungshorizont $N > 0$ besteht ein Markovsches Entscheidungsmodell (MEM) aus der Datenmenge $(E, A, D_n, \mathcal{Z}, T_n, Q_n^{\mathcal{Z}}, r_n, g_N)$, $n = 0, \ldots, N-1$ mit folgender Bedeutung:

- E ist der Zustandsraum, versehen mit der $\sigma-$Algebra $\mathfrak{E}$, mit den Elementen $x \in E$, die als Zustände bezeichnet werden.
- A ist der Aktionsraum, versehen mit der $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$, mit den Elementen $a \in A$, die als Aktionen bezeichnet werden.
- D_n ist eine messbare Teilmenge von $E \times A$ und bezeichnet die Menge der möglichen Zustand-Aktion-Kombinationen z.Zt. n.
  D_n soll die Abbildung einer messbaren Funktion $f_n : E \to A$ enthalten, d.h. für alle $x \in E$ gilt: $(x, f_n(x)) \in D_n$ (diese Eigenschaft ist im weiteren Verlauf wichtig für die Existenz von Maximierern).
  Mit $D_n(x) := \{a \in A | \ (x, a) \in D_n\}$ bezeichnen wir die Menge der möglichen Aktionen für einen gegebenen Zustand x z.Zt. n.
- $\mathcal{Z}$ ist der Störraum, versehen mit der $\sigma-$Algebra $\mathfrak{Z}$, dessen Elemente z stochastische Einflussfaktoren auf die Veränderung der Zustände verkörpern.
- Q_n^z ist der stochastische Übergangskern für die Zustand-Aktion-Kombinationen, den wir lediglich rein formal brauchen.

- $T_n : D_n \times \mathcal{Z} \to E$ mit $T_n(x, a, z_{n+1}) = x_{n+1} =: x'$ heißt Übergangsfunktion, ist messbar und liefert den Folgezustand x' falls sich das System z.Zt. n im Zustand x befindet, Aktion a gewählt wird und Störgröße z_{n+1} eintritt.

- $r_n : D_n \to \mathbb{R}$ ist eine messbare Funktion und bescheibt den einstufigen (diskontierten) Ertrag des Systems z.Zt. n falls der aktuelle Zustand x ist und Aktion a gewählt wird.

- $g_N : E \to \mathbb{R}$ ist eine messbare Funktion und beschreibt den (diskontierten) End-Ertrag des Systems falls z.Zt. N der Zustand x eintritt.

Bemerkung:
In dieser Arbeit wird z ausschließlich mit der relativen Wertänderung $\tilde{R}$ einer Aktie identifiziert.

Definiton 1.2 (Entscheidungsregel):
Eine messbare Abbildung $f_n : E \to A$ mit $f_n(x) \in D_n(x)\ \forall x$ heißt Entscheidungsregel z.Zt. n. F_n sei die Menge aller Entscheidungsregeln z.Zt. n.
Eine Folge von Entscheidungsregeln $S = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ mit $f_n \in F_n$ heißt $N-$stufige Strategie.
Ein Zustandsprozess $(x_n)_n$ der durch S bestimmt wird, wird durch $(x_n^S)_n$ gekennzeichnet.

Eine Entscheidungsregel entspricht also einer Art Richtlinie, die dem Investor für einen Zustand sagt, welche Aktion auszuwählen ist. Wollen wir also optimale Aktionen auswählen, müssen wir optimale Entscheidungsregeln finden und definieren.

Definition 1.3 (Nutzenfunktion):
Eine Funktion $U : dom(U) \to \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion, falls U streng monoton steigend, strikt konkav und stetig auf $dom(U)$ ist.

Die individuellen Erträge eines Investors werden im finanzmathematischen Anwendungsbereich durch eine Nutzenfunktion U verkörpert. Siehe dazu [5]. Dabei ist es das Ziel, den erwarteten Nutzen des Endvermögens des Investors zu maximieren- das
Terminal Wealth Problem. Dementsprechend spielen die einstufigen Erträge in unserem Modell keine Rolle, sodass

$$r_n(x, a) \equiv 0 \text{ und } g_N(x) = U(x) \text{ gilt.}$$

Wir führen eine Integrierbarkeitsannahme ein, die garantiert, dass alle auftretenden Erwartungswerte wohldefiniert sind:

$$\sup_S \mathbb{E}_{n,x}^S[g_N^+(x_N)] < \infty,\ x \in E.$$

Diese Annahme ist automatisch erfüllt, falls das MEM eine
obere Grenzfunktion besitzt.

Definition 1.4 (obere Grenzfunktion):
Eine messbare Funktion $b : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heißt obere Grenzfunktion für das MEM, falls Konstanten $c_r, c_g, \alpha_b \in \mathbb{R}_+$ existieren, sodass für alle $n = 0, 1, ..., N-1$ gilt:

(i) $r_n^+(x,a) \leq c_r b(x)$ für alle $(x,a) \in D_n$.

(ii) $g_N^+(x) \leq c_g b(x)$ für alle $x \in E$.

(iii) $\int b(x')Q_n^z(dx'|x,a) \leq \alpha_b b(x)$ für alle $(x,a) \in D_n$.

Definition 1.5 (Wertefunktion):
Für $n = 0, \ldots, N$ und eine Strategie $S = (f_0, \ldots, f_{N-1})$ beschreibt $V_{n,S}(x)$ definiert durch

$$V_{n,S}(x) := \mathbb{E}_{n,x}^S[g_N(x_N)], \; x \in E$$

den erwarteten Nutzen des Endvermögens, falls x der aktuelle Zustand z.Zt. n ist und die Strategie S verwendet wird. Die Funktion

$$V_n(x) := \sup_S V_{n,S}(x), \; x \in E$$

heißt Wertefunktion. Beachte dass $V_n(x) < \infty$ für alle $x \in E, n \in \{0, \ldots, N\}$.

Bemerkung:
Wir betrachten die Wertefunktionen zur Lösung des Optimierungsproblems, da $V_0(x)$ gerade das *Terminal Wealth Problem* verkörpert.
Eine Strategie S ist demnach optimal für das N-stufige MEM, falls

$$V_0(x) = \mathbb{E}_x[g_N(x_N^S)] \text{ für alle } x \in E.$$

Obwohl es uns eigentlich genügt $V_0(x)$ zu betrachten, müssen wir bei der Berechnung ebenso alle $V_n(x)$ betrachten, um optimale Lösungen zu finden, da schließlich jede Aktion Auswirkungen auf den erwarteten Endnutzen hat. Dieser Vorgang wird unten in Definition 1.10 näher erklärt.

Definition 1.6:
Seien $v \in M(E) := \{v : \; E \longrightarrow [-\infty, \infty) | \; v \textit{ ist messbar}\}$, $f \in F_n$ und $(x,a) \in D_n$. Dann heißen

$$\mathcal{T}_{n,f}v(x) := \mathcal{L}_n v(x, f(x)) := \mathbb{E}[v(T_n(x, f(x), z_{n+1}))]$$

Ertragsoperator von f und

$$\mathcal{T}_n v(x) := \sup_{a \in D_n(x)} \mathcal{L}_n v(x,a) := \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}[v(T_n(x,a,z_{n+1}))]$$

maximaler Ertragsoperator z.Zt. n.

Diese Operatoren stellen ein wichtiges Hilfsmittel bei der Beweisführung der Existenz optimaler Strategien dar.

Um die erwarteten Nutzen einer festen Strategie $S \in F_0 \times \cdots \times F_{N-1}$ berechnen zu können, benötigen wir folgende Eigenschaft:

Theorem 1.7 (Ertragsiteration):
Sei S eine N-stufige Strategie. Für $n = 0, \ldots, N-1$ gilt:

(i) $V_{N,S} = g_N$ und $\mathcal{T}_{n,f_n} V_{n+1,S}$.

(ii) $V_{n,S} = \mathcal{T}_{n,f_n} \ldots \mathcal{T}_{N-1,f_{N-1}} g_N$.

Definition 1.8 (Maximierer):
Sei $v \in M(E)$. Eine Entscheidungsregel $f \in F_n$ heißt *Maximierer von v* z.Zt. n, falls $\mathcal{T}_{n,f} v = \mathcal{T}_n v$, d.h. für alle $x \in E,\ a \in D_n(x)$ ist $f(x)$ Maximalstelle der Funktion $a \longmapsto \mathcal{L}_n v(x,a)$.
In dem Sinne ist ein Maximierer eine Entscheidungsregel die im Hinblick auf Ertragsmaximierung eine optimale Aktion liefert.

Struktur-Annahme $(\boldsymbol{SA_N})$:
Es existieren Mengen $M_n \subset M(E)$ und $G_n \subset F_n$, sodass für alle $n = 0, 1, ..., N-1$ gilt:

(i) $g_N \in M_N$.

(ii) Falls $v \in M_{n+1},$ dann ist $\mathcal{T}_n v$ wohldefiniert und $\mathcal{T}_n v \in M_n$.

(iii) Für alle $v \in M_{n+1}$ existiert ein Maximierer f_n von v mit $f_n \in G_n$.

Theorem 1.9 (Struktur-Theorem):
Sei $(\boldsymbol{SA_N})$ erfüllt. Dann gilt:

(i) $V_n \in M_n$ und die Folge (V_n) erfüllt die *Bellman-Gleichung*,
d.h. für $n = 0, \ldots, N-1$ und $x \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} V_N(x) &= g_N(x) \\ V_n(x) &= \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}[V_{n+1}(T_n(x,a,z_{n+1}))]. \end{aligned}$$

(ii) $V_n = \mathcal{T}_n \mathcal{T}_{n+1} \ldots \mathcal{T}_{N-1} g_N$.

(iii) Für $n = 0, \ldots, N-1$ existieren Maximierer f_n von V_{n+1} mit $f_n \in G_n$ und jede Folge von Maximierern f_n^* von V_{n+1} definiert eine optimale Strategie $(f_0^*, \ldots, f_{N-1}^*)$ für das N-stufige Entscheidungsproblem.

Das Struktur-Theorem ist bei Existenz-Beweisen optimaler Strategien von zentraler Bedeutung; es wird in der Regel versucht zu zeigen, dass die Struktur-Annahme in dem gegebenen MEM erfüllt ist.

Der Satz impliziert außerdem folgenden rekursiven Algorithmus, um Markovsche Entscheidungsprobleme zu lösen:

Definition 1.10 (*Backward Induction Algorithmus*):

1. Setze $n := N$ und für $x \in E: \ V_N(x) := g_N(x)$.
2. Setze $n := n - 1$ und berechne für alle $x \in E$:

$$V_n(x) = \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}[V_{n+1}(T_n(x, a, z_{n+1}))].$$

   Berechne einen Maximierer f_n^* von V_{n+1}.

3. Falls $n = 0$, ist der maximale erwartete Ertrag V_0 berechnet und die optimale Strategie S^* ist gegeben durch $S^* = (f_0^*, \ldots, f_{N-1}^*)$.
   Falls $n > 0$, gehe zu Schritt 2.

Normalerweise lassen sich optimale Aktionen und Strategien in den meisten Modellen nur sehr schwer explizit berechnen; gerade in diskreten Zustands- und Aktionsräumen ist dies jedoch möglich. Dazu benutzt man diesen Algorithmus:
Zuerst wird ein Maximierer für den letzten Zeitschritt gesucht, weil dieser keine Auswirkungen mehr auf Folgeentscheidungen hat, da diese nicht existieren. Daraufhin geht man Schritt für Schritt rückwärts, sodass man letztlich z.Zt. $n = 0$ weiß, welche Aktion erwartungsgemäß optimalen Einfluss auf den Endnutzen hat.

2 Proportionale Transaktionskosten

Wir möchten hier mit der Anwendung Markovscher Entscheidungstheorie für finanzmathematische Optimierungsprobleme beginnen; genauer gesagt untersuchen wir den Einfluss von proportionalen TAK auf den Entscheidungsprozess eines Investors.
Wir beschränken uns bei dem Portfolio des Investors auf eine risikolose Anlage -den Bond- und eine risikobehaftete Aktie -den Stock. Der Investor verfügt zu Beginn ($n = 0$) über ein gewisses Startvermögen $x > 0$, das er vollständig zu beliebigen Teilen in seinem Portfolio angelegt hat.
Seine Absicht ist es, einen größtmöglichen individuellen Endnutzen aus seinem Vermögen nach N Perioden zu ziehen. Zu diesem Zweck steht eine Gewinnmaximierung seines eingesetzten Kapitals im Vordergrund, das bedeutet er handelt mit seinen Anlagen. Spekuliert er beispielsweise auf Wertzuwächse seiner Aktie, so zieht er Anteile aus dem Bond um sie in Stockanteile zu reinvestieren; oder aber er verfolgt die sichere Strategie und investiert sein Vermögen in den Bond, welcher mit festem Zins bzw. um eine feste Rate r steigt.
Sowohl ein Kauf als auch ein Verkauf von Aktienanteilen verursacht jedoch proportionale TAK, d.h. falls eine Menge b an Geld in den Stock investiert (positives b) bzw. verkauft (negatives b) wird, fallen TAK in Höhe von $\gamma|b|$ mit $0 \leq \gamma < 1$ an, die aus dem Bond finanziert werden. So entsteht die Frage ob sich ein Handeln überhaupt lohnt oder spezifischer ausgedrückt: Zu welchen Bedingungen ist ein Handeln sinnvoll und wie sieht es optimalerweise aus?
Mit der Beantwortung dieser Frage beschäftigt sich dieses Kapitel. So ist es das Ziel unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz und Form optimaler Strategien zu beweisen. Dazu definieren wir ein MEM, das dem Sachverhalt entspricht.

2.1 Das Markovsche Entscheidungsmodell

Wir arbeiten mit einem Bond und einem Stock, daher betrachten wir einen 2-dimensionalen Zustandsraum. Des Weiteren soll der Investor zu keinem Zeitpunkt Schulden haben dürfen, so dass $x_0, x_1 > 0$ gilt. Also $E := \mathbb{R}_+^2$ mit $x = (x_0, x_1) \in E$, wobei x_0 und x_1 die **Mengen an Geld** beschreiben die in Bond und Stock gehalten werden.
Der Aktionsraum ist gegeben durch $A := \mathbb{R}_+^2 \ni (a_0, a_1)$, wobei a_0 und a_1
die **Mengen an Geld nach Handeln und Abzug von TAK** in Bond und Stock darstellen. Wir sehen, dass $a_0, a_1 > 0$ gilt; das bedeutet es sind keine Leerverkäufe, sogenannte *short-sellings* erlaubt.

Daraus ergibt sich die Menge der möglichen Aktionen für einen gegebenen Zustand $x = (x_0, x_1)$:

$$D(x_0, x_1) = \{(a_0, a_1) \in A| \; a_0 + a_1 \leq x_0 + x_1 - \gamma|a_1 - x_1|\} \tag{2.1}$$

In Worten: Die Menge der Bond- und Stock-Holdings nach Handeln darf nicht größer sein, als die Menge der bisherigen Holdings abzüglich der durch das Handeln bedingten TAK.

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt werden die unabhängigen Störungen (z_n) im Modell durch die relativen Preisänderungen des Stock $(\tilde{R}_n)$ beschrieben; d.h. bei z.B. einem Verlust von 10 Prozent im Zeitschritt von $n-1$ nach n ist $\tilde{R}_n = 0.9$.
Damit ist die Übergangsfunktion zur Zeit n gegeben durch:

$$T_n(x,(a_0,a_1),z_{n+1}) := (a_0 r, a_1 z_{n+1})$$

Sie gibt den neuen Zustand (x_0', x_1') z.Zt. $n+1$ mit $x_0' = a_0 r$ und $x_1' = a_1 z_{n+1}$ an.

Zusammengefasst besteht unser MEM also aus:

- Zustandsraum: $E = \mathbb{R}_+^2$.
- Aktionsraum: $A = \mathbb{R}_+^2$.
- Menge der möglichen Aktionen:

$$D(x_0,x_1) = \{(a_0,a_1) \in A \mid a_0 + a_1 \le x_0 + x_1 - \gamma|a_1 - x_1|\}.$$

- Störungsraum: $\mathcal{Z} = \mathbb{R}_+$ wobei $z_n \in \mathcal{Z}$ die relative Preisänderung des Stocks beschreibt, also $z_n = \tilde{R}_n$.
- Übergangsfunktion: $T_n(x,(a_0,a_1),z_{n+1}) := (a_0 r, a_1 z_{n+1})$.
- Übergangskern: $Q_n^z(\cdot|x,a_0,a_1) =$ Verteilung von $\tilde{R}_{n+1}$ (unabhängig von (x,a_0,a_1)).
- Einstufiger Ertrag: $r_n \equiv 0$.
- Endertrag: $g_N = U(x_0 + x_1)$ mit $dom(U) := [0,\infty),\ x \in E$.

Damit erhalten wir das folgende *Terminal Wealth Problem:*

$$\sup_S \mathbb{E}_x^S[U(x_N^0 + x_N^1)],$$

wobei die TAK in S durch $D(x_0,x_1)$ berücksichtigt werden.

2.2 Existenz optimaler Strategien

Im Folgenden arbeiten wir auf den Beweis der Struktur-Annahme $(\boldsymbol{SA_N})$ hin, wodurch uns schließlich durch das Struktur-Theorem die Existenz einer optimalen Lösung des Problems und optimaler Strategien gewährleistet wird (vgl. Kapitel 1).

Zunächst machen wir folgende Annahmen an den Finanzmarkt $\boldsymbol{(FM)}$:

(i) Die Nutzenfunktion U ist homogen vom Grad δ,
d.h. $U(\lambda x) = \lambda^\delta U(x) \ \forall \lambda > 0,\ x \geq 0$
bzw. $U(\lambda x_0, \lambda x_1) = \lambda^\delta U(x_0, x_1) \forall \lambda > 0,\ x_0, x_1 \geq 0.$

(ii) $\mathbb{E}[||z_n||] < \infty \ \forall n = 0, ..., N.$

Proposition 2.1:
Die Funktion $b(x) := 1 + x_0 + x_1,\ x \in E$ ist eine *obere Grenzfunktion* für das oben beschriebene MEM.

Beweis: Wir prüfen die Definiton:

(i) $\exists c_r \geq 0$ sodass $r_n^+(x, a) \equiv 0 \leq c_r b(x).$

(ii) Da sich U als konkave Funktion durch eine affin-lineare Funktion von oben beschränken lässt, ex. $c_g \geq 0$ sodass $\forall x \in E$:
$g_N^+(x) = U^+(x_0 + x_1) \leq c_g b(x).$

(iii) $\forall (a_0, a_1) \in D(x), x \in E\ \exists \alpha_b \geq 0$ sodass gilt:

$$\begin{aligned}\int b(x') Q_n^z(dx'|x, a) &= \mathbb{E}[b(a_0 r, a_1 z_{n+1})] \\ &= 1 + a_0(1 + i_{n+1}) + a_1 \mathbb{E}[z_{n+1}] \\ &\leq \alpha_b b(x).\end{aligned}$$

□

Beobachtung 2.2:
Betrachte die Mengen:

$$\begin{aligned} M(E) &:= \{v : E \longrightarrow [-\infty, \infty) |\ v \text{ ist messbar}\}. \\ \mathbb{B}_b &:= \{v \in M(E) |\ \exists c \in \mathbb{R}_+,\ \text{sodass}\ \forall x \in E : |v(x)| \leq cb(x)\}. \\ \mathbb{M} &:= \left\{v \in \mathbb{B}_b^+ |\ v \text{ steigt in jeder Komponente},\ \text{konkav},\ \text{homogen vom Grad}\ \delta\right\}. \end{aligned}$$

Dann ist für $v \in \mathbb{M}$ der *maximale Ertragsoperator* z.Zt. n gegeben durch:

$$\mathcal{T}_n v(x) := \sup_{(a_0, a_1) \in D(x)} \mathbb{E}[v(a_0 r, a_1 z_{n+1})]. \tag{2.2}$$

Da v in beiden Komponenten steigend ist, wird das Supremum in der oberen Grenze von $D(x)$ angenommen. Diese lässt sich wie folgt beschreiben:

Fall 1 (verkaufen): $0 \leq a_1 \leq x_1 \quad \Longrightarrow h(x, a_1) := x_0 + (x_1 - a_1) - \gamma(x_1 - a_1) = x_0 + (1 - \gamma)(x_1 - a_1).$

Fall 2 (kaufen): $x_1 \leq a_1 \leq x_1 + \dfrac{x_0}{1 + \gamma} \quad \Longrightarrow h(x, a_1) := x_0 + (x_1 - a_1) + \gamma(x_1 - a_1) = x_0 + (1 + \gamma)(x_1 - a_1).$

Somit wird aus Formel (2.1):

$$D(x_0, x_1) = \left\{(a_0, a_1) \in A |\ a_1 \in\ [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}],\ a_0 \leq h(x, a_1)\right\}$$

und schließlich aus (2.2):

$$\mathcal{T}_n v(x) = \sup_{a_1 \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}]} \mathbb{E}[v(h(x, a_1)r, a_1 z_{n+1})]. \tag{2.3}$$

Der Maximierer $f_n(x) = (f_n^0, f_n^1)(x)$ dieses Problems ist also gegeben durch $f_n^1(x) := a_1^*$ und $f_n^0(x) = a_0^* = h(x, a_1^*)$.

Beachte dass im Optimierungproblem a_0 durch die Wahl von a_1 bestimmt ist und durch die Funktion h ausgedrückt wird; daher vernachlässigen wir im Folgenden zur Vereinfachung den Index von a_1.

Theorem 2.3:
Für das *Terminal Wealth Problem* mit TAK gilt:

a) Die Wertefunktionen V_n sind konkav, steigend und homogen vom Grad δ und für $x = (x_0, x_1) \in E$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} V_N(x) &= U(x_0 + x_1) \\ \text{und für } n = 0, \ldots, N-1: \ V_n(x) &= \sup_{a \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}]} \mathbb{E}[V_{n+1}(h(x, a)r, a z_{n+1})]. \end{aligned}$$

b) Für einen Zustand $x \in E$ z.Zt. n ist die optimale Menge an Geld die in den Stock investiert werden sollte gegeben durch:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} \frac{x_0 + (1-\gamma)x_1}{1 + (1-\gamma)q_+(V_{n+1})} q_+(V_{n+1}) & \text{falls } \frac{x_1}{x_0} > q_+(V_{n+1}) \\ x_1 & \text{falls } q_-(V_{n+1}) \leq \frac{x_1}{x_0} \leq q_+(V_{n+1}) \\ \frac{x_0 + (1+\gamma)x_1}{1 + (1+\gamma)q_-(V_{n+1})} q_-(V_{n+1}) & \text{falls } \frac{x_1}{x_0} < q_-(V_{n+1}), \end{cases} \tag{2.4}$$

wobei

$$q_+(v) := \arg\max_{q \geq 0} \ \mathbb{E}[v(\frac{r}{1 + q(1-\gamma)}, \frac{q z_{n+1}}{1 + q(1-\gamma)})], \tag{2.5a}$$

$$q_-(v) := \arg\max_{q \geq 0} \ \mathbb{E}[v(\frac{r}{1 + q(1+\gamma)}, \frac{q z_{n+1}}{1 + q(1+\gamma)})]. \tag{2.5b}$$

Außerdem gilt im 1. Fall $f_n^*(x) < x_1$ und im 3. Fall $f_n^*(x) > x_1$.
Die optimale Menge an Geld die z.Zt. n in den Bond investiert werden sollte ist folglich $h(x, f_n^*(x))$.

Beweis:
Die Aussagen folgen unmittelbar aus dem *Struktur-Theorem*; d.h. wir müssen zeigen, dass die Struktur-Annahme erfüllt ist für $M_n := \mathbb{M}$ und $G_n := G \cap F_n$ wobei G alle messbaren Funktionen $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ von der Form (2.4) umfasst.
Wir überprüfen also die Definition:
Es gilt $g_N(x) = U(x_0 + x_1) \in \mathbb{M}$. Dies folgt direkt aus Proposition 2.1 und $\boldsymbol{(FM)}$.
Sei nun $v \in \mathbb{M}$. Für festes n definieren wir

$$\mathcal{L}(x,a) := \mathbb{E}[v(h(x,a)r, az_{n+1})] \text{ mit } a \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}], \text{ sodass}$$

$$\mathcal{T}_n v(x) = \sup_{a \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}]} \mathcal{L}(x,a) \text{ gilt.}$$

Beachte, dass $a \mapsto \mathcal{L}(x,a)$ konkav ist.
Zunächst zeigen wir die Existenz eines (größten) Maximierers $f^*(x)$ und dessen Form in 7 Einzelschritten:

1. *Beh:* Für $\lambda > 0,\ x \in E$ gilt $\lambda f^*(x) = f^*(\lambda x)$.
   Bew: Für $\lambda > 0$ folgt aufgrund der Homogenität von v und der stückweisen Linearität von h :

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{T}_n v(\lambda x) &= \sup_{a \in [0, \lambda x_1 + \frac{\lambda x_0}{1+\gamma}]} \mathcal{L}(\lambda x, a) \\
   &= \sup_{a \in [0, \lambda x_1 + \frac{\lambda x_0}{1+\gamma}]} \mathbb{E}[v(h(\lambda x, a)r, az_{n+1})] \\
   &= \lambda^\delta \sup_{\frac{a}{\lambda} \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}]} \mathbb{E}[v(h(x, \frac{a}{\lambda})r, \frac{a}{\lambda} z_{n+1})] \\
   &= \lambda^\delta \sup_{a' \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}]} \mathcal{L}(x, a') \text{ mit } a'\lambda = a.
   \end{aligned}$$

   Angenommen es ex. ein Maximierer $f^*(\lambda x) = a^*$, so folgt die Behauptung.

2. Betrachte den Zustand $x = (0,1)$, also eine Geldeinheit in Stock und keine in Bond. Dann ist

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{T}_n v(0,1) &= \sup_{a \in [0,1]} \mathbb{E}[v(h((0,1),a)r, az_{n+1})] \\
   &= \sup_{a \in [0,1]} \mathbb{E}[v((1-\gamma)(1-a)r, az_{n+1})].
   \end{aligned}$$

   Da eine konkave Funktion auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ maximiert wird, existiert das Maximum und wir definieren

   $$a_+ := f^*(0,1) = \operatorname*{arg\,max}_{a \in [0,1]} \ \mathbb{E}[v((1-\gamma)(1-a)r, az_{n+1})]. \tag{2.6a}$$

   Für das optimale Stock- zu Bond-Verhältnis für den Zustand $(0,1)$ nach Handeln und Abzug von TAK definieren wir demnach

   $$q_+ := \begin{cases} \frac{a_+}{h((0,1),a_+)} = \frac{a_+}{(1-\gamma)(1-a_+)} & \text{falls } a_+ < 1 \\ \infty & \text{falls } a_+ = 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Beachte dass aus (2.7) durch Umstellung folgt:

$$a_+ = \frac{(1-\gamma)q_+}{(1-\gamma)q_+ + 1} \text{ sowie } 1 - a_+ = \frac{1}{(1-\gamma)q_+ + 1}. \tag{2.6b}$$

Damit können wir das Problem in (2.6a) auch äuivalent formulieren m.H.v.

$$q_+ = \arg\max_{q \geq 0} \ \mathbb{E}[v(\frac{r}{1+q(1-\gamma)}, \frac{qz_{n+1}}{1+q(1-\gamma)})].$$

3. *Beh:* Für alle $x \in \ E$ mit $\frac{x_1}{x_0} > q_+$ gilt:

   $f^*(x) \overset{a)}{=} (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})a_+ \overset{b)}{=} \frac{x_0+(1-\gamma)x_1}{1+(1-\gamma)q_+}q_+ \overset{c)}{<} x_1$ und:

   $(h(x, f^*(x)), f^*(x)) \ \in \ L_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ | \ x_1/x_0 = q_+\right\},$

   d.h. falls das aktuelle Stock- zu Bond-Verhältnis größer als q_+ ist, sollten Stock-Anteile verkauft werden.

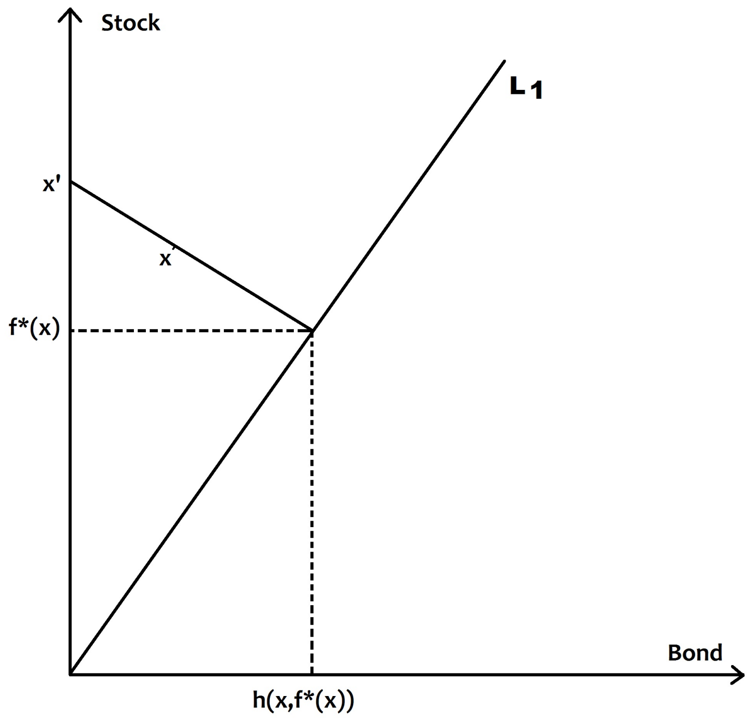

Abbildung 1: Konstruktion der optimalen Lösung.

Bew: Gleichung b) folgt unmittelbar aus (2.6b). Betrachte nun für einen Zustand $x \in E$ den Folgezustand $x' = (0, x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}) \in E$. Abbildung 1 zeigt die Idee der Konstruktion des Beweises.

Die in Schritt 1 gezeigte Gleichheit liefert uns mit $\lambda = x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}$:

$$f^*(x') = f^*((0,1)(x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})) = (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})f^*(0,1) = (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})a_+$$

und für alle $x \in E$ mit $\frac{x_1}{x_0} > q_+$ ($\Leftrightarrow q_+ x_0 < x_1$) gilt:

$$f^*(x') = (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})a_+ \overset{(1.7)}{=} x_1 a_+ + x_0(1-a_+)q_+ < x_1(a_+ + (1-a_+)) = x_1.$$

Für a) und c) zeigen wir nun dass $f^*(x') = f^*(x)$ gilt. Es ist

$$h(x',a) = h((0, x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}), a) \overset{a \in [0, x_1']}{=} x_0' + (1-\gamma)(x_1' - a) = x_0 + (1-\gamma)(x_1 - a).$$

Also gilt für beliebiges $x \in E$:

$$h(x',a) = h(x,a) \text{ für } a \in [0, x_1] \tag{$\star$}$$
$$\text{und } h(x',a) \geq h(x,a) \text{ für } a \in [x_1, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}],$$

$$\text{da } [x_1, x_1 + \frac{x_0}{1+\gamma}] \subseteq [x_1, x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}] = [x_1, x_1'] \subseteq [0, x_1'].$$

Bemerke dass $\mathcal{L}(x',a)$ sein Maximum für $a \in [0, x_1]$ annimmt, da

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n v(x') &\overset{(2.3)}{=} \sup_{a \in [0, x_1' + \frac{x_0'}{1+\gamma}]} \mathcal{L}(x',a) \\
&= \sup_{a \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}]} \mathcal{L}(x',a) \\
&= \sup_{a \in [0, x_1]} \mathcal{L}(x',a),
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung benutzt haben, dass $h(x',a)$ für $a \in [0, x_1]$ größer ist als für $a \in [0, x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}]$ und v steigend ist.

Aus ($\star$) folgt nun $f^*(x') = f^*(x) = (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})a_+$.

Letztlich erhält man durch Einsetzen: $(h(x, f^*(x)), f^*(x)) \in L_1$.

4. Betrachte den Zustand $x = (1,0)$, also keine Geldeinheit in Stock und eine in Bond. Dann kann nicht mehr verkauft werden, also gilt:

$$\mathcal{T}_n v(1,0) = \sup_{a \in [0, \frac{1}{1+\gamma}]} \mathbb{E}[v(1-(1+\gamma)ar, az_{n+1})].$$

Analog zu Schritt 2 existiert das Maximum und wir definieren:

$$a_- := f^*(1,0) = \underset{a \in [0, \frac{1}{1+\gamma}]}{\arg\max}\ \mathbb{E}[v(1-(1+\gamma)ar, az_{n+1})] \tag{2.8a}$$

$$\text{sowie } q_- := \begin{cases} \frac{a_-}{h((1,0),a_-)} = \frac{a_-}{1-(1+\gamma)a_-} & \text{falls } a_- < \frac{1}{1+\gamma} \\ \infty & \text{falls } a_- = \frac{1}{1+\gamma}. \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\text{Ebenso folgt: } a_- = \frac{q_-}{1+(1+\gamma)q_-} \text{ und } 1-a_- = \frac{1}{1+(1+\gamma)q_-}. \tag{2.8b}$$

$$\text{Dementsprechend } q_- = \arg\max_{q\geq 0} \ \mathbb{E}[v(\frac{r}{1+q(1+\gamma)}, \frac{qz_{n+1}}{1+q(1+\gamma)})].$$

5. *Beh:* Für alle $x \in E$ mit $\frac{x_1}{x_0} < q_-$ gilt:

   $f^*(x) = (x_0 + (1+\gamma)x_1)a_- = \frac{x_0+(1+\gamma)x_1}{1+(1+\gamma)q_-}q_- > x_1$ und:

   $(h(x, f^*(x)), f^*(x)) \ \in \ L_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ | \ x_1/x_0 = q_-\right\},$

   d.h. falls das aktuelle Stock- zu Bond-Verhältnis kleiner als q_- ist, sollten Stock-Anteile gekauft werden.
   Bew: Analog zu Schritt 3 m.H.v. (2.8b) und (2.9).

6. *Beh:* $q_- \leq q_+$
   Bew: Angenommen es gelte $q_- > q_+$.
   Für ein $x \in E$ mit $q_+ < \frac{x_1}{x_0} < q_-$. folgt mit den Schritten 3 und 5:
   $f^*(x) < x_1 < f^*(x)$ was einen Widerspruch darstellt.

7. Sei $x \in E$, die Fälle $\frac{x_1}{x_0} \geq q_+$ und $\frac{x_1}{x_0} \leq q_-$ sind abgedeckt durch die Schritte 3 und 5. Bleibt noch der Fall $q_- < \frac{x_1}{x_0} < q_+$.
   Daraus folgt $f^*(x) \geq x_1$ einerseits und $f^*(x) \leq x_1$ andererseits.
   Also $f^*(x) = x_1$, d.h. keine Transaktion erfolgt!

Insgesamt folgt damit die Existenz eines Maximierers der Form (2.4).
Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass

$$\mathcal{T}_n v(x) \in \mathbb{M} \text{ falls } v \in \mathbb{M}.$$

Sei also $v \in \mathbb{M}$. Sei $\tilde{x} \geq x,$ d.h. $\tilde{x}_i \geq x_i$ für $i = 1, 2$.
Dann gilt für festes a offensichtlich: $\mathcal{L}(\tilde{x}, a) \geq \mathcal{L}(x, a)$ und $D(x) \subset D(\tilde{x})$.
Damit folgt $\mathcal{T}_n v(\tilde{x}) \geq \mathcal{T}_n v(x)$, also ist $\mathcal{T}_n v$ steigend. Die Konkavität folgt aus der Existenz einer oberen Grenzfunktion. Vergleiche [1, S.28 f.].
Für die Homogenität beachte die Ergebnisse von oben:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n v(x_0, x_1) &= \mathbb{E}[v(h(x, f^*(x))r, f^*(x)z_{n+1})] \\ &= \begin{cases} \mathbb{E}[v((x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})a_+ q_+^{-1} r, (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma})a_+ z_{n+1})] & \text{falls } \frac{x_1}{x_0} > q_+ \\ \mathbb{E}[v((x_0 r, x_1 z_{n+1})] & \text{falls } q_- \leq \frac{x_1}{x_0} \leq q_+ \\ \mathbb{E}[v(x_0 + (1+\gamma)x_1 a_- q_-^{-1} r, x_0 + (1+\gamma)x_1 a_- z_{n+1})] & \text{falls } \frac{x_1}{x_0} < q_-. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus der Homogenität (vom Grad δ) von v folgt nun die von $\mathcal{T}_n v$.

$\square$

Bemerkung 2.4:
Angenommen die Nutzenfunktion $U : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und die Ableitung ist homogen vom Grad δ. Diese Eigenschaft erfüllt neben der *Power-Nutzenfunktion* $U(x) = \frac{1}{\delta} x^\delta$, auch der *logarithmische Nutzen* $U(x) = log(x)$.
Unter dieser Bedingung ist Theorem 2.3 für die gleiche Menge G_n und

$$\begin{aligned}\mathbb{M} := \Big\{ & v \in \mathbb{B}_b^+ |\ v\ ist\ steigend,\ konkav, \\ & differenzierbar\ und\ der\ Gradient\ ist\ homogen\ vom\ Grad\ \gamma \}\end{aligned}$$

erfüllt.
Damit ist das Theorem für eine breitere Auswahl von Nutzenfunktionen geeignet.

Beweis:
Sei $v \in \mathbb{M}$. Da v differenzierbar ist, gilt dies auch für $\mathcal{T}_n v$.
Dann ist zu zeigen: Der Gradient von $\mathcal{T}_n v(x)$ ist homogen vom Grad γ.
Sei $\frac{x_1}{x_0} > q_+$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\nabla \mathcal{T}_n v(\lambda x_0, \lambda x_1) &= \nabla \mathbb{E}[v(\lambda x_0, \lambda x_1)] \\ &\overset{E\ stetig}{=} \mathbb{E}[\nabla v(\lambda x_0, \lambda x_1) \\ &\overset{1.\ Fall}{=} \mathbb{E}[\nabla v((\lambda x_1 + \frac{\lambda x_0}{1-\gamma}) a_+ q_+^{-1} r, (\lambda x_1 + \frac{\lambda x_0}{1-\gamma}) a_+ z)] \\ &= \mathbb{E}[\nabla v(\lambda (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}) a_+ q_+^{-1} r, \lambda (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}) a_+ z)] \\ &\overset{VOR.}{=} \mathbb{E}[\lambda^\delta \nabla v((x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}) a_+ q_+^{-1} r, (x_1 + \frac{x_0}{1-\gamma}) a_+ z)] \\ &= \lambda^\delta \nabla \mathcal{T}_n v.\end{aligned}$$

Die anderen Fälle folgen analog. □

Beobachtung 2.5:
Die optimale Investitionsstrategie wird durch exakt 3 Regionen charakterisiert: *Kaufen*, *verkaufen* und *keine Transaktion.*
Das optimale Stock- zu Bond-Verhältnis nach Transaktion ist gegeben durch:

$$\frac{f_n^*(x)}{h(x, f_n^*(x))} = \begin{cases} q_+(V_{n+1}) & \text{falls } \frac{x_1}{x_0} > q_+(V_{n+1}) \\ \frac{x_1}{x_0} & \text{falls } q_-(V_{n+1}) \leq \frac{x_1}{x_0} \leq q_+(V_{n+1}) \\ q_-(V_{n+1}) & \text{falls } \frac{x_1}{x_0} < q_-(V_{n+1}). \end{cases}$$

Das bedeutet falls das aktuelle Verhältnis oberhalb (unterhalb) von q_+ (q_-) liegt, verkaufe (kaufe) Stock-Anteile bis die Grenze erreicht ist; liegt das aktuelle Verhältnis bereits zwischen beiden Grenzen, so sollte keine Transaktion vorgenommen werden.

Falls keine TAK aufkommen, d.h. $\gamma = 0$, gilt $q_+(v) = q_-(v)$.

2.3 Anwendung und Interpretation

Wir haben gesehen, dass sich ein Investor bei seinem Handeln an 2 Grenzen orientieren kann, sodass exakt 3 Handelsregionen entstehen. Wie jedoch diese Grenzen explizit lauten, kann er ohne weiteres nicht sehen. Klar ist dass sie von den gegebenen stochastischen Werten abhängen; wie genau sie sich letztlich aber in Abhängkeit einzelner Daten -wie der Höhe der TAK- verändern, möchten wir anhand einfach gehaltener Anwendungsbeispiele erörtern.

2.3.1 Das Binomialmodell mit proportionalen TAK

Im Binominalmodell kann z_n nur die Werte $\boldsymbol{u}$ bzw. $\boldsymbol{d}$ mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$ für alle n annehmen. Wir betrachten lediglich eine Periode, also $N=1$, daher vernachlässigen wir diesen Index. Wir werden mit der Power-Nutzenfunktion $U(x) = \frac{1}{\delta}x^\delta$ mit $\delta \in (0,1)$ arbeiten.
Zudem definieren wir vorab

$$r_+ := r(1+\gamma) \text{ und } r_- := r(1-\gamma)$$

mit der Annahme

$$r_+ < u \text{ und } r_- > d.$$

Das Optimierungproblem ist nun über (2.5a) und (2.5b) zu lösen, d.h. wir ermitteln die Maxima

$$\begin{aligned}
q_+ &= \arg\max_{q\geq 0}\ \mathbb{E}[U(\frac{r}{1+q(1-\gamma)} + \frac{qz}{1+q(1-\gamma)})] = \arg\max_{q\geq 0}\ \mathbb{E}[U(\frac{r+qz}{1+q(1-\gamma)})] \\
&= \arg\max_{q\geq 0}\ \underbrace{\frac{1}{\delta}p\left(\frac{r+qu}{1+q(1-\gamma)}\right)^\delta + \frac{1}{\delta}(1-p)\left(\frac{r+qd}{1+q(1-\gamma)}\right)^\delta}_{=:k_+(q)}, \\
q_- &= \arg\max_{q\geq 0}\ \mathbb{E}[U(\frac{r}{1+q(1+\gamma)} + \frac{qz}{1+q(1+\gamma)})] = \arg\max_{q\geq 0}\ \mathbb{E}[U(\frac{r+qz}{1+q(1+\gamma)})] \\
&= \arg\max_{q\geq 0}\ \underbrace{\frac{1}{\delta}p\left(\frac{r+qu}{1+q(1+\gamma)}\right)^\delta + \frac{1}{\delta}(1-p)\left(\frac{r+qd}{1+q(1+\gamma)}\right)^\delta}_{=:k_-(q)}.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
k'_+(q) = \quad & p\left(\frac{r+qu}{1+q(1-\gamma)}\right)^{\delta-1}\left(\frac{\overbrace{u(1+q(1-\gamma)) - (1-\gamma)(r+qu)}^{=u-r_-}}{(1+x(1-\gamma))^2}\right) \\
& +(1-p)\left(\frac{r+qd}{1+q(1-\gamma)}\right)^{\delta-1}\left(\frac{\overbrace{d(1+q(1-\gamma)) - (1-\gamma)(r+qd)}^{=d-r_-}}{(1+x(1-\gamma))^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{und setzen} && k_+'(q) \stackrel{!}{=} 0\\
&\Leftrightarrow 0 && = p(r+qu)^{\delta-1}(u-r_-) + (1-p)(r+qd)^{\delta-1}(d-r_-)\\
&\Leftrightarrow (1-p)(r+qd)^{\delta-1}(r_- - d) && = p(r+qu)^{\delta-1}(u-r_-)\\
&\Leftrightarrow \frac{r+qd}{r+qu} && = \left(\frac{p(u-r_-)}{(1-p)(r_- - d)}\right)^{\frac{1}{\delta-1}} = \left(\frac{(1-p)(r_- - d)}{p(u-r_-)}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} =: M_+\\
&\Leftrightarrow q(uM_+ - d) && = r - rM_+.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir

$$
q_+ = \left(\frac{r(1-M_+)}{uM_+ - d}\right)^+ \text{ mit } M_+ = \left(\frac{(1-p)(r_- - d)}{p(u-r_-)}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}
$$

und analog

$$
q_- = \left(\frac{r(1-M_-)}{uM_- - d}\right)^+ \text{ mit } M_- = \left(\frac{(1-p)(r_+ - d)}{p(u-r_+)}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}.
$$

Beachte dass wir short-sellings ausgeschlossen haben und daher nur den Positivteil betrachten.

Schauen wir uns nun an, welche Auswirkung die TAK auf diese Grenzen haben.

Beh: $q_- < q_+$ und q_+ (q_-) steigt (fällt) mit steigendem γ.

Bew: Es gilt $r_- < r_+$.

$\Rightarrow\ u - r_+ < u - r_-$ und $r_- - d < r_+ - d \ \Rightarrow\ M_+ < M_- \ \Rightarrow\ q_- < q_+$.

Und: γ steigt $\Rightarrow$ r_- fällt $\Rightarrow M_+$ fällt $\Rightarrow$ q_+ steigt.

Analog fällt q_- mit steigendem γ.

Wir sehen also, dass die Region *'keine Transaktion'* der logischen Vermutung entsprechend mit steigenden TAK größer wird, denn mögliche Wertzuwächse bzw. verhinderte Wertverluste gleichen zu hohe TAK nicht mehr aus, sodass ein Handel sich genrell seltener lohnt.
Eine weitere Abhängigkeit der Regionen besteht in der Wahrscheinlichkeit der Aktienwertveränderungen. Deswegen führen wir folgende Richtwerte ein um den Einfluss von p zu verdeutlichen:

$$
p_-^1 := \frac{r_- - d}{u-d}
$$
$$
p_+^1 := \frac{r_+ - d}{u-d}
$$

$$
p_-^2 := \frac{u^{1-\delta}(r_- - d)}{u^{1-\delta}(r_- - d) + d^{1-\delta}(u-r_-)}
$$
$$
p_+^2 := \frac{u^{1-\delta}(r_+ - d)}{u^{1-\delta}(r_+ - d) + d^{1-\delta}(u-r_+)}.
$$

Offensichtilich gilt $p_-^1 \leq p_+^1$. Außerdem

$$\begin{aligned} p_+^2 - p_-^2 = \quad & u^{1-\delta}(r_+ - d)[u^{1-\delta}(r_- - d) + d^{1-\delta}(u - r_-)] \\ & - u^{1-\delta}(r_- - d)[u^{1-\delta}(r_+ - d) + d^{1-\delta}(u - r_+)] \\ = \quad & u^{1-\delta}(r_+ - d)d^{1-\delta}(u - r_-) - u^{1-\delta}(r_- - d)d^{1-\delta}(u - r_+) \\ = \quad & u^{1-\delta}d^{1-\delta}(r_+ - r_-)(u - d) \geq 0. \end{aligned}$$

Beachte dass wir den gemeinsamen Nenner o.B.d.A. vernachlässigt haben.

$$\Rightarrow \; p_-^2 \leq p_+^2.$$

Schätzen wir zuletzt noch ab (wiederum ohne gemeinsamen Nenner):

$$\begin{aligned} p_-^2 - p_+^1 &= u^{1-\delta}(r_- - d)(u - d) - (u^{1-\delta}(r_- - d) + d^{1-\delta}(u - r_-))(r_+ - d) \\ &= u^{1-\delta}(r_- - d)(u - r_+) - d^{1-\delta}(u - r_-)(c_+ - d) \overset{\text{Annahme}}{\geq} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; p_+^1 \leq p_-^2.$$

Beachte dass die Annahme für kleine γ erfüllt ist.

Insgesamt also $p_-^1 \leq p_+^1 \leq p_-^2 \leq p_+^2$ und wir betrachten die folgenden 5 Fälle:

1. $\boldsymbol{p \leq p_-^1}$. Dann gilt:

   $$M_+ \geq \left(\frac{(1 - p_-^1)(r_- - d)}{p_-^1(u - r_-)}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} = \left(\frac{u - d - (r_- - d)}{u - r_-}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} = 1$$

   $\Rightarrow \; q_+ = 0 \; \Rightarrow \; q_- = 0$

   d.h. es existiert nur eine *'Verkaufs'* Region.

2. $\boldsymbol{p_-^1 < p \leq p_+^1}$. Dann gilt:

   - $M_+ < 1 \; \Rightarrow \; q_+ > 0$
   - $M_+ > \frac{d}{u} \; \Rightarrow \; q_+ < \infty$
   - $M_- \geq \left(\frac{(1-p_+^1)(c_+ - d)}{p_+^1(u - r_+)}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} = 1 \; \Rightarrow \; q_- = 0$

   Also exisiert eine *'Verkaufs'* und eine *'keine Transaktions'* Region.

3. $\boldsymbol{p_+^1 < p < p_-^2}$. Dann gilt:

   - $M_+ < 1 \; \Rightarrow \; q_+ > 0.$
   - $M_+ > \left(\frac{(1-p_-^2)(r_- - d)}{p_-^2(u - r_-)}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} = \frac{d}{u} \; \Rightarrow \; q_+ < \infty$
   - $M_- \in (\frac{u}{d}, 1) \; \Rightarrow \; q_- \in (0, \infty)$

   In diesem Fall existieren alle 3 Regionen!

4. $\boldsymbol{p^2_- \leq p < p^2_+}$. Dann gilt:

   - $M_+ \leq \frac{d}{u} \;\Rightarrow\; q_+ = \infty$
   - $M_- > \frac{d}{u} \;\Rightarrow q_- < \infty$

   Nur *'Kaufen'* und *'keine Transaktion'*.

5. $\boldsymbol{p \geq p^2_+}$. Dann gilt:
   $M_- \leq \frac{d}{u} \;\Rightarrow\; q_- = \infty$
   In dem Fall sollte man immer *'Kaufen'*.

Wir ziehen die Erkenntnis, dass nur im 3. Fall ein sinnvolles Modell entsteht; die Wahrscheinlichkeit p einer Wertsteigerung der Aktie muss groß genug sein, um etwaige TAK auszugleichen und eine -mathematisch belegte- sinnvolle Alternative zur sicheren Anlage zu bieten. Allerdings darf p natürlich nicht zu groß sein, damit keine Arbitragemöglichkeiten für den Investor entstehen.

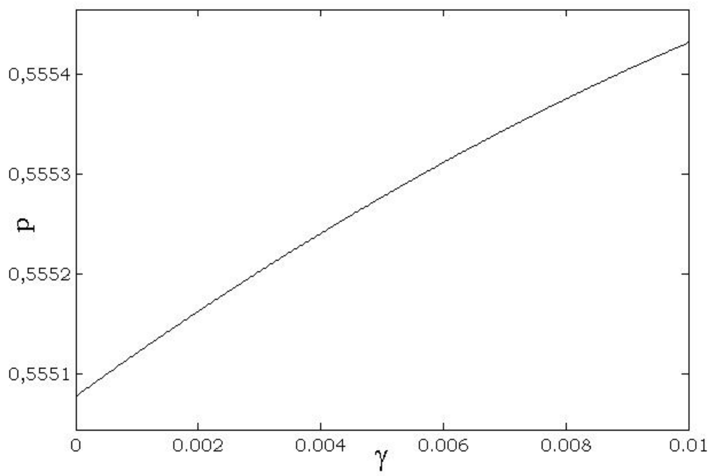

Abbildung 2: p in Abhängigkeit von γ.

Abbildung 2 zeigt die Entwicklung von p in Abhängigkeit der TAK. Dazu haben wir

$$p := \frac{p^1_+ + p^2_-}{2}$$

gesetzt und folgende Werte festgelegt:

$$r = 1.03,\; u = 1.25,\; d = 0.8, \delta = 0.2.$$

Für $\gamma = 0.003$ erhalten wir $p = 0.5552$ und damit $q_+ = 1.3862$ und $q_- = 0.7432$.
Mit diesen Daten spielen wir ein kurzes Szenario durch:
Ein Investor hält 30 Euro im Stock und 20 Euro im Bond, also $x_1/x_0 = 1.5 > q_+$.
Folglich sollte er Anteile verkaufen, und zwar (2.4) zufolge genau

$$30 - \frac{20 + (1 - 0.003)30}{1 + (1 - 0.003)1.3862} 1.3862 \approx 0.96.$$

Dann zahlt er TAK von ca. 3 Cent und schreibt seinem Bond demzufolge 93 Cent zu, sodass sein Stock- zu Bond- Verhältnis q_+ entspricht. Im nächsten Zeitschritt hat er dann ein Verhältnis von 29.04 $z/20.93$ r. Bei einem Wertverlust wäre das 1.0777 und befindet sich somit in der *keine Transaktion* Region, sofern sich die Rahmenbedingungen im Modell nicht geändert haben; ansonsten müssen die Grenzen mithilfe der angegebenen Formeln neu berechnet werden.

Achtung: In diesem Modell handelt der Investor **von Periode zu Periode**, berechnet für die gegebenen Daten im Modell die Grenzen und prüft in welcher Region sich sein Portfolio befindet. Dann handelt er gemäß (2.4).
Hätte er zu Beginn den Planungshorizont $N > 1$, müssten die optimalen Aktionen rekursiv mit Hilfe des Backward Induction Algorithmus (vgl. Kapitel 1) berechnet werden. Ein etwaiges Beispiel wird am Ende von Kapitel 3 besprochen.

2.3.2 Das Trinomialmodell mit proportionalen TAK

Zum Schluss dieses Kapitels möchten wir versuchen die Erkenntnisse und insbesondere die Vorgenhensweise auf das Trinomialmodell zu transferieren. Wir erweitern das bisherige Modell um einen weiteren Wert m, den $z = \tilde{R}$ nun annehmen kann; damit existiert auch eine weitere Wahrscheinlichkeit. Es gilt nun:

$$P(z = u) + P(z = d) = p_1 + p_2 = 1 - p_3 = 1 - P(z = m)$$

$$\text{mit} \quad d < m < r_- \leq r \leq r_+ < u.$$

Durch die 2 zusätzlichen Variabeln erschwert sich die Untersuchung für das Modell. Daher werden wir erweiterte Annahmen treffen müssen, um die Ergebnisse möglichst anschaulich halten zu können.
Wir orientieren uns bei der Vorgehensweise am Binomialmodell, jedoch werden wir nun mit $U(x_0, x_1) := log(x_0 + x_1)$ als Nutzenfunktion arbeiten; gemäß Bemerkung 2.4 können wir ebenso die vorigen Erkenntnisse auf den logarithmischen Nutzen anwenden.
Wir betrachten wiederum eine Periode und bestimmen die Grenzen q_+ und q_-. Die logischen Annahmen für das Modell treffen wir erst danach, da wir diese anhand der Formeln intuitiver erkennen.

Für q_+ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\partial_q \left(\mathbb{E} \left[log \left(\frac{r + qz}{1 + q(1-\gamma)} \right) \right] \right) \\
&= \partial_q \left(p_1 log(r + qu) + p_2 log(r + qd) + p_3 log(r + qm) - log(1 + q(1-\gamma)) \right) \\
&= \frac{p_1 u}{r + qu} + \frac{p_2 d}{r + qd} + \frac{p_3 m}{r + qm} - \frac{1-\gamma}{1 + q(1-\gamma)} \\
&= \frac{q^2 A_+ + q B_+ + C_+}{(r + qu)(r + qd)(r + qm)(1 + q(1-\gamma))},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_+ &:= udm + r_- \left(p_1 u(d+m) + p_2 d(u+m) + p_3 m(u+d) - ud - md - um\right) \\
&= udm(1 - r_-(p_1/u + p_2/d + p_3/m)), \\
B_+ &:= r\left(p_1 u(d+m) + p_2 d(u+m) + p_3 m(u+d) + r_-(\mathbb{E}[z] - u - d - m)\right), \\
C_+ &:= r^2(\mathbb{E}[z] - r_-).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der A-B-C-Formel für quadratische Gleichungen erhalten wir die Nullstellen:

$$\frac{-B_+ \pm \sqrt{B_+^2 - 4A_+C_+}}{2A_+}$$

und analog für q_- :

$$\frac{-B_- \pm \sqrt{B_-^2 - 4A_-C_-}}{2A_-},$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_- &:= udm\left(1 - r_+(p_1/u + p_2/d + p_3/m)\right), \\
B_- &:= r\left(p_1 u(d+m) + p_2 d(u+m) + p_3 m(u+d) + r_+(\mathbb{E}[z] - u - d - m)\right), \\
C_- &:= r^2(\mathbb{E}[z] - r_+).
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass jeweils 2 mögliche Werte für q_+ und q_- existieren. Die Verwendung von Testwerten impliziert die Annahmen

$$A_+ < A_- < 0,\ 0 < B_+ < B_- \text{ und } 0 < C_+ < C_-.$$

Damit erhalten wir (aufgrund des Ausschlusses von short-sellings, also $q_+, q_- \geq 0$)

$$q_+ = \frac{-B_+ - \sqrt{B_+^2 - 4A_+C_+}}{2A_+} \text{ sowie } q_- = \frac{-B_- - \sqrt{B_-^2 - 4A_-C_-}}{2A_-}$$

und wie gewünscht $q_- \leq q_+$.

Dafür reichen die folgenden Annahmen aus:

(i) $\mathbb{E}[z] > r_+ \quad (\Rightarrow C_+ > 0)$.

(ii) $r_-(p_1/u + p_2/d + p_3/m) > 1 \quad (\Rightarrow A_- < 0)$.

(iii) $p_1(u - r_+)(m+d) + p_2(d - r_+)(u+m) + p_3(m - r_+)(u+d) > 0 \quad (\Rightarrow B_+ > 0)$.

Wie auch im Binomialmodell verändern sich die Grenzen für die Handelsregionen monoton in Abhängigkeit der TAK. Diesen Sachverhalt verdeutlicht Abbildung 3.

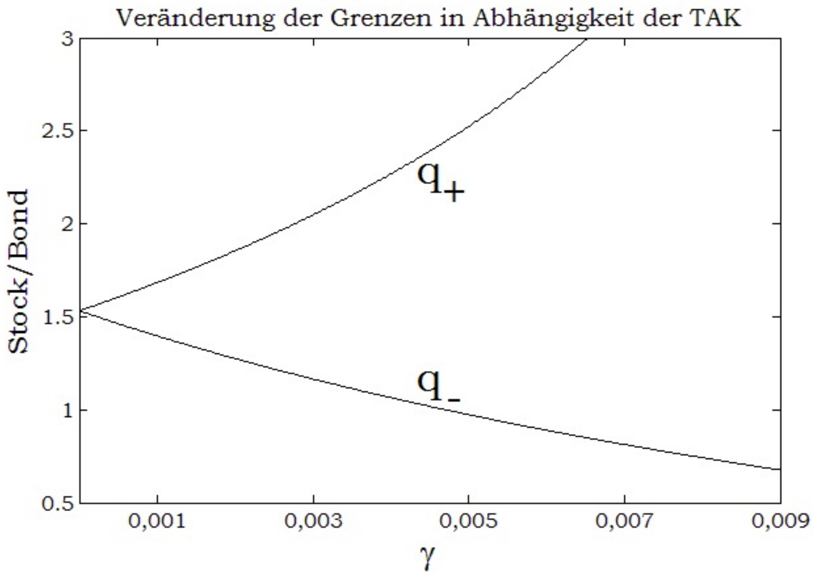

Abbildung 3: Für Werte $u = 1.25,\ d = 0.8,\ m = 0.9,\ r = 1.03,\ p_1 = 0.55,\ p_2 = 0.35.$

3 Kombinierte Transaktionskosten

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit weiteren Formen von TAK, insbesondere Kombinationen aus *proportionalen* mit *fixen* bzw. *konstanten* TAK, beschäftigen. Wie schon in Kapitel 1 beschränken wir uns auf einen risikolosen Bond mit Zinsrate r und einen Stock, dessen Werteprozess durch $\tilde{R}_n \in [0, \infty)$ ausgedrückt wird. Andererseits beschreiben wir von nun an mit x_n das Gesamtvermögen z.Zt. n und mit $\pi_n \in [0, 1]$ den Anteil des Vermögens welcher im Stock gehalten wird.
Dazu ist $\Delta_n \in \mathbb{R}$ die zusätzliche Investition in Aktien z.Zt. n; dementsprechend bedeutet ein negatives Δ_n ein Verkauf von Aktien im Wert von $|\Delta_n|$.

3.1 Aufbau des Modells

Wie im vorangegangenen Kapitel wollen wir ein MEM zur Lösung des Problems aufstellen. Die erweiterten Formen von TAK sind jedoch erschwerend und führen zu einer komplizierteren und kontinuierlichen Modellierung.
Den Zustandsraum können wir bereits jetzt fest, gemäß der oben genannten Bedeutung, wählen als:

$$E := \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \ \ni \ (x_n, \pi_n).$$

Ebenso bestimmen wir den Störungsraum $\mathcal{Z} := \mathbb{R}_+$ der die stochastischen Übergänge der Zustände in Folgezustände beeinflusst, wobei $\tilde{R}_n =: z_n \in \mathcal{Z}$.

Die 3 oben genannten Arten von TAK sind folgendermaßen zu verstehen:

$\gamma\,\lvert\Delta_n\rvert,\ \gamma \in (0, 1)$	proportional (zur gehandelten Menge)
$\delta\ x_n,\ \delta \in (0, 1)$	fix (proportional zum Vermögen)
$K\ \mathbf{1}_{\{\mathbb{R}\setminus\{0\}\}}(\Delta_n),\ K > 0$	konstant.

Wir sehen dass konstante TAK mithilfe einer Indikatorfunktion ausgedrückt werden, was zu Problemen bei der Optimierung führen könnte, deswegen werden wir sogenannte *Trades* einführen, die den Typ des Handelns beinhalten. Um kombinierte Formen von TAK untersuchen zu können, definieren wir außerdem rein formal den Begriff *Transaktionskosten.*

Definition 3.1:

(i) Ein Trade (a_n, Δ_n) z.Zt. n besteht aus dem Typ des Handelns $a_n \in \{-1, 0, +1\}$ und der Investition $\Delta_n \in I_{a_n}$, wobei die Intervalle der Investition z.Zt. n gegeben sind durch

$$I_{a_n} := \begin{cases} (-\infty, 0) & \text{falls } a_n = -1 \\ \{0\} & \text{falls } a_n = 0 \\ (0, \infty) & \text{falls } a_n = +1. \end{cases}$$

Dabei steht -1 für *verkaufen*, +1 für *kaufen* und 0 für *kein Handeln.*

(ii) Seien $a_n \in \{-1, 0, +1\}$, $\alpha_{a_n}, \beta_{a_n} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, α_{a_n} nicht-negativ und stetig für $a_n \neq 0$, β_{-1} stetig mit Werten in $(-1, 0]$ und β_{+1} stetig mit Werten in $[0, 1)$.
Die Funktion $C_n(x_n, \Delta_n) := \alpha_{a_n}(x_n)x_n + \beta_{a_n}(x_n)\Delta_n$, $\Delta_n \in I_{a_n}$ heißt *Transaktionskosten z.Zt. n.*

Bemerkung:
Mithilfe einer erweiterten Definition könnte man hier noch weitreichendere -wie z.b. von der Investitionsmenge abhängige- TAK betrachten, so z.B. in [2, S.6]; in dem Fall müsste man entsprechend mehr Typen von Trades einbeziehen, was wir an dieser Stelle der Einfachheit halber nicht behandeln werden.

Beispiel 3.2:
Wählen wir $\alpha_{a_n}(x_n) := \frac{K}{x_n}a^2$ und $\beta_{a_n}(x_n) := \gamma a$, $\gamma \in (0, 1)$, $a \in \{-1, 0, +1\}$, so erhalten wir mit $C_n(x_n, \Delta_n)$ eine Kombination aus konstanten und proportionalen TAK.

Definition 3.1 zufolge halten wir als Aktionsraum **zunächst** den Raum über den Trades (a_n, Δ_n) fest, werden diesen allerdings nach einigen Umformulierungen noch konkret anpassen.
Wie in Kapitel 1 soll der Investor zu keiner Zeit Schulden haben dürfen; ebensowenig sind short-sellings sowohl in Bond als auch im Stock erlaubt. Demzufolge soll für alle $n = 0, ..., N-1$ gelten:

$$x_n - C_n(x_n, \Delta_n) > 0 \tag{3.1a}$$
$$\pi_n x_n + \Delta_n \geq 0 \tag{3.1b}$$
$$(1 - \pi_n)x_n - \Delta_n - C_n(x_n, \Delta_n) \geq 0. \tag{3.1c}$$

Wir sagen ein Trade bzw. eine Investition Δ_n z.Zt. n ist *möglich* für (x_n, π_n) , falls diese Bedingungen erfüllt sind, d.h.

$$D(x_n, \pi_n) := \{(a_n, \pi_n) \in \{-1, 0, +1\} \mid \Delta_n \text{ erfüllt } (3.1a), (3.1b), (3.1c)\}$$

ist die Menge der möglichen Aktionen (auch diese wird entsprechend dem Aktionsraum noch weiter angepasst).

Definition 3.3:
Eine *Trading-Strategie* $\tilde{S} := (a_n, \Delta_n)_{n=0,...,N-1}$ bestimmt den Prozess des Vermögens sowie der Aktienanteile $(x_n, \pi_n)_{n=0,...,N}$. Dafür schreiben wir $x_n^{\tilde{S}}$ und $\pi_n^{\tilde{S}}$, $n = 0, ..., N$.
Wir sagen $\tilde{S}$ ist *zulässig*, falls (a_n, Δ_n) möglich ist für $(x_n^{\tilde{S}}, \pi_n^{\tilde{S}})$, $n = 0, ..., N-1$ für alle $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$.
In dem Fall gilt für alle $n = 1, ..., N$, $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$: $x_n^{\tilde{S}} > 0$, $\pi_n^{\tilde{S}} \in [0, 1]$.

Werden ausschließlich mögliche Investitionen getätigt, wird der Portfolioprozess für Startwerte $x_0 = x > 0,\ \pi_0 = \pi \in [0, 1]$ beschrieben durch:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \overbrace{\left(\left(1-\pi_n\right)x_n - C_n(x_n, \Delta_n) - \Delta_n\right)r}^{\text{Geldmenge in Bond}} + \overbrace{\left(\pi_n x_n + \Delta_n\right)z_{n+1}}^{\text{Geldmenge in Stock}}, & (3.2)\\
\pi_{n+1} &= \left(\pi_n x_n + \Delta_n\right)z_{n+1}/x_{n+1}. & (3.3)
\end{aligned}
$$

3.1.1 Umformulierung

Die Formeln (3.2) und (3.3) geben uns in jedem Zeitschritt Informationen über das Vermögen bzw. Portfolio **vor** getätigten Investitionen und Abzügen von TAK. Für das Lösen eines Optimierungsproblems wird es im weiteren Verlauf jedoch hilfreich sein, das Vermögen und die Aktienanteile jeweils **nach** dem Handeln von Aktien und Abzug von TAK zu betrachten. Also:

$$
\begin{aligned}
\xi_n &:= x_n - C_n(x_n, \Delta_n), & (3.4)\\
\mu_n &:= \frac{\pi_n x_n + \Delta_n}{\xi_n}. & (3.5)
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen wird damit aus (3.2) und (3.3):

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \xi_n\left(r + \mu_n\left(z_{n+1} - r\right)\right), & (3.6)\\
\pi_{n+1} &= \frac{\mu_n z_{n+1}}{r + \mu_n\left(z_{n+1} - r\right)}. & (3.7)
\end{aligned}
$$

Darüber hinaus formulieren wir die Voraussetzungen für mögliche Investitionen (3.1a), (3.1b) und (3.1c) äquivalent:

$$\xi_n > 0, \quad \mu_n \xi_n \geq 0, \quad (1-\mu_n)\xi_n \geq 0. \tag{3.8}$$

Folglich gilt für mögliche Investitionen offensichtlich, dass $\mu_n \in [0, 1]$.
Wir werden nun mithilfe dieser Formeln die auftretenden Variablen als Funktionen in Abhängigkeit der anderen darstellen, um später einen besseren Überblick über die Intervalle von optimalen Strategien zu erlangen und außerdem eine multiplikative Struktur herzuleiten, die besonders für eine *logarithmische* Nutzenfunktion hilfreich ist.

Setzen wir (3.4) in (3.5) ein, erhalten wir mit Definition 3.1:

$$\Delta_n = \mu_n(x_n - \alpha_{a_n}(x_n)x_n - \beta_{a_n}(x_n)\Delta_n) - \pi_n x_n.$$

Daraus folgt:

$$\Delta_n = \frac{(1-\alpha_{a_n}(x_n))\mu_n - \pi_n}{1 + \beta_{a_n}(x_n)\mu_n} x_n =: f_\Delta(x_n, \pi_n, a_n, \mu_n) \tag{3.9}$$

und

$$\mu_n = \frac{\pi_n x_n + \Delta_n}{x_n - \alpha_{a_n}(x_n)x_n - \beta_{a_n}(x_n)\Delta_n} =: f_\mu(x_n, \pi_n, a_n, \Delta_n). \tag{3.10}$$

Wir nutzen jetzt (3.9) um zunächst die TAK aus Definition 3.1 äquivalent darzustellen:

$$C_n(x_n, \pi_n, a_n, \mu_n) = \frac{\alpha_{a_n}(x_n) + \beta_{a_n}(x_n)(\mu_n - \pi_n)}{1 + \beta_{a_n}(x_n)\mu_n} x_n, \tag{3.11}$$

um letztlich das Vermögen nach Abzug von TAK faktorisiert zu formulieren:

$$\xi_n = \frac{1 - \alpha_{a_n}(x_n) + \beta_{a_n}(x_n)\pi_n}{1 + \beta_{a_n}(x_n)\mu_n} x_n. \tag{3.12}$$

Wir sehen hier, dass die Portfolio-Entwicklung, (3.6) und (3.7), durch die Aktienanteile μ_n am Vermögen nach Abzug der TAK anstelle der absoluten neuen Investition Δ_n beschrieben werden kann; das bedeutet wir betrachten von nun an das Tupel (a_n, μ_n) als Aktion des Investors z.Zt. n und somit als Aktionsraum

$$A := \{-1, 0, +1\} \times [0, 1].$$

Durch Einsetzen von (3.12) in (3.6) können wir die Übergangsfunktion angeben:

$$T_n(x_n, \pi_n, a_n, \mu_n, z_{n+1}) := (f_x, f_\pi) := (x_{n+1}, \pi_{n+1}), \text{ wobei}$$

$$f_x(x_n, \pi_n, a_n, \mu_n, z_{n+1}) = \frac{1 - \alpha_{a_n}(x_n) + \beta_{a_n}(x_n)\pi_n}{1 + \beta_{a_n}(x_n)\mu_n}(r + \mu_n(z_{n+1} - r))x_n, \tag{3.13}$$

$$f_\pi(\mu_n, z_{n+1}) = \frac{\mu_n z_{n+1}}{r + \mu_n(z_{n+1} - r)}. \tag{3.14}$$

Wir müssen nun natürlich die *Menge der möglichen Aktionen* $D(x_n, \pi_n)$ dem veränderten Aktionsraum anpassen, d.h. wir wollen die Aktionen (a_n, μ_n) mit den entsprechenden *möglichen Trades* (a_n, Δ_n) identifizieren.
Dafür brauchen wir zunächst folgendes

Lemma 3.4:
Sei $x > 0,\ \pi \in [0, 1],\ a \in \{-1, 0, +1\},\ 1 - \alpha_a(x) + \beta_a(x)\pi > 0$. Dann gilt:
$f_\mu(x, \pi, a, \cdot)$ ist strikt steigend auf $\{\Delta \in \mathbb{R} |\ x - \alpha_a(x)x - \beta_a(x)\Delta > 0\}$.

Beweis:
Folgt direkt aus (3.10) und (3.12).

□

Bemerkung:
Durch das Lemma ist gewährleistet, dass wir den *möglichen Trades* Aktionen nach der neuen Definition auf eindeutige Weise zuordnen können.

Beobachtung:
Nach (3.12) ist die erste Kondition möglicher Trades $\xi_n > 0$ äquivalent zur Voraussetzung des Lemmas, wobei diese weder von μ_n noch von Δ_n abhängt. Die beiden anderen Konditionen aus (3.8) sind äquivalent zu

$$\Delta_n \in J_{a_n} =: \left[-\pi_n x_n, \frac{1 - \alpha_{a_n}(x_n) - \pi_n}{1 + \beta_{a_n}(x_n)} x_n\right]. \tag{3.15}$$

Damit gilt für $a_n \in \{-1, 0, +1\}$:

$$(a_n, \Delta_n) \text{ ist möglich} \iff 1 - \alpha_{a_n}(x_n) + \beta_{a_n}\pi_n > 0 \text{ und } \Delta_n \in I_{a_n} \cap J_{a_n}.$$

Daraus folgt mit Lemma 3.4:
$f_\mu(x_n, \pi_n, a_n, I_{a_n} \cap J_{a_n}),\ a_n \in \{-1, 0, +1\}$ beschreibt die Intervalle *möglicher Aktienanteile* μ_n am Vermögen nach Abzug von TAK.

Beachte, dass aus

$$1 - \alpha_{a_n}(x_n) \overset{(3.12)}{=} \frac{\xi_n}{x_n} + \overbrace{\beta_{a_n}(x_n)\left(\frac{\xi_n}{x_n}\mu_n - \pi_n\right)}^{\geq 0\ \forall a_n \in \{-1,0,+1\}} \geq \frac{\xi_n}{x_n} \overset{(3.8)}{>} 0$$

bereits $1 - \alpha_{a_n}(x_n) + \beta_{a_n}(x_n)\pi_n > 0$ für $a_n = +1$ folgt.
Für $a_n = -1$ folgt hingegen die umgekehrte Richtung.

Schließlich können wir die Menge der möglichen Aktionen definieren:

Definition 3.5:
Eine Aktion ist möglich, falls

$$(a_n, \mu_n) \in D(x_n, \pi_n) := \{(a, \mu)|\ a \in \{-1, 0, +1\}, \mu \in D_a(x_n, \pi_n)\},$$

wobei

$$\begin{aligned} D_0(x, \pi) &:= \{\pi\}, \\ D_{-1}(x, \pi) &:= \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 1 - \alpha_{-1}(x) + \beta_{-1}(x)\pi \leq 0 \\ f_\mu(x, \pi, -1, I_{-1} \cap J_{-1}) & \text{falls } 1 - \alpha_{-1}(x) + \beta_{-1}(x)\pi > 0, \end{cases} \\ D_{+1}(x, \pi) &:= \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 1 - \alpha_{+1}(x) \leq 0 \\ f_\mu(x, \pi, +1, I_{+1} \cap J_{+1}) & \text{falls } 1 - \alpha_{+1}(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dementsprechend sagen wir nun, eine *Kontroll-Strategie* $S := (a_n, \mu_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ ist *zulässig*, falls für alle Startwerte $x > 0,\ \pi \in [0, 1]$ und $n = 0, \ldots, N-1$ gilt: $(a_n, \mu_n) \in D(x_n^S, \pi_n^S)$.

Merke: Strategien sind jeweils zulässig falls sie nur mögliche Aktionen beinhalten. Trading-Strategien beziehen sich auf Aktionen nach der ersten Definition mit der gehandelten Menge Δ_n, Kontroll-Strategien hingegen auf Aktionen in Form der Aktienanteile am Vermögen nach dem Handel.

Proposition 3.6:
Für eine zulässige Kontroll-Strategie $S = (a_n, \mu_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ ist die Trading-Strategie $\tilde{S} = (a_n, f_\Delta(x_n^S, \pi_n^S, a_n, \mu_n))_{n=0,\ldots,N-1}$ (vgl. Definition 3.3) zulässig und die durch S bzw. $\tilde{S}$ kontrollierten Prozesse stimmen überein. Umgekehrt können wir mittels f_μ aus zulässigen Trading- zulässige Kontroll-Strategien konstruieren.

Beweis:
Definition 3.5, Lemma 3.4 sowie (3.9) und (3.10) liefern die Behauptung.

□

3.1.2 Das Markovsche Entscheidungsmodell

Fassen wir die bisherigen Erkenntsnisse nocheinmal in einem MEM übersichtlich zusammen:

- Zustandsraum: $E = \mathbb{R}_+ \times [0,1] \ni (x_n, \pi_n)$, wobei x_n das Gesamtvermögen des Investors und π_n den Aktienanteil daran z.Zt. n darstellen.
- Aktionsraum: $A = \{-1, 0, +1\} \times [0,1] \ni (a_n, \mu_n)$, wobei a_n den Typ des Handelns mit der Konnotation $-1 = \ verkaufen$, $+1 = \ kaufen$ und $0 = kein\ Handeln$ und μ_n den Aktienanteil am Vermögen *nach* Handeln und Abzug von TAK ausdrücken.
- Menge der möglichen Aktionen: $D(x_n, \pi_n)$ ist gegeben durch Definition 3.5.
- Störungsraum: $\mathcal{Z} = \mathbb{R}_+$ wobei $z_n \in \mathcal{Z}$ die relative Preisänderung der Aktie beschreibt.
- Übergangsfunktion: $T_n(x_n, \pi_n, a_n, \mu_n, z_{n+1})$ ist durch (3.13) und (3.14) gegeben.
- Übergangskern: $Q_n^z(\cdot|x_n, \pi_n, a_n, \mu_n) =$ Verteilung von $\tilde{R}_{n+1}$ (unabhängig von (x_n, π_n, a_n, μ_n)).
- Einstufiger Ertrag: $r_n \equiv 0$.
- Endertrag: $g_N = U(x_N), x_N \in E$.

Unser Ziel ist das Lösen des Terminal Wealth Problem, das bedeutet wir wollen eine optimale zulässige Kontroll-Strategie S^* finden, sodass für $(x, \pi) \in E$ und alle zulässigen Kontroll-Strategien S gilt:

$$\mathbb{E}_{x,\pi}[U(X_N^{S^*})] \geq \mathbb{E}_{x,\pi}[U(X_N^S)].$$

3.2 Existenz einer Lösung des Problems

Wir werden im Folgenden zeigen, dass eben soeine optimale Strategie S^* existiert; allerdings werden wir dabei im Gegensatz zu Kapitel 1 ein halbstetiges MEM verwenden (vgl. [1, S.29-39]), können jedoch nicht direkt etwaige Folgerungen der *Struktur-Annahme* anwenden, da z.B. die Abbildung

$$(x, \pi) \longmapsto D(x, \pi)$$

zwar kompakte Werte annimmt aber nicht von oben halbstetig ist. Daher werden wir die spezielle Struktur unseres Modells ausnutzen und das Problem auf jedes einzelne $a_n \in \{-1, 0, +1\}$ reduzieren und darüber mit Hilfe von [3] die Existenz optimaler Strategien beweisen.

Wir betrachten zunächst die *Bellman-Gleichung.* Dabei sei jeweils $(x, \pi) \in E$ bzw. $(x, \pi, a, \mu) \in E \times D(x, \pi)$:

$$V_N^*(x,\pi) = U(x)$$

und für $n = 0, \dots, N-1$

$$V_n(x,\pi,a,\mu) = \mathbb{E}[V_{n+1}^*(f_x(x,\pi,a,\mu,z_{n+1}), f_\pi(\mu, z_{n+1}))] \tag{3.16}$$

$$V_n^*(x,\pi) = \sup_{(a,\mu)\in D(x,\pi)} V_n(x,\pi,a,\mu) \tag{3.17}$$

und aufgespaltet in jedes $a \in \{-1, 0, +1\}$:

$$V_n^a(x,\pi) = \sup_{\mu \in D_a(x,\pi)} V_n(x,\pi,a,\mu).$$

Theorem 3.7:

(i) Für alle $n = 0, \dots, N$ gilt: V_n^* ist endlich und von oben halbstetig.

(ii) Für alle $n = 0, \dots, N-1$ existiert ein Maximierer $\varphi_n = (\varphi_n^1, \varphi_n^2)$ für die rekursive Gleichung (3.16),(3.17); d.h. φ_n ist messbar und für alle $(x, \pi) \in E$ gilt:
$\varphi_n(x, \pi) \in D(x, \pi)$ und

$$V_n^*(x,\pi) = \mathbb{E}[V_{n+1}^*(f_x(x,\pi,\varphi_n^1(x,\pi),\varphi_n^2(x,\pi),z), f_\pi(\varphi_n^2(x,\pi),z))].$$

(iii) Die Kontroll-Strategie $S^* := (a_n^*, \mu_n^*)_{n=0,\dots,N-1}$ definiert durch
$a_n^* = \varphi_n^1(x_n^*, \pi_n^*)$, $\mu_n^* = \varphi_n^2(x_n^*, \pi_n^*)$ ist optimal! Dabei sind x_n^* und π_n^* durch die Anwendung von S^* bis z.Zt. $n-1$ zu erreichen, sodass $\mathbb{E}_{x,\pi}[U(X_N^{S^*})] = V_0^*$.

Für den Beweis benötigen wir zwei Lemmata aus [3] die wir an dieser Stelle nicht beweisen werden.

Lemma 3.8:
Seien X, Y metrisierbare Räume und Y kompakt, $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ von oben halbstetig und $\hat{f}(x) := \sup_{y \in Y} f(x, y),\ x \in X$.
Dann ist $\hat{f}$ von oben halbstetig und für alle $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ sodass das Supremum angenommen wird.

Lemma 3.9:
Seien X, Y metrisierbare Räume und Y kompakt, T eine geschlossene Teilmenge von $X \times Y$, $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ von oben halbstetig, $proj_x(T) := \{x \in X |\ (x, y) \in T,\ y \in Y\}$, $T_x := \{y \in Y |\ (x, y) \in T,\ x \in X\}$ und $\widehat{f} : proj_x(T) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) \longmapsto \max_{y \in T_x} f(x, y)$.

Dann gilt:
$proj_x(T)$ ist geschlossen in X, $\widehat{f}$ ist von oben halbstetig und es existiert eine messbare Funktion $\psi : proj_x(T) \longrightarrow Y$ mit $\psi(proj_x(T)) \subseteq T$ und $f(x, \psi(x)) = \widehat{f}(x)\ \forall x \in proj_x(T)$.

Beweis von Theorem 3.7:

- Wir müssen zunächst $(x, \pi) \longmapsto D(x, \pi)$ zu einer -von oben- halbstetigen Abbildung formen ohne dabei stark von der Struktur abzuweichen; d.h. wir schließen ganz einfach die leere Menge aus: Sei für $a \in \{-1, 0, +1\}$

  $$E_a := \{(x, \pi) \in E |\ D_a(x, \pi) \neq \emptyset\} \text{ und } \theta_a : E_a \longrightarrow A,\ \theta_a(x, \pi) = D_a(x, \pi).$$

  Dann ist θ_a kompakt und von oben halbstetig.

- V_N^* ist nach Definition endlich und von oben halbstetig. Wir nehmen nun für ein $n \in \{0, \dots, N-1\}$ an, das gilt ebenso für V_{n+1}^*. Dann gilt dies auch für $V_{n+1}^*(f_x(\cdot, \cdot, a, \cdot, z), f_\pi(\cdot, z))$ da f_x und f_π stetig sind. Also ist auch der Erwartungswert darüber, $V_n(\cdot, \cdot, a, \cdot)$, endlich und von oben halbstetig.

- Wir nutzen nun Lemma 3.9 indem wir $X := E,\ Y := D_a$,
  $T := \{(x, \pi, \mu)|\ (x, \pi) \in E_a,\ \mu \in D_a(x, \pi)\} \subseteq E \times D_a$ wählen, sodass
  $V_n : T \longrightarrow \mathbb{R}$ für festgehaltenes a endlich und von oben halbstetig ist.
  Entsprechend sei $V_n^a : proj_{(x,\pi)}(T) \longrightarrow \mathbb{R},\ V_n^a(x, \pi) = \max\limits_{\mu \in D_a(x,\pi)} V_n(x, \pi, a, \mu)$,
  wobei $proj_{(x,\pi)}(T) = E_a$.
  Damit folgt die Existenz eines messbaren Maximierers μ_n^a auf E_a mit
  $\mu_n^a(x, \pi) \in D_a(x, \pi)$ und $V_n^a(x, \pi) = V_n(x, \pi, a, \mu_n^a(x, \pi))$. Außerdem ist V_n^a endlich und mit Lemma 3.8 ist die Halbstetigkeit von oben gewährleistet.

- Wir definieren nun

  $$V_n^*(x, \pi) := \max \{V_n^a(x, \pi)|\ a \in \{-1, 0, +1\},\ D_a(x, \pi) \neq \emptyset\},$$

  sodass Aussage (i) folgt.
  Beachte dass dieses Maximum existiert, da $D_0(x, \pi) \equiv \{\pi\}$.

- Um die Existenz eines Maximierers für V_n^* auf ganz E zu zeigen, konstruieren wir zunächst Handelsregionen für jedes $a \in \{-1, 0, +1\}$:

  $$H_a^{'} := \left\{(x, \pi) \in E_a |\ \forall b \in \{-1, 0, +1\}, b \neq a :\ V_n^a(x, \pi) \geq V_n^b(x, \pi)\right\}.$$

  D.h. zu gegebenem a ist $H_a^{'}$ die Menge aller Zustände (x, π) z.Zt. n für die mögliche Aktionen des Typs a überhaupt existieren und dieses a 'besser' im Sinne von höherem Ertrag ist als die übrigen Typen. Bemerke dabei dass $E_0 = E$ sodass $\bigcup_{a \in \{-1,0,+1\}} H_a^{'}$ eine Zerlegung von E darstellt.
  Um disjunkte Mengen zu erhalten, definieren wir:

  $$\begin{aligned} H_{-1} &:= H_{-1}^{'} \\ H_{+1} &:= H_{+1}^{'} \setminus H_{-1} \\ H_0 &:= H_0^{'} \setminus (H_{-1} \cup H_{+1}). \end{aligned}$$

Damit können wir einen messbaren Maximierer für V_n^* definieren:

$$\varphi_n(x,\pi) := \sum_{a\in\{-1,0,+1\}} (a, \mu_n^a(x,\pi))\mathbf{1}_{H_a}((x,\pi)),\ (x,\pi)\in E.$$

- Bleibt noch (iii): Sei $S = (a_n, \mu_n)n = 0,\dots,N-1)$ eine zulässige Kontroll-Strategie. Dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,\pi}[U(x_N^S)] &= \mathbb{E}_{x,\pi}[\mathbb{E}_{x,\pi}[U(\overbrace{f_x(x_{N-1}^S, \pi_{N-1}^S, a_{N-1}, \mu_{N-1}, z_N)}^{=x_N^S})|\ \mathcal{F}_{N-1}]] \\
&= \mathbb{E}_{x,\pi}[\mathbb{E}_{x,\pi}[U(f_x(x_{N-1}^S, \pi_{N-1}^S, a_{N-1}, z_N))] \\
&= \mathbb{E}_{x,\pi}[V_{N-1}(x_{N-1}^S, \pi_{N-1}^S, a_{N-1}, \mu_{N-1})] \\
&\le \mathbb{E}_{x,\pi}[V_{N-1}^*(x_{N-1}^S, \pi_{N-1}^S)]
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Gleichung die *Turmeigenschaft*, in der zweiten die *Markov-Eigenschaft* bzw. *Ünabhängigkeit* von z_N und in der letzten die *Monotonie* für bedingte Erwartung benutzt haben (vgl. [4]).
Daher gilt mit den gleichen Argumenten für alle $n = 0,\dots,N$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,\pi}[V_n^*(x_n^S, \pi_n^S)] &= \mathbb{E}_{x,\pi}[\mathbb{E}_{x,\pi}[V_n^*(x_n^S, \pi_n^S)]|\ \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}_{x,\pi}[\mathbb{E}_{x,\pi}[V_n^*(x_n^S, \pi_n^S)]] \\
&= \mathbb{E}_{x,\pi}[V_{n-1}(x_{n-1}^S, \pi_{n-1}^S, a_{n-1}, \mu_{n-1})] \\
&\le \mathbb{E}_{x,\pi}[V_{n-1}^*(x_{n-1}^S, \pi_{n-1}^S)].
\end{aligned}$$

Daraus folgt für alle zulässigen Strategien S :

$$\mathbb{E}_{x,\pi}[U(x_N^S)] \le V_0^*(x,\pi).$$

Mit (ii) folgt:

$$\mathbb{E}_{x,\pi}[U(x_N^{S^*})] = V_0^*(x,\pi).$$

□

Wir werden im Folgenden diese Aussagen auf die logarithmische Nutzenfunktion anwenden zumal die multiplikative Struktur der Übergangsfunktion (3.13), (3.14) zu einem additiven Problem führen wird.
Wir definieren zunächst:

$$\begin{aligned}
&g : E \times D(x,\pi) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \\
&g(x,\pi,a,\mu,z) = log\left(\frac{1-\alpha_a(x)+\beta_a(x)\pi}{1+\beta_a(x)\mu}(r+\mu(z-r))\right) \\
&\qquad = \underbrace{log\left(\frac{1-\alpha_a(x)+\beta_a(x)\pi}{1+\beta_a(x)\mu}\right)}_{\le 0} + log\,(r+\mu(z-r))\,.
\end{aligned}$$

Beachte dass der erste Teil von g die TAK (siehe (3.12)) und der Zweite die Wertsteigerung bzw. -verlust der Aktie verkörpern.

Mit dieser Definition von g erhalten wir für eine Kontroll-Strategie $S = (a_n, \mu_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ das Terminal Wealth Problem:

$$\mathbb{E}_{x,\pi}[log(x_N^S)] = log(x) + \mathbb{E}_{x,\pi}[g(x_{n-1}^S, \pi_{n-1}^S, a_{n-1}, \mu_{n-1}, z_n)].$$

Das bedeutet, es muss in jedem Zeitschritt ein optimaler Aktienanteil μ gefunden werden, der den Erwartungswert von g maximiert.
Wir stellen nun dem Logarithmus angepasste Wertefunktionen auf.
Für $(x, \pi) \in E, (a, \mu) \in D(x, \pi)$ sei

$$\vartheta_N^*(x, \pi) = 0$$

und für $n = 0, \ldots, N-1$:

$$\begin{aligned} \vartheta_n(x, \pi, a, \mu) &= \mathbb{E}[g(x, \pi, a, \mu, z_{n+1}) + \vartheta_{n+1}^*(f_x(x, \pi, a, \mu, z_{n+1}), f_\pi(\mu, z_{n+1}))] \\ \vartheta_n^*(x, \pi) &= \sup_{(a,\mu) \in D(x,\pi)} \vartheta_n(x, \pi, a, \mu) \end{aligned} \tag{3.18}$$

und analog für jedes $a \in \{-1, 0, +1\}$:

$$\vartheta_n^a(x, \pi) = \sup_{\mu \in D_a(x,\pi)} \vartheta_n(x, \pi, a, \mu).$$

Korollar 3.10:
Sei $U(x) = log(x)$. Dann gilt für alle $n = 0, \ldots, N-1$:
Für die rekursiven Gleichungen (3.18) existieren Maximierer $\phi_n = (\phi_n^1, \phi_n^2)$ mit $\vartheta_n^*(x, \pi) = \vartheta_n(x, \pi, \phi_n^1(x, \pi), \phi_n^2(x, \pi))$, ϑ_n^* ist von oben halbstetig und beschränkt und die Strategie S^* gegeben durch $(a_n^*, \mu_n^*) = \phi_n(x_n^*, \pi_n^*)$ ist optimal, so dass

$$\mathbb{E}_{x,\pi}[log(x_N^{S^*})] = log(x) + \vartheta_0^*(x, \pi).$$

Beweis:
Wir zeigen per Rückwärtsinduktion, dass für alle $n = 0, \ldots, N$

$$V_n^*(x, \pi) = log(x) + \vartheta_n^*(x, \pi) \text{ gilt.}$$

<u>IA:</u> Für $n = N$ gilt die Aussage offensichtlich nach Definition.

<u>IH:</u> Sei die Aussage wahr für $n + 1 < N$.

<u>IS:</u> $V_n^*(x, \pi)$

$$\begin{aligned} &= \sup_{(a,\mu) \in D(x,\pi)} \mathbb{E}[V_{n+1}^*(f_x(x, \pi, a, \mu, z_{n+1}), f_\pi(\mu, z_{n+1}))] \\ &\overset{IH}{=} \sup_{(a,\mu) \in D(x,\pi)} \mathbb{E}[log(f_x(x, \pi, a, \mu, z_{n+1})) + \vartheta_{n+1}^*(f_x(x, \pi, a, \mu, z_{n+1}), f_\pi(\mu, z_{n+1}))] \\ &= \sup_{(a,\mu) \in D(x,\pi)} \mathbb{E}[log(x) + g(x, \pi, a, \mu, z_{n+1}) + \vartheta_{n+1}^*(f_x(x, \pi, a, \mu, z_{n+1}), f_\pi(\mu, z_{n+1}))] \\ &= log(x) + \vartheta_n^*(x, \pi). \end{aligned}$$

Da für $(x, \pi, a, \mu) \in E \times D(x, \pi)$ gilt, dass $\left(\frac{1-\alpha_a(x)+\beta_a(x)\pi}{1+\beta_a(x)\mu}\right) = 1 - \frac{C(x,\pi,a,\mu)}{x} < 1$, folgt:

$$g(x, \pi, a, \mu, z) \le log(r + \mu(z - r)) \overset{o.E.\ z>r}{\le} log(r + (z - r)) = log(z) < \infty.$$

Damit ist ϑ_n^* von oben beschränkt. Der Rest folgt direkt aus Theorem 3.7.

□

3.3 Anwendung im Ein-Perioden-Modell

Kommen wir nun zur konstruktiven Anwendung der bisherigen Erkenntnisse dieses Kapitels. Sowohl Theorem 3.7 also auch Korollar 3.8 sind für die Praxis lediglich hilfreich, wenn wir die optimalen Aktionen, also die Maximierer bestimmen können. Wir werden das Optimierungsproblem mit kombinierten TAK auf ein Ein-Perioden-Modell beschränken, um genauere Angaben zu den Maximierern und den zugehörigen Handelsregionen machen zu können.

Wie oben angekündigt benutzen wir die logarithmische Nutzenfunktion $U(x) = log(x)$, sowie folgende TAK:

$$C(x, \pi, a, \mu) = a^2\Gamma(x)x + a\gamma\Delta \overset{(3.11)}{=} \frac{a^2\Gamma(x) + a\gamma(\mu - \pi)}{1 + a\gamma\mu}x, \ \Gamma(x) > 0, \ \gamma \in (0, 1).$$

3.3.1 Das Binomialmodell

Beschäftigen wir uns zunächst mit dem Binomialmodell. Wir wollen im folgenden explizite Formeln zur Berechnung der Handelsregionen sowie der optimalen Aktionen, d.h. optimaler Typ des Handelns und optimaler Aktienanteil am Vermögen, berechnen.

Da wir nur eine Periode behandeln, erhalten wir das Terminal Wealth Problem:

$$\begin{aligned}\vartheta(x, \pi, a, \mu) &= \mathbb{E}[g(x, \pi, a, \mu, z)] \\ &= log\left(\frac{1 - a^2\Gamma(x) + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\mu}\right) + \mathbb{E}[log\,(r + \mu(z - r))] \\ &\longrightarrow \max_{(a,\mu)\in\{-1,0,+1\}\times[0,1]}.\end{aligned}$$

Wie in Kapitel 2 definieren wir die Hilfswerte:

$$r_a := (1 + a\gamma)r, \ a \in \{-1, +1\}$$

mit der Annahme

(A1): $r_{+1} < u, \ r_{-1} > d.$

Zusätzlich soll für die Wahrscheinlichkeit eines Wertzuwachses der Aktie gelten:

(A2): $\frac{r_{+1}-d}{u-d} \leq p \leq \frac{(r_{-1}-d)u}{r_{-1}(u-d)}.$

Daraus lässt sich direkt folgern:

Lemma 3.11:

(i) $0 \leq \mathbb{E}[z] - r_a \leq \frac{(u-r_a)(r_a-d)}{r_a}, \ a \in \{-1, +1\}.$

(ii) $(u - r_a)(r_a - d) - a\gamma(\mathbb{E}[z] - r_a)r > 0, \ a \in \{-1, +1\}.$

Schauen wir uns zunächst den Fall an, dass keine TAK anfallen; dann ist $\mathbb{E}[g(x,\pi,a,\mu,z)] = \mathbb{E}[log\,(r+\mu(z-r))]$ über $\mu \in [0,1]$ zu maximieren.
Wir erhalten

$$\hat{\mu} = \frac{(\mathbb{E}[z]-r)r}{(u-r)(r-d)}. \tag{3.19}$$

Entsprechend ist der optimale Typ des Handelns dann gegeben durch $sign(\mu - \pi)$. $\hat{\mu}$ benutzen wir im Folgenden als Vergleichswert; dazu betrachten wir

$$\mu_a^* := \frac{(\mathbb{E}[z]-r_a)r}{(u-r_a)(r_a-d) - a\gamma(\mathbb{E}[z]-r_a)r},\ a \in \{-1,+1\}\,. \tag{3.20}$$

Wir werden zeigen, dass μ_a^* den optimalen Aktienanteil am Vermögen nach dem *Verkaufen* bzw. *Kaufen* darstellt.
Mit Lemma 3.11 gilt nach Definition: $\mu_a^* \in [0,1]$ und $\mu_{+1}^* \le \hat{\mu} \le \mu_{-1}^*$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\gamma = 0$.
Das bedeutet der optimale Aktienanteil am Vermögen nach Transaktion ist -für den Fall dass *Verkaufen* die optimale Entscheidung ist- größer als derjenige falls *Kaufen* optimal ist.

Bemerkung:
Die Menge der möglichen Aktionen können wir hier explizit mit den gegebenen TAK angeben; mit Definition 3.5, (3.10), (3.15) und Definition 3.1(i) ergibt sich:

$$D_{-1}(x,\pi) = [0, min\,\{1, \pi/(1-\Gamma(x))\}] \qquad \text{falls } 1-\Gamma(x)-\gamma\pi > 0. \tag{3.21}$$
$$D_{+1}(x,\pi) = [\pi/(1-\Gamma(x)), 1] \qquad \text{falls } 1-\Gamma(x) > 0. \tag{3.22}$$

Theorem 3.12:
Sei $a \in \{-1,+1\}\,,\ (x,\pi) \in E$ sodass $D_a(x,\pi) \neq \emptyset$. Dann gilt:

(i) μ_a^* ist der eindeutig bestimmte Maximierer von $\vartheta(x,\pi,a,\cdot)$ auf $[0,1]$.

(ii) $\vartheta^a(x,\pi) = \vartheta(x,\pi,a,\mu_a^*)$ falls $\mu_a^* \in D_a(x,\pi)$.

(iii) Falls $\mu_a^* \notin D_a(x,\pi)$, dann gilt für alle $\mu \in D_a(x,\pi):\ \vartheta^0(x,\pi) > \vartheta(x,\pi,a,\mu)$.

Beweis:

(i) Wir leiten ab:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \vartheta(x,\pi,a,\mu) &= \partial_\mu \left[log\left(\frac{1-a^2\Gamma(x)+a\gamma\pi}{1+a\gamma\mu} \right) \right] + \partial_\mu \mathbb{E}\left[log\,(r+\mu(z-r))\right] \\
&= -\frac{a\gamma}{1+a\gamma\mu} + \mathbb{E}\left[\frac{z-r}{r+\mu(z-r)}\right] \\
&= \frac{(\mathbb{E}[z]-r_a)r - ((u-r_a)(r_a-d) - a\gamma(\mathbb{E}[z]-r_a)r)\,\mu}{(1+a\gamma\mu)(r+\mu(u-r))(r+\mu(d-r))} \\
&\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \mu &= \mu_a^*
\end{aligned}$$

Da $\mu \in [0,1]$ ist der Nenner größer Null und mit Lemma 3.11(ii) folgt:

$$\partial_\mu \vartheta(x,\pi,a,\mu) > 0 \Leftrightarrow \mu < \mu_a^* \text{ und } \partial_\mu \vartheta(x,\pi,a,\mu) < 0 \Leftrightarrow \mu > \mu_a^*.$$

Damit ist μ_a^* eideutige Maximalstelle von $\vartheta(x,\pi,a,\mu)$ auf [0.1].

(ii) folgt aus (i) nach Definition von ϑ^a.

(iii) Sei $\mu_{+1}^* \notin D_{+1},\ \mu \in D_{+1}$, dann gilt:

$$0 < 1 - \Gamma(x) < 1 \text{ und } \mu_{+1}^* \leq \pi < \mu.$$

Da nach (i) $\vartheta(x,\pi,+1,\cdot)$ auf $[\mu_{+1}^*, 1]$ streng monoton fallend ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\vartheta(x,\pi,+1,\mu) &< \vartheta(x,\pi,+1,\pi) \\
&= log\left(\frac{1-\Gamma(x)+\gamma\pi}{1+\gamma\pi}\right) + \mathbb{E}[log\,(r+\pi(z-r))] \\
&< \mathbb{E}[log\,(r+\pi(z-r))] \\
&= \vartheta^0(x,\pi).
\end{aligned}$$

Analoges gilt für $a = -1$.

$\square$

Wir haben also ein optimales Verhältnis von Aktien zum Vermögen nach Handeln gefunden. Was wir jedoch nicht wissen, ist in welchen Fällen explizit das jeweilige Handeln (verkaufen, kaufen, keine Transaktion) optimal ist.
Dazu bestimmen wir die jeweiligen Handelsregionen.

Bemerkung:
Theorem 3.12 (iii) sagt aus, dass ein Handel von Aktien ($a = -1$ oder $a = +1$) nur optimal sein kann, wenn $\mu_a^* \in D_a(x,\pi)$; d.h. in dem Fall ist nach (3.21) und (3.22) $\pi \geq \mu_{-1}^*(1-\Gamma(x))$ bzw. $\pi \leq \mu_{+1}^*(1-\Gamma(x))$.
Diese Tatsache motiviert die Festlegung folgender Grenzen für die Handelsregionen:

$$\begin{aligned}
\pi_{-1} &:= \inf\left\{\pi \in [\mu_{-1}^*(1-\Gamma(x)), 1] |\ \vartheta^{-1}(x,\pi) > \vartheta^0(x,\pi)\right\}, \\
\pi_{+1} &:= \sup\left\{\pi \in [0, \mu_{+1}^*(1-\Gamma(x))] |\ \vartheta^{+1}(x,\pi) > \vartheta^0(x,\pi)\right\},
\end{aligned}$$

mit $\inf \emptyset = \infty$ und $\sup \emptyset = -\infty$.
Außerdem sei $H_a(x) := \{\pi \in [0,1] |\ (x,\pi) \in H_a\}$, wobei die Mengen H_a im Beweis von Theorem 3.7 definiert wurden.

Das folgende Theorem leifert die Formeln zur Berechnung der optimalen Aktionen im Ein-Perioden-Binomialmodell mit kombinierten TAK.

Theorem 3.13:
Für alle $x > 0,\ \pi \in [0,1]$ ist eine optimale Aktion gegeben durch:

$$(a^*, \mu^*) = \begin{cases} (-1, \mu^*_{-1}) & \text{falls } \pi \in H_{-1}(x) \\ (+1, \mu^*_{+1}) & \text{falls } \pi \in H_{+1}(x) \\ (0, \pi) & \text{falls } \pi \in H_0(x), \end{cases}$$

wobei

$$H_{-1}(x) = (\pi_{-1}(x), 1],\ H_{+1}(x) = [0, \pi_{+1}(x)),\ H_0(x) = [0,1] \setminus (H_{-1}(x) \cup H_{+1}(x)).$$

Beweis:

a) Sei für $a \in \{-1, +1\}$ die Funktion $h_a : \{\pi \in [0,1] |\ D_a(x,\pi) \neq \emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} h_a(\pi) &= \vartheta(x, \pi, a, \mu^*_a) - \vartheta(x, \pi, 0, \pi) \\ &= log(\frac{1 - \Gamma(x) + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\mu^*_a} + \mathbb{E}[log(r + \mu^*_a(z - r))] - \mathbb{E}[log(r + \pi(z - r))]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow H_a(x) = \{\pi \in [0,1] | D_a(x,\pi) \neq \emptyset,\ h_a(\pi) > 0\}$
(siehe Beweis von Theorem 3.7).
Also gilt für alle $\pi \in H_a(x)$ nach Theorem 3.12 (iii):

$$\pi \geq (1 - \Gamma(x))\mu^*_{-1} \text{ für } a = -1 \text{ bzw. } \pi \leq (1 - \Gamma(x))\mu^*_{+1} \text{ für } a = +1.$$

Nach Definition von $\pi_{-1}(x)$ und $\pi_{+1}(x)$ folgt damit:

$$H_{-1}(x) \subseteq [\pi_{-1}(x), 1] \text{ und } H_{+1}(x) \subseteq [0, \pi_{+1}(x)].$$

Wir leiten nun h_a nach π ab:

$$\begin{aligned} \partial_\pi h_a(\pi) &= \frac{a\gamma}{1 - \Gamma(x) + a\gamma\pi} - \mathbb{E}\left[\frac{z - r}{r + \pi(z - r)}\right] \\ &= \frac{\varsigma_a \pi - ((\mathbb{E}[z] - r_a) - (\mathbb{E}[z] - r)\Gamma(x))\, r}{(1 - \Gamma(x) + a\gamma\pi)(r + \pi(u - r))(r + \pi(d - r))}, \end{aligned}$$

wobei

$$\varsigma_a = (u - r_a)(r_a - d) - a\gamma r(\mathbb{E}[z] - r_a) - (u - r)(r - d)\Gamma(x).$$

Beachte dass der Nenner positiv ist. Daraus folgt:
Falls $\varsigma_a = 0$, so ist das Vorzeichen von $\partial_\pi h_a(\pi)$ konstant.
Falls $\varsigma_a > 0$, so gilt

$$\partial_\pi h_a(\pi) <,=,> 0 \ \Leftrightarrow\ \pi <,=,> \varpi_a. \tag{3.23}$$

Falls $\varsigma_a < 0$, so gilt

$$\partial_\pi h_a(\pi) <,=,> 0 \;\Leftrightarrow\; \pi >,=,< \varpi_a, \tag{3.24}$$

wobei

$$\varpi_a = ((\mathbb{E}[z] - r_a) - (\mathbb{E}[z] - r)\Gamma(x))\, r/\varsigma_a.$$

b) Falls $\pi_{-1}(x) = \infty$ bzw. $\pi_{+1} = -\infty$, so gilt $H_a(x) = \emptyset$. Daher betrachten wir nur den Fall $\pi \in [0,1]$.
Wie im Beweis von Theorem 3.12 (iii) folgt durch die Monotonie von $\vartheta(x,\pi,a,\cdot)$, dass $h_a((1-\Gamma(x))\mu_a^*) < 0$. Da h_a zudem stetig ist, folgt für $\pi_a(x) \in [0,1]$ nach Deinition : $h_a(\pi_a(x)) = 0$ (beachte dass $\Gamma(x) > 0$ vorausgesetzt wurde).

c) Nach Definition gilt $\pi_{-1}(x) \geq (1-\Gamma(x))\mu_{-1}^*$ und $\pi_{+1}(x) \leq (1-\Gamma(x))\mu_{+1}^*$. Nach a) und b) folgt:

$$\partial_\pi h_{+1}(\pi_{+1}(x)) < 0 \text{ und } \partial_\pi h_{-1}(\pi_{-1}(x)) > 0. \tag{3.25}$$

d) Betrachten wir nun

$$\varpi_a = \frac{\text{Zähler}(\mu_a^*) - \Gamma(x)\text{Zähler}(\hat{\mu})}{\text{Nenner}(\mu_a^*) - \Gamma(x)\text{Nenner}(\hat{\mu})}.$$

Mit dieser Darstellung gilt offensichtlich:

$$\varpi_{-1} \leq \mu_{-1}^* \text{ falls } \varsigma_{-1} < 0 \text{ und } \varpi_{-1} \geq \mu_{-1}^* \text{ falls } \varsigma_{-1} > 0$$
$$\varpi_{+1} \leq \mu_{+1}^* \text{ falls } \varsigma_{+1} > 0 \text{ und } \varpi_{+1} \geq \mu_{+1}^* \text{ falls } \varsigma_{+1} < 0.$$

e) Sei $\varsigma_a < 0$.
Für $a = -1$ gilt:

$$\varpi_{-1} \overset{d)}{\leq} \mu_{-1}^* \overset{(3.24)}{\Rightarrow} \forall \pi > \mu_{-1}^* : \partial_\pi h_{-1}(\pi) < 0 \Rightarrow H_{-1}(x) = \emptyset.$$

Für $a = +1$ gilt:

$$\varpi_{+1} \overset{d)}{\geq} \mu_{+1}^* \overset{(3.24)}{\Rightarrow} \forall \pi < \mu_{+1}^* : \partial_\pi h_{-1}(\pi) > 0 \Rightarrow H_{+1}(x) = \emptyset.$$

Sei $\varsigma_a > 0$.
Für $a = +1$ gilt mit d): $\varpi_{+1}(x) \leq \mu_{+1}^*$. Falls $\pi_{+1}(x) > -\infty$, so folgt mit (3.23) und (3.25) für alle $\pi \leq \pi_{+1}(x)$: $\partial_\pi h_{+1}(\pi) < 0$ und somit $H_{+1} = [0, \pi_{+1}(x))$.
Analog folgt für $a = -1$: $H_{-1}(x) = (\pi_{-1}(x), 1]$, jedoch nur falls $\Gamma(x) < 1-\gamma$.
Denn andernfalls ist die Definitionsmenge von h_{-1} lediglich $[0, (1-\Gamma(x))/\gamma]$, also $\pi < 1$. Dann $h_{-1}(\pi) \to -\infty$ für $\pi \to (1-\Gamma(x))/\gamma$.
Dann existiert $\epsilon > 0$ sodass für alle $\pi \in [(1-\Gamma(x))/\gamma - \epsilon, (1-\Gamma(x))/\gamma]$:

$$\partial_\pi h_{-1}(\pi) < 0.$$

Mit (3.23) folgt $\varpi_{-1} \geq (1-\Gamma(x))/\gamma$ und somit $\partial_\pi h_{-1}(\pi) < 0$ für alle π in der Definitionsmenge von h_{-1}. Daraus folgt mit (3.25):

$$H_{-1}(x) = \emptyset.$$

Sei $\varsigma_a = 0$.
Mit a) und den vorangegangenen Ausführungen folgt direkt
$H_{+1}(x) = [0, \pi_{+1}(x))$ sowie $H_{-1}(x) = [\pi_{-1}(x), 1)$ falls $\Gamma(x) < 1 - \gamma$ und $H_{-1}(x) = \emptyset$ falls $\Gamma(x) \geq 1 - \gamma$.

□

Proposition 3.14:
Sei $x > 0,\ \pi \in [0, 1]$. Sei $\Gamma(x) = 0$, dann folgt

$$\pi_{-1}(x) = \mu^*_{-1} \text{ und } \pi_{+1}(x) = \mu^*_{+1}.$$

Beweis:
Wir benutzen die Notationen aus dem vorigen Beweis. Sei $\Gamma(x) = 0$. Dann ist $\varpi_a = \mu^*_a,\ \varsigma_a > 0$ nach Lemma 3.11 und $h_a(\mu^*_a) = 0$. Damit folgt aus (3.23) für alle $\pi \in (\mu^*_{-1}, 1] : h_{-1}(\pi) > 0$, sodass $\pi_{-1}(x) = \mu^*_{-1} = \varpi_{-1}$. Analog folgt $\pi_{+1}(x) = \mu^*_{+1}$.

□

Letztlich schauen wir uns noch (ohne Beweis) die Grenzen für die TAK $\Gamma(x)$ an, für die die Handelsregionen $H_{-1}(x)$ und $H_{+1}(x)$ nicht-leer sind. Eine aufwendige Berechnung führt zu folgender Erkenntnis:

$$H_a(x) = \emptyset \ \Leftrightarrow\ \Gamma(x) \geq G_a,\ a \in \{-1, +1\},\ \text{wobei}$$

$$\begin{aligned} G_{-1} &= (1-\gamma)\left(1 - \left(\frac{(r_{-1}-d)u}{r_{-1}(u-d)p}\right)^p \left(\frac{d(u-r_{-1})}{r_{-1}(u-d)(1-p)}\right)^{1-p}\right), \\ G_{+1} &= 1 - \left(\frac{r_{+1}-d}{(u-d)p}\right)^p \left(\frac{u-r_{+1}}{(u-d)(1-p)}\right)^{1-p}. \end{aligned}$$

Beispiele 3.15:

(a) Betrachten wir ein Beispiel mit fixen plus proportionalen TAK. Dazu benutzen wir folgende Werte:

$$r = 1.05,\ \ u = 1.26,\ \ d = 0.8,\ \ p = 0.59,\ \ \gamma = 0.003,\ \ \Gamma(x) = 10/x.$$

Bei jedem Transfer sollen also fixe Kosten von 10 Euro zusätzlich zu den proportionalen TAK bezahlt werden. Es ist bereits zu vermuten, dass dies ein recht hoher Betrag ist, sodass ein entsprechendes Vermögen vorhanden sein muss, damit ein Handel sinnvoll ist. Mit den benutzten Werten ergeben sich folgende Grenzen:

$$G_{-1} = 0.00665 \text{ und } G_{+1} = 0.00320.$$

Daraus folgt: Ab einem Vermögen von 3125 Euro sind die Kaufs- bzw. Verkaufsregion nicht-leer.

Wir erhalten optimale Aktienanteile am Vermögen nach Abzug von TAK, die nach Definition unabhängig von π und x sind:

$$\mu_{-1}^* = 0.48920 \text{ und } \mu_{+1}^* = 0.36635.$$

Abbildung 4 zeigt die Veränderung der Handelsregionen in Abhängigkeit des Vermögens x zwischen 4000 und 450000 Euro und dem Aktienanteil π. Kongruent mit Proposition 3.14 sehen wir, dass sich mit steigendem x die Grenzen $\pi_{-1}(x)$ und $\pi_{+1}(x)$ den Werten μ_{-1}^* bzw. μ_{+1}^* annähern.

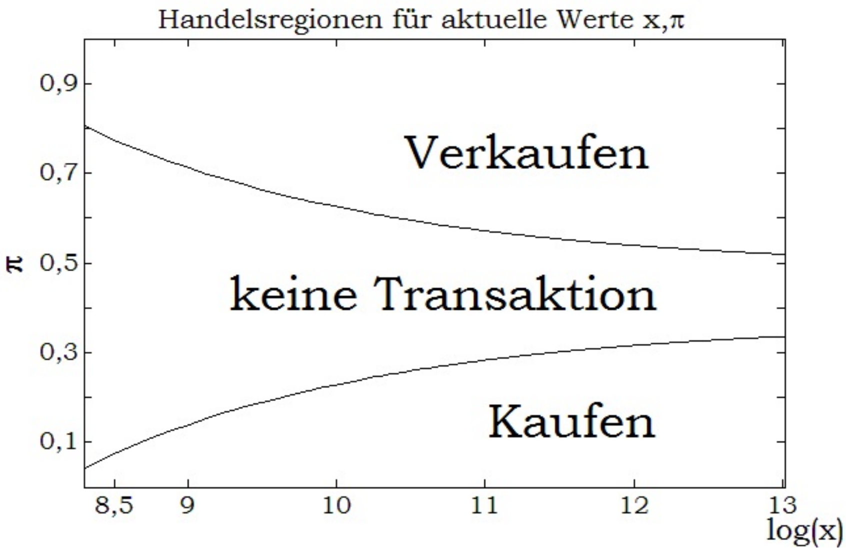

Abbildung 4: Handelsregionen in Beispiel (a).

(b) Wählen wir nun $\Gamma(x) = \delta \in (0, 1)$ konstant. Das bedeutet bei jeder Transaktion wird ein proportionaler Anteil vom Vermögen abgegeben. Das Optimierungsproblem wird somit zu

$$= log\left(\frac{1 - a^2\delta + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\mu}\right) + \mathbb{E}[log\,(r + \mu(z - r))]$$
$$\longrightarrow \max_{(a,\mu)\in\{-1,0,+1\}\times[0,1]}.$$

Wir sehen dass weder die Ertragsfunktion g noch die Wertefunktionen ϑ von x abhängig sind; demzufolge ebensowenig die Grenzen für die Handelsregionen π_{-1} und π_{+1}.
Mit den Werten aus Beispiel a) und $\delta = 0.0001$ erhalten wir

$$\pi_{-1} = 0.5528 \text{ und } \pi_{+1} = 0.3020.$$

3.3.2 Das Trinomialmodell

Auf Grundlage der Arbeit aus 3.3.1 möchten wir zum Schluss der Arbeit die gewonnen Ergebnisse auf das bereits in Kapitel 2 behandelte Trinomialmodell ausweiten.

Zu diesem Zweck verzichten wir auf eine detaillierte Vorgehensweise mit formalen Beweisen der Behauptungen, da diese nur sehr erschwert und umfangreich zu zeigen sind, jedoch nach demselben Schema erfolgen. Durch die analoge Vorgehensweise bei der Berechnung der optimalen Aktionen bleiben die Definitionen der Grenzen $\pi_-(x)$ und $\pi_+(x)$ gegenüber dem Binomialmodell unverändert. Lediglich die optimalen Aktienanteile verändern sich, deswegen setzen wir direkt bei der Berechnung des Maximierers μ_a^* von $\vartheta(x, \pi, a, \mu)$ an.
Dazu leiten wir ab:

$$\partial_\mu \vartheta(x, \pi, a, \mu) = -\frac{a\gamma}{1 + a\gamma\mu} + \mathbb{E}\left[\frac{z - r}{r + \mu(z - r)}\right] \stackrel{!}{=} 0$$

Nach längerer und aufwendiger Rechnung folgt schließlich: $\mu^2 A_a + \mu B_a + C_a = 0$, wobei

$$\begin{aligned}
C_a &= r^2(\mathbb{E}[z] - r_a) \\
B_a &= r(r_a(2r - u - d - m) + r\mathbb{E}[z](a\gamma - 1) + p_1 u(d + m) + p_2 d(u + m) + p_3 m(u + d)) \\
A_a &= (u - r_a)(m - r_a)(d - r_a) + a\gamma B_a - (a\gamma)^2 C_a.
\end{aligned}$$

Damit folgt per A-B-C-Formel:

$$\mu_a^* = \frac{-B_a - \sqrt{B_a^2 - 4A_a C_a}}{2A_a}.$$

Beachte dass hier die zweite Lösung der Formel aufgrund der Bedingung
$\mu_a^* \in (0, 1)$ ausgeschlossen wurde.

Wie im Binomialmodell können wir für eine Kombination aus fixen und proportionalen TAK, mithilfe von Beispielswerten für

$$r,\ u,\ d,\ m,\ p1,\ p2,\ \gamma,\ \text{und } \Gamma(x),$$

die optimalen Aktienanteile sowie die Handelsregionen in Abhängigkeit des Vermögens darstellen: Das Ergebnis sieht von der Form genauso aus wie in Abbildung 4.

An dieser Stelle wollen wir jedoch noch einmal näher auf eine Kombination aus konstanten und proportionalen Kosten wie in Beispiel 3.15 (b) eingehen. Wie oben erwähnt hängen die relevanten Werte in diesem Modell nicht vom Vermögen x ab. Diese Besonderheit wollen wir nutzen, um die Ergebnisse in Abhängigkeit des Planungshorizonts N explizit darzustellen.
Zur Erinnerung: Optimale Werte berechnen wir mit Hilfe des Terminal Wealth Problems; so geschehen in den bisherigen Beispielen, allerdings lediglich für den Planungshorizont einer Periode. Für $N > 1$ müssen wir die rekursiven Gleichungen (3.18) lösen. Das können wir mittels des in Kapitel 1 vorgestellten Backward Induction Algorithmus erreichen:
Wir beginnen bei der letzten Periode, d.h. wir berechnen die Wertefunktion (die unabhängig von x ist):

$$\vartheta_{N-1}^*(\pi_{N-1}) = \sup_{(a_{N-1}, \mu_{N-1}) \in D(x, \pi_{N-1})} \mathbb{E}[g(\pi_{N-1}, a_{N-1}, \mu_{N-1}, z_N)].$$

Die Maximierung läuft in diesem Schritt analog zum Beispiel im Binomialmodell. Wir erhalten explizite Werte zwar für die Maximierer und Grenzen der Handelsregionen, allerdings nicht für die jeweiligen Wertefunktionen ϑ^a. Die hängen nämlich vom aktuellen Aktienanteil am Vermögen π_{N-1} ab. Spätestens beim Berechnen der Werte für $N-2$ sehen wir dann, dass dadurch eine explizite Berechnung unmöglich wird. Dementsprechend definieren wir uns (vgl. [2])

$$w^a(0) := 0,\ w^a(n) := \vartheta^a_{N-n}(\pi_{N-n}) - log(1 - a^2\delta + a\gamma\pi_{N-2}),\ n = 1, \dots, N-1.$$

Per Induktionsbeweis folgt, dass

$$w^a(n),\ a \in \{-1, +1\} \text{ für alle } n = 0, \dots, N-1 \text{ unabhängig von } \pi \text{ ist.}$$

Achtung: Das a bezieht sich immer auf den jeweiligen Zeitschritt!

IA: $w^a(1) = \mathbb{E}[-log(1 + a\gamma\mu^a_{N-1}) + log(r + \mu^a_{N-1}(z_N - r))]$ ist unabh. von π.

IS: $w^a(n+1)$

$$= \mathbb{E}[\underbrace{-log(1 + a\gamma\mu^a_{N-(n+1)}) + log(r + \mu^a_{N-(n+1)}(z_{N-n} - r))}_{(\star)} + V^*_{N-n}(f_\pi(\mu^a_{N-(n+1)}, z_{N-n}))]$$

$$= \begin{cases} \mathbb{E}[(\star) + \mathbb{E}[w^a(n) + log(1 - a^2\delta + a\gamma\frac{\mu^a_{N-(n+1)}z_{N-n}}{r+\mu^a_{N-(n+1)}(z_{N-n}-r)})]] & \text{falls } a \neq 0 \\ \mathbb{E}[(\star) + \mathbb{E}[log(r + \frac{\mu^a_{N-(n+1)}z_{N-n}}{r+\mu^a_{N-(n+1)}(z_{N-n}-r)}(z_{N-n} - r))]] & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

ist nach Induktionshypothese auch unabhängig von π.

Nun können wir Schritt für Schritt, also für $n = 0, \dots, N-1$, $w^a(n),\ a \in \{-1, +1\}$ ausrechnen und erhalten somit von π unabhängige Maximierer sowie Grenzen für die Handelsregionen.
Für $n = 2$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned} w^a(2) = \mathbb{E}[&- log(1 + a\gamma\mu^*_a) + log(r + \mu^*_a(z_{N-1} - r)) \\ &+ log(1 + a^*_{(N-1)}\gamma f_\pi(\mu^*_a, z_{N-1})) + w^{a_{(N-1)}}(1)]. \end{aligned}$$

Angenommen wir haben vorher $w^a(1)$ berechnet, dann muss hier geprüft werden, für welches $a_{(N-1)} \in \{-1, 0, +1\}$ $w^a(2),\ a \in \{-1, +1\}$ maximal ist.
Wie gesagt erhalten wir nur explizite Werte für $a \neq 0$.
ϑ^0_{N-2} hängt weiterhin von π und der Wahl von $a_{(N-1)}$ ab; somit existieren 3 mögliche Werte in diesem Zeitschritt. Das ist aber nur für die Berechnung der Handelsregionen-Grenzen relevant:
Ist z.B. ϑ^{-1}_{N-2} für $a_{(N-1)} = +1$ maximal, so wird bei der Berechnung von

$$\pi_{-1} := \inf\Big\{\pi \in [\mu^*_{-1}(1 - \Gamma(x)), 1]|\ \vartheta^{-1}_{N-2}(\pi) > \vartheta^0_{N-2}(\pi)\Big\}$$

entsprechend ϑ^0_{N-2} ebenso für $a_{(N-1)} = +1$ betrachtet.

Für $N = 1$ und $N = 2$ bekommen wir folgende Werte:

N	μ^*_{+1}	μ^*_{-1}	π_{+1}	π_{-1}	w^{+1}	w^{-1}
1	0.431643	0.536969	0.366494	0.601608	0.038753	0.041175
2	0.378983	0.588449	0.301397	0.623600	0.078770	0.081301

Hier wurden

$$u = 1.26,\ d = 0.78,\ m = 0.9,\ r = 1.03,\ p1 = 0.54,\ p2 = 0.3,\ \gamma = 0.0025,\ \delta = 0.0001$$

gewählt.
Wir sehen, dass die optimale Entscheidung zu Beginn, also in $n = 0$, bereits stark dadurch beeinflusst wird, dass das System eine Periode länger betrachtet wird. Logischerweise erhöhen sich die Werte für $w^a(n)$ für steigendes n, da w^a den erwarteten Gesamtnutzen wiederspiegelt.

4 Fazit

Was haben wir erreicht? Welche Schlüsse können wir aus der Arbeit ziehen?
Auf Grundlage Markovscher Entscheidungstheorie wurde der Einfluss von Transaktionskosten in der finanzmathematischen Optimierung untersucht. Es wurden zunächst proportionale Kosten betrachtet. Darauffolgend wurde das Modell auf kombinierte Formen erweitert.
Wir haben gesehen, dass optimale Strategien auf einem -an bestimmte Bedingungen gebundenen- Finanzmarkt existieren. Teilweise und zumindest für Anwendungsbeispiele konnten Formeln zur Berechnung aller relevanten Werte geliefert werden, sodass die Ergebnisse produktiv anwendbar sind.
Es ist zu beachten dass Modelle in diskreter Zeit untersucht worden sind, was grundsätzlich nicht den realistischen Zustand wiederspiegelt; allerdings dienen diskrete Modelle immer als eine Art Veranschaulichung und Grundlage eines finanzmathematischen Problems, sodass auch hier auf den Ergebnissen im Hinblick auf zeitstetige Modelle aufgebaut werden kann.

Literaturverzeichnis

Material:

[1] Bäuerle N., Rieder U. (2011): Markov Decision Processes with Applications to Finance (Universitext). Berlin, Heidelberg: Springer.

[2] Sass J. (2005): Portfolio optimization under transaction costs in the CRR model. In: Mathematical Methods of Operations Research Vol. 61, Nr. 2, S.239-259. Berlin, Heidelberg: Springer.

Begleitende Literatur:

[3] Bertsekas D.P., Shreve S.E. (1978): Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case. New York: Academic Press.

[4] Klenke A. (2008): Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin, Heidelberg: Springer.

[5] Föllmer H., Schied A. (2004): Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time. Berlin: de Gruyter

Plagiatserklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über „Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung von Transaktionskosten“ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommenen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

____

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

____

(Datum, Unterschrift)